PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

UNIVERZITETA U NOVOM SADU

ZORICA P. STEPANIĆ

NISKOTEMPERATURSKO PONAŠANJE MAGNETIZACIJE KOD JEDNOG MODELA ANIZOTROPNOG FEROMAGNETIKA

- diplomski rad -

NOVI SAD

1980.

Zahvaljujem dr Mariju Skrinjaru i dr Darku Kaporu na sugestiji o izboru teme i pomoći u toku rada.

Zorica P. Stepanić

SADRŽAJ:

1. U V O D

Teorijska istraživanja u oblasti jakog magnetizma i danas su jako intenzivna bez obzira što su se prve teorije feromagnetizma pojavile još početkom ovog veka. Osnovni problemi koji se istražuju odnose se na kritične fenomene (npr. fazni prelaz, feromagnetno, paramagnetno stanje itd.) kao i na ponašanje magnetika na niskim temperaturama.

Problem ponašanja magnetizacije izotropnog feromagnetika na niskim temperaturama, razmatran je u naučnoj literaturi od velikog broja teoretičara a opšte poznatu teoriju dao je Dyson [1]. S druge strane, problem ponašanja anizotropnih feromagnetika na niskim temperaturama, mnogo je manje zastupljen u literaturi. U ovom radu biće analizirano niskotemperatursko ponašanje jednog anizotropnog feromagnetika čiji je Hamiltonijan dao Beloritzky u [2] i drugi.

2. OPŠTE O MAGNETIZMU

S obzirom na magnetna svojstva, sva čvrsta tela se mogu svrstati u dve grupe. Prvu grupu čine tela sa slabije izraženim magnetnim osobinama tzv. slabi magnetici (dijamagnetici i paramagnetici). Čvrsta tela sa jače izraženim magnetnim osobinama čine grupu tzv. jakih magnetika (feromagnetici, antiferomagnetici i ferimagnetici). Ovu grupu čvrstih tela karakteriše makroskopski magnetni moment. S gledišta savremene teorije, magnetizam čvrstih tela se javlja kao posledica nepopunjenosti unutrašnjih ljuski atoma, koji čine njihove kristalne rešetke. Tačnije, ukupni magnetni moment jakih magnetika čine magnetni momenti elektrona nepopunjenih unutrašnjih ljusaka. Pored ovoga, Heisenberg je pretpostavio da je pojava makroskopskog magnetnog momenta, posledica uredjenosti spinova elektrona nepopunjenih ljusaka atoma, a ova uredjenost nastaje usled interakcije izmedju elektrona.

Kako su poznati jaki magnetici jedino medju materijalima u čvrstom stanju, očigledno je da postoji izvesna povezanost izmedju pojave magnetizacije i kristalne rešetke. Da je to tako, dokazuje i činjenica da pri odredjenoj orijentaciji kristala, magnetne karakteristike zavise od pravca u kom se mere, što znači da magnetni materijali imaju magnetno-kristalografsku anizotropiju. Naime, u kristalu postoje tzv. ose lake magnetizacije duž kojih se (u odsustvu spoljašnjeg magnetnog polja) mogu orijentisati spinovi elektrona. Magnetni momenti atoma u osnovi imaju spinsku prirodu. Na osnovu ovoga, moguće je opisati ponašanje elektrona nepopunjenih ljusaka atoma kao ponašanje sistema spinova, koji se nalaze u čvorovima rešetki. Relativna orijentacija spinova je posledica tzv. interakcije izmene. Interakcije izmene predstavlja faktor zavisnosti energije sistema od prostorne simetrije talasne funkcije sistema i proporcionalna je veličini njegovog spina.

Napomenimo, da se interakcije izmene teško može teorijski izračunati i za najjednostavije sisteme interagujućih čestica, tako da se u teoriji magnetizma uzima kao fenomenološki parametar.

3. HEISENBERGOV FEROMAGNETIK

U ovom radu razmatraće se magnetizacija feromagnetika. Zato je potrebno dati neke osnovne karakteristike ovih jakih magnetika. Tipični predstavnici ove grupe su prelazni metali: Fe, Co i Ni. Kod ovih metala spinovi nepopunjenih 3d ljuski obrazuju magnetnu kristalnu rešetku i medjusobno su povezani kvantnomehaničkim silama izmene.

Po kvantnoj teoriji magnetizma, na apsolutnoj nuli su svi spinovi paralelno orijentisani (npr. duž z-ose Decartovog sistema, koja se uzima za osu kvantizacije). Tada se javlja veliki magnetni moment i magnetizacija ima maksimalnu vrednost $M(o)=\mu NS$, gde je μ - magnetni moment atoma izražen u Bohrovim magnetonima, N - broj atoma u kristalu a S - maksimalna vrednost spina (z-projekcija spina). U prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja $\vec{H}$ spinovi se kao i rezultujući magnetni moment, orijentišu u pravcu polja. U odsustvu magnetnog polja pravac magnetnog momenta nije odredjen, ali kako uvek postoji uticaj slabe anizotropije, vektor $\vec{M}$ će se usmeriti u pravcu jedne od osa lake magnetizacije. Ukoliko se temperatura feromagnetiku poveća, doći će do pada magnetizacije tj. smanjivaće se z- projekcija spinova, sve dok na nekoj kritičnoj temperaturi feromagnetik ne predje u paramagnetnu fazu. Ta kritična temperatura prelaza feromagnetika u paramagnetik je Curieva temperatura T_c. U okolini Curieve temperature, zavisnost magnetizacije od temperature može se predstaviti sledećim izrazom:

$$M(T) \cong \text{const.}\left(1 - \frac{T}{T_c}\right)^{\beta} \qquad (3.1)$$

gde je β tzv. kritični eksponent (videti Stenli [3] str.88), a za magnetike se kreće u intervalu od 0,33-0,42.

Analiza svojstava i veličina koje karakterišu feromagnetne materijale vrši se u okvirima Heisenbergovog izotropnog modela. Hamiltonijan ovog modela uračunava samo interakcije odgovorne za orijentaciju spinova, zanemarujući spin-spinsku i spin-orbitalnu interaciju, u poredjenju sa interakcijom izmene. Ukoliko se kristal feromagnetika nalazi u spoljašnjem magnetnom polju $\vec{H}$, usmerenom u pravcu Z-ose koja je uzeta za osu kvantizacije, oblik Hamiltonijana za ovaj slučaj je sledeći:

$$\mathcal{H} = -g\mu_B H \sum_{\vec{n}} S^z_{\vec{n}} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n},\vec{m}} I_{\vec{n},\vec{m}} \vec{S}_{\vec{n}} \vec{S}_{\vec{m}} \tag{3.2}$$

g - Landeov faktor

μ_B - Bohrov magneton

$\vec{n},\vec{m}$ - vektori čvorova kristalne rešetke

S - operator spina

$I_{\vec{n},\vec{m}}$ - integral izmene

Integral izmene ima dimenzije energije i u ovom obliku odnosi se na interakciju $\vec{n}$ - tog i $\vec{m}$-tog atoma.

Za kristal u osnovnom stanju važi relacija:

$$\sum_{\vec{n}} S^z_{\vec{n}} |0\rangle = NS|0\rangle \tag{3.3}$$

N - ukupan broj atoma kristala

S - maksimalni efektivni spin svakog atoma

odnosno, svi spinovi u osnovnom stanju su orijentisani u pravu z-ose - ose kvantizacije.

Za spinske operatore:

$$S^{\pm}_{\vec{n}} = S^x_{\vec{n}} \pm i S^y_{\vec{n}} \quad ; \quad S^z_{\vec{n}} , \tag{3.4}$$

s obzirom na važeće komutacione relacije

$$[S^{+}_{\vec{n}}, S^{-}_{\vec{m}}] = 2S^{z}_{\vec{n}}\delta_{\vec{n},\vec{m}}\, ; \; [S^{\pm}_{\vec{n}}, S^{z}_{\vec{m}}] = \mp S^{\pm}_{\vec{n}}\delta_{\vec{n},\vec{m}}$$

$$\{S^{+}_{\vec{n}}, S^{-}_{\vec{m}}\} = 2S(S+1) - 2(S^{z}_{\vec{n}})^{2}\, ; \; (S^{\pm}_{\vec{n}})^{2S+1} = 0 \qquad (3.5)$$

vidimo da nemaju ni bozonsku ni fermionsku kinematiku. S obzirom da se kod rešavanja problema čvrstih tela vrlo često vrši prelaz u impulsni prostor, pomoću Fourier transformacija koje nisu kanoničke za ove operatore, ove komutacione relacije se ne održavaju. Ovo su dva osnovna problema koji otežavaju teorijsko ispitivanje Heisenbergovog feromagnetika. Njih su prvo pokušali da reše Holstein i Primakoff zamenjujući spinske operatore Bose operatorima. Taj prelaz je dao i Bloch relacijama :

$$S^{+}_{\vec{n}} = B^{-}_{\vec{n}}\sqrt{2S}\, ; \; S^{-}_{\vec{n}} = B^{+}_{\vec{n}}\sqrt{2S}\, ; \; S^{z}_{\vec{n}} = S - B^{+}_{\vec{n}}B^{-}_{\vec{n}} \qquad (3.6)$$

gde su $B^{+}_{\vec{n}}$ i $B^{-}_{\vec{n}}$ operatori kreacije i anihilacije bozona.

Na ovaj način se dobija za Heisenbergov feromagnetik ekvivalentan bozonski sistem čiji zakon disperzije za magnone ima sledeći oblik:

$$E_{\vec{k}} = g\mu_B H + S(J_0 - J_{\vec{k}}) \qquad (3.7)$$

gde je:

$$J_{\vec{k}} = \sum_{\vec{n}} J_{0\vec{n}}\, e^{i\vec{k}\vec{n}} \qquad (3.8)$$

Ukoliko se za slučaj niskih temperatura i za slučaj da je H = 0, razvije zakon disperzije (3.7) isključivo po kvadratnim članovima tada se za relativnu magnetizaciju

$$\sigma = \frac{\langle S^{z}_{\vec{n}}\rangle}{S} \qquad (3.9)$$

dobija Blochov zakon

$$\sigma = 1 - \frac{1}{S}Z_{3/2}\tau^{3/2}\, ; \; \tau = \frac{kT}{4\pi S J_0}\, ; \; Z_{3/2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}} \qquad (3.10)$$

koji daje promenu magnetizacije s temperaturom. Ovaj zakon je kasnije korigovan. Dyson je pokazao da Blochov zakon magnetizacije ima korekcije dva tipa, i to: članove proporcionalne $T^{5/2}$ i $T^{7/2}$ koji potiču od viših stepena talasnog vektora $\vec{k}$ po kom se razvija zakon disperzije (3.7) i popravku proporcionalne T^4 i istog znaka, koja dolazi od anharmonijskih magnonskih efekata. Na osnovu ovoga, on daje sledeći izraz za magnetizaciju na niskim temperaturama

$$\sigma = \sigma_{BL} + \sigma_{ANH} \tag{3.11}$$

gde je:

$$\sigma_{BL} = 1 - \frac{1}{S}\left[\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\tau^{3/2} + \frac{3}{4}\pi\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\tau^{5/2} + \frac{33}{32}\zeta\left(\frac{7}{2}\right)\tau^{7/2} + \cdots\right]$$

$$\sigma_{ANH} = -\frac{1}{S}\, 6\pi\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\tau^4 \; ; \quad \tau = \frac{kT}{\frac{2}{3}\pi S J_0} \tag{3.12}$$

U svim ovim analizama zanemaren je uticaj magnetne anizotropije. Ipak, kod izvesnih feromagnetnih materijala magnetno-kristalografska anizotropija ima znatni uticaj na njihove magnetne osobine, što će se videti u toku daljeg rada.

4. HAMILTONIJAN ANIZOTROPNOG FEROMAGNETIKA

Kao što je pomenuto, u ovom radu biće razmatrana kristalna struktura koju grade magnetni joni s neparnim brojem elektrona koji formiraju prostu kubnu feromagnetnu rešetku. Interakcija izmene ovih magnetnih jona u osnovnom stanju u opštem slučaju anizotropna. S obzirom da ova interakcija brzo opada s rastojanjem dovoljno je zadržati se samo na interakcijama izmene medju najbližim susedima.

Razmotrimo slučaj spina $S=\frac{1}{2}$ za koji je magnetni moment magnetnih jona u osnovnom stanju $\vec{M}=g\mu_B\vec{S}$.

Hamiltonijan, koji daje interakciju (n,m) para magnetnih jona u pravcu z-ose izražen spinskim operatorima ima sledeći oblik (kao što je dato u radu [2]).

$$\mathcal{H}_{\vec{n}\vec{m}} = J_{\parallel} S^z_{\vec{n}} S^z_{\vec{m}} + J_{\perp}\left(S^x_{\vec{n}} S^x_{\vec{m}} + S^y_{\vec{n}} S^y_{\vec{m}}\right) \tag{4.1}$$

i analogno za x i y pravce.

Ako uvedemo oznake $J = -J_{\perp}$ i $J' = J_{\parallel} - J_{\perp}$

ukupni Hamiltonijan dobija oblik:

$$\mathcal{H} = -J\sum_{\vec{n}\vec{m}} \vec{S}_{\vec{n}}\vec{S}_{\vec{m}} + J'\sum_{\vec{n}}\sum_{r=1}^{3} S^r_{\vec{n}} S^r_{\vec{n}+\vec{\varepsilon}_r} - g\mu_B H\sum_{\vec{n}} S^z_{\vec{n}} \tag{4.2}$$

Iz poslednje formule vidimo da gornji Hamiltonijan opisuje izotropni Heisenbergov feromagnetik u slučaju kada je $J'=0$. Uslovi pod kojima Hamiltonijan (4.2) opisuje feromagnetno stanje, dati su u radu [2] te ćemo ih ovde samo navesti. Feromagnetna konfiguracija postoji pod uslovom da je $J_{\perp}<0$ i $J_{\parallel}<0$, i ose lake magnetizacije su x,y, odnosno z-osa. Zbog toga smo spoljašnje polje usmerili u pravcu z-ose i u toku daljeg rada smatra se da su gornji uslovi ispunjeni. Za slučaj $S=\frac{1}{2}$ spinski operatori se mogu zameniti Pauli operatorima na sledeći način:

$$S^-_{\vec{n}} = P^+_{\vec{n}} \;;\quad S^+_{\vec{n}} = P_{\vec{n}} \;;\quad \frac{1}{2} - S^z_{\vec{n}} = P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}} \tag{4.3}$$

tako da ćemo dalju analizu vršiti pomoću Hamiltonijana

$$\mathcal{H} = H_0 + H_2 + H_4 \tag{4.4}$$

gde je:

$$H_0 = -SN\Gamma - \frac{1}{2}S^2 N J_0 + NJ'S^2$$

$$H_2 = \Delta\sum_{\vec{n}} P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} J_{\vec{n}\vec{m}} P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}} + \frac{1}{4}\sum_{\vec{n}\vec{m}} J'_{\vec{n}\vec{m}}\left(\delta_{\vec{m},\vec{n}+\vec{\varepsilon}_x} + \right.$$

$$\left. + \delta_{\vec{m},\vec{n}-\vec{\varepsilon}_x} + \delta_{\vec{m},\vec{n}+\vec{\varepsilon}_y} + \delta_{\vec{m},\vec{n}-\vec{\varepsilon}_y}\right) P^+_{\vec{n}} P_{\vec{m}} +$$

$$+ \frac{1}{4}\sum_{\vec{n}\vec{m}} J'_{\vec{n}\vec{m}}\left(\delta_{\vec{m},\vec{n}+\vec{\varepsilon}_x} - \delta_{\vec{m},\vec{n}+\vec{\varepsilon}_y}\right)\left(P_{\vec{n}} P_{\vec{m}} + P^+_{\vec{n}} P^+_{\vec{m}}\right)$$

$$H_4 = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} J_{\vec{n}\vec{m}} P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}} P^+_{\vec{m}} P_{\vec{m}} + \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} \left(\delta_{\vec{m},\vec{n}+\vec{\varepsilon}_z} + \delta_{\vec{m},\vec{n}-\vec{\varepsilon}_z}\right)\cdot \tag{4.5}$$

$$\cdot P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}} P^+_{\vec{m}} P_{\vec{m}}$$

$$\Gamma = g\mu_B H \;; \quad J_0 = \sum_{\vec{n}} J_{0\vec{m}} \;; \quad \Delta = \Gamma + \frac{1}{2}J_0 - J'$$

Prelaskom na Bose operatore preko Dyson-ove bozonske reprezentacije za Pauli operatore:

$$P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}} \approx B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \;; \quad P_{\vec{n}} \approx B_{\vec{n}} - B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \;, \tag{4.6}$$

$$P^+_{\vec{n}} \approx B^+_{\vec{n}} \;; \quad [P_{\vec{n}}, P^+_{\vec{n}}] = 1 - 2B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}$$

gornje relacije dobijaju sledeći oblik:

$$H_2' = \Delta\sum_{\vec{n}} B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} J_{\vec{n}\vec{m}} B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} + \frac{1}{4}\sum_{\vec{n}\vec{m}} J'_{\vec{n}\vec{m}}$$

$$\left(\delta_{\vec{m},\vec{n}+\vec{\varepsilon}_x} + \delta_{\vec{m},\vec{n}-\vec{\varepsilon}_x} + \delta_{\vec{m},\vec{n}+\vec{\varepsilon}_y} + \delta_{\vec{m},\vec{n}-\vec{\varepsilon}_y}\right) B^+_{\vec{n}} B_{\vec{m}} +$$

$$+\frac{1}{4}\sum_{\vec{n}\vec{m}} J'_{\vec{n}\vec{m}} \left(\delta_{\vec{m},\vec{n}+\vec{\varepsilon}_x} + \delta_{\vec{m},\vec{n}+\vec{\varepsilon}_y}\right)\left(B_{\vec{n}} B_{\vec{m}} + B^+_{\vec{n}} B^+_{\vec{m}}\right) \tag{4.7}$$

$$H_4' = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} J_{\vec{n}\vec{m}} B^+_{\vec{n}} B^+_{\vec{m}} B_{\vec{n}} B_{\vec{m}} + \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} J'_{\vec{n}\vec{m}} \left(\delta_{\vec{m},\vec{n}+\vec{\varepsilon}_z} + \delta_{\vec{m},\vec{n}-\vec{\varepsilon}_z}\right)$$

$$B^+_{\vec{n}} B_{\vec{m}} B_{\vec{n}} B_{\vec{m}} + \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} J_{\vec{n}\vec{m}} B^+_{\vec{n}} B^+_{\vec{m}} B_{\vec{m}} B_{\vec{m}} - \frac{1}{4}\sum_{\vec{n}\vec{m}} J'_{\vec{n}\vec{m}} \left(\delta_{\vec{m},\vec{n}+\vec{\varepsilon}_x} +\right.$$

$$\left. + \delta_{\vec{m},\vec{n}+\vec{\varepsilon}_x} + \delta_{\vec{m},\vec{n}+\vec{\varepsilon}_y} + \delta_{\vec{m},\vec{n}-\vec{\varepsilon}_y}\right) B^+_{\vec{n}} B^+_{\vec{m}} B_{\vec{m}} B_{\vec{m}} - \frac{1}{4}\sum_{\vec{n}\vec{m}} J'_{\vec{n}\vec{m}} \left(\delta_{\vec{m},\vec{n}+\vec{\varepsilon}_x} -\right.$$

$$\left. - \delta_{\vec{m},\vec{n}+\vec{\varepsilon}_y}\right)\left(B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{m}} + B^+_{\vec{m}} B_{\vec{n}} B_{\vec{m}} B_{\vec{m}}\right)$$

Prelaskom u inverzan (impulsni) prostor pomoću Fourier transforma oblika:

$$B_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{n}} \tag{4.8}$$

dobijamo:

$$H_2' = \sum_{\vec{k}} E_0(\vec{k}) B^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}} + \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\left[\gamma(\vec{k}) B_{-\vec{k}} B_{\vec{k}} + h.c\right] \tag{4.9}$$

gde je:

$$E_0(\vec{k}) = \Delta - \frac{1}{2}J(\vec{k}) + \frac{J'}{2}\alpha(\vec{k}) \;; \quad \gamma(\vec{k}) = \frac{J'}{2}\left(e^{-ik_x a} - e^{-ik_y a}\right)$$

$$J(\vec{k}) = J\sum_{\vec{\lambda}} e^{i\vec{k}\vec{\lambda}} \;; \quad \alpha(\vec{k}) = \cos k_x a + \cos k_y a \tag{4.10}$$

$$H_{4d} = -\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3}\left[\frac{1}{2}J(\vec{k}_1-\vec{k}_3) - J'\cos(\vec{k}_1-\vec{k}_3)_z a\right] B^+_{\vec{k}_1} B^+_{\vec{k}_2} B_{\vec{k}_3} B_{\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3} \tag{4.11}$$

$$H_{4c}=\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3}\left[\frac{J(\vec{k}_1)}{2}-\frac{J'}{2}\alpha(\vec{k}_1)\right]B^+_{\vec{k}_1}B^+_{\vec{k}_2}B_{\vec{k}_3}B_{\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3}-\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3}\frac{J'}{2}(\cos k_{1x}a-\cos k_{1y}a)B^+_{\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3}B_{\vec{k}_1}B_{\vec{k}_2}B_{\vec{k}_3}$$

Hamiltonijan H_{4d} opisuje dinamičku interakciju u ekvivalentnom bozonskom sistemu,a to je ustvari, interakcija koja je postojala i medju paulionima. S druge strane, Hamiltonijan H_{4c} se pojavljuje u ekvivalentnom bozonskom sistemu isključivo kao posledica prelaska sa Pauli na Bose operatore, te ovakvu interakciju nazivamo kinematičkom. Ona nam u suštini kazuje da smo paulionski sistem približno predstavili bozonskim sistemom. Jasno da u pravom bozonskim sistemima se ne pojavljuju kinematičke interakcije.

Posle sredjivanja i uvodjenja novih oznaka možemo pisati:

$$H=H_0+\sum_{\vec{k}}E_0(\vec{k})B^+_{\vec{k}}B_{\vec{k}}+\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\left[\gamma(\vec{k})B_{\vec{k}}B_{-\vec{k}}+h.c.\right]+$$
$$+\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3}\Big[V(\vec{k}_1,\vec{k}_3)B^+_{\vec{k}_1}B^+_{\vec{k}_2}B_{\vec{k}_3}B_{\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3}+W(\vec{k}_1)\cdot$$
$$B^+_{\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3}B_{\vec{k}_1}B_{\vec{k}_2}B_{\vec{k}_3}\Big]$$

gde je:

$$V(\vec{k}_1,\vec{k}_3)=-\frac{1}{2}J(\vec{k}_1-\vec{k}_3)+J'\cos(k_{1z}-k_{3z})a+\frac{1}{2}J(\vec{k}_1)-\frac{J'}{2}\alpha(\vec{k}_1) \tag{4.12}$$
$$W(\vec{k}_1)=-\frac{J'}{2}(\cos k_{1x}a-\cos k_{1y}a)$$

U sledećim paragrafima dvovremenskim temperaturskim Greenovim funkcijama odredićemo spektar elementarnih ekscitacija i magnetizaciju sistema opisanu gornjim Hamiltonijanom.

5. SPEKTAR ELEMENTARNIH EKSCITACIJA U ANIZOTROPNOM FEROMAGNETIKU

Koristeći metod dvovremenskih temperaturskih Greenovih funkcija koji je dat u [4],spektar elementarnih ekscitacija u anizotropnom feromagnetiku, izračunaćemo rešavajući sistem jednačina za Greenove funkcije

$$\langle\langle B(\vec{k},t)\,|\,B^+(\vec{k},t')\rangle\rangle \quad \text{i} \quad \langle\langle B^+(-\vec{k},t)\,|\,B^+(\vec{k},t')\rangle\rangle\ ,$$

koristeći Hamiltonijan iz prethodnog paragrafa. U energetskoj reprezentaciji jednačine kretanja za date funkcije su oblika:

$$E\langle\langle B_{\vec{k}} | B^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle_E = \frac{i}{2\pi} + \langle\langle [B_{\vec{k}}, H] | B^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle_E \tag{5.1}$$

$$E\langle\langle B^{+}_{-\vec{k}} | B^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle_E = \langle\langle [B^{+}_{-\vec{k}}, H] | B^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle_E$$

Pošto se izračunaju komutatori koji figurišu u (4.13) dobijamo sledeći sistem jednačina $G_{\vec{k}}(E) \equiv \langle\langle B_{\vec{k}} | B^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle$, $D^{+}_{k}(E) \equiv \langle\langle B^{+}_{-\vec{k}} | B^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle$

$$[E-E_0]\, G(\vec{k},E) = \frac{i}{2\pi} - W(\vec{k})\, D^{+}_{k}(E) + \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}[V(\vec{k},\vec{q}_2) + V(\vec{q}_1,\vec{q}_2)]\langle\langle B^{+}_{\vec{q}_1} B_{\vec{q}_2} B_{\vec{k}+\vec{q}_1-\vec{q}_2} | B^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle + \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2} W(\vec{k}-\vec{q}_1-\vec{q}_2)\langle\langle B_{\vec{k}-\vec{q}_1-\vec{q}_2} B_{\vec{q}_1} B_{\vec{q}_2} | B^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle \tag{5.2}$$

$$[E+E_0]\, D^{+}(\vec{k},E) = W(\vec{k})\, G_{\vec{k}}(E) - \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}[V(-\vec{k},\vec{q}_1) + V(\vec{q}_1,\vec{q}_2)]\langle\langle B^{+}_{-\vec{k}+\vec{q}_1-\vec{q}_2} B^{+}_{\vec{q}_2} B_{\vec{q}_1} | B^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle - \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}[W(\vec{k}) + 2W(\vec{q}_1)\langle\langle B_{-\vec{k}+\vec{q}_1+\vec{q}_2} B_{\vec{q}_1} B_{\vec{q}_2} | B^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle \tag{5.3}$$

Gornji sistem jednačina približno ćemo rešiti sledećim dekuplovanjima dvočestičnih Greenovih funkcija

$$\langle\langle B^{+}_{\vec{q}_1} B_{\vec{q}_2} B_{\vec{k}+\vec{q}_1-\vec{q}_2} | B^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle \approx \langle B^{+}_{\vec{q}_1} B_{\vec{q}_1}\rangle[\delta_{\vec{k}\vec{q}_2}\langle\langle B_{\vec{k}} | B^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle + \delta_{\vec{q}_1\vec{q}_2}\langle\langle B_{\vec{k}} | B^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle] + \langle B_{-\vec{q}_2} B_{\vec{q}_2}\rangle\, \delta_{\vec{k}+\vec{q}_1}\langle\langle B^{+}_{-\vec{k}} | B^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle$$

$$\langle\langle B^{+}_{-\vec{k}+\vec{q}_1-\vec{q}_2} B^{+}_{\vec{q}_2} B_{\vec{q}_1} | B^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle \approx [\langle B^{+}_{\vec{q}_1} B_{\vec{q}_1}\rangle(\delta_{\vec{q}_1-\vec{q}_2} + \delta_{\vec{k}+\vec{q}_2})]\langle\langle B^{+}_{-\vec{k}} | B^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle + \delta_{\vec{q}_1-\vec{k}}\langle B^{+}_{-\vec{q}_2} B^{+}_{\vec{q}_2}\rangle\langle\langle B_{\vec{k}} | B^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle$$

Treba napomenuti da zbog oblika Hamiltonijana srednje vrednosti tipa $\langle B_{-\vec{k}} B_{\vec{k}}\rangle$ i $\langle B^{+}_{-\vec{k}} B^{+}_{\vec{k}}\rangle$ su različite od nule te smo prilikom dekuplovanja morali o tome voditi računa.

Nakon dekuplovanja i sredjivanja dobijamo sistem jednačina oblika:

$$[E - \tilde{X}(\vec{k})]\, G_{\vec{k}}(E) + \tilde{Y}(\vec{k})\, D^{+}_{\vec{k}}(E) = \frac{i}{2\pi} \tag{5.4}$$

$$-[\tilde{Y}^{*}(\vec{k}) - \tilde{y}(\vec{k})]\, G_{\vec{k}}(E) + [E - \tilde{X}(\vec{k})]\, D^{+}_{\vec{k}}(E) = 0$$

u kom figurišu sledeće veličine

$$\tilde{X}(\vec{k}) = E_0(\vec{k}) + M_D'(\vec{k}) + N(\vec{k})$$

$$\tilde{Y}(\vec{k}) = W(\vec{k}) - \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \langle B_{-\vec{q}} B_{\vec{q}} \rangle \left[J(\vec{k}) - J'\alpha(\vec{k}) - J(\vec{k}-\vec{q}) + 2J'\cos(k_z - q_z)a \right] \tag{5.5}$$

$$\tilde{y}(\vec{k}) = \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \langle B^+_{\vec{q}} B_{\vec{q}} \rangle \left[4W(\vec{k}) + 2W(\vec{q}) \right]$$

gde je:

$$M_D' = \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \langle B^+_{\vec{q}} B_{\vec{q}} \rangle \left[J(\vec{k}) - J'\alpha(\vec{k}) + J(\vec{q}) - J'\alpha(\vec{q}) - J_0 + 2J' - J'(\vec{k}-\vec{q}) + 2J'\cos(k_z - q_z)a \right] \tag{5.6}$$

$$N(\vec{k}) = \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \langle B_{-\vec{q}} B_{\vec{q}} \rangle \left[W(\vec{k}) + 2W(\vec{q}) \right]$$

Gornji sistem jednačina s dve nepoznate funkcije rešićemo

pomoću determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} E - \tilde{X}(\vec{k}) & \tilde{Y}(\vec{k}) \\ -[\tilde{Y}^*(\vec{k}) - \tilde{y}(\vec{k})] & E + \tilde{X}(\vec{k}) \end{vmatrix} \tag{5.7}$$

$$\Delta = E^2 - \tilde{X}^2(\vec{k}) + \tilde{Y}(\vec{k})\left[\tilde{Y}^*(\vec{k}) - \tilde{y}(\vec{k}) \right]$$

Energija elementarnih ekscitacija odredjena je polom Greenove funkcije tj. uslovom Δ =0 (da je determinanta jednaka nuli) što za energiju elementarnih ekscitacija daje

$$\tilde{\mathcal{E}}(\vec{k}) = \sqrt{\tilde{X}^2(\vec{k}) - \tilde{Y}(\vec{k})\left[\tilde{Y}^*(\vec{k}) - \tilde{y}(\vec{k}) \right]} \tag{5.8}$$

Energija elementarnih ekscitacija je za slučaj izotropnog feromagnetika data izrazom koji je dobio Dyson:

$$\tilde{\mathcal{E}}_D(\vec{k}) = E_0(\vec{k}) + \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} \langle B^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}} \rangle \left[J_{\vec{k}} + J_{\vec{q}} - J_0 - J_{\vec{k}-\vec{q}} \right] \tag{5.9}$$

i koji sledi iz izraza (5.8) za slučaj $J'=0$.

S obzirom da smo izračunali deteminantu sistema možemo sada naći obe nepoznate funkcije $G_{\vec{k}}(E)$ i $D^+_{\vec{k}}(E)$

$$G_{\vec{k}}(E) = \frac{i}{2\pi}\frac{E + \tilde{X}_{\vec{k}}}{E^2 - \tilde{\mathcal{E}}^2(\vec{k})} = \frac{i}{2\pi}\frac{1}{2\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}}\left(\frac{\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}} + \tilde{X}_{\vec{k}}}{E - \tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}} + \frac{\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}} - \tilde{X}_{\vec{k}}}{E + \tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}} \right) \tag{5.10}$$

$$D^+_{\vec{k}}(E) = -\frac{i}{2\pi}\frac{-\tilde{Y}^*_{\vec{k}} + \tilde{y}_{\vec{k}}}{E^2 - \tilde{\mathcal{E}}^2_{\vec{k}}} = -\frac{i}{2\pi}\frac{\tilde{y}_{\vec{k}} - \tilde{Y}^*_{\vec{k}}}{2\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}}\left(\frac{1}{E - \tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}} - \frac{1}{E + \tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}} \right)$$

Koristeći Greenovu funkciju $G_{\vec{k}}(E)$ dobijenu prethodnim računom može se izračunati populacioni broj bozona uz korišćenje spektralne intenzivnosti za Greenove funkcije:

$$\langle B^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{Re}\, G_{\vec{k}}(E)}{e^{\frac{E}{\theta}} - 1}\, dE \tag{5.11}$$

što daje:

$$\langle B^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}} \rangle = -\frac{1}{2} + \frac{\tilde{X}_{\vec{k}}}{2\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}} \operatorname{cth} \frac{\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}}{2\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{X}_{\vec{k}}}{\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}} \operatorname{cth} \frac{\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}}{2\theta} - 1 \right) \tag{5.12}$$

Koristeći Greenovu funkciju $D^+_{\vec{k}}$ i spektralnu intenzivnost za tu funkciju dobijamo (sličnim računom) da je

$$\langle B^+_{\vec{k}} B^+_{-\vec{k}} \rangle = \frac{\tilde{Y}^*_{\vec{k}} - \tilde{\mathcal{Y}}_{\vec{k}}}{2\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}} \operatorname{cth} \frac{\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}}{\theta} \tag{5.13}$$

gde je $\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}$ energija elementarnih ekscitacija bozona data izrazom (5.8).

Da bi odredili energiju elementarnih ekscitacija pomoću relacije (5.8) (odnosno veličine $\tilde{X}_{\vec{k}}$, $\tilde{Y}_{\vec{k}}$ i $\tilde{\mathcal{Y}}_{\vec{k}}$) moramo odrediti i veličinu $\langle B_{-\vec{k}} B_{\vec{k}} \rangle$ koja je različita od $\langle B^+_{-\vec{k}} B_{\vec{k}} \rangle$, s obzirom da polazni Hamiltonijan nije ermitski. U tom cilju moramo odrediti Greenovu funkciju $D_{\vec{k}}(E) = \langle\langle B_{-\vec{k}} | B_{\vec{k}} \rangle\rangle_E$ koju ćemo izračunati simultanim rešavanjem jednačina kretanja za sledeće Greenove funkcije $G^+_{\vec{k}}(E) \equiv \langle\langle B^+_{\vec{k}} | B_{\vec{k}} \rangle\rangle$ i $D_{\vec{k}}(E) \equiv \langle\langle B_{-\vec{k}} | B_{\vec{k}} \rangle\rangle$

$$\begin{aligned} E\langle\langle B^+_{\vec{k}} | B_{\vec{k}} \rangle\rangle &= -\frac{i}{2\pi} - \langle\langle B^+_{\vec{k}} | [B_{\vec{k}}, H] \rangle\rangle \\ E\langle\langle B_{-\vec{k}} | B_{\vec{k}} \rangle\rangle &= \langle\langle [B_{-\vec{k}}, H] | B_{\vec{k}} \rangle\rangle \end{aligned} \tag{5.14}$$

Izračunavanjem komutatora $[B_{\vec{k}}, H]$ i zatim dekuplovanjem, dobija se sledeći sistem jednačina

$$\begin{aligned} (E + \tilde{X}_{\vec{k}}) G^+_{\vec{k}}(E) - [\tilde{Y}^*_{\vec{k}} - \tilde{\mathcal{Y}}_{\vec{k}}] D_{\vec{k}}(E) &= -\frac{i}{2\pi} \\ \tilde{Y}_{\vec{k}}\, G^+_{\vec{k}}(E) + (E - \tilde{X}_{\vec{k}}) D_{\vec{k}}(E) &= 0 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Determinanta ovog sistema je

$$\Delta = \begin{vmatrix} E+\tilde{X}_{\vec{k}} & -\tilde{Y}^{*}_{\vec{k}}+\tilde{y}_{\vec{k}} \\ \tilde{Y}_{\vec{k}} & E-\tilde{X}_{\vec{k}} \end{vmatrix} \tag{5.16}$$

$$\Delta = E^2 - \tilde{X}^2_{\vec{k}} + \tilde{Y}_{\vec{k}}(\tilde{Y}^{*}_{\vec{k}} - \tilde{y}_{\vec{k}})$$

Energija elementarnih ekscitacija (za $\Delta = 0$):

$\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}} = \sqrt{\tilde{X}^2_{\vec{k}} - \tilde{Y}_{\vec{k}}(\tilde{Y}^{*}_{\vec{k}} - \tilde{y}_{\vec{k}})}$, poklapa se sa već izračunatom.

Pomoću determinante možemo dobiti nepoznate Greenove funkcije $G^{+}_{\vec{k}}(E)$ i $D_{\vec{k}}(E)$:

$$G^{+}_{\vec{k}}(E) = G_{\vec{k}}(-E) = -\frac{i}{2\pi}\,\frac{E-\tilde{X}_{\vec{k}}}{E^2-\tilde{\mathcal{E}}^2_{\vec{k}}} \tag{5.17}$$

$$D_{\vec{k}}(E) = \frac{i}{2\pi}\,\frac{\tilde{Y}_{\vec{k}}}{E^2-\tilde{\mathcal{E}}^2_{\vec{k}}} \tag{5.18}$$

Pomoću spektralnih intenzivnosti dobijamo:

$$\langle B_{\vec{k}} B^{+}_{\vec{k}}\rangle = \frac{1}{2}\left(\frac{\tilde{X}_{\vec{k}}}{\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}}\,\mathrm{cth}\,\frac{\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}}{2\theta} + 1\right)$$

$$\langle B_{\vec{k}} B_{-\vec{k}}\rangle = \frac{\tilde{Y}_{\vec{k}}}{2\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}}\,\mathrm{cth}\,\frac{\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}}{2\theta} \tag{5.19}$$

Konačno vidimo, da simultanim rešavanjem sistema integralnih jednačina (5.5), (5.6), (5.12) i (5.19) možemo odrediti energiju elementarnih ekscitacija. Principijelno, taj zadatak nije težak, ali s obzirom da se radi o nelinearnim integralnim jednačinama konkretno izračunavanje je glomazno i praktično neizvodljivo. U daljem radu ćemo računati u linearnoj aproksimaciji po parametru anizotropnosti $\delta = \frac{J'}{J}$ i u aproksimaciji malih talasnih vektora, tako što ćemo zakon disperzije izračunati s tačnošću do šestog stepena po talasnom vektoru. Upravo takva tačnost, kao što ćemo kasnije videti omogućava nam da magnetizaciju izračunamo s tačnošću do $T^{9/2}$ čime možemo naš rezultat uporediti s klasičnim Dysonovim rezultatom za magnetizaciju izotropnog feromagnetika.

Ako uvedemo bezdimenzione veličine $\mathcal{E}_{\vec{k}} = \frac{\tilde{\mathcal{E}}_{\vec{k}}}{J}$, $X_{\vec{k}} = \frac{\tilde{X}_{\vec{k}}}{J}$ itd.
izraz za energiju elementarnih ekscitacija dobija oblik:

$$\mathcal{E}_{\vec{q}} = \sqrt{X^{i2}_{\vec{q}} + 2\delta X^{i}_{\vec{q}} X^{a}_{\vec{q}} + \delta^2 (X^{a2}_{\vec{q}} + \tilde{y}_{\vec{q}} \tilde{Y}_{\vec{q}} - \tilde{Y}^2_{\vec{q}})} \qquad (5.20)$$

U linearnoj aproksimaciji po δ, iz gornje jednačine sledi

$$\mathcal{E}_{\vec{q}} \approx X_{\vec{q}} = X^{i}_{\vec{q}} + \delta X^{a}_{\vec{q}} \qquad (5.21)$$

Ako imamo u vidu izraze (5.5) i (5.6) koji definišu veličinu $X_{\vec{k}}$ zaključujemo da je izotropni deo $X^{i}_{\vec{q}}$ jednak Dysonovom rezultatu tj.

$$X^{i}_{\vec{k}} = \mathcal{E}_D(\vec{k}) = \frac{E_0(\vec{k})}{J} + \frac{1}{NJ} \sum_{\vec{q}} \langle B^{+}_{\vec{q}} B_{\vec{q}} \rangle [J_{\vec{k}} + J_{\vec{q}} - J_0 - J_{\vec{k}-\vec{q}}]$$
$$= \frac{\Gamma}{J} + a_{\vec{k}} + \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \frac{M(\vec{k},\vec{q})}{e^{\frac{X_{\vec{q}}}{\theta'}} - 1} \qquad (5.22)$$

Ako u (5.22) predjemo sa sume na integral $\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} \rightarrow \frac{V}{N}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3\vec{k}$
i sve veličine razvijemo u red po talasnom vektoru do stepena $|\vec{k}|^6$ dobijamo:

$$X^{i}_{\vec{k}} = E_D(\vec{k}) = \frac{1}{720}\sum_{i=1}^{3} k_i^6 + \left[\frac{1}{24} - \pi Z_{\frac{5}{2}}(\alpha)\rho^{\frac{5}{2}}\right]\sum_{i=1}^{3} k_i^4 +$$
$$+\left[\frac{1}{2} - \pi Z_{\frac{5}{2}}(\alpha)\rho^{\frac{5}{2}} + \frac{\pi^2}{2} Z_{\frac{7}{2}}(\alpha)\rho^{\frac{7}{2}}\right]\sum_{i=1}^{3} k_i^2 \qquad (5.23)$$
$$\rho = \frac{\theta}{2\pi J} = \frac{\theta'}{2\pi}\ ;\ Z_p(\alpha) = \sum_n \frac{e^{-(n+1)\alpha}}{(n+1)^p}\ ;\ \alpha = \frac{\Gamma}{\theta J}$$

Na analogan način izračunavamo i anizotropni deo energije koji je na osnovu jednačina (5.5) i (5.6) dat integralnom jednačinom:

$$X^{a}_{\vec{k}} = -b_{\vec{k}} - \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \frac{M'(\vec{k},\vec{q})}{e^{\frac{X^i_{\vec{q}}}{\theta'}} - 1} - \frac{1}{N\theta'}\sum_n (n+1) \sum_{\vec{q}} e^{-\frac{(n+1)}{\theta'} X^{i}_{\vec{q}}} M(\vec{k},\vec{q}) \times X^{a}_{\vec{q}} \qquad (5.24)$$

Opšti izraz za $X^{a}_{\vec{k}}$ s tačnošću do $|k|^6$ ima oblik:

$$X^{a}_{\vec{k}} = X^{a}_{0}(\theta) + \sum_i A_i(\theta) k_i^2 a^2 + \sum_i B_i(\theta) k_i^4 a^4 + \sum_i C_i(\theta) k_i^6 a^6 + \cdots \qquad (5.25)$$

Iz izraza za magnetizaciju kao što ćemo kasnije videti, sledi da temperaturska zavisnost koeficijenata u (5.25) mora biti izračunata sa sledećom tačnošću:

$$\chi_0^a(\theta)\sim\theta^{\frac{7}{2}};\ A_i(\theta)\sim\theta^{\frac{5}{2}};\ B_i(\theta)\sim\theta^{\frac{3}{2}};\ C_i(\theta)\sim\theta^{\frac{1}{2}} \qquad (5.26)$$

tako da konačno dobijamo:

$$\begin{aligned}
\chi_0^a(\theta) &= \pi Z_{\frac{5}{2}}(\alpha)\left(\frac{\theta'}{2\pi}\right)^{\frac{5}{2}} - \frac{5}{4}\pi^2 Z_{\frac{7}{2}}(\alpha)\left(\frac{\theta'}{2\pi}\right)^{\frac{7}{2}} + \mathcal{O}\left(\theta'^{\frac{9}{2}}\right)\\
A_x = A_y &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} Z_{\frac{3}{2}}(\alpha)\left(\frac{\theta'}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{61}{32}\pi Z_{\frac{5}{2}}(\alpha)\left(\frac{\theta'}{2\pi}\right)^{\frac{5}{2}} + \mathcal{O}\left(\theta'^{\frac{7}{2}}\right)\\
A_z &= -\frac{1}{2} Z_{\frac{3}{2}}(\alpha)\left(\frac{\theta'}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{7}{8}\pi Z_{\frac{5}{2}}(\alpha)\left(\frac{\theta'}{2\pi}\right)^{\frac{5}{2}} + \mathcal{O}\left(\theta'^{\frac{7}{2}}\right) \qquad (5.27)\\
B_x = B_y &= \frac{1}{24} - \frac{1}{24} Z_{\frac{3}{2}}(\alpha)\left(\frac{\theta'}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}\left(\theta'^{\frac{5}{2}}\right)\\
B_z &= \frac{1}{24} Z_{\frac{3}{2}}(\alpha)\left(\frac{\theta'}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} + \mathcal{O}\left(\theta'^{\frac{5}{2}}\right)\\
C_x = C_y &= -\frac{1}{720} \qquad C_z = 0
\end{aligned}$$

Koristeći relacije (5.23) i (5.27) izračunaćemo u sledećem paragrafu magnetizaciju sistema na niskim temperaturama.

6. MAGNETIZACIJA ANIZOTROPNOG FEROMAGNETA

Polazeći od opšteg izraza za relativnu magnetizaciju po čvoru rešetke za spin $S=\frac{1}{2}$

$$\sigma = \frac{\langle S^z_{\vec{n}}\rangle}{S} = 1 - 2\langle P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}}\rangle = 1 - \frac{2}{N}\sum_{\vec{k}}\langle B^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}}\rangle \qquad (6.1)$$

i koristeći rezultat (5.12) dobijamo

$$\sigma = 1 - \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}\left(\frac{X_{\vec{k}}}{\mathcal{E}_{\vec{k}}}\operatorname{cth}\frac{\mathcal{E}_{\vec{k}}}{2\theta'} - 1\right) \qquad (6.2)$$

Ukoliko se iskoristi identitet

$$\operatorname{cth}\frac{\mathcal{E}_{\vec{k}}}{2\theta} \equiv 1 + 2 f_B(\mathcal{E}_{\vec{k}}, \theta)$$

dobijamo da je relativna magnetizacija anizotropnog feromagnetika

$$\sigma = 1 - \underbrace{\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}\left(\frac{X_{\vec{k}}}{\mathcal{E}_{\vec{k}}} - 1\right)}_{\Delta\sigma_0} - \underbrace{\frac{2}{N}\sum_{\vec{k}}\frac{X_{\vec{k}}}{\mathcal{E}_{\vec{k}}} f_B(\mathcal{E}_{\vec{k}}, \theta)}_{\Delta\sigma(\theta)} \qquad (6.3)$$

gde član $\Delta\sigma_0$ daje devijaciju magnetizacije na apsolutnoj nuli, dok član $\Delta\sigma(\theta)$ daje temperatursku zavisnost magnetizacije. Na osnovu ovoga, prethodni izraz za relativnu magnetizaciju može se napisati kao:

$$\sigma = 1 - \Delta\sigma_0 - \Delta\sigma(\theta) \tag{6.4}$$

gde je:

$$\Delta\sigma_0 = \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}\left(\frac{X_{\vec{k}}}{\varepsilon_{\vec{k}}} - 1\right)$$
$$\Delta\sigma(\theta) = \frac{2}{N}\sum_{\vec{k}}\frac{X_{\vec{k}}}{\varepsilon_{\vec{k}}} f_B(\varepsilon_{\vec{k}}, \theta) \tag{6.5}$$

U našoj aproksimaciji, linearnoj po δ, s obzirom da je $X_{\vec{k}} \approx \varepsilon_{\vec{k}}$ sledi automatski da je $\Delta\sigma_0 = 0$ tj. devijacija magnetizacije na T=0 je proporcionalna δ^2 i višim stepenima koeficijenta anizotropnosti, ali na tome se nećemo zadržati jer je cilj rada izračunavanje temperaturske zavisnosti magnetizacije, tj. $\Delta\sigma(\theta)$.

U linearnoj aproksimaciji po δ izraz (6.5) dobija oblik $(X_{\vec{k}} = X^i_{\vec{k}} + \delta X^a_{\vec{k}})$:

$$\Delta\sigma(\theta) = \frac{2}{N}\sum_n e^{-\frac{(n+1)}{\theta'}\Gamma}\sum_{\vec{k}} e^{-\frac{(n+1)}{\theta}(X^i_{\vec{k}} + \delta X^a_{\vec{k}})}$$

$$\Delta\sigma(\theta) = \Delta\sigma_D(\theta) - \frac{2\delta}{\theta' N}\sum_n (n+1) e^{-\frac{(n+1)\Gamma}{\theta}}\sum_{\vec{k}} X^a_{\vec{k}} e^{-\frac{(n+1)}{\theta'}X^i_{\vec{k}}} \tag{6.6}$$

gde je $\Delta\sigma_D$ temperaturska zavisnost magnetizacije izotropnog feromagnetika, što možemo napisati u obliku

$$\Delta\sigma(\theta) = \Delta\sigma_D(\theta) - \delta\Delta\sigma_a(\theta) \tag{6.7}$$

U poslednjoj formuli $\Delta\sigma_D$ predstavlja Dysonov rezultat za magnetizaciju izotropnog feromagnetika, dok je $\Delta\sigma_a$ popravka usled anizotropije.

Opšti postupak za izračunavanje funkcija $\Delta\sigma_D(\theta)$ i $\Delta\sigma_a(\theta)$ pokazaćemo na primeru Dysonovog rezultata $\Delta\sigma_D(\theta)$, jer je procedura potpuno analogna i za $\Delta\sigma_a(\theta)$.

Na osnovu (6.6) imamo:

$$\Delta\sigma_D = \frac{2}{N}\sum_n e^{-\frac{(n+1)}{\theta'}\Gamma}\sum_{\vec{k}} e^{-\frac{(n+1)}{\theta}X^i_{\vec{k}}} =$$
$$= \frac{2}{N}\frac{V}{(2\pi)^3}\sum_n e^{-\frac{(n+1)}{\theta'}\Gamma}\iiint_{-\pi/a}^{\pi/a} e^{-\frac{(n+1)}{\theta'}X^i_{\vec{k}}}\, d^3\vec{k} \tag{6.8}$$

Zapišimo energiju izotropnog feromagnetika koja je data izrazom (5.23) na sledeći način:

$$X^i_{\vec{k}} = \sum_{i=1}^{3} a_i(\theta)(ak_i)^2 + \sum_{i=1}^{3} b_i(\theta)(ak_i)^4 + \sum_{i=1}^{3} c_i(\theta)(ak_i)^6 \tag{6.9}$$

Ako u integralu (6.8) uvedemo smene promenljivih

$$k_i = \sqrt{\frac{\theta'}{(n+1)a_i}} \qquad k_i^2 = \frac{\theta'}{(n+1)a_i}$$

$$k_i^4 = \left(\frac{\theta'}{(n+1)a_i}\right)^2 \qquad k_i^6 = \left(\frac{\theta'}{(n+1)a_i}\right)^3$$

granice integracije, pri niskim temperaturama možemo proširiti do beskonačnosti.

Razvijajući eksponencijalnu funkciju pod znakom integrala u red, na sledeći način

$$e^{-\frac{n+1}{\theta'}X^i_{\vec{k}}} = e^{-\frac{n+1}{\theta'}\sum_i a_i(\theta)(ak_i)^2}\left[1 - \frac{n+1}{\theta'}\left(\sum_i b_i(ak_i)^4 + \sum_i c_i(ak_i)^6\right) + \cdots\right]$$

i zadržavši se do članova proporcionalnih $\theta^{9/2}$ za $\Delta\sigma(\theta)$ dobijamo:

$$\Delta\sigma(\theta) = \theta'^{3/2} Z_{\frac{3}{2}}(\alpha)\frac{\Omega_0}{4\pi^{3/2}}\frac{1}{\sqrt{a_x a_y a_z}} - \theta'^{5/2} Z_{\frac{5}{2}}(\alpha)\frac{\Omega_0}{4\pi^2}\cdot$$
$$\frac{\Gamma(\frac{5}{2})}{\sqrt{a_x a_y a_z}}\sum_i \frac{b_i}{a_i^2} - \theta'^{7/2} Z_{\frac{7}{2}}(\alpha)\frac{\Omega_0}{\sqrt{a_x a_y a_z}}\left[\frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{4\pi^2}\sum_i \frac{c_i}{a_i^3} - \right. \tag{6.10}$$
$$\left. - \frac{\Gamma(\frac{9}{2})}{8\pi^2}\sum_i \frac{b_i^2}{a_i^4} - \frac{\Gamma^2(\frac{5}{2})}{4\pi^{5/2}}\sum_{i\neq j}\frac{b_i b_j}{a_i^2 a_j^2}\right] + O(\theta^{9/2})$$

$$\Omega_0 = \frac{V}{N} \qquad \Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\beta-1}\, dt$$

Da bi magnetizacija sadržavala sve članove do $\theta^{9/2}$ iz relacije (6.1o) zaključujemo da koeficijenti a_i, b_i i c_i moraju biti dati sa sledećom tačnošću:

$$a_i \sim \theta^{\frac{7}{2}} \qquad b_i \sim \theta^{\frac{5}{2}} \qquad c_i \sim \theta^{\frac{1}{2}}$$

kao što je i učinjeno u izrazu (5.23)

Konačno, zamenuvši koeficijente iz (5.23) u (6.10) dobijamo Dysonov rezultat za magnetizaciju izotropnog feromagneta na niskim temperaturama

$$\Delta\sigma_D(\theta) = 2Z_{\frac{3}{2}}(\theta)\,\rho^{\frac{3}{2}} + \frac{3\pi}{2}Z_{\frac{5}{2}}(\alpha)\,\rho^{\frac{5}{2}} + \frac{33\pi^2}{16}Z_{\frac{7}{2}}(\alpha)\,\rho^{\frac{7}{2}} + $$
$$+6\pi Z_{\frac{3}{2}}(\alpha)\,Z_{\frac{5}{2}}(\alpha)\,\rho^4$$

što je u saglasnosti sa izrazom (3.12) za slučaj $S=\frac{1}{2}$ i $H=0$

Potpuno analognom procedurom polazeći od jednačine za $\Delta\sigma_a(\theta)$

$$\Delta\sigma_a(\theta) = \frac{2}{\theta' N}\sum_n (n+1)\,e^{-(n+1)\alpha}\sum_{\vec{k}} X^a_{\vec{k}}\, e^{-\frac{(n+1)}{\theta'}X^i_{\vec{k}}} \tag{6.11}$$

i zakon disperzije $X^a_{\vec{k}}$, dobijamo:

$$\Delta\sigma_a(\theta) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \frac{2}{a^{3/2}(\theta)}\Big\{\pi^{3/2}Z_{\frac{1}{2}}(\alpha)\,X^a_0(\theta)\,\theta'^{1/2} - \pi Z_{\frac{3}{2}}(\alpha)\,\Gamma\!\left(\tfrac{5}{2}\right)$$
$$\sum_i \frac{b_i(\theta)}{a_i^2(\theta)}X^a_0(\theta)\,\theta'^{3/2} + \pi\,\Gamma\!\left(\tfrac{3}{2}\right)Z_{\frac{3}{2}}(\alpha)\sum_i\frac{A_i(\theta)}{a_i(\theta)}\theta'^{3/2} - Z_{\frac{5}{2}}(\alpha)$$
$$\Big[\pi\,\Gamma\!\left(\tfrac{7}{2}\right)\sum_i\frac{A_i(\theta)\,b_i(\theta)}{a_i^3(\theta)} + \sqrt{\pi}\,\Gamma\!\left(\tfrac{3}{2}\right)\Gamma\!\left(\tfrac{5}{2}\right)\sum_{i\neq j}\frac{A_i(\theta)}{a_i(\theta)}\,\frac{b_j(\theta)}{a_j(\theta)}\Big]\theta'^{5/2} \tag{6.12}$$
$$-Z_{\frac{7}{2}}(\alpha)\Big[\pi\,\Gamma\!\left(\tfrac{9}{2}\right)\sum_i\frac{A_i(\theta)\,c_i(\theta)}{a_i^4(\theta)} + \sqrt{\pi}\,\Gamma\!\left(\tfrac{3}{2}\right)\Gamma\!\left(\tfrac{7}{2}\right)\sum_{i\neq j}\frac{A_i(\theta)}{a_i(\theta)}\,\frac{c_j(\theta)}{a_j^3(\theta)}\Big]\theta'^{7/2}$$
$$+\frac{1}{2}Z_{\frac{7}{2}}(\alpha)\Big[\pi\,\Gamma\!\left(\tfrac{11}{2}\right)\sum_i\frac{A_i(\theta)\,b_i^2(\theta)}{a_i^5(\theta)} + \sqrt{\pi}\,\Gamma\!\left(\tfrac{3}{2}\right)\Gamma\!\left(\tfrac{9}{2}\right)\sum_{i\neq j}\frac{A_i(\theta)}{a_i(\theta)}\,\frac{b_j^2(\theta)}{a_j^2(\theta)} + $$
$$+2\sqrt{\pi}\,\Gamma\!\left(\tfrac{5}{2}\right)\Gamma\!\left(\tfrac{7}{2}\right)\sum_{i\neq j}\frac{A_i(\theta)\,b_i(\theta)}{a_i^3(\theta)}\,\frac{b_j(\theta)}{a_j^2(\theta)} + 2\,\Gamma\!\left(\tfrac{3}{2}\right)\Gamma^2\!\left(\tfrac{5}{2}\right)\cdot$$
$$\sum_{i\neq j\neq k}\frac{A_i(\theta)}{a_i(\theta)}\cdot\frac{b_j(\theta)}{a_j^2(\theta)}\,\frac{b_k(\theta)}{a_k^2(\theta)}\Big]\theta'^{7/2} + \pi Z_{\frac{5}{2}}(\alpha)\,\Gamma\!\left(\tfrac{5}{2}\right)\cdot$$

$$\sum_i \frac{B_i(\theta)}{a_i^2(\theta)}\theta^{15/2} - Z_{\frac{7}{2}}(\alpha)\Big[\pi\Gamma(\tfrac{9}{2})\sum_i \frac{B_i(\theta)b_i(\theta)}{a_i^4(\theta)} + \qquad (6.12)$$

$$+\sqrt{\pi}\,\Gamma^2(\tfrac{5}{2})\sum_{i\neq j}\frac{B_i(\theta)b_j(\theta)}{a_i^4(\theta)} - \pi\Gamma(\tfrac{7}{2})\sum_i \frac{C_i(\theta)}{a_i^3(\theta)}\Big]\theta^{17/2}\Big\}$$

Iz gornje relacije zaključujemo da koeficijenti $X_c^a(\theta)$, $A_i(\theta)$, $B_i(\theta)$ i $C_i(\theta)$ moraju sadržavati sledeće maksimalne stepene od θ : $X_0^a(\theta)\sim\theta^{7/2}$; $A_i(\theta)\sim\theta^{5/2}$; $B_i(\theta)\sim\theta^{3/2}$; $C_i(\theta)\sim\theta^{1/2}$ kao što je uzeto u obzir u formuli (5.27).

Zamenjujući (5.27) i (6.12) dobijamo:

$$\Delta\sigma_a(\theta) = -2Z_{\frac{3}{2}}(\alpha)\rho^{3/2} - \frac{5}{2}\pi Z_{\frac{5}{2}}(\alpha)\rho^{5/2} - \frac{119}{32}\pi^2\cdot Z_{\frac{7}{2}}(\alpha)\rho^{7/2} + \Big[Z_{\frac{1}{2}}(\alpha)Z_{\frac{5}{2}}(\alpha) + Z_{\frac{3}{2}}^2(\alpha)\Big]\rho^3 - \frac{\pi}{8}\Big[10Z_{\frac{1}{2}}(\alpha)Z_{\frac{7}{2}}(\alpha) + 143Z_{\frac{3}{2}}(\alpha)Z_{\frac{5}{2}}(\alpha)\Big]\rho^4 + O(\rho^{9/2}) \qquad (6.13)$$

Za dobijanje ukupne promene magnetizacije anizotropnog feromagneta na niskim temperaturama koristimo izraz (6.7) kao i izraz za ukupnu magnetizaciju datu preko promene magnetizacije $\sigma = 1 - \Delta\sigma$. Konačno:

$$\sigma = 1 - 2Z_{\frac{3}{2}}(\alpha)(1-\delta)\rho^{3/2} - \frac{3\pi}{2}Z_{\frac{5}{2}}(\alpha)\Big(1-\frac{5}{3}\delta\Big)\rho^{5/2} - \frac{33\pi^2}{16} Z_{\frac{7}{2}}(\alpha)\Big(1-\frac{119}{66}\delta\Big)\rho^{7/2} - 6\pi Z_{\frac{3}{2}}(\alpha)Z_{\frac{5}{2}}(\alpha)\rho^4 - \delta\Big[Z_{\frac{1}{2}}(\alpha)Z_{\frac{5}{2}}(\alpha) + Z_{\frac{3}{2}}^2(\alpha)\Big]\rho^3 + \delta\Big[\frac{5\pi}{4}Z_{\frac{1}{2}}(\alpha)Z_{\frac{7}{2}}(\alpha) + \frac{143}{8}Z_{\frac{3}{2}}(\alpha)\cdot Z_{\frac{5}{2}}(\alpha)\Big]\rho^4 \qquad (6.14)$$

Iz poslednjeg izraza vidimo da su svi koeficijenti u razvoju renormalizovani usled anizotropije u odnosu na Dysonov rezultat. Pored toga pojavljuje se i novi član proporcionalan T^3 što je isključivo posledica anizotropije.

7. ZAKLJUČAK

U ovom radu, metodom Greenovih funkcija odredjen je spektar elementarnih ekscitacija kao i magnetizacija na niskim temperaturama za jedan uopšteni model anizotropnog feromagnetika. Dobijeni rezultati uporedjeni su sa klasičnim Dysonovim rezultatom za izotropni Heisenbergov feromagnetik. Ukratko, možemo ih rezimirati na sledeći način:

U linearnoj aproksimaciji po parametru anizotropnosti $\delta = \frac{J'}{J}$, koeficijenti u Dysonovom razvoju su renormalizovani usled anizotropije i pored toga pojavljuje se član proporcionalan T^{3} kojeg nema u Dysonovom rezultatu i posledica je anizotropnosti.

Dalja istraživanja ovog modela anizotropnog feromagneta kao što je npr. faznog prelaza svakako su interesantni s obzirom da postoje neki eksperimentalni radovi (vidi 4 i reference tamo navedene) u kojima su dati neki magnetni materijali kao što su K_2CuF_2, $(C_nH_{2n+1}NH_3)_2CuCl_n$ $(n=1,2,\dots,6)$ čije se magnetne osobine mogu opisati sličnim Hamiltonijanima.

L I T E R A T U R A

[1] F.Dyson, Phis. Rev. 102, 1217, 1230 (1956).

[2] E.Beloritzky, R.Casalegno, and P.Fries, Phys.Stat.sol (b) 77, 495 (1976)

[3] Stenli „Fazovie perehodi i kritičeskie javlenia" Izd. „Mir" Moskva 1973. (str. 88)

[4] B.S.Tošić, Statistička fizika

[5] S.V.Tjablikov, Metodi kvantovoj teorii magnetizma, Izd. "Nauka", Moskva (1965)

[6] M.J.Škrinjar, Magistarski rad, Bgd (1972)