

- 2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
 - 3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
- 4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
 - 5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
 - 6. p -Adična i adelična kosmologija
- 7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
 - 8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
 - 9. Zaključak

Oscilatori standardnog i invertovanog tipa u kosmologiji

Darko Radovančević

Tehnički fakultet "Mihajlo Pupin" Zrenjanin

12. maj 2026. godine

Ciklus seminara iz fizike: Od kvarkova do galaksija
Departman za fiziku, Prirodno-matemtički fakultet, Novi Sad

- 2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
- 3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
- 4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
- 5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
- 6. p -Adična i adelična kosmologija
- 7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
- 8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
- 9. Zaključak

Dr Ljubiša Nešić, redovni profesor

i

Dr Goran Đorđević, redovni profesor

Prirodno-matematički fakultet, Niš

Dr Branko Dragović, naučni savetnik

Institut za fiziku, Beograd

Sadržaj

1 Uvod

2 Elementi p -adične i adelične matematičke analize

3 p -Adična i adelična kvantna mehanika

4 Standardna klasična i kvantna kosmologija

5 Minisuperprostorni kosmološki modeli

6 p -Adična i adelična kosmologija

7 Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

8 Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

9 Zaključak

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
6. p -Adična i adelična kosmologija
7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
9. Zaključak

1. Uvod

Klasični LHO - standardni

- Čestica koja vrši linearno harmonijsko oscilovanje naziva se **linearni harmonijski oscilator (LHO)**. Neka je LHO čestica mase m koja harmonijski osciluje duž x -ose. Ukoliko na česticu ne deluju druge sile osim restitucione $\vec{F} = -k\vec{r}$, čija je projekcija na x -osu $F_x = -kx$, diferencijalna jednačina njenog kretanja, tzv. **(prostog) harmonijskog oscilovanja**, glasi

$$m\ddot{x} = -kx, \quad \text{odn.} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{gde je} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

gde je ω **ugaona (kružna, radijalna) frekvenca**.

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
6. p -Adična i adelična kosmologija
7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
9. Zaključak

1. Uvod

- ▶ Prethodna jednačina - **homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima** čije se opšte rešenje može napisati u obliku

$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

gde je x_0 amplituda, $\omega t + \varphi$ faza oscilovanja u trenutku t i φ početna faza.

- 2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
- 3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
- 4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
- 5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
- 6. p -Adična i adelična kosmologija
- 7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
- 8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
- 9. Zaključak

1. Uvod

- ▶ Projekcija brzine na pravac kretanja

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\omega x_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

- ▶ Projekcija ubrzanja na pravac kretanja

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x.$$

- ▶ Projekcija restitutione sile na pravac kretanja

$$F_x = ma_x = -m\omega^2 x = -m\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \varphi),$$

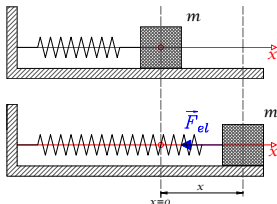
2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
6. p -Adična i adelična kosmologija
7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
9. Zaključak

1. Uvod

- Ukupna mehanička energija LHO (energija oscilovanja)

$$E_m = E_k + E_p = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 = \text{const.}$$

E_m ima **kontunualan spektar mogućih vrednosti**.



- 2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
- 3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
- 4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
- 5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
- 6. p -Adična i adelična kosmologija
- 7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
- 8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
- 9. Zaključak

1. Uvod

- U Lagranževom (analitičkom) formalizmu dinamika sistema je opisana **Lagranževom funkcijom** $L = T - U$, koja je za LHO:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Za ekstremalu funkcionele $S = \int_{t_0}^{t_1} L dt$ (**Hamiltonovo dejstvo**), odnosno iz **principa najmanjeg dejstva** $\delta S = 0$ je

Ojler-Lagranževa jednačina:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \xrightarrow{\text{LHQ}} \quad \ddot{x} + \omega^2 x = 0.$$

- 2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
- 3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
- 4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
- 5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
- 6. p -Adična i adelična kosmologija
- 7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
- 8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
- 9. Zaključak

1. Uvod

Klasični invertovani oscilator (obrnuti, repulzivni, inverzni, anti-Hukov)

- Lagranževa funkcija invertovanog oscilatora:

$$L = T - U = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Ojler-Lagranževa jednačina

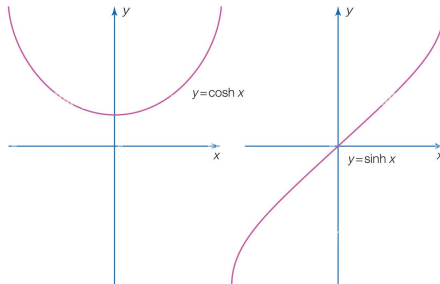
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{x} - \omega^2 x = 0,$$

ima **hiperboličko rešenje** $x(t) = x_0 \cosh(\omega t + \varphi)$.

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
6. p -Adična i adelična kosmologija
7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
9. Zaključak

1. Uvod

- ▶ Primetimo da za $t \rightarrow \infty$ sledi da je $x \sim e^{\omega t}$.
- ▶ Energija: $E_m = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 = -\frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 = \text{const.}$



2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
6. p -Adična i adelična kosmologija
7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
9. Zaključak

1. Uvod

Kvantni LHO - standardni

- ▶ Kvantizacija:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \quad \rightarrow \quad \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2.$$

- ▶ Šredingerova jednačina:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle = \hat{H} |\Psi(t)\rangle.$$

- ▶ Za LHO u koordinatnoj reprezentaciji:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \right] \Psi(x, t)$$

- 2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
- 3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
- 4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
- 5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
- 6. p -Adična i adelična kosmologija
- 7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
- 8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
- 9. Zaključak

1. Uvod

Rešenje: $\Psi(x, t) = \psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar} \rightarrow \hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x).$

Dobija se da je: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi_n}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi_n = E_n\psi_n.$

Stanja: $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$ gde je $\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x,$

$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}$ - Hermitovi polinomi.

Energijski spektar - **diskretan**: $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
6. p -Adična i adelična kosmologija
7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
9. Zaključak

1. Uvod

Kvantni invertovani oscilator

- ▶ Kvantizacija: $H = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \rightarrow \hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} - \frac{1}{2}m\omega^2 \hat{x}^2$.
- ▶ Šredingerova jednačina: $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \psi = E\psi$.

Potencijal je odbojan, nema vezanih stanja $\rightarrow$ **energija je kontinualna**. Rešenja se pišu pomoću paraboličnih cilindričnih funkcija $D_\nu(z)$:

$$\psi_E(x) \sim D_{-1/2+iE/(\hbar\omega)} \left(e^{i\pi/4} \sqrt{2m\omega/\hbar} x \right)$$

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
6. p -Adična i adelična kosmologija
7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
9. Zaključak

1. Uvod

Harmonijski vs invertovani oscilator u fizici

Klasični harmonijski oscilator Stabilna ravnoteža  → opruge, klatna...talasi... RLC kola crno telo kvantizacija ▼	Klasični invertovani oscilator Nestabilna ravnoteža  promena znaka potencijala invertovano klatno nestabilni sistemi teorija haosa... kvantizacija ▼
Kvantni harmonijski oscilator Diskretan spektar  → fononi, fotoni... vibracije molekula kvantizacija polja	Kvantni invertovani oscilator Kontinualan spektar  tunelovanje, rasejanja... metastabilna stanja kosmologija

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
6. p -Adična i adelična kosmologija
7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
9. Zaključak

1. Uvod

Oscilatori u kosmologiji

- ▶ Razmatra se posebna grupa **minisuperprostornih kosmoloških modela**, čiji se lagranžijani mogu svesti na lagranžijane standardnih ili invertovanih oscilatora.
- ▶ Dinamika ovih modela se proučava u okviru **klasičnog, p -adičnog i nekomutativnog pristupa**.
- ▶ Ovde će biti **akcenat na klasičnom i p -adičnom okviru**.

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
6. p -Adična i adelična kosmologija
7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
9. Zaključak

1. Uvod

Specijalno je prezentovana:

- ▶ **dinamika unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe** kao dinamika jednog difeomornog vakumskog Kantovski-Saks kosmološkog modela koji se može svesti na model dva standardna nespregnuta oscilatora → **temperatura i entropija crne rupe**,
- ▶ **dinamika kasne faze evolucije ravnog Fridmanovog modela Univerzuma** koja se može svesti na dinamiku invertovanog oscilatora → p -adika daje **diskretan spektar mogućih vrednosti kosmološke konstante**.

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
6. p -Adična i adelična kosmologija
7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
9. Zaključak

1. Uvod

Motivacija:

- ▶ GTR predviđa postojanje inicijalnog/kosmološkog singulariteta i lokalnih singulariteta (BH) čije proučavanje zahteva kvantni pristup. U odsustvu kompletne QTG **razmatraju se, između ostalog, klasične i kvantne verzije kosmoloških modela.**
- ▶ Problemi merenja u QTG ukazuju na moguću nearhimedovu, nekomutativnu i **diskretnu strukturu prostor-vremena na Plankovoj skali**, što na eksplicitan ili implicitan način ukazuje **p -adični i nekomutativni pristup.**

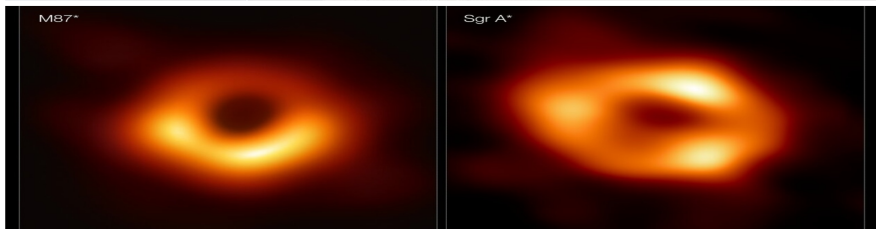
2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
6. p -Adična i adelična kosmologija
7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
9. Zaključak

1. Uvod

- ▶ Proučavanje ovih modela, pored boljeg razumevanja evolucije univerzuma i dinamike crnih rupa, pruža i mogućnost izvodjenja važnih zaključaka u oblasti kvantne gravitacije.
- ▶ Podstrek - **detekcija gravitacionih talasa** emitovanih u procesu spajanja dve crne rupe (LIGO eksperiment, 2015/2016. godine), što je bila ne samo dugoočekivana potvrda predviđanja GTR o njihovom postojanju već ujedno i **potvrda o postojanju crnih rupa** - čiji prvi snimci su usledili već nekoliko godina kasnije (Kolaboracija EHT je 2019. godine objavila slike supermasivne crne rupe u centru galaksije M87, a 2022. sliku crne rupe Sgr A*, u centru Mlečnog puta).

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
6. p -Adična i adelična kosmologija
7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
9. Zaključak

1. Uvod



2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

6. p -Adična i adelična kosmologija

7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

9. Zaključak

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize

Poreklo p -adične i adelične matematičke fizike

- ▶ 1897. do 1950-ih: Osnove p -adičnih brojeva i analize: Kurt W.S. Hensel (1897), Helmut Hasse, Emil Artin, André Weil...
- ▶ Kraj 1980-ih do 1990-ih: p -adična kvantna mehanika: Igor Volovich (1987 – Volovićeve hipoteze), Vasily S. Vladimirov, Evgeny I. Zelenov
- ▶ 1950-ih do 1970-ih: Adelična analiza (teorija brojeva): André Weil, John T. Tate, Kenkichi Iwasawa, Israel M. Gel'fand

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

6. p -Adična i adelična kosmologija

7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

9. Zaključak

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize

Poreklo p -adične i adelične matematičke fizike

- ▶ 1990-ih do danas: Adelična kvantna mehanika: Branko Dragović, Igor Volovich, Vasily S. Vladimirov, Zoran Rakić
- ▶ 2000-ih do danas: p -adična i adelična kosmologija: Branko Dragović, Igor Volovich, Goran S. Đorđević, Ljubiša Nesić, Zoran Rakić, Dragoljub Dimitrijević, Darko Radovančević

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

6. p -Adična i adelična kosmologija

7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

9. Zaključak

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize

▶ $\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$, korišćenjem apsolutne vrednosti $|\cdot| = |\cdot|_\infty$,

▶ p prost broj. $x = p^\gamma \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $|x|_p = p^{-\gamma}$.

$\mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_p$, korišćenjem p -adične norme $|\cdot|_p$.

▶ Ostrovski: U polju $\mathbb{Q}$ standardna norma $|\cdot|$ i p -adična norma $|\cdot|_p$ su jedine dve netrivialne i neekvivalentne norme.

▶ Elementi polja $\mathbb{Q}_p$ su p -adični brojevi, u kanonskom obliku:

$$x = p^\gamma (x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \dots),$$

gde su $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ i x_i su celi brojevi takvi da je $0 \leq x_i \leq p-1$ i $x_0 > 0$ ($i = 0, 1, 2, \dots$).

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

6. p -Adična i adelična kosmologija

7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

9. Zaključak

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize

- ▶ U polju $\mathbb{R}$ važi **Arhimedov stav**: za svaka dva broja x i y iz $\mathbb{R}$, takva da je $x < y$, postoji prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ takav da je $|nx| > y$. Drugim rečima, u polju $\mathbb{R}$ uzimajući dovoljan broj puta ma koji broj može se dobiti broj koji je veći od bilo kog drugog realnog broja. Ova činjenica je zapravo osnova svakog fizičkog merenja. Zato se za standardnu normu $|\cdot|_\infty$ i za polje $\mathbb{R}$ kaže da su arhimedovski.
- ▶ Norma p -adičnog broja $x \in \mathbb{Q}_p$, $|x|_p = p^{-\gamma}$, zadovoljava:
 - (običnu) nejednakost trougla: $|x + y|_p \leq |x|_p + |y|_p$, ali i
 - **jaku nejednakost trougla**: $|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$.

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

6. p -Adična i adelična kosmologija

7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

9. Zaključak

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize

- ▶ Posledica ovoga je da **p -adična norma ne zadovoljava Arhimedov stav**. Konkretno za nju važi da je $|nx|_p \leq |x|_p$ za svaki prirodan broj n . Zbog toga se za p -adičnu normu i za polje $\mathbb{Q}_p$ kaže da su **nearhimedovski**.
- ▶ **Metrika** na polju $\mathbb{Q}_p$, definisana kao $d_p(x, y) = |x - y|_p$ je **nearhimedovska**: $d_p(x, y) \leq \max[d_p(x, z), d_p(z, y)]$.
- ▶ Par $(\mathbb{Q}_p, d_p)$ predstavlja **lokalno kompaktan, kompletan i separabilan** metrički prostor. U ovom metričkom prostoru **p -adični krug** (odnosno lopta, zavisno od dimenzionalnosti) $B_\gamma(a)$, sa centrom u tački a i radijusom p^γ je skup

$$B_\gamma(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq p^\gamma, \gamma \in \mathbb{Z}\}.$$

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

6. p -Adična i adelična kosmologija

7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

9. Zaključak

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize

- ▶ Jaka nejednakost trougla ima kao posledicu niz "egzotičnih" osobina p -adičnog prostora, koje se dosta razlikuju od onih u realnom slučaju ($\mathbb{R}, d = |x - y|_\infty$).
- ▶ Na primer, ako je $b \in B_\gamma(a)$, tada je $B_\gamma(a) = B_\gamma(b)$, odnosno **svaka tačka kruga je njegov centar**. Osobine p -adičnih lopti podsećaju na ponašanje kapi žive.
- ▶ Svaka lopta u p -adičnom prostoru istovremeno otvorena i zatvorena, što dovodi do toga da je on istovremeno i **totalno nepovezan**. Razviti "dobru" kvantnu teoriju nad ovakvim prostorom predstavlja ozbiljan zadatak i veliki izazov.

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

6. p -Adična i adelična kosmologija

7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

9. Zaključak

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize

Fizička relevantnost razmatranja polja $\mathbb{Q}_p$?

- ▶ Jedan od rezultata kvantne gravitacije je činjenica da je na plankijanskim rastojanjima greška merenja reda veličine Plankove dužine, $l_p = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,62 \times 10^{-35} \text{ m}$.
- ▶ Ovo ukazuje da u kvantnoj gravitaciji ne postoji dovoljno dobar etalon za merenje dužine.
- ▶ Prostor nema više uobičajenu klasičnu arhimedovsku strukturu.

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

6. p -Adična i adelična kosmologija

7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

9. Zaključak

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize

Hipoteze Volovića iz 1987. godine:

- ▶ Geometrija prostor-vremena na Plankovoj skali, iz pomenutih razloga, ne može zasnivati na polju realnih brojeva $\mathbb{R}$ već upravo na (nearhimedovskom) polju p -adičnih brojeva $\mathbb{Q}_p$.
- ▶ Moguće kvantne fluktuacije na Plankovoj skali $\rightarrow$ Geometrija nad poljem $\mathbb{R}$ se realizuje sa određenom verovatnoćom i na ovim rastojanjima (a svakako na "nekvantnim", tj. klasičnim) $\rightarrow$ Volović u drugoj hipotezi iznosi zahtev nepromenljivosti forme fizičkih zakona u odnosu na promenu polja brojeva $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}_p$.

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

6. p -Adična i adelična kosmologija

7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

9. Zaključak

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize

- ▶ Radimo sa p -adičnim funkcijama p -adičnog argumenta, $f : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$.
- ▶ p -Adično diferenciranje, p -adična integracija...
- ▶ Od posebnog interesa su neke kompleksne funkcije p -adičnog argumenta: χ_p , π , λ_p .

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

6. p -Adična i adelična kosmologija

7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

9. Zaključak

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize

Adeli

- ▶ Kosmološki modeli generalno se mogu razmatrati nad oba polja $\mathbb{R}$ i $\mathbb{Q}_p$.
- ▶ Pitanje: kako da rezultate koji se dobijaju u p -adičnom slučaju interpretiramo u okviru p -adične teorije i uopšte kako da ih povežemo sa rezultatima dobijenim u standardnom, realnom, pristupu?
- ▶ Važnu ulogu u tom smislu ima tzv. adelična analiza, odnosno analiza zasnovana na adelima koje je u matematiku prvi uveo francuski matematičar Klod Ševale (1909-1984).

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

6. p -Adična i adelična kosmologija

7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

9. Zaključak

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize

- Pod adelom a se podrazumeva beskonačni niz brojeva oblika:

$$a = (a_\infty, a_2, a_3, \dots, a_p, \dots),$$

gde je $a_\infty \in \mathbb{R}$ realan broj, dok je $a_p \in \mathbb{Q}_p$ i pri čemu važi da je $a_p \in \mathbb{Z}_p$ za sve osim za konačno mnogo prostih brojeva p .

- Skup svih adela $\mathcal{A}$ ima strukturu prstena u odnosu na operacije sabiranja i množenja adela.

3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

Standardna QM/kanonski, Dirakov, formalizam

- ▶ Hilbertov prostor $\mathcal{H}$ je prostor stanja $|\psi\rangle$
- ▶ U koordinatnoj reprezentaciji stanja su (talasne) po modulu kvadratno integrabilne funkcije $\psi : \mathbb{Q}_\infty \rightarrow \mathbb{C}$ iz $L_2^{(x)}(\mathbb{R})$
- ▶ Zakon kretanja:

$$\hat{U}(t - t_0, t_0) |\psi(t_0)\rangle = |\psi(t)\rangle ,$$

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle .$$

3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

Standardna QM/funkcionalni, Fejnmanov formalizam

► Zakon kretanja u 1D slučaju:

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}(x, t; y, t_0) \psi(y, t_0) dy = \psi(x, t),$$

$$\mathcal{K}(x'', t''; x', t') = \int_{(x', t')}^{(x'', t'')} \chi_{\infty} \left(-\frac{1}{2\pi\hbar} S(q) \right) \mathcal{D}q,$$

za slučaj kvadratičnog klasičnog dejstva (Cécile Morette, 1951)

$$\mathcal{K}(x'', t''; x', t') = \left(\frac{i}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2 S^{cl}}{\partial x'' \partial x'} \right)^{1/2} \chi_{\infty} \left(-\frac{1}{2\pi\hbar} S^{cl} \right).$$

3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

p -Adična QM

Konzistentna generalizacija realnog slučaja podrazumeva da je:

- ▶ Centralni objekat: $\psi : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$; $x \in \mathbb{Q}_p$, $\psi(x) \in \mathbb{C}$
- ▶ $\hat{x}|\psi\rangle \rightarrow x\psi(x) - ?$ $\hat{p}|\psi\rangle \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\psi(x) - ?$
- ▶ $\hat{H}$ - vremenske translacije, $\hat{p}$ - prostorne translacije $\rightarrow$

Nemoguće u p -adičnoj QM. $\mathbb{Q}_p$ **totalno nepovezan**. Uzastopna primena infin. transformacija ne daje konačnu transformaciju.

3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

- **Zakon kretanja** dobija se **generalizacijom funkcionalnog oblika zakona kretanja** u realnom slučaju:

$$U(t)\psi_p(x) = \int_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{K}_t(x, y)\psi_p(y) dy.$$

- U 1D slučaju kvadratičnog oblika klasičnog dejstva p -adični propagator je (Đorđević i Dragović, 1997):

$$\mathcal{K}_p(x'', t''; x', t') = \lambda_p \left(-\frac{1}{4\pi\hbar} \frac{\partial^2 S_p^{cl}}{\partial x'' \partial x'} \right) \left| \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{\partial^2 S_p^{cl}}{\partial x'' \partial x'} \right|_p^{1/2} \chi_p \left(-\frac{1}{2\pi\hbar} S_p^{cl} \right).$$

3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

Adelična QM

Pitanje **interpretacije rezultata p -adične QM?**

- ▶ Centralni objekat je adelična talasna funkcija $\Psi^{(adel.)} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$:

$$\Psi^{(adel.)}(x) = \Psi_{\infty}(x) \prod_{p \in M} \Psi_p(x) \prod_{p \notin M} \Omega(|x|_p),$$

M je skup konačno mnogo prostih brojeva (inače $\Psi^{(adel.)}(x)$ ne bi više pripadala Hilbertovom prostoru nad adelima).

- ▶ **Najjednostavnije adelično vakuumske stanje:**

$$\Psi_0^{(adel.)}(x) = \Psi_{\infty,0}(x) \prod_p \Omega(|x|_p).$$

3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

- Zakon kretanja u adeličnoj QM:

$$U(t'', t')\Psi^{(adel.)}(x) = \prod_{v=\infty, 2, 3, \dots} \int_{\mathbb{Q}_v} \mathcal{K}_v(x_v, t''_v; y_v, t'_v) \Psi_v(y_v) dy_v.$$

3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

- Gustina verovatnoće nalaženja čestice:

$$\left| \Psi^{(adel.)}(x) \right|_{\infty}^2 = \left| \Psi_{\infty}(x) \right|_{\infty}^2 \prod_{p \in M} \left| \Psi_p(x) \right|_{\infty}^2 \prod_{p \notin M} \Omega(|x|_p),$$

- Za osnovno vakuumsko adelično stanje:

$$\left| \Psi_0^{(adel.)}(x) \right|_{\infty}^2 = \begin{cases} \left| \Psi_{\infty,0}(x) \right|_{\infty}^2, & x \in \mathbb{Z}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

- ▶ Rani univerzum je opisan $\Psi_0^{(adel.)}(x)$.
- ▶ Gustina verovatnoće za $\Psi_0^{(adel.)}(x)$ je nenulta i jednaka onoj koju predviđa standardna kvantna mehanika samo za $x \in \mathbb{Z} \rightarrow$ **celobrojni umnošci Plankove dužine**.
- ▶ Ovo ukazuje na da postoji **diskretizacija** mogućih vrednosti koordinata - zajednička osobina p -adičnog/adeličnog i nekomutativnog pristupa u kvantnoj kosmologiji.
- ▶ Ako u adeličnoj talasnoj funkciji postoje i p -adična stanja različita od $\Omega(|x|_p)$, diskretizacija postaje manje uočljiva.

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

- ▶ Opštu teoriju relativnosti formulisao je A. Ajnštajn 1915/16. g.
U osnovi teorije leže Ajnštajnovе jednačine gravitacionog polja:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{R} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}\Lambda, \quad \mu, \nu = 0, 1, 2, 3.$$

- ▶ 10 nezavisnih jednačina, 10 promenljivih: 3 komponente $u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}$ (od 4, jer je $u^\mu u_\mu = 1$), ε (ili p) i 6 komponenti $g_{\mu\nu}$ (zapravo 10, no kako su dozvoljene proizvoljne transformacije 4 koordinate to pruža mogućnost da se fiksiraju 4 od 10 (nezavisnih) komponenti $g_{\mu\nu} \rightarrow$ mogućnost izbora (fiksiranja gejdža) jedne laps funkcije N i tri komponente N_i šift vektora $\rightarrow$ postoje 4 primarne Dirakove veze).

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

- ▶ Kosmologija = OTR primenjena na kosmos kao celinu.
- ▶ Formulisu se različiti kosmološki modeli. Danas preovlađujući je model Velikog praska zasnovan na Fridmanovim modelima homogenog i izotropnog svemira (Hablova ekspanzija, CMBR, poreklo hemijskih elemenata).
- ▶ Kosmologija ranih faza nastanka univerzuma (zapravo kvantna gravitacija primenjena na rani svemir) $\rightarrow$ kvantna kosmologija.
- ▶ Problemi: nerenormalizabilnost QG, problemi merenja u QG, ko u QG čini kvantni ansambl a ko posmatrača koji meri,...

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

Hamiltonova formulacija OTR (3+1 formalizam (Darmoa, Lihnerovič, Šoke-Brua), Dirakova teorija veza, ADM formalizam)

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + h_{ik}(dx^i + N^i dt)(dx^k + N^k dt),$$

$$L = \frac{1}{16\pi G} \int \left({}^{(3)}\mathcal{R} + K^{ik} K_{ik} - K^2 - 2\Lambda \right) N \sqrt{h} d^3x + \int \mathcal{L}_m N \sqrt{h} d^3x.$$

Odavde se dalje mogu dobiti impulsi π^{ik} , π_Φ , π^0 i π^i konjugovani promenljivima h_{ik} , Φ , N i N_i , respektivno, kao i Hamiltonijan sistema H .

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

Hamiltonova formulacija OTR $\rightarrow$ kanonska kvantizacija:

► Vraijable $\rightarrow$ opservable:

$$\pi^{ik} \rightarrow \hat{\pi}^{ik} \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta h_{ik}}, \quad \pi_{\Phi} \rightarrow \hat{\pi}_{\Phi} \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta \Phi},$$

$$\pi^0 \rightarrow \hat{\pi}^0 \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta N}, \quad \pi^i \rightarrow \hat{\pi}^i \rightarrow -i \frac{\delta}{\delta N_i}.$$

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

- Primarne Dirakove veze:

$$\pi^0 = \frac{\delta L}{\delta \dot{N}} = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{\pi}^0 |\Psi\rangle = 0 \quad \rightarrow \quad -i \frac{\delta \Psi}{\delta N} = 0,$$

$$\pi^i = \frac{\delta L}{\delta \dot{N}_i} = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{\pi}^i |\Psi\rangle = 0 \quad \rightarrow \quad -i \frac{\delta \Psi}{\delta N_i} = 0.$$

- Sekundarne (dinamičke) Dirakove veze (Hamiltonov i impulsni uslov):

$$\dot{\pi}^0 = -\mathcal{H} = 0 \Rightarrow \boxed{\hat{\mathcal{H}} |\Psi\rangle = 0}, \quad \dot{\pi}^i = -\mathcal{H}^i = 0 \Rightarrow \hat{\mathcal{H}}^i |\Psi\rangle = 0.$$

Viler-de Vitova jednačina (Brajs de Vit, 1967) $\rightarrow E_g + E_m = 0$

Osnovna jednačina kvantne kosmologije.

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

- Funkcionalna kvantizacija OTR (Mizner, 1957. g.)

$$\langle h''_{ik}, \Phi'', \Sigma'' | h'_{ik}, \Phi', \Sigma' \rangle = \int \exp(iS(g_{\mu\nu}, \Phi)) \mathcal{D}g_{\mu\nu} \mathcal{D}\Phi.$$

Faktor $\exp(iS)$ je oscilatoran $\rightarrow$ integral je divergentan $\rightarrow$
 $t \rightarrow -i\tau$ i $S \rightarrow i\bar{S}$ (Vikova rotacija tj. signaturna tranzicija)

$$\langle h''_{ik}, \Phi'', \Sigma'' | h'_{ik}, \Phi', \Sigma' \rangle = \int \exp(-\bar{S}(g_{\mu\nu}, \Phi)) \mathcal{D}g_{\mu\nu} \mathcal{D}\Phi.$$

kako $\bar{S}$ nije nužno pozitivno definitno, pri integraciji se moraju uzeti u obzir ne samo realne već i kompleksne metrike (rezultat će i tada zavisiti od izbora konture integracije).

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

6. p -Adična i adelična kosmologija

7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

9. Zaključak

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

Minisuperprostorni modeli, konačnodimenzijski minisuperprostor

- Homogen i izotropan model $\rightarrow N = N(t)$ i $N^i = 0$:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N(t)^2 dt^2 + h_{ik} dx^i dx^k.$$

Npr. model sa 2D minisuperprostorom $\{\Phi, R\}$ i FLRW metrikom:

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t)(dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)).$$

- Model sa 3D minisuperprostorom $\{\Phi, c_1, c_2\}$ i homogenom i anizotropnom Kantovski-Saks metrikom:

$$ds^2 = -\frac{N^2(t)}{c_1(t)} dt^2 + c_1(t) dr^2 + c_2^2(t)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

- Milneov model (Edvard Artur Milne, 1935. g.). Prazan otvoren Fridmanov model sa metrikom:

$$ds^2 = dt^2 - t^2(d\chi^2 + \sinh^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)).$$

koja se smenama $r = t \sinh \chi$, $\tau = t \cosh \chi$ svodi na galilejevsku (metriku Minkovskog).

- Dinamika 2+1 dim. homogenog i izotropnog modela toroidalne topologije sa kosmološkom konstantom Λ ekvivalentna je dinamici slobodne relativističke čestice mase $\sqrt{4\Lambda}$ koja se kreće u trodimenzionalnom Milneovom prostoru.

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

- Klasično dejstvo modela:

$$\begin{aligned}
 S^{cl} &= \left(-\frac{(Z'' - Z')^2}{2T} + 2\Lambda T \right) + \left(\frac{(X'' - X')^2}{2T} - 2\Lambda T \right) \\
 &+ \left(\frac{(Y'' - Y')^2}{2T} - 2\Lambda T \right) \\
 &= S_Z^{cl} + S_X^{cl} + S_Y^{cl}.
 \end{aligned}$$

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

Dvooscilatorni modeli u kosmologiji

- ▶ ...su modeli čiji se lagranžijani mogu, pogodnim smenama (ako je potrebno), predstaviti kao algebarska suma (zbir ili razlika) lagranžijana dva dekuplovana linearna harmonijska oscilatora ($L = \dot{x}^2 - \omega_x^2 x^2$) ili dva dekuplovana linearna invertovana oscilatora ($L = \dot{x}^2 + \omega_x^2 x^2$).
- ▶ Opšti oblik lagranžijana:

$$L = [\dot{x}^2 \pm \omega_x^2 x^2] + \operatorname{sgn}\xi [\dot{y}^2 \pm \omega_y^2 y^2],$$

gde frekvence ω_x i ω_y mogu biti jednake ili različite i $\operatorname{sgn}\xi = +$ ili $\operatorname{sgn}\xi = -$ nezavisno od znaka ispred $\omega_{x,y}$.

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

Klasifikacija modela:

► „Harmonijski” dvooscilatorni kosmološki modeli:

$$L_{(1)} = [\dot{x}^2 - \omega^2 x^2] - [\dot{y}^2 - \omega^2 y^2], \quad L_{(2)} = [\dot{x}^2 - \omega^2 x^2] + [\dot{y}^2 - \omega^2 y^2],$$

$$L_{(3)} = [\dot{x}^2 - \omega_x^2 x^2] - [\dot{y}^2 - \omega_y^2 y^2], \quad L_{(4)} = [\dot{x}^2 - \omega_x^2 x^2] + [\dot{y}^2 - \omega_y^2 y^2].$$

► „Invertovani” dvooscilatorni kosmološki modeli:

$$L_{(5)} = [\dot{x}^2 + \omega^2 x^2] - [\dot{y}^2 + \omega^2 y^2], \quad L_{(6)} = [\dot{x}^2 + \omega^2 x^2] + [\dot{y}^2 + \omega^2 y^2],$$

$$L_{(7)} = [\dot{x}^2 + \omega_x^2 x^2] - [\dot{y}^2 + \omega_y^2 y^2], \quad L_{(8)} = [\dot{x}^2 + \omega_x^2 x^2] + [\dot{y}^2 + \omega_y^2 y^2].$$

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

Prelazi između lagranžijana:

$$L_{(1)} \leftrightarrow L_{(5)}, \quad L_{(2)} \leftrightarrow L_{(6)}, \quad L_{(3)} \leftrightarrow L_{(7)}, \quad L_{(4)} \leftrightarrow L_{(8)}.$$

moгу se ostvariti pomoću dva tipa relevantnih transformacija:

► **Signaturna izmena:** $t \rightarrow -i\tau$.

► **Promena znaka ispred kvadrata frekvence oscilatora** tj. transformacija $\omega_{x,y}^2 \rightarrow -\omega_{x,y}^2$ (što može biti posledica promene znaka parametra preko koga u konkretnom modelu može biti definisan kvadrat frekvence oscilatora).

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

6. p -Adična i adelična kosmologija

7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

9. Zaključak

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

Primer 1.

► Multidimenzionalni Fridmanov model sa $\tilde{\phi}$ i $U(\tilde{\phi})$

Metrika: $g = -\beta d\beta \otimes d\beta + \frac{\bar{R}^2(\beta)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} dx^i \otimes dx^i + \bar{a}^2(\beta) g^{(d)}.$

EH dejstvo:

$$S = \frac{1}{2k_D^2} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{R} \sqrt{-g} d^D x - \frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} \left[- \left(\frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \beta} \right)^2 + 2U(\tilde{\phi}) \right] d^D x + S_{YGH}.$$

Lagranžijan: $L = -\frac{k_0^2}{\gamma'^2} (\dot{\alpha}_1^2 - \dot{\alpha}_2^2 - \omega_+^2 \alpha_1^2 + \omega_-^2 \alpha_2^2)$ je oblika $L_{(3)}$.

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

Primer 2.

► Fridmanov model sa ϕ i Λ

Metrika: $ds^2 = -dt^2 + R^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2)$.

EH dejstvo: $S = \frac{1}{2k^2} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{R} \sqrt{-g} d^4x +$

$\int_{\mathcal{M}} \left(-\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \sqrt{-g} d^4x - \Lambda \right) \sqrt{-g} d^4x + S_{YGH}$.

Lagranžijan: $L = \dot{x}_1^2 - \dot{x}_2^2 + \frac{3}{4} \Lambda (x_1^2 - x_2^2)$ je oblika $L_{(5)}$.

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

Primer 3.

► Fridmanov model sa ϕ i $U(\phi)$

Metrika: $ds^2 = -dt^2 + R^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2)$.

EH dejstvo:

$$S = \frac{1}{2k^2} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{R} \sqrt{-g} d^4x + \int_{\mathcal{M}} \left[\frac{1}{2} \partial_0 \phi \partial^0 \phi - U(\phi) \right] \sqrt{-g} d^4x + S_{YGH}.$$

Lagranžijan: $L = \left[\dot{Q}_1^2 - \omega_+^2 Q_1^2 \right] + \left[\dot{Q}_2^2 - \omega_-^2 Q_2^2 \right]$ je oblika $L_{(4)}$.

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

Primer 4: Modeli sa lagranžijanom oblika $L_{(1)}$

- ▶ Kosmološki minisuperprostorni modeli čiji se lagranžijan može svesti na lagranžijan $L_{(1)}$ dva deкуплована harmonijska oscilatora jednakih frekvenci čije se energije oduzimaju u hamiltonijanu sistema.
- ▶ Oni čine do sada najbolje proučenu klasu dvooscilatornih modela u koju spada 6 tipova do sada otkrivenih kosmoloških modela.
- ▶ Mogu se podeliti u dve grupe. Jednu grupu čine modeli sa kosmološkom konstantom u dejstvu, a drugu modeli bez kosmološke konstante.

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

Modeli sa kosmološkom konstantom:

- Fridmanov model sa minimalno kuplovanim skalarnim poljem ϕ i kosmološkom konstantom Λ

Metrika modela: $ds^2 = -dt^2 + R^2(t)(dr^2 + r^2 d\Omega^2)$.

Dejstvo modela: $S = \frac{1}{2k^2} \int_{\mathcal{M}} \mathcal{R} \sqrt{-g} d^4x +$

$\int_{\mathcal{M}} \left(-\frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 \sqrt{-g} d^4x - \Lambda \right) \sqrt{-g} d^4x + S_{YGH}.$

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

- Fridmanov $D = 4 + d$ dimenzionalni model sa kosmološkom konstantom Λ i untrašnjim d -dimenzionalnim prostorom

Metrika modela:

$$ds^2 = -dt^2 + \frac{R^2(t)}{\left(1 + \frac{kr^2}{4}\right)^2} (dr^2 + r^2 d\Omega^2) + a^2(t) g_{ij}^{(d)} dx^i dx^j.$$

Dejstvo modela:
$$S = \frac{1}{2k_D^2} \int_{\mathcal{M}} (\mathcal{R} - 2\Lambda) \sqrt{-g} d^D x + S_{YGH}.$$

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

- Vakuumski Kaluza-Klajn (4+1) dimenzionalni model sa kosmološkom konstantom Λ

Metrika modela: $ds^2 = -dt^2 + \frac{R^2(t)dr^i dr^j}{(1+\frac{kr^2}{4})^2} + a^2(t)d\rho^2.$

Dejstvo modela: $S = \int_{\mathcal{M}} (\mathcal{R} - \Lambda) \sqrt{-g} dt d^3 r d\rho.$

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

Modeli bez kosmološke konstante:

- Fridmanov model sa bezmasenim skalarnim poljem ϕ koje je konformno kuplovano sa gravitacijom

Metrika modela: $ds^2 = \frac{2G}{3\pi} \left(-a^2(t) \tilde{N}^2 d^2 t + a^2(t) d\Omega_3^2(t) \right).$

Gustina lagranžijana: $\mathcal{L}_m = -\frac{3}{8\pi G} \left(g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + \frac{1}{6} \mathcal{R} \phi^2 \right).$

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

- Fridmanov model sa bezmasenim skalarnim poljem ϕ koje je minimalno kuplovano sa gravitacijom

Metrika modela: $ds^2 = \frac{2G}{3\pi} \left(-a^2(t) \tilde{N}^2 dt^2 + a^2(t) d\Omega_3^2(t) \right).$

Gustina lagranžijana materije: $\mathcal{L}_m = -\frac{3}{8\pi G} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi.$

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

► Vakuumski Kantovski-Saks model

Metrika modela:

$$ds^2 = \frac{G}{2\pi} \left(-\tilde{N}^2(t) dt^2 + b_1^2(t) d\chi^2 + b_2^2(t) d\Omega_2^2(t) \right).$$

Dejstvo modela: $S = \frac{1}{16\pi G} \int_{\mathcal{M}} \left({}^{(3)}\mathcal{R} + K^{ik} K_{ik} - K^2 \right) N \sqrt{h} dt d^3x.$

- Ovaj model je pri tome od posebnog interesa razmotriti jer je njegova dinamika difeomorfna dinamici unutrašnjosti Švarcšildove crne rupe.

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

- ▶ U svim prethodnim slučajevima lagranžijan modela se odgovarajućim smenama svodi na lagranžijan dva dekuplovana harmonijska oscilatora jednakih frekvenci čije se energije oduzimaju u hamiltonijanu sistema tj. na:

$$L_{(1)} = [\dot{x}^2 - \omega^2 x^2] - [\dot{y}^2 - \omega^2 y^2].$$

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

Hamiltonov formalizam

- ▶ Za lagranžijane dvooscilatornih modela $L_{(1)}, \dots, L_{(8)}$, rešavajući Ojler-Lagranževe jednačine: $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L_i}{\partial \dot{q}_\sigma} \right) - \frac{\partial L_i}{\partial q_\sigma} = 0$ dobijaju se diferencijalne jednačine kretanja po minisuperprostornim koordinatama q_σ , čijim se daljim rešavanjem dobija opšti oblik konačnih jednačina kretanja.
- ▶ Za konkretne početne uslove ove jednačine daju partikularne konačne jednačine kretanja.
- ▶ Dejstva za svaki od 8 modela dobijaju se iz: $S_i = \int_{t'}^{t''} L_i dt$, a hamiltonijani: $H_i = \sum_\sigma p_\sigma \dot{q}_\sigma - L_i$

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

- ▶ Iz Hamiltonovog uslova u GTR sledi da je za ove modele $H = 0$, što na integracione konstante u konačnim opštim rešenjima nameće odgovarajuća ograničenja i ukazuje da je ukupna energija sistema jednaka nuli (tzv. uslov nulte energije).
- ▶ Izdvaja se klasa dvooscilatornih modela sa lagranžijanima $L_{(1)}$ i $L_{(3)}$. Uslovi nulte energije $H_{(1)} = 0$ i $H_{(3)} = 0$ ukazuju da je reč o sistemima od dva linearna harmonijska oscilatora istih energija koje se oduzimaju u hamiltonijanu sistema. Za dvooscilatorni sistem ovakvog tipa se kaže da čini jedan *oscillator-ghost-oscillator* sistem ili *indefinite oscillator* sistem.

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

Kanonska kvantizacija

- ▶ **Kvantizacijom Hamiltonovog uslova** (u formi $H = 0$) za dati model dobija se **Viler-de Vidova jednačina** modela, koja predstavlja **analogon Šredingerove jednačine** u standardnoj kvantnoj mehanici.
- ▶ Za Milneov model: $\left[\frac{\partial^2}{\partial Z^2} - \frac{\partial^2}{\partial Y^2} - \frac{\partial^2}{\partial X^2} + 4\Lambda \right] \Psi(X, Y, Z) = 0$.
- ▶ Za *oscillator-ghost-oscillator* sisteme sa lagranžijanima L_1 i L_3 :

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \tilde{\omega}^2(x^2 - y^2) \right] \Psi(x, y) = 0,$$

$$\left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \tilde{\omega}_x^2 x^2 - \tilde{\omega}_y^2 y^2 \right] \Psi(x, y) = 0,$$
 respektivno.

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

- Rešenja ovih Viler-de Vitovih jednačina za *oscillator-ghost-oscillator* sisteme lako se dobijaju metodom razdvajanja promenljivih:

$$\Psi_{n_1, n_2}(x, y) = \left(\frac{\tilde{\omega}}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{H_{n_1}(\sqrt{\tilde{\omega}}x)}{\sqrt{2^{n_1} n_1!}} \right] e^{-\frac{\tilde{\omega}x^2}{2}} \left(\frac{\tilde{\omega}}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{H_{n_2}(\sqrt{\tilde{\omega}}y)}{\sqrt{2^{n_2} n_2!}} \right] e^{-\frac{\tilde{\omega}y^2}{2}},$$

$$\Psi_{n_1, n_2}(x, y) = \left(\frac{\tilde{\omega}_x}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{H_{n_1}(\sqrt{\tilde{\omega}_x}x)}{\sqrt{2^{n_1} n_1!}} \right] e^{-\frac{\tilde{\omega}_x x^2}{2}} \left(\frac{\tilde{\omega}_y}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \left[\frac{H_{n_2}(\sqrt{\tilde{\omega}_y}y)}{\sqrt{2^{n_2} n_2!}} \right] e^{-\frac{\tilde{\omega}_y y^2}{2}}$$

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

Signaturna izmena

- ▶ Signaturna tranzicija podrazumeva zapravo promenu metrike tako da ona ako je bila lorencovskog tipa sa signaturom $(-, +, +, +)$ postaje nakon ove transformacije euklidska sa signaturom $(+, +, +, +)$, što se očigledno za kvadratne metričke forme realizuje Vikovom rotacijom $(t \rightarrow -i\tau)$.
- ▶ Teorija QG $\rightarrow$ na Plankovoj skali klasičan koncept merenja i strukture prostor-vremena gubi smisao $\rightarrow$ struktura prostor-vremena je: nearhimedovska + Volovićeva hipoteza $\rightarrow$ p -adična/adelična $\rightarrow$ diskretnost prostor-vremena (predviđa je i nekomutativni pristup)

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

- ▶ *Loop* QG se pokazuje da se ova diskretnost takođe može dovesti u vezu sa mehanizmom signaturne tranzicije.
- ▶ Sama signaturna izmena u funkcionalnom formalizmu u QC ima svoje matematičko opravdanje (konvergenција integrala).
- ▶ U slučaju dvooscilatornih modela klasična signaturna tranzicija, kao što je rečeno, prevodi jedan model u drugi i takođe nameće specifična ograničenja na konkretne parametre teorije.

6. p -Adična i adelična kosmologija

- ▶ Podrazumeva primenu p -adične i adelične kvantne mehanike.
- ▶ Funkcionalni pristup - centralni objekat je p -adična generalizacija amplitude prelaza:

$$\langle h''_{ik}, \Phi'', \Sigma'' | h'_{ik}, \Phi', \Sigma' \rangle_p = \int \chi_p(-S_p(g_{\mu\nu}, \Phi)) \mathcal{D}(g_{\mu\nu})_p \mathcal{D}(\Phi)_p.$$

6. p -Adična i adelična kosmologija

Dva pravca razvoja:

- ▶ U okviru prvog, za različite modele, **određuju se Hartl-Hokingove talasne funkcije** kao rešenja p -adičnih integrala oblika:

$$\Psi_p^{HH}(q^\alpha) = \int_{|N|_p \leq 1} \mathcal{K}_p(q^\alpha, N; 0, 0) dN.$$

- ▶ Drugi pristup podrazumeva određivanje i **ispitivanje uslova za egzistenciju vakuumskih p -adičnih stanja** $\Omega(|x|_p)$, $\Omega(p^\nu |x|_p)$ i $\delta(p^\nu - |x|_p)$, a pre svih osnovnog vakuumskog stanja $\Omega(|x|_p)$ čije je postojanje nužno u smislu adelizacije.

6. p -Adična i adelična kosmologija

p -Adični Milneov model

p -adični propagator za Milneov model:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_p(X'', T; X', 0) &= \prod_{\mu=0}^2 \frac{\lambda_p((-1)^{\delta_0^\mu} 2T)}{|T|_p^{1/2}} \\ &\times \chi_p\left(-(-1)^{\delta_0^\mu} \frac{(X''^\mu - X'^\mu)^2}{2T} + (-1)^{\delta_0^\mu} 2\Lambda T\right). \end{aligned}$$

6. p -Adična i adelična kosmologija

Njegovom zamenom u uslove koje zadovoljavaju vakuumska stanja $\Omega(|x|_p)$, $\Omega(p^\nu |x|_p)$ i $\delta(p^\nu - |x|_p)$, redom:

$$\int_{\mathbb{Q}_p^3} \mathcal{K}_p(X'', T; X', 0) \Omega(|X'|_p) dX' = \Omega(|X''|_p),$$

$$\int_{\mathbb{Q}_p^3} \mathcal{K}_p(X'', T; X', 0) \Omega(p^\nu |X'|_p) dX' = \Omega(p^\nu |X''|_p),$$

$$\int_{\mathbb{Q}_p^3} \mathcal{K}_p(X'', T; X', 0) \delta(p^\nu - |X'|_p) dX' = \delta(p^\nu - |X''|_p),$$

6. p -Adična i adelična kosmologija

Dobijaju se uslovi njihove egzistencije:

$$\Psi_p(X, T) = \Omega(|X|_p), \quad |\Lambda|_p \leq 1, \quad |T|_p = 1,$$

$$\Psi_p(X, T) = \Omega(p^\nu |X|_p), \quad |\Lambda|_p \leq p^{2\nu}, \quad |T|_p = p^{-2\nu},$$

$$\Psi_p(X, T) = \delta(p^\nu - |X|_p), \quad |\Lambda|_p \leq p^{2-2\nu}, \quad |T|_p = p^{2\nu-2}.$$

6. p -Adična i adelična kosmologija

p -Adični dvooscilatorni kosmološki modeli

► „Harmonijski” modeli:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_{p(1)}(x'', y'', t''; x', y', t') &= \left| \frac{2}{T} \right|_p \chi_p(-S_{p(1)}^{cl}), \\ \mathcal{K}_{p(2)}(x'', y'', t''; x', y', t') &= \lambda_p \left(\frac{\omega}{\sin(\omega T)} \right) \lambda_p \left(\frac{\omega}{\sin(\omega T)} \right) \\ &\times \left| \frac{2}{T} \right|_p \chi_p(-S_{p(2)}^{cl}),\end{aligned}$$

6. p -Adična i adelična kosmologija

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_{p(3)}(x'', y'', t''; x', y', t') &= \lambda_p \left(\frac{\omega_x}{\sin(\omega_x T)} \right) \lambda_p \left(-\frac{\omega_y}{\sin(\omega_y T)} \right) \\
 &\times \left| \frac{2}{T} \right|_p \chi_p(-S_{p(3)}^d), \\
 \mathcal{K}_{p(4)}(x'', y'', t''; x', y', t') &= \lambda_p \left(\frac{\omega_x}{\sin(\omega_x T)} \right) \lambda_p \left(\frac{\omega_y}{\sin(\omega_y T)} \right) \\
 &\times \left| \frac{2}{T} \right|_p \chi_p(-S_{p(4)}^d).
 \end{aligned}$$

6. p -Adična i adelična kosmologija

► „Invertovani” modeli:

$$\mathcal{K}_{p(5)}(x'', y'', t''; x', y', t') = \left| \frac{2}{T} \right|_p \chi_p(-S_{p(5)}^{cl}),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{p(6)}(x'', y'', t''; x', y', t') &= \lambda_p \left(\frac{\omega}{\sinh(\omega T)} \right) \lambda_p \left(\frac{\omega}{\sinh(\omega T)} \right) \\ &\times \left| \frac{2}{T} \right|_p \chi_p(-S_{p(6)}^{cl}), \end{aligned}$$

6. p -Adična i adelična kosmologija

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_{p(7)}(x'', y'', t''; x', y', t') &= \lambda_p\left(\frac{\omega_x}{\sinh(\omega_x T)}\right) \lambda_p\left(-\frac{\omega_y}{\sinh(\omega_y T)}\right) \\
 &\times \left|\frac{2}{T}\right|_p \chi_p(-S_{p(7)}^{cl}), \\
 \mathcal{K}_{p(8)}(x'', y'', t''; x', y', t') &= \lambda_p\left(\frac{\omega_x}{\sinh(\omega_x T)}\right) \lambda_p\left(\frac{\omega_y}{\sinh(\omega_y T)}\right) \\
 &\times \left|\frac{2}{T}\right|_p \chi_p(-S_{p(8)}^{cl}).
 \end{aligned}$$

6. p -Adična i adelična kosmologija

Njihovom zamenom u uslove koje zadovoljavaju vakuumska stanja $\Omega(|x|_p)\Omega(|y|_p)$, $\Omega(p^\nu|x|_p)\Omega(p^\mu|y|_p)$ i $\delta(p^\nu - |x|_p)\delta(p^\mu - |y|_p)$, redom:

$$\int_{|x'|_p \leq 1} \int_{|y'|_p \leq 1} \mathcal{K}_p(x'', y'', t''; x', y', t') dx' dy' = \Omega(|x''|_p) \Omega(|y''|_p),$$

$$\int_{|x'|_p \leq p^{-\nu}} \int_{|y'|_p \leq p^{-\mu}} \mathcal{K}_p(x'', y'', t''; x', y', t') dx' dy' = \Omega(p^\nu |x''|_p) \Omega(p^\mu |y''|_p),$$

$$\int_{|x'|_p = p^{-\nu}} \int_{|y'|_p = p^{-\mu}} \mathcal{K}_p(x'', y'', t''; x', y', t') dx' dy' = \delta(p^\nu - |x''|_p) \delta(p^\mu - |y''|_p).$$

6. p -Adična i adelična kosmologija

Dobija se da vakuumska p -adična stanja:

$$\Psi_p(x, y) = \Omega(|x|_p) \Omega(|y|_p),$$

$$\Psi_p^{(\nu, \mu)}(x, y) = \Omega(p^\nu |x|_p) \Omega(p^\mu |y|_p),$$

$$(\nu, \mu = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

$$\Psi_p^{(\nu, \mu)}(x, y) = \begin{cases} \delta(p^\nu - |x|_p) \delta(p^\mu - |y|_p), & |T|_p \leq p^{2\nu, \mu-2}, \\ \delta(2^\nu - |x|_2) \delta(2^\mu - |y|_2), & |T|_2 \leq 2^{2\nu, \mu-4}, \end{cases}$$

$$(\nu, \mu = 0, -1, -2, \dots)$$

postoje za opšti uslov analitičnosti $|\omega T|_p \leq |2p|_p$ funkcija u p -adičnim propagatorima, što zapravo znači da je $\omega T \in \mathbb{Z}$.

6. p -Adična i adelična kosmologija

Pitanje adelizacije

- ▶ **Adelizacija** podrazumeva konstrukciju adelične talasne funkcije. Dva uslova:
 1. **postoje rešenja $\Psi_\infty(x, y)$ Viler-de Vitovih jednačina,**
 2. **postoje osnovna vakuumska p -adična $\Omega(|x|_p)\Omega(|y|_p)$ stanja.**
- ▶ Za Minleov model prvi uslov nije ispunjen.
- ▶ Za dvooscilatorne modele oba uslova su ispunjena. Pri tome je drugi uslov ispunjen za sve modele za iste uslove egzistencije za svako posmatrano vakuumsko stanje.

6. p -Adična i adelična kosmologija

Signaturna izmena u p -adičnom prostor-vremenu

- ▶ Znak signature u $\mathbb{Q}_p^4$ može biti proizvoljno promenjen samo za $p \equiv 1 \pmod{4}$ (tada i samo tada je $\sqrt{-1} \in \mathbb{Q}_p$).
- ▶ Nakon signaturne tranzicije u $\mathbb{Q}_p^4$ vakuumska p -adična stanja modela i uslovi za njihovu egzistenciju neće se promeniti.

8. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

- ▶ **Metrička forma centralno-simetričnog gravitacionog polja nerotirajućeg i nenaelektrisanog objekta (Švarcšildova metrika):**

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r_g}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{r_g}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

- ▶ Za $r < r_g = \frac{2Gm}{c^2}$, tj. **unutar horizonta događaja**, Švarcšildove **metričke komponente** $g_{00} = g_{tt}$ i $g_{11} = g_{rr}$ **menjaju predznake**.
- ▶ Ovo sugeriše da **prostor i vreme menjaju uloge nakon prolaska kroz horizont događaja**. Naime, vremenska koordinata, za posmatrača izvan horizonta događaja, postaje prostornog tipa za posmatrača unutar Švarcšildove sfere.

7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

- ▶ U tom smislu, za oba posmatrača **postoji samo jedan mogući smer kretanja**, za spoljašnjeg posmatrača u vremenu, a za unutrašnjeg u prostoru (pravo ka singularnosti).
- ▶ Imajući u vidu prethodno rečeno, može se razmotriti mogućnost da **unutrašnjost Švarcšildove crne rupe** bude opisana kvadratnom metričkom formom koja se dobija **zamenom** $t \leftrightarrow r$ u njen standardni oblik tj. formom:

$$ds^2 = -\left(\frac{r_g}{t} - 1\right)^{-1} dt^2 + \left(\frac{r_g}{t} - 1\right) dr^2 + t^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

u kojoj **komponente metrike eksplicitno zavise od vremena**.

7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

- ▶ Prethodni izraz ima **oblik homogene i anizotropne**

Kantovski-Saks metrike:

$$ds^2 = -\frac{N^2(t)}{c_1(t)} dt^2 + c_1(t) dr^2 + c_2^2(t) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

- ▶ Primer jedne interesantne osobine Opšte teorije relativnosti da generiše rešenja za kosmološke modele iz statičkih rešenja Ajnštajnovih jednačina gravitacionog polja.

- ▶ Dakle:

Unutrašnjost Švarcšildove crne rupe

↔ **Vakuumski Kantovski-Saks model**

↔ **Dvooscilatorni *oscillator-ghost-oscillator* model.**

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

6. p -Adična i adelična kosmologija

7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

9. Zaključak

7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

► Lagranžijan:

$$L = -\frac{M_{pl}^2 V_0}{\tilde{N}} \left[(\dot{x}^2 - \tilde{N}^2 x^2) - (\dot{y}^2 - \tilde{N}^2 y^2) \right],$$

► Hamiltonijan:

$$H = -\frac{\tilde{N}}{4M_{pl}^2 V_0} (\pi_x^2 - \pi_y^2) - V_0 M_{pl}^2 \tilde{N} (x^2 - y^2),$$

► Viler-de Vitova jednačina:

$$\hat{\mathcal{H}}\Psi(x, y) = \left[-\frac{1}{4M_{pl}^2 V_0} (\hat{\pi}_x^2 - \hat{\pi}_y^2) - V_0 M_{pl}^2 (\hat{x}^2 - \hat{y}^2) \right] \Psi(x, y) = 0.$$

7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

- Zamenjujući $\Psi_{n_1, n_2}(x, y) = \mu_{n_1}(x)\tau_{n_2}(y)$, Viler-de Vitova jednačina postaje deкуплована po promenljivima:

$$\left[-\frac{\hbar^3 \tilde{N}}{4V_0 c^2 M_{pl}^2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\tilde{N} V_0 c^2 M_{pl}^2}{\hbar} x^2 \right] \mu_{n_1}(x) = E_{n_1} \mu(x),$$

$$\left[-\frac{\hbar^3 \tilde{N}}{4V_0 c^2 M_{pl}^2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\tilde{N} V_0 c^2 M_{pl}^2}{\hbar} y^2 \right] \tau_{n_2}(y) = E_{n_2} \tau(y).$$

7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

- Sa opštim adeličnim rešenjem:

$$\begin{aligned} \Psi^{(adel.)}(x, y) &= \left(\frac{\tilde{\omega}}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{2^n n!} e^{-\frac{\tilde{\omega}}{2}(x^2+y^2)} H_n(\sqrt{\tilde{\omega}}x) H_n(\sqrt{\tilde{\omega}}y) \\ &\times \prod_{p \in M} \Psi_p(x, y) \prod_{p \notin M} \Omega(|x|_p) \Omega(|y|_p), \end{aligned}$$

- Prethodne, **dekuplovane, jednačine su jednačine dva kvantna LHO** čije su frekvence:

$$\omega^2 = \frac{1}{\tilde{m}} \frac{\partial^2 E_p(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{\tilde{m}} \frac{\partial^2 E_p(y)}{\partial y^2} = \frac{\tilde{N}}{\tilde{m}} \frac{2 V_0 c^2 M_{pl}^2}{\hbar} \text{ i energije } E_{n_1} \text{ i } E_{n_2}.$$

7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

- ▶ Pretpostavljamo da se ovi oscilatori odnose na **dva gravitaciona stepena slobode**, naime, jedan na crnu a drugi na njoj korespondentnu belu rupu.
- ▶ Sloboda izbora laps funkcije $\tilde{N}$ dopušta mogućnost da se fiksira gejdž $\frac{\tilde{N}}{\tilde{m}} = \frac{6c^2}{V_0\hbar}$.
- ▶ Tada je: $\hbar\omega = \sqrt{\frac{3}{2\pi}} E_{pl}$.
- ▶ Korekciona partiociona funkcija je: $Z_{approx.} = \sqrt{\frac{2\pi}{3}} e^{-\frac{\beta^2 E_{pl}^2}{16\pi \beta E_{pl}}}$.

7. Švarcšildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

Iz korekcionne partiacione funkcije $Z_{approx.}$ mogu se dalje odrediti:

- ▶ **Unutrašnja energija crne rupe:**

$$E_{in.} = -\frac{\partial}{\partial \beta} (\ln Z_{approx.}) = \frac{E_{pl}^2}{8\pi} \beta + \frac{1}{\beta} = mc^2,$$

- ▶ **Temperatura crne rupe sa kvantnom korekcijom** (za $E_{pl} \ll mc^2$):

$$\beta \approx \beta_H \left[1 - \frac{1}{\beta_H mc^2} \right], \quad \text{gde je: } \beta_H = \frac{8\pi mc^2}{E_{pl}^2} = \frac{1}{k_B T_H},$$

- ▶ **Entropija crne rupe** (za $E_{pl} \ll mc^2$):

$$\frac{S}{k_B} = \ln Z_{approx.} + \beta E_{in.} \approx \frac{S_{BH}}{k_B} - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{S_{BH}}{k_B} \right), \quad \frac{S_{BH}}{k_B} = \frac{A_s}{4l_{pl}^2}.$$

2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize3. p -Adična i adelična kvantna mehanika

4. Standardna klasična i kvantna kosmologija

5. Minisuperprostorni kosmološki modeli

6. p -Adična i adelična kosmologija

7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

9. Zaključak

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

- Ravan Fridmanov model sa poljem materije gustine ρ i kosmološkom konstantom Λ

Fridmanova metrika:

$$ds^2 = -N^2 c^2 dt^2 + a^2(t) [d\chi^2 + \chi^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)].$$

EH dejstvo:

$$S_{EH} = S_g + S_{YGH} + S_m = -\frac{c^4}{16\pi G} \int_M [({}^{(3)}R + K^{ik} K_{ik} - K^2 - 2\Lambda)] N \sqrt{h} dt d^3x + c^2 \int_M \rho N \sqrt{h} dt d^3x$$

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

Lagranžijan modela:
$$L = \frac{3V_0 c^2}{8\pi G} \left(\frac{1}{N} \dot{a}^2 a + \frac{\Lambda c^2}{3} N a^3 + \frac{8\pi G}{3} N \rho a^3 \right).$$

Za $a(t) \rightarrow \infty$; uz $N = 1$, $\tilde{a} = \frac{a}{l_{pl}}$ i $\tilde{a} = \left(\frac{3}{2}q\right)^{\frac{2}{3}}$, svodi se na:

$$L = l_0 (\dot{q}^2 + \omega^2 q^2), \text{ gde je } \omega^2 = \frac{3}{4}\Lambda c^2 - \text{Invertovani oscilator.}$$

Ojler-Lagranževa jednačina: $\ddot{q} - \omega^2 q = 0$, hiperboličko rešenje:

$$q = q_0 \cosh(\omega t + \varphi) \rightarrow e^{\sqrt{\frac{3}{4}\Lambda c^2} t} \rightarrow a(t) = l_{pl} \tilde{a}(t) \sim l_{pl} e^{\sqrt{\frac{\Lambda c^2}{3}} t}.$$

...(aktuelna) eksponencijalna ekspanzija svemira...

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

► p -Adic and adelic case

p -Adično dejstvo: $S_p^{cl} = \int_{t'}^{t''} L_p^{cl} dt = I_0 \omega \left[\frac{q''^2 + q'^2}{\tanh(\omega T)} - \frac{2q''q'}{\sinh(\omega T)} \right].$

p -Adični propagator:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_p(q'', q', T) &= \lambda_p \left(\frac{I_0 \omega}{h \sinh(\omega T)} \right) \left| \frac{2I_0 \omega}{h \sinh(\omega T)} \right|_p^{1/2} \\ &\times \chi_p \left[-\frac{1}{h} I_0 \omega \left(\frac{q''^2 + q'^2}{\tanh(\omega T)} - \frac{2q''q'}{\sinh(\omega T)} \right) \right]. \end{aligned}$$

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

► p -Adic and adelic case

Lagranžijan $\rightarrow$ Hamiltonijan $\rightarrow$ Viler-de Vitova jednačina $\rightarrow \Psi_\infty(q)$
Adelična talasna funkcija osnovnog vakuumskeg stanja:

$$\begin{aligned}\Psi_{adel.}(q) &= \Psi_\infty(q) \prod_p \Omega(|q|_p) \\ &= \frac{v_0^{\frac{5}{4}}}{9\sqrt{2}l_p^3 a^{\frac{3}{4}}} \left(D_+ e^{i\frac{a^3}{v_0}} + D_- e^{-i\frac{a^3}{v_0}} \right) \prod_p \Omega(|q|_p).\end{aligned}$$

8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ

► p -Adic and adelic case

Uslov konvergencije p -adičnih hiperboličkih funkcija: $\omega T = n \in \mathbb{N}$.

Uslov postojanja adelične talasne funkcije: $|\frac{T}{t_{pl}}|_p \leq 1 \rightarrow T = m t_{pl}$.

Kosmološka konstanta: $\Lambda = \frac{4n^2}{3m^2 c^2 t_{pl}^2} \rightarrow \boxed{\Lambda \sim n^2}$

Za starost univerzuma $T \approx 10^{17}$ s je $m = \frac{T}{t_{pl}} \propto 10^{61}$. Za $n = 2$, uz $c = 1$, je $\boxed{\Lambda \approx 2 \times 10^{-35} \text{ s}^{-2}}$.

9. Zaključak

- ▶ Istražuju se osobine minisuperprostornih kosmoloških modela čija se dinamika može svesti na dinamiku oscilatora standardnog ili invertovanog tipa.
- ▶ Razmatraju se klasične i standardne kvantne forme ovih modela i specifičnosti njihove dinamike. U klasičnom slučaju se određuju klasični lagranžijani, klasična dejstva i hamiltonijani modela, a u kvantnom delu i rešenja njihovih Viler-de Vitovih jednačina.

9. Zaključak

- ▶ U p -adičnom pristupu određuju se i ispituju uslovi egzistencije (vakuumskih) p -adičnih stanja i ispituju uslovi signaturne tranzicije u p -adičnom prostor-vremenu $\mathbb{Q}_p^4$.
- ▶ Radi se na proučavanju dinamike nekomutativnih formi ovih modela.
- ▶ Razmatranje dinamike ovih modela u arhimedovim i nearhimedovim prostorima vodi ka značajnim rezultatima, kao što su diskretizacija prostor-vremena na Plankovoj skali, temperatura i entropija crne rupe, diskretan spektar vrednosti kosmološke konstante...

Sadržaj

1. Uvod
2. Elementi p -adične i adelične matematičke analize
 3. p -Adična i adelična kvantna mehanika
4. Standardna klasična i kvantna kosmologija
 5. Minisuperprostorni kosmološki modeli
 6. p -Adična i adelična kosmologija
7. Švarcsildova crna rupa kao Kantovski-Saks model
 8. Ravan Fridmanov model sa ρ i Λ
 9. Zaključak

H V A L A N A P A Ž N J I !