U N I V E R Z I T E T U N O V O M S A D U

P R I R O D N O - M A T E M A T I Č K I F A K U L T E T

K a t e d r a z a f i z i k u

Vojislav M. Zeković

UVOD U ANALIZU FEROMAGNETIKA SA DIPOLNIM INTERAKCIJAMA

D i p l o m s k i r a d

Diplomski sa ocenom 10 (deset)
Odbrana -"- -"- 8 (osam)
Zaključno -"- -"- 9 (devet)

Komisija

1) Radojević Vojislav
2) Tošić Bratislav
3) Škrinjar Mario

N. Sad
30. VI. 73

N O V I S A D 1 9 7 3.

Zahvaljujem se profesoru
DR. BRATISLAVU S. TOŠIĆU
na pomoći pri izboru teme i pri pisanju rada.

Sadržaj

U V O D

Savremene teorije magnetnih fenomena u kristalu tumače ove pojave kao efekte spinskog podsistema 3d i 4s nepopunjenih ljuski atoma, koji sačinjavaju magnetni kristal. Spinovi ovih podnivoa interaguju u kristalu dvojako, i to: silama izmene, koje dolaze usled toga što se elektroni medjusobno ne razlikuju i silama dipol-dipolnog tipa. Dok su prve sile čisto kvantnomehaničkog porekla, dotle druge imaju punu analogiju sa klasičnim silama dipol-dipolnih interakcija, pa se stoga dipol-dipolne interakcije mogu smatrati kao perturbacije u odnosu na interakcije koje dolaze od sila izmene.

Mada ovo, na prvi pogled, uprošćava problem analize feromagnetika, u praksi se pojavljuju velike teškoće, koje su vezane za karakter dipol-dipolnih interakcija i za samu strukturu hamiltonijana sistema. Metod teorije perturbacija se može i ovde primeniti, ali predhodno treba rešiti sledeće probleme:

a/ u hamiltonijanu sistema pojavljuju se clanovi koji su linearno proporcionalni kreacionim i anihilacionim operatorima S^- odnosno S^+, što znaci da je vakuumsko stanje sistema lose definisano.

b/ Ukupni hamiltonijan sistema, čak i posle eliminacije linearnih članova ne komutira sa totalnim okupacionim brojem kvazičestica, što znači da oslobadjanje od linearnih članova još uvek ne dovodi do pravog vakuuma sistema.

c/ Zbog strukture hamiltonijana dipol-dipolnih interakcija zakon disperzije za elementarne ekscitacije u sistemu nije analitički, što znači da energija spinskih talasa i pri nultom kvaziimpulsu zavisi od pravca prostiranja spinskih talasa.

litički, što znači da energija spinskih talasa i pri nultom kvaziimpulsu zavisi od pravca prostiranja spinskih talasa.

Rešavanje problema pod a/ i b/ dovodi nas do hamiltonijana u kome se može primeniti metod teorije perturbacija. Dok oni nisu rešeni primena metode teorije perturbacija dala bi nekorektne rezultate. Treći efekat neanaliticnosti očigledno vodi na to da magnetne osobine kristala zavise od pravca prostiranja spinskih talasa, što drugim rečima znači da za različite pravce prostiranja imamo potpuno različita magnetna svojstva.

Cilj ovog rada je da se za feromagnetik sa spinom $S=\frac{1}{2}$ reše problemi pomenuti pod a/ i b/, tj. da se hamiltonijan sistema stabilizuje i da se nadju tačne formule za energiju elementarnih ekscitacija u harmonijskoj aproksimasiji. Drugim rečima, cilj ovog rada sastiji se u tome da se hamiltonijan feromagnetika sa dipolnim interakcijama "preparira" za primenu metoda teorije perturbacija.

Kao što ćemo dalje videti ovo je moguće učiniti, bez većih principijelnih teškoća, samo u slučaju kada se feromagnetik nalazi u jakom spoljašnjem magnetnom polju i kada se kroz feromagnetik prostiru spinski talasivelike talasne dužine.

I. G L A V A

STABILIZACIJA HAMILTONIJANA SA DIPOLNIM INTERAKCIJAMA

§1. Hamiltonijan sa dipolnim interakcijama

Hamiltonijan sa dipolnim interakcijama predložen je prvi put u referenci 1 i ima oblik:

$$\hat{H} = -\sum_{\vec{f}} \vec{\mu}_B \vec{\mathcal{H}} \hat{S}^z_{\vec{f}} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{f},\vec{g}} I_{\vec{f}\vec{g}} \hat{\vec{S}}_{\vec{f}} \hat{\vec{S}}_{\vec{g}} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{f},\vec{g}} D_{\vec{f}\vec{g}} \left[\hat{\vec{S}}_{\vec{f}} \hat{\vec{S}}_{\vec{g}} - 3 (\vec{e}_{\vec{f}\vec{g}} \hat{\vec{S}}_{\vec{f}})(\vec{e}_{\vec{f}\vec{g}} \hat{\vec{S}}_{\vec{g}}) \right] \qquad /1.1/$$

U formuli /1.1/ upotrebljene su sledeće oznake:

$\vec{f}$ i $\vec{g}$ su vektori kristalne rešetke, $\vec{\mu}_B$ je magnetni moment atoma, $\vec{\mathcal{H}}$ je spoljašnje magnetno polje, $\hat{\vec{S}}$ su spinski operatori, $I_{\vec{f}\vec{g}}$ su integrali izmene, koji u teoriju ulaze kao fenomenološki parametri i

$$D_{\vec{f}\vec{g}} = \frac{\mu_B^2}{|\vec{f}-\vec{g}|^3}$$

$$e^{\alpha}_{\vec{f}\vec{g}} = \frac{f^{\alpha}-g^{\alpha}}{|\vec{f}-\vec{g}|} \quad ; \quad \alpha = (x, y, z) \qquad /1.2/$$

Iz eksperimenta se zna da je $D_{\vec{f}\vec{g}} \sim 10^{-2} - 10^{-3}\, I_{\vec{f}\vec{g}}$

Uvodeći operatore:

$$\hat{S}^x + \hat{S}^y = \hat{S}^+$$

$$\hat{S}^x - i\hat{S}^y = \hat{S}^-$$

kao i operator $S - \hat{S}^z$ hamiltonijan /1.1/ možemo napisati u obliku

$$\hat{H} = H_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \hat{H}_4 \qquad /1.3/$$

gde je:

$$H_0 = -\vec{\mu}_B \vec{\mathcal{H}}\, S N - \frac{1}{2} N S^2 (J_0 + \gamma_0) \qquad /1.4/$$

$$\hat{H}_1 = \frac{S}{2} \sum_{\vec{f}} \left(Q_0 \hat{S}^-_{\vec{f}} + \overset{*}{Q}_0 \hat{S}^+_{\vec{f}} \right) \qquad /1.5/$$

$$\hat{H}_2 = \left[\vec{\mu}_B \vec{\mathcal{H}} + S (J_0 + \gamma_0) \right] \sum_{\vec{f}} \left(S - \hat{S}^z_{\vec{f}} \right) -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{\vec{f},\vec{g}} \left(I_{\vec{f}\vec{g}} + \alpha_{fg} \right) \hat{S}^-_{\vec{f}} \hat{S}^+_{\vec{g}} +$$

$$+ \frac{1}{4} \sum_{\vec{f},\vec{g}} \left(\beta_{fg} \hat{S}^-_{\vec{f}} \hat{S}^+_{\vec{g}} + \overset{*}{\beta} \hat{S}^+_{\vec{f}} \hat{S}^+_{\vec{g}} \right) \qquad /1.6/$$

$$\hat{H}_3 = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{f},\vec{g}} \left[Q_{\vec{f}\vec{g}} \hat{S}^-_{\vec{f}} \left(S - \hat{S}^z_{\vec{g}} \right) + \overset{*}{Q}_{\vec{f}\vec{g}} \hat{S}^+_{\vec{f}} \left(S - \hat{S}^z_{\vec{g}} \right) \right] \qquad /1.7/$$

$$\hat{H}_4 = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{f},\vec{g}} \left(I_{\vec{f}\vec{g}} + \gamma_{\vec{f}\vec{g}} \right) \left(S - \hat{S}^z_{\vec{f}} \right) \left(S - \hat{S}^z_{\vec{g}} \right) \qquad /1.8/$$

U formulama /1.4/ do /1.8/ uvedene su sledeće oznake:

$$J_0 = \sum_{\vec{f}} I_{0\vec{f}}$$

$$\gamma_0 = \sum_{\vec{f}} \gamma_{0\vec{f}}$$

$$\Theta_0 = \sum_{\vec{f}} \Theta_{0\vec{f}}$$

$$\alpha_{\vec{f}\vec{g}} = D_{\vec{f}\vec{g}} \left\{ 1 - \frac{3}{2} \left[(e^x_{\vec{f}\vec{g}})^2 + (e^y_{\vec{f}\vec{g}})^2 \right] \right\}$$

$$\beta_{\vec{f}\vec{g}} = \frac{3}{2} D_{\vec{f}\vec{g}} \left\{ \frac{1}{2} \left[(e^x_{\vec{f}\vec{g}})^2 - (e^y_{\vec{f}\vec{g}})^2 \right] + i\, e^x_{\vec{f}\vec{g}} e^y_{\vec{f}\vec{g}} \right\}$$

$$\gamma_{\vec{f}\vec{g}} = D_{\vec{f}\vec{g}} \left[1 - 3 (e^z_{\vec{f}\vec{g}})^2 \right]$$

$$\Theta_{\vec{f}\vec{g}} = 3 D_{\vec{f}\vec{g}} \left(e^x_{\vec{f}\vec{g}} e^z_{\vec{f}\vec{g}} + i\, e^y_{\vec{f}\vec{g}} e^z_{\vec{f}\vec{g}} \right) \qquad /1.9/$$

N - broj atoma u kristalu

Svi koeficijenti $\alpha_{\vec{f}\vec{g}}$, $\beta_{\vec{f}\vec{g}}$, $\gamma_{\vec{f}\vec{g}}$, $\Theta_{\vec{f}\vec{g}}$, $I_{\vec{f}\vec{g}}$ su simetrični i zavise od razlike $\vec{f} - \vec{g}$.

Kao što smo rekli u uvodu, dalju analizu sistema sa ovim hamiltonijanom izvršićemo za slučaj spina $S = \frac{1}{2}$ i uz pretpostavku da je spoljašnje magnetno polje $\vec{\mathcal{H}}$ toliko veliko da su članovi $\vec{\mu}_0 \vec{\mathcal{H}}$ i J_0 istog reda veličine. U slučaju spina $S = \frac{1}{2}$ spinski operatori se mogu zameniti Pauli-operatorima / referenca[2]/ po formulama:

$$S^- = P^+ \qquad S^+ = P$$

$$S - S^z = \frac{1}{2} - S^z = P^+P \qquad /1.1o/$$

Pauli-operatori se mogu predstaviti kao produkt para Fermi-operatora i to

$$P^+ = a_1^+ a_2 \qquad P = a_2^+ a_1 \qquad /1.11/$$

u podprostoru fermionskih stanja

$$|0_1\ 1_2\rangle$$

$$|0_2\ 1_1\rangle$$

u kome očigledno važi uslov

$$a_1^+ a_1 + a_2^+ a_2 = 1$$

Pauli-operatori definisani obrascem /1.11/ zadovoljavaju sledeće komutacione relacije:

$$[P_f, P_g^+] = (1 - 2P_f^+P_f)\delta_{fg}$$

$$[P_f, P_g] = [P_f^+, P_g^+] = 0$$

$$P_f^2 = P_f^{+2} = 0$$

$$P_f^+ P_f = a_{1f}^+ a_{1f} \qquad /1.12/$$

Posle zamena /1.1o/ u hamiltonijan /1.3'/ dobijamo

$$\hat{H} = H_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \hat{H}_4 \qquad /1.13/$$

gde je:

$$H_0 = const. \qquad /1.14/$$

$$\hat{H}_1 = \sum_{f} \left(\Theta_1 P_f^+ + \overset{*}{\Theta}_1 P_f \right) \qquad /1.15/$$

$$\hat{H}_2 = \sum_{f} \Theta_2 P_f^+ P_f + \sum_{fg} A_{fg} P_f^+ P_g + \frac{1}{2} \sum_{fg} \left(\mathcal{B}_{fg} P_f^+ P_g^+ + \overset{*}{\mathcal{B}}_{fg} P_f P_g \right) \qquad /1.16/$$

$$\hat{H}_3 = \sum_{f,g} \left(C_{\vec{f}\vec{g}} P_g^+ P_f^+ P_f + \overset{*}{C}_{fg} P_f^+ P_f P_g \right) \qquad /1.17/$$

$$\hat{H}_4 = \sum_{fg} \mathcal{D}_{\vec{f}\vec{g}} P_f^+ P_f P_g^+ P_g \qquad /1.18/$$

gde je :

$$\Theta_1 = \frac{1}{4} \Theta_0$$

$$\Theta_2 = \vec{\mu}_B \vec{\mathcal{H}} + \frac{1}{2} \left(J_0 + \gamma_0 \right)$$

$$A_{\vec{f}\vec{g}} = - \frac{1}{2} \left(I_{\vec{f}\vec{g}} + \alpha_{\vec{f}\vec{g}} \right) \ ; \quad \alpha_0 = \sum_f \alpha_{0\vec{f}}$$

$$\mathcal{B}_{\vec{f}\vec{g}} = \frac{1}{2} \beta_{\vec{f}\vec{g}} \qquad \beta_0 = \sum_f \beta_{0\vec{f}}$$

$$C_{\vec{f}\vec{g}} = - \frac{1}{2} \Theta_{\vec{f}\vec{g}} \qquad C_0 = - \frac{1}{2} \Theta_0$$

$$\mathcal{D}_{\vec{f}\vec{g}} = - \frac{1}{2} \left(I_{\vec{f}\vec{g}} + \gamma_{\vec{f}\vec{g}} \right) , \quad \mathcal{D}_0 = - \frac{1}{2} \left(J_0 + \gamma_0 \right) \qquad /1.19/$$

§2. Unitarna transformacija hamiltonijana sistema

Hamiltonijan /1.13/ sadrži član H_1 /1.15/ koji je linearan po Pauli-operatorima. Pojava ovakvog člana u hamiltonijanu označava da osnovno stanje sistema nije dobro odabrano, tj. da izraz za H_0 /1.14/ ne predstavlja stvarnu energiju osnovnog stanja sistema,što,s druge strane, znači da vakuum sistema, defakto, sadrži u sebi kvazičestice, pa prema tome nije pravi vakuum.

S obzirom da,u ovom slučaju, stvari tako stoje neophodno je eliminisati pomenute teškoće. To se može postići unitarnom transformacijom hamiltonijana /1.13/, ili, drugim rečima, rotacijom Hilbertovog prostora, i to tako da vakuum u zarotiranom prostoru bude i realno vakuum, tj. da u sebi ne sadrži kvazičestice. Kao što je poznato, unitarna transformacija ne menja svojstvene vrednosti hamiltonijana. Ovakvu rotaciju Hilbertovog prostora, koja nas dovodi do stvarnog vakuuma u literaturi obično nazivaju stabilizacijom hamiltonijana sistema.

Da bismo se oslobodili člana H_1 mi ćemo od Fermi-operatora a i a preći na nove Fermi-operatore b i b unitarnom transformacijom oblika:

$$\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} & \tilde{\beta} \\ -\tilde{\beta}^* & \tilde{\alpha}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha}^* & -\tilde{\beta} \\ \tilde{\beta}^* & \tilde{\alpha} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \qquad /1.2o/$$

$$|\tilde{\alpha}|^2 + |\tilde{\beta}|^2 = 1$$

U podprostoru $|0_1\, 1_2\rangle, |1_1\, 0_2\rangle$ fermionskog prostora koji obrazuju operatori b_1 i b_2 mogu se uvesti novi Pauli-operatori:

$$Q^+ = b_1^+ b_2 \;; \quad Q = b_2 b_1^+ \;; \quad Q^+Q = b_1^+ b_1$$

$$b_1^+ b_1 + b_2^+ b_2 = 1 \qquad /1.21/$$

Sobzirom na transformaciju /1.2o/ Pauli-operatori P^+ i P izražavaju se preko novih operatora Q^+ i Q na sledeći način:

$$P^+ = -\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^* + 2\tilde{\alpha}\tilde{\beta}^* Q^+Q + \tilde{\alpha}^2 Q^+ - \tilde{\beta}^{*2} Q$$

$$P = -\tilde{\alpha}^*\tilde{\beta} + 2\tilde{\alpha}^*\tilde{\beta}\, Q^+Q - \tilde{\beta}^2 Q^+ + \tilde{\alpha}^{*2} Q \qquad /1.22/$$

Dalja procedura stabilizacije hamiltonijana je sledeća: Izrazi /1.22/ zamene se u hamiltonijan /1.13 / i dobijena forma, sada po operatorima Q^+ i Q, uredi tako da se izdvoji konstantni deo, zatim deo linearan po operatorima Q^+ i Q, kvadratni deo, deo trećeg reda i deo četvrtog reda. Pošto se to uradi, koeficijenti unitarne matrice $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$ odrede se tako da članovi linearni po Q^+ i Q budu jednaki nuli. Ovaj uslov eksplicitno glasi:

$$\tilde{\alpha}^2 \mathcal{Q}_1 - \tilde{\beta}^2 \mathcal{Q}_1^* - \tilde{\alpha}\tilde{\beta}\left(|\tilde{\alpha}|^2 - |\tilde{\beta}|^2\right) A_0 - \tilde{\alpha}^3 \tilde{\beta}^* \mathcal{B}_0 + \tilde{\alpha}^* \tilde{\beta}^3 \mathcal{B}_0^* +$$

$$+ 2\tilde{\alpha}^2 |\tilde{\beta}|^2 C_0 + \tilde{\beta}^2\left(|\tilde{\alpha}|^2 - |\tilde{\beta}|^2\right) C_0^* - 2\tilde{\alpha}\tilde{\beta}|\tilde{\beta}|^2 \mathcal{D}_0 = 0 \qquad /1.23/$$

U jednačini /1.23/ veličine $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_0$, $\mathcal{C}_0$, su male veličine prvog reda u odnosu na veličine $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_0$, $\mathcal{D}_0$. Ako te članove, koji su male veličine prvog reda, potpuno zanemarimo, onda se lako vidi da jednačina /1.23/ ima rešenja:

$$\tilde{\alpha} = 1 \quad i \quad \tilde{\beta} = 0$$

Ovo nam daje ideju da u sledećoj aproksimaciji funkcije $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$ predstavimo u obliku:

$$\tilde{\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon^2$$

$$\tilde{\beta} = e^{i\varphi_\beta}\varepsilon(1 - \chi\varepsilon) \qquad /1.24/$$

Ovde je ε mala veličina prvog reda i kompleksan broj, a χ i φ_β su realni brojevi. Uslov $|\tilde{\alpha}|^2 + |\tilde{\beta}|^2 = 1$ zadovoljen je pri izboru $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$ /1.24/ sa tačnošću do trećeg stepena male veličine ε. Sa tom tačnošću mi ćemo rešavati jednačinu /1.23/ a to znači, da ćemo u njoj zadržati sve članove koji su reda ε^2, pri čemu se računa da su $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{B}_0$ i $\mathcal{C}_0$ reda ε , a $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_0$, i $\mathcal{D}_0$ reda jedinice. Rešavajući dobijeni sistem jednačina nalazimo da je:

$$\tilde{\alpha} = 1 - \frac{1}{2}\varepsilon_0^2$$

$$\tilde{\beta} = |\tilde{\beta}|\, e^{i\arg\tilde{\beta}} \quad ; \quad |\tilde{\beta}| = \varepsilon_0(1 - \varepsilon_0\chi_1)$$

$$\arg\tilde{\beta} = \operatorname{arc\,tg} \frac{\mathcal{A}_1''}{\mathcal{A}_1'}\left[1 - \varepsilon_0\chi_2 - \varepsilon_0^2\,\frac{\mathcal{A}_1'\mathcal{B}_0' + \mathcal{A}_0''\mathcal{B}_0''}{\mathcal{A}_1'\,|\mathcal{A}_1|}\,\chi_2\right] \qquad /1.25/$$

gde je:

$$\varepsilon_0 = \frac{|\Theta_1|}{\Theta_2 + A_0}$$

$$\Theta_1 = \Theta_1' + i\,\Theta_1''$$

$$\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_0' + i\,\mathcal{B}_0'' \qquad /1.26/$$

$$\chi_1 = \frac{\mathcal{B}_0'\left[(\Theta_1')^2 - (\Theta_1'')^2\right] - 2\Theta_1'\Theta_1''\mathcal{B}_0''}{|\Theta_1|^3}$$

$$\chi_2 = \frac{\mathcal{B}_0''\left[(\Theta_1')^2 - (\Theta_1'')^2 - 2\Theta_1'\Theta_1''\mathcal{B}_0'\right.}{\Theta_1'\Theta_1''|\Theta_1|}.$$

Prema tome, konačan izgled naše unitarne transformacije koja stabilizuje hamiltonijan /1.13/ je:

$$\begin{aligned} a_1 &= \tilde{\alpha}^* b_1 - \tilde{\beta}\, b_2 \\ a_1^+ &= \tilde{\alpha}\, b_1^+ - \tilde{\beta}^* b_2^+ \\ a_2 &= \tilde{\beta}^* b_1 + \tilde{\alpha}\, b_2 \\ a_2^+ &= \tilde{\beta}\, b_1^+ + \tilde{\alpha}^* b_2^+ \end{aligned} \qquad /1.27/$$

gde su $\tilde{\alpha}$ i $\tilde{\beta}$ zadani formulama /1.25/ i /1.26/, a uslov unitarnosti $|\tilde{\alpha}|^2 + |\tilde{\beta}|^2 = 1$ zadovoljen je sa tačnošću do trećeg stepena malog parametra ε_0.

§3. Stabilizovani hamiltonijan sistema

Posle postupka koji je izložen u §2. hamiltonijan sistema sadrži konstantan član / nova energija osnovnog stanja /, zatim kvadratni deo po operatorima Q i delove trećeg i četvrtog stepena po ovim operatorima. Prilikom zamene vrednosti za $\tilde{\alpha}$ i $\hat{\beta}$ u ovom hamiltonijanu zadržaćemo članove sledećeg tipa:

$\mathcal{O}_2$, $\mathcal{A}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{O}_2\varepsilon_0$, $\mathcal{A}\varepsilon_0$, $\mathcal{D}\varepsilon_0$, $\mathcal{O}_2\varepsilon_0^2$, $\mathcal{A}\varepsilon_0^2$, $\mathcal{D}\varepsilon_0^2$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{B}\varepsilon_0$, $\mathcal{C}\varepsilon_0$

Ovo znači da nam je hamiltonijan tačan do na male veličine reda ε_0^3. Pošto izvršimo naznačene zamene i ograničimo se ukazanom tačnošću, dobijamo stabilizovani hamiltonijan sistema u obliku:

$$\hat{H} = H_0 + \boxed{\hat{H}_1} + \hat{H}_2 + \hat{H}_3 + \hat{H}_4 \qquad /1.28/$$

gde je:

$$H_0 = N\left[-\frac{1}{8}(J_0 + \mathcal{I}_0) - \frac{1}{2}\vec{\mu}_B\vec{\mathcal{H}}\right] - \frac{N}{16}\frac{|\mathcal{O}_0|^2}{\mu_B\mathcal{H}}\left(2\,\frac{\mathcal{O}_0'\mathcal{B}_0' - \mathcal{O}_0''\mathcal{B}_0''}{|\mathcal{O}_0||\mathcal{B}_0|} - 1\right) \qquad /1.29/$$

$$\hat{H}_2 = Y\sum_{\vec{f}} Q_f^+ Q_f + \sum_{\vec{f}\vec{g}} X_{fg}\, Q_f^+ Q_g + \frac{1}{2}\sum_{\vec{f}\vec{g}}\left(T_{fg}\, Q_f^+ Q_f + \overset{*}{T}_{fg}\, Q_f Q_g\right) \qquad /1.30/$$

$$Y = Y^{(0)} + Y^{(1)} + Y^{(2)}$$

$$Y^{(0)} = \vec{\mu}_B \vec{\mathcal{H}} + \frac{1}{2} J_0$$

$$Y^{(1)} = \frac{1}{2} \gamma_0$$

$$Y^{(2)} = \frac{3 |\Theta_0|^2 J_0}{16 (\mu_B \mathcal{H})^2} + \frac{1}{2 \mu_B \mathcal{H}} \left(\Theta_0'^2 + \Theta_0''^2 \right)$$

$$X_{fg} = X_{fg}^{(0)} + X_{fg}^{(1)} + X_{fg}^{(2)}$$

$$X_{fg}^{(0)} = -\frac{1}{2} I_{fg}$$

$$X_{fg}^{(1)} = -\frac{1}{2} \alpha_{fg} \qquad /1.31/$$

$$X_{fg}^{(2)} = -\frac{1}{16} \frac{I_{fg} |\Theta_0|^2}{(\mu_B \mathcal{H})^2} + \frac{1}{4 \mu_B \mathcal{H}} \left(\Theta_0' \Theta_{fg}' + \Theta_0'' \Theta_{fg}'' \right)$$

$$T_{fg} = T_{fg}^{(1)} + T_{fg}^{(2)}$$

$$T_{fg}^{(1)} = \mathcal{B}_{fg}$$

$$T_{fg}^{(2)} = -\frac{|\Theta_0| |\Theta_{fg}|}{4 \mu_B \mathcal{H}} e^{i \left[\operatorname{arctg} \frac{\Theta_0''}{\Theta_0'} + \operatorname{arctg} \frac{\Theta_{fg}''}{\Theta_{fg}'} \right]}$$

$$\hat{H}_3 = \sum_{\vec{f},\vec{g}} \left(Z_{fg}\, Q_g^+ Q_f^+ Q_f + \overset{*}{Z}\, Q_f^+ Q_f Q_g \right) \qquad /1.32/$$

gde je:

$$Z_{fg} = Z_{fg}^{(1)} + Z_{fg}^{(2)}$$

$$Z_{fg}^{(1)} = -\frac{1}{2}\,\Theta_{fg} \qquad /1.33/$$

$$Z_{fg}^{(2)} = (\gamma_{fg} - \alpha_{fg})\frac{|\Theta_0|}{4\mu_B \mathcal{H}}\, e^{i\,\mathrm{arctg}\frac{\Theta_0''}{\Theta_0'}} + 2\mathcal{B}_{fg}\frac{|\Theta_0|}{4\mu_B \mathcal{H}}\, e^{-i\,\mathrm{arctg}\frac{\Theta_0''}{\Theta_0'}}$$

$$\hat{H}_4 = \sum_{\vec{f}\vec{g}} W_{fg}\, Q_f^+ Q_g^+ Q_f Q_g \qquad /1.34/$$

gde je:

$$W_{fg} = W_{fg}^{(0)} + W_{fg}^{(1)} + W_{fg}^{(2)}$$

$$W_{fg}^{(0)} = -\frac{1}{2}\,I_{fg}$$

$$W_{fg}^{(2)} = -\frac{1}{2}\,\gamma_{fg} \qquad /1.35/$$

$$W^{(2)} = -\frac{1}{2\mu_B \mathcal{H}}\left(\Theta_0' \Theta_{fg}' + \Theta_0'' \Theta_{fg}''\right) - \frac{I_{fg}\,|\Theta_0|^2}{8(\mu_B \mathcal{H})^2}$$

Ovde treba istaći dve stvari:

a/. Član $-\frac{N}{16}\frac{|\Theta_0|^2}{\mu_B \mathcal{H}}\left(2\frac{\Theta_0' B_0' - \Theta_0'' B_0''}{|\Theta_0||B_0|} - 1\right)$

u formuli /1.29/ predstavlja popravku energije osnovnog stanja usled izvršene rotacije Hilbertovog prostora.

b/. Pošto stabilizovani hamiltonijan sadrži članove proporcionalne Q^+Q^+ i QQ on ne komutira sa totalnim okupacionim brojem $\sum_f Q_f^+ Q_f$,što znači da broj kvazičestica u sistemu nije održan.

Prisustvo članova Q^+Q^+ i QQ u hamiltonijanu pokazuje da on, primenjen na novi vakuum, nema svojstvenu vrednost ravnu popravljenoj energiji osnovnog stanja /1.29/, već postoji i jedan dodatni član kojin je proporcionalan

$$\frac{1}{2}\sum_{f,g} T_{fg}\, Q_f^+ Q_g^+ \,|0\rangle$$

Ovo, drugim rečima, znači da je izvršena unitarna transformacija samo delimično popravila vakuum sistema, ali da i novi vakuum još uvek nije stvarni vakuum, već da i dalje sadrži u sebi kvazičestice.

U sledećoj glavi mi ćemo dijagonalizovati kvadratni deo hamiltonijana /1.28/ i kao rezultat ove procedure konačno ćemo naći pravi vakuum sistema i energije elementarnih ekscitacija.

II. G L A V A

SPEKTAR ENERGIJA ELEMENTARNIH EKSCITACIJA U HARMONIJSKOJ APROKSIMACIJI

§4. Efektivni bozonski hamiltonijan

Stabilizovani hamiltonijan ima oblik:

$$\hat{H} = H_0 + \hat{H}_1 + \hat{H}_2 + H_3 + \hat{H}_4 \quad , \quad \hat{H}_1 = 0 \qquad /2.1/$$

gde je:

$$H_0 = N\left[-\frac{1}{8}(J_0 + \gamma_0) - \frac{1}{2}|\vec{\mu}_B \vec{\mathcal{H}}|\right] - \frac{N}{16}\frac{|\theta_0|^2}{\mu_B \mathcal{H}}\left[2\,\frac{\theta_0' B_0' - \theta_0'' B_0''}{|\theta_0||B_0|} - 1\right]$$

$$\hat{H}_2 = Y \sum_{\vec{f}} Q_{\vec{f}}^{+} Q_{\vec{f}} + \sum_{\vec{f},\vec{g}} X_{\vec{f}\vec{g}}\, Q_{\vec{f}}^{+} Q_{\vec{g}} + \frac{1}{2}\sum_{\vec{f}\vec{g}} \left(T_{\vec{f}\vec{g}}\, Q_{\vec{f}}^{+} Q_{\vec{g}}^{+} + \overset{*}{T}_{\vec{f}\vec{g}}\, Q_{\vec{f}} Q_{\vec{g}}\right)$$

$$\hat{H}_3 = \sum_{\vec{f}\vec{g}} \left[Z_{\vec{f}\vec{g}}\, Q_{\vec{g}}^{+} Q_{\vec{f}}^{+} Q_{\vec{f}} + \overset{*}{Z}_{\vec{f}\vec{g}}\, Q_{\vec{f}}^{+} Q_{\vec{f}} Q_{\vec{g}} \right]$$

$$\hat{H}_4 = \sum_{\vec{f},\vec{g}} W_{\vec{f}\vec{g}}\, Q_{\vec{f}}^{+} Q_{\vec{g}}^{+} Q_{\vec{f}} Q_{\vec{g}}$$

Da bi smo našli spektar elementarnih ekscitacija u harmonijskoj aproksimaciji treba preći od Pauli-operatora Q na Boze-operatore B. Egzaktne formule za prelaz od Pauli-operatora na Boze-operatore glase:

$$Q = \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-2)^{\nu}}{(1+\nu)!} B^{+\nu} B^{\nu} \right]^{1/2} B$$

$$Q^{+} = B^{+} \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-2)^{\nu}}{(1+\nu)!} B^{+\nu} B^{\nu} \right]^{\frac{1}{2}} \qquad /2.2/$$

$$Q^{+}Q = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-2)^{\nu}}{(1+\nu)!} B^{+\nu+1} B^{\nu+1}$$

U daljem računu umesto tačnih izraza /2.2/ koristićemo sledeće približne izraze :

$$Q = B - B^{+}BB + \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) B^{+}B^{+}BBB$$

$$Q^{+} = B^{+} - B^{+}B^{+}B + \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) B^{+}B^{+}B^{+}BB \qquad /2.3/$$

$$Q^{+}Q = B^{+}B - B^{+}B^{+}BB$$

Formule /2.2/ i /2.3/ mogu se naći u referenci [3].

Zamenom /2.3/ u hamiltonijan /2.1/ dobijamo sledeći efektivni bozonski hamiltonijan iz koga ćemo odrediti spektar elementarnih ekscitacija u feromagnetiku sa dipolnim interakcijama.

$$\hat{H}_B = H_0 + \hat{H}_{2B} + \hat{H}_{3B} + \hat{H}_{4B} + \hat{H}_{6B} \qquad (2.4)$$

gde je:

$$H_0 = N\left[-\frac{1}{8}(J_0 + \gamma_0^\lambda) - \frac{1}{2}\vec{\mu}_B \vec{\mathcal{H}}\right] - \frac{N}{16}\frac{|\theta_0|^2}{\mu_B \mathcal{H}}\left(2\frac{\theta_0' \mathcal{B}_0' - \theta_0'' \mathcal{B}_0''}{|\theta_0||\mathcal{B}_0|} - 1\right)$$

$$\hat{H}_{2B} = Y\sum_{\vec{f}} \overset{+}{B}_{\vec{f}} B_{\vec{f}} + \sum_{\vec{f},\vec{g}} X_{\vec{f}\vec{g}} \overset{+}{B}_{\vec{f}} B_{g} + \frac{1}{2}\sum_{\vec{f},\vec{g}}\left(T_{\vec{f}\vec{g}} \overset{+}{B}_{\vec{f}} \overset{+}{B}_{\vec{g}} + \overset{*}{T} B_{\vec{f}} B_{\vec{g}}\right)$$

$$H_{3B} = \sum_{\vec{f},\vec{g}} \left(Z_{\vec{f}\vec{g}} \overset{+}{B}_{\vec{g}} \overset{+}{B}_{\vec{f}} B_{\vec{f}} + \overset{*}{Z}_{\vec{f}\vec{g}} \overset{+}{B}_{\vec{f}} B_{\vec{f}} B_{\vec{g}}\right)$$

$$\hat{H}_{4B} = -Y\sum_{\vec{f}} \overset{+}{B}_{\vec{f}} \overset{+}{B}_{\vec{f}} B_{\vec{f}} B_{\vec{f}} - \sum_{\vec{f}\vec{g}} X_{\vec{f}\vec{g}} \overset{+}{B}_{\vec{f}} \overset{+}{B}_{\vec{f}} B_{\vec{f}} B_{\vec{g}} - \sum_{\vec{f}\vec{g}} X_{\vec{f}\vec{g}} \overset{+}{B}_{\vec{f}} \overset{+}{B}_{\vec{g}} B_{\vec{g}} B_{\vec{g}} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\vec{f},\vec{g}} T_{\vec{f}\vec{g}}\left(\overset{+}{B}_{\vec{f}} \overset{+}{B}_{\vec{g}} \overset{+}{B}_{\vec{g}} B_{\vec{g}} + \overset{+}{B}_{\vec{g}} \overset{+}{B}_{\vec{f}} \overset{+}{B}_{\vec{f}} B_{\vec{f}}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\vec{f},\vec{g}} \overset{*}{T}_{\vec{f}\vec{g}}\left(\overset{+}{B}_{\vec{f}} B_{\vec{f}} B_{\vec{f}} B_{\vec{g}} + \overset{+}{B}_{\vec{g}} B_{\vec{g}} B_{\vec{g}} B_{\vec{f}}\right) +$$

$$+\sum_{\vec{f},\vec{g}} W_{\vec{f}\vec{g}} \overset{+}{B}_{\vec{f}} \overset{+}{B}_{\vec{g}} B_{\vec{f}} B_{\vec{g}}$$

$$\hat{H}_{6B} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\sum_{\vec{f},\vec{g}} X_{\vec{f}\vec{g}}\left(B^{+}_{\vec{f}} B^{+}_{\vec{f}} B^{+}_{\vec{f}} B_{\vec{f}} B_{\vec{f}} B_{\vec{g}} + B^{+}_{\vec{g}} B^{+}_{\vec{g}} B^{+}_{\vec{f}} B_{\vec{g}} B_{\vec{g}} B_{\vec{g}}\right) +$$

$$+ \sum_{\vec{f},\vec{g}} X_{\vec{f}\vec{g}} B^{+}_{\vec{f}} B^{+}_{\vec{f}} B^{+}_{\vec{g}} B_{\vec{f}} B_{\vec{g}} B_{\vec{g}} -$$

$$- \sum_{\vec{f},\vec{g}} W_{\vec{f}\vec{g}}\left(B^{+}_{\vec{f}} B^{+}_{\vec{g}} B^{+}_{\vec{g}} B_{\vec{g}} B_{\vec{g}} B_{\vec{f}} + B^{+}_{\vec{g}} B^{+}_{\vec{f}} B^{+}_{\vec{f}} B_{\vec{f}} B_{\vec{f}} B_{\vec{g}}\right)$$

Elementarnim, ali dugim računom može se pokazati da, ako želimo energiju elementarnih ekscitacija da izračunamo sa tačnošću do prvog stepena malog parametra $\rho \sim \frac{T}{Y}$, svi ostali članovi hamiltonijana /2.1/ posle zamene /2.3/ ne daju nikakve doprinose.

Posle Furie-transformacije Boze-operatora:

$$B_{\vec{f}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\vec{f}}$$

$$B^{+}_{\vec{f}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} B^{+}_{\vec{k}}\, e^{-i\vec{k}\vec{f}}$$

$$B_{f} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} B_{-\vec{k}}\, e^{-i\vec{k}\vec{f}} \qquad /2.5/$$

$$B^{+}_{\vec{f}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} B^{+}_{-\vec{k}}\, e^{+i\vec{k}\vec{f}}$$

hamiltonijan /2.4/ postaje:

$$\hat{H}_{B} = \hat{H}_{0} + \hat{H}_{2B} + \hat{H}_{3B} + \hat{H}_{4B} + \hat{H}_{6B} \qquad /2.6/$$

gde je:

H_0 ostaje nepromenjeno /2.4/.

$$\hat{H}_{2B}=\sum_{\vec{k}}\left(Y+X_{\vec{k}}\right)\overset{+}{B}_{\vec{k}}B_{\vec{k}}+\frac{1}{2}\sum_{\vec{k}}\left(T_{\vec{k}}\overset{+}{B}_{\vec{k}}\overset{+}{B}_{-\vec{k}}+\overset{*}{T}_{\vec{k}}B_{-\vec{k}}B_{\vec{k}}\right)$$

$$\hat{H}_{3B}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2}\left(Z_{\vec{k}_1}\overset{+}{B}_{\vec{k}_1}\overset{+}{B}_{\vec{k}_2}B_{\vec{k}_1+\vec{k}_2}+\overset{*}{Z}_{\vec{k}_1}\overset{+}{B}_{\vec{k}_1+\vec{k}_2}B_{\vec{k}_2}B_{\vec{k}_1}\right)$$

$$\hat{H}_{4B}=-\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3}\Big[\left(Y+X_{\vec{k}_1}+X_{\vec{k}_3}-W_{\vec{k}_1-\vec{k}_3}\right)\overset{+}{B}_{\vec{k}_1}\overset{+}{B}_{\vec{k}_2}B_{\vec{k}_3}B_{\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3}+$$

$$+T_{\vec{k}_1}\overset{+}{B}_{\vec{k}_1}\overset{+}{B}_{\vec{k}_2}\overset{+}{B}_{\vec{k}_3}B_{\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3}+\overset{*}{T}_{\vec{k}_1}\overset{+}{B}_{\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3}B_{\vec{k}_3}B_{\vec{k}_2}B_{\vec{k}_1}\Big]$$

$$\hat{H}_{6B}=\frac{1}{N^2}\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3,\vec{k}_4,\vec{k}_5}\left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(X_{\vec{k}_1}+X_{\vec{k}_4}\right)+X_{\vec{k}_4+\vec{k}_5-\vec{k}_1}-2W_{\vec{k}_1-\vec{k}_4}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\overset{+}{B}_{\vec{k}_1}\overset{+}{B}_{\vec{k}_2}\overset{+}{B}_{\vec{k}_3}B_{\vec{k}_4}B_{\vec{k}_5}B_{\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3-\vec{k}_4-\vec{k}_5}\right]$$

Hamiltonijan $\hat{H}_{2B}$ je poznati hamiltonijan metoda približne druge kvantizacije. Medjutim, kako je pokazano u referenci [4], ovaj metod, u slučaju da se broj kvazičestica ne održava, daje nekorektne rezultate za spektar elementarnih ekscitacija. Pošto hamiltonijan /2.1/ ne održava broj kvazičestica u daljem radu ćemo koristiti postupak koji je dat u pomenutoj refernci.

§5. Spektar elementarnih ekscitacija u aproksimaciji približne druge kvantizacije

Hamiltonijan $\hat{H}_{2B}$ može se napisati kao:

$$\hat{H}_{2B} = \sum_{\vec{k}>0} h_{\vec{k}}$$

gde je:

$$h_{\vec{k}} = \sum_{s,s'=1}^{2} M_{ss'} \overset{+}{B}_s B_{s'} + \frac{1}{2} \sum_{s,s'=1}^{2} \left(N_{ss'} \overset{+}{B}_s \overset{+}{B}_{s'} + \overset{*}{N}_{ss'} B_{s'} B_s \right)$$

$$M_{11} = M_{22} = Y + X_k$$

$$M_{12} = M_{21} = 0 \qquad\qquad /2.7/$$

$$1 \equiv k$$

$$N_{11} = N_{22} = 0$$

$$2 \equiv -k$$

$$N_{12} = N_{21} = T_k$$

Ovaj hamiltonijan ćemo dijagonalizovati postupkom koji je izložen u referenci [2]. Komutator operatora B_s sa hamiltonijanom $h_{\vec{k}}$ ima oblik:

$$\left[B_s , h_k \right] = \sum_{s'=1}^{2} \left(M_{ss'} B_s + N_{ss'} \overset{+}{B}_s \right) \tag{2.8}$$

tako da Hajzenbergove jednačine KRETANJA glase:

$$i \frac{d}{dt} B_s = \sum_{s'=1}^{2} \left(M_{ss'} B_s + N_{ss'} \overset{+}{B}_s \right) \tag{2.9}$$

Od Boze-operatora B_s prećićemo na nove Boze-operatore C_λ transformacijom:

$$\begin{aligned} B_s &= \sum_{\lambda=1}^{2} \left(U_{s\lambda} C_\lambda + \overset{*}{V}_{s\lambda} \overset{+}{C}_\lambda \right) \\ \overset{+}{B}_s &= \sum_{\lambda'=1}^{2} \left(\overset{*}{U}_{s\lambda'} \overset{*}{C}_{\lambda'} + V_{s\lambda'} C_{\lambda'} \right) \end{aligned} \tag{2.10}$$

Da bi transformacija /2.1o/ bila kanonička, tj. da bi i operator C bio Boze-operator mora biti ispunjen uslov:

$$\delta_{ss'} = \sum_{\lambda=1}^{2} \left(U_{s\lambda} \overset{*}{U}_{s'\lambda} - \overset{*}{V}_{s\lambda} V_{s'\lambda} \right) \tag{2.11}$$

Inverznu transformaciju od /2.1o/ dobijamo, ako prvu od jednačina /2.1o/ pomnožimo sa $\overset{*}{U}_{s\lambda'}$, a drugu pomnožimo sa $\overset{*}{V}_{s\lambda'}$ i dobijene izraze oduzmemo.

Postavljajući uslove:

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^{2} \left(U_{s\lambda} \overset{*}{U}_{s\lambda'} - V_{s\lambda} \overset{*}{V}_{s\lambda'} \right) &= \delta_{\lambda\lambda'} \\ \sum_{s=1}^{2} \left(\overset{*}{U}_{s\lambda'} \overset{*}{V}_{s\lambda} - \overset{*}{V}_{s\lambda'} \overset{*}{U}_{s\lambda'} \right) &= 0 \end{aligned} \tag{2.12}$$

na funkcije U i V nalazimo da je:

$$C_\lambda = \sum_{s=1}^{2} \left(\overset{*}{U}_{s\lambda} B_s - \overset{*}{V}_{s\lambda} \overset{+}{B}_s \right)$$
/2.13/
$$\overset{*}{C}_\lambda = \sum_{s'=1}^{2} \left(U_{s'\lambda} \overset{+}{B}_s - V_{s'\lambda} B_s \right)$$

Zavisnost operatora B_s od vremena izrazićemo na sledeći način:

$$B_s(t) = \sum_{\lambda=1}^{2} \left(U_{s\lambda} C_\lambda e^{-iEt} + \overset{*}{V}_{s\lambda} \overset{+}{C}_\lambda e^{iEt} \right) \qquad /2.14/$$

tako da je

$$i \frac{dB_s}{dt} = \sum_{\lambda=1}^{2} E \left(U_{s\lambda} C_\lambda e^{-iEt} - \overset{*}{V}_{s\lambda} \overset{+}{C}_\lambda e^{iEt} \right) \qquad /2.15/$$

Zamenom /2.15/ u /2.9/ dobijamo sledeće jednačine za odredjivanje funkcija U i V i energije E

$$E U_{s\lambda} = \sum_{s'=1}^{2} \left(M_{ss'} U_{s'\lambda} + N_{ss'} V_{s'\lambda} \right)$$
/2.16/
$$- E V_{s\lambda} = \sum_{s'=1}^{2} \left(M_{ss'} V_{s'\lambda} + \overset{*}{N}_{ss'} U_{s'\lambda} \right)$$

Ako ove jednačine ispišemo za vrednosti $s=1,2$ dobijamo sledeće sisteme jednačina:

$$(E-M) U_{1\lambda} - N V_{2\lambda} = 0$$
/2.17/
$$\overset{*}{N} U_{1\lambda} + (E+M) V_{2\lambda} = 0$$

$$(E-M) U_{2\lambda} - N V_{1\lambda} = 0$$

$$\overset{*}{N} U_{2\lambda} + (E+M) V_{1\lambda} = 0$$

Ovi sistemi pikazuju da su $U_{1\lambda}$ i $U_{2\lambda}$ jednaki, a takodje i $V_{1\lambda}$ i $V_{2\lambda}$. Pošto su sistemi homogeni, da bi smo za U i V dobili netrivijalna rešenja, moramo izjednačiti sa nulom determinante sistema, koje su, kako se vidi iz /2.17/, potpuno jednake. Znači:

$$\begin{vmatrix} E-M & -N \\ \overset{*}{N} & E+M \end{vmatrix} = 0 \qquad /2.18/$$

pa je:

$$E = \sqrt{M^2 - |N|^2} \qquad /2.19/$$

Da bi smo našli transformacione funkcije i , pošto sistemi jednačina /2.17/ izvestan stepen proizvoljnosti, uzećemo da je:

$$\begin{aligned} U_{11} &= U_{22} = U \\ U_{12} &= U_{21} = 0 \\ V_{11} &= V_{22} = 0 \\ V_{12} &= V_{21} = V \end{aligned} \qquad /2.2o/$$

Tada, s obzirom na uslov /2.12/, dobjamo:

$$|U|^2 - |V|^2 = 1 \qquad /2.21/$$

a iz /2.17/

$$V = \frac{E-M}{N} \cdot U \qquad /2.22/$$

Na osnovu /2.21/ i /2.22/, pretpostavljajući da je U realno, nalazimo konačno

$$U = \left[1 - \left(\frac{E-M}{|N|}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$V = \frac{E-M}{N}\left[1 - \left(\frac{E-M}{|N|}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \qquad /2.23/$$

S obzirom da je $M \gg N$ možemo koren /2.19/ razviti u red po stepenima malog parametra

$$|\nu| = \frac{|N|}{2M} \qquad /2.24/$$

pa je onda:

$$E = M - |N|\left(|\nu| + |\nu|^3\right) + O(|\nu|^5) \qquad /2.25/$$

Za ovako aproksimiranu energiju formule /2.23/ glase:

$$U = 1 + \frac{1}{2}|\nu|^2 + O(|\nu|^4)$$

$$V = -\overset{*}{\nu}\left(1 + \frac{3}{2}|\nu|^2\right) + O(|\nu|^5) \qquad /2.26/$$

$$\nu = \frac{N}{2M}$$

Ako za M i N zamenimo konkretne vrednosti u /2.26/ onda dobijmo da je:

$$U_k = 1 + \frac{1}{2}|\rho_k|^2 + O(|\rho|^3)$$

$$V_k = -\overset{*}{\rho}_k - \overset{*}{\rho}_k \overset{*}{\tau}_k + O(|\rho|^3) \qquad /2.27/$$

gde je:

$$\rho_k = \frac{T_k}{2\mu_B \mathcal{H}}$$

$$\tau_k = \frac{\alpha_k - \gamma_0}{2\mu_B \mathcal{H}} - \frac{J_k - J_0}{2\mu_B \mathcal{H}} \qquad /2.28/$$

Ovde je važno napomenuti da pored malih parametara

$$\frac{T_k}{2\mu_B \mathcal{H}} \quad i \quad \frac{\alpha_k - \gamma_0}{2\mu_B \mathcal{H}}$$

koji su mali zbog toga što su dipolne interakcije daleko manje od interakcija izmene. Uvedimo još jedan mali parametar

$$\frac{J_k - J_0}{2\mu_B \mathcal{H}}$$

koji može biti mali isključivo u oblasti malih talasnih vektora, jer je $J_k - J_0 \approx I\,(ak)^2$

/ I je integral izmene za najbliže susede, a a je konstanta rešetke /.

Znaći, ovaj novi mali parametar mali je samo za vrednosti talasnih vektora $(ka) \leq 10^{-\frac{3}{2}}$, pa i svi dalji rezultati važe samo za ovu oblast talasnih vektora.

Energija, koju daje metod približne druge kvantizacije, s obzirom na /2.25/ i /2.27/, biće:

$$\tilde{E}_k = \tilde{E}_k^{(0)} + \tilde{E}_k^{(1)} + \tilde{E}_k^{(2)} \qquad /2.29/$$

gde je:

$$E_k^{(0)} = \vec{\mu}_B \vec{\mathcal{H}}$$

$$E_k^{(1)} = \frac{1}{2}\left(J_0 - J_k\right) + \frac{1}{2}\left(\gamma_0 - \alpha_k\right)$$

$$E_k^{(2)} = \frac{|\Theta_0|^2}{16(\mu_B \mathcal{H})^2}(3J_0 - J_k) + \frac{1}{2\mu_B\mathcal{H}}(\Theta_0'^2 + \Theta_0''^2) +$$

$$+ \frac{1}{4\mu_B\mathcal{H}}(\Theta_0'\Theta_k' + \Theta_0''\Theta_k'') - \frac{|T_k|^2}{2\mu_B\mathcal{H}} \qquad /2.30/$$

Energija osnovnog stanja postaje

$$\tilde{H}_0 = \tilde{H}_0^{(0)} + \tilde{H}_0^{(2)} \qquad /2.31/$$

gde je:

$$\tilde{H}_0^{(0)} = -N\left[\frac{1}{8}(J_0 + \delta_0) + \frac{1}{2}\vec{\mu}_B\vec{\mathcal{H}}\right]$$

$$\tilde{H}_0^{(2)} = -N\left[\frac{|\Theta_0|^2}{16\mu_B\mathcal{H}}\left(2\frac{\Theta_0'\mathcal{B}_0' - \Theta_0''\mathcal{B}_0''}{|\Theta_0||\mathcal{B}_0|} - 1\right) + \right. \qquad /2.32/$$

$$\left. + \frac{T_k^2}{4\mu_B\mathcal{H}} + \frac{\overset{*}{T}{}_k^2}{4\mu_B\mathcal{H}} - \frac{|T_k|}{4\mu_B\mathcal{H}}\right]$$

§6. Korektan spektar energije elementarnih ekscitacija

Sobzirom na /2.27/ i /2.1o/ formule za prelaz od operatora B na operatore C glase:

$$
\begin{aligned}
B_K &= \left(1+\frac{1}{2}|\rho_K|^2\right) C_K - \left(\rho_K + \rho_K \tau_K\right) \overset{+}{C}_K \\
\overset{+}{B}_K &= \left(1+\frac{1}{2}|\rho_K|^2\right) \overset{+}{C}_K - \left(\overset{*}{\rho}_K + \overset{*}{\rho}_K \overset{*}{\tau}_K\right) C_K
\end{aligned}
\qquad /2.33/
$$

Ako u hamiltonijanu

$$
\hat{H}_{int.} = \hat{H}_{3B} + \hat{H}_{4B} + \hat{H}_{6B} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{K}_1, \vec{K}_2} \left(Z_{\vec{K}_1} \overset{+}{B}_{\vec{K}_1} \overset{+}{B}_{\vec{K}_2} B_{\vec{K}_1+\vec{K}_2} + \overset{*}{Z}_{\vec{K}_1} \overset{+}{B}_{\vec{K}_1+\vec{K}_2} B_{\vec{K}_2} B_{\vec{K}_1} \right) -
$$

$$
- \frac{1}{N} \sum_{\vec{K}_1, \vec{K}_2, \vec{K}_3} \Big[\left(Y + X_{\vec{K}_1} + X_{\vec{K}_3} - W_{\vec{K}_1-\vec{K}_3} \right) \overset{+}{B}_{\vec{K}_1} \overset{+}{B}_{\vec{K}_2} B_{\vec{K}_3} B_{\vec{K}_1+\vec{K}_2-\vec{K}_3} +
$$

$$
+ T_{\vec{K}_1} \overset{+}{B}_{\vec{K}_1} \overset{+}{B}_{\vec{K}_2} \overset{+}{B}_{\vec{K}_3} + \overset{*}{T}_{\vec{K}_1} \overset{+}{B}_{\vec{K}_1+\vec{K}_2+\vec{K}_3} \overset{+}{B}_{\vec{K}_3} B_{\vec{K}_2} B_{\vec{K}_1} \Big] +
$$

$$
+ \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{K}_1, \vec{K}_2, \vec{K}_3, \vec{K}_4, \vec{K}_5} \left[\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(X_{\vec{K}_1} + X_{\vec{K}_4}\right) + X_{\vec{K}_4+\vec{K}_5-\vec{K}_1} - 2 W_{\vec{K}_1-\vec{K}_2} \right] \cdot
$$

$$
\cdot \left[\overset{+}{B}_{\vec{K}_1} \overset{+}{B}_{\vec{K}_2} \overset{+}{B}_{\vec{K}_3} B_{\vec{K}_4} B_{\vec{K}_5} B_{\vec{K}_1+\vec{K}_3+\vec{K}_2-\vec{K}_4-\vec{K}_5} \right] \qquad /2.34/
$$

izvršimo zamene /2.33/ onda je očigledno da neće svi normalni produkti po operatorima B u /2.34/ ostati kao normalni produkti u operatorima C. Ako, ovako dobijeni izraz po C, svedemo na normalne produkte, onda će se pojaviti izrazi koji sadrže članove drugog reda po C ,tj. $\overset{+}{C}\overset{+}{C}$; $\overset{+}{C}C$, CC i članovi višeg reda po θ .

S obzirom na aproksimaciju, koju koristimo, u članovima koji su drugog reda po C zadržaćemo one koji su proporcionalni $X|\rho|^2, Y|\rho|^2, W|\rho|^2$, i $T\rho$. Odbacuju se oni članovi koji su proporcionalni ρ^3 množeni sa X , Y , W , i članovi $|\rho|^2$ množeni sa T . Članovi višeg reda tipa $\overset{+}{C}\overset{+}{C}CC$ ne mogu ~~menj-~~ menjati harmonijski spektar pa se i oni odbacuju. Od članova koji ne sadrže isti broj kreacionih i anihilacionih operatora treba zadržati samo one koji su proporcionalni $X|\rho|, Y|\rho|, W|\rho|$ T , Z , jer oni u drugoj aproksimaciji teorije perturbacija daju popravku energije, koja je proporcionalna sa ρ .
Članovi ovog tipa, proporcionalni $X|\rho|^2, Y|\rho|^2, W|\rho|^2, T\rho, Z\rho$, u drugoj aproksimaciji teorije perturbacija daju popravku energije proporcionalnu ρ^3 , pa se odbacuju.
Posle ovakve procedure, uz ukazane aproksimacije, dobijamo sledeće popravke:

$$\delta\tilde{H}_0 = -\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}\vec{q}'} W_{\vec{q}-\vec{q}'}\,\overset{*}{\rho}_{\vec{q}}\,\rho_{\vec{q}'} \qquad /2.35/$$

$$\delta H_{2B} = \delta H'_{2B} + \delta H''_{2B} \qquad /2.36/$$

gde je:

$$\delta H'_{2B} = \sum_{\vec{k}} \Phi_{\vec{k}}\,\overset{+}{C}_{\vec{k}} C_{\vec{k}} \qquad /2.37/$$

$$\Phi_{\vec{k}} = -\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}}\Big[|\rho_{\vec{q}}|^2\big(4Y+4X_{\vec{k}}-2W_0-2W_{\vec{k}-\vec{q}}\big)+$$
$$+2\big(\rho_{\vec{k}}\overset{*}{\rho}_{\vec{q}}+\overset{*}{\rho}_{\vec{k}}\rho_{\vec{q}}\big)\big(X_{\vec{q}}-W_{\vec{k}-\vec{q}}\big)\Big]+$$
$$+\frac{4}{N^2}\sum_{\vec{q}\,\vec{q}'}\big(X_{\vec{q}+\vec{k}-\vec{q}'}\overset{*}{\rho}_{\vec{q}}\rho_{\vec{q}'}-2W_{\vec{q}-\vec{q}'}\big)+\frac{8\mu_B\mathcal{H}}{N}\sum_{\vec{q}}|\rho_{\vec{q}}|^2$$

$$\delta H''_{2B} = \sum_{\vec{k}}\big(\lambda_{\vec{k}}\overset{+}{C}_{\vec{k}}\overset{+}{C}_{-\vec{k}}+\overset{*}{\lambda}_{\vec{k}}C_{-\vec{k}}C_{\vec{k}}\big)$$
$$\lambda_{\vec{k}} = \frac{1}{N}\sum_{q}\rho_{\vec{q}}\big(X_{\vec{q}}-W_{\vec{k}-\vec{q}}\big) \qquad /2.38/$$

$$\delta H_{4B} = \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3}\Big[\Omega_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3}\overset{+}{C}_{\vec{k}_1}\overset{+}{C}_{\vec{k}_2}\overset{+}{C}_{\vec{k}_3}C_{\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3}+$$
$$+\overset{*}{\Omega}_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3}\overset{+}{C}_{\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3}C_{\vec{k}_1}C_{\vec{k}_2}C_{\vec{k}_3}\Big] \qquad /2.40/$$

$$\Omega_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3} = -T_{\vec{k}}+\rho_{\vec{k}_3}\big(2Y+2X_{\vec{k}_1}+X_{\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3}+X_{\vec{k}_3}-2W_{\vec{k}_1+\vec{k}_3}\big)+$$
$$+\frac{2}{N}\sum_{\vec{q}}\big(W_{\vec{k}_1-\vec{q}}\overset{*}{\rho}_{\vec{q}}-X_{\vec{k}_2+\vec{k}_3-\vec{q}}\overset{*}{\rho}_{\vec{k}_2+\vec{k}_3-\vec{q}}\big)-\frac{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)}{N}\sum_{\vec{q}}X_{\vec{q}}\overset{*}{\rho}_{\vec{q}}$$

$$\delta H_{3B} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3}\big(Z_{\vec{k}_1}\overset{+}{C}_{\vec{k}_1}\overset{+}{C}_{\vec{k}_2}C_{\vec{k}_1+\vec{k}_2}+\overset{*}{Z}_{\vec{k}_1}\overset{+}{C}_{\vec{k}_1+\vec{k}_2}C_{\vec{k}_2}C_{\vec{k}_1}\big) \qquad /2.39/$$

S obzirom da su razlike $X-W$ proporcionalne $(ak)^2$ i predstavljaju dopunski mali ~~deo~~ parametar teorije, u formulama /2.35/ do /2.40/ možemo izvršiti sledeća uprošćavanja

$$\lambda_{\vec{k}} \sim \rho_{\vec{k}} (ak)^2 \qquad J_0 \sim T(ak)^2$$

Pošto je $\lambda_{\vec{k}}$ faktor proporcionalan uz članove $\overset{+}{C}\overset{+}{C}$ i CC doprinos od $\delta H''_{2B}$ energiji elementarnih ekscitacija bio bi reda $(ak)^6$ i zbog toga ga zanemarujemo.

Osim toga, pošto je

$$X_{\vec{k}} - W_{\vec{k}} \sim J_0 (ak)^2 \frac{T^2}{4(\mu_B \mathcal{H})^2} \sim T(ak)^2 \rho$$

možemo uzeti da je ovo ravno nuli, jer daje poravku proporcionalnu kvadratu malog parametra.

S obzirom na ovo, $\Phi_{\vec{k}}$ postaje :

$$\tilde{\Phi}_{\vec{k}} = -\frac{4}{N} \sum_{\vec{q}} Y |\rho_{\vec{q}}|^2 + \frac{8\vec{\mu}_B \vec{\mathcal{H}}}{N} \sum_{\vec{q}} |\rho_{\vec{q}}|^2 \qquad /2.41/$$

Iz istih razloga $\Omega_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3}$ postaje

$$\tilde{\Omega}_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3} = -T_{\vec{k}_1} + 2Y\rho_{\vec{k}_3} + \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \overset{*}{\rho}_{\vec{q}} \left[2W_{\vec{k}_1-\vec{q}} - \left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right) X_{\vec{q}} \right] \qquad /2.42/$$

S obzirom na izvršene procene, naš hamiltonijan sa kojim ćemo dalje raditi, da bismo dobili korektan spektar energija elementarnih ekscitacija, ima oblik

$$\begin{aligned} H_{eff.} = {} & \sum_{\vec{k}} \left(\tilde{E}_{\vec{k}} + \tilde{\Phi}_{\vec{k}} \right) \overset{+}{C}_{\vec{k}} C_{\vec{k}} + \\ & + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3} \left(Z_{\vec{k}_1} \overset{+}{C}_{\vec{k}_1} \overset{+}{C}_{\vec{k}_2} C_{\vec{k}_1+\vec{k}_2} + \overset{*}{Z}_{\vec{k}_1} \overset{+}{C}_{\vec{k}_1+\vec{k}_2} C_{\vec{k}_2} C_{\vec{k}_1} \right) + \\ & + \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3,\vec{k}_4,\vec{k}_5} \left[\tilde{\Omega}_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3} \overset{+}{C}_{\vec{k}_1} \overset{+}{C}_{\vec{k}_2} \overset{+}{C}_{\vec{k}_3} C_{\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3} + \overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{k}_1\vec{k}_2\vec{k}_3} \overset{+}{C}_{\vec{k}_1+\vec{k}_2+\vec{k}_3} C_{\vec{k}_3} C_{\vec{k}_2} C_{\vec{k}_1} \right] \end{aligned} \qquad /2.43/$$

Spektar energija elementarnih ekscitacija tražićemo metodom funkcija Grina, koji je izložen u referenci[2].

Jednačina za funkciju Grina glasi

$$E\langle\langle \hat{A} | \hat{B} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle - \langle\langle \hat{A} | [\hat{B},\hat{H}]\rangle\rangle \qquad /2.44/$$

Treba napomenuti da, za razliku od temperaturskih funkcija Grina simbol $\langle\ \rangle$ označava usrednjavanje po vakuumskom stanju.

Sobzirom na /2.44/ i /2.45/ za funkciju Grna $\langle\langle C_{\vec{k}} | \overset{+}{C}_{\vec{k}} \rangle\rangle$ dobijamo sledecu jednačinu

$$\left(E - \hat{\tilde{E}}_{\vec{k}} - \tilde{\Phi}_{\vec{k}}\right)\langle\langle C_{\vec{k}} | \overset{+}{C}_{\vec{k}} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} + \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{k}_1} Z_{\vec{k}_1}\langle\langle C_{\vec{k}} | \overset{+}{C}_{\vec{k}_1}\overset{+}{C}_{k-\vec{k}_1}\rangle\rangle +$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2}\hat{\tilde{\Omega}}_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}_3}\langle\langle C_{\vec{k}} | \overset{+}{C}_{\vec{k}_1}\overset{+}{C}_{\vec{k}_2}\overset{+}{C}_{k-k_1-k_2}\rangle\rangle \qquad /2.45/$$

Za više funkcije Grina, koje se javljaju u formuli /2.45/ dobijamo sledeće jednačine

$$\left(E - \tilde{E}_{\vec{k}-\vec{k}_1} - E_{\vec{k}_1} - \Phi_{\vec{k}_1} - \Phi_{\vec{k}-\vec{k}_1}\right)\langle\langle C_{\vec{k}} | \overset{+}{C}_{\vec{k}_1}\overset{+}{C}_{\vec{k}-\vec{k}_1}\rangle\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{N}}\left(\overset{*}{Z}_{\vec{k}-\vec{k}_1} + \overset{*}{Z}_{\vec{k}_1}\right)\langle\langle C_{\vec{k}} | \overset{+}{C}_{\vec{k}}\rangle\rangle \qquad /2.46/$$

$$\left(E - \tilde{E}_{\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2} - \tilde{E}_{\vec{k}_1} - \tilde{E}_{\vec{k}_2} - \tilde{\bar{\Phi}}_{\vec{k}_1-\vec{k}_1-\vec{k}_2} - \tilde{\bar{\Phi}}_{\vec{k}_1} - \tilde{\bar{\Phi}}_{\vec{k}_2}\right)\langle\langle C_{\vec{k}} | \overset{+}{C}_{\vec{k}_1}\overset{+}{C}_{\vec{k}_2}\overset{+}{C}_{\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2}\rangle\rangle =$$

$$= \frac{1}{N}\Big(\overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{k}_2,\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2,\vec{k}_1} + \overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{k}_2,\vec{k}_1\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2} + \overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2} + \overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2,\vec{k}_2,\vec{k}_1} +$$

$$+ \overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2,\vec{k}_1,\vec{k}_2} + \overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{k}_1,\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2,\vec{k}_2}\Big)\langle\langle C_{\vec{k}} | \overset{+}{C}_{\vec{k}}\rangle\rangle \qquad /2.47/$$

Treba napomenuti da su jednačine /2.46/ i /2.47/ ispuštene funkcije Grina tipa $\langle\langle C|\overset{+}{C}\overset{+}{C}\overset{+}{C}\overset{+}{C}\rangle\rangle$ i $\langle\langle C|\overset{+}{C}\overset{+}{C}\overset{+}{C}\overset{+}{C}\overset{+}{C}\rangle\rangle$ iz sledećih razloga:

Ako bi pisali jednačinu za njih onda bi se funkcije Grina tipa $\langle\langle C|\overset{+}{C}\overset{+}{C}\rangle\rangle$ i $\langle\langle C|\overset{+}{C}\overset{+}{C}\overset{+}{C}\rangle\rangle$ pojavile u ovim jednačinama sa faktorom proporcionalnosti ρ, što bi, posle zamene /2.46/ i /2.47/ u /2.45/ dalo popravku energije elementarnih ekscitacija proporcionalnu ρ^2, koja se zanemaruje.

Prema tome jednačine /2.46/ i /2.47/ date su sa potrebnom tačnošću.

Zamenom /2.46/ i /2.47/ u /2.45/ dobijamo:

$$\Bigg\{E-\mathcal{E}_{\vec{k}}-\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}_1}\frac{Z_{\vec{k}_1}\left(\overset{*}{Z}_{\vec{k}-\vec{k}_1}+\overset{*}{Z}_{\vec{k}_1}\right)}{E-\mathcal{E}_{\vec{k}}-\mathcal{E}_{\vec{k}-k_1}}-\frac{1}{N^2}\sum_{\vec{k}_1,\vec{k}_2}\left[\frac{\tilde{\Omega}_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2}}{E-\mathcal{E}_{\vec{k}_1}-\mathcal{E}_{\vec{k}_2}-\mathcal{E}_{\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2}}\right]\cdot$$

$$\cdot\Bigg[\overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2}+\overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{k}_1,\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2,\vec{k}_2}+\overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{k}_2,\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2,\vec{k}_1}+\overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{k}_2,\vec{k}_1,\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2}+$$

$$+\overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2,\vec{k}_1,\vec{k}_2}+\overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{k}_2,\vec{k}_2,\vec{k}_1}\Bigg]\Bigg\}\langle\langle C_k|\overset{+}{C}_k\rangle\rangle=\frac{i}{2\pi}$$

$$\mathcal{E}_{\vec{k}}=\tilde{E}_{\vec{k}}+\tilde{\Phi}_{\vec{k}} \qquad /2.48/$$

Pol funkcije Grina /2.48/ dat je sa:

$$E = \mathcal{E}_{\vec{K}} + \frac{1}{N}\sum_{\vec{K}_1} \frac{Z_{\vec{K}_1}(\overset{*}{Z}_{\vec{K}-\vec{K}_1} + \overset{*}{Z}_{\vec{K}_1})}{E - \mathcal{E}_{\vec{K}_1} - \mathcal{E}_{\vec{K}-\vec{K}_1}} + \frac{1}{N^2}\sum_{\vec{K}_1,\vec{K}_2}\left(\frac{\tilde{\Omega}_{\vec{K}_1,\vec{K}_2,\vec{K}-\vec{K}_1-\vec{K}_2}}{E - \mathcal{E}_{\vec{K}_1} - \mathcal{E}_{\vec{K}_2} - \mathcal{E}_{\vec{K}-\vec{K}_1-\vec{K}_2}}\right)\cdot$$

$$\left(\overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{K}_1,\vec{K}_2,\vec{K}-\vec{K}_1-\vec{K}_2} + \overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{K}_1,\vec{K}-\vec{K}_1-\vec{K}_2,\vec{K}_2} + \overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{K}_2,\vec{K}-\vec{K}_1-\vec{K}_2,\vec{K}_1} + \right.$$

$$\left. + \overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{K}-\vec{K}_1-\vec{K}_2,\vec{K}_1,\vec{K}_2} + \overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{K}_2,\vec{K}-\vec{K}_1-\vec{K}_2,\vec{K}_1} + \overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{K}-\vec{K}_1-\vec{K}_2,\vec{K}_2,\vec{K}_1}\right) \qquad /2.49/$$

Jednačina za energiju /E/ je implicitna i rešavaćemo je metodom iteracija.

Ako za rešenje nulte aproksimacije uzmemo $E_0 = \mathcal{E}_{\vec{K}}$ onda je rešenje u prvoj aproksimaciji:

$$E_1(\vec{K}) = \mathcal{E}_{\vec{K}} + \frac{1}{N}\sum_{\vec{K}_1} \frac{Z_{\vec{K}_1}(\overset{*}{Z}_{\vec{K}-\vec{K}_1} + \overset{*}{Z}_{\vec{K}_1})}{\mathcal{E}_{\vec{K}} - \mathcal{E}_{\vec{K}_1} - \mathcal{E}_{\vec{K}-\vec{K}_1}} +$$

$$+ \frac{1}{N^2}\sum_{\vec{K}_1,\vec{K}_2} \frac{\tilde{\Omega}_{\vec{K}_1,\vec{K}_2,\vec{K}-\vec{K}_1-\vec{K}_2}}{\mathcal{E}_{\vec{K}} - \mathcal{E}_{\vec{K}_1} - \mathcal{E}_{\vec{K}_2} - \mathcal{E}_{\vec{K}-\vec{K}_1-\vec{K}_2}} \cdot \left(\overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{K}_1,\vec{K}_2,\vec{K}-\vec{K}_1-\vec{K}_2} + \right.$$

$$+ \overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{K}_1,\vec{K}-\vec{K}_1-\vec{K}_2,\vec{K}_2} + \overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{K}_2,\vec{K}_1-\vec{K}_1-\vec{K}_2,\vec{K}_1} + \overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{K}_2,\vec{K}_1,\vec{K}-\vec{K}_1-\vec{K}_2} +$$

$$\left. + \overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{K}-\vec{K}_1-\vec{K}_2,\vec{K}_1,\vec{K}_2} + \overset{*}{\tilde{\Omega}}_{\vec{K}-\vec{K}_1-\vec{K}_2,\vec{K}_2,\vec{K}_1}\right) \qquad /2.50/$$

Izraz /2.5o/ predstavlja korektnu energiju elementarnih ekscitacija u feromagnetiku sa dipolnim interakcijama.

§7. Poredjenje rezultata

U prethodna dva paragrafa nadjeni su: spektar elementarnih eksitacija u aproksimaciji približne druge kvantizacije /2.29/ i korektan spektar u koji su ušle popravke od članova višeg reda, koji figurisu u bozonskom hamiltonijanu sistema /2.5o/. Osim toga, ako u hamiltonijan /2.6/ odbacimo članove koji ne održavaju broj kvazi - čestica / tj. one koji su proporcionalni T K / onda dobijamo spektar elementarnih ekscitacija u aproksimaciji Hajtlera i Londona. Energija u ovoj aproksimaciji je:

$$E_{HL}(\vec{k}) = Y + X_{\vec{k}} \qquad /2.51/$$

U našoj teoriji javljaju se tri mala parametra, i to:

$$\frac{\theta_0}{\mu_B \mathcal{H}}, \quad \frac{T}{\mu_B \mathcal{H}}, \quad a^2 k^2$$

pri cemu ovaj treci dolazi od toga što posmatramo oblast malih talasnih vektora. Pošto u teoriji odbacujemo kvadrate svih malih parametara, ocigledno je da u izrazima tipa:

$$\frac{\theta_0}{\mu_B \mathcal{H}} T_{\vec{k}}, \quad \frac{T_{\vec{k}}}{\mu_B \mathcal{H}} T_{\vec{k}}, \quad \frac{\theta_0}{\mu_B \mathcal{H}} Z_{\vec{k}} \quad i \quad \frac{T_{\vec{k}}}{\mu_B \mathcal{H}} Z_{\vec{k}} \qquad /2.52/$$

treba zanemariti zavisnost funkcija T i Z od $\vec{k}$ i zameniti ih njihovim vrednostima za $\vec{k}$ jednako nuli, jer su smo onda izrazi /2.52/ linearni po malom parametru.

Uzimajući ovo u obzir, kao i činjenicu da je:

$$T_{\vec{k}} = B_{\vec{k}} \ , \ Z_{\vec{k}} = -\frac{1}{2}\Theta_{\vec{k}} \ , \ W_{\vec{k}} = -\frac{1}{2}J_{\vec{k}} \ , \ X_{\vec{k}} = -\frac{1}{2}J_{\vec{k}}$$

formule /2.51/ , /2.29/ , /2.5o/ možemo napisati u obliku

$$E_{HL}(\vec{k}) = \vec{\mu}_B \vec{\mathcal{H}} + \frac{1}{2}(J_0 + J_{\vec{k}}) + \frac{1}{2}(\gamma_0 - \alpha_{\vec{k}}) + \frac{1}{8}J_0\left(\frac{|\Theta_0|}{\mu_B \mathcal{H}}\right)^2 + \frac{3}{4}\frac{\Theta_0'^2 + \Theta_0''^2}{\mu_B \mathcal{H}} \qquad /2.51a/$$

$$E_{PDK}(\vec{k}) = E_{HL}(\vec{k}) - \frac{|\mathcal{B}_0|^2}{2\mu_B \mathcal{H}} \qquad /2.29a/$$

$$E_c(\vec{k}) = E_{HL}(\vec{k}) - J_0\left(\frac{|\mathcal{B}_0|}{\mu_B \mathcal{H}}\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{|\Theta_0|^2}{\mu_B \mathcal{H}} - \frac{3}{2}\frac{J_0}{\mu_B \mathcal{H}}\left[\frac{2+\sqrt{3}}{18}|\mathcal{B}_0|^2 + \frac{1+\sqrt{3}}{6}\left(\mathcal{B}_0^2 + \overset{*}{\mathcal{B}}{}_0^2\right)\right] \qquad /2.5oa/$$

Kao što vidimo i metod približne drge kvantizacije i korektan izraz za energiju daju smanjenu energiju u odnosu na energiju koju daje Hajtler-Londonova aproksimacija, što fizički znači da se efekat neodržanja kvazičestica održava na taj način što populacija kvazičestica raste.

Popravljena energija osnovnog sianja, koju daje korektan prilaz ovom problemu, data je sledećom formulom

$$H_{oc} = -N\Big[\frac{1}{2}\vec{\mu}_B\vec{\mathcal{H}} + \frac{1}{8}J_0 + \frac{1}{8}\gamma_0 + \frac{1}{16}\frac{|\Theta_0|^2}{\mu_B\mathcal{H}}\Big(2\frac{\Theta_0'\mathcal{B}_0' - \Theta_0''\mathcal{B}_0''}{|\Theta_0||\mathcal{B}_0|} - 1\Big) - \frac{\mathcal{B}_0^2 + \overset{*}{\mathcal{B}}{}_0^2 - |\mathcal{B}_0|^2}{4\mu_B\mathcal{H}} - \frac{1}{8}J_0\frac{|\mathcal{B}_0|^2}{(\mu_B\mathcal{H})^2} \qquad /2.53/$$

Z A K L J U Č A K

Izvršena analiza dovela nas je do korektnog spektra elementarnih ekscitacija u feromagnetiku sa dipolnim interakcijama i do korektnog izraza za energiju osnovnog stanja. Iz same analize se vidi da smo do ovih rezultata mogli da dodjemo isključivo za to što se pretpostavilo da spinski talasi imaju velike talasne dužine i da se feromagnetik nalazi u jakom spoljašnjem magnetnom polju. Ove dve pretpostavke dale su nam dovoljan broj malih parametara po kojima se teorija može izvesti sa željenom tačnošću. U slučaju da je spoljašnje magnetno polje jednako nuli i da su kvaziimpulsi spinskih talasa veoma veliki rezultati bi se bitno razlikovali od ovde dobivenih rezultata. Pored toga, za ovaj slučaj, pitanje razvijanja koliko-toliko, tačne teorije ostaje potpuno otvoreno, jer napred pomenute male parametre više nemamo.

Dobiveni rezultati omogućuju da se, pod pomenutim uslovima, ispitaju i druge magnetne osobine, osim već ispitanih, a to su: Problem vezanih stanja, problem interakcije spinskih talasa i problem temperature prelaza feromagnetika u paramagnetnu fazu.

Treba, na kraju, naglasiti da se slična procedura može primeniti i na feromagnetike sa spinom većim od $S=\frac{1}{2}$, ali uz teškoće koje su više matematičkog nego principijelnog karaktera.

LITERATURA

[1] T. Holstein, H. Primakoff: Phys. Rev. 58, 1o98 /194o/

[2] С. В. ТЯБЛИКОВ: „МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ МАГНЕТИЗМА" „НАУКА" МОСКВА 1965

[3] В. М. АГРАНОВИЧ, B.S. Tošić: ЖЭТФ 53, 149 /1967/

[4] B.S. Tošić: Phys. Stat. Sol. /1971/

5. Đ. Mušicki: Uvod u teorijsku fiziku II

6. С. В. ВОНСОВСКИЙ, Я. ШУР: „ФЕРРОМАГНЕТИЗМ", ГОСТЕХИЗДАТ, МОСКВА-ЛЕНИНГРАД 1948