

D-127

UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
GRUPA: FIZIKA

DIPLOMSKI RAD

NEKE MOGUĆE POSLEDICE MAGNON-FONON INTERAKCIJE

MENTOR

Dr. S.D. Stojanović

KANDIDAT

Vladimir Dj. Kovač

NOVI SAD 1977

Najiskrenije se zahvaljujem profesoru Dr. Stanoju D. Stojanoviću na ukazanoj pomoći i korisnim sugestijama u toku rada na ovoj temi.

Vladimir Dj. Kovač

## S a d r ž a j

1) Uvod	1
2) Jako magnetni materijali. Feromagnetizam	5
3) Hajzenbergov model feromagneta	10
4) Blohova aproksimacija	12
5) Fononi	14
6) Magnon-fonon interakcija	18
7) Ispitivanje mogućnosti formiranja magnonskih kaplji	21
8) Zaključak	34

## U V O D

Svaka supstanca koja se unese u spoljašnje magnetno polje pokazuje neka magnetna svojstva. Ta svojstva karakterišemo vektorom koji se naziva magnetizacija. Eksperimenti pokazuju da je magnetizacija  $\vec{M}$  funkcija spoljašnjeg magnetnog polja. Za neke magnetne materijale u određenom intervalu temperatura i polja i pri kvazistatičkom procesu namagnećivanja ta zavisnost ima prosti linearni karakter:

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H} \quad \dots \dots \dots \quad (1)$$

Koeficijent proporcionalnosti  $\chi$  naziva se magnetna susceptibilnost. Ako je susceptibilnost negativna ( $\chi < 0$ ) radi se o dijamagneticima. Veličina  $\chi$  je za ove materijale vrlo mala, reda veličine  $10^{-6}$ . Tipični predstavnici su: inertni gasovi, mnoga organska jedinjenja i niz metala. Materijali sa  $\chi > 0$  su paramagneti. Veličina susceptibilnosti je takođe mala (reda veličine  $10^{-3}$  do  $10^{-6}$ ). Tipični paramagneti su: kiseonik soli redkih zemalja, elementi grupe gvoždja i alkalni metali.

Uporedno sa ovim, tzv. slabomagnetnim materijalima, postoji niz jako magnetnih materijala. U takvim materijalima magnetizacija nije linearna funkcija spoljašnjeg polja već između njih postoji nelinearna i nejednoznačna zavisnost.

Ova, uglavnom fenomenološka podela izvršena na osnovu znaka i veličine magnetne susceptibilnosti  $\chi$ , razvrstava materijale u tri grube ali međusobno različite klase. Finija podela može slediti tek nakon detaljnijeg proučavanja prirode magnetizma.

Prvu teoriju o magnetizmu dao je Weber. U svojoj teoriji on iznosi ideju da magnet predstavlja skup tzv. uredjenih elementarnih magneta i da su sve magnetne pojave rezultat razuređivanja tog uredjenog skupa. U ovoj teoriji nije sadržano objašnjenje prirode elementarnih magneta, što predstavlja nedostatak ove teorije. Međutim i kod savremenog tumačenja ovog prirodnog fenomena polazilo se od toga da je magnet sistem uredjenih elementarnih magneta.

U najopštijem vidu magnetizam možemo odrediti kao osobitu formu materijalnih interakcija medju nanelektrisanjima u kretanju. Dakle, izvori magnetnog polja su nanelektrisanja u kretanju.



nju odnosno struja. Imajući to u vidu, možemo reći da u atomskim okvirima imamo dve vrste struja: orbitalnu i spinsku (koja je povezana sa unutrašnjim stepenima slobode kretanja čestice), odnosno orbitalni i spinski magnetizam. Ukoliko su svi mikrostrukturni elementi supstance – elektroni, protoni i neutroni nosioci magnetnog momenta, to i bilo koje njihove kombinacije i kombinacije tih kombinacija tj. atomi, molekuli i makroskopska tela u principu mogu biti izvori magnetizma. Odatle i sledi tvrdnja o univerzalnom karakteru magnetizma supstanci: magnetne osobine su svojstvene svim materijalima tj. svi su oni magnetici.

Spoljašnje magnetno polje vrši uticaj na ove orbitalne i spinske struje (momente). Poznata su dva osnovna efekta spoljašnjeg magnetnog polja. Na prvom mestu je dijamagnetni efekt. Naime, ako se atom stavi u spoljašnje slabo magnetno polje na prvo bitno kretanje elektrona će se superponirati i rotaciono kretanje oko magnetnih linija sila. Zbog toga se u svakom atomu stvara dopunski magnetni momenat koji je suprotno usmeren u odnosu na spoljašnje polje, što i određuje negativan predznak dijamagnetskoj susceptibilnosti. Ovaj slučaj važi za atome čiji je rezultujući magnetni moment jednak nuli.

S druge strane, ukoliko u atomu postoji rezultujući magnetni moment koji je različit od nule, spoljašnje magnetno polje će orijentisati ovaj sopstveni magnetni moment duž svog pravca. Kao rezultat ovakve orijentacije nastaje moment koji je istog pravca i smera kao i spoljašnje polje. Ovakav efekt se naziva paramagnetizam.

Zbog univerzalnosti dijamagnetskog efekta, svi atomi, joni i molekuli poseduju svojstvo dijamagnetizma, a takodje i njihovi kolektivi – kondenzovana tela – tečnosti i kristali.

Medutim dijamagnetizam se faktički ne javlja kod svih tela. To se objašnjava time, što u mnogim slučajevima dijamagnetski efekat biva maskiran vrlo jakim paramagnetskim efektom. Na takav način, u paramagneticima imamo efekat koji rezultira izmedju preovladjujućeg paramagnetizma i slabijeg dijamagnetizma.

## 1. KVANTNOMEHANICKA TEORIJA

### DIJAMAGNETIZMA I PARAMAGNETIZMA

Klasična teorija dijamagnetizma daje nam sledeću relaciju za dijamagnetnu susceptibilnost:

$$\chi_A^{DH} = -\frac{Ne^2}{6mc^2} \sum_{k=1}^z \langle r_k^2 \rangle = -2,832 \cdot 10^{-10} \sum_{k=1}^z \langle r_k^2 \rangle \quad (1.1)$$

iz koje se vidi da ona zavisi od poluprečnika elektronskih putanja a ne zavisi od temperature. Stavljujući  $\langle r_k^2 \rangle \approx 10^{-16} \text{ cm}^2$  u relaciju (1.1) izračunavamo vrednost

$$\chi_A^{DH} \approx 10^{-6} \cdot Z$$

koja se dosta dobro slaže sa eksperimentom. Izvedena klasična teorija dijamagnetizma važiće samo u tom slučaju ako  $\sum_k \langle r_k^2 \rangle$  ima stacionarnu stabilnu vrednost.

Kvantnomehaničku teoriju dijamagnetizma razvili su Van-Flek a kasnije i Poling. Ova teorija daje izvesnu korekciju na klasični rezultat:

$$\chi_A = -\frac{Ne^2}{6mc^2} \sum_{k=1}^z \langle n | r_k^2 | n \rangle + 2N \sum_{n'} \frac{|\langle n | \hat{M}_z^0 | n' \rangle|^2}{E_n^0 - E_{n'}^0} \quad (1.2)$$

U slučaju atoma i molekula sa sferno-simetričnim elektronskim omotačem dobija se ista formula (1.1) samo što se izračunavanje vrši po zakonima kvantne mehanike. U slučaju dijamagnetizma gasova ili rastvora atomi i joni u normalnom stanju nemaju sopstveni magnetni moment tj.

$$\langle n | \hat{M}_z^0 | n \rangle = 0$$

Ako pri tome električno polje atoma ili jona poseduje sfernu simetriju onda i svi ne dijagonalni elementi  $\langle n | \hat{M}_z^0 | n' \rangle$  za  $n' \neq n$  moraju biti jednaki nuli. Pri ovim uslovima se kvantnomehanički izraz za  $\chi$  svodi na klasični:

$$(\chi_A^{DH})_{PLEC.} = -\frac{Ne^2}{6mc^2} \sum_{k=1}^z \langle n | r_k^2 | n \rangle$$

Iz kvantnomehaničke formule (1.2) vidimo da se magnetna susceptibilnost sistema slabo interagujućih čestica čiji elektronski omotači ne poseduju sfernu simetriju  $[\langle n | \hat{M}_z^0 | n' \rangle \neq 0]$

za  $n \neq n'$  ] sastoji iz dva dela: čisto dijamagnetsnog  $(\chi_A^{DM})_{prec}$  povezanog sa precesijom elektronskih orbita u magnetnom polju i kvantnog - polarizacionog  $(\chi_A^{PM})_{polar}$  povezanog sa virtualnim kvantnim prelazima ( pri  $H=0$  ) izmedju nultih stacionarnih stanja atoma. Ovaj drugi član u izrazu (12) biće pozitivan ako je početno stanje sistema (n) osnovno energetski najniže. U protivnom drugi deo u (12) može biti i negativan ( tj. imali bi tzv. "polarizacioni paramagnetizam" ). Odavde i sledi relativnost i uslovnost termina dija- i paramagnetik. Ovaj drugi član, kojeg je uveo Van-Flek dobio je po njemu i ime i naziva se vanflekovski paramagnetizam. Odmah treba napomenuti da se vanflekovski paramagnetizam i običan orjentacioni paramagnetizam bitno razlikuju. Suštinska razlika medju njima se javlja u tome što polarizacioni paramagnetizam praktično ne zavisi od temperature dok orjentacioni jako zavisi od nje. Sa porastom temperature uloga polarizacionog paramagnetizma raste dok uloga orjentacionog opada.

Kod atoma i jona čiji elektronski omotači poseduju sfernu simetriju u odnosu na spoljno magnetno polje, polarizacioni paramagnetizam u drugoj aproksimaciji teorije perturbacija iščezava.

## 2. JAKO MAGNETNI MATERIJALI. FEROMAGNETIZAM

Danas se smatra da su uzrok pojave feromagnetizma ne popunjeni elektronski omotači atoma koji ulaze u sastav kristalne rešetke. Redosled konfiguracije popunjavanja omotača narušava se počevši od kalcijuma. Kod ovog elementa ne popunjava se stanje  $3d$  koje bi trebalo da sledi nakon popunjavanja p-stanja, već sledeće  $4s$  stanje.

Prilikom popunjavanja  $3d$ - sloja ( grupa gvoždja ) zapaža se sledeći redosled popunjavanja. Naprimjer, kod atoma Cr umesto pravilne konfiguracije  $3d^4 4s^2$  realizuje se konfiguracija  $3d^5 4s$ , a konfiguracija  $3d^8 4s^2$  kod Ni (  $Z=28$  ) prelazi kod atoma bakra ne u  $3d^9 4s$  već u  $3d^{10} 4s$ .

Na takav način kod popunjavanja d- i f- slojeva elektronskih omotača dolazi do narušavanja redosleda "normalnog" popunjavanja. Elementi kod kojih dolazi do zakasnele dogradnje ovih slojeva nazivaju se prelazni elementi. U Mendeljejevom periodnom sistemu imamo 42 prelazna elementa od kojih 24 d- metala pripadaju grupi gvoždja, paladijuma i platine, 14 metala lantanida i 4 aktinida.

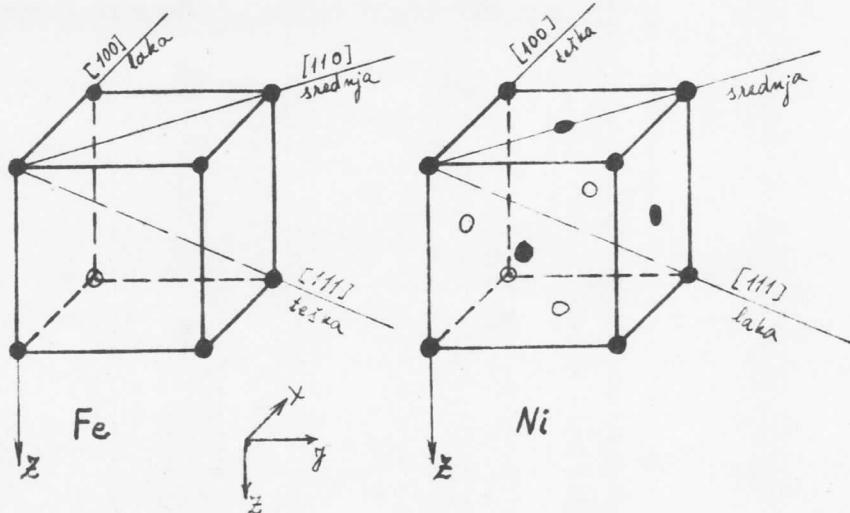
Rezultati merenja pokazuju da se magnetni momenti atoma jekih feromagnetičnih materijala poklapaju sa vrednostima sopstvenih magnetnih momenata elektrona ne popunjениh ljudski a da orbitalni momenti ne daju vidan doprinos. Na osnovu toga su Frenkel i Hajzenberg došli do pretpostavke da se makroskopski magnetni momenat javlja kao rezultat spinskog uredjenja elektrona ne popunjene ljudske.

Klasično tumačenje feromagnetizma zasniva se na Vajsovoj fenomenološkoj teoriji. Prema ovoj teoriji sve feromagnete supstance pri temperaturama koje su niže od neke kritične mraju biti spontano namagnetisane i u odsustvu polja. Ovakav je zaključak važio samo za feromagnetike koji su bili prethodno namagnetisani; iskustvo nas, naime, uči da feromagneticici koji nisu prethodno namagnetisani, ne pokazuju efekat namagnećenosti. Da bi objasnio ovu protivrečnost, Vajs je postavio svoju drugu hipotezu prema kojoj se svaka feromagnetsna supstanca sastoji iz velikog broja domena spontano namagnetisanih do zasićenja. U ne namagnetisanom stanju ovi domeni su haotično rasporedjeni.

U spoljašnjem magnetnom polju oni se delimično usmeravaju u pravcu magnetnih linija sila što stvara magnetično stanje.

Dimenzije domena kreću se od 10 do 100 mikrona. Kada ferromagnetik nije namagnetisan magnetni momenti domena su hao- tično orjentisani u prostoru tako da je magnetizacija uzorka u celini jednaka nuli.

U formiranju domena prvorazrednu ulogu igraju oni isti faktori koji obezbedjuju kristalnu strukturu feromagnetika. Zato svi feromagneti imaju kristalnu strukturu i zbog toga su- srećemo pojavu magnetno-kristalografske anizotropije. Na sli- ci su prikazane kristalne rešetke gvoždja i nikla.



Eksperimenti vršeni sa kristalima feromagnetika govore u pri- log magnetno-kristalografskoj anizotropiji koja je najjače izražena duž glavnih osa simetrije. Pravac u kome se magnetno zasićenje postiže sa najmanjom jačinom polja naziva se pravac lake magnetizacije. Na slikama su obeleženi i pravci srednje i teške magnetizacije.

Pošto je makroskopski uzorak sastavljen od velikog broja kristalnih zrna, to su kristalografski pravci statistički ra- sporedjeni. Stoga se magnetna anizotropija uzorka kompenzuje.

Kako su domeni sastavljeni iz velikog broja atoma ( $\sim 10^{15}$ ) u njihovom formiranju moraju učestrovati i sile sprege sa kristalnom rešetkom. U jednom domenu su na absolutnoj nuli magnetni momenti svih atoma paralelni (paralelni su spinovi elektrona ne popunjениh ljudskih). Tada je gustina magnetnog momen- ta jednaka proizvodu magnetnog momenta elementarnog nosioca i

broja nosilaca u jedinici zapremine. Odmah treba uočiti da su magnetni momenti domena orijentisani u pravcu oselake magnetizacije jer je to u smislu interakcije medju atomima energetski najpovoljniji slučaj.

Pošto sile interakcije dovode do uredjenosti magnetnih momenata elementarnih nosilaca, odnosno do uredjenosti skupa spinova elektrona a toplotni kvanti razredjuju takav sistem, sa povišenjem temperature energija toplotnih kvanata biće u jednom trenutku istog reda veličine kao i konstanta interakcije. Tada će nastati razgradjivanje magnetne rešetke. Ova temperatura pri kojoj nastaje razgradjivanje magnetne rešetke naziva se temperatura prelaza.

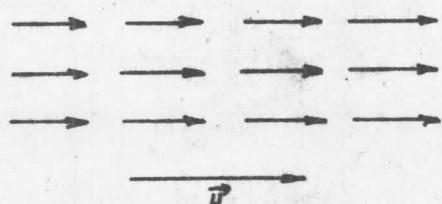
Priroda interakcije se u početku shvatala kao dipol-dipol interakcija magnetnih momenata. Međutim znalo se da konstanta dipol-dipol interakcije iznosi oko 10 Boltmanovih konstanti, dok su tačke prelaza za feromagnetike reda: 100 za lantanide i 1000 Boltmanovih konstanti za gvoždje, kobalt i nikal. Otuda je jasno da dipol-dipol interakcija ne može biti odgovorna za uredjivanje sistema spinova, jer bi u protivnom magnetni materijal mogao postojati samo do  $10^0$ K, a to protivreči eksperimentalnim rezultatima. Pokazalo se da su sile interakcije medju spinovima čisto kvantomehaničkog porekla. Pošto dva elektrona ne možemo razlikovati medjusobno a zbog Paulijevog principa moraju biti opisani antisimetričnim funkcijama, u matričnom elementu energije dobijamo jedan dopunski član koji se naziva energija izmene. Ocenuju se da je ova energija izmene reda 100 do 1000 Boltmanovih konstanti a to znači da ovakva hipoteza odgovara eksperimentalnim rezultatima.

Prema tome, zaključak bi bio sledeći. Feromagnet je sistem uredjenih spinova koji medjusobno interaguju silama između. Na temperaturi  $0^0$ K svi spinovi su usmereni u jednom pravcu tj. paralelni su. Osa duž koje su orijentisani naziva se osa kvantizacije. Sa porastom temperature sistem spinova se postepeno "razredjuje". Kada se dostigne temperatura prelaza, statistički posmatrano, svi spinovi imaju srednju vrednost u pravcu ose kvantizacije jednaku nuli.

Imajući u vidu ovakvu sliku o feromagnetizmu možemo izvršiti finiju podelu magnetnih materijala.

### FEROMAGNETICI

U ovu grupu spadaju kristali gvoždja, nikla, kobalta, jedan deo metala lantanida, mnogobrojne legure i jedinjenja tih elemenata sa ne feromagnetičnim elementima. Feromagnetizam se u tim elementima zapaža u temperaturama od  $0^{\circ}\text{K}$  do kritične temperature – Kirijeve temperature, iznad koje se feromagnetični ponašaju kao paramagnetični. Pri temperaturama nižim od Kirijeve svi su spinovi u proseku orijentisani duž polja te je rezultujući magnetni momenat znatan.



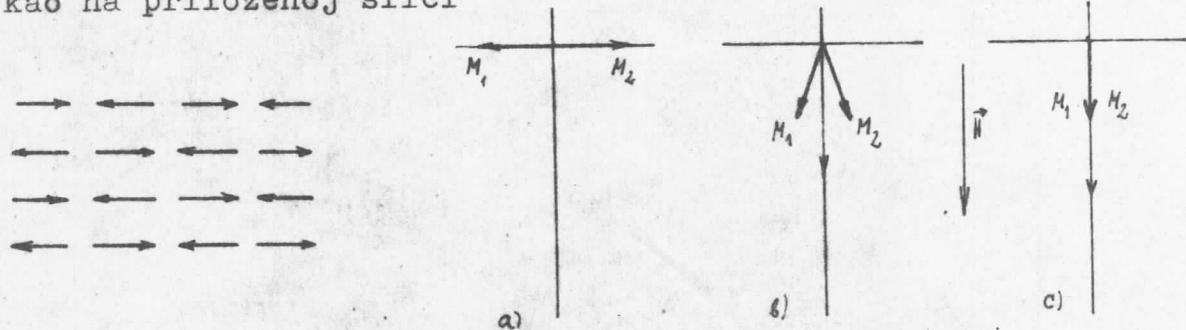
U odsustvu spoljašnjeg polja orijentacija magnetičnog momenta nije određena. Međutim pošto uvek postoji anizotropija kristala, vektor magnetizacije se uvek usmerava duž ose lake magnetizacije. Spontana magnetizacija za temperature mnogo manje od Kirijeve, data je izrazom:

$$M(T) \cong \text{const} \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}$$

gde je sa  $T_c$  označena Kirijeva temperatura.

### ANTIFEROMAGNETICI

Antiferomagnetični raspored spinova možemo predstaviti kao skup dve ili više feromagnetičnih podrešetki čiji je rezultujući magnetni moment jednak nuli. Ako magnetični kristal sadrži samo dve podrešetke sa jednakim ali antiparalelnim spinovima, onda ćemo imati slučaj rasporeda spinova kao na priloženoj slici



- a) – u odsustvu spoljašnjeg polja; b) – u slabom polju ;  
c) – u jakom polju.

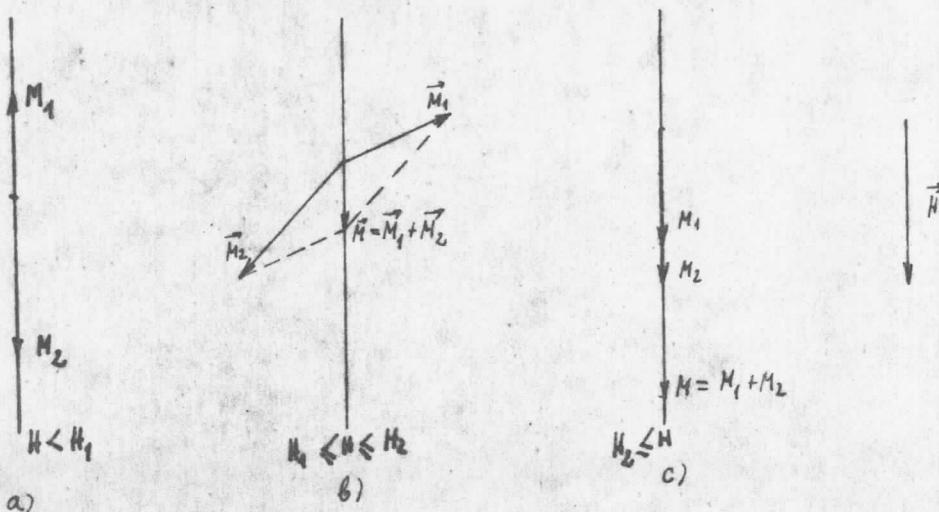
Sa povišenjem temperature magnetizacija podrešetki slabi. Kada

se postigne temperatura  $T_n$  ( Nelova temperatura ) magnetizacija podrešetki teži nuli ( naravno, pri  $H=0$  ). Na temperaturama većim od  $T_n$  anti-feromagnetički se ponašaju kao paramagnetički.

### FERIMAGNETICI

Za ovu vrstu kristala karakteristično je da im se magnetna podrešetka sastoji iz nekoliko podrešetki čiji su spinovi različitih veličina i orijentacija, tako da je rezultujući magnetni moment različit od nule.

Da bi smo prikazali ponašanje ferimagnetika u spoljašnjem magnetnom polju, radi jednostavnosti smatraćemo da se radi o ferimagnetiku sa dve podrešetke i odgovarajućim momentima  $M_1$  i  $M_2$  i kritičnim poljima  $H_1$  i  $H_2$ .



Na slici je šematski prikazan raspored spinova u ferimagnetu:

a) - u slabom polju ; b) - u jakom polju i c) u veoma jakom polju.

Osim navedenih tipova jako magnetnih materijala mogu se javiti i još neki.

### 3. HAJZENBERGOV MODEL FEROMAGNETA

Hajzenberg i Frenkel su 1928 g. predložili model feromagnetika, po kome je jedino interakcija izmene medju elektronima ne popunjениh unutrašnjih ljudski odgovorna za magnetne osobine tela.

Da bi smo postavili hamiltonijan feromagnetika posmatrajmo niz atoma na medjusobnom rastojanju  $a$  koji sadrži  $N$  atoma. Radi eliminacije efekta krajeva uvodimo ciklične uslove sa velikom periodom  $L = N \cdot a$ . Obeležimo vektore čvorova rešetke sa  $\vec{n}$  i  $\vec{m}$  i odgovarajuće operatore spinova  $\hat{\vec{S}}_n$  i  $\hat{\vec{S}}_m$  u tim čvorovima. Energija interakcije izmedju čvorova  $\vec{n}$  i  $\vec{m}$  uzima se da je srazmerna skalarnom proizvodu ta dva spina:

$$H_{nm} = - I_{nm} \hat{\vec{S}}_n \cdot \hat{\vec{S}}_m \quad (3.1)$$

Faktor  $I_{nm}$  je energija sila izmene; naziva se integral izmene. Negativan predznak obezbedjuje da energija interakcije osnovnog stanja bude negativna. Član  $I_{nm}$  ima sledeće svojstvo simetrije:

$$I_{nm} = I_{mn} \quad (3.2)$$

Pokazalo se da integrali izmene eksponencijalno opadaju sa rastojanjem  $|\vec{n} - \vec{m}|$  i aproksimacija najbližih suseda se može prihvati sa puno opravdanja.

Ukoliko relaciju (3.1) sumiramo po svim čvorovima rešetke dobićemo hamiltonijan za ceo kristal:

$$H = - \frac{1}{2} \sum_{n,m} I_{nm} \hat{\vec{S}}_n \cdot \hat{\vec{S}}_m \quad (3.3)$$

U relaciji (3.3)  $\frac{1}{2}$  se stavlja zato što spinovi u čvoru  $\vec{n}$  interaguju u smeru  $\vec{m}$  silom istog intenziteta kao i spinovi u čvoru  $\vec{m}$  u pravcu  $\vec{n}$ . Stoga bi bez  $1/2$  došlo do udvostručavanja energije interakcije.

Ako se feromagnetički nalazi u spoljašnjem magnetnom polju  $\vec{H}$ , tada u svakom čvoru kristalne rešetke imamo lokalizovan izvestan magnetni moment  $\mu_z$ . Tada će energija interakcije spina u jednom čvoru sa spoljašnjim magnetnim poljem iznositi:

$$H_z = - \mu_z \chi \hat{S}_z^z$$

Sumirajući ovu energiju po svim čvorovima rešetke, dobijamo:

$$H_n^k = - \sum_{\vec{n}} \mu_{\vec{n}} \mathcal{H} \hat{S}_{\vec{n}}^z$$

Sada je ukupni hamiltonijan:

$$H = - \sum_{\vec{n}} \mu_{\vec{n}} \mathcal{H} \hat{S}_{\vec{n}}^z - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n} \vec{m}} I_{\vec{n} \vec{m}} \hat{S}_{\vec{n}}^- \hat{S}_{\vec{m}}^+ \quad (3.4)$$

U ovom se hamiltonijanu može izdvojiti energija osnovnog stanja stavljajući:

$$S_n^z = S - (S - S_n^z)$$

i uvodeći operatore  $S_n^+$  i  $S_n^-$  na sledeći način:

$$S_n^x = \frac{1}{2} (S_n^+ + S_n^-)$$

$$S_n^y = \frac{1}{2i} (S_n^+ - S_n^-)$$

Stavljujući

$$\hat{S}_{\vec{n}} \cdot \hat{S}_{\vec{m}} = S_n^x S_m^x + S_n^y S_m^y + S_n^z S_m^z$$

u relaciju (3.4), konačno se dobija:

$$H = -\mu \mathcal{H} S N - \frac{1}{2} S^2 J_o N + (\mu \mathcal{H} + S J_o) \sum_{\vec{n}} (S - S_n^z) - \\ - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n} \vec{m}} I_{\vec{n} \vec{m}} S_{\vec{m}}^- S_{\vec{n}}^+ - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n} \vec{m}} I_{\vec{n} \vec{m}} (S - S_n^z)(S - S_{\vec{m}}^z) \quad (3.5)$$

gde su:

$$H_0 = -\mu \mathcal{H} S N - \frac{1}{2} S^2 J_o N$$

$$H_1 = (\mu \mathcal{H} + S J_o) \sum_{\vec{n}} (S - S_n^z) - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n} \vec{m}} I_{\vec{n} \vec{m}} S_{\vec{m}}^- S_{\vec{n}}^+$$

$$H_2 = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{n} \vec{m}} I_{\vec{n} \vec{m}} (S - S_n^z)(S - S_{\vec{m}}^z)$$

Član  $H_0$  predstavlja energiju osnovnog stanja,  $H_1$  - hamiltonijan neinteragujućih spinova a  $H_2$  - hamiltonijan interakcije spinova.

#### 4. BLOHOVA APROKSIMACIJA

Na temperaturi absolutne nule svi spinovi kod feromagneta su usmereni duž ose kvantizacije magneta ( osnovno stanje ). Pri povećanju temperature dolazi do otklanjanja spinova od z-ose i njihova projekcija može imati  $2S + 1$  vrednost:

$$S, S-1, S-2, \dots, 0, \dots, -S+1, -S.$$

Uvedeni operatori  $S^+$  i  $S^-$  menjaju projekciju  $S^z$  spina za jedinicu

$$S^+ = S_x + iS_y \quad S^- = S_x - iS_y ;$$

$S^+$  povećava a  $S^-$  smanjuje z-projekciju za jedinicu. Može se pokazati da ovi operatori zadovoljavaju sledeće komutacione relacije:

$$[S_{\vec{n}}^+, S_{\vec{m}}^-] = 2S_{\vec{n}}^z \delta_{\vec{n}\vec{m}}$$

Mera otklanjanja spina od z-ose je očigledno operator  $S-S^z$  ; stoga se hamiltonijan uvek izražava preko  $S-S^z$ ,  $S^+$  i  $S^-$  operatora.

Komutacione relacije spinskih operatora ne zadovoljavaju ni fermionske ni bozonske komutacione relacije. Pomoću Blohove aproksimacije možemo sa spinskih preći na boze operatore:

$$\begin{aligned} S_{\vec{n}}^- &\approx \sqrt{2S} B_{\vec{n}}^+ \\ S_{\vec{n}}^+ &\approx \sqrt{2S} B_{\vec{n}}^- \\ S-S_{\vec{n}}^z &\approx B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}}^- \end{aligned} \quad (4.1)$$

Vodeli smo da operator  $S - S_{\vec{n}}^z$  ( tj. mera otklona ) može imati samo  $2S + 1$  vrednost dok bozonski okupacioni broj  $B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}}^-$  kojim smo zamenili  $S - S_{\vec{n}}^z$ , može imati beskonačno mnogo vrednosti:

$$0, 1, 2, 3, \dots, \infty$$

Ovo nam ukazuje da je Blohova aproksimacija dobra dok je broj bozona manji ili najviše jednak  $2S$  , jer za veći broj bozona ne postoje fizička stanja.

Broj bozona opisuje eksitiranost feromagneta i zato Blohovom aproksimacijom možemo opisivati samo slabo eksitirane feromagnete, tj. sisteme na niskim temperaturama, na kojima o-

kupacioni bozonski brojevi uzimaju najniže vrednosti: 0,1,2,... ...2S. U daljem računu, Blohova aproksimacija obavezuje da odbacimo sve članove koji su višeg reda po  $B_n^+ B_n$ . Nakon ovih pretpostavki gore navedeni hamiltonijan dobija sledeći oblik:

$$H = H_0 + (\mu \mathcal{H} + S J_0) \sum_{\vec{n}} B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}} - \sum_{\vec{n} \vec{m}} S I_{\vec{n} \vec{m}} B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{m}} - \\ - i \sum_{\vec{n} \vec{m}} I_{\vec{n} \vec{m}} B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}} B_{\vec{m}}^+ B_{\vec{m}} \quad (4.2)$$

Poslednji član zanemaruјemo.

Ovakav hamiltonijan možemo dijagonalizirati kanonskom Fourier- transformacijom:

$$I_{\vec{n} \vec{m}} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} I_{\vec{k}} e^{i \vec{k} \cdot (\vec{n} - \vec{m})} \\ B_{\vec{n}}^+ = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^+ e^{-i \vec{k} \cdot \vec{n}} \\ B_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}} e^{i \vec{k} \cdot \vec{n}} \quad (4.3)$$

tj. prelazimo na impulsni prostor. Sumiramo po svim vrednostima  $\vec{k}$  koje pripadaju prvoj Briluenovoj zoni. Smenom ovih vrednosti u (4.2) dobijamo:

$$H = H_0 + \sum_{\vec{k}} [\mu \mathcal{H} + S(J_0 - J_{\vec{k}})] B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}}$$

odnosno:

$$H = H_0 + \sum_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}}$$

Ovako dijagonalizovan hamiltonijan ima oblik hamiltonijana idealnog gasa čestica ( tj. čestica koje međusobno ne interaguju ). Operator  $B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}}$  ima smisao broja kvazičestica sa impulsom  $\vec{k}$  a  $\alpha_{\vec{k}}$  je energija tih čestica. Pošto se vrlo često hamiltonijan računa od osnovnog stanja  $H_0$ , to se član  $H_0$  zanemaruje, pa je:

$$H = \sum_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}}$$

## 5. FONONI

Fononi predstavljaju kvante oscilovanja atoma kristalne rešetke. Posmatraćemo male oscilacije atoma u odnosu na njihov ravnotežni položaj. Neka elementarna ćelija sadrži jedan atom i neka je odredjena trima nekomplanarnim baznim vektorima  $\vec{a}_1$ ,  $\vec{a}_2$ ,  $\vec{a}_3$ . Ravnotežne položaje atoma u osnovnoj zapremini kristala obeležićemo vektorom rešetke

$$\vec{n} = \sum_i n_i \vec{a}_i \quad (5.1)$$

koji određuje položaj elementarne ćelije. Ako u kristalu prevladaju dvočestične interakcije između njegovih atoma tada je ukupna potencijalna energija kristala data u obliku:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{\vec{n} \vec{m}} V(\vec{n} - \vec{m}) \quad (5.2)$$

Naravno, ovaj izraz važi na temperaturi apsolutne nule. Na temperaturi višoj od  $0^{\circ}\text{K}$  atomi osciluju oko svojih ravnotežnih položaja i vektori  $\vec{n}$  i  $\vec{m}$  dobijaju izvesne priraštaje

$$\vec{n} \rightarrow \vec{n} + \vec{u}_{\vec{n}} \quad ; \quad \vec{m} \rightarrow \vec{m} + \vec{u}_{\vec{m}} \quad (5.3)$$

S obzirom da su pomaci  $\vec{u}_{\vec{n}}$  i  $\vec{u}_{\vec{m}}$  mali, potencijalnu energiju kristala možemo razviti u red po ovim pomacima.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{n} \vec{m}} V[(\vec{n} - \vec{m}) + (\vec{u}_{\vec{n}} - \vec{u}_{\vec{m}})] \approx \frac{1}{2} \sum_{\vec{n} \vec{m}} V(\vec{n} - \vec{m}) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n} \vec{m}} (u_{\vec{n}} - u_{\vec{m}}) [\nabla_{\vec{n}-\vec{m}} V_{\vec{n}-\vec{m}}]_0 + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{\vec{n} \vec{m}} [(\vec{u}_{\vec{n}} - \vec{u}_{\vec{m}}) \nabla_{\vec{n}-\vec{m}}]^2 V_{\vec{n}-\vec{m}} \\ U &\approx \frac{1}{2} \sum_{\vec{n} \vec{m}} V(\vec{n} - \vec{m}) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n} \vec{m} \alpha} (u_{\vec{n}}^\alpha - u_{\vec{m}}^\alpha) \left[ \frac{\partial}{\partial(\vec{n} - \vec{m})_\alpha} V(\vec{n} - \vec{m}) \right]_0 + \\ &+ \frac{1}{4} \sum_{\vec{n} \vec{m} \alpha \beta} (u_{\vec{n}}^\alpha - u_{\vec{m}}^\alpha)(u_{\vec{n}}^\beta - u_{\vec{m}}^\beta) \left[ \frac{\partial^2}{\partial(\vec{n} - \vec{m})_\alpha \partial(\vec{n} - \vec{m})_\beta} V(\vec{n} - \vec{m}) \right]_0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

gde smo sa  $u_{\vec{n}}^\alpha$  obeležili projekciju pomeranja  $\vec{u}_{\vec{n}}$  na osu  $\alpha$ . Potencijal  $V(\vec{n} - \vec{m})$  u položaju ravnoteže čvorova ima minimum; stoga je

$$[\nabla_{\vec{n}-\vec{m}} V(\vec{n} - \vec{m})]_0 = 0 \quad (5.5)$$

druge izvode čemo označiti sa

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial(\vec{m}-\vec{m})_x \partial(\vec{m}-\vec{m})_y} [V(\vec{m}-\vec{m})] \right\}_0 = \Lambda_{\alpha\beta}(\vec{m}-\vec{m}) \quad (5.6)$$

Ako zanemarimo prvi član u izrazu (5.4) koji predstavlja potencijalnu energiju zamrznutog kristala (na 0°K) preostaje nam potencijalna energija usled povišenja temperature.

$$U_{sm} = \frac{1}{4} \sum_{n,m \in \alpha} \Lambda_{\alpha\beta}(\vec{m}-\vec{m})(u_m^\alpha - u_m^\beta)(u_n^\gamma - u_n^\delta) \quad (5.7)$$

Sada čemo naći silu, koja deluje na n-ti čvor, kao negativan izvod potencijalne energije:

$$F_n^\alpha = \frac{\partial U_{sm}}{\partial u_n^\alpha} = - \sum_{m \in \alpha} \Lambda_{\alpha\beta}(\vec{m}-\vec{m})(u_m^\gamma - u_m^\delta) \quad (5.8)$$

Uzimajući u obzir samo interakciju najbližih suseda i obeležavanjem:

$$\Lambda_{\alpha\beta}(\vec{m}-\vec{m}) - \Lambda_{\alpha\beta}(\vec{v}) \equiv \Lambda_{\alpha\beta}$$

dobićemo:

$$F_n^\alpha = - \sum_{\beta} \Lambda_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} (u_n^\gamma - u_{n+\gamma}^\gamma) \quad (5.9)$$

Stavljujući da je M-masa atoma, jednačina kretanja n-tog čvora je:

$$M \ddot{u}_n^\alpha = - \sum_{\beta} \Lambda_{\alpha\beta} \sum_{\gamma} (u_n^\gamma - u_{n+\gamma}^\gamma) \quad (5.10)$$

Usled translatorne simetrije kristala, rešenja (5.10) možemo tražiti u obliku:

$$u_n^\alpha = A^\alpha e^{i(\vec{k} \cdot \vec{m} - \omega_k t)} \quad (5.11)$$

Na taj način dobijamo sistem jednačina

$$\left. \begin{aligned} & \left[ \Lambda_{xx} - \frac{M}{f_k} \omega_k^2 \right] u_n^x + \Lambda_{xy} u_n^y + \Lambda_{xz} u_n^z = 0 \\ & \Lambda_{yx} u_n^x + \left[ \Lambda_{yy} - \frac{M}{f_k} \omega_k^2 \right] u_n^y + \Lambda_{yz} u_n^z = 0 \\ & \Lambda_{zx} u_n^x + \Lambda_{zy} u_n^y + \left[ \Lambda_{zz} - \frac{M}{f_k} \omega_k^2 \right] u_n^z = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

u kojima je

$$f_k = \sum_{\beta} (1 - e^{i\vec{k} \cdot \vec{v}})$$

Da bi ovaj sistem imao netrivijalna rešenja determinanta mora



biti jednaka nuli. Tri korena ove jednačine biće realna i pozitivna. Imaćemo tri dozvoljene frekvencije fonona. Ukoliko se radi o složenoj kristalnoj rešeci čija elementarna celija sadrži  $G$  atoma imaćemo jednačinu reda  $3G$ . Sva rešenja tog sistema ( $3G$ ) biće realna i pozitivna. Od svih  $3G$  frekvencija  $\omega_j$  ( $j=1, 2, 3, \dots, 3G$ ) tri frekvencije težiće nuli kada i  $k \rightarrow 0$ . Ta rešenja se nazivaju akustičke grane oscilacija. Ona odgovaraju pomeranju svih atoma u fazi, koji ulaze u sastav jedne elementarne celije. Ostalih  $3(G-1)$  frekvencija je različito od nule kad  $k \rightarrow 0$ . Ta rešenja predstavljaju optičke grane oscilacija. Ukoliko medju  $3G$  frekvencija postoji nekoliko frekvencija istih vrednosti, kaže se da postoji degeneracija.

Svakoj akustičkoj frekvenciji  $\omega_j(\vec{k})$ , u slučaju proste rešetke, odgovara jedan polarizacioni vektor  $\vec{e}_j(\vec{k})$ ,  $j=1, 2, 3$ . Ovi obrazuju jedan ortogonalni sistem koji je pogodno normirati uslovom:

$$\vec{e}_j(\vec{k}) \cdot \vec{e}_{j'}(\vec{k}) = \delta_{jj'} \quad (5.13)$$

Ako se ograničimo samo na jednodimenzionali slučaj kristalne rešetke imaćemo:

$$f_{\vec{k}} = 1 - e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}} + 1 - e^{-i\vec{k} \cdot \vec{a}} = 4 \sin^2 \frac{\vec{k} \cdot \vec{a}}{2}$$

a funkcija se svodi na:

$$\Lambda_{xx} - \frac{M}{f_{\vec{k}}} \omega_k^2 = 0$$

odakle je:

$$\omega_k = 2 \sqrt{\frac{\Lambda}{M}} \left| \sin \frac{\vec{k} \cdot \vec{a}}{2} \right|$$

Za male talasne vektore imamo:

$$\omega_k = c \cdot |\vec{k}| \quad (5.14)$$

gde je  $c$  - brzina zvuka:

$$c = \sqrt{\frac{\Lambda}{M}}$$

Hamiltonijan malih oscilacija atoma oko ravnotežnog položaja za jednodimenzionali slučaj biće:

$$H = T + V_{\text{son}} = \frac{M}{2} \sum_{\vec{m}} \dot{\vec{u}}_{\vec{m}}^2 + \frac{\Lambda}{2} \sum_{\vec{m}} (\vec{u}_{\vec{m}+1} - \vec{u}_{\vec{m}})^2 \quad (5.15)$$

Umesto predpostavljenog rešenja (5.11) uzimamo linearnu kombinaciju:

$$u_{\vec{k}} = \sum_k \omega_k \left( b_{\vec{k}} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} + b_{\vec{k}}^+ e^{-i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_k t)} \right) \quad (5.16)$$

Smenom (5.16) u (5.15) hamiltonijen spregnutih oscilatora svodimo na hamiltonijan sume nezavisnih oscilatora u impulsnom prostoru. Takav hamiltonijan ima oblik:

$$H = \sum_{\vec{k}} \left( b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_{\vec{k}}$$

ili

$$H = E_0 + \sum_{\vec{k}} b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}}$$

gde je

$$E_0 = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}}$$

energija osnovnog stanja ili kako je često nazivaju energijom vakumskog stanja. Obično energiju sistema računaju od energije vakumskog stanja.

Ako je  $|0\rangle$  - talasna funkcija vakumskog stanja, to talasna funkcija

$$|1_{\vec{k}}\rangle = \hat{b}_{\vec{k}}^+ |0\rangle$$

predstavlja stanje sa jednim fononom, kvantom eksitacije oscilacija. Energija fonona je  $\hbar \omega_{\vec{k}}$ . Svako takvo pobudjenje - fonon odgovara oscilacijama svih atoma kristala. Drugim rečima, fononske eksitacije kristala ispoljavaju se kao kolektivna svojstva interagujućih atoma u čvrstom telu.

Stanje sa  $n$  fonona istog tipa određuje se talasnom funkcijom

$$|n_{\vec{k}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}} (\hat{b}_{\vec{k}}^+)^n |0\rangle$$

Ovom stanju odgovara energija fonona  $n_{\vec{k}} \hbar \omega_{\vec{k}}$ . Ukoliko talasna funkcija stanja sa  $n$  identičnih fonona zavisi samo od broja fonona, a simetrična je u odnosu na permutacije fonona, takva funkcija opisuje stanje boze čestica. Prema tome, elementarne kvantne eksitacije oscilacija atoma u čvrstom telu - fononi su boze-čestice odnosno bozoni.

## 6. MAGNON - FONON INTERAKCIJA

U jednoj od prethodnih glava razmotrili smo hamiltonijan spinskog sistema u konfiguracionom prostoru:

$$H = H_0 + \sum_n (\mu\mathcal{H} + SJ_0)(S - S_n^z) - \frac{1}{2} \sum_{n,m} I_{nm} S_m^- S_m^+$$

koji u Blohovoj aproksimaciji ima sledeću formu:

$$H = H_0 + (\mu\mathcal{H} + SJ_0) \sum_{\vec{n}} B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}} - \sum_{\vec{n}, \vec{m}} S I_{\vec{n}\vec{m}} B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{m}}$$

Posmatraćemo takve feromagnetične sisteme kod kojih je  $\mu\mathcal{H} \gg I_{nm}$ ; zato zato ćemo u gornjem hamiltonijanu zadržati samo član

$$\sum_n \mu\mathcal{H} B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}} = \sum_{\vec{n}, \vec{m}} \mu\mathcal{H} B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{m}} \delta_{\vec{n}\vec{m}}$$

dakle

$$H = \sum_{\vec{n}, \vec{m}} \mu\mathcal{H} B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{m}} \delta_{\vec{n}\vec{m}} \quad (6.1)$$

Ovaj hamiltonijan je izведен pod pretpostavkom da su atomi u čvorovima kristalne rešetke "zamrznuti", tj. da ne vrše nikakva fononska pomeranja oko svojih ravnotežnih položaja. Pri tome skoro svi atomski magnetni momenti imaju projekciju usmerenu na jednu stranu; ovo odgovara energijski najnižem stanju. Sa povišenjem temperature feromagnetika, njegova će energija rasti na račun pojave "prevrnutih" elektronskih spinova. Zahvaljujući interakciji izmene ovakve eksitacije će se prenositi u vidu spinskih talasa ( magnona ) kroz kristal. Pored toga, doći će do oscilovanja atoma oko čvorova rešetke. Usled ovog oscilovanja atoma dolazi do interakcije izmedju spinskih talasa ( magnona ) i kvanata toplotnog oscilovanja ( fonona ). Pošto smo zanemarili magnon-fonon interakciju koja nastaje usled promene vrednosti  $I_{nm}$  zbog promenljivog medjusobnog rastojanja atoma, jedini deo u hamiltonijanu interakcije imaće interakcija spoljašnjeg magnetnog polja sa indukovanim elektromagnetskim poljem koje nastaje u procesu oscilovanja atoma.

Nama je cilj naći hamiltonijan magnon-fonon interakcije. Stoga ćemo  $\delta$ -funkciju u relaciji (6.1) razviti u red po malim fononskim pomacima i preći u impulsni prostor. U razvoju ćemo zadržati samo linearne članove:

$$\delta_{\vec{m}\vec{m}} \longrightarrow \delta_{\vec{m} + \vec{u}_m, \vec{m} + \vec{u}_m}$$

$$\delta_{\vec{m} + \vec{u}_m, \vec{m} + \vec{u}_m} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}(\vec{m} - \vec{m})} e^{i\vec{k}(\vec{u}_m - \vec{u}_m)} \equiv$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}(\vec{m} - \vec{m})} [1 + i\vec{k}(\vec{u}_m - \vec{u}_m)]$$

Koristićemo takođe

$$B_{\vec{n}}^+ = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^+ e^{-i\vec{k} \cdot \vec{n}}$$

$$B_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \cdot \vec{n}}$$

$$u_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{q}} \mathcal{D}_{\vec{q}} \vec{e}_{\vec{q}}(\vec{q}) e^{i\vec{q} \cdot \vec{n}} (b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+)$$

gde smo sa  $\mathcal{D}_{\vec{q}}$  obeležili izraz

$$\mathcal{D}_{\vec{q}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2M \omega(\vec{q})}}$$

Tada će hamiltonijan (6.1) biti

$$H = \sum_{\vec{m}\vec{m}} \mu \mathcal{H} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}_1} B_{\vec{k}_1}^+ e^{-i\vec{k}_1 \vec{m}} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}_2} B_{\vec{k}_2} e^{i\vec{k}_2 \vec{m}} \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}_3} e^{i\vec{k}_3(\vec{m} - \vec{m})} [1 + i\vec{k}_3(\vec{u}_m - \vec{u}_m)]$$

Daljim razvijanjem izraza dobijamo

$$H = \frac{\mu \mathcal{H}}{N^2} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3} B_{\vec{k}_1}^+ B_{\vec{k}_2} \sum_{\vec{m}} e^{i\vec{m}(\vec{k}_3 - \vec{k}_1)} \sum_{\vec{m}} e^{i\vec{m}(\vec{k}_2 - \vec{k}_3)} +$$

$$+ i \frac{\mu \mathcal{H}}{N^2} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3} \vec{k}_3 B_{\vec{k}_1}^+ B_{\vec{k}_2} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{q}} \mathcal{D}_{\vec{q}} \vec{e}_{\vec{q}}(\vec{q}) [b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+] \sum_{\vec{m}} e^{i\vec{m}(\vec{k}_3 + \vec{q} - \vec{k}_1)} \sum_{\vec{m}} e^{i\vec{m}(\vec{k}_2 - \vec{k}_3)} -$$

$$- i \frac{\mu \mathcal{H}}{N^2} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3} \vec{k}_3 B_{\vec{k}_1}^+ B_{\vec{k}_2} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{q}} \mathcal{D}_{\vec{q}} \vec{e}_{\vec{q}}(\vec{q}) [b_{\vec{q}} + b_{-\vec{q}}^+] \sum_{\vec{m}} e^{i\vec{m}(\vec{k}_2 + \vec{q} - \vec{k}_3)} \sum_{\vec{m}} e^{i\vec{m}(\vec{k}_3 - \vec{k}_1)} .$$

$$H = \mu \mathcal{H} \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}} + i \frac{\mu \mathcal{H}}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \vec{k} \cdot B_{\vec{k}+\vec{q}}^+ B_{\vec{k}} D_{\vec{q}} \vec{e}_{\vec{q}}(\vec{q}) [b_{\vec{q}} + b_{\vec{q}}^+] - i \frac{\mu \mathcal{H}}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} (\vec{k} + \vec{q}) B_{\vec{k}+\vec{q}}^+ B_{\vec{k}} D_{\vec{q}} \vec{e}_{\vec{q}}(\vec{q}) [b_{\vec{q}} + b_{\vec{q}}^+].$$

Prelaskom sa  $\vec{q}$  na  $-\vec{q}$  u gornjim sumama, dobijamo:

$$H = \mu \mathcal{H} \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}} + i \frac{\mu \mathcal{H}}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} |\vec{q}| D_{\vec{q}} B_{\vec{k}-\vec{q}}^+ B_{\vec{k}} [b_{\vec{q}} + b_{\vec{q}}^+] \quad (6.2)$$

gde je

$$H_{int} = i \frac{\mu \mathcal{H}}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} |\vec{q}| D_{\vec{q}} B_{\vec{k}-\vec{q}}^+ B_{\vec{k}} [b_{\vec{q}} + b_{\vec{q}}^+]$$

Pošto se radi o niskim temperaturama, zakon disperzije za male talasne vektore daje:

$$\omega(\vec{q}) = c \cdot |\vec{q}|$$

gde je  $c$  - brzina zvuka. Tada je hamiltonijan magnon-fonon interakcije:

$$H_{int} = i \frac{\mu \mathcal{H}}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \sqrt{\frac{\vec{k} \cdot \vec{q}}{2M \cdot c}} B_{\vec{k}-\vec{q}}^+ B_{\vec{k}} (b_{\vec{q}} + b_{\vec{q}}^+)$$

ili ako predjemo na integralni oblik:

$$H_{int} = i \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{k} d^3 \vec{q} \sqrt{\frac{\vec{k} \cdot \mu^2 \mathcal{H}^2 \vec{q}}{2M \cdot c}} B_{\vec{k}-\vec{q}}^+ B_{\vec{k}} (b_{\vec{q}} + b_{\vec{q}}^+) \quad (6.3)$$

Prvi član u (6.2) predstavlja hamiltonijan idealnog gasa kvazičestica - magnona.

Prema tome, ukupni hamiltonijan sistema magnona + fonona + njihove interakcije, napisan u integralnom obliku je:

$$H = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} \alpha_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}} + \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} E(\vec{k}) b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}} + i \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{k} d^3 \vec{q} \sqrt{\frac{\vec{k} \cdot \mu^2 \mathcal{H}^2 \vec{q}}{2M \cdot c}} B_{\vec{k}-\vec{q}}^+ B_{\vec{k}} (b_{\vec{q}} + b_{\vec{q}}^+) \quad (6.4)$$

gde smo sa  $\alpha_{\vec{k}}$  obeležili energiju  $\mu \mathcal{H}$ .

## 7. ISPITIVANJE MOGUĆNOSTI FORMIRANJA MAGNONSKIH KAPLJI

U ovoj glavi proučavaćemo efekte koji nastaju u feromagneticima na račun magnon-fonon interakcije. Tačnije, analiziraćemo pojavu slepljivanja dva magnona na jednom čvoru kristalne rešetke i formu koju ima energetski spektar elementarnih eksitacija koje emituje molekul nakon slepljivanja ovih magnona. Veruje se da ovakav spektar može imati superfluidne osobine.

U daljem računu koristićemo hamiltonijan magnon-fonon interakcije koji se može napisati u obliku:

$$H_{int} = \frac{V^2}{(2\pi)^3} \int d^3k d^3q F(\vec{q}) \hat{B}_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger \hat{B}_{\vec{k}} (\hat{b}_{-\vec{q}} + \hat{b}_{\vec{q}}^\dagger) \quad (7.1)$$

gde smo sa  $F(\vec{q})$  obeležili

$$F(\vec{q}) = i \sqrt{\frac{\hbar \mu^2 \chi^2}{2MCq}} \vec{q} \cdot \vec{e}(\vec{q}) = i \sqrt{\frac{\hbar \mu^2 \chi^2 q}{2M \cdot c}}$$

u kojem su  $\hat{B}$  i  $\hat{b}$  respektivno magnonski i fononski operatori,  $\vec{e}(\vec{q})$  vektor polarizacije i  $c = |\vec{c}|$  brzina zvuka longitudinalnih fonona.

Ukupni hamiltonijan sistema: magnonski, fononski i hamiltonijan interakcije možemo napisati u obliku

$$H = H_{magn} + H_{ph} + H_{int}$$

Vrednosti odgovarajućih članova su date u relaciji (6.4).

Energija magnona u aproksimaciji efektivne mase ima oblik:

$$\omega(\vec{k}) = \mu \hbar + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} ; \quad m = \frac{\hbar^2}{2a^2 I} \quad (**)$$

gde je  $a$  - konstanta rešetke a  $I$  - integral izmene u aproksimaciji najbližih suseda. Energija fonona za male talasne vektore je:

$$\epsilon(k) = \hbar \cdot c \cdot |k|$$

Da bi smo ocenili ulogu magnon-fonon interakcije, pomoću Frelihove unitarne transformacije hamiltonijana (6.4) prećiće-mo na novi  $H_{eq}$  iz kojeg je isključen dobar deo operatora interakcije. Ta transformacija ima sledeći oblik:

$$H_{eq} = e^{-S} \hat{H} e^S \approx H - [S, H] + \frac{i}{2} [S, [S, H]] \quad (7.2)$$

$$S = \int d^3\vec{k} d^3\vec{\mu} d^3\vec{\nu} X_{\mu\nu} B_{\mu}^+ B_{\nu} B_{-\nu} - \int d^3\vec{\mu} d^3\vec{\nu} X_{\mu\nu}^* B_{\mu}^+ B_{\nu} B_{\nu}^+ B_{-\nu} \quad (7.3)$$

Antihermitski operator  $\hat{S}$  možemo predstaviti, shodno relaciji (7.3) kao:

$$S = S_1 + S_2 = S_1 - S_1^+$$

a odgovarajuće komutatore

$$[S, H] = [S_1, H] + [S_1, H]^+$$

$$[S_1, H] = [S_1, H_{magn}] + [S_1, H_{ph}] + [S_1, H_{int}]$$

Sada ćemo izračunati odgovarajuće komutatore.

$$\begin{aligned} [S_1, H_{magn}] &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} d^3\vec{\mu} d^3\vec{\nu} \alpha_k X_{\mu\nu} [B_{\mu}^+ B_{\nu} B_{-\nu}, B_{\mu}^+ B_{\mu}] = \\ &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} d^3\vec{\mu} d^3\vec{\nu} \alpha_k X_{\mu\nu} B_{\mu}^+ B_{\nu} B_{-\nu} \delta_{\mu\nu} - \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} d^3\vec{\mu} d^3\vec{\nu} \alpha_k X_{\mu\nu} B_{\mu}^+ B_{\nu} B_{-\nu} \delta_{\mu, -\nu} \\ [S_1, H_{magn}] &= \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3\vec{\mu} d^3\vec{\nu} (\alpha_\mu - \alpha_{\mu-\nu}) B_{\mu}^+ B_{\mu} B_{-\nu} \quad (7.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [S_1, H_{ph}] &= \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} d^3\vec{\mu} d^3\vec{\nu} \epsilon(\vec{e}) X_{\mu\nu} [B_{\mu}^+ B_{\nu} B_{-\nu}, B_{\mu}^+ B_{\mu}] = \\ &= \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{\mu} d^3\vec{\nu} \epsilon(\vec{e}) X_{\mu\nu} B_{\mu}^+ B_{\nu} B_{-\nu} \delta_{\mu, -\nu} \end{aligned}$$

u poslednjem redu prelazimo sa  $\vec{v} \rightarrow \vec{q}$ . Tada je:

$$[S_1, H_{ph}] = \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{e} \epsilon(-\vec{e}) X_{ke} B_{k-e}^+ B_{k-e} B_{-e} \quad (7.5)$$

$$[S_1, H_{int}] = \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{q} d^3\vec{\mu} d^3\vec{\nu} F_{\vec{q}} X_{\vec{\mu}\vec{\nu}} [B_{\mu}^+ B_{\nu} B_{-\nu}, B_{k-q}^+ B_{k-q} (B_{-q} + B_{-q}^+)]$$

kada se izračuna odgovarajući komutator, dobićemo:

$$[S_1, H_{int}] = \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{k} d^3 \vec{q} d^3 \vec{\mu} d^3 \vec{\nu} F_\mu X_{\mu\nu} B_{\mu\nu}^+ B_k \delta_{\vec{q}-\vec{\nu}} \delta_{\mu, k-2} + \\ + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{k} d^3 \vec{\mu} d^3 \vec{\nu} F_\mu X_{\mu\nu} B_{\mu\nu}^+ B_{k+\vec{\nu}}^+ B_{\vec{\mu}} B_{\vec{k}} \quad (7.6)$$

U navedenim integralima vršimo smenu indeksa

$$\vec{k} - \vec{q} \rightarrow \vec{k}' \quad k = k' + q' \quad \ell = q'$$

i dobijamo:

$$[S_1, H_{int}] = \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{k} d^3 \vec{q} F_{-2} X_{k+2, 2} B_k^+ B_k + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{k} d^3 \vec{\mu} d^3 \vec{\nu} F_{-2} X_{\mu\nu} B_{\mu\nu}^+ B_{k+\nu}^+ B_{\mu} B_k$$

Sada je:

$$[S_1, H] = \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{k} d^3 \vec{q} X_{kq} (\alpha_k - \alpha_{k-2} + \epsilon_{-2}) B_{k-2}^+ B_k b_q + \\ + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{k} B_k^+ B_k \int d^3 \vec{q} F_{-2} X_{k+2, 2} + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{k} d^3 \vec{\mu} d^3 \vec{\nu} F_{-2} X_{\mu\nu} B_{\mu\nu}^+ B_{k+\nu}^+ B_{\mu} B_k$$

$$[S_1, H]^+ = \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{k} d^3 \vec{q} X_{kq}^* (\alpha_k - \alpha_{k-2} + \epsilon_{-2}) B_k^+ B_{k-2} b_q^+ + \\ + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{k} B_k^+ B_k \int d^3 \vec{q} F_{-2}^* X_{k+2, 2}^* + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{k} d^3 \vec{\mu} d^3 \vec{\nu} F_{-2}^* X_{\mu\nu}^* B_{\mu\nu}^+ B_{k+\nu}^+ B_{\mu} B_{k-2} \quad (7.7)$$

nakon smene indeksa

$$\begin{aligned} \vec{k} - \vec{q} &= \vec{k}' \\ \vec{k} &= \vec{k}' - \vec{q}' \\ \vec{q} &= -\vec{q}' \end{aligned} \quad \text{u prvom integralu,}$$

komutator  $[S_1, H]^+$  postaje:

$$[S_1, H]^+ = \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{k} d^3 \vec{q} X_{k-2, -2}^* (\alpha_{k-2} - \alpha_k + \epsilon_k) B_{k-2}^+ B_k b_q^+ + \\ + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{k} B_k^+ B_k \int d^3 \vec{q} F_{-2}^* X_{k+2, 2}^* + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{k} d^3 \vec{\mu} d^3 \vec{\nu} F_{-2}^* X_{\mu\nu}^* B_{\mu\nu}^+ B_{k+\nu}^+ B_{\mu} B_{k-2}$$

Konačno je:

$$\begin{aligned}
 [S, H] = & \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 k d^3 q B_k^+ B_k (F_{-e} X_{k+e, -e} + F_{-e}^* X_{k+e, e}^*) + \\
 & + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 k d^3 q X_{ke} (\alpha_k - \alpha_{k-e} + E_{-e}) B_{k-e}^+ B_k b_{-e} + \\
 & + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 k d^3 q X_{k-e, -e}^* (\alpha_{k-e} - \alpha_k + E_e) B_{k-e}^+ B_k b_e^+ + \\
 & + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 k d^3 q d^3 \bar{v} (F_{-\nu} X_{\mu\nu} + F_{-\nu}^* X_{\mu+\nu, \nu}^*) B_{\mu-\nu}^+ B_{\mu+\nu}^+ B_\mu B_\nu \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

Uvedimo označenja:

$$Y_{ke} = X_{ke} (\alpha_k - \alpha_{k-e} + E_{-e})$$

$$Z_{ke} = X_{k-e, -e}^* (\alpha_{k-e} - \alpha_k + E_e)$$

Potražimo sad komutator:

$$[S, [S, H]] = [S_1, [S, H]] + [S_1, [S, H]]^+$$

Samo treći sabirak u (2.8) daće vrednost različitu od nule, tako da je

$$[S_1, [S, H]] = \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 k d^3 q d^3 \bar{v} d^3 \bar{v} X_{\mu\nu} Z_{ke} [B_{\mu-\nu}^+ B_\mu b_{-\nu}, B_{k-e}^+ B_k b_e^+]$$

odnosno:

$$\begin{aligned}
 [S_1, [S, H]] = & \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 k d^3 q X_{k+e, e} Z_{k-e, -e} B_k^+ B_k + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 k d^3 q d^3 \bar{v} X_{\mu\nu} Z_{k-e, -e} B_{\mu-\nu}^+ B_{k+e}^+ \times \\
 & \times B_\mu B_\nu
 \end{aligned}$$

Tada je

$$[S, [S, H]]^+ = \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{q} X_{k+2,2}^* Z_{k,-2}^* B_k^+ B_k + \\ + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{p} d^3\vec{r} X_{\mu\nu}^* Z_{k,-\nu}^* B_\mu^+ B_\nu^+ B_{k+\nu} B_{\mu-\nu}$$

Traženi komutator je :

$$[S, [S, H]] = \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{q} (X_{k+2,2} Z_{k,-2} + X_{k+2,\nu}^* Z_{k,-\nu}^*) B_k^+ B_k + \\ + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{p} d^3\vec{r} X_{\mu\nu} Z_{k,-\nu} B_\mu^+ B_{k+\nu}^+ B_\mu B_k + \\ + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{p} d^3\vec{r} X_{\mu\nu}^* Z_{k,-\nu}^* B_k^+ B_\mu^+ B_{k+\nu} B_{\mu-\nu} \quad (79)$$

Zamenjujući izračunate komutatore u relaciju (7.2) dobijamo novi, ekvivalentni hamiltonijan koji ima sledeći oblik:

$$H_{eq} \approx \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} \alpha_n B_n^+ B_k + \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k} E(\vec{k}) b_k^+ b_k + \\ + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{e} F(\vec{e}) B_{k-2}^+ B_k (b_{-k} + b_k^+) - \\ - \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{q} B_k^+ B_k (F_{-2} X_{k+2,2} + F_{-2}^* X_{k+2,2}^*) - \\ - \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{e} X_{k,e} (\alpha_e - \alpha_{e-2} + E_{-2}) B_{k-e}^+ B_k b_{-e} - \\ - \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{e} X_{k-e,-2}^* (\alpha_{k-e} - \alpha_e + E_e) B_{k-e}^+ B_k b_e^+ - \\ - \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{p} d^3\vec{r} (F_{\nu} X_{\mu\nu} + F_{\nu}^* X_{k+\nu,\nu}^*) B_{\mu-\nu}^+ B_{k+\nu}^+ B_{\mu} B_k + \\ + \frac{1}{2} \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{q} (X_{k+2,2} Z_{k,-2} + X_{k+2,2}^* Z_{k,-2}^*) B_k^+ B_k +$$

$$+ \frac{1}{2} \frac{V^2}{(2\bar{\epsilon})^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{p} d^3\vec{v} X_{\mu\nu} Z_{k,-\nu} B_{\mu-\nu}^+ B_{k+\nu}^+ B_\mu^- B_k + \\ + \frac{1}{2} \frac{V^2}{(2\bar{\epsilon})^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{p} d^3\vec{v} X_{\mu\nu}^* Z_{k,-\nu}^* B_{\mu}^+ B_{k+\nu}^+ B_\mu^- B_{\mu-\nu} \quad (7.10)$$

Odredićemo funkciju  $X$  tako da izostanu članovi koji ne održavaju broj kvazičestica; stoga imamo sledeće jednakosti:

$$\left. \begin{aligned} X_{k2} &= \frac{F_2}{d_k - d_{k-2} + E_{-2}} & ; & \quad X_{k-2,-2}^* = \frac{F_2}{d_{k-2} - d_k + E_2} \\ X_{k-2,-2} &= \frac{F_{-2}}{d_{k-2} - d_k + E_2} & ; & \quad X_{k+\nu,\nu} = \frac{F_\nu}{d_{k+\nu} - d_k + E_{-\nu}} \end{aligned} \right\} \quad (7.11)$$

Na osnovu gornjeg uslova  $H_{eq}$  će imati sledeći oblik:

$$H_{eq} \approx \frac{V}{(2\bar{\epsilon})^3} \int d^3\vec{k} B_k^+ B_k \left\{ d_k - \frac{V}{(2\bar{\epsilon})^3} \int d^3\vec{q} (F_2 X_{k-2,-2} + F_{-2}^* X_{k-2,-2}^*) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{V}{(2\bar{\epsilon})^3} \int d^3\vec{q} (X_{k-2,-2} Z_{k,2} + X_{k-2,-2}^* Z_{k,2}^*) \right\} + \frac{V}{(2\bar{\epsilon})^3} \int d^3\vec{k} \epsilon(\vec{k}) b_k^+ b_k - \\ - \frac{V^2}{(2\bar{\epsilon})^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{p} d^3\vec{v} \left\{ F_{-\nu} X_{\mu\nu} + F_{-\nu}^* X_{k+\nu,\nu}^* - \frac{1}{2} X_{\mu\nu} Z_{k,-\nu} - \frac{1}{2} X_{k+\nu,\nu}^* Z_{\mu-\nu,-\nu}^* \right\} \times \\ \times B_{\mu-\nu}^+ B_{k+\nu}^+ B_\mu^- B_k$$

Ako hamiltonijan usrednjimo po fononskom vakumu, dobićemo:

$$H_{eff} = \langle 0 | H_{eq} | 0 \rangle$$

$$H_{eff} \approx \frac{V}{(2\bar{\epsilon})^3} \int d^3\vec{k} B_k^+ B_k \left\{ d_k - \frac{V}{(2\bar{\epsilon})^3} \int d^3\vec{q} (F_2 X_{k-2,-2} + F_{-2}^* X_{k-2,-2}^*) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{2} \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} (X_{k-\epsilon, -\epsilon} Z_{k,\epsilon} + X_{k-\epsilon, -\epsilon}^* Z_{k,\epsilon}^*) \Big\} - \\
 & - \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{k} d^3 \vec{p} d^3 \vec{v} \left\{ F_\nu X_{\mu\nu} + F_\nu^* X_{\mu\nu}^* - \frac{1}{2} X_{\mu\nu} Z_{\epsilon,-\epsilon} - \frac{1}{2} X_{\mu\nu}^* Z_{\epsilon,-\epsilon}^* \right\} \times \\
 & \quad \times B_{\mu-\epsilon}^+ B_{\epsilon\nu}^+ B_\mu B_\epsilon \quad (\text{F. 12})
 \end{aligned}$$

Uvodjenjem dobijenih izraza (F.11) kao i vrednosti ( $*^*$ ) dobijamo

$$\begin{aligned}
 H_{\text{eff}} & \cong \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} \left\{ \alpha_k - \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{q} \frac{|F_\epsilon|^2}{\alpha_{k-\epsilon} - \alpha_k + E_\epsilon} \right\} B_k^+ B_k + \\
 & + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3 \vec{k} d^3 \vec{q} \frac{2m^2 \alpha_k^2}{H \hbar^2 [(k-\epsilon)^2 - k_0^2]} B_\epsilon^+ B_{-\epsilon}^+ B_{-\epsilon} B_\epsilon \quad (\text{F. 13})
 \end{aligned}$$

ili kraće napisano:

$$H_{\text{eff}} = H_2 + H_4$$

gde  $H_2$  predstavlja prvi sabirak u (F.13) a  $H_4$  drugi.

Drugi sabirak u  $H_2$  predstavlja korekciju na harmonijski magnonski spektar zbog virtuelnih fononskih procesa a  $H_4$  opisuje efektivnu magnon-magnon interakciju zbog istih procesa.

### Dvomagnonske kapi i odgovarajući spektar

Što se tiče formiranja magnonskih kaplji možemo zamisliti sledeći proces. Dva magnona sa suprotnim impulsima bivaju zahvaćeni od strane jednog molekula, pri čemu se ova magnonska kapljica kreće u potencijalu približno  $2\mu\mathcal{H}$ . Ovako stvorena stanja postaju metastabilna i molekuli spontano emituju dva fotonu slična kvanta. Sada ćemo ispitati spektar pomenutih kvantata.

U skladu sa gore iznetim procesom, mi ćemo iz hamiltoniana (F.13) izdvojiti deo koji je po našoj pretpostavci odgovoran za stvaranje kaplji:

$$H = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3k d^3l B_k^+ B_l + \frac{V^2}{(2\pi)^6} \int d^3k d^3l T(k, l) B_k^+ B_{-k}^+ B_{-l} B_l \quad (7.14)$$

GDE je:

$$T(k, l) = \frac{2m^2 \omega^2}{k^2 M} \frac{1}{(k-l)^2 - k_0^2}$$

Sledeći Bogoliubovljevu ideju koja je uspešno primenjena u teoriji superprovodnika, uvodimo nove operatore kreacije  $C_k^+$  i anihilacije  $C_k^-$  kanonskom transformacijom:

$$\left. \begin{aligned} B_k^+ &= u(k) C_k^+ + v(k) C_{-k}^- \\ B_k^- &= u(k) C_k^- + v(k) C_{-k}^+ \end{aligned} \right\} \quad (7.15)$$

Transformacione funkcije  $u(k)$  i  $v(k)$  su po pretpostavci parne i realne. Da bi  $C_k^+$  i  $C_k^-$  bili Boze operatori na funkcije  $u(k)$  i  $v(k)$  treba staviti uslov kanoničnosti. Taj uslov dobijamo obrazovanjem komutatora  $[B_k, B_l]$ ; odakle sledi zahtev:

$$u^2(k) - v^2(k) = 1 \quad (7.16)$$

Transformacionim relacijama (7.15) dijagonaliziraćemo hamiltonijan (7.14). Zato, prethodno moramo naći odgovarajuće komutatore:

$$B_k^+ B_k^- = u(k) C_k^+ C_k^- + u(k) v(k) (C_k^+ C_{-k}^- + C_{-k}^- C_k^-) + v^2(k) C_{-k}^+ C_{-k}^- + v^2(k)$$

$$B_k^+ B_{-k}^+ B_{-l}^- B_l^- = u(k) v(k) u(l) v(l) + u(k) v(k) u(l) v(l) [C_{-k}^+ C_{-l}^- + C_l^+ C_k^-] +$$

$$+ u(k) v(k) [u(l) C_{-k}^+ C_{-l}^- + v(l) C_l^+ C_k^-] + u(l) v(l) [u(k) C_k^+ C_{-k}^- + v(k) C_{-k}^+ C_k^-] +$$

$$+ u(l) v(l) u(k) v(k) [C_{-k}^+ C_{-l}^- + C_l^+ C_k^-].$$

Stavljujući tako izračunate vrednosti komutatora u hamiltonijan (7.14) dobijamo:

$$\begin{aligned}
 H' = & \frac{V}{(2\bar{a})^3} \int d^3\vec{k} \alpha_{\vec{k}} v^i(\vec{k}) + \frac{V^2}{(2\bar{a})^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{\ell} T_{k\ell} u(\vec{k}) v(\vec{k}) u(\vec{\ell}) v(\vec{\ell}) + \\
 & + \frac{V}{(2\bar{a})^3} \int d^3\vec{k} d^3\vec{\ell} [u^i(\vec{k}) C_k^+ C_k + v^i(\vec{k}) C_{-k}^+ C_{-k}] + \frac{V}{(2\bar{a})^3} \int \alpha_k u(k) v(k) (C_k^+ C_k^+ + C_{-k} C_{-k}) + \\
 & + \frac{V^2}{(2\bar{a})^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{\ell} T_{k\ell} u(k) v(k) [u^i(\vec{\ell}) C_{-k} C_k + v^i(\vec{\ell}) C_{\ell}^+ C_{-k}^+] + \\
 & + \frac{V^2}{(2\bar{a})^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{\ell} T_{k\ell} u(\vec{k}) v(\vec{k}) [u^i(\vec{\ell}) C_k^+ C_{-k}^+ + v^i(\vec{\ell}) C_{-k} C_k] + \\
 & + \frac{V^2}{(2\bar{a})^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{\ell} T_{k\ell} u(k) v(k) u(\vec{\ell}) v(\vec{\ell}) [C_{-k}^+ C_{-k} + C_{\ell}^+ C_{\ell}] + \\
 & + \frac{V^2}{(2\bar{a})^6} \int d^3\vec{k} d^3\vec{\ell} T_{k\ell} u(\vec{k}) v(\vec{k}) u(k) v(k) [C_{-k}^+ C_{-k} + C_k^+ C_k]. \quad (7.12)
 \end{aligned}$$

Funkcije  $u(\vec{k})$  i  $v(\vec{k})$  odredjujemo iz uslova da suma članova u  $H'$  koji ne održavaju broj kvazičestica bude jednaka nuli. Stoga imamo sledeći uslov:

$$\frac{V}{(2\bar{a})^3} \int d^3\vec{k} [\alpha_{\vec{k}} u(\vec{k}) v(\vec{k}) + \frac{V}{(2\bar{a})^3} (u^i(\vec{k}) + v^i(\vec{k})) \int d^3\vec{\ell} T_{k\ell} u(\vec{\ell}) v(\vec{\ell})] (C_k^+ C_{-k}^+ + C_k C_{-k}) = 0$$

Uvodjenjem označke

$$\Phi_{\vec{k}} = \frac{V}{(2\bar{a})^3} \int d^3\vec{\ell} T_{k\ell} u(\vec{\ell}) v(\vec{\ell}) \quad (7.18)$$

i koristeći uslov kanoničnosti (7.16) dobijamo jednačinu

$$u^i(\vec{k}) (\alpha_k^2 - \Phi_k^2) - u^i(\vec{k}) (\alpha_k^2 - \Phi_k^2) - \frac{1}{4} \Phi_k^2 = 0$$

čija su rešenja: 1)  $u^i(\vec{k}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\alpha_k}{\sqrt{\alpha_k^2 - \Phi_k^2}} + 1 \right)$

$$2) \quad V^2(k) = \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_e}{\sqrt{\omega_e^2 - \phi_e^2}} - 1 \right)$$

$$3) \quad U(k)V(k) = -\frac{1}{2} \frac{\phi_e}{\sqrt{\omega_e^2 - \phi_e^2}} \quad (7.19)$$

Tako odredjene funkcije  $U(k)$  i  $V(k)$  stavljamo u hamiltonijan  $H'$  i dobijamo:

$$H' = \frac{V}{(2\omega)^3} \int d^3k \left( \sqrt{\omega_e^2 - \phi_e^2} - \frac{\omega_e}{2} - \frac{\omega_e^2}{2\sqrt{\omega_e^2 - \phi_e^2}} \right) + \\ + \frac{1}{2} \frac{V}{(2\omega)^3} \int d^3k \sqrt{\omega_e^2 - \phi_e^2} (C_e^+ C_k + C_{-k}^+ C_{-k}) \quad (7.20)$$

U kome prvi član predstavlja energiju osnovnog stanja a drugi energiju elementarnih eksitacija.

Energetski spektar novih elementarnih eksitacija ima oblik:

$$\frac{\partial H'}{\partial C_k^+ C_k} = \sqrt{\omega_e^2 - \phi_e^2}$$

kod kojeg "gep"  $\phi_e$  određujemo iz nelinearne singularne jednačine (7.18). Stavljajući (7.19) u (7.18) dobijamo

$$\phi_e + \frac{V}{(2\omega)^3} \int d^3q \frac{T_{qe} \phi_q}{\sqrt{\omega_e^2 - \phi_q^2}} = 0$$

Pod pretpostavkom da je  $\omega_e \gg \phi_e$  dobijamo aproksimativnu jednačinu:

$$\phi_e + \frac{V}{(2\omega)^3} \int d^3q \frac{2m^2 \omega_e^2}{M \omega^2} \cdot \frac{1}{(k-q)^2 - k_0^2} \cdot \frac{\phi_q}{\omega_e} = 0$$

Obeležavajući sa  $\Lambda = \frac{2m^2 \omega_e}{\omega^2 M} \approx \frac{2m^2 \mu \mathcal{H}}{\omega^2 M}$  dobijamo:

$$\phi_{\vec{k}} + \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{q} \frac{\phi_{\vec{q}}}{(\vec{k}-\vec{q})^2 - k_0^2} = 0 \quad (7.21)$$

Posle Furije transformacija

$$\phi_{(E)} = \int d^3\vec{r} \tilde{\phi}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$

i

$$\frac{1}{(\vec{k}-\vec{q})^2 - k_0^2} = \int d^3\vec{r} U(\vec{r}) e^{i(\vec{k}-\vec{q})\cdot\vec{r}}$$

gde je

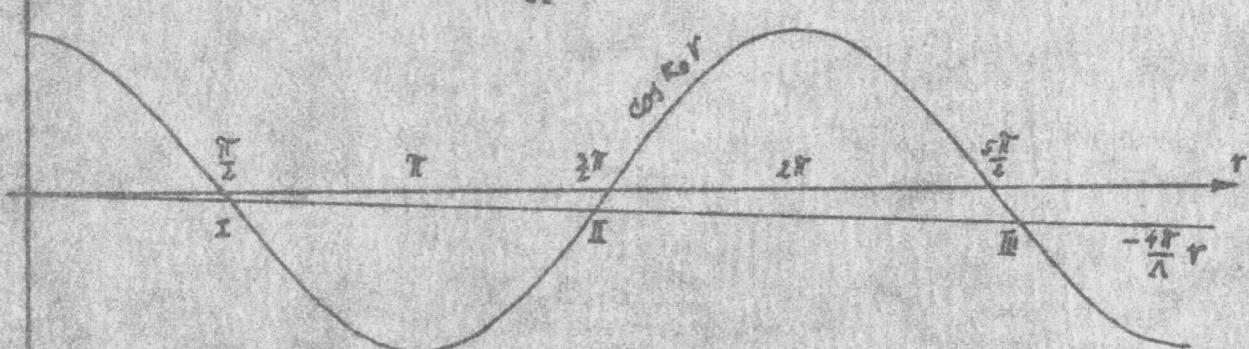
$$U(r) = \frac{\cos k_0 r}{4\pi r}$$

dobijamo

$$\int d^3\vec{r} \left( 1 + \frac{1}{4\pi r} \cos k_0 r \right) \tilde{\phi}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} = 0$$

Ova jednačina ima netrivijalna rešenja za  $\tilde{\phi}(\vec{r}) \neq 0$ , samo za vrednosti  $\vec{r}$  koja se dobijaju rešavanjem jednačine

$$\cos k_0 r = -\frac{4\pi}{\Lambda} \cdot r$$



sl. 1

Zbog toga što je  $\Lambda \sim 10^8$  prvo rešenje dobijamo (sl. 1), ako stavimo:

$$k_0 r_0 = \frac{\pi}{2} \quad , \quad r_0 = \frac{\pi}{2k_0}$$

Isto tako dobijamo i druga rešenja:

$$r_1 = 3 r_0 \quad ; \quad r_2 = 5 r_0$$

U kasrijim računima koristićemo sva najmanje rešenje na r, tj.

$$r_0(k_0) \equiv r_0 \approx \frac{\bar{a}}{2k_0} \sim 10^{-5} [\text{cm}]$$

Izbor ovakvog rešenja leži u formi potencijala  $U(\vec{r})$  koji je odgovoran za slepljivanje magnona. Verovatnoća slepljivanja magnona je proporcionalna sa  $r^{-2}$ ; uporedjivanjem verovatnoće slepljivanja magnona za  $r_0$  i  $r_1$  vidimo da je odgovarajuća verovatnoća za vrednost  $r_1$  za red veličine manja od odgovarajuće verovatnoće za  $r_0$ , za koju je najveća verovatnoća slepljivanja magnona u kapi. Zbog toga možemo funkciju  $\tilde{\phi}_k$  napisati u vidu:

$$\tilde{\phi}(\vec{r}) = G \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \quad ; \quad \phi(k) = G \frac{\sin kr_0}{k}$$

$\delta$ -funkcijom obezbeđujemo da je  $\phi(\vec{r})$  različito od nula samo za vrednosti  $\vec{r} = \vec{r}_0$ . G je arbitarna konstanta koja se pojavljuje zbog homogenosti jednačine (7.21). Ovu konstantu određujemo tako da

$$\sqrt{\alpha_k^2 - \phi_k^2} \rightarrow 0 \quad \text{kada} \quad \vec{k} \rightarrow 0$$

Na taj način dobijamo zakon disperzije za magnone:

$$\lambda(x) = \alpha_k \sqrt{1 - \frac{\sin^2 x}{x^2}} \quad (7.22)$$

gde smo sa x obeležili:  $x = k \cdot r_0$

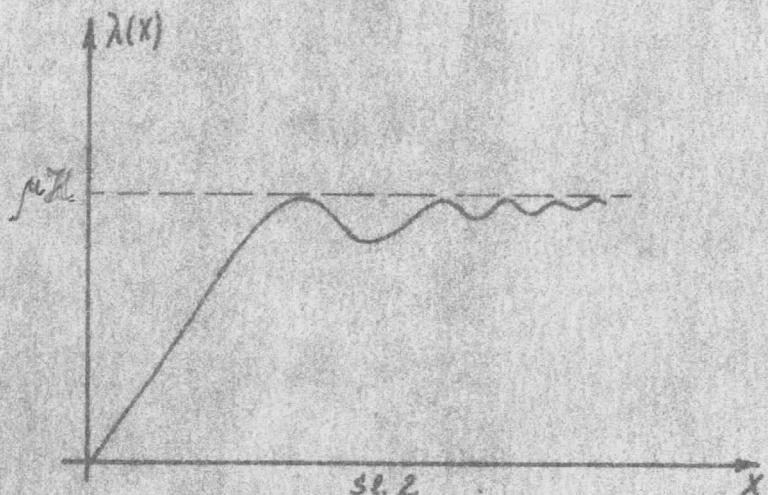
Analiziranjem izraza (7.22), za male talasne vektore dobijamo:

$$\lambda \approx c_0 \hbar k \quad ; \quad c_0 = \sqrt{\frac{e}{3!}} \frac{r_0 \alpha_k}{\hbar}$$

koji odgovara disperzionom zakonu svetlosnih kvanta. Zakon disperzije za magnone prikazan je na grafiku (sl. 2).

Prilikom razgradnjivanja magnonske kopljice snituju se dva fotonu slična kvanta; svaki od njih ima zakon disperzije prikazan na sl. 2. Pri malim impulsima, energija  $\lambda(x)$  je linearne funkcija impulsa. Za veće talasne vektore energija  $\lambda(x)$  odstupa od linearne zavisnosti.

Uporedjujući energetski spektar  $\text{He}^4$  sa zakonom disperzije za magnone, uočavamo da prvi minimum  $\lambda(x)$  na sl. 2 odgovara rotonskom minimumu kod helijuma koji je odgovoran za pojavu superfluidnosti kod ove kvantne tečnosti.



Iz ovoga zaključujemo da se i eksitacije nastale razgradnjom magnonskih kaplji kreću superfluidno.

### ZAKLJUČAK

Rezultate dobijene u ovom radu možemo rezimirati na sledeći način.

A-nalizirajući magnonski sistem sa magnon-fonon interakcijom došli smo do sledećih zaključaka: virtuelni fononski procesi dovode do energetskog pomeranja u harmonijskom delu spektra i do privlačne magnon-magnon interakcije.

Kao posledica privlačne magnon-magnon interakcije nastaje slepljivanje dva magnona na molekulu, tj. dolazi do formiranja magnonskih kaplji. Prilikom raspada magnonskih kaplji nastaju elementarne eksitacije čiji je spektar linearan za male talasne vektore. Za velike talasne vektore dobijamo karakterističan minimum analogan rotonskom minimumu kod superfluidnog helijuma.

Zaključujemo da se elementarne eksitacije mogu kretati kroz kristal superfluidno.



## L I T E R A T U R A

A.S. Davidov: Kvantovaja mehanika, Moskva 1973.

S.V. Vonsovskij: Magnetizm, Moskva 1971

Mario Škrinjar: Doktorska disertacija, Novi Sad 1975