дипломски рад :

"АЛГЕБАРСКА ТРАНСФОРМАЦИЈА ЈЕДНОГ ХЕРМИТСКОГ ОПЕРАТОРА"

кандидат :

Панковић Владан

Аутор овог рада неизмерно је захвалан др.Марију Шкрињару на поверењу,др.Дарку Капору на стрпљењу и др.Федору Хербуту на саветима.

Балада о Шредингеровом мачку

Шредингер је дуго и вредно радио,
а онда је хтео да се ко човек одмори
и да би мало мозак и живце оладио
смислио је причу о мачку у плинској комори.

И ако није желео да се икоме замери
с причом није све најбоље урадио.
Супротно првобитној намери,он сам је "прокуво",
а многе друге је "оладио".

Нашао се ту Нојман ,фон,
који је учинио племенит гест.
Поштујући математички бон-тон ,
спасо је мачка уводећи "Свест".

Е,јест!

порука:

Читаоче ево мог неумног суда.
Ако не желиш да мозак излажеш катаклизмама,
уместо о мачку у плинској комори
читај о мачку у чизмама.

САДРЖАЈ

Увод

" Након Коперника поново су настала времена бурних расправа о томе гибају ли се планети око Сунца или се Земља налази у средишту свемира.Тада се човјек по имену Тихо Брахе досјетио начина како да одговори на то питање.Брахе је дошао на замисао да пажљиво прати и биљежи где се точно на небу појављују планети и да на основу тога покуша одлучити између супарничких теорија . Та је метода кључ модерне знаности.У идеји да се проматрају ствари,да се биљеже детаљи,те се у тако скупљеним обавјестима тражи потврда оваква или онаква теоријског тумачења - у томе лежи зачетак истинског разумијевања природе."

Ричард Фајнман ,7 .

Мерење,кога Фајнман на њему својствен начин назива кључем савремене науке,у уобичајеном или интуитивном смислу речи представља процес у коме на нечему,на неки начин,неко,мери нешто.Било би сасвим логично очекивати да је савремена наука у стању да појмове "на нечему","на неки начин","неко","мери нешто",одреди много боље но што је то учињено у предходној реченици.На жалост то није тако.

" Својевремено је у новинама писало да теорију релативности схваћа само дванаесторица људи.Тешко ми је вјеровати да је то икад могла бити истина.Могуће је да је у неко вријеме био само један човјек,јер је само он схватио што је на ствари,а није био о томе још написао чланак.Након што су прочитали тај чланак,многи су овако или онако разумјели теорију релативности и ја мислим да их је било више од дванаест.Али мислим да могу храбро рећи да квантну механику нитко не разумије."

Ричард Фајнман,7 .

Одавде међутим не треба извлачити закључке да је физика,односно квантна механика излишна делатност људског духа[1],јер;како каже Маркс у Тезама о Фојербаху:"Филозофи су само различито тумачили свет.Ради се о томе да се он измени.",а квантна механика је и те како изменила свет,од транзистора и ласера до нуклеарног оружја.

Треба рећи да постоје различити приступи тумачењу процеса мерења и квантне механике у опште 1,2,3,4,5,6,8 .Сврха овог дипломског рада је да да компилацију шесте главе знаменитог рада Јохана фон Нојмана,1,то јест да да математичке основе приказа ортодоксне интерпретације квантне механике,у чију истинитост

---

1 - Двосмисленост,везана за ортодоксну интерпретацију квантне механике

аутор овог рада,како би то рекао Меша Селимовић,не жели да верује,не жели,али не може да се ослободи сумње.Део математичког ~~ће~~ формализма фон Нојманове теорије мерења и квантне механике у опште,који због ограниченог простора,није могао ући у овај дипломски рад,заинтересовани читалац може наћи у референцама 1,2. Други део рада,по коме рад иначе носи име,представља једну , неуобичајену консеквенцу математичког формализма фон Нојманове теорије мерења.Коначно у додатку ,дат је укратко резултат савремених испитивања акаузалности процеса мерења.

Завршићу овај увод на сличан начин како је и почео,цитатом о небеској механици:

" IS THE MOON THERE WHEN NOBODY LOOKS ? "

DAVID MERMIN [8]

1. Фон Нојманова теорија мерења

Временску промену функције стања Ψ квантног система описују два различита, један на други несводљива, процеса: еволуција стања ван мерења и мерење 1,2.

1. Ако се у тренутку $t=t_0$, дати квантни систем налазио у стању $\Psi_0=\Psi(t_0)$ онда он еволуцијом прелази у стање $\Psi(t)$ у тренутку $t\geq t_0$ тако да важи Шредингерова једначина

$$\hat{H}\Psi(t)=i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t) \quad , \Psi_0=\Psi(t_0) \quad , t\geq t_0$$

што се на еквивалентан начин може исказати њеним формалним решењем

$$\Psi(t)=\hat{U}(t_0,t)\,\Psi(t_0) \qquad t\geq t_0$$

где је $\hat{U}(t_0,t)$ тзв. еволуциони оператор, једнозначно одређен хамилтоновим оператором и тренуцима времена t_0 и t. На тај начин еволуција је каузалан и термодинамички реверзибилан /види доказ у 1 / процес.

2. Ако се пре мерења квантни систем налазио у стању Ψ, тад мерење опсервабле недегенерисаног спектра са својственим функцијама Ψ_n преводи систем из стања

$$\Psi=\sum_n(\Psi_n,\Psi)\Psi_n$$

с вероватноћом пре мерења једнаком $|(\Psi_n,\Psi)|^2$ у стање Ψ_n. Због тога се сам акт мерења назива колапсом или редукцијом. Ако смо уместо појединачног квантног система имали квантни ансамбл хомоген и чист,2, коме је придружена функција стања Ψ односно статистички оператор $\hat{S}=\hat{P}_{[\Psi]}$ где је $\hat{P}_{[\Psi]}$ пројектор на стање Ψ, мерење преводи у мешавину или смешу подансамбала описану статистичким оператором

$$\hat{S}=\sum_n|(\Psi_n,\Psi)|^2\hat{P}_{[\Psi_n]}$$

где је $\hat{P}_{[\Psi_n]}$ пројектор на стање Ψ_n. Процес мерења је акаузалан /види додатак тј. 1,5 / и термодинамички иреверзибилан ,1.

Због процеса мерења свет делимо на два дела : посматрани систем и посматрача. У првом систему можемо испитивати све физичке законитости, док је у другом то бесмислено. Показаћемо међутим да граница посматрани систем - посматрач није строго одређена и да првобитни посматрач може део по део бити укључен у првобитни посматрани систем.

Нека су дата два, ма какве, квантна система S_1 и S_2, при чему је првом придружена функција стања Ψ^1 из хилбертовог простора $\mathcal{H}_1$

која зависи од класичних координата q_1 ,а другом функција стања φ^2 из хилбертовог простора $\mathcal{H}_2$,која зависи од класичних координата q_2 .Нека је $\mathcal{A}_i$ $i=1,2$ опсервабилна величина система S_i којој је придружен оператор $\hat{A}_i$ у $\mathcal{H}_i$.Узмимо сад уместо изолованих система S_1 и S_2 целокупан систем $S_{12}=S_1+S_2$ коме је придружена функција стања φ^{12} из хилбертовог простора $\mathcal{H}_{12}=\mathcal{H}_1\times\mathcal{H}_2$ /где је $\times$ - директан производ хилбертових простора / која зависи од координата q_1 и q_2 .Пошто опсервабилна величина $\mathcal{A}_i$ $i=1,2$ остаје иста и у S_{12} потребно је одредити такав оператор $\hat{A}_{12}$ у $\mathcal{H}_{12}$ који би репрезентовао и $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$,тј. да

$$\hat{A}_{12}\varphi^{12}(q_1,q_2)=\hat{A}_1\varphi^{12}(q_1,q_2) \qquad q_2=const$$

$$\hat{A}_{12}\varphi^{12}(q_1,q_2)=\hat{A}_2\varphi^{12}(q_1,q_2) \qquad q_1=const$$

Претпоставимо сад да је φ^1_n $n=1,2,\dots$ произвољан базис у $\mathcal{H}_1$, а $\varphi^1_{n'}$ $n'=1,2,\dots$ произвољан базис у $\mathcal{H}_2$,тада је у $\mathcal{H}_{12}$ скуп функција облика $\varphi^{12}_{nn'}=\varphi^1_n\varphi^2_{n'}$ $n=1,2\dots;\ n'=1,2\dots$ такође базис.Тад следи

$$\hat{A}_1\varphi^1_n=\sum_{m=1}^{\infty}a^1_{nm}\varphi^1_m$$

$$\hat{A}_2\varphi^2_{m'}=\sum_{m'=1}^{\infty}a^2_{n'm'}\varphi^2_{m'}$$

$$\hat{A}_{12}\varphi^{12}_{nn'}=\sum_{m,m'}a^{12}_{nn'|mm'}\varphi^{12}_{mm'}=\sum_{m,m'}a^{12}_{nn'|mm'}\varphi^1_m\varphi^2_{m'}$$

За $q_2=const$ тад следи

$$\sum_{m,m'}a^{12}_{nn'|mm'}\varphi^1_m\varphi^2_{m'}=\hat{A}_1\varphi^{12}_{nn'}=\varphi^2_{n'}\hat{A}_1\varphi^1_n=\sum_m a^1_{nm}\varphi^1_m\varphi^2_{n'}$$

одакле следи

$$a^{12}_{nn'|mm'}=a^1_{nm}\delta_{n'm'}$$

На исти начин за $q_1=const$ следи

$$a^{12}_{nn'|mm'}=a^2_{n'm'}\delta_{nm}$$

У S_{12} статистичка својства дефинише оператор $\hat{\mathcal{S}}_{12}$.Он такође одређује статистику и у сваком делу S_{12} посебно у S_1 . Поставља се питање како дефинисати статистички оператор само за S_1 .Дефиниција следи из једнакости средњих вредности за $q_2=const$

$$\sum_{n,n',m,m'}R^{12}_{nn'|mm'}a^{12}_{nn'|mm'}=\sum_{n,m}R^1_{n,m}a^1_{nm}$$

Како

$$\sum_{n,n',m,m'}R^{12}_{nn'|mm'}a^{12}_{nn'|mm'}=\sum_{n,n',m,m'}R^{12}_{nn'|mm'}a^1_{nm}\delta_{n'm'}=\sum_{n,m}\Big(\sum_{n'}R^{12}_{nn'|mn'}\Big)a^1_{nm}$$

следи

$$R^1_{nm} = \sum_{n'} R^{12}_{nn'|mn'}$$

Takође,на сличан начин следи за $q_1 = \text{const}$

$$R^2_{n'm'} = \sum_{n} R^{12}_{nn'|nm'}$$

где су $R^{12}_{nn'|mm'}$, R^1_{nm} , $R^2_{n'm'}$ матрични елементи оператора $\hat{\varrho}^{12}$, $\hat{\varrho}_1$, $\hat{\varrho}_2$ у базисима $\varphi^{12}_{nn'}$, φ^1_n , $\varphi^2_{n'}$.
Очигледно је да су правила која успостављају везу између $\hat{A}_{12}$ и $\hat{A}_1$, $\hat{A}_2$ битно различита од правила која успостављају везу између оператора $\hat{\varrho}_{12}$ и $\hat{\varrho}_1$, $\hat{\varrho}_2$.

Испитајмо сад да ли $\hat{\varrho}_1$ и $\hat{\varrho}_2$ једнозначно одређују [redacted] $\hat{\varrho}_{12}$,тј. дали матрице $[R^1_{nm}]$ и $[R^2_{n'm'}]$ једнозначно одређују матрицу $[R^{12}_{nn'|mm'}]$.Решење увек постоји,тј.

$$R^{12}_{nn'|mm'} = R^1_{nm} \cdot R^2_{n'm'}$$

Треба сад утврдити када је ово решење јединствено.Доказаћемо да је решење јединствено,ако је бар један од оператора $\hat{\varrho}_1$ или $\hat{\varrho}_2$ пројектор /тј. да бар један од оператора $\hat{\varrho}_1$ или $\hat{\varrho}_2$ описује чист хомоген ансамбл у датом стању /.Покажимо неопходност тог услова,тј. нека су и $\hat{\varrho}_1$ и $\hat{\varrho}_2$ смеше,тад /види 1/

$$R^1_{nm} = \alpha V^1_{nm} + \beta W^1_{nm}$$

где $\alpha,\beta \neq 0$,а $\hat{V}^1$ и $\hat{W}^1$ су непропорционални дефинитни оператори,и

$$R^2_{n'm'} = \gamma V^2_{n'm'} + \delta W^2_{n'm'} \qquad \gamma,\delta \neq 0$$

а $\hat{V}^2$ и $\hat{W}^2$ су непропорционални дефинитни оператори.Лако је проверити да важи

$$R^{12}_{nn'|mm'} = \alpha' V^1_{nm} V^2_{n'm'} + \beta' W^1_{nm} V^2_{n'm'} + \gamma' V^1_{nm} W^2_{n'm'} + \delta' W^1_{nm} W^2_{n'm'}$$

где

$$\alpha = \alpha' + \gamma' \ ; \quad \beta = \beta' + \delta' \ ; \quad \gamma = \alpha' + \beta' \ ; \quad \delta = \gamma' + \delta'$$

Како је детерминанта система

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

величине $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ не могу се једнозначно изразити преко величина $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.Докажимо сад да је услов довољан.Нека је бар $\hat{\varrho}_1$ стање,тј. $\hat{\varrho}_1 = \hat{P}_{[\varphi^1]}$.Како је базис [redacted] φ^1_n био произвољно одабран можемо узети да $\varphi^1 = \varphi^1_1$. Тада је матрица $[R^1_{nm}]$ облика

$$R^1_{nm} = \begin{cases} 1 & n=m=1 \\ 0 & \text{у осталим случајима} \end{cases}$$

Следи

$$\sum_{n'} R^{12}_{nn'|mn'} = \begin{cases} 1 & n=m=1 \\ 0 & \text{у осталим случајима} \end{cases}$$

Посебно за $n \neq 1$ следи $\sum_{n'} R^{12}_{nn'|mn'} = 0$,но како по дефиницији $R^{12}_{nn'|mn'} \geqslant 0$ то следи $R^{12}_{nn'|mn'} = 0$,тј. $(\hat{\varsigma}^{*}_{12} \varphi^{12}_{nn'}, \varphi^{12}_{nn'}) = 0$. Због захтева дефинитности $\hat{\varsigma}^{*}_{12}$ и теореме,1,да за дефинитан хермитски оператор $\hat{R}$ у датом хилбертовом простору $\mathcal{H}$ важи

$$|(Rf,g)| \leqslant \sqrt{(Rf,f)(Rg,g)}$$

где су f и g функције из $\mathcal{H}$,тј. да из $(Rf,f)=0$ следи $Rf = 0$,следи да за произвољно m , m' важи $(\varsigma^{*}_{12} \varphi^{12}_{nn'}, \varphi^{12}_{mm'}) = 0$.Ово значи да за $n \neq 1$ следи $R^{12}_{nn'|mm'} = 0$, што због ермитовости следи и за $m \neq 1$. Али за $n=m=1$ следи

$$R^{12}_{1n'|1m'} = \sum_n R^{12}_{nn'|nm'} = R^2_{n'm'}$$

Самим тим $R^{12}_{nn'|mm'}$ је одређено једнозначно чиме је тврђење доказано.Можемо дакле рећи да је оператор $\hat{\varsigma}^{*}_{12}$ одређен једнозначно операторима $\hat{\varsigma}^{*}_1$ и $\hat{\varsigma}^{*}_2$,кад су испуњени следећи услови

а/ $R^{12}_{nn'|mm'} = V^1_{nm} V^2_{n'm'}$

/из израза $\mathrm{SPUR}\ \hat{\varsigma}_{12} = \sum_{n,n'} R^{12}_{nn'|nn'} = \sum_n V^1_{nn} \sum_{n'} V^2_{n'n'} = 1$ следи да можемо множењи V^1_{nn} и $V^2_{n'n'}$ реципрочним факторима задовољити услов

$$\sum_n V^1_{nn} = 1 \qquad \sum_{n'} V^2_{n'n'} = 1$$

и тад $R^1_{nm} = V^1_{nm}$ и $R^2_{n'm'} = V^2_{n'm'}$

б/ $V^1_{nm} = X^*_n X_m$ или $V^2_{n'm'} = X^*_{n'} X_{m'}$

/иначе $\hat{\varsigma}_1 = \hat{P}_{[\varphi^1]}$ означава да $\varphi^1 = \sum_n y_n \varphi^1_n$ одакле следи $R^1_{nm} = Y^*_n Y_m$ и еквивалентно за V^1_{nm} ,а такође за $\hat{\varsigma}_2 = \hat{P}_{[\varphi^2]}$ /

Операторе $\hat{\varsigma}_1$ и $\hat{\varsigma}_2$ зваћемо пројекцијама оператора $\hat{\varsigma}_{12}$ у S_1 и S_2 .

Посматрајмо сад стање φ^{12} из S_{12} ,тј. $\hat{\varsigma}_{12} = \hat{P}_{[\varphi^{12}]}$ које се може разложити по базису $\varphi^{12}_{nn'}$,тј.

$$\varphi^{12} = \sum_{n,n'} f_{nn'} \varphi^{12}_{nn'}$$

при чему

$$\|\varphi^{12}\|^2 = \sum_{n,n'} |f_{nn'}|^2 < \infty$$

Уведимо операторе

$$F\varphi^1(q_1) = \int (\varphi^{12}(q_1,q_2))^* \varphi^1(q_1)\, dq_1$$

$$F^+\varphi^2(q_2) = \int \varphi^{12}(q_1,q_2) \varphi^2(q_2)\, dq_2$$

који су линеарни и дефинисани на $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$,узимају вредности из $\mathcal{H}_2$ и $\mathcal{H}_1$.Они се односе као транспоновани пошто важи

$$(F\varphi^1, \varphi^2) = (\varphi^1, F^+\varphi^2)$$

при чему је леви скаларни производ у $\mathcal{H}_2$,а десни у $\mathcal{H}_1$. Оператори F и F^+ су потпуно непрекидни,а оператори F^+F из $\mathcal{H}_1$ и FF^+ из $\mathcal{H}_2$ непрекидни и дефинитни,1, .У датим базисима вреди

$$F\varphi_n^1 = \sum_{n'} f_{nn'}^* \varphi_{n'}^2$$

$$F^+\varphi_{n'}^2 = \sum_n f_{n'n} \varphi_n^1$$

тако да операторима F и F^+ можемо придружити матрице $[f_{nn'}^*]$ и $[f_{n'n}]$,односно операторима F^+F и FF^+ матрице

$$\Big[\sum_{n'} f_{nn'}^* f_{mn'}\Big] \quad , \quad \Big[\sum_n f_{nn'}^* f_{nm'}\Big]$$

Даље оператору $\hat{\varsigma}_{12} = \hat{P}_{[\psi^{12}]}$ можемо у базису $\varphi_{nn'}^{12}$ придружити матрицу $[f_{nn'}^* f_{mm'}]$,а операторима $\hat{\varsigma}_1$ и $\hat{\varsigma}_2$ матрице $\Big[\sum_{n'} f_{nn'}^* f_{mn'}\Big]$ и $\Big[\sum_n f_{nn'}^* f_{nm'}\Big]$.Дакле важи $\hat{\varsigma}_1 = F^+F$ и $\hat{\varsigma}_2 = FF^+$.Пошто су дакле $\hat{\varsigma}_1$ и $\hat{\varsigma}_2$ потпуно непрекидни могу,1,бити записани у облику

$$\hat{\varsigma}_1 = \sum_{k=1} w_k' \hat{P}_{[\Psi_k^1]} \qquad \hat{\varsigma}_2 = \sum_{k=1} w_k'' \hat{P}_{[\Psi_k^2]}$$

где Ψ_k^1 представља базис у $\mathcal{H}_1$,а Ψ_k^2 базис у $\mathcal{H}_2$ и сви $w_k', w_k'' \geq 0$.Избацимо из сума чланове за које $w_k' = 0$ и $w_k'' = 0$ и изведемо преиндексацију,тако да добијамо ортонормиран али не обавезно и потпун,тј. комплетан,систем функција Ψ_k^1 у $\mathcal{H}_1$ и Ψ_k^2 у $\mathcal{H}_2$. За неко Ψ_k^1 важи $\hat{\varsigma}_1\Psi_k^1 = w_k'\Psi_k^1$ тј.

$$F^+F\Psi_k^1 = w_k'\Psi_k^1 \ ; \ FF^+F\Psi_k^1 = w_k' F\Psi_k^1 \ ; \ \hat{\varsigma}_2(F\Psi_k^1) = w_k'(F\Psi_k^1)$$

Следи

$$(F\Psi_k^1, F\Psi_l^1) = (F^+F\Psi_k^1, \Psi_l^1) = (\hat{\varsigma}_1\Psi_k^1, \Psi_l^1) = w_k'\delta_{kl}$$

тј. $\|F\Psi_k^1\|^2 = w_k'$ па функције $\frac{1}{\sqrt{w_k'}} F\Psi_k^1$ чине ортонормиран скуп у $\mathcal{H}_2$ и представљају својствене функције оператора $\hat{\varsigma}_2$ с истим својственим вредностима које има $\hat{\varsigma}_1$ у стању Ψ_k^1 . То значи да је свака својствена вредност од $\hat{\varsigma}_1$ дате вишеструкости за $\hat{\varsigma}_1$,истовремено и својствена вредност од $\hat{\varsigma}_2$ не мање вишеструкости за $\hat{\varsigma}_2$.На еквивалентан начин можемо доказати да је свака својствена вредност од $\hat{\varsigma}_2$ дате вишеструкости за $\hat{\varsigma}_2$,истовремено и својствена вредност од $\hat{\varsigma}_1$ не мање вишеструкости за $\hat{\varsigma}_1$.То значи да уз повољну преиндексацију вреди $W_k^{'} = W_k^{''} = W_k$ и да без умањења општости можемо одабрати

$$\Psi_k^2 = \frac{1}{\sqrt{W_k}} F \Psi_k^1$$

тад

$$\frac{1}{\sqrt{W_k}} F^+ \Psi_k^2 = \frac{1}{W_k} F^+ F \Psi_k^1 = \frac{1}{W_k} \hat{\rho}_1 \Psi_k^1 = \Psi_k^1$$

тј.,

$$\Psi_k^2 = \frac{1}{\sqrt{W_k}} F \Psi_k^1 \quad , \quad \Psi_k^1 = \frac{1}{\sqrt{W_k}} F^+ \Psi_k^2$$

Сад ортонормиране системе Ψ_k^1 и Ψ_k^2 допунимо до базиса у $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.Без умањења општости можемо узети да је такав базис у $\mathcal{H}_1$ баш φ_n^1 ,а у $\mathcal{H}_2$ баш $\varphi_{n'}^2$,тј. φ_n^1 и $\varphi_{n'}^2$ одабрати да одговарају на описан начин конструисаним базисима у $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$.Тад

$$F \varphi_{\mu_k}^1 = \sqrt{W_k}\, \varphi_{\nu_k}^2 \quad , \quad F \varphi_m^1 = 0 \quad \text{ЗА} \quad m \neq \mu_1, \mu_2, \dots$$

под условом да Ψ_k^1 одговара $\varphi_{\mu_k}^1$,а да Ψ_k^2 одговара $\varphi_{\nu_k}^2$.
Дакле

$$f_{nn'} = \begin{cases} \sqrt{W_k} & \text{ЗА} \quad n = \mu_k \quad n' = \nu_k \quad k = 1,2 \\ 0 & \text{У ОСТАЛИМ СЛУЧАЈИМА} \end{cases}$$

тј.,

$$\varphi^{12} = \sum_k \sqrt{W_k}\, \varphi_{\mu_k}^1 \varphi_{\nu_k}^2$$

Тиме смо показали да на описан начин конструисани базиси одређују матрицу $[f_{nn'}]$ тако да у свакој њеној врсти и колони има највише један од нуле различит елемент .

Физички смисао овог тврђења је следећи,ако су $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ оператори недегенерисаног спектра,са својственим функцијама φ_n^1 и $\varphi_{n'}^2$ те две величине се могу истовремено мерити. Фраза $\hat{A}_1$ има вредност a_n^1 ,а $\hat{A}_2$ вредност $a_{n'}^2$ значи да је реализовано стање $\varphi_{nn'}^{12}$ које у стању φ^{12} има вероватноћу $|f_{nn'}|^2$. Пошто се могу реализовати само стања за која $|f_{nn'}|^2 \neq 0$ следи да постоји једнозначна коресподенција између φ_n^1 и $\varphi_{n'}^2$ која се истовремено могу реализовати ,тј. ако мерећи $\hat{A}_1$ добијемо a_n^1 ,онда је поуздано да $\hat{A}_2$ прелази у стање у коме има вредност $a_{n'}^2$,и обрнуто.

Ако уведемо ознаку

$$f_{nn'} = \begin{cases} c_k \neq 0 & n = \mu_k \ , \ n' = \nu_k \quad k = 1,2,\dots \\ 0 & \text{У ОСТАЛИМ СЛУЧАЈИМА} \end{cases}$$

следи

$$\varphi^{12} = \sum_{k=1}^{\max k} c_k \varphi_{\mu_k}^1 \varphi_{\nu_k}^2$$

Такође $R^2_{n'm'} = \begin{cases} |C_k|^2 & n'=m'=\nu_k \quad k=1,2,\dots \\ 0 & \text{У ОСТАЛИМ СЛУЧАЈИМА} \end{cases}$ и

$$R^1_{nm} = \sum_{n'=1}^{\infty} f^*_{nn'} f_{mn'} = \begin{cases} |C_k|^2 & n=m=\mu_k \quad k=1,2,\dots \\ 0 & \text{У ОСТАЛИМ СЛУЧАЈИМА} \end{cases}$$

па дакле

$$\hat{S}_1 = \sum_{k=1}^{\max k} |C_k|^2 \hat{P}[\varphi^1_{\mu_k}] \quad , \quad \hat{S}_2 = \sum_{k=1}^{\max k} |C_k|^2 \hat{P}[\varphi^2_{\nu_k}]$$

Последњи резултат је необично важан јер показује да при пројектовању у S_1 или S_2 , φ^{12} постаје у општем случају,тј. за $\max k > 1$,смеша и да је стање само у S_{12} . Да би $\hat{S}_1$ и $\hat{S}_2$ били стања мора бити $\varphi^{12} = \varphi^1 \cdot \varphi^2$.Дакле за свако φ^{12} можемо одабрати такве операторе опсервабли $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ да би предходна тврђења били задовољени.За произвољно одабране операторе $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ она не морају бити задовољена . Систематизујући добијене закључке долазимо до тврђења :

Ако се S_1 налази у стању φ^1 ,а S_2 у стању φ^2 ,систем S_{12} се такође налази у стању $\varphi^{12} = \varphi^1 \cdot \varphi^2$.Ако се пак систем S_{12} налази у стању које није облика $\varphi^1 \cdot \varphi^2$,то ће S_1 и S_2 бити у смеши,но φ^{12} ће успоставити узајамно једнозначну коресподенцију између могућих вредности опсервабли у S_1 и S_2 .

Означимо сад с S_1 мерени систем,а са S_2 посматрача.Ако се S_1 налази пре мерења у стању φ^1 ,а S_2 у смеси $\hat{\rho}_2 = \sum_n w_n \hat{P}[\varphi^2_n]$ ~~ахе~~ се S_{12} налази у смеси одређеној на јединствен начин $\hat{S}_{12} = \sum_n w_n \hat{P}[\varphi^{12}_n]$ где $\varphi^{12}_n = \varphi^1 \cdot \varphi^2_n$. Мерење A_1 у S_1 треба схватити као интеракцију S_1 и S_2 тј. као еволуциони процес с неким оператором еволуције U_{12} тако да

$$S'_{12} = U S_{12} U^{-1} = \sum_n w_n \hat{P}[U\varphi^{12}_n]$$

Ако би сад свако $U\varphi^{12}_n$ имало облик $\varphi^1_n \varphi^2_n$ то би та интеракција представљала мерење које стање φ^1 преводи у смесу својствених функција φ^1_n оператора $\hat{A}_1$.Статистички карактер мерења следио би из тога,што чак да се до мерења S_1 налазио у одређеном стању, S_2 је био смеша која се у интеракцији пренела на S_{12} , тј. зато што пре мерења стање посматрача није било тачно одређено.Али тад вероватноће w_n не би смеле да зависе од стања φ^1 посматраног система,већ искључиво од посматрача,што је у директној контрадикцији са предикцијама квантне механике и експериментима.Дакле статистичност мерења није условљена недостатком знања о стању посматрача.

Посматрајмо сад три квантна система ,мерени систем – S_1 , мерни уређај– S_2 ,и посматрач – S_3 .На системе S_1

и S_2 примењиваћемо формализам квантне механике,док ће S_3 у складу с предходним напоменама бити ван разматрања.

Узмимо сад да S_1 сматрамо за посматрани систем,а S_2+S_3 за посматрача,тад мерење можемо тумачити као процес 2.,тј. границу посматрани систем - посматрач ставити у положај

$$S_1 \mid S_2+S_3$$

при чему S_1 из стања φ^1 прелази у својствено стање φ^1_n опсервабле $\hat{A}_1$ с вероватноћом пре мерења $|(\varphi^1_n,\varphi^1)|^2$.

Узмимо сад да S_1+S_2 сматрамо за посматрани систем,а S_3 за посматрача.Како тад описати мерење? Тад нам S_2 представља "мерни уређај", који на "скали" показује вредност опсервабле $\hat{A}_1$,док је "положај стрелице" на "скали" нека опсервабла $\hat{A}_2$ коју управо посматра S_3 , /речи "мерни уређај","скала","положај стрелице" су под наводницима јер не морају бити права скала,стрелица ~~и мерни-уређај~~ већ њихови еквиваленти за дати "мерни уређаји",/нпр физиолошки процеси у мозгу човека схваћеног као мерни инструмент/.При томе су својствене вредности оператора $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$ међусобно обострано кореспондентне на описани начин.У почетку се S_1 налази у /непознатом/ стању φ^1 ,а S_2 у познатом стању φ^2 па дакле S_1+S_2 се налази у стању $\varphi^1\cdot\varphi^2$.Мерење,ако се оно изводи помоћу S_2 над S_1 , извршава се посредством еволуције,тј. еволуционог оператора U_{12} који преводи $\varphi^1\varphi^2$ у

$$(\varphi^1\varphi^2)' = U_{12}(\varphi^1\varphi^2)$$

За S_3 мерење се изводи тако што он актом мерења,тј. процесом 2. дејствује на S_1+S_2 и мери $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$,при чему је због дефинисане коресподенције довољно знати својствену вредност једне опсервабле,да би се одредила својствена вредност друге.У овом случају граница је постављена између S_1+S_2 и S_3 ,тј.

$$S_1+S_2 \mid S_3$$

Треба дакле пронаћи базис φ^2_n у $\mathcal{H}_2$,при задатом базису φ^1_n у $\mathcal{H}_1$,као и φ^2 из $\mathcal{H}_2$.Даље треба одредити такав еволуциони оператор U_{12} да би било испуњено

$$\varphi^{12} = \varphi^1\cdot\varphi^2$$

$$(\varphi^{12})' = U_{12}\varphi^{12} = \sum_{n=1} c_n\varphi^1_n\varphi^2_n \qquad c_n = (\varphi^1_n,\varphi^1)$$

Извршимо преиндексацију тако да имамо $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.
Претпоставимо да је $\varphi^2 = \varphi^2_0$,тако да је оператор U_{12} могуће одредити на следећи начин

$$U_{12} \sum_{n,m} x_{mn} \varphi^1_m \varphi^2_n = \sum_{n,m} x_{mn} \varphi^1_m \varphi^2_{n+m}$$

Даље

$$\varphi^1 = \sum_m (\varphi^1_m, \varphi^1) \varphi^1_m \quad \text{и} \quad \varphi^2 = \varphi^2_0$$

па дакле

$$\varphi^{12} = \varphi^1 \varphi^2 = \sum_m (\varphi^1_m, \varphi^1) \varphi^1_m \varphi^2_0$$

и

$$(\varphi^{12})' = \sum_m (\varphi^1_m, \varphi^1) \varphi^1_m \varphi^2_m$$

чиме је наш циљ постигнут.

Треба међутим приметити да смо доказали егзистенцију оператора U_{12} али треба проверити да ли је то заиста еволуциони оператор који одговара Шредингеровој једначини /нпр. за $\frac{\partial}{\partial t}\hat{H}_{12} = 0$ да ли је $U_{12} = \exp(-iH_{12}t/\hbar)$/. У 1,фон Нојман показује у једном конкретном примеру /мерење координате/ да је заиста реч о еволуционом оператору. У општем случају фон Нојман примећује да би квантна механика морала грубо да противречи експерименту, ако ,бар приближно ,дати оператор не би био еволуциони.

Тиме смо остварили циљ постављен на почетку овог одељка. Рецимо да је при томе /не/намерно подражаван фон Нојманов начин означавања формула који знатно одступа од уобичајеног. Такође текст није, из чисто педагошких разлога, како би то рекао др. Братислав Ђ.Тошић 11, раздвајан у пододељке.

На крају приметимо да у 1,фон Нојман користи само еволуционе операторе облика $\exp(-i\hat{H}t/\hbar)$,тј. стандардну дефиницију ентропије која не зависи 1,11, од времена. Питање је да ли би за неку другачију, евентуално општију дефиницију ентропије, процес еволуције био термодинамички реверзибилан и да ли би тад фон Нојманова теорија мерења била применљива.

2.Алгебарска трансформација једног хермитског оператора

Фон Нојман је дакле доказао да се граница између посматраног система и посматрача може померати.Ипак термодинамичка ирeверзибилност својствена само мерењуa ,а не и еволуцији,захтева да та граница ипак негде буде постављена.У време заснивања теорије мерења,као у осталом и данас,није постојало неко плаузибилно објашњење,а још мање експериментални разлог, због кога би границу морали да поставимо већ у класичном мерном инструменту,или пак телу посматрача,човека.С друге стране границу нема смисла померати даље од посматрача човека,јер ако је човек извео мерење,тј. сазнао резултат мерења,онда је мерење заиста и изведено.Због тога је фон Нојман и постулирао човеков апстракт Его,тј. апстрактно Ја,или како се уобичајено каже, свест,која како каже Шредингер негодујући,менталним актом 9,изводи колапс,односно мерење.Ако се за моменат вратимо на Увод овог дипломског рада,можемо констатовати да свест није ништа јаснија од речи "неко",а колапс или редукција од речи "на неки начин".Једва да је реч опсервабла нешто "тежа",од речи "нешто", а целокупна материја квантног система,мерног система и човека од речи"на нечему" .Управо презентована интерпретација квантне механике назива се ортодоксном интерпретацијом.

Уместо да границу померамо у тело посматрача,можемо је,користећи фон Нојманову теорију,ићи у супротном смеру и померати је у тело посматраног система.Можемо се запитати шта то посматрач мери кад у посматрача уведемо и целокупно тело,тј. материју почетног посматраног система?Постулираћемо да је то апстракт Его квантног система,или краће несвест,за кога ћемо одабрати и посебно име:

"АЛГЕБАРСКА ТРАНСФОРМАЦИЈА ЈЕДНОГ ХЕРМИТСКОГ ОПЕРАТОРА "
или краће АТЈХО.Разлог оваквог избора имена је сасвим јасан:
"...но физичарима је посебно задовољство узети речи из свакодневног говора,а онда их примјенити на нешто сасвим друго."

Ричард Фајнман,7 .

Овде је сасвим очигледно да је реч "на нечему",једнако или нешто мало више јасна,него реч АТЈХО.Ортодоксну интерпретацију уз постулирање АТЈХОа или несвести зваћемо ортодоксном интерпретацијом ортодоксне интерпретације квантне механике.

Додатак – Извођење Белове неједнакости

Акаузалност инхерентна процесу мерења,а тиме и квантној механици,навела је неке физичаре,међу којима и Ајнштајна,Шредингера, Де Броља ,примедбе о томе види у 3,6,9,да претпоставе да квантна механика не даје комплетан опис феномена микро света и да је могуће конструисати једну потпунију теорију,која би узимала у обзир неке за квантну механику скривене параметре и тиме давала каузалан опис природе.У своме раду 1,фон Нојман је међутим доказао чувену теорему према којој теорије које "раде" са скривеним параметрима дају резултате супротне квантној механици,а тиме и познатим експерименталним резултатима.Фон Нојманова теорема односи се међутим само на једну ужу класу замисливих скривених параметара,3,6, па је стога ирелевантна за постојање скривених параметара.Џон Бел је анализирајући Бомово побољшање 10,Ајнштајн-Розен-Подолски парадокса извео неједнакост која би требало да буде задовољена у случају егзистенције тзв. локалних скривених параметара и која је у оштрој супротности са предикцијом квантне механике,5.Експерименти 3,5 су показали неслагање с Беловом неједнакошћу,односно слагање с предвиђањима квантне механике,чиме је практично показана не-конзистентност ма какве теорије скривених локалних параметара.Пошто фон Нојманова теорија мерења полази од акаузалности процеса мерења,тј. непостојања ма каквих скривених параметара,сматрао сам да је умесно у додатку овог рада дати извођење Белове неједнакости,које је само по себи 5,врло једноставно,тј. не представља превелику дигресију.

Претпоставимо да су задовољена следећа три услова :

1/реализам,тј. да резултати мерења не зависе од човекове,тј. људске свести,

2/закључак да својство квантног система добијено ~~ни~~ при мерењу постоји и кад мерење није изведено,

3/Ајнштајнова локалност или сепарабилност,тј. да се никакав утицај између два физичка система не може пропагирати брзином већом од брзине светлости.

Физичке теорије које задовољавају наведена три услова зваћемо локалним реалистичким теоријама.

Нека квантни систем има истовремено три својства A, B, C при чему се свако својство може манифестовати на два међусобно искључива начина A^+, A^- ; B^+, B^- ; C^+, C^-.

Означимо са N вероватноћу или број повољних регистрованих случајева од неког задатог укупног броја случајева,да мерењем на једној честици одредимо својства система.

Лако је проверити да тад важе следећи изрази

$$N(A^+B^-) = N(A^+B^-C^+) + N(A^+B^-C^-)$$
$$N(A^+C^-) = N(A^+B^+C^-) + N(A^+B^-C^-) \geqslant N(A^+B^-C^-)$$
$$N(B^-C^+) = N(A^+B^-C^+) + N(A^-B^-C^+) \geqslant N(A^+B^-C^+)$$

Из ова три израза следи

$$N(A^+B^-) \leqslant N(A^+C^-) + N(B^-C^+)$$

који након смене $A^+ \leftrightarrow A^-$ и $B^+ \leftrightarrow B^-$ даје

$$N(A^-B^+) \leqslant N(A^-C^-) + N(B^+C^+)$$

Комбинујући последња два израза добијамо неједнакост

$$N(A^+B^-) + N(A^-B^+) \leqslant N(A^+C^-) + N(A^-C^+) + N(B^+C^-) + N(B^-C^+)$$

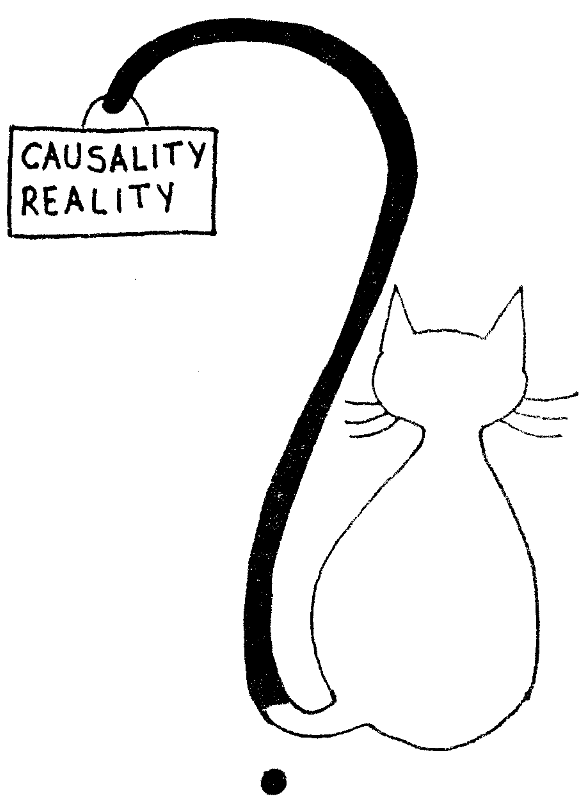
Означимо сада са n вероватноћу,тј. број повољних регистрација од укупног броја регистрација,да мерење изведено на два система на једном систему одреди једно,а на другом друго својство .При том је експеримент постављен тако да ако један систем има неко својство у једном стању,онда други систем има то исто својство али у супротном стању. У том случају важи пропорционалност

$$\frac{n[A^+B^+]}{N(A^+B^-)+N(A^-B^+)} = \frac{n[A^+C^+]}{N(A^+C^-)+N(A^-C^+)} = \frac{n[B^+C^+]}{N(B^+C^-)+N(B^-C^+)} = const \neq 0$$

која заједно с предходном неједнакошћу даје Белову неједнакост

$$n[A^+B^+] \geqslant n[A^+C^+] + n[B^+C^+]$$

У конкретном случају својства A, B, C представљају опсервабле спина $\hat{S}_1, \hat{S}_2, \hat{S}_3$ квантне честице,које могу имати две својствене вредности.


CAUSALITY
REALITY

Референце

[1] Иоганн фон Нейман - "Математические основы квантовой механики", Наука, Москва 1964.

[2] Dr. Fedor Herbut - "Kvantna mehanika za istraživače I deo", Beograd 1983.

[3] Dejvid Bom - "Uzročnost i slučajnost u savremenoj fizici" Nolit, Beograd 1972.

[4] Niels Bohr - "Atomska fizika i ljudsko znanje", Nolit, Beograd 1985.

[5] Bernard d' Espagnat - Sci. Amer., 1979., v. 241, p. 158.

[6] "Niels Bohr i savremena fizika", simpozijum povodom stogodišnjice rođenja, zbornik predavanja, Beograd, 7.-8. X 1985.

[7] Richard Feynman - "Osobitosti fizikalnih zakona", Školska knjiga, Zagreb 1977.

[8] David Mermin - Physics Today, vol 38, no 4, april 1985.

[9] Erwin Schrödinger - Die Naturwissenschaften, Heft 48, Heft 49, Heft 50, 1935.

[10] David Bohm - "Quantum theory", Prentice Hall, Inc., New York 1952.

[11] Dr. Bratislav S. Tošić - "Statistička fizika", Novi Sad 1978.