U N I V E R Z I T E T U N O V O M S A D U
P R I R O D N O-M A T E M A T I Č K I F A K U L T E T
K a t e d r a z a f i z i k u

Veselin A. Lovrić

SPIN-FONON INTERAKCIJA I ZAKON DISPERZIJE ZA MAGNONE

D I P L O M S K I R A D

NOVI SAD
1973 godine

Zahvaljujem se profesoru
Dr. BRATISLAVU S. TOŠIĆU
na svesrdnoj pomoći pri
izradi rada, kao i pri
izboru same teme

БИБЛИОТЕКА Природно-математичког факултета НОВИ САД

S A D R Ž A J

Strana

Библиотека Природно-математичког факултета Нови Сад

U V O D

Prilikom analize fenomena u kristalu treba uvek voditi računa o tome da, pri temperaturama različitim od nule, molekuli kristala osciluju i da ova činjenica utiče na termodinamičke karakteristike posmatranih fenomena. Na jeziku kvazičestica ovo znači da elementarne ekscitacije u kristalu, bez obzira koga su tipa, uvek interaguju sa kvantima oscilovanja rešetke - - fononima.
U nekim slučajevima, kao na primer u teoriji eksitona (eksitoni su optička pobudjenja kristala), interakcija izmedju eksitona i fonona ne može bitno uticati na karakteristike eksitona jer eksitoni imaju energiju 3 - 5 e V dok fononi na niskim temperaturama imaju energiju 0,01 - 0,001 e V.
Postoje, medjutim, sistemi u kojima elementarne ekscitacije i fononi imaju energije istog reda veličine i tada zanemarivanje fononskih efekata može da stvori veliku grešku u rezultatima. Tipičan primer fenomena, kod kojih se uticaj fonona ne može zanemariti, su fenomeni u feromagnetiku na niskim temperaturama. Na niskim temperaturama spinski talasi ili magnoni imaju energije istog reda veličina kao i fononi a osim toga i jedne i druge ekscitacije pobudjuju se istim mehanizmom (unošenjem toplotnih kvanata u kristal), pa se zato pri ispitivanju spinskih talasa mora uzeti u obzir činjenica da rešetka osciluje.
Problemom spin - fonon interakcije bavili su se mnogi autori (Kaščajev, Krivoglaz, Jakovljev, Pite i drugi), pri čemu su naročito ispitivali uticaj fonona na zakon disperzije za spinske talase u oblasti niskih temperatura. Na osnovu dobijenih zakona disperzije nadjene su korekcije Bloh - Dajsonove formule za magnetizaciju na niskim temperaturama. Stepen tačnosti, sa kojim su pomenuti autori radili, dozvoljavao je da se pravilno koriguju tzv. harmonijski koeficijenti u izrazu za magnetizaciju.

Korigovanje anharmonijskih koeficijenata, koje je vršeno, nije bilo pravilno, jer u zakonu disperzije za magnone nisu bili uzeti u obzir svi članovi koji su neophodni za korekciju ovog koeficijenta.
Korekcija anharmonijskog koeficijenta dolazi od onih članova u zakonu disperzije za magnone koji su proporcionalni koncentraciji magnona i fonona. Pošto pomenuti autori, u svojim radovima, nisu uzimali u obzir anharmonijski deo operatora spin - fonon interakcije u zakonima disperzije za magnone nisu figurisali svi članovi koji su proporcionalni koncentracijama magnona i fonona.
Cilj ovog rada je da se uzme u obzir anharmonijski deo operatora spin - fonon interakcije i da se nadje pravilan zakon disperzije za magnone u koji su uključeni svi članovi proporcionalni prvom stepenu magnona i fonona, zaključno. Tek na osnovu ovako dobijenih zakona disperzije, mogu se iskorigovati svi članovi Bloh - Dajsonove formule za magnetizaciju, kako harmonijski tako i anharmonijski.

I GLAVA

OPŠTE O SPIN - FONON INTERAKCIJI

Elementi teorije magnetizma

Prema magnetnim osobinama sva tela se mogu podeliti na slabe i jake magnetne materijale. Ova podela se može bolje izvesti na osnovu veličine i znaka magnetne susceptibilnosti koju definišemo kao koeficijent proporcionalnosti izmedju magnetnog momenta uzorka ($\vec{M}$) i spoljašnjeg magnetnog polja ($\vec{H}$)

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H}$$

Materijali sa negativnom veličinom χ su dijamagnetici, sa malom i pozitivnom veličinom χ paramagnetici a sa velikom i pozitivnom veličinom χ feromagnetici. Dalja podela se može izvršiti tek na osnovu poznavanja mikroprirode magnetizma. Kod jakih magnetnih materijala (feromagnetici) postoji spontani magnetni momenat nezavisno od toga da li se uzorak nalazi u magnetnom polju ili ne. Magnetni momenat jedinice zapremine (magnetizacija), na temperaturama nižim od neke kritične temperature,naziva se spontana magnetizacija. Ona je funkcija temperature i skoro ne zavisi od primenjenog magnetnig polja. Njena najveća vrednost je magnetizacija zasićenja.

Jak magnetizam opaža se samo kod kristala i to samo kod onih kod kojih u kristalnu rešetku ulaze atomi sa nepopunjenim unutrašnjim elektronskim ljuskama (Fe, Co, Ni, lantanidi). Iz toga se može zaključiti da su magnetne osobine jakih magnetnih materijala posledica nepopunjenosti unutrašnjih ljusaka, ali to nije dovoljan uslov, jer svi prelazni elementi imaju nepopu - njene unutrašnje ljuske, no največim delom su paramagnetici.

Veber je dao prvu teoriju koja objašnjava pojavu magnetizma. On smatra da je magnet skup uredjenih elementarnih magneta i da su sve magnetne pojave posledica " razuredjenja " tog skupa. Slaba strana ove teorije je da ona ne objašnjava suštinu tih elementarnih magneta.

Na osnovu današnjih saznanja o prirodi magnetizma, smatra se da su za magnetne osobine odgovorne nepopunjene ljuske atoma koji ulaze u kristalnu ćeliju. To su 3 - d ljuska kod gvoždja, kobalta i nikla a 4 - f ljuska kod lantanida. Osobine jakog magnetizma zavise od rasporeda gustina elektrona u nepopunjenim unutrašnjim ljuskama i od gustine provodnih elektrona u kristalnoj rešetki, ali savremeno stanje teorije ne dozvoljava formulisanje neophodnih i dovoljnih uslova za postojanje jakog magnetizma na osnovu poznavanja elektronske konfiguracije atoma.

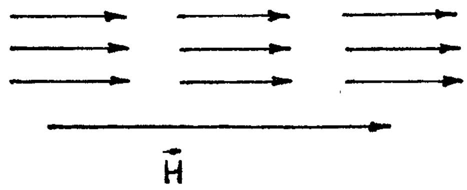
Magnetni momenat uzorka sastoji se iz sopstvenih magnetnih momenata elektrona i orbitalnih momenata. Rezultati merenja pokazuju da je udeo orbitalnih momenata, u makroskopskom momentu, zanemarljiv prema udelu sopstvenih magnetnih momenata elektrona u nepopunjenim ljuskama. Smatra se da su za magnetne osobine odgovorni spinovi elektrona u nepopunjenim ljuskama i da oni, kada su atomi vezani u kristal, obrazuju jedan efektivni spin, koji, u opštem slučaju, nije jednak sumi svih pojedinačnih spinova u ovim ljuskama. Ovi efektivni spinovi su, na osnovu današnjih shvatanja, upravo onaj skup uredjenih elementarnih magneta koji je pretpostavio Veber. Ova shvatanja su danas i eksperimentalno potvrdjena.

Interakcija izmedju spinova je okarakterisana integralom izmene koji je, po redu veličine, jednak energiji izmene elektrona odgovarajućih čvorova. Priroda ove interakcije se u početku shvatala kao dipol - dipolna interakcija magnetnih momenata. Medjutim, konstanta dipol - dipolne interakcije iznosi oko 10 Bolcmanovih konstanti, dok su tačke prelaza za fero magnetike reda 100 za lantanide a reda 1000 za gvoždje, kobalt i ni - kl, Bolcmanovih konstanti. Toplotni kvanti utiču na magnet težeći da ga " razurede " i jasno je da je tačka prelaza na onoj temperaturi na kojoj srednja toplotna energija dostiže vrednost energije izmene. Tada dolazi do razgradnje magnetne rešetke. Smatrajući da su dipol - dipolne interakcije odgovorne za uredjenje sistema spinova, dobija se da ni jedan magnetni materijal ne može postojati iznad 10 ^{o} K, što očigledno ne odgovara gornjim rezultatima za tačke prelaza kod lantanida, gvoždja, kobalta i nikla. Prema tome za uredjenje sistema spi - nova ne mogu biti dovoljne dipol - dipolne interakcije i danas je prihvaćeno mišljenje da su sile interakcije izmedju spinova odgovorne za uredjenje rešetaka. Ove sile su čisto kvantnomeha - ničkog porekla i posledica su identičnosti elektrona zbog čega se ovi, prema Paulijevim principu isključenja, moraju prikazati antisimetričnim talasnim funkcijama. Zbog toga se u energiji interakcije dobija jedan dopunski član koji se naziva integral izmene. Ako se pretpostavi da elektroni medjusobno interaguju Kulonovim silama, energija izmene je od 100 do 1000 Bolcmanovih konstanti, što se slaže sa energijom izmene dobijenom eksperi - mentalno, merenjem tačke prelaza. .

Prema tome, magnet se posmatra kao sistem spinova koji izmedju sebe interaguju kvantnomehaničkim silama izmene. Na temperaturi od 0 ^{o} K svi spinovi su usmereni u istom pravcu koji se naziva osa kvantizacije magneta, dok pri povećanju temperature dolazi do otklanjanja spinova sa prvobitnog pravca.

Na osnovu gornjih razmatranja može se izvršiti podela feromagne- tnih materijala na fero, feri i antiferomagnetike.

Feromagnetici imaju prostu magnetnu rešetku tj. svaka magnetna ćelija sadrži po jedan spin. Na temperaturama nižim od Kirijeve svi spinovi su, u proseku, orijentisani u istom pravcu, te je rezultujući magnetni momenat znatan. U magnetnom polju, vektori magnetnog momenta i polja su kolinearni (sl. 1.)



Na Kirijevoj temperaturi nestaje spontane magnetizacije a susceptibilnost feromagnetika je odredjena Kiri-Vajsovim zakonom:

$$\chi = \frac{const}{T - T_c}$$

gde je T_c - Kirijeva temperatura.
Spontana magnetizacija za $T < T_c$ data je izrazom:

$$M(T) = const \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}$$

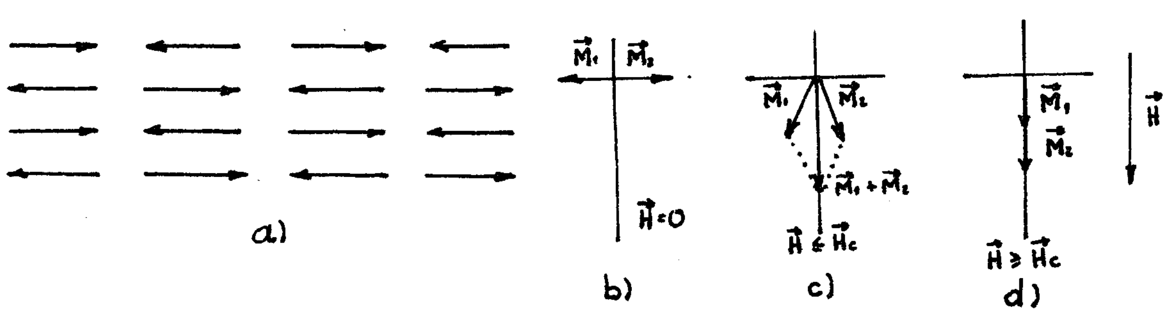
A pri $T \cong 0$:

$$M(T) = M_0 (1 - A_1 T^{3/2} - A_2 T^{5/2} - \dots)$$

gde su A_i - neke konstante a M_0 - magnetizacija zasićenja.

Antiferomagnetici

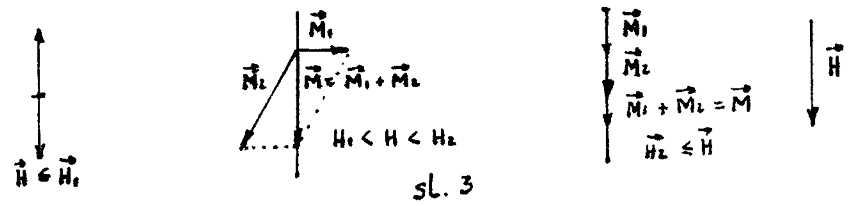
Ako magnetni kristal sadrži dve podrešetke, sa jednakim ali antiparalelnim spinovima, onda se takav sistem naziva anti - feromagnetik. Rezultujuća magnetizacija, bez prisustva magnetnog polja, je nula (sl.2.b), dok pri nekom polju, manjem od nekog kritičnog, rezultujuća magnetizacija je u pravcu polja (sl.2.c). Pri nekom kritičnom polju magnetizacija pod - rešetki je u pravcu polja(sl.2.d). Na temperaturama većim od Nelove (T_n) oni se ponašaju kao paramagnetici.



sl. 2

Ferimagnetici

Ako se kristal sastoji iz nekoliko magnetnih podrešetki, sa spinovima različitih veličina i orijentacije, onda je to ferimagnetik. Ponašanje ferimagnetika sa dve podrešetke, u magnetnom polju, prikazano je na slici tri.



sl. 3

Radi jednostavnosti, uzeli smo ferimagnetik sa dve podrešetke sa rezultujućim momentima M_1 i M_2 i kritičnim magnetnim poljima H_1 i H_2.
Zavisnost magnetne susceptibilnosti od temperature data je Kiri - Nelovim zakonom:

$$\chi^{-1} = \chi_0^{-1} + \frac{T}{C} - \frac{\Delta}{T - T_c}$$

gde su: χ_0, Δ i C neke konstante.
Ovim razmatranjem nisu iscrpljeni svi tipovi magnetnih struktura, već se mogu javiti još vrlo različiti slučajevi.

HAJZENBERGOV MODEL FEROMAGNETA

Ovaj model su predložili Hajzenberg i Frenkel 1928god. On se zasniva na činjenici da osnovnu ulogu u feromagnetizmu igra interakcija razmene medju elektronima ne popunjenih unutrašnjih ljusaka, dok se njihova interakcija sa valentnim elektronima zanemaruje. Posmatrajmo jedan niz čiji su atomi rasporedjeni na rastojanju a i neka sadrži N atoma. Radi eliminisanja efe - kta krajeva uvode se ciklični uslovi sa velikom periodom L = Na. Ne upuštajući se dublje u analizu ovog modela, pokazaćemo kako se može dobiti hamiltonijan ovog modela.

Sa $\vec{n}$ i $\vec{m}$ obeležimo vektore čvorova rešetke a sa $\hat{S}_{\vec{n}}$ i $\hat{S}_{\vec{m}}$ spinove u ovim čvorovima. Energija interakcije izmedju ova dva čvora mora biti proporcionalna skalarnom produktu ova dva spina.

$$\hat{H}_{\vec{n}\vec{m}} = -\frac{1}{2} I_{\vec{n}\vec{m}} \hat{S}_{\vec{n}} \hat{S}_{\vec{m}} \quad \ldots\ldots (I.1.1)$$

Faktor $I_{\vec{n}\vec{m}}$ je posledica sila izmene i naziva se integral izmene. Negativan znak je stavljen da bi energija osnovnog stanja bila negativna a faktor $\frac{1}{2}$ stavlja se zbog toga što spinovi na mestu $\vec{n}$ interaguju u smeru $\vec{m}$ silom iste veličine kao i spin na mestu $\vec{m}$ u pravcu $\vec{n}$. Bez faktora $\frac{1}{2}$ došlo bi do udvajanja energije. Zbog ove simetrije za integral izmene važi:

$$I_{\vec{n}\vec{m}} = I_{\vec{m}\vec{n}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (I.1.2)$$

Integrali izmene se mogu izračunati i na osnovu nalaženja talasnih funkcija elektrona u ne popunjenim ljuskama, ali rezultati dobijeni na ovaj način nisu zadovoljavajući zbog toga što su talasne funkcije ovih elektrona jako deformisane. Zbog toga se vrednosti integrala izmene u teoriji uzimaju kao fenomenološki parametri, reda veličine od 100 do 1000 Bolcmanovih konstanti. Rezultati eksperimenata pokazuju da integrali izmene opadaju eksponencionalno sa rastojanjem $|\vec{n} - \vec{m}|$, što znači da se aproksimacija prvih suseda može, u teoriji magnetizma, prihvatiti kao dobra.

U jednačini I.1.1 napisali smo energiju interakcije izmedju dva spina u dva čvora $\vec{n}$ i $\vec{m}$. Ako ovu jednačinu sumiramo po svim čvorovima kristala dobićemo hamiltonijan celog kristala. Prema tome:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} \hat{\vec{S}}_{\vec{n}} \hat{\vec{S}}_{\vec{m}} \quad \ldots \quad (I.1.3)$$

BLOHOVA APROKSIMACIJA

Kao što je pre rečeno, na temperaturi od 0 ^{o} K svi spinovi kod feromagnetika su usmereni duž ose kvantizacije magneta. Ako za osu kvantizacije izaberemo Z - osu, sve Z komponente spinova imaće maksimalnu vrednost. Pri povećanju temperature dolazi do otklanjanja Z projekcije od ove maksimalne vrednosti pri čemu Z projekcija može da uzme 2 S + 1 vrednost i to:

$$S, S-1, \ldots -S+1, -S \quad \ldots \quad (I.1.4)$$

Pri proučavanju feromagneta potrebno je tačno odrediti veličinu ovog otklanjanja u funkciji temperature ili nekih drugih veličina koje mogu da prouzrokuju ovo otklanjanje. Uvedimo još operatore S^{+} i S^{-} koji menjaju projekciju S^{z} obrascima:

$$S^{+} = S_{x} + i\, S_{y}$$
$$S^{-} = S_{x} - i\, S_{y} \quad \ldots\ldots \quad (I.1.5)$$

S^{+} povećava projekciju spina za jedinicu a S^{-} smanjuje Z projekciju za jedinicu. Može se pokazati da za operatore S^{+} i S^{-} važi sledeća komutaciona relacija.

$$[S^{+}_{\vec{n}}, S^{-}_{\vec{m}}] = 2\, S^{z}_{\vec{n}} \delta_{\vec{n}\vec{m}} \quad \ldots\ldots \quad (I.1.6)$$

Prilikom otklanjanja Z komponente od maksimalne vrednosti, mera tog otklanjanja je očigledno operator $S - S^{z}$ tako da će se u daljem radu hamiltonijan transformisati da bude izražen preko ovog operatora i S^{+} i S^{-} operatora. Iz formule I.1.6 vidi se da spinski operatori ne zadovoljavaju ni bozonske ni fermijonske komutacione relacije. Pomoću Blohovih aproksimacija moguće je sa spinskih operatora preći na bozonske operatore sledećim formulama:

$$S^{-}_{\vec{n}} \cong \sqrt{2S}\, B^{+}_{\vec{n}}$$
$$S^{+}_{\vec{n}} \cong \sqrt{2S}\, B_{\vec{n}}$$
$$S - S^{z}_{\vec{n}} \cong B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \quad \ldots\ldots \quad (I.1.7)$$

Pomoću ovih transformacija može se preći sa spinskih na bozonske operatore. Videli smo da je maksimalna vrednost Z projekcije S a minimalna -S. Operator $S - S^z$ može da uzme 2S vrednosti. Medjutim, bozonski okupacioni broj B^+B, koji je zamenio operator $S - S^z$, može da uzme beskonačno mnogo vrednosti, tj.

$$0, 1, 2, \ldots \infty$$

Prema tome Blohova aproksimacija je dobra dok je broj bozona manji ili najviše jednak 2S, jer za veći broj od 2S ne postoje odgovarajuća fizička stanja. Pošto se ekscitiranost upravo meri brojem bozona u feromagnetu, očigledno je, da se Blohova aproksimacija može primeniti samo na slabo ekscitirani sistem, tj. na sistem na niskim temperaturama, za koje okupacioni bozonski brojevi uzimaju najniže vrednosti: 0, 1,... do 2S Na višim temperaturama, kada je sistem jako ekscitiran, Blohova aproksimacija se ne može primeniti, jer bozonski okupacioni broj uzima vrednosti iznad 2S a to vodi u nefizička stanja. U daljem radu će mo pretpostaviti da je sistem slabo ekscitiran tj. posmatraćemo Hajzenbergov feromagnet na niskim temperaturama. Sem toga, Blohova aproksimacija nas obavezuje da odbacimo u računu sve kvadratne članove po B^+B.

DAJSONOV REZULTAT ZA MAGNETIZACIJU

Spontana magnetizacija M(T) u linearnoj aproksimaciji Blohove teorije spinskih talasa data je formulom:

$$\frac{M(T)}{M(0)} = S - \zeta\left(\tfrac{3}{2}\right)\Theta^{3/2} \quad \ldots \quad (I.2.1)$$

gde je $\zeta(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}$ Rimanova ceta funkcija, S - spin pojedinih atoma a $\Theta = \frac{3aT}{10JS\mu_0^2}$ bezdimenziona temperatura. Formula I.2.1 je dobijena uz pretpostavku da ne postji interagovanje izmedju spinskih talasa i da je energija spinskih talasa obrnuto propo - rcionalna kvadratu talasne dužine. Do teorijskog odstupanja može doći iz tri razloga:

a) odstupanje energetskog spektra od zakona λ^{-2}

b) postojanja dinamičke interakcije medju spinskim talasima

c) kinematičke interakcije izmedju spinskih talasa uslovljene činjenicom da pojedini atomi ne mogu da nose više od dva S jedinica izvrnutog spina istovremeno.

Efekat (a) se može jednostavno izračunati polazeći od izraza za slobodnu energiju:

$$A = \left(\frac{E_0}{N}\right) - (\beta N)^{-1} \sum_{q} \sum_{\lambda_1 \ldots \lambda_q} \sum_{p} \sum_{n_1, n_2 \ldots} \left[\prod_i (n_i!)^{-1} \prod_i^{i} \Gamma_i (p\vec{\lambda}\cdot\vec{\lambda})\right] \quad \ldots \quad (I.2.2)$$

koji pretstavlja virijalni razvoj slobodne energije po svim dinamičkim interakcijama. Virijalni koeficijenti su definisani obrascem:

$$A = \left(\frac{E_0}{N}\right) - \Theta^{3/2} kT \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\beta L} \quad \ldots\ldots \quad (I.2.3)$$

Glavni članovi u virijalnom razvoju su oni sa $n_1 = q_1$ i $n_i = 0$ za $i > 1$. Suma ovih članova je veličina:

$$A_B = (\beta N)^{-1} \sum_{\lambda} \log\{1 - \exp[\beta(\mu + \varepsilon_\lambda)]\} \quad \ldots\ldots \quad (I.2.4)$$

Prethodna formula pretstavlja slobodnu energiju članova bez interakcije. Na niskim temperaturama, doprinos A_B dolazi samo od spinskih talasa sa dugom talasnom dužinom, za koje važi kvadratna aproksimacija izmedju energije i impulsa:

$$\left(\frac{\varepsilon_\lambda}{kT}\right) = \frac{\delta^2 V^{2/3}}{4\bar{a}\Theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (I.2.5)$$

Zamenom prethodne formule u formulu I.2.4, posle kraćeg računa, dobija se integral koji daje slobodnu energiju proprcionalnu T. Ako razvijemo razliku $\mathcal{E}_\lambda$ i kvadratne aproksimacije po stepenima od $\delta\lambda$ i zamenimo u formulu I.2.4 dobijemo razvoj A_B po stepenima od T. Viši članovi u razvoju su popravke na Blohovu formulu nastale zbog diskretnosti rešetke.

Za prva tri člana razvoja dobijamo:

$$A_B = -\kappa T\left[Z_{5/2}(\beta L)\Theta^{3/2} + \frac{3}{4}\bar{\mu}\nu Z_{7/2}(\beta L)\Theta^{5/2} + \omega\bar{\mu}^2\nu^2 Z_{9/2}(\beta L)\Theta^{7/2} + O(\Theta^{9/2})\right] \quad \ldots (I.2.6)$$

gde je:

$$Z_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{-n} e^{-qx} \quad \ldots\ldots (I.2.7)$$

a ω je brojni koeficijent koji zavisi od tipa rešetke.

Pošto je magnetizacija definisana sa:

$$M = -\left(\frac{\partial A}{\partial H}\right) = -\left(\frac{m}{S}\right)\left(\frac{\partial A}{\partial L}\right) \quad \ldots\ldots (I.2.8)$$

Pri nultom magnetnom polju dobijamo popravku na Blohovu formulu usled diskretnosti rešetke:

$$M_B = \left(\frac{m}{S}\right)\left[S - \zeta(3/2)\Theta^{3/2} - \frac{3}{4}\bar{\mu}\nu\,\zeta(5/2)\Theta^{5/2} - \omega\bar{\mu}\nu^2\zeta(7/2) + O(\Theta)^{9/2}\right] \quad \ldots (I.2.9)$$

gde je: $\zeta(n) = Z_n(0)$

Doprinos slobodnoj energiji od dinamičke interakcije može se naći iz dinamičke korekcije za slobodnu energiju:

$$A_D = -(\beta N)^{-1}\sum_f \sum_{\vec{\lambda}_1\ldots\vec{\lambda}_f}\left[\prod_{s=1}^{f} Y(\vec{\lambda}_s)\right]\sum_{\alpha}\sum_{n_2 n_3\ldots}\left[\prod_i (n_i!)^{-1}\prod_i \Gamma_i(Q,\vec{\lambda}\ldots\vec{\lambda})\right]$$

gde je:

$$Y(\vec{\lambda}) = \sum_{p=0}^{\infty} \exp\left[-\beta p(L+\mathcal{E}_\lambda)\right] = \left\{1 - \exp\left[-\beta(L+\mathcal{E}_\lambda)\right]\right\}^{-1}$$

Posle kraćeg računa doprinos magnetizaciji od dinamičke interakcije svodi se na izraz:

$$M_{LD} = -\left(\frac{m}{s}\right)\left[\frac{2\bar{u}\nu Q}{2S}\right]\zeta\left(\frac{5}{2}\right)\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\Theta^{4}$$

Doprinos magnetizaciji od kinematičke interakcije izmedju spinskih talasa, na temperaturama bliskim Kirijevoj tački, je znatan, ali za temperature bliske apsolutnoj nuli ovaj doprinos se može zanemariti.

Formula za spontanu magnetizaciju dobija konačno oblik:

$$M(T) = \left(\frac{m}{S}\right)\left[S - a_0\Theta^{3/2} - a_1\Theta^{5/2} - a_2\Theta^{7/2} - a_3 S'\Theta^{4} + O(\Theta)^{9/2}\right]$$

gde je:

$$a_0 = \zeta(3/2)$$

$$a_1 = \zeta(5/2)\,c_1$$

$$a_2 = \zeta(7/2)\,c_2$$

$$a_3 = 2\zeta(3/2)\,\zeta(5/2)\,c_0$$

FONONI U KRISTALNOJ REŠETKI

Posmatrajmo kristal čija elementarna ćelija sadrži 6 atoma i radi eliminisanja efekta krajeva uvedimo ciklične uslove sa velikim periodama. Ravnotežni položaji atoma odredjeni su vektorom rešetke $\vec{n}=\sum_{i=1}^{3} n_i a_i$ koji odredjuje položaj elementarne ćelije i brojem α koji odredjuje položaj atoma u elementarnoj ćeliji. Ako sa $u_{\vec{n}\alpha}^{x}$ obeležimo x - tu komponentu pomeranja atoma, energiju možemo napisati u klasičnom obliku kao:

$$H_{KL}=\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\alpha x}\left\{M_\alpha\left(\dot{u}_{\vec{n}\alpha}^{x}\right)^2+\sum_{n'\alpha' x'}\lambda_{\alpha\alpha'}^{xx'}(\vec{n}-\vec{n}')u_{\vec{n}\alpha}^{x}u_{\vec{n}'\alpha'}^{x'}\right\}\ldots(I.2.1a)$$

Pretpostavili smo da je pomeranje $u_{\vec{n}}^{x}$ mala vrednost u odnosu na konstantu rešerke pa se u razvoju mogu odbaciti kvadratni i članovi višeg reda. M_α je masa atoma čije je mesto odredjeno brojem α a $\lambda_{\alpha\alpha'}^{xx'}$ su koeficijenti koji zavise od relativne razlike $\vec{n}-\vec{n}'$. Klasične jednačine kretanja možemo napisati u obliku:

$$M_\alpha\ddot{u}_{\vec{n}\alpha}^{x}+\sum_{n'\alpha' x'}\lambda_{\alpha\alpha'}(\vec{n}-\vec{n}')u_{\vec{n}'\alpha'}^{x'}=0\ldots\ldots(I.2.2a)$$

i potražimo njihovo rešenje u obliku:

$$\vec{u}_{\vec{n}\alpha}(\vec{q})=\vec{e}_\alpha(\vec{q})e^{i\vec{q}\vec{n}-i\omega_q t}\ldots\ldots\ldots(I.2.3a)$$

a zbog cikličnih uslova mora biti zadovoljeno

$$\vec{q}=2\pi\sum_{i=1}^{3}\frac{\nu_i}{N_i}\vec{b}_i\;;\;-\frac{N_i}{2}<\nu_i\leq\frac{N_i}{2}\ldots(I.2.4a)$$

gde su $\vec{b}_i$ vektori recipročne rešetke. $\vec{q}$ je talasni vektor a $\vec{e}(\vec{q})$ njegov jedinični ort. Zamenom I.2.3a u I.2.1a dobija se sistem jednačina:

$$\sum_{x'\alpha'}L_{\alpha\alpha'}^{xx'}(\vec{q})e_{\alpha'}^{x'}-\omega_q^2M_\alpha e_\alpha^{x}=0\ldots(I.2.5a)$$

БИБЛИОТЕКА Природно-математичког факултета НОВИ САД

gde koeficijenti:

$$L^{xx'}_{\alpha\alpha'}(\vec{q}) \equiv \sum_{\vec{n}'} \lambda^{xx'}_{\alpha\alpha'}(\vec{n}-\vec{n}')e^{iq(\vec{n}-\vec{n}')} \quad \ldots\ldots\ldots (I.1.6.a)$$

obrazuju ermitsku matricu.
Kvadrate sopstvenih frekvencija malih oscilacija možemo dobiti iz uslova rešivosti ovog sistema jednačina i oni se svode na jednačinu 3σ reda.

$$L^{xx'}_{\alpha\alpha'}(\vec{q}) - \omega^2_q M_\alpha \delta_{xx'} \delta_{\alpha\alpha'} = 0 \quad \ldots (I.2.7a)$$

Sva rešenja ovog sistema jednačine su realna i pozitivna, data u funkciji $\vec{q}$. Tri frekvencije teže nuli za $\vec{q} = 0$ i to su tzv. akustičke grane a ostale $3(\sigma - 1)$ su različite od nule kad $\vec{q}$ teži nuli i to su optičke grane. Za prostu kubnu strukturu postoje samo akustičke grane. Vektore $\vec{e}_{\alpha i}$ zgodno je normirati relacijom:

$$\sum_{\alpha=1}^{\sigma} \vec{e}_{\alpha j} \vec{e}_{\alpha l} = \delta_{jl}$$

Elementarno pomeranje atoma α, u elementarnoj ćeliji $\vec{n}$, koji odgovara grani j i talasnom vektoru $\vec{q}$, može se napisati kao:

$$\vec{u}_{\vec{n}\alpha}(\vec{q}) = \vec{e}_{\alpha j}(\vec{q})\, e^{i[\vec{q}\vec{n} - \omega_j(\vec{q})t]} \quad \ldots\ldots (I.2.9.a)$$

a neko proizvoljno pomeranje može se naći kao superpozicija svih pomeranja izraženih jednačinom I.2.9a po svim granama oscilacija (j) i svim talasnim vektorima ($\vec{q}$):

$$\vec{u}_{\vec{n}\alpha} = \sum_{j,\vec{q}} \sqrt{\frac{\hbar}{2M_\alpha N \omega_{\vec{q}j}}}\, \vec{e}_{\alpha j}(\vec{q}) \left\{ a_{\vec{q}j} e^{iqn} + a^+_{qj} e^{-iqn} \right\} \ldots (I.2.10a)$$

Faktor normiranja je odabran tako da se naš hamiltonijan može svesti na sumu hamiltonijana $3\sigma N$ nezavisnih oscilacija Kada u jednačinu I.2.1a stavimo izraz $I.2.10a$ i znajući još da je:

$$\sum_{\vec{n}} e^{i\vec{n}(\vec{q}-\vec{q}')} = N\delta_{qq'}$$

dobijamo izraz za hamiltonijan u klasičnom obliku:

$$H_{KL} = \frac{1}{2} \sum_{j\vec{q}} \hbar\omega_j(\vec{q}) \left\{ a_{\vec{q}j} a^*_{\vec{q}j} + a^*_{\vec{q}j} a_{\vec{q}j} \right\} \ldots (I.2.11a)$$

Ako sa kompleksne amplitude predjemo na Boze operatore dobija se kvantni hamiltonijan u reprezentaciji druge kvantizacije $(\hat{H})$

$$\hat{H} = \sum_{\vec{q}j} \hbar \omega_j(\vec{q}) \left\{ \hat{a}^+_{\vec{q}j} \hat{a}_{\vec{q}j} + \frac{1}{2} \right\} \quad \ldots \quad (I.2.13a)$$

Talasna funkcija osnovnog stanja obeležava se sa a talasna funkcija sa jednim fononom sa:

$$|1_{\vec{q}j}\rangle = a^+_{\vec{q}j} |0\rangle$$

Talasna funkcija stanja sa n fonona data je izrazu:

$$|n_{\vec{q}j}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{q}j}!}} (a^+_{\vec{q}j})^n |0\rangle \quad \ldots \ldots \quad (I.2.15a)$$

Kao što se iz jednačine I.2.15a vidi talasna funkcija stanja sa n jednakih fonona zavisi samo od broja fonona i zato je invarijantna u odnosu na permutacije čestica tj. fononi su Boze operatori, pa se na njih može primeniti Boze - Ajnštajnova statistika, po kojoj je srednji broj fonona sa talasnim vektorom $\vec{q}$ u nekom kvantnom stanju dat izrazom:

$$\bar{n}_{\vec{q}} = \frac{1}{e^{\frac{\mathcal{E}(\vec{q})}{\Theta}} - 1}$$

$\mathcal{E}(\vec{q})$ je energija fonona i ona iznosi $\mathcal{E}(\vec{q}) = \hbar \omega_j(\vec{q})$ pa zamenom u gornju jednačinu dobijamo:

$$\bar{n}_{\vec{q}} = \frac{1}{e^{\frac{\hbar \omega_j(\vec{q})}{\Theta}} - 1}$$

Za primitivnu ćeliju, koja sadrži samo akustične grane, oscilacije se u slučaju izotropnog kristala karakterišu sa tri jedinična normalna vektora polarizacije. Pomeranje atoma u n - toj elementarnoj ćeliji za primitivnu ćeliju dato je obrascem I.2.10a a operator pomeranja dobićemo ako sa kompleksne amplitude predjemo na Boze operatore. Tada se dobijaju dva člana od kojih je jedan odgovoran za kreaciju ($\hat{u}^+_{\vec{n}}$) a drugi za anihilaciju ($u^-_{\vec{n}}$) fonona:

$$\hat{u}_{\vec{n}}^{+} = \sqrt{\frac{\hbar}{2MN}} \sum_{\vec{q}j} \frac{\vec{e}_j(\vec{q})}{\omega_j(\vec{q})} \hat{a}_{\vec{q}j}^{+} e^{-i\vec{q}\vec{n}}$$

i

$$\hat{u}_{\vec{n}}^{-} = \sqrt{\frac{\hbar}{2MN}} \sum_{\vec{q}j} \frac{\vec{e}_j(\vec{q})}{\omega_j(\vec{q})} \hat{a}_{\vec{q}j} e^{i\vec{q}\vec{n}}$$

Ukupni pomak će biti:

$$\hat{u}_{\vec{n}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2MN}} \sum_{\vec{q}j} \frac{\vec{e}_j(\vec{q})}{\omega_j(\vec{q})} \left\{ \hat{a}_{\vec{q}j} e^{i\vec{q}\vec{n}} + \hat{a}_{\vec{q}j}^{+} e^{-i\vec{q}\vec{n}} \right\}$$

HAMILTONIJAN SPIN - FONON INTERAKCIJE

Spinski hamiltonijan za Hajzenbergov izotropni feromagnetik , izvan magnetnog polja, (formula I.1.3) izveden je pod pretpostavkom da atomi u rešetki miruju. Medjutim na temperaturama većim od apsolutne nule, atomi vrše toplorne oscilacije koje interaguju sa spinom a menja se i interakcija izmene. Sada se kompletni hamiltonijan može napisati u obliku

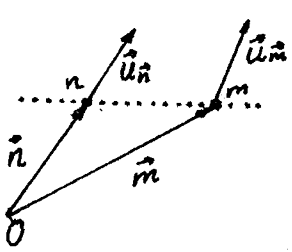
$$\hat{H} = \hat{H}_s + \hat{H}_f + \hat{H}_{sf} \qquad \ldots\ldots \quad (I.3.1)$$

$\hat{H}_s$ - je hamiltonijan spinske interakcije (I.1.3)

$\hat{H}_f$ - je hamiltonijan fononskog podsistema dat formulom (I.2.13a) najinteresantniji deo predstavlja izraz $\hat{H}_{sf}$ i on je hamiltonijan spin - fononske interakcije. Napišimo prvo izraz za čisto spinsku interakciju (I.1.3):

$$\hat{H}_s = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} \hat{S}_{\vec{n}} \hat{S}_{\vec{m}}$$

i pretpostavimo da se pod uticajem toplotnih kvanata atom odredjen vektorom $\vec{n}$ pomerio za $\vec{u}_{\vec{n}}$ a atom odredjen vektorom $\vec{m}$ za $\vec{u}_m$ (sl. 4) tj.



sl.4

$$\vec{n} \Rightarrow \vec{n} + \vec{u}_{\vec{n}}$$
$$\vec{m} \Rightarrow \vec{m} + \vec{u}_{\vec{m}}$$
$$I_{\vec{n}\vec{m}} = I_{\vec{n}-\vec{m}} \Rightarrow I\left[(\vec{n}-\vec{m}) + (\vec{u}_n - u_m)\right]$$

Uz pretpostavku da su oscilacije male tj. $|\vec{u}_{\vec{n}}| < |\vec{n}|$ i $|\vec{u}_{\vec{m}}| < |\vec{m}|$ možemo u razvoju $I_{\vec{n}\vec{m}}$ po atomskim pomacima zanemariti kvadrate i više članove po pomacima, pa dobijamo:

$$I_{n-m} \equiv I_{m-n} \equiv I_{\vec{n}\vec{m}} \quad ; \quad \nabla_{\vec{n}-\vec{m}} = -\nabla_{\vec{m}-\vec{n}}$$
$$I\left[(\vec{n}-\vec{m})+(\vec{U}_{\vec{n}}-\vec{U}_{\vec{m}})\right] = I_{\vec{n}-\vec{m}} + (\vec{U}_{n}-\vec{U}_{\vec{m}})\nabla_{\vec{n}-\vec{m}} I_{\vec{n}-m}$$

Sada se izraz I.3.1 svodi na:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}' I_{\vec{n}\vec{m}}\hat{\vec{S}}_{\vec{n}}\hat{\vec{S}}_{\vec{m}} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}'\nabla_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}}\hat{S}_{\vec{n}}\hat{S}_{\vec{m}}(\vec{U}_{\vec{n}}-\vec{U}_{\vec{m}}) +$$
$$+\sum_{q j}(a^{+}_{\vec{q}j}a_{\vec{q}j}+\frac{1}{2})\hbar\omega_{\vec{q}j}$$

Kao što je u odeljku Blohove aproksimacije rečeno ovaj izraz treba izraziti preko $\hat{S}^{+}$ i $\hat{S}^{-}$ i $S - \hat{S}^{z}$ operatora. U tom cilju rastvimo proizvode $\hat{\vec{S}}_{\vec{n}}\hat{\vec{S}}_{\vec{m}}$ na sledeći način:

$$\hat{\vec{S}}_{\vec{n}}\hat{\vec{S}}_{\vec{m}} = \hat{S}^{x}_{\vec{n}}\hat{S}^{x}_{\vec{m}} + \hat{S}^{y}_{\vec{n}}\hat{S}^{y}_{\vec{m}} + \hat{S}^{z}_{\vec{n}}\hat{S}^{z}_{\vec{m}}$$

i iskoristimo jednočine:

$$S^{x}_{\vec{n}} = \frac{S^{+}_{\vec{n}}+S^{-}_{\vec{n}}}{2} \quad i \quad S^{y}_{n} = \frac{S^{+}_{n}-S^{-}_{n}}{2i}$$

Posle kraćeg računa, pomoću elementarnih transformacija, uzimajući još u obzir da je:

$$\sum_{\vec{n}\vec{m}}' I_{\vec{n}-\vec{m}} = \sum_{\vec{n},\vec{l}} I_{\vec{l}} = \sum_{l} I_{l}\sum_{n} 1 = N\sum_{l} I_{l} = N J_{0}$$

dobija se izraz za kompletan hamiltonijan:

$$\hat{H} = \hat{H}_{0} + \hat{H}_{S} + \hat{H}_{P} + \hat{H}_{S,P}$$

gde je:

$$\hat{H}_{0} = -\frac{1}{2}NS^{2}J_{0} + \frac{1}{2}\sum_{qj}\hbar\omega_{qj}$$
$$\hat{H}_{S} = SJ_{0}\sum_{\vec{n}}(S-S^{z}_{\vec{n}}) - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}' I_{\vec{n}\vec{m}}S^{-}_{\vec{n}}S^{+}_{\vec{m}} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}' I_{\vec{n}\vec{m}}(S-S^{z}_{\vec{n}})(S-S^{z}_{\vec{m}})$$
$$\hat{H}_{P} = -\frac{S^{2}}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}'\nabla_{nm} I_{\vec{n}\vec{m}}(\hat{\vec{U}}_{\vec{n}}-\hat{\vec{U}}_{\vec{m}}) + \sum_{\vec{q}j} a^{+}_{\vec{q}j}a_{\vec{q}j}\hbar\omega_{\vec{q}j}$$
$$\hat{H}_{SP} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}'\nabla_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}}(\hat{\vec{U}}_{\vec{n}}-\hat{\vec{U}}_{\vec{m}})\left[S^{-}_{\vec{n}}S^{+}_{\vec{m}} - 2S(S-S^{z}_{\vec{n}}) + (S-S^{z}_{\vec{n}})(S-S^{z}_{\vec{m}})\right] \quad \text{..(I.3.2)}$$

Član $\hat{H}_{sf}$ pretstavlja hamiltonijan spin - fononske interakcije na kojem će mo se dalje zadržati. Da bi ovaj član dalje razvili koristićemo Blohove aproksimacije (I.1.7). Uvrštavanjem ovih formula u $\hat{H}_{sf}$ dobija se:

$$\hat{H}_{s,f} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} V_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} (\hat{\vec{U}}_{\vec{n}} - \hat{\vec{U}}_{\vec{m}}) [2S B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} - S(B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} + B^+_{\vec{m}} B_{\vec{m}}) + S^2 + B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B^+_{\vec{m}} B_{\vec{m}}] \quad (I.3.3)$$

Zadnji član u gornjem izrazu će mo odbaciti, jer nas Blohova aproksimacija na to obavezuje, pa naš gornji izraz dobija oblik:

$$\hat{H}_{s,f} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}' V_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} (\hat{\vec{U}}_{\vec{n}} - \hat{\vec{U}}_{\vec{m}}) \times [2S B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} - S(B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} + B^+_{\vec{m}} B_{\vec{m}}) + S^2] \dots (I.3.4)$$

Sada treba preći u impulsni prostor, transformišući hamiltonijan, pomoću Furije transformacija:

$$I_{\vec{n}\vec{m}} = \frac{1}{N}\sum_{k_2} I_{\vec{k}_2} e^{i\vec{k}_2(\vec{n}-\vec{m})}$$

$$B^+_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k_3} B^+_{\vec{k}_3} e^{-i\vec{k}_3\vec{n}}$$

$$B_{\vec{n}} = \frac{1}{N}\sum_{k_1} B_{\vec{k}_1} e^{i\vec{k}_1\vec{n}}$$

$$\hat{\vec{U}}_n = \sum_{\vec{q}j} \sqrt{\frac{\hbar}{2MN\omega_{\vec{q}j}}}\, \vec{e}_{\vec{q}j} (a_{\vec{q}j} + a^+_{-\vec{q}j}) e^{i\vec{q}\vec{n}} \dots (I.3.5)$$

Uzevši u obzir da zbog boks kvantizacije sledi:

$$\sum_{k} e^{i\vec{k}(\vec{f}-\vec{g})} = N\delta_{fg}$$

Radi očiglednijeg transformisanja, transformisaćemo član po član spin - fononskog hamiltonijana:

$$\hat{H}_{s,f} = \hat{H}^{(1)}_{s,f} + \hat{H}^{(2)}_{s,f} + H^{(3)}_{s,f} + H^{(4)}_{s,f}$$

Posle Furije transformacija prvi član se svodi na izraz:

$$\hat{H}^{(1)}_{S,F} = -\sqrt{\frac{\hbar}{2MN}}\, Si \sum_{\vec{k}_2\vec{k}_3 j} \frac{\vec{k}_1 J_{\vec{k}_1} \vec{e}_j(k_3-k_2)}{\sqrt{\omega_j(k_3-k_4)}} B^+_{\vec{k}_3} B_{\vec{k}_2} \times$$

$$\times \left(a_{k_3-k_2,j} + a^+_{k_2-k_3,j}\right)$$

Stavljajući još $k_3 - k_2 = k$; $k_2 = -k - q$ dobija se:

$$\hat{H}^{(1)}_{S,F} = -\sqrt{\frac{\hbar}{2MN}}\, Si \sum_{\vec{k}\vec{q}j} (\vec{q}-\vec{k})\, \vec{e}_j(\vec{k}) \frac{J_{\vec{q}-\vec{k}}}{\sqrt{\omega_j(\vec{k})}} B^+_{\vec{q}} B_{\vec{q}-\vec{k}} \times$$

$$\times \left(a_{\vec{k}j} + a^+_{-\vec{k}j}\right)$$

Postupajući na isti način sa $\hat{H}^{(2)}_{SF}$ i $\hat{H}^{(3)}_{S,F}$, dok izraz $\hat{H}^{(4)}_{S,F}$ pri tim transformacijama, postaje jednak nuli, za $\hat{H}^{(2)}_{S,F}$ se dobija:

$$\hat{H}^{(2)}_{SF} = -\frac{Si}{2} \sum_{\vec{k}\vec{q}} \sqrt{\frac{\hbar}{2MN\omega_{\vec{k}j}}}\, \vec{k} J_{\vec{k}}\, \vec{e}_j(\vec{k}) B^+_{\vec{q}} B_{\vec{q}-\vec{k}} \left(a_{\vec{k}j} + a^+_{-\vec{k}j}\right)$$

gde je još stavljeno $k_3 = q$ i $k_2 = k$.

Na sličan način posle Furije transformacija $H^{(3)}_{S,F}$ postaje:

$$\hat{H}^{(3)}_{S,F} = -\frac{Si}{2} \sum_{\vec{k},\vec{q},j} \sqrt{\frac{\hbar}{2MN\omega_{kj}}}\, \vec{k} J_{\vec{k}}\, \vec{e}_j(\vec{k}) \times$$

$$\times B^+_{\vec{q}} B_{\vec{q}-\vec{k}} \left(a_{\vec{k}j} + a^+_{-\vec{k}j}\right)$$

Sada je hamiltonijan spin - fonon interakcije u impulsnom prostoru dat izrazom:

$$\hat{H}_{S,F} = -Si \sum_{\vec{k}\vec{q}j} \sqrt{\frac{\hbar}{2MN\omega_{\vec{k}j}}} \Big\{ k J_k - q J_q +$$

$$-(k-q) J_{k-q} \Big\} B^+_{\vec{q}} B_{\vec{q}-\vec{k}}\, \vec{e}_{kj} \left(a_{\vec{k}j} + a^+_{-\vec{k}j}\right)$$

II G L A V A

METOD FUNKCIJE GRINA

Da bi smo dobili zakon disperzije za magnone koristićemo se metodom dvovremenskih temperaturskih funkcija Grina.
Za dva operatora A (t) i B (t) gde je t vreme, dvovremenska temperaturska funkcija Grina se definiše na sledeći način:

$$\langle\langle A(t)/B(t')\rangle\rangle = \Theta(t-t')\langle[A(t),B(t')]\rangle \quad \ldots\ldots (II.1.1)$$

gde je $\Theta(t-t')$ Hevisajdova funkcija definisana obrascem:

$$\Theta(t-t') = \begin{cases} 1 \text{ za } t>t' \\ 0 \text{ za } t<t' \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (II.1.2)$$

Simbol $\langle\ldots\rangle$ označava statističku srednju vrednost po Gipsovom ansamblu:

$$\langle\alpha\rangle = \frac{S_p \alpha e^{-\beta H}}{S_p e^{-\beta H}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (II.1.3)$$

gde je H - hamiltonijan sistema a $\beta = \frac{1}{k_B T}$
Kada jednačinu II.1.1 diferenciramo po vremenu dobija se:

$$\frac{d}{dt}\langle\langle A(t)/B(t')\rangle\rangle = \delta(t-t')\langle[A(t),B(t')]\rangle + \\ + \Theta(t-t')\langle[\frac{dA(t)}{dt}, B(t')]\rangle \ldots (II.1.4)$$

gde je na osnovu defenicije δ funkcije stavljeno:

$$\delta(t-t') = \frac{d}{dt}\Theta(t-t')$$

Prema Hajzenbergovoj jednačini kretanja:

$$i\frac{dA(t)}{dt} = [A,H]_t \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (II.1.5)$$

možemo formulu II.4.4pisati na sledeći način:

$$i\frac{d}{dt}\langle\langle A(t)/B(t')\rangle\rangle = i\delta(t-t')\langle[A(t),B(t')]\rangle + \\ + \Theta(t-t')\langle[[A,H]_t, B(t')]\rangle$$

Po definiciji funkcije Grina II.1.1 izraz $\Theta(t-t')\langle[A,H],B\rangle$

predstavlja neku novu funkciju Grina: $i\langle\langle [A,H]_t | B(t')\rangle\rangle$
pa možemo pisati:

$$i\frac{d}{dt}\langle\langle A(t)|B(t')\rangle\rangle = i\delta(t-t')\langle[A(t),B(t')]\rangle + \\ +\langle\langle [A,H]_t | B(t)\rangle\rangle \ldots\ldots (II.1.6)$$

Kao što se vidi funkcija Grina $\langle\langle A|B\rangle\rangle$ može se izraziti preko neke nove funkcije Grina $\langle\langle [A,H]_t | B\rangle\rangle$, a ovu dalje preko neke nove itd. Na taj način, za funkciju Grina dobija se beskonačan lanac jednačina. Ovaj lanac se može završiti pomoću neke aproksimacije. Naprimer, može se neka viša funkcija Grina izraziti preko nižih funkcija Grina. Tada se lanac funkcija Grina prekida i može se rešiti po $\langle\langle A|B\rangle\rangle$

Jednačina II.1.6 može se napisati u energetskom obliku u Furije likovima Grinovih funkcija, u transformaciji vreme- energija. Uzmimo:

$$\langle\langle A(t)|B(t')\rangle\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dE\, \langle\langle A|B\rangle\rangle_E\, e^{-iE(t-t')}$$

$$\langle\langle [A,H]_t | B(t')\rangle\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dE\, \langle\langle [A,H]|B\rangle\rangle_E\, e^{-iE(t-t')}$$

i na osnovu definicije δ funkcije:

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} dE\, e^{-iE(t-t')}$$

možemo, zamenom u II.1.6, posle oslobadjanja od integrala po energiji, dobiti sledeći izraz:

$$E\langle\langle A|B\rangle\rangle_E = \frac{i}{2\pi}\langle[A,B]\rangle + \langle\langle [A,H]|B\rangle\rangle \ldots\ldots (II.1.7)$$

Ova jednačina služi, kao osnovna jednačina, za traženje funkcije Grina. Produkt operatora A i B u homogenoj i izotropnoj sredini zavisiće od razlike koordinata jer operatori A i B zavise od koordinata. Na osnovu toga u jednačini II.1.7 mogu se izvršiti Furije transformacije prostor - impuls:

$$\langle\langle A(\vec{r})|B(\vec{r}')\rangle\rangle = \int d^3\vec{k}\, \langle\langle A(\vec{k})|B(\vec{k})\rangle\rangle_E\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}$$

$$\langle\langle [A,H]_{\vec{r}} | B(\vec{r}')\rangle\rangle_E = \int d^3\vec{k}\, \langle\langle [A,H]_{\vec{k}} | B(\vec{k})\rangle\rangle_E\, e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}$$

$$\langle[A,B]\rangle_{\vec{r}-\vec{r}'} = d^3\vec{k}\, \langle[A,B]\rangle_k\, e^{-i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}$$

Posle Furije transformacije i oslobadjanja od integrala po $\vec{k}$ za izraz II.1.7 dobija se:

$$E\langle\langle A(\vec{k})|B(\vec{k})\rangle\rangle_E = \frac{i}{2\pi}\langle[A,B]\rangle_{\vec{k}} + \langle\langle[A,H]_{\vec{k}}|B(\vec{k})\rangle\rangle_E \quad \ldots (II.1.8)$$

Poznato je da pol Grinove funkcije $\langle\langle A(\vec{k})|B(\vec{k})\rangle\rangle_E$ odredjuje energiju elementarnih ekscitacija i njihovo vreme života. Energija elementarnih ekscitacija je apscisa pola Grinove funkcije u kompleksnoj E ravni, dok je vreme života ekscitacija jednako recipročnoj vrednosti ordinate pola Grinove funkcije. Sem toga, spektralna intezivnost Grinove funkcije definiše se na sledeći način:

$$J(E,\vec{k}) = \frac{1}{e^{\frac{E}{\Theta}}-1}\left[G(E+i\varepsilon)-G(E-i\varepsilon)\right] =$$

$$= \frac{\langle[A,B]_{\vec{k}}\rangle}{e^{\frac{E}{\Theta}}-1}\,\delta\left(E-E(\vec{k})\right) \quad \ldots (II.1.9)$$

gde je $E(\vec{k})$ realni deo Grinove funkcije. Pomoću gornje jednačine može se naći srednja vrednost operatora BA na sledeći način:

$$\langle B(\vec{k})\,A(\vec{k})\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} J(E,\vec{k})\,dE = \frac{\langle[A,B]_{\vec{k}}\rangle}{e^{\frac{E}{\Theta}}-1} \quad \ldots (II.1.10)$$

Iz predhodno izloženog, vidi se da poznavanje Grinove funkcije omogućuje nalaženje energije elementarnih ekscitacija u sistemu, vremena njihovog života, a na osnovu II.1.10 i populacionog broja elementarnih ekscitacija kao funkcije temperature. Ovo znači, da ne moramo poznavati statistiku elementarnih eksitacija jer nalaženje funkcije Grina rešava taj problem.

ZAKON DISPERZIJE ZA MAGNONE BEZ PRISUSTVA FONONA

Elementarna ekscitacija u feromagnetiku može se slikovito prikazati na sledeći način. Usled povećanja temperature ili zbog nekog spoljašnjeg mehaničkog uzroka dolazi do promene Z - komponente jednog od spinova u nizu, gde su,pre toga, bili svi paralelni. Zbog sila izmene, ekscitacija ovog spina prenosi se na sledeći u nizu, sa ovog na sledeći itako dalje. Posle izvesnog vremena svi spinovi u skupu otklone svoju Z projekciju od maksimalne vrednosti. Takvi skupovi " zaljuljanih" spinova u feromagnetiku nazivaju se spinski talasi ili magnoni. Energija ovih talasa zavisi od njihovog impulsa (kvazi impulsa rešetke) i ta zavisnost naziva se zakon disperzije. U Blohovoj aproksimaciji,ovaj zakon dat je izrazom:

$$E_{\vec{k}}^{(0)} = S(J_0 - J_{\vec{k}}) \quad \ldots\ldots\ldots (II.2.1)$$

gde je:

$$J_0 = \sum_{\vec{n}} I_{\vec{n}\vec{m}} \quad , \quad J_{\vec{k}} = \sum_{\vec{n},\vec{m}}{}' I_{\vec{n}\vec{m}}\, e^{i\vec{k}(\vec{n}-\vec{m})} \quad \ldots (II.2.2)$$

Zakon disperzije II.2.1 dobijen je uz predpostavku da spinski talasi ne interaguju izmedju sebe. Mi ćemo uzeti u obzir ove interakcije i naći popravku na formulu II.2.1.
Pošto vektorski karakter veličina,koje figurišu u daljem računu, nije bitan, radi lakšeg i preglednijeg pisanja, izostavićemo vektorske oznake iznad tih veličina u daljem računu.

ZAKON DISPERZIJE ZA MAGNONE BEZ PRISUSTVA FONONA ZA SPIN $S=\frac{1}{2}$

Za hamiltonijan feromagneta bez prisustva fonona uzećemo izraz $\hat{H}_s$ u obrascu I.3.2 :

$$\hat{H}_s = SJ_0 \sum_n (S-S_n^z) - \frac{1}{2} \sum_{nm}{}' I_{nm} (S-S_n^z)(S-S_m^z) - \frac{1}{2} \sum_{nm}{}' I_{nm} S_n^- S_m^+ \quad \ldots\ldots\ldots (II.2.3)$$

Zakon disperzije ćemo naći iz pola Grinove funkcije, pa zato, prvo nadjimo komutator $[S_f^+, \hat{H}] = \Omega_f$, koji u njoj figuriše. Koristeći komutacione relacije za spinske operatore može se pokazati:

$$\begin{aligned} &[S_f^+, S^2] = 0 \\ &[S_f^+, S_g^-] = 2S_f^z \delta_{fg} \\ &[S_f^+, S_n^z] = -S_f^+ \delta_{fn} \\ &[S_f^+, S_n^- S_m^+] = 2S_n^z S_m^+ \delta_{nf} \\ &[S_f^+, S_n^z S_m^z] = -S_f^+ [S_n^z \delta_{mf} + S_m^z \delta_{nf}] \quad \ldots\ldots (II.2.4) \end{aligned}$$

Na osnovu ovih relacija, posle kraćeg računa, za Ω_f se dobija izraz:

$$\Omega_f = SJ_0 S_f^+ - \sum_m I_{fm} S_f^z S_m^+ - S \sum_m I_{fm} S_f^+ + \sum_m I_{fm} S_f^+ S_m^z \quad \ldots\ldots\ldots (II.2.5)$$

gde je $S = \frac{1}{2}$.

Pošto ćemo se u daljem računu koristiti paulionskom funkcijom Grina, moramo u izrazu II.2.5spinske operatore zameniti sa Pauli operatorima. To se postiže sledećim relacijama:

$$S_n^- = P_n^+ \qquad S_m^+ = P_m \qquad \frac{1}{2} - S_n^z = P_n^+ P_n \quad \ldots\ldots (II.2.6)$$

Z a Pauli operatore važe sledeće komutacione relacije:

$$\begin{aligned} &P_n P_m^+ - P_m^+ P_n = (1 - 2P_n^+ P_n)\delta_{nm} \\ &P_n^2 = P_n^{+2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (II.2.7) \end{aligned}$$

Posle transformacija II.2.6 izraz za Ω_f dobija sledeći oblik:

$$\Omega_f = \frac{1}{2} J_0 P_f - \frac{1}{2} \sum_m{}' I_{fm} P_m + \\ + \sum_m{}' I_{fm} (P_f^+ P_f P_m - P_m^+ P_m P_f) \ldots\ldots (II.2.8)$$

Izraz II.2.8 se,pomoću Furije transformacija, svodi na sledeći izraz, gde je još uzeto: $K_4 \equiv q_2$, $K \equiv K$, $K_3 \equiv q_1$ $q \equiv Q$

$$\Omega_K = \frac{1}{2}(J_0 - J_K) P_K + \frac{1}{N} \sum_{q_1 q_2} J_{K+q_2-q_1} P_{q_2}^+ P_{q_1} P_{K+q_2-q_1} - \\ - \frac{1}{N} \sum_{q_1 q_2} J_{q_2-q_1} P_{q_2}^+ P_{q_1} P_{K+q_2-q_1} \ldots\ldots (II.2.9)$$

Prilikom Furije transformacija Ω_f smo transformisali na sledeći način:

$$\Omega_f = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{K_1} \Omega_{K_1} e^{iK_1 f}$$

Sada izraz za Ω_K možemo ubaciti u paulionsku funkciju Grina:

$$E \langle\langle P_f | P_g^+ \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} (1 - 2\langle P_f^+ P_f \rangle) \delta_{fg} + \langle\langle [P_f, H] | P_g^+ \rangle\rangle \ldots (II.2.10)$$

Kada ubacimo izraz II.2.9 u II.2.10dobija se:

$$E \langle\langle P_K | P_K^+ \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} (1 - 2\langle P_f^+ P_f \rangle) + \frac{1}{2} (J_0 - J_K) \langle\langle P_K | P_K^+ \rangle\rangle + \\ + \frac{1}{N} \sum_{q_1 q_2} (J_{K+q_2-q_1} - J_{q_2-q_1}) \langle\langle P_{q_2}^+ P_{q_1} P_{K+q_2-q_1} | P_K^+ \rangle\rangle \ldots (II.2.11)$$

Sada možemo sa Pauli operatora preći na bozonske,relacijama:

$$P_n = B_n - B_n^+ B_n B_n$$
$$P_n^+ = B_n^+ - B_n^+ B_n^+ B_n \ldots\ldots (II.2.12)$$

Iz gornjih relacija možemo Pauli operatore koji,nam figurišu u jednačini za funkciju Grina,izraziti na sledeći način:

$$\langle\langle P_K | P_K^+ \rangle\rangle = (1 - 4C_0) \langle\langle B_K | B_K^+ \rangle\rangle$$

$$\langle\langle P_{q_2}^{+} P_{q_1} P_{k+q_2-q_1} | P_k^{+} \rangle\rangle = \langle\langle B_{q_2}^{+} B_{q_1} B_{k+q_2-q_1} | B_k^{+} \rangle\rangle =$$

$$= \langle\langle B_k | B_k \rangle\rangle (\delta_{q_1 q_2} + \delta_{q_1 k}) \langle B_{q_2}^{+} B_{q_2} \rangle$$

Posle delenja jadnačine za funkciju Grina sa $(1-4C_0)$, gde je $C_0 = \langle P_f^{+} P_f \rangle$ dobija se:

$$(E-\mathcal{E}_k) \langle\langle B_k | B_k^{+} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}(1+2C_0) +$$

$$+ \frac{1}{N} \langle\langle B_k | B_k^{+} \rangle\rangle \sum_{q_1} \langle B_q^{+} B_q \rangle_0 (J_{k+q_2-q_1} - J_{q_2-q_1})(\delta_{q_1 q_2} + \delta_{q_1 k-q})$$

Ako još uvedemo:

$$M_k = \frac{1}{N} \sum_q (J_k + J_q - J_0 - J_{q-k}) \langle B_q^{+} B_q \rangle_0$$

jednačina za funkciju Grina dobija sledeći oblik:

$$(E - \mathcal{E}_k - M_k) \langle\langle B_k | B_k^{+} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}(1+2C_0)$$

Zakon disperzije za magnone je pol Grinove funkcije:

$$E = \mathcal{E}_k + M_k \qquad (\text{II}.2.13)$$

gde je:

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}(J_0 - J_k)$$

ZAKON DISPERZIJE ZA MAGNONE BEZ PRISUSTVA FONONA ZA OPŠTI SPIN

Prilikom traženja zakona disperzije za opšti spin ($S > \frac{1}{2}$) koristićemo isti put kao za spin $S = \frac{1}{2}$. Razlika izmedju ova dva puta je u tome što sa spinskih operatora ne možemo direktno preći na Pauli operatore, koji važe samo za $S = \frac{1}{2}$, već na kvazi - Pauli operatore za koje važe sledeće komutacione relacije:

$$[P_{\mu f}, P^+_{\nu g}] = \delta_{fg}\left[\delta_{\mu\nu}\left(1 - \sum_{\rho=1}^{L} P^+_{\rho f} P_{\rho f}\right) - P^+_{\nu f} P_{\mu f}\right]$$

$$[P_{\mu f}, P_{\nu g}] = [P^+_{\mu f}, P^+_{\mu g}] = 0 \qquad \ldots . (\text{II}.2.14)$$

$$P_{\mu f} P_{\nu f} = P^+_{\mu f} P^+_{\nu f} = 0 \qquad P_{\mu f} P^+_{\nu f} = 0 \text{ za } \mu \neq \nu$$

U harmonijskoj aproksimaciji, kada kvazi - Pauli operatore zamenimo sa bozonima vidi se da su zakoni disperzije dati sa:

$$E_1(k) = S(J_0 - J_k) \qquad E_\mu(k) = \mu S J_0 \quad (\mu = 2 \ldots 2S)$$

Odavde odmah sledi da je populacioni broj ekscitacija tipa 1 na niskim temperaturama proporcionalan $T^{3/2}$ dok je populacioni broj ostalih eksitacija proporcionalan $e^{-\frac{const}{kT}}$ tj. eksponenci - onalmo mali i kao takav zanemarljiv. Zbog toga stroge formule za prelaz sa spinskih na kvazi - Pauli operatore:

$$S^+_g = \sum_{\mu=1}^{2S} [\mu(2S+1) - \mu]^{1/2} P^+_{\mu-1, g} P_{\mu g}$$

$$S^z_g = S - \sum_{\mu=1}^{2S} \mu P^+_{\mu g} P_{\mu g}$$

Možemo zameniti formulama:

$$S^+_f \cong \sqrt{2S}\, P_{1f} \qquad \ldots \ldots . (\text{II}.2.14a)$$

$$S^z_f \cong S - P^+_{1f} P_{1f}$$

Koristeći za hamiltonijan izraz II.3.2 za Ω_f se dobija izraz II.2.5. Sada u izrazu II.2.5smenimo spinske operatore sa kvazi - Pauli operatorima, relacijama II.2.14:

$$\Omega_f = \sqrt{2S^3}\, J_0 P_{1f} - \sqrt{2S^3} \sum_m' I_{fm} P_{1m} + + \sqrt{2S} \sum_m' I_{fm} \left(P_{1f}^+ P_{1f} P_{1m} - P_{1m}^+ P_{1m} P_{1f} \right) \quad \ldots (II.2.15)$$

Posle Furije transformacija i uvodjenja sledećih oznaka: $K_4 \equiv q_2$, $K \equiv K, K_3 \equiv q_1$, $q \equiv Q$ gornji izraz dobija oblik:

$$\Omega_K = \sqrt{2S^3}\, J_0 P_{1K} - \sqrt{2S^3}\, J_K P_{1K} + + \frac{\sqrt{2S}}{N} \sum_{q_1 q_2} \left(J_{K+q_2-q_1} - J_{q_2-q_1} \right) P_{1q_2}^+ P_{1q_1} P_{1,K+q_2-q_1}$$

ili konačno:

$$\Omega_K = \sqrt{2S^3} \left(J_0 - J_K \right) P_{1K} + + \frac{\sqrt{2S}}{N} \sum_{q_1 q_2} \left(J_{K+q_2-q_1} - J_{q_2-q_1} \right) P_{1q_2}^+ P_{1q_1} P_{1,K+q_2-q_1} \quad \ldots (II.2.16)$$

Sada paulionska funkcija Grina za kvazi - Pauli operatore dobija oblik:

$$E \langle\langle P_{1K} | P_{1K}^+ \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} \left(1 - 2 \langle P_{1f}^+ P_{1f} \rangle \right) \delta_{fq} + + S(J_0 - J_K) \langle\langle P_{1K} | P_{1K}^+ \rangle\rangle + + \frac{1}{N} \sum_{q_1 q_2} \left(J_{K+q_2-q_1} - J_{q_2-q_1} \right) \langle\langle P_{1q_2}^+ P_{1q_1} P_{1,K+q_2-q_1} | P_{1K}^+ \rangle\rangle \quad (II.2.17)$$

Koristeći još prelazak sa kvazi - Pauli na Boza operatore, za koje važi Vikova teorema, dobija se:

$$\begin{aligned} P_{1K} &\cong B_{1K} - B_{1K}^+ B_{1K} B_{1K} \\ P_{1K}^+ &\cong B_{1K}^+ - B_{1K}^+ B_{1K}^+ B_{1K} \end{aligned} \quad \ldots\ldots (II.2.18)$$

$$\langle\langle P_{1K} | P_{1K}^+ \rangle\rangle \cong (1 - 4C_0') \langle\langle B_{1K} | B_{1K}^+ \rangle\rangle$$

$$\langle\langle P_{1q_2}^+ P_{1q_1} P_{1,K+q_2-q_1} | P_{1K}^+ \rangle\rangle \cong \langle\langle B_{1q_2}^+ B_{1q_1} B_{1,K+q_2-q_1} | B_{1K}^+ \rangle\rangle = = \langle\langle B_{1K} | B_{1K}^+ \rangle\rangle \langle B_{1q_2}^+ B_{1q_2} \rangle_0 \left\{ \delta_{q_1 q_2} + \delta_{q_1 K} \right\} \quad \ldots (II.2.19)$$

Ubacujući izraze II.2.18 u jednačinu za funkciju Grina II.2.17 i posle delenja sa (1 - 4C_0'), gde je $C_0' = \langle P^+_{l\downarrow} P_{l\downarrow} \rangle$ dobija se:

$$(E-\mathcal{E}_{1k})\langle\langle B_{1k}|B^+_{1k}\rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}(1+2C_0') +$$
$$+\frac{1}{N}\sum_q \langle B^+_{1q} B_{1q}\rangle_0 (J_{k+q_2-q_1} - J_{q_2-q_1})(\delta_{q_1 q_2} + \delta_{q_2, k-q})\langle\langle B_{1k}|B^+_{1k}\rangle\rangle. \quad (II.2.20)$$

gde je: $\mathcal{E}_{1k} = \sqrt{2S^3}(J_0 - J_k)$ Uvodeći još oznaku:

$$M_{1k} = \frac{1}{N}\sum_q (J_k + J_q - J_0 - J_{q-k})\langle B^+_{1q} B_{1q}\rangle_0$$

jednačina za funkciju Grina dobija konačno oblik:

$$(E-\mathcal{E}_{1k} - M_{1k})\langle\langle B_{1k}|B^+_{1k}\rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}(1+2C_0')$$

Zakon disperzije za magnone bez prisustva fonona, za opšti spin, očigledno ima oblik:

$$E = \mathcal{E}_{1k} + M_{1k}$$

gde su $\mathcal{E}_{1k}$ i M_{1k} odredjeni obrascima II.2.19 i II.2.20 respektivno.

ZAKON DISPERZIJE ZA MAGNONE SA URAČUNAVANJEM SPIN - FONON INTERAKCIJE

Za izračunavanje zakona disperzije za magnone sa uračunavanjem spin - fonon interakcije moramo, kao i u predhodnim slučajevima, da se služimo Pauli operatorima za spin $S = \frac{1}{2}$ i kvazi - Pauli operatorima za opšti spin. U suštini postupak u prvom i u drugom slučaju je analogan, pa u daljem izlaganju, za opšti spin, ne ćemo pisati neka elementarna izvodjenja koja su analogna onima za spin $S = \frac{1}{2}$.

ZAKON DISPERZIIJE ZA MAGNONE SA URAČUNAVANJEM SPIN - FONON INTERAKCIJE ZA SPIN $S = \frac{1}{2}$

Za izračunavanje ovog zakona koristićemo analogan postupak onom opisanom u zakonu disperzije za magnone bez prisustva fonona, samo što umesto hamiltonijana $\hat{H}_S$ iz obrasca I.3.2 moramo uzeti u obzir i hamiltonijan spin - fononske interakcije $\hat{H}_{sf}$ iz obrasca I.3.2 tako da naš ukupni hamiltonijan ima oblik:

$$\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_F + \hat{H}_{S,F}$$

gde je:

$$\hat{H}_{S,F} = -\frac{1}{2} \sum_{nm}{}' \nabla_{nm} I_{nm} (\hat{U}_n - \hat{U}_m) \times$$
$$\times \left[S_n^- S_m^+ - 2S(S - S_n^z) + (S - S_n^z)(S - S_m^z) \right] \ldots .$$

Ili koristeći se prelazom na Pauli operatore II.2.6:

$$\hat{H}_S = \frac{1}{2} J_0 \sum_n P_n^+ P_n - \frac{1}{2} \sum_{nm}{}' I_{nm} P_n^+ P_n - \frac{1}{2} \sum_{nm}{}' I_{nm} P_n^+ P_n P_m^+ P_m$$

$$\hat{H}_F = \sum_{qj} \hbar \omega_{qj} a_{qj}^+ a_{qj}$$

$$\hat{H}_{SF} = -\frac{1}{2}\sum_{nm}{}' \nabla_{nm} I_{nm}(\hat{U}_n - \hat{U}_m)(P_n^+ P_m + P_n^+ P_m^+ P_n P_m) \quad ..(II.3.1)$$

Posle kraćeg računa za izraz $\Omega_f = [P_f, H]$, koristeći hamiltonijan izražen relacijama II.3.1, dobija se:

$$\Omega_f = \frac{1}{2} J_0 P_f - \frac{1}{2}\sum_m I_{fm} P_m + \sum_m I_{fm}(P_f^+ P_f P_m - P_m^+ P_m P_f) +$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_m{}' \nabla_{fm} I_{fm}(U_f - U_m)(P_f - P_m) +$$
$$+ \sum_m \nabla_{fm} I_{fm}(U_f - U_m)(P_f^+ P_f P_m - P_m^+ P_m P_f) \quad ..(II.3.2)$$

Sada će mo, kao i obično, izvršiti Furije transformacije gornjeg izraza pomoću obrazaca:

$$\Omega_f = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k_1} \Omega_{k_1} e^{ik_1 f}$$
$$U_n = \sum_{qj} \sqrt{\frac{\hbar}{2MN\omega_{qj}}}\, \vec{e}_{qj}(a_{qj} + a_{-qj}^+)\, e^{iqn}$$
$$I_{nm} = \frac{1}{N}\sum_{k_2} J_{k_2} e^{ik_2(n-m)}$$
$$\nabla_{nm} I_{nm} = \frac{1}{N}\sum_{k_2} i\, k_2 J_{k_2} e^{ik_2(n-m)}$$
$$P_f = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k_1} P_{k_1} e^{ik_1 f}$$

Posle kraćeg elementarnog računa množeći još sa e^{-ifk} i sumirajući po f izraz II.3.2dobija oblik:

$$\sqrt{N}\Omega_k = \frac{1}{2} J_0 \sqrt{N} P_k - \frac{1}{2}\sqrt{N} J_k P_k +$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k_3 k_4}(J_{k+k_3-k_4} - J_{k_3-k_4}) P_{k_4}^+ P_{k_3} P_{k+k_4-k_3} +$$
$$+ \frac{i}{2}\sum_{qj} \vec{e}_{qj}\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{qj}}}(a_{qj} + a_{-qj}^+) P_{k-q}[kJ_k - qJ_q - (k-q)J_{k-q}] +$$
$$+ \frac{i}{N}\sum_{jqk_4k_3} \vec{e}_{qj}\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{qj}}}(a_{qj} + a_{-qj}^+) P_{k_4}^+ P_{k_3} P_{k+k_4-k_3-q} \times$$
$$\times \{(k+k_4-k_3-q) J_{k+k_4-k_3-q} - (k_3-k_4) J_{k_3-k_4} -$$
$$- (k+k_4-k_3) J_{k+k_4-k_3} + (q+k_3-k_4) J_{q+k_3-k_4}\}.$$

Množeći gornji izraz sa $\frac{1}{\sqrt{N}}$ i uvodeći oznake: $k_1 \equiv q_2$; $k \equiv k$; $k_3 \equiv q_1$; $q \equiv Q$ dobija se:

$$\Omega_k = \frac{1}{2}(J_0 - J_k)P_k + \frac{1}{N}\sum_{q_1 q_2}(J_{k+q_2-q_1} + J_{q_2-q_1})P^+_{q_2}P_{q_1}P_{k+q_2-q_1} +$$

$$+\frac{i}{2\sqrt{N}}\sum_{jQ}\vec{e}_{Qj}\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{Qj}}}\left[kJ_k - QJ_Q - (k-Q)J_{k-Q}\right]P_{k-Q}(a_{Qj} + a^+_{-Qj}) +$$

$$+\frac{i}{N\sqrt{N}}\sum_{jQq_2q_1}\vec{e}_{Qj}\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{Qj}}}\left[(k+q_2-q_1-Q)J_{k+q_2-q_1-Q} + \right.$$

$$\left. +(q_2-q_1)J_{q_2-q_1} + (q_1-q_2-k)J_{q_1-q_2-k} + (q_2-q_1-Q)J_{q_2-q_1-Q}\right] \times$$

$$\times P^+_{q_2}P_{q_1}P_{k+q_2-q_1-Q}(a_{Qj} + a^+_{-Qj}) \ldots\ldots (II.3.4)$$

Uvrštavajući gornji izraz u jednačinu za funkciju Grina II.2.10 dobija se:

$$E\langle\langle P_k | P_k^+\rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}(1 - 2\langle P_f^+ P_f\rangle) - \frac{1}{2}(J_0 - J_k)\langle\langle P_k | P_k^+\rangle\rangle +$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{q_1q_2}(J_{k+q_2-q_1} - J_{q_2-q_1})\langle\langle P^+_{q_2}P_{q_1}P_{k+q_2-q_1} | P_k^+\rangle\rangle +$$

$$+\frac{i}{2\sqrt{N}}\sum_{jQ}\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{Qj}}}\vec{e}_{Qj}\left[kJ_k - QJ_Q - (k-Q)J_{k-Q}\right]\langle\langle P_{k-Q}(a_{Qj} + a^+_{-Qj}) | P_k^+\rangle\rangle$$

$$+\frac{i}{N\sqrt{N}}\sum_{jQq_2q_1}\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{Qj}}}\vec{e}_{Qj}\left[(k+q_2-q_1-Q)J_{k+q_2-q_1-Q} + \right.$$

$$\left. +(q_2-q_1)J_{q_2-q_1} + (q_1-q_2-k)J_{q_1-q_2-k} + (q_2-q_1-Q)J_{q_2-q_1-Q}\right] \times$$

$$\times\langle\langle P^+_{q_2}P_{q_1}P_{k+q_2-q_1-Q}(a_{Qj} + a^+_{-Qj}) | P_k^+\rangle\rangle \ldots (II.3.5)$$

Ako još uvedemo oznake:

$$F_j(k,Q) = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{Qj}}}\,\vec{e}_{Qj}\left[kJ_k - QJ_Q - (k-Q)J_{k-Q}\right] \ldots (II.3.6)$$

$$\Phi_j(k,Q,q_1,q_2) = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{Qj}}}\,\vec{e}_{Qj}\Big[(k+q_2-q_1-Q)J_{k+q_2-q_1-Q} + (q_2-q_1)J_{q_2-q_1} + (q_1-q_2-k)J_{q_1-q_2-k} + (q_2-q_1-Q)J_{q_2-q_1-Q}\Big] \quad (II.3.7)$$

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}(J_0 - J_k)$$

Izraz II.3.5 dobija oblik:

$$(E-\mathcal{E}_k)\langle\langle P_k | P_k^+\rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}(1 - 2\langle P_f^+ P_f\rangle) + \frac{1}{N}\sum_{q_1 q_2}(J_{k+q_2-q_1} - J_{q_2-q_1})\langle\langle P_{q_2}^+ P_{q_1} P_{k+q_2-q_1} | P_k^+\rangle\rangle + \frac{i}{2\sqrt{N}}\sum_{Qj} F_j(k,Q)\langle\langle P_{k-Q}(a_{Qj}+a_{-Qj}^+) | P_k^+\rangle\rangle + \frac{i}{N\sqrt{N}}\sum_{Qj\,q_1 q_2}\Phi_j(k,Q,q_2,q_1)\langle\langle P_{q_2}^+ P_{q_1} P_{k+q_2-q_1-Q}(a_{Qj}+a_{-Qj}^+) | P_k^+\rangle\rangle \quad (II.3.8)$$

Sada možemo u predhodnom izrazu preći sa Pauli na Boza operatore relacijama II.2.12 i posle delenja sa (1 - 4 C_0) gde je $C_0 = \langle P_f^+ P_f\rangle$, dobija se:

$$(E-\mathcal{E}'_k)\langle\langle B_k | B_k^+\rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}(1+2C_0) + \frac{1}{N}\sum_q \langle B_q^+ B_q\rangle_0 (J_k + J_q - J_0 - J_{k-q})\langle\langle B_k | B_k^+\rangle\rangle + \frac{i}{2\sqrt{N}}\sum_{Qj} F_j(k,Q)\langle\langle B_{k-Q}(a_{Qj}+a_{-Qj}^+) | B_k^+\rangle\rangle + \frac{i}{\sqrt{N}}\sum_{Qj}\langle\langle B_{k-Q}(a_{Qj}+a_{-Qj}^+) | B_k^+\rangle\rangle \times \Big\{\frac{1}{N}\sum_{\tilde{q}}\langle B_{\tilde{q}}^+ B_{\tilde{q}}\rangle_0 \big[\Phi_j(k,Q,\tilde{q},\tilde{q}) + \Phi_j(k,Q,k,\tilde{q})\big] - \frac{2}{N^2}\sum_{\tilde{q}\tilde{q}_1}\langle B_{\tilde{q}}^+ B_{\tilde{q}}\rangle_0 \Phi_j(k,Q,\tilde{q}_1,\tilde{q})\Big\} \ldots (II.3.8a)$$

gde je izraz:

$$\langle\langle P_{q_2}^+ P_{q_1} P_{k+q_2-q_1-Q}(a_{Qj}+a_{-Qj}^+) | P_k^+\rangle\rangle$$

$$\langle\langle P_{q_2}^{+} P_{q_1} P_{k+q_2-q_1-Q}(a_{Qj}+a_{-Qj}^{+})|P_k^{+}\rangle\rangle =$$
$$= \langle B_{q_2}^{+} B_{q_2}\rangle \cdot \langle\langle B_{k-Q}(a_{Qj}+a_{-Qj}^{+})|B_k^{+}\rangle\rangle (\delta_{q_1,q_2}+\delta_{q_1,k-Q}) -$$
$$-\frac{1}{N}\sum_{k_1}\langle B_{q_2}^{+} B_{q_2}\rangle \{\delta_{k_3,q_2}+\delta_{k_1,k-Q}\}\langle\langle B_{k-Q}(a_{Qj}+a_{-Qj}^{+})|B_k^{+}\rangle\rangle$$

transformisan na gornji način.
Da bi smo rešili jednačinu za funkciju Grina II.3.8 treba pronaći funkcije Grina $\langle\langle B_{k-Q}\, a_{Qj}|B_k^{+}\rangle\rangle$ i $\langle\langle B_{k-Q}\, a_{-Qj}^{+}|B_k^{+}\rangle\rangle$ koje figurišu u jednačini II.3.8 i izraziti ih preko funkcija Grina $\langle\langle B_k|B_k^{+}\rangle\rangle$. Da bi smo to našli podjimo od hamiltonijana:

$$\hat{H}_S^{(0)} = \frac{1}{2} J_0 \sum_n B_n^{+} B_n - \frac{1}{2}\sum_{nm}{}' I_{nm} B_n^{+} B_m$$

$$\hat{H}_{SF}^{(0)} = -\frac{1}{2}\sum_{nm} \nabla_{nm} I_{nm} (U_n - U_m)(B_n^{+} B_m - B_n^{+} B_n)$$

$$\hat{H}_F^{(0)} = \sum_{qj} \hbar\omega_{qj}\, a_{qj}^{+} a_{qj} .$$

i transformišimo ga u impulsni prostor, Furije transformacijama.
Posle Furije transformacija izrazi II.3.9 dobijaju oblik:

$$\hat{H}_S^{(0)} = \sum_k \mathcal{E}_k B_k^{+} B_k$$

gde je:

$$\mathcal{E}_k = \frac{1}{2}(J_0 - J_k)$$

$$\hat{H}_F^{(0)} = \sum_{qj} a_{qj}^{+} a_{qj} \lambda_{qj}$$

gde je: $\lambda_{qj} = \hbar\omega_{qj}$

Za $\hat{H}_{SF}^{(0)}$, posle kraćeg računa, dobija se:

$$\hat{H}_{S,F}^{(0)} = \frac{i}{2\sqrt{N}}\sum_{jpq} F_j(p,q) B_p^{+} B_{p-q} (a_{qj} + a_{-qj}^{+}) .$$

gde je:

$$F_j(p,q)=\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{qj}}}\,\vec{e}_{qj}\left[p\,\mathcal{J}_p-q\,\mathcal{J}_q-(p-q)\mathcal{J}_{p-q}\right]$$

Kompletan hamiltonijan sada ima oblik:

$$\hat{H}^{(0)}=\sum_p \varepsilon_p B_p^+B_p+\sum_{qj'}\lambda_{qj'}a_{qj'}^+a_{qj'}+$$

$$+\frac{i}{2\sqrt{N}}\sum_{j'pq}F_{j'}(p,q)\,B_p^+B_{p-q}(a_{qj'}+a_{-qj'}^+)\ldots(II.3.10)$$

Pronadjimo još komutator izraza $B_{k-Q}(a_{Qj}+a_{-Qj}^+)$ sa ovim hamiltonijanom. Radi jednostavnosti tražićemo ga član po član.

$$\left[B_{k-Q}(a_{Qj}+a_{-Qj}^+),B_p^+B_p\right]=\left[B_{k-Q}a_{Qj},B_p^+B_p\right]+\left[B_{k-Q}a_{-Qj}^+,B_p^+B_p\right]=$$

$$=B_p\,a_{Qj}\,\delta_{p,k-Q}+B_p\,a_{-Qj}^+\,\delta_{p,k-Q}$$

$$=B_p(a_{Qj}+a_{-Qj}^+)\delta_{p,k-Q}\quad(II.3.11)$$

Na osnovu predhodnog izraza možemo pisati:

$$\left[B_{k-Q}(a_{Qj}+a_{-Qj}^+),\sum_p\varepsilon_p B_p^+B_p\right]=\varepsilon_{k-Q}B_{k-Q}(a_{Qj}+a_{-Qj}^+).(II.3.12)$$

$$\left[B_{k-Q}(a_{Qj}+a_{-Qj}^+),\sum_{qj'}\lambda_{qj'}a_{qj'}^+a_{qj'}\right]=\left[B_{k-Q}a_{Qj},a_{qj'}^+a_{qj'}\right]+$$

$$+\left[B_{k-Q}a_{-Qj}^+,a_{qj'}^+a_{qj'}\right]$$

$$=B_{k-Q}\,a_{qj'}\delta_{qQ}\delta_{jj'}-B_{k-Q}\,a_{Qj}^+\delta_{q-Q}\delta_{jj'}$$

pa sledi:

$$\left[B_{k-Q}(a_{Qj}+a_{-Qj}^+),\sum_{qj'}\lambda_{qj'}a_{qj'}^+a_{qj'}\right]=\lambda_{Qj}(a_{Qj}-a_{-Qj}^+)\ldots II.3.13$$

Na sličan način, tražeći ovaj komutator sa $\hat{H}_{S,F}^{(0)}$, dobija se:

$$\left[B_{k-Q}a_{Qj},\hat{H}_{SF}^{(0)}\right]=\frac{i}{2\sqrt{N}}\sum_{qj'}F_{j'}(k-Q,q)\,B_{k-Q-q}(a_{qj'}^+a_{Qj}+a_{qj'}a_{Qj})+$$

$$+\frac{i}{2\sqrt{N}}\sum_p F_j(p,-Q)B_p^+B_{p+Q}B_{k-Q}+\frac{i}{2\sqrt{N}}F_j(k-Q,-Q)B_k\ldots(II.3.14)$$

a za $\left[B_{k-Q}\, a^+_{-Qj}, H_{SF}^{(0)}\right]$ dobija se izraz:

$$\left[B_{k-Q}\, a^+_{-Qj}, \hat{H}_{SF}^{(0)}\right] = \frac{i}{2\sqrt{N}} \sum_{qj'} F_{j'}(k-Q,q) B_{k-Q-q}\left(a^+_{Qj} a_{qj'} + a^+_{-Qj} a_{-qj'}\right) -$$

$$- \frac{i}{2\sqrt{N}} \sum_{p} F_j(p,-Q) B^+_p B_{p+Q} B_{k-Q} \, . \quad (\text{II}.3.15)$$

Jednačinu za funkciju grina sada možemo napisati u obliku:

$$\left[(E-\mathcal{E}_k)(1-4C_0) - M_k\right] \langle\langle B_k | B_k^+ \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}(1-2C_0)$$

$$+ \frac{i}{2\sqrt{N}}(1-4C_0) \sum_{Qj} F_j(k,Q) \left\{ \langle\langle B_{k-Q}\, a_{Qj} | B_k^+ \rangle\rangle + \right.$$

$$+ \langle\langle B_{k-Q}\, a^+_{-Qj} | B_k^+ \rangle\rangle +$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{N}} \sum_{Qj} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{\tilde{q}} \langle B^+_{\tilde{q}} B_{\tilde{q}} \rangle_0 \left[\Phi_j(k,Q,\tilde{q},\tilde{q}) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \Phi_j(k,Q,k,q) - \frac{2}{N} \sum_{\tilde{q}_1} \Phi_j(k,Q,\tilde{q}_1,\tilde{q}) \right] \right\} \times$$

$$\times \left\{ \langle\langle B_{k-Q}\, a_{Qj} | B_k^+ \rangle\rangle + \langle\langle B_{k-Q}\, a^+_{-Qj} | B_k^+ \rangle\rangle \right. . \quad (\text{II}.3.16)$$

Komutatori izraza $B_{k-Q}\, a_{Qj}$ i $B_{k-Q}\, a^+_{-Qj}$ sa $\hat{H}_S^{(0)}$ i $H_F^{(0)}$ imaju oblik:

$$\left[B_{k-Q}\, a_{Qj}, \hat{H}_S^{(0)}\right] = \mathcal{E}_{k-Q} B_{k-Q}\, a_{Qj}$$

$$\left[B_{k-Q}\, a^+_{-Qj}, \hat{H}_S^{(0)}\right] = \mathcal{E}_{k-Q} B_{k-Q}\, a^+_{-Qj} \quad \ldots \text{II}.3.17$$

$$\left[B_{k-Q}\, a_{Qj}, \hat{H}_F^{(0)}\right] = \lambda_{Qj} B_{k-Q}\, a_{Qj}$$

$$\left[B_{k-Q}\, a^+_{-Qj}, H_F^{(0)}\right] = -\lambda_{Qj} B_{k-Q}\, a^+_{-Qj}$$

Korelatori funkcija $\langle\langle B_a | B^+ \rangle\rangle$ i $\langle\langle B_a^+ | B^+ \rangle\rangle$ jednaki su nuli jer su proporcionalni $\langle a \rangle = \langle a^+ \rangle = 0$

Sada je:

$$E\langle\langle B_{k-Q}a_{Qj}|B_k^+\rangle\rangle = \mathcal{E}_{k-Q}\langle\langle B_{k-Q}a_{Qj}|B_k^+\rangle\rangle +$$
$$+\lambda_{Qj}\langle\langle B_{k-Q}a_{Qj}|B_k^+\rangle\rangle +$$
$$+\frac{i}{2\sqrt{N}}\sum_{qj'}F_{j'}(k-Q,q)\langle\langle B_{k-Q-q}(a^+_{-qj'}a_{Qj}+a_{qj'}a_{Qj})|B_k^+\rangle\rangle +$$
$$+\frac{i}{2\sqrt{N}}F_j(k-Q,-Q)\langle\langle B_k|B_k^+\rangle\rangle +$$
$$+\frac{i}{2\sqrt{N}}\sum_p F_j(p,-Q)\langle\langle B_p^+B_{p+Q}B_{k-Q}|B_k^+\rangle\rangle$$

Ovaj izraz možemo uprostiti na sledeći način:

$$\langle\langle B_{k-Q-q}(a_{-qj'}a_{Qj}+a_{qj'}a_{Qj})|B_k^+\rangle\rangle =$$
$$=\langle a^+_{Qj}a_{Qj}\rangle_0\langle\langle B_k|B_k^+\rangle\rangle(\delta_{jj'}\delta_{q,-Q})$$

$$\langle\langle B_p^+B_{p+Q}B_{k-Q}|B_k^+\rangle\rangle =$$
$$=\langle B_p^+B_p\rangle_0(\delta_{Q,0}+\delta_{p,k-Q})\langle\langle B_k|B_k^+\rangle\rangle$$

Smenjujući izraze II.3.19 u II.3.18 možemo jednačinu II.3.18 rešiti po:

$$\langle\langle B_{k-Q}a_{Qj}|B_k^+\rangle\rangle = \frac{i}{2\sqrt{N}}\frac{1}{E-\mathcal{E}_{k-Q}-\lambda_{Qj}}\times$$
$$\times\Big\{F_j(k-Q,-Q)+F_j(k-Q,-Q)\langle a^+_{Qj}a_{Qj}\rangle_0 +$$
$$+\sum_p\langle B_p^+B_p\rangle_0(\delta_{Q,0}+\delta_{k,k-p})\Big\}\langle\langle B_k|B_k^+\rangle\rangle \quad .. (II.3.20)$$

Za pronalaženje funkcije Grina $\langle\langle B_{k-Q}a^+_{-Qj}|B_k^+\rangle\rangle$ podjimo od izraza II.3.21:

$$E\langle\langle B_{k-Q}a^+_{-Qj}|B_k^+\rangle\rangle = \mathcal{E}_{k-Q}\langle\langle B_{k-Q}a^+_{-Qj}|B_k^+\rangle\rangle -$$
$$-\lambda_{Qj}\langle\langle B_{k-Q}a^+_{-Qj}|B_k^+\rangle\rangle$$
$$+\frac{i}{2\sqrt{N}}\sum_{qj'}F_{j'}(k-Q,-Q)\langle\langle B_{k-Q-q}(a^+_{-qj'}a_{Qj'}+a^+_{-Qj}a^+_{qj'})|B_k^+\rangle\rangle -$$
$$-\frac{i}{2\sqrt{N}}\sum_p F_j(p,-Q)\langle\langle B_p^+B_{p+Q}B_{k-Q}|B_k^+\rangle\rangle \quad .... II.3.21$$

Kada izraz II.3.16 podelimo sa $(1 - 4C_0)$ i zanemarimo članove u kojima je $4C_0$ u imeniocu a zatim ubacimo u nju izraze II.3.20 i II.3.21 dobija se:

$$(E-\mathcal{E}_k-M_k)\langle\langle B_k|B_k^+\rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}(1+2C_0) +$$
$$+\frac{1}{4N}\sum_{qj} F_j^2(k,q)\langle\langle B_k|B_k^+\rangle\rangle\left\{\frac{1+\langle a_{qj}^+a_{qj}\rangle_0+\langle B_{k-q}^+B_{k-q}\rangle_0}{E-\mathcal{E}_{k-q}-\lambda_{qj}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\langle a_{qj}^+a_{qj}\rangle_0-\langle B_{k-q}^+B_{k-q}\rangle_0}{E-\mathcal{E}_{k-q}+\lambda_{qj}}\right\}+$$
$$+\frac{1}{2N^2}\sum_{qj\tilde{q}} F_j(k,q)\langle B_{\tilde{q}}^+B_{\tilde{q}}\rangle_0\frac{1}{E-\mathcal{E}_{k-q}-\lambda_{qj}}\langle\langle B_k|B_k^+\rangle\rangle\times$$
$$\times\left\{\Phi_j(k,q,\tilde{q},\tilde{q})+\Phi_j(k,q,k,\tilde{q})-\frac{2}{N}\sum_{\tilde{q}_1}\Phi_j(k,q,\tilde{q}_1,\tilde{q})\right\}\ldots(\text{II}.3.22)$$

Prilikom dobijanja prethodnog izraza zanemarini su svi članovi u kojim se javljaju kvadrati koncentracija kao vrlo male veličine. Prethodni izraz može se napisati u obliku:

$$\left\{E-\mathcal{E}_k-M_k-\frac{1}{4N}\sum_{qj}F_j^2(k,q)\left(\frac{1+\langle a_{qj}^+a_{qj}\rangle_0+\langle B_{k-q}^+B_{k-q}\rangle_0}{E-\mathcal{E}_{k-q}-\lambda_{qj}}+\right.\right.$$
$$\left.\frac{\langle a_{qj}^+a_{qj}\rangle_0-\langle B_{k-q}^+B_{k-q}\rangle_0}{E-\mathcal{E}_{k-q}+\lambda_{qj}}\right\}-\frac{1}{2N^2}\sum_{\tilde{q}jq}F_j(k,q)\langle B_{\tilde{q}}^+B_{\tilde{q}}\rangle_0\times$$
$$\left.\frac{1}{E-\mathcal{E}_{k-q}-\lambda_{qj}}\left\{\Phi_j(k,q,\tilde{q},\tilde{q})+\Phi_j(k,q,k,\tilde{q})-\frac{2}{N}\sum_{\tilde{q}_1}\Phi_j(k,q,\tilde{q}_1,\tilde{q})\right\}\right\}\langle\langle B_k|B_k^+\rangle\rangle=$$
$$=\frac{i}{2\pi}(1+2C_0)\quad\ldots(\text{II}.3.23)$$

Zakon disperzije se očigledno može napisati u sledećem obliku:

$$E_k=\mathcal{E}_k+M_k+\frac{1}{4N}\sum_{qj}F_j^2(k,q)\left\{\frac{1+\langle a_{qj}^+a_{qj}\rangle_0+\langle B_{k-q}^+B_{k-q}\rangle}{E-\mathcal{E}_{k-q}-\lambda_{qj}}+\right.$$
$$\left.+\frac{\langle a_{qj}^+a_{qj}\rangle_0-\langle B_{k-q}^+B_{k-q}\rangle_0}{E-\mathcal{E}_{k-q}+\lambda_{qj}}\right\}+\frac{1}{2N^2}\sum_{qj\tilde{q}}F_j(k,q)\frac{\langle B_{\tilde{q}}^+B_{\tilde{q}}\rangle_0}{E-\mathcal{E}_{k-q}-\lambda_{qj}}\times$$
$$\times\left\{\Phi_j(k,q,\tilde{q},\tilde{q})+\Phi_j(k,q,k,\tilde{q})-\frac{2}{N}\sum_{\tilde{q}_1}\Phi_j(k,q,\tilde{q}_1,\tilde{q})\right\}\ldots(\text{II}.3.24)$$

Zakon disperzije u nultoj aproksimaciji je očigledno :

$$E_k^{(0)} = \mathcal{E}_k + M_k$$

Zakon disperzije u prvoj aproksimaciji dobijamo ako ovaj izraz zamenimo u II.3.24

$$E_k^{(1)} = \mathcal{E}_k + M_k + \frac{1}{4N}\sum_{aj} F_j^2(k,q)\left\{ \frac{1+\langle a_{aj}^+ a_{aj}\rangle_0 + \langle B_{k-a}^+ B_{k-a}\rangle_0}{E_k + M_k - \mathcal{E}_{k-a} - \lambda aj} + \right.$$
$$\left. + \frac{\langle a_{aj}^+ a_{aj}\rangle_0 - \langle B_{k-a}^+ B_{k-a}\rangle_0}{\mathcal{E}_k + M_k - \mathcal{E}_{k-a} + \lambda aj}\right\} + \frac{1}{2N^2}\sum_{aj\tilde{q}} F_j(k,a)\,\frac{\langle B_{\tilde{q}}^+ B_{\tilde{q}}\rangle}{\mathcal{E}_k + M_k - \mathcal{E}_{k-a} - \lambda aj}\times$$
$$\times\left\{ \Phi_j(k,q,\tilde{q}\tilde{q}) + \Phi_j(k,q,k,\tilde{q}) - \frac{2}{N}\sum_{q_1}\Phi_j(k,a,\tilde{q}_1\tilde{q})\right\}$$

Pošto je M_k mala vrednost u odnošu na ostale veličine u imeniocu mi će mo ga zanemariti u članovima gde se u broiocu javlja koncentracija. U prvom članu u zagradi nemakoncentracije pa ga razvimo u red:

$$\frac{1}{\mathcal{E}_k + M_k - \mathcal{E}_{k-a} - \lambda aj} = \frac{1}{\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_{k-a} - \lambda aj\left(1 + \frac{M_k}{\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_{k-a} - \lambda aj}\right)} \cong$$
$$\cong \frac{1}{\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_{k-a} - \lambda aj}\left(1 - \frac{M_k}{\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_{k-a} - \lambda aj}\right)$$

Sada se zakon disperzije može napisati u sledećem obliku:

$$E_k^{(1)} = \mathcal{E}_k + M_k + \frac{1}{4N}\sum_{aj} F_j^2(k,q)\frac{1}{\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_{k-a} - \lambda aj} -$$
$$\frac{1}{4N}\sum_{aj} F_j^2(k,q)\left\{ \frac{\langle a_{aj}^+ a_{aj}\rangle_0 + \langle B_{k-a}^+ B_{k-a}\rangle_0}{\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_{k-a} - \lambda aj} + \frac{\langle a_{aj}^+ a_{aj}\rangle_0 - \langle B_{k-a}^+ B_{k-a}\rangle}{\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_{k-a} + \lambda aj} - \right.$$
$$\left. - \frac{M_k}{(\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_{k-a} - \lambda aj)^2}\right\} +$$
$$+ \frac{1}{2N^2}\sum_{aj\tilde{q}} F_j(k,a)\frac{\langle B_{\tilde{q}}^+ B_{\tilde{q}}\rangle}{\mathcal{E}_k - \mathcal{E}_{k-a} - \lambda aj}\left\{ \Phi_j(k,q,k,\tilde{q}) + \right.$$
$$\left. + \Phi_j(k,q,\tilde{q},\tilde{q}) - \frac{2}{N}\sum_{\tilde{q}_1}\Phi_j(k,q,\tilde{q}_1,\tilde{q})\right\}$$

ZAKON DISPERZIJE ZA MAGNONE SA URAČUNAVANJEM SPIN - FONON INTERAKCIJE ZA OPŠTI SPIN

Postupak je analogan onom za nalaženje ovog zakona za spin $S = \frac{1}{2}$, samo što će se umesto Pauli koristiti kvazi - Pauli operatori. Podjimo od izraza za opšti hamiltonijan:

$$\hat{H} = SJ_0 \sum_n (S - S_n^z) - \frac{1}{2} \sum_{nm}' I_{nm} S_n^- S_m^+ - \frac{1}{2} \sum_{nm} I_{nm} (S - S_n^z)(S - S_m^z) -$$
$$- \frac{1}{2} \sum_{nm}' \nabla_{nm} I_{nm} (U_n - U_m) \left[S_n^- S_m^+ - 2S(S - S_n^z) + (S - S_n^z)(S - S_m^z) \right] \ldots (II.4.1)$$

Koristeći ranije navedene komutacione relacije II.2.4 za $\Omega_{,f}$ se dobija izraz:

$$\Omega_{,f} = SJ_0 S_f^+ - \sum_m I_{fm} S_f^z S_m^+ - S \sum_m I_{fm} S_f^+ + \sum_m I_{fm} S_f^+ S_m^z -$$
$$- \sum_m \nabla_{nm} I_{nm} (U_f - U_m)(S_f^z S_m^+ - S_f^+ S_m^z) \ldots (II.4.2)$$

Pomoću formula II.2.14 prećićemo sa ovog izraza na izraz:

$$\Omega_{,f} = \sqrt{2S^3} J_0 P_{1f} - \sqrt{2S^3} \sum_m' I_{fm} P_{1m} +$$
$$+ \sqrt{2S} \sum_m I_{fm} (P_{1f}^+ P_{1f} P_{1m} - P_{1m}^+ P_{1m} P_{1f}) +$$
$$+ \sqrt{2S^3} \sum_m \nabla_{fm} I_{fm} (U_f - U_m)(P_{1f} - P_{1m}) +$$
$$+ \sqrt{2S} \sum_m \nabla_{fm} I_{fm} (U_f - U_m)(P_{1f}^+ P_{1f} P_{1m} - P_{1m}^+ P_{1m} P_{1f}) \ldots (II.4.3)$$

Kada izvršimo Furije transformacije i uvedemo oznake $k_4 \equiv q_2, k_3 \equiv q_1$; $k \equiv K, q \equiv Q$ izraz II.4.3 dobija sledeći oblik:

$$\Omega_{,k} = \sqrt{2S^3}(J_0 - J_k) P_{1k} + \frac{\sqrt{2S}}{N} \sum_{q_1 q_2} (J_{k+q_2-q_1} - J_{q_2 - q_1}) P_{1q_2}^+ P_{1q_1} P_{1,k+q_2-q_1} +$$
$$+ \frac{i\sqrt{2S^3}}{N} \sum_{qj} \vec{e}_{qj} \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{qj}}} \left[kJ_k - qJ_q - (k-q) J_{k-q} \right] P_{1,k-q} (a_{qj} + a_{-qj}^+) +$$
$$+ \frac{i\sqrt{2S}}{N\sqrt{N}} \sum_{jqq_1q_2} \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{qj}}} \vec{e}_{qj} \left[(k+q_2-q_1-q) J_{k+q_2-q_1-q} + (q_2 - q_1) J_{q_2-q_1} \right) +$$

$$+(q_1-q_2-k)J_{q_1-q_2-k}+(Q+q_1-q_2)J_{Q+q_1-q_2}\Big]P^+_{1q_2}P_{1q_1}P_{1,k+q_2-q_1-Q}\times$$

$$\times\,(a_{Qj}+a^+_{-Qj})\,.\;.\;.\;.\;.\;.\;(II.4.4)$$

Jednačina za funkciju Grina,za ovaj slučaj, ima oblik:

$$E\langle\langle P_{1k}|P^+_{1k}\rangle\rangle=\frac{i}{2\pi}\left(1-2\langle P^+_{1f}P_{1f}\rangle\right)+S(J_0-J_k)\langle\langle P_{1k}|P^+_{1k}\rangle\rangle+$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{q_1q_2}\left(J_{k+q_2-q_1}-J_{q_2-q_1}\right)\langle\langle P^+_{1q_2}P_{1q_1}P_{1,k+q_2-q_1}|P^+_{1k}\rangle\rangle+$$

$$+\frac{iS}{\sqrt{N}}\sum_{jQ}\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{Qj}}}\,\vec{e}_{Qj}\left[kJ_k-QJ_Q-(k-Q)J_{k-Q}\right]\times$$

$$\times\langle\langle P_{1,k-Q}(a_{Qj}+a^+_{-Qj})|P^+_{1k}\rangle\rangle+$$

$$+\frac{i}{N\sqrt{N}}\sum_{j,Q,q_1,q_2}\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{Qj}}}\,\vec{e}_{Qj}\Big[(k+q_2-q_1-Q)J_{k+q_2-q_1-Q}+$$

$$+(q_2-q_1)J_{q_2-q_1}+(q_1-q_2-k)J_{q_1-q_2-k}+(Q+q_1-q_2)J_{Q+q_1-q_2}\Big]\times$$

$$\times\langle\langle P^+_{1q_2}P_{1q_1}P_{1,k+q_2-q_1-Q}(a_{Qj}+a^+_{-Qj})|P^+_{1k}\rangle\rangle\,.\,(II.4.5)$$

Uvedimo još veličine $F_j(k,Q)$, $\Phi_j(k,Q,q_1,q_2)$ na isti način kao što je to predhodno uradjeno, a veličinu $\mathcal{E}_{1k}$ relacijom:

$$\mathcal{E}_{1k}=S(J_0-J_k)$$

Sada se izraz II.4.5 može napisati u obliku:

$$(E-\mathcal{E}_{1k})\langle\langle P_{1k}|P_{1k}\rangle\rangle=\mathcal{X}+\frac{1}{N}\sum_{q_1q_2}\left(J_{k+q_2-q_1}-J_{q_2-q_1}\right)\langle\langle P^+_{1q_2}P_{1q_1}P_{1,k+q_2-q_1}|P^+_{1k}\rangle\rangle+$$

$$+\frac{iS}{\sqrt{N}}\sum_{Qj}F_j(k,Q)\langle\langle P^+_{1,k-Q}(a_{Qj}+a^+_{-Qj})|P^+_{1k}\rangle\rangle+$$

$$+\frac{i}{N\sqrt{N}}\sum_{Q,j,q_1,q_2}\Phi_j(k,Q,q_1,q_2)\langle\langle P^+_{1q_2}P_{1q_1}P_{1,k+q_2-q_1-Q}(a_{Qj}+a^+_{-Qj})|P^+_{1k}\rangle\rangle$$

$$(II.4.6)$$

gde je:

$$\varkappa = \frac{i}{2u}\left(1 - 2\langle P_f^+ P_f \rangle\right)$$

Koristeći se relacijama II.2.18 za prelazak sa kvazi - Pauli na Boza operatore dobijamo:

$$\langle\langle P_{1k} | P_{1k}^+ \rangle\rangle = (1 - 4C_0')\langle\langle B_{1k} | B_{1k}^+ \rangle\rangle$$

i

$$\langle\langle P_{1q_2}^+ P_{1q_1} P_{1,k+q_2-q_1} | P_{1k}^+ \rangle\rangle = \langle\langle B_{1k} | B_{1k}^+ \rangle\rangle \langle B_{1q_2}^+ B_{1q_2} \rangle \left(\delta_{q_1 q_2} + \delta_{q_1 k}\right)$$

gde je:

$$C_0' = \frac{1}{N}\sum_q \frac{1}{e^{\frac{E_q}{kT}} - 1}$$

$$\langle\langle P_{1,k-Q}(a_{Qj} + a_{-Qj}^+) | P_{1k}^+ \rangle\rangle = (1 - 4C_0')\langle\langle B_{1,k-Q}(a_{Qj} + a_{-Qj}^+) | B_{1k}^+ \rangle\rangle$$

$$\langle\langle P_{1q_2}^+ P_{1q_1} P_{1,k+q_2-q_1-Q}(a_{Qj} + a_{-Qj}^+) | P_{1k}^+ \rangle\rangle \cong$$

$$\langle B_{1q_2}^+ B_{1q_2} \rangle_0 \langle\langle B_{1,k-Q}(a_{Qj} + a_{-Qj}^+) | B_{1k}^+ \rangle\rangle \left(\delta_{q_1 q_2} + \delta_{q_1, k-Q}\right) -$$

$$- \frac{1}{N}\sum_{k_1} \langle B_{q_2}^+ B_{q_2} \rangle_0 \left\{\delta_{q_2, k} + \delta_{k, k-Q}\right\} \langle\langle B_{1,k-Q}(a_{Qj} + a_{-Qj}^+) | B_{1k}^+ \rangle\rangle$$

Postupajući kao u slučaju kada je spin S = $\frac{1}{2}$, za jednačinu za funkciju Grina dobija se:

$$(E - \mathcal{E}_k)\langle\langle B_{1k} | B_{1k}^+ \rangle\rangle = \frac{i}{2u}(1 + 2C_0') + \frac{1}{N}\sum_q \langle B_q^+ B_q \rangle (J_{k+q_2-q_1} - J_{q_2-q_1})(\delta_{q_1 q_2} + \delta_{q_1, k-Q}) \times$$

$$\times \langle\langle B_{1k} | B_{1k}^+ \rangle\rangle + \frac{iS}{\sqrt{N}}\sum_{Qj} F_j(k,Q)\langle\langle B_{1,k-Q}(a_{Qj} + a_{-Qj}^+) | B_{1k}^+ \rangle\rangle +$$

$$+ \frac{1}{N\sqrt{N}}\sum_{jQq_2q_1} \Phi_j(k, Q, q_2, q_1)\langle B_{1q_2}^+ B_{1q_1} \rangle \langle\langle B_{1,k-Q}(a_{Qj} + a_{-Qj}^+) | B_{1k}^+ \rangle\rangle (\delta_{q_1 q_2} + \delta_{q_1, k}) +$$

$$+ \frac{\lambda'}{N^2\sqrt{N}}\sum_{jQq_1q_2k} \Phi_j(k, Q, q_2, q_1)\langle B_{1q_2}^+ B_{1q_2} \rangle (\delta_{q_2, k} + \delta_{k, k-Q}) \times$$

$$\times \langle\langle B_{1,k-Q}(a_{Qj} + a_{-Qj}^+) | B_{1k}^+ \rangle\rangle \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{II.4.7}$$

Uvedimo još veličine:

$$M_{1k} = \frac{1}{N}\sum_{q}(J_k + J_q - J_0 - J_{q-k})\langle B^+_{1q}B_{1q}\rangle$$

$$D_{1j} = \frac{1}{N}\sum_{q}\langle B^+_{1q}B_{1q}\rangle\left\{\Phi_j(k,Q,q,q) + \Phi_j(k,Q,k,q) - \frac{2}{N}\sum_{q'}\Phi_j(k,Q,q_1,q)\right\}$$

Sada jednačina za funkciju Grina dobija konačno oblik:

$$(E - \mathcal{E}_{1k} - M_{1k})\langle\langle B_{1k}|B^+_{1k}\rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}(1 + 2C^1_0) +$$

$$+ \frac{iS}{N}\sum_{Qj}F_j(k,Q)\langle\langle B_{1,k-Q}(a_{Qj} + a^+_{-Qj})|B^+_{1k}\rangle\rangle$$

$$+ \frac{i}{\sqrt{N}}\sum_{Qj}D_j(k,Q)\langle\langle B_{1,k-Q}(a_{Qj} + a^+_{-Qj})|B^+_{1k}\rangle\rangle \ldots (\text{II}.4.8)$$

Za odredjivanje funkcija Grina $\langle\langle B_{1,k-Q}a_{Qj}|B^+_{1k}\rangle\rangle$ i $\langle\langle B_{1,k-Q}a^+_{-Qj}|B^+_{1k}\rangle\rangle$ tj. za njihovo izražavanje preko funkcija Grina $\langle\langle B_{1k}|B^+_{1k}\rangle\rangle$ postupićemo na način koji je potpuno analogan načinu kojim smo odredili ove veličine za slučaj spina $S = \frac{1}{2}$. U daljem radu nećemo ponavljati ovaj postupak, već će mo napisati krajnji rezultat do koga nije teško doći opisanim postupkom.
Polazeći od hamiltonijana:

$$H^{(0)}_S = SJ_0\sum_n B^+_{1n}B_{1n} - S\sum_{nm}{}' I_{nm}B^+_{1n}B_{1m}$$

$$H^{(0)}_F = \sum_{qj}\hbar\omega_{qj}\, a^+_{qj}a_{qj}$$

$$H^{(0)}_{S,F} = -S\sum_{nm}\nabla_{nm}I_{nm}(U_n - U_m)(B^+_{1n}B_{1m} - B^+_{1n}B_{1n})$$

i postupajući na napred opisan način, dobija se:

$$\langle\langle B_{1,k-Q}\,a^+_{-Qj}|B^+_{1k}\rangle\rangle = \frac{iS}{\sqrt{N}}\frac{1}{E - \mathcal{E}_{1,k-Q} + \lambda_{Qj}}\left\{F_j(k-Q,-Q)\langle a^+_{Qj}a_{Qj}\rangle_0 +\right.$$

$$\left. + \sum_{p}\langle B^+_{1p}B_{1p}\rangle(\delta_{Q,0} + \delta_{Q,k-p})F_j(p,-Q)\right\}\langle\langle B_{1k}|B^+_{1k}\rangle\rangle \ldots (\text{II}.4.9)$$

$$\langle\langle B_{1,k-q}\, a_{qj} \,|\, B_{1k}^{+}\rangle\rangle = \frac{iS}{\sqrt{N}} \frac{1}{E-\mathcal{E}_{1,k-q}-\lambda_{qj}} \times$$

$$\times \left\{ F_j(k-q,-q) + F_j(k-q,-q)\langle a_{qj}^{+} a_{qj}\rangle_0 + \right.$$

$$+ \sum_p \langle B_{1p}^{+} B_{1p}\rangle_0 (\delta_{q,0} + \delta_{q,k-p}) F_j(p,-q) \times$$

$$\times \langle\langle B_{1k} \,|\, B_{1k}^{+}\rangle\rangle \qquad \ldots \ldots (II.4.10)$$

Ubacujući nove izraze II.4.9 i II.4.10 u II.4.8 jednačina za funkciju Grina dobija sledeći oblik:

$$(E-\mathcal{E}_{1k}-M_{1k})\langle\langle B_{1k} | B_{1k}^{+}\rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}(1+2C_0) +$$

$$+ \frac{S^2}{N} \left\{ \sum_{qj} F_j^2(k,q) \left[\frac{1+\langle a_{qj}^{+} a_{qj}\rangle + \langle B_{k-q}^{+} B_{k-q}\rangle}{E-\mathcal{E}_{1,k-q}-\lambda_{qj}} + \frac{\langle a_{qj}^{+} a_{qj}\rangle - \langle B_{k-q}^{+} B_{k-q}\rangle}{E-\mathcal{E}_{1,k-q}-\lambda_{qj}} \right] \right\} \times$$

$$\times \langle\langle B_{1k} \,|\, B_{1k}^{+}\rangle\rangle +$$

$$+ \frac{S}{N^2} \sum_{qj\tilde{q}} F_j(k,q) \frac{\langle B_{1\tilde{q}}^{+} B_{1\tilde{q}}\rangle_0}{E-\mathcal{E}_{1,k-q}-\lambda_{qj}} \left\{ \Phi_j(k,q,\tilde{q},\tilde{q}) + \Phi_j(k,q,k,\tilde{q}) - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{N} \sum_{\tilde{q}_1} \Phi_j(k,q,\tilde{q}_1,\tilde{q}) \right\} \langle\langle B_{1k} \,|\, B_{1k}^{+}\rangle\rangle$$

Zakon disperzije glasi:

$$E_k = \mathcal{E}_{1,k} + M_{1k} + \frac{S^2}{N}\sum_{qj} F_j^2(k,q)\Big\{ \frac{1+\langle a_{qj}^+ a_{qj}\rangle + \langle B_{k-q}^+ B_{k-q}\rangle}{E-\mathcal{E}_{1,k-q}-\lambda_{qj}} +$$

$$+ \frac{\langle a_{qj}^+ a_{qj}\rangle - \langle B_{k-q}^+ B_{k-q}\rangle}{E-\mathcal{E}_{1,k-q}+\lambda_{qj}} +$$

$$+ \frac{S}{N^2}\sum_{qj\tilde{q}} F_j(k,q)\frac{B_{\tilde{q}}^+ B_{\tilde{q}}}{E-\mathcal{E}_{1,k-q}-\lambda_{qj}}\Big\{\Phi_j(k,q,\tilde{q}_1\tilde{q}) + \Phi_j(k,q,k\tilde{q}) -$$

$$- \frac{2}{N}\sum_{\tilde{q}_1}\Phi_j(k,q,\tilde{q}_1\tilde{q})\Big\}$$

Zakon disperzije u nultoj aproksimaciji je:

$$E_k^{(0)} = \mathcal{E}_{1,k} + M_{1,k}$$

Zakon disperzije u prvoj aproksimaciji će mo dobiti kada izraz II.4.12 zamenimo u izraz II.4.11:

$$E_k^{(1)} = \mathcal{E}_{1,k} + M_{1,k} + \frac{S^2}{N}\sum_{qj} F_j^2(k,q)\cdot\Big\{\frac{1+\langle a_{qj}^+ a_{qj}\rangle + \langle B_{1,k-q}^+ B_{1,k-q}\rangle}{\mathcal{E}_{1k}+M_{1k}-\mathcal{E}_{1,k-q}-\lambda_{qj}} +$$

$$+ \frac{\langle a_{qj}^+ a_{qj}\rangle - \langle B_{1,k-q}^+ B_{1,k-q}\rangle}{\mathcal{E}_{1,k}+M_{1k}-\mathcal{E}_{1,k-q}+\lambda_{qj}}\Big\} + \frac{S}{N^2}\sum_{qj\tilde{q}} F_j(k,q)\,\times$$

$$\times \frac{\langle B_{1\tilde{q}}^+ B_{1\tilde{q}}\rangle}{\mathcal{E}_{1k}+M_{1k}-\mathcal{E}_{1,k-q}-\lambda_{qj}}\Big\{\Phi_j(k,q,\tilde{q}_1\tilde{q}) + \Phi_j(k,q,k\tilde{q}) - \frac{2}{N}\sum_{\tilde{q}_1}\Phi_j(k,q,\tilde{q}_1\tilde{q})\Big\}$$

U izrazu II.4.13 možemo zanemariti veličinu M_k, pošto je mala u odnosu na ostale veličine koje figurišu u imeniocima, sem u delu gde se u broiocu nalazi jedinica. Ako ovaj zadnji član razvijemo u red, za zakon disperzije dobijamo:

$$E_k = \mathcal{E}_{1,k} + M_{1,k} + \frac{S^2}{N}\sum_{q_j} F_j^2(k,q)\left\{\frac{1+\langle a_{qj}^{+}a_{qj}\rangle_0 + \langle B_{1,k-q}^{+}B_{1,k-q}\rangle_0}{\mathcal{E}_{1,k}-\mathcal{E}_{1,k-q}-\lambda_{qj}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\langle a_{qj}^{+}a_{qj}\rangle_0 - \langle B_{1,k-q}^{+}B_{1,k-q}\rangle_0}{\mathcal{E}_{1,k}-\mathcal{E}_{1,k-q}+\lambda_{qj}}\right\} -$$

$$-\frac{S^2}{N}\sum_{q_j}\frac{M_{1,k}}{(\mathcal{E}_{1,k}-\mathcal{E}_{1,k-q}-\lambda_{qj})^2}F_j^2(k,q) +$$

$$+\frac{S}{N^2}\sum_{q_j\tilde{q}} F_j(k,q)\frac{\langle B_{\tilde{q}}^{+}B_{\tilde{q}}\rangle}{\mathcal{E}_{1,k}-\mathcal{E}_{1,k-q}-\lambda_{qj}}\left\{\bar{\Phi}_j(k,q,\tilde{q},\tilde{q}) + \right.$$

$$\left. + \bar{\Phi}_j(k,q,k,\tilde{q}) - \frac{2}{N}\sum_{\tilde{q}_1}\bar{\Phi}_j(k,q,\tilde{q}_1,\tilde{q})\right\} \quad \ldots \quad (\text{II}.4.3)$$

Z A K L J U Č A K

U ovom radu nadjen je zakon disperzije za magnone uz uračunavanje doprinosa i od harmonijskog i od anharmonijskog dela operatora spin - fonon interakcije. U odnosu na dosad izvršene račune koji su bili izvedeni bez uračunavanja anharmonijskog dela operatora spin - fonon interakcije dobijena je popravka:

$$\delta E(\vec{k}) = -\frac{S^2}{N}\sum_{Qj} F_j^2(k,Q)\,\frac{M_{1,k}}{\left(\mathcal{E}_{1,k}-\mathcal{E}_{1,k-Q}-\lambda_{Qj}\right)^2} +$$

$$+\frac{S}{N^2}\sum_{Qj\tilde{q}} F_j(k,Q)\,\frac{\langle B^+_{1\tilde{q}} B_{1\tilde{q}}\rangle}{\mathcal{E}_{1,k}-\mathcal{E}_{1,k-Q}-\lambda_{Qj}}\,\times$$

$$\times\left\{\Phi_j(k,Q,\tilde{q},\tilde{q}) + \Phi_j(k,Q,k,\tilde{q}) - \frac{2}{N}\sum_{\tilde{q}_1}\Phi_j(k,Q,\tilde{q}_1,\tilde{q})\right\}$$

Ranije je korišćen samo deo zakona disperzije koji je dobijen u ovom diplomskom radu i to:

$$E(\vec{k}) = \mathcal{E}_{1,k} + M_{1,k} + \frac{S^2}{N}\sum_{Qj} F_j^2(k,Q)\left\{\frac{1}{\mathcal{E}_{1,k}-\mathcal{E}_{1,k-Q}-\lambda_{Qj}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\langle a^+_{Qj} a_{Qj}\rangle + \langle B^+_{1,k-Q} B_{1,k-Q}\rangle}{\mathcal{E}_{1,k}-\mathcal{E}_{1,k-Q}-\lambda_{Qj}} + \frac{\langle a^+_{Qj} a_{Qj}\rangle - \langle B^+_{1,k-Q} B_{1,k-Q}\rangle}{\mathcal{E}_{1,k}-\mathcal{E}_{1,k-Q}+\lambda_{Qj}}\right\}$$

Poredjenjem ovih dvaju izraza vidi se da ranije nisu dobijene sve popravke, u zakonu disperzije, koje su proporcionalne, koncentraciji elementarnih ekscitacija, pa prema tome, korekcija anharmonijskog koeficijenta Bloh - Dajsonove formule nije bila tačna.

Na kraju, treba napomenuti, da je prilikom izračunavanja korišćen metod dvovremenskih temperaturskih funkcija Grina, ali na način koji se razlikuje od standardnog prilaza ovom problemu. Ove razlike su sledeće:

1. Sistem jednačina za funkciju Grina formiran je odmah u impulsnom prostoru. Standardan prilaz sadrži formiranje sistema jednačina u konfiguracionom prostoru.

2. Furije - lik komutatora spinskih operatora sa hamilto - nijanom izražavan je preko Boza operatora i dekuplovanje funkci - ja Grina vršeno je primenom Vikove teoreme koja je za Boze operatore definisana u standardnom prikazu (Tjablikov). Obično se dekuplovanje vrši u Pauli reprezentaciji i to dovodi do grešaka pri izračunavanju termodinamičkih karakteristika na niskim temperaturama, čak i u slučaju kad se ne uzme u obzir spin - fonon interakcija.

Ispravnost ovakvog prilaza testiran je na primeru feromagnetika bez spin - fonon interakcije i pokazano je da on daje ispravan rezultat za magnetizaciju koju je Dajson dobio mnogo težim računom.

факултета НОВИ САД

Литература:

1. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц: „Квантовая механика" „Физматгиз", Москва 1964

2. С. В. Тябликов: „Методи квантовой теории магнетизма" „Наука", 1965 Москва

3. Charles Kittel: „Uvod u fiziku čvrstog stanja" „Savremena administracija", Beograd 1970.

4. R. Đorđević, S. Stanojević, R. Žakula „Heisenberg ferromagnet in the quasi-Pauli Picture" Institut za nuklearnu fiziku „Boris Kidrič", Beograd 1971

5. B. S. Tošić, F. R. Vukajlović: „Physica status solidi (b)" 57, K99 (1973)

6. E. N. Yakovlev, Fiz. tverd. Tela 4, 594 (1962)

7. E. Pytte, Ann. Phys. (USA) 32, 377 (1965)

8. V. N. Koscheev and M. A. Krivoglaz, Fiz. tverd. Tela 3, 1541 (1961)

9. V. M. Agranovič i B. S. Tošić, Zh. eksper. teor. fiz. 53, 149 (1967.)

10. F. J. Dyson, Phys. Rev. 102, 1217 (1965)