

UNIVERSITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Природно-математички факултет

Радна заједница заједничких послова

СОУ НОВИ САД

Пријемник:		- 6. IX. 1985	
Оп. јед.	Фрд.	Локал	Напомене
03	10/23		

SOLITONI U JEDNODIMENZIONALnim  
FEROMAGNETICIMA SA PLANARNOM  
ANIZOTROPIJOM

- DIPLOMSKI RAD -

Vučurević Vasa

Novi Sad, septembar 1985.

Zahvaljujem se dr Mariju Škrinjaru  
na pomoći prilikom izrade ovoga  
rada

Vučurević Vasa

SADRŽAJ:

- UVOD: a) Usamljeni talasi na vodi  
b) Mehanizam nastajanja usamljenih talasa  
c) Osnovne jednačine koje karakterišu solitone  
d) Gann-ov efekat
1. HAMILTONIJA JEDNODIMENZIONALNOG FEROMAGNETA U KONTINUALNOJ APROKSIJACIJI
  2. SOLITONSKO REŠENJE HAMILTONOVIH JEDNAČINA
  3. ENERGIJA, IMPULS I MAGNETIZACIJA FEROMAGNETNOG LANCA U PRISUSTVU SOLITONA
  4. KLASIČNO KVANTOVANJE I MAGNETIZACIJA SOLITONA
  5. ZAKLJUČAK
  6. LITERATURA

U V O D

a) Usamljeni talasi na vodi

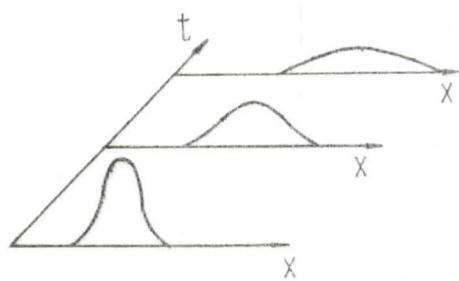
Istorija solitona počela je u Edinburgu 1834. godine radovima John-a Scott-a Russell-a. U to vreme razmišljalo se o mogućnostima organizacije plovidbe parobroda po unutrašnjim kanalima Škotske. Russell je posmatrao osopenosti prostiranja talasa na vodi. Jednom je, radeći na tome, posmatrao kretanje šlepa koga su sa obale kanala vukla dva konja. Kada se šlep naglo zaustavio, od njega se odvojio "usamljeni talas", odnosno jedno jasno izraženo zaobljeno povišenje nivoa vode visine oko 0,3 m, širine oko 0,5 m i širine po frontu oko 10 m. Ovo povišenje nivoa kretalo se bez promene oblika i bitno ne menjajući brzinu, čak i po nekoliko kilometara.

Srođni talasi ovima, nastalim u plitkom kanalu, su cunami, talasi nastali na okeanu kao posledica podvodnih tektonskih poremećaja. Oni se kreću огромним brzinama (nekoliko stotina km/h), a dostižu visinu i do 50 m. Vrlo su česti na obalama tihog okeana jer su тамо tektonski uslovi vrlo nestabilni.

b) Mehанизам nastajanja usamljenih talasa

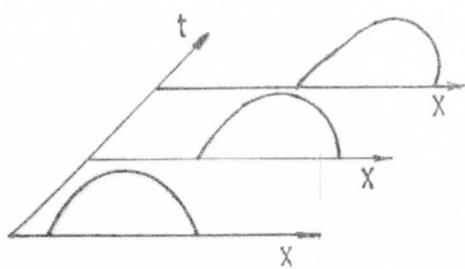
Pretpostavimo da se u nekoj sredini formirao talasnji paket. Ako zanemarimo trenje, i ako pretpostavimo da se svi njegovi delovi prostiru istom brzinom, on će se kretati bez promene oblika. Ako bismo "uključili" trenje, talas bi se brzo "ugasio" usled neizbežnih gubitaka energije. Ali nije trenje jedini uzrok promene oblika talasa. Ako talas ima

složeni oblik već u momentu svog nastajanja (tj. ako se može predstaviti kao superpozicija harmonijskih talasa) i ako brzina prostiranja talasa zavisi od njegove talasne dužine doći će do promene oblika talasa. Pojava zavisnosti brzine talasa od njegove talasne dužine naziva se disperzija. Razmotrićemo malo pobliže nastalu promenu oblika. Usled disperzije će jedan deo grupe sve više pređi napred nego što je to učinio u sredini, i drugi će sve više zaostajati, usled čega će doći do njegovog "razmazivanja". Ovaj proces prikazan je na slici 1.



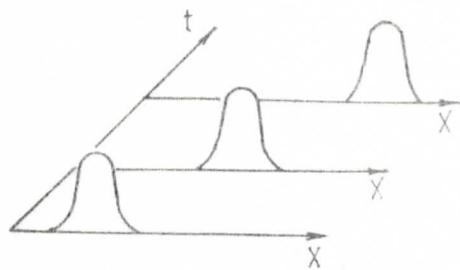
Slika 1.

Oblik talasa može da se promeni i ako sredina nema disperziju i ako odsustvuje trenje. Ovo se događa u nelinearnoj sredini. Nelinearnom sredinom se naziva sredina čija svojstva zavise od stanja sredine. U nelinearnoj sredini talas će menjati svoju strminu. Promena oblika talasa usled nelinearnosti prikazana je na slici 2.



Slika 2.

Ako sredina nema disperziju niti nelinearnost, a uz to je trenje zanemarljivo, talas će se prostirati kroz nju bez promene oblika. Međutim kada se on nađe u sredini koja poseduje i disperziju i nelinearnost uz zanemarljivo trenje, talas može da se prostire ne menjajući svoj oblik i brzinu. To se dešava kada promena oblika, koja nastane usled disperzije u potpunosti biva kompenzovana promenom oblika usled nelinearnosti. Ovakav talas koji ne menja oblik prostirući se kroz sredinu sa disperzijom i nelinearnošću naziva se soliton ili usamljeni talas. Njegovo prostiranje prikazano je slikom 3.



Slika 3.

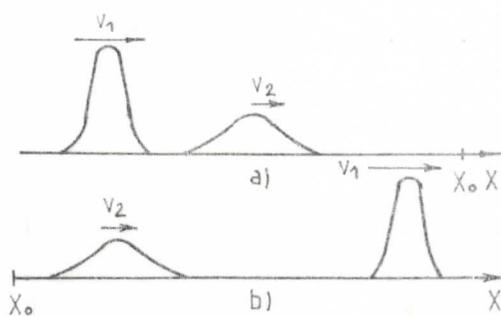
c) Osnovne jednačine koje karakterišu solitone

Naučnici J. D. Korteweg i G. de Vries su koncem XIX veka rešavali jednačinu talasnog kretanja u pravougaonom kanalu sa vodom i utvrdili da među mnogim rešenjima postoji i takvo partikularno rešenje koje opisuje talase koji se u nelinearnoj sredini sa disperzijom kreću bez promene oblika, tj. soliton. Ovim je izvršena matematička obrada onoga što je Russell kvalitativno opisao. Za slučaj male dubine kanala ova jednačina glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (\text{C.l.})$$

gde je  $u$  - srednja brzina tečnosti u datom preseku,  $\alpha$  je parametar koji karakteriše disperziju i iznosi  $\alpha = \frac{\sqrt{gh^3}}{6}$ . Nelinearnost sredine se ogleda u nelinearnosti diferencijalnih jednačina koje opisuju kretanje talasa kroz tu sredinu što u ovom slučaju pokazuje drugi član leve strane jednačine. Jednačina (C.l.) naziva se jednačina Korteweg-de Vries-a ili skraćeno KdV. (Videti /2/).

Solitonii opisani jednačinom KdV imaju svojstvo očuvanja oblika i brzine posle uzajamnog dejstva. Ovo je prikazano na slici 4.a i 4.b gde su prikazana 2 solitona koja se kreću različitim brzinama u istom pravcu pre i posle uzajamnog dejstva.



Slika 4.

Osobine očuvanja oblika i brzine posle uzajamnog dejstva uz lokalizaciju u prostoru podsećaju na osobine nekih elementarnih čestica (proton, elektron, neutron). Otuda i potiče termin soliton. Sve do 1965 korišćen je termin usamljeni talas (solitary wave), što je kasnije skraćeno na "soliton". Prvi deo reči potiče od engleskog solitary=usamljen, a završetak reči podseća na termine elektron, proton, što ukazuje na sličnost sa elementarnim česticama.

Voda nije jedina sredina kroz koju se prostiru solitonii. Oni se prostiru kroz plazmu, poluprovodnike, superprovodnike, feromagnetike, neke višesloške strukture (npr. belan-

čevine, ogromne molekule sastavljene iz amino-kiselina međusobno spojenih peptidnim vezama. Ovi molekuli zahvaljujući pravilnom rasporedu motiva podsećaju na kristalni niz). Iako postoji veliki broj sredina u kojim nastaju soliton i iako je priroda talasa koji nastaju u njima, u opštem slučaju različita, postoji nešto što je za sve njih slično ili čak identično. Reč je o jednačinama koje opisuju prostiranje solitona kroz ove sredine. Ipak, parametri koji ulaze u ove jednačine, imaju za svaki posebni slučaj posebni fizički smisao.

Npr. za opisivanje samofokusiranja u nelinearnoj optici u nekim problemima fizike plazme koristi se nelinearna jednačina Schrödinger-a (N.Š.), koja u jednodimenzionalnom slučaju glasi:

$$\left( \frac{\hbar}{m} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + G |\Psi|^2 \right) \Psi = 0 \quad (C.2.)$$

gde je  $\hbar/2m$  parametar koji karakteriše disperziju, a  $G$  parametar koji karakteriše nelinearnost. (Videti /2/ i тамо navedene reference).

Neki problemi teorije superprovodnosti i feromagnetizma rešavaju se pomoću jednačine Sine-Gordona (skraćeno S.G.) koja u jednodimenzionalnom slučaju glasi:

$$c_s^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = \omega_0^2 \sin \Psi \quad (C.3.)$$

gde parametar  $c_s^2$  karakteriše disperziju, a  $\omega_0^2$  nelinearnost.

Sine-Gordon-ova jednačina je specijalni slučaj Klein-Gordon-ove jednačine koja glasi:

$$c_s^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial t^2} = \omega_0^2 \frac{dV}{d\Psi} \quad (C.4.)$$

gde je  $V=V(\Psi)$  zadani potencijal (za S.G.,  $V=1-\cos \Psi$ )

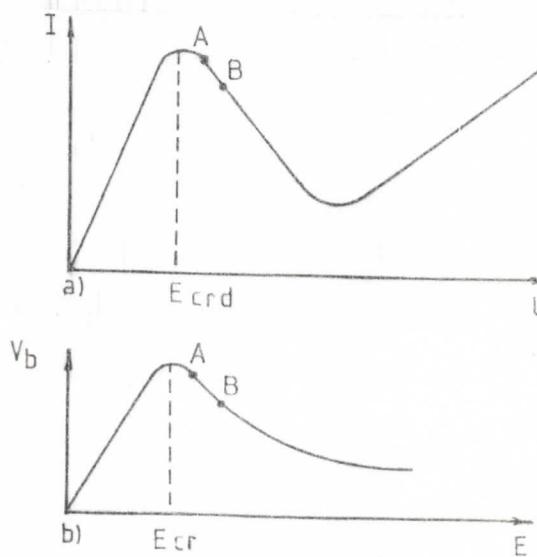
(Opširnije o (C.3.) i (C.4.) videti u /3/).

d) Gann-ov efekat

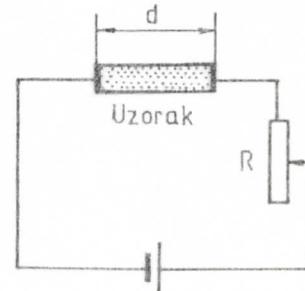
Pokazaćemo sada na jednom primeru nastajanje solitona u poluprovodničkom kristalu GaAs.

GaAs je poluprovodnik n-tipa. Gann je proučio ponašanje ovoga kristala u jakim el. poljima i utvrdio da se, kada jačina el. polja u uzorku dostigne kritičnu vrednost ( $E_{cr} = 3 \times 10^5$  V/m), u njemu javljaju stroga periodična oscilacija el. struje sa velikom amplitudom. Ove oscilacije posledica su kretanja oblasti sa jakim el. poljem po uzorku. Za ove oblasti čije se osobine jasno razlikuju od osobina susednih oblasti, uobičajeni naziv je domen. Obzirom da je ovde reč o razlici u električnim osobinama, ove oblasti ćemo nazvati električnim domenima. Pokazaćemo kako nastaje jedan takav domen.

GaAs ima posebnu Volt-Ampersku karakteristiku. Ona je data na slici 5.a, a na slici 5.b je data zavisnost brzine drifta elektrona od jačine el. polja u uzorku.



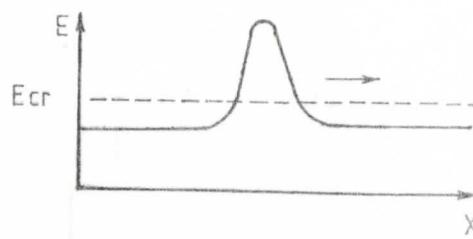
Slika 5



Slika 6

Uzorak je postavljen u el. kolo prikazano na slici 6. Pretpostavićemo da je el. polje u uzorku homogeno i da je

jačina el. polja  $E \geq E_{cr}$ . Ako se sada usled neke fluktuacije u jednom delu uzorka pojavi veća gustoća naclektrisanja nego što je srednja, u tom će delu, na osnovu Gausove teoreme, i električno polje biti jače. Taj deo će biti u stanju koje je na karakteristici označeno tačkom B, dok će preostali uzorak biti u stanju na karakteristici označenom tačkom A. Usled ovoga elektroni koji se nalaze u sektoru gde je nastala fluktuacija sporije će driftovati, pa će u ovaj sektor pritići elektroni koji se nalaze iza ovog sektora, bliže katodi, dok će elektroni koji se nalaze ispred ovog sektora sve više odmiciti. Na ovaj način će jačina el. polja u sektoru gde je nastala fluktuacija još više rasti, što će dovesti do još većeg njegovog usporavanja. (U ovoj etapi formiranja domena dolazi do izražaja efekat disperzije: različite oblasti kreću se različitim brzinama). Ovaj će proces trajati sve dotle dok jačina el. polja ispred i iza fluktuacije ne opadne ispod  $E_{cr}$ . Od tada efekat nelinearnosti počinje da kompenzuje efekat disperzije. Smatrajući  $E$  ispod  $E$  u delovima oko sektora sa jakim el. poljem, smanjuje se brzina drifta elektrona u tim sektorima i dolazi do izjednačavanja brzina drifta u sektorima sa i bez jakog el. polja. U tom trenutku nema više prelazaka elektrona iz sektora u sektor i stvoren je stabilni el. domen koji ujedno predstavlja i soliton, koji se kreće kao što je prikazano na slici 7.



Slika 7

Kada dode na anodu, soliton se raspada (jer sada prelazi u drugu sredinu u kojoj sada ne važe potrebni uslovi za njegovu egzistenciju) i el. polje u uzorku povećava se preko  $E_{cr}$ , pa opet nastaje novi soliton (u blizini katode). Periodično ponavljanje ovog procesa izaziva oscilacije el. struje čiji je period upravo сразмеран dužini uzorka d. Kada prenosimo neku informaciju ili kada je želimo sačuvati, trudimo se da je sačuvamo u obliku što približnijem onom početnom. Soliton se zbog svoje velike stabilnosti nameće kao sredstvo prenosa i čuvanja informacija. Ovo je jedan od razloga što se solitoni danas toliko proučavaju.

Mali broj i velika sličnost jednačina koje opisuju veliki broj suštinski različitih pojava ukazuje na fundamentalnost shvatanja solitona. Osim toga ovo nam omogućuje da vršimo modeliranja nekih procesa, pa da, recimo, saznajemo nešto o elementarnim česticama vršeći eksperimente u nekom čvrstom telu.

## 1. HAMILTONIJAN JEDNODIMENZIONALNOG FEROMAGNETA U KONTINUALNOJ APROKSIMACIJI

U ovom radu bavićemo se magnetnim solitonima u feromagnetnim dielektricima. Pokušaćemo da objasnimo njihovo nastajanje, da izračunamo njihovu brzinu, impuls i energiju. U tom cilju tretiraćemo najjednostavniji slučaj feromagnetne sredine - feromagnetni lanaca. Jednodimenzionalni feromagnetik u prirodi ne postoji, on je samo fizička idealizacija koja u sebi sadrži pretpostavku da je međulančana interakcija zanemarljiva u poređenju sa interakcijom jona unutar lanca. (Videti npr. /4/).

Kod feromagnetika je ukupni magnetni momenat različit od nule i bez primjenjenog magnetnog polja. Ovo ukazuje na to da postoji neka interakcija koja usmerava magnetne momente jona unutar niza tako da budu paralelni. Ova interakcija naziva se interakcija izmene, a njoj odgovarajuća energija - energija izmene. Magnetni momenti jona u čvorovima feromagnetskog niza imaju spinsko poreklo. Interakcija izmene odražava činjenicu da energija sistema zavisi od prostorne simetrije talasnih funkcija sistema, odnosno ukupnog spina sistema. Osim interakcije izmene magnetni momenti u feromagnetu interaguju i neposredno, spin-spinskom i spin-orbitalnom interakcijom, koja takođe zavisi od međusobne orijentacije magnetnih momenata, ali je u feromagnetskoj sredini ona daleko slabija (jer zavisi od trećeg stepena rastojanja).

Energija interakcije izmene za dva jona u čvoru n i m data je izrazom:

$$E_{nm} = -J(n-m) \vec{S}_n \cdot \vec{S}_m \quad (1.1.)$$

gde je  $\vec{S}_n$  ukupni spin jona u čvoru n ( $\hbar=1$ ), a  $J(n-m)$  je integral izmene, za koji važi sledeća formula:

$$J(n-m) \sim \int \frac{e^2}{|n-m|}, \quad (1.2.)$$

gde je  $\int$  integral prekrivanja talasnih funkcija jona u čvoru  $n$  i  $m$ , koji eksponencijalno opada sa rastojanjem. Iz (1.2.) zaključujemo  $I(n-m)=I(m-n)$ . Obzirom da joni ne interaguju sami sa sobom  $I(0)=0$ . Znajući da za proste feromagnetičke uvek važi  $I(n-m) \geq 0$  iz (1.1.) možemo zaključiti da  $E_{nm}$  ima minimalnu vrednost ako je  $\vec{S}_n$  paralelno sa  $\vec{S}_m$  što znači da interakcija izmene favorizuje ovakav raspored spinova.

Interakcija izmene favorizuje međusobnu paralelnu orijentaciju, ali ne odreduje u kom će se pravcu orijentisati spinovi. U feromagneticima, međutim, postoji pravci duž kojih se oni lakše magnetišu, tj. duž kojih se sumarni spin "radije" orijentiše. Ovi pravci nazivaju se ose luke magnetizacije, a energija koja omogućava ovakvo ponašanje naziva se energija anizotropije.

Za feromagnetni niz sa jednojonskom anizotropijom, čiji joni u čvorovima miruju hamiltonijan glasi:

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{nm} I(n-m) \vec{S}_n \cdot \vec{S}_m + A \sum_n (\vec{S}_n^z)^2 \quad (1.3.)$$

(Videti npr. /5/). Ovu bi formulu trebalo pisati u operatorskom obliku, međutim u teoriji feromagnetizma sa dobrom aproksimacijom možemo tretirati operatore spina kao klasične vektore, tako da u ovom slučaju hamiltonijan prelazi u klasičnu Hamiltonovu funkciju. U ovoj formuli prvi član predstavlja energiju izmene, a drugi energiju anizotropije. Faktor  $1/2$  u prvom članu стоји да би се избегло dvostruko sumiranje. U zavisnosti od znaka konstante anizotropije, razlikujemo planarnu anizotropiju ( $A > 0$ ) ili osnu anizotropiju ( $A < 0$ ). Ako stavimo u (1.3.) redom  $S^x = S^x_{\max} = S$ , па затим  $S^y = S^y_{\max} = S$  i na kraju  $S^z = S^z_{\max} = S$  videćemo da je pri  $A > 0$  u prva dva slučaja energija niža nego u trećem, što znači da je treće stanje energetski nepovoljnije. Za osnovno stanje uzećemo stanje kada su svi spinovi međusobno paralelni.

Dakle u osnovnom stanju pri  $A > 0$  favorizovano je usmeravanje spinova u X-Y ravni zbog čega je ovaj slučaj i dobio ime. Istim rezonovanjem zaključujemo da je pri  $A < 0$  favorizovano usmeravanje spinova duž z-ose.

Ako se feromagnetik nalazi u magnetnom polju, hamiltoniju (1.3.) treba dodati član  $-\gamma \mu_B \sum \vec{B} \cdot \vec{S}_n$ , gde je  $\mu_B$  Borov magneton, a  $\vec{B}$  jačina magnetnog polja.<sup>n</sup> Da bi z-osa bila i osa kvantizacije za  $A > 0$ , dovoljno je da je  $g \cdot BS > AS^2$ .

Uvodeći smenu  $n-m=j$ ,  $n=i$  u (1.3.) dodajući član koji potiče od interakcije sa spoljašnjim magnetnim poljem dobijamo :

$$H = -\frac{1}{2} \sum_{ij} J(j) \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{j+i} + A \sum_i (S_i^z)^2 - g \mu_B B \sum_i S_i^z \quad (1.4.)$$

Nasuprot interakciji izmene koja teži da sve spinove uredi paralelno, stoji topotno kretanje koje teži da razori spinsku uređenost. To znači da je na nižim temperaturama uređenost veća, tj. da na absolutnoj nuli vlada potpuna uređenost. Na Kirijevoj temperaturi feromagnetik prelazi u paramagnetsko stanje što znači da se na toj temperaturi energija kretanja izjednačila sa energijom izmene i u potpunosti uništila spinsku uređenost. Ovaj proces se odvija na sledeći način: topotni kvant smanjuje z-projekciju spina za jedinicu na jednom čvoru, a zatim se ova promena prenosi interakcijom izmene kroz feromagnetik. Pojavljuje se talas zaljuljanih spinova. Obzirom da spinovi međusobno "interaguju" ovo se pobuđenje ne može vezati za jedan jon, već samo možemo govoriti o pobuđenju sistema kao celine. Elementarno pobuđenje spinskog sistema naziva se magnon. Sa porastom temperature intenzitet spinskih talasa, odnosno broj magnona raste.

Vratimo se sada na izraz (1.2.). Rekli smo da  $\gamma$  opada eksponencijalno sa rastojanjem, a to znači da će interakcija izmene između udaljenih jona biti daleko slabija od

interakcije među najbližim jonima. Stoga mi možemo smatrati da su svi integrali izmene jednaki nuli osim onih koji odgovaraju interakciji između najbližih jona. Ova se aproksimacija zove aproksimacija najbližih suseda.

Usled toga izraz (1.4.) se transformiše u:

$$H = \frac{J}{2} \sum_i (\vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1} + \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i-1}) + A \sum_i (S_i^z)^2 - g\mu_B \sum_i S_i^z \quad (1.5.)$$

gde je  $J=I(1)=\text{const.}$

Broj atoma u feromagnetskom nizu je velik, a rastojanja među njima mala ( $a \sim 10^{-10} \text{m}$ ). Zato nećemo napraviti veliku grešku, ako ovaj niz proglašimo neprekidnim. Ovim se broj atoma u nizu proglašava beskonačnim. Sada atome više ne možemo indeksirati brojevima, već ih označavamo prostornim koordinatama, tako da

$$\vec{S}_i(t) \rightarrow \vec{S}(x, t) \quad (1.6.)$$

$$S_i^z(t) \rightarrow S^z(x, t) \quad (1.7.)$$

$$\vec{S}_{i+1}(t) \rightarrow \vec{S}(x+a, t) \quad (1.8.)$$

U skladu s tim, sumiranje po indeksu "i" zamenjujemo integracijom po  $x$ , tj.

$$\sum_i \rightarrow \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \quad (1.9.)$$

U (1.8.) i (1.9.) "a" predstavlja konstantu rešetke.

Razvićemo zatim  $S(x+a, t)$  u Taylorov red u okolini tačke  $(x, t)$ :

$$S(x+a, t) = (1 + a \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots) S(x, t) \quad (1.10.)$$

"a" je mnogo manje od jedinice pa i njegovi stepeni vrlo brzo teže nuli. Za to vreme parc. izvodi su male, konačne veličine, jer se spin ne menja brzo u zavisnosti od  $x$ . Ovo

nam ukazuje da  $a^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} S(x, t) \rightarrow 0$  kada je n već mali, prirođan broj. Mi ćemo zbog ovoga u izrazu (1.10.) zadržati članove kod kojih je  $n \leq 2$ , dok ćemo ostale zanemariti.

Uvrstićemo sada izraze (1.6.) – (1.10.) u (1.5.)

$$H = -\frac{JS^2}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} dx - \frac{Ja}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{S}(x, t) \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \vec{S}(x, t) dx + \frac{A}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} dx [S^z(x, t)]^2 - \\ - \frac{g\mu_B}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} S^z(x, t) dx \quad (1.11.)$$

Kada smo uveli kontinuum umesto konačnog broja atoma u nizu, dobili smo kao posledicu da nam je i energija postala beskonačna (suma od beskonačnog broja konačnih energija pojedinih atoma). Zbog ovoga funkcija H i ne može da nam predstavlja Hamiltonovu funkciju koja bi ulazila u Hamiltonove jednačine. Umesto nje uvodimo funkciju  $H'$ , relacijom:

$$H' = H + \frac{JS^2}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} dx - \frac{A}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} S^2 dx + g \frac{\mu_B}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} S dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi' dx \quad (1.12.)$$

i transformišemo podintegralnu funkciju u drugom članu hamiltonijana (1.11.)

$$\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{S}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (\vec{S} \cdot \frac{\partial \vec{S}}{\partial x}) - \left( \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \vec{S}^2}{\partial x} \right) - \left( \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 = \\ = - \left( \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 \quad (1.13.)$$

Radi kraćeg pisanja uzećemo konstantu rešetke za jedinicu dužine, tj.  $a=1$ . Upoređivanjem (1.11.) i (1.12.) uz korišćenje (1.13.) i  $a=1$  dobijamo:

$$\chi' = -g\mu_B(S^z - S) + \frac{J}{2} \left( \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 + A[S^z]^2 \quad (1.14.)$$

U daljnjem tekstu izrazićemo  $\vec{S}$  u sfernom koordinatnom sistemu:

$$S^x(x,t) = S \sin \varphi(x,t) \cos \psi(x,t) \quad (1.15.)$$

$$S^y(x,t) = S \sin \varphi(x,t) \sin \psi(x,t) \quad (1.16.)$$

$$S^z(x,t) = S \cos \varphi(x,t) \quad (1.17.)$$

i uvrstiti u (1.14.) uz  $\cos \varphi = u$ , što daje:

$$\mathcal{K}' = -g\mu_B BS(u-1) + \frac{JS^2}{2} \left[ \frac{u_x^2}{1-u^2} + (1-u^2)\dot{\psi}_x^2 \right] + AS^2(u^2-1) \quad (1.18.)$$

Indeks "x" u (1.18.) predstavlja parcijalni izvod npr.

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

## 2. SOLITONSKO REŠENJE HAMILTONOVIH JEDNAČINA

Uvedimo sad Hamiltonove jednačine (videti npr./6/). Kao konjugovane promenljive koristimo  $S^z$  i  $\phi$ .

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\delta H'}{\delta S^z} = \frac{H'}{S^z u} = \frac{1}{S} \left[ \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial u_x} \right) \right] \quad (2.1.)$$

$$-\frac{dS^z}{dt} = -\frac{S du}{dt} = \frac{\delta H'}{\delta \phi} = \left[ \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \mathcal{H}'}{\partial \phi_x} \right) \right] \quad (2.2.)$$

odnosno:

$$\sin \vartheta \frac{d\phi}{dt} = -B\mu_B B \sin \vartheta + 2AS \cos \vartheta \sin \vartheta + \quad (2.3.)$$

$$JS \left[ \dot{\vartheta}_{xx} - \sin \vartheta \cos \vartheta \dot{\phi}_x^2 \right].$$

$$\frac{d(\cos \vartheta)}{dt} = IS \frac{\partial}{\partial x} (\sin^2 \vartheta \dot{\phi}_x) \quad (2.4.)$$

Pretpostavimo da su  $\vartheta$  i  $\phi_x$  funkcije promenljive  $\xi = x - vt$ .

Ovom smenom prelazimo u sistem koji se kreće brzinom  $v$ , zajedno sa pobuđenjem, tako da će za  $\xi = 0$  ugao inklinacije  $\vartheta$ , tj. ugao koji vektor  $\vec{S}$  gradi sa z-osom biti maksimalan. Nasuprot tome za  $\xi = \pm\infty$   $\vartheta = 0$ ,  $\dot{\phi}_x = 0$ , jer tu sistem nije pobuđen pa spinovi ostaju usmereni kao na absolutnoj nuli. Tz ove smene neposredno sledi:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\xi}{dt} \frac{d}{d\xi} = -v \frac{d}{d\xi} \quad (2.6.)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad (2.7.)$$

Posle uvrštavanja (2.6.) i (2.7.) u (2.2.) i posle



integracije uz korištenje gore pomenutih graničnih uslova dobijamo:

$$\hat{\phi}_{\xi} = \frac{V}{1 + \cos \alpha} \quad (2.8.)$$

gde je  $V = \frac{v}{IS}$  redukovana brzina prostiranja pobuđenja.

Da bi smo integrisali jednačinu (2.3.) najpre u nju uvrstimo (2.6.) i (2.7.), a zatim uvodimo smenu:

$$\phi = \Omega t + \hat{\phi}(\xi) \quad (2.9.)$$

iz čega sledi:

$$\frac{d\phi}{dt} = \Omega - v \frac{d\hat{\phi}}{dt} \quad (2.10)$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \hat{\phi}_{\xi} = \frac{d\hat{\phi}}{d\xi} = \frac{d\hat{\phi}}{d\xi} \quad (2.11.)$$

što konačno daje:

$$\frac{\alpha^2}{\xi} = \frac{4\Gamma(1-u)}{(1+u)} \left[ \frac{1+u}{2} - \frac{D(1+u)^2}{4\Gamma} - \frac{v^2}{4\Gamma} \right] \quad (2.12.)$$

gde je:

$$\Gamma = \frac{g\mu_B B + \Omega}{IS}, \quad D = \frac{2A}{J}.$$

Iz uslova  $\frac{d\phi}{d\xi} = 0$  nalazimo uglove pri kojima je

inklinacija vektora prema z-osi ekstremno. Minimalni uгао inklinacije je, očigledno, nula, a maksimalni  $\Theta_0$ , određuje se iz jednačavanjem desne strane jednačine (2.12) sa nulom.

Smenom:

$$\Theta = 2\beta, \Theta_0 = 2\beta_0 \quad (2.13.)$$

(2.12.) transformišemo u:

$$\left(\frac{d\Theta}{d\xi}\right)^2 = \Gamma \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} \left(\cos^2 \beta - \frac{D}{\Gamma} \cos^4 \beta - \frac{v^2}{4\Gamma}\right) \quad (2.14.)$$

što pri maksimalnoj inklinaciji daje:

$$\cos^2 \beta_0 - \frac{D}{\Gamma} \cos^4 \beta_0 = \frac{v^2}{4\Gamma} \quad (2.15.)$$

Eliminisanjem  $\frac{v^2}{4\Gamma}$  iz (2.14.) i (2.15.), dobijamo:

$$\left(\frac{d\Theta}{d\xi}\right)^2 = \Gamma \frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} \left(\cos^2 \beta - \cos^2 \beta_0\right) \left(\cos^2 \beta + \cos^2 \beta_0 - \frac{\Gamma}{D}\right) \quad (2.16.)$$

U ovom radu bavićemo se samo feromagneticima sa planarnom anizotropijom  $a>0$ , tj.  $D>0$ . Integracijom (2.16.)

nalazimo:

$$\Psi^2 = \frac{\varphi_0^2}{1 + \frac{2h\varphi_0^2}{\sqrt{d}} \operatorname{sh}^2 \sqrt{d\Gamma} \xi} \quad (2.17.)$$

gde je:

$$\Psi = \sin \beta, \quad \varphi_0 = \sin \beta_0. \quad (2.18.)$$

$$h^2 = \frac{D}{\Gamma} + \frac{\left(1 - \frac{2D}{\Gamma}\right)^2}{4\left(1 - \frac{D}{\Gamma} - \frac{v^2}{4\Gamma}\right)} \quad (2.19.)$$

a d je pozitivna konstanta, data izrazom:

$$d = 1 - \frac{D}{\Gamma} - \frac{v^2}{4} \quad (2.20.)$$

Izraz (2.17.) podseća po obliku na solitonska rešenja Schrödingerove nelinearne jednačine (videti /2/) ili na solitonska rešenja drugih dif. jednačina (C.1.) - (C.4.) (videti /3/). Obično se rešenja ponašaju kao:

$$|\Psi|^2 \sim \frac{1}{\text{ch}^2 k \xi} .$$

Dakle izraz (2.17.) predstavlja solitonsko rešenje.

Iz (2.18.) zaključujemo:

$$\varphi^2 = \frac{S - S^z}{2S}, \quad (2.21.)$$

što znači da nam  $\varphi^2$  pokazuje koliko je smanjenje z-komponente spina na mestu  $\xi$ , odnosno koliko je feromagnetik na tom mestu namagnetisan.

U izrazu (2.17.),  $\varphi^2$  je realna veličina samo ako je  $d \geq 0$  iz čega sledi:

$$v^2 \leq 4(\Gamma - D) = v_{\max}^2 \quad (2.22.)$$

Leva strana ove nejednakosti uvek je veća ili jednaka nuli što znači :

$$\Gamma \geq D \quad (2.23.)$$

što predstavlja uslov postojanja solitona pri datim uslovima.

Iz (2.15.) možemo izraziti  $\cos^2 \beta_0$  i iz zahteva da  $\cos \beta_0$  bude realno dobijamo:

$$v^2 < \frac{r^2}{D} \equiv v_0^2 \quad (2.24.)$$

$v_0$  nazivamo granična redukovana brzina.

Kombinujući (2.15.) i (2.16.) uz uslov  $\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)^2 \geq 0$  dobijamo uslov za minimum brzine:

$$v^2 \geq 4D \cos^2 \beta_0 = v_{\min}^2 .$$

Ako analiziramo funkciju  $y = v_0^2 - v_{\max}^2 = \frac{r^2}{D} - 4(r - D) = \frac{1}{D}(r - 2D)^2$ , vidimo da je uvek veća ili jednaka nuli što znači da je  $v_0^2 \geq v_{\max}^2$ . Iz toga sledi da je interval promene brzine solitona

$$\begin{aligned} v_{\min}^2 &\leq v^2 \leq v_{\max}^2, \text{ ili:} \\ 4D \cos^2 \beta_0 &\leq v^2 \leq 4(r - D) \end{aligned} \quad (2.25.)$$

Eliminisanjem  $v^2$  iz ovog sistema nejednačina dobijamo uslov koji mora zadovoljavati  $r$ , pri datom  $D$ , ( $D$  je karakteristika feromagnetika, tj. zadati parametar) da bismo dobili solitonsko rešenje.

$$\frac{r}{D} \geq 1 + \cos^2 \beta_0. \quad (2.26.)$$

Dakle:

1º Ako je  $r \geq 2D$  solitonsko rešenje uvek postoji jer je uslov (2.26.) uvek ispunjen.

2º Ako je  $D < r < 2D$  solitonsko rešenje postoji samo ako je ispunjen uslov (2.26.).

3º Ako je  $r < D$  ne postoji solitonsko rešenje.

U slučaju kada je  $\Gamma = D$ ,  $\beta_0 = 0$ ,  $V = 0$  što odgovara nepobuđenom stanju feromagnetička. Treba naglasiti da gornji uslov za postojanje solitonskog rešenja važi za gore predpostavljene granične uslove i da bi uz druge granične uslove oni bili drugačiji.

Ako predpostavimo da je  $D = 0$  (tj.  $A = 0$ ) dobićemo rezulata za izotropni model feromagnetička:

$$\Psi = \frac{b}{\operatorname{ch} br^2 \xi} \quad (2.27.)$$

gde je:

$$b = \sqrt{1 - \frac{V^2}{4}} \quad (2.28.)$$

a uslov (2.25.) prelazi u:

$$v^2 \leq 4\Gamma, \quad (2.29.)$$

$$a \quad v_{\min} = 0$$

### 3. ENERGIJA, IMPULS I MAGNETIZACIJA FEROMAGNETNOG LANCA U PRISUSTVU SOLITONA

U eksperimentima se najčešće meri energija eksitacija u sistemu, kao funkcija impulsa (zakon disperzije), i magnetizacija. Sada ćemo izračunati te veličine za jednodimenzionalni feromagnet u prisustvu solitona.

Magnetizaciju sistema izračunavamo po formuli:

$$M_z = S \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos \Theta) d\xi \quad (3.1.)$$

Obično se ona definiše kao suma  $S^z$  komponenti nekog sistema. Međutim, u našem slučaju, nas ne zanima ova veličina, nego koliko je ukupno odstupanje spinova od potpuno uređenog osnovnog stanja, a upravo ovo određuje izraz (3.1.). Obzirom da u našem slučaju otklonjeni spinovi predstavljaju solitonsko pobuđenje, magnetizacija sistema je ujedno i magnetizacija solitona (unutrašnji stepen slobode solitona).

Energiju solitona definišemo relacijom:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H} d\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \left[ g\mu_B BS(1 - \cos \Theta) + \frac{J}{2} \left( \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 - AS(1 - \cos^2 \Theta) \right] \quad (3.2.)$$

Impuls sistema dat je relacijom:

$$P = S \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi (1 - \cos \Theta) \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \quad (3.3.)$$

videti //).

U sva tri integrala ćemo integraciju po smeniti integracijom po na sledeći način:

$$2 \int_{-\infty}^0 d\xi F(\Theta(\xi)) = 2 \int_0^{\beta_0} d\beta F(2\beta) \frac{d\xi}{d\beta}$$

U skladu sa ovim dobijamo:

$$M_z = \frac{4S}{\sqrt{\Gamma}} \int_0^{\beta_0} d\beta \frac{\sin \beta \cos \beta}{\sqrt{\cos^2 \beta - \frac{D}{\Gamma} \cos^4 \beta - \frac{V^2}{4\Gamma}}} \quad (3.4.)$$

$$E = g\mu_B B M_z + 4JS\sqrt{\Gamma} \int_0^{\beta_0} d\beta \left(1 - \frac{2D\cos^2 \beta}{\Gamma}\right) \frac{\cos \beta \sin \beta}{\sqrt{\cos^2 \beta - \frac{D}{\Gamma} \cos^4 \beta - \frac{V^2}{4\Gamma}}} \quad (3.5.)$$

$$P = 4Scos \beta_0 \left(1 - \frac{D}{\Gamma} \cos^2 \beta_0\right) \frac{1}{2} \int_0^{\beta_0} d\beta \frac{\sin \beta \cos \beta}{\cos^2 \beta - \frac{D}{\Gamma} \cos^4 \beta - \frac{V^2}{4\Gamma}} \quad (3.6.)$$

Da bi smo izračunali ove veličine, moramo rešiti integralne:

$$J_1 = \int_0^{\beta_0} d\beta Q(\beta), \quad Q(\beta) = \frac{\sin \beta \cos \beta}{\sqrt{\cos^2 \beta - \frac{D}{\Gamma} \cos^4 \beta - \frac{V^2}{4\Gamma}}} \quad (3.7.)$$

$$J_2 = \int_0^{\beta_0} d\beta Q(\beta) \cos^2 \beta \quad (3.8.)$$

$$J_3 = \int_0^{\beta_0} d\beta Q(\beta) \cos^{-2} \beta \quad (3.9.)$$

Ovde navodimo samo rešenja:

$$J_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Gamma}{D}} \left[ \arcsin \frac{\frac{2D}{\Gamma} - 1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_0^2}}} + \frac{\pi}{2} \right] \quad (3.10.)$$

$$J_2 = \frac{\Gamma}{2D} J_1 - \frac{\Gamma}{2D} \sqrt{1 - \frac{D}{\Gamma} - \frac{V^2}{4\Gamma}} \quad (3.11.)$$

$$J_3 = \frac{\sqrt{\Gamma}}{V} \left[ \arcsin \frac{1 - \frac{2D}{\Gamma} \cos^2 \beta_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_0^2}}} - \arcsin \frac{\cos 2\beta_0 - \frac{2D}{\Gamma} \cos^4 \beta_0}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_0^2}}} \right] \quad (3.12.)$$

Uvrštavanjem (3.10.) - (3.12.) u (3.7.) - (3.9.) dolazimo do sledećih izraza:

$$\sin \frac{\sqrt{D} M_z}{2S} = \frac{\sqrt{D} \sqrt{4\Gamma - 4D - V^2}}{\Gamma \sqrt{1 - \frac{V^2}{V_0^2}}} \quad (3.13.)$$

$$E = g\mu_B M_z + 2JS^2 \sqrt{4\Gamma - 4D - V^2} \quad (3.14.)$$

$$\cos \frac{P}{2S} = \frac{\left(\frac{V^2}{2\Gamma} - 1\right)}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_0^2}}} \quad (3.15.)$$

Jednostavnim transformacijama možemo doći do zavisnosti energije od  $\cos(P/2S) = x$ :

$$E = g\mu_B M_z + 2JS^2 \sqrt{2\Gamma - 4D + 2Dx^2 - x(4\Gamma^2 - 8\Gamma D + 4D^2 x^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.16.)$$

što predstavlja zakon disperzije.

Za izotropni model  $D=0$ ,  $(V^2/V_0^2) = 0$  pa se formule (3.13.) - (3.15.) svode na:

$$E_{iz} = g\mu_B M_z + 4JS^2 \sqrt{\Gamma} \sqrt{1 - \frac{V^2}{4\Gamma}}$$

$$\frac{V^2}{4\Gamma} = \cos^2 \frac{P_{iz}}{2S}$$

$$M_z^{iz} = \frac{4S}{\sqrt{\Gamma}} \sin \frac{P_{iz}}{2S}$$

Poslednju formulu dobili smo deleći levu i desnu stranu jednačine (3.13.) sa  $\sqrt{D} M_z / 2S$ , a zatim tražeći graničnu vrednost pri  $D \rightarrow 0$ . Ovi rezultati se poklapaju sa rezultatima radova /7/ i /8/.

#### 4. KLASIČNO KVANTOVANJE ENERGIJE I MAGNETIZACIJE SOLITONA

Magnon predstavlja elementarno pobuđenje spinskog sistema. Dakle, magnon nastaje u momentu kada se z projekcija jednog od spinova smanji za jedinicu (u sistemu  $\hbar=1$ ). Istog trenutka magnetizacija poraste sa nule na jedinicu. Ovo znači da će nam magnetizacija definisana izrazom (3.1.) predstavljati upravo broj magnona u sistemu.

Dakle, možemo staviti:

$$M_z = n \quad (4.1.)$$

gde je  $n=0,1,2,3,\dots$  što u suštini predstavlja Bohrovo kvantovanje klasičnog sistema.

Treba reći da mi posmatramo samo slabo pobuđen sistem, što znači da n ne može imati velike vrednosti.

Uvrštavajući (4.1.) u (3.13.) dobijamo:

$$\sin \frac{n}{n_0} = \frac{\sqrt{D}}{\Gamma} \frac{\sqrt{4\Gamma - 4D - V^2}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{V_0^2}}} \quad (4.2.)$$

gde je:

$$n_0 = \frac{2S}{\sqrt{D}}$$

Iz (4.2.), (3.14.) i (3.15.) možemo dobiti formulu:

$$E = E_n = g\mu_B B n + 4JS \sqrt{D} \frac{\cos \frac{n}{n_0} - \cos \frac{P}{2S}}{\sin \frac{n}{n_0}} \quad (4.3.)$$

Dakle, energija solitona zavisi samo od broja magnona koji učestvuju u njegovom stvaranju.

Stavljujući  $n = 1$  dobijamo energiju magnona.

Lako je utvrditi iz (4.3.) da

$$E_n \neq nE_1 = g\mu_B Bn + 4JS \sqrt{D} n \frac{\cos \frac{1}{n_0} - \cos \frac{P}{2S}}{\sin \frac{1}{n_0}}$$

što nam ukazuje da magnoni interaguju međo sobom gradeći soliton. Može se pokazati da je  $E_n < nE_1$  iz čega sledi da je energija ove interakcije negativna, što nam ukazuje na to da je soliton vezano stanje n magnona, tj. da će n magnona nastalih u nekom feromagnetiku "radije" postojati združeno, u vidu solitona nego kao n samostalnih neinteragujućih pobuđenja spinskog sistema. Ovaj zaključak se naravno odnosi na slučaj kada se pobuđuju ("prevrću") susedni spinovi jer inače oni međusobno ne interaguju (aproximacija najbližih suseda).

U ovom radu smo analizirali jednodimenzionalni feromagnetik sa planarnom jednojonskom anizotropijom na niskim temperaturama. Magnetno polje smo usmerili u pravcu z - ose i z - osu smo uzeli za osu kvantizacije. Zanemarili smo spin-fónonsku **interakciju** i korišćenjem Hamiltonovih jednačina u kontinualnoj aproksimaciji došli smo do parcijalne diferencijalne jednačine koja podseća na nelinearnu diferencijalnu jednačinu Schrödingerovog tipa, koja ima solitonsko rešenje za date granične uslove. Zatim smo dobili uslove koje mora zadovoljavati brzina solitona i uslov koji mora zadovoljavati primenjeno magnetno polje(uslov 2.26) da bi postojalo solitonsko rešenje, pri dатoj konstanti anizotropije D.

Sličan problem je razmatrao H. J. Mikeska (videti /9/). On je analizirao isti tip feromagnetcnog lanca, s tim što je magnetno polje usmerio u pravcu x - ose, čime je x - osa postala osa kvantizacije. U kontinualnoj aproksimaciji u tom slučaju dobija Sine-Gordonovu jednačinu, koja uz date granične uslove, daje takođe solitonsko rešenje (kink).

Izračunali smo zatim energiju, impuls i magnetizaciju feromagnetika u prisustvu solitona i izrazili energiju u funkciji impulsa. Stavljujući  $M_z = n$  uveli smo klasično kvantovanje energije i magnetizacije solitona. Na kraju smo pokazali da kvantovani soliton predstavlja vezano stanje n magnona.

Ineresantno bi svakoako bilo analizirati termo-dinamička svojstva magnetnog lanca u solitonskoj aproksimaciji, ali to prelazi granice ovog diplomskog rada.

## LITERATURA

- 1./ V.N. Gubankov: Solitony, Kvant 11, str. 2, (1983)
- 2./ A.S. Davydov: Solitony v kvaziodnomernyh molekuljarnih strukturah, U.F.N. 138 (4) str. 641 (1982)
- 3./ A.R. Bishop, J.A. Krumhansl, S.E. Trulinger: Solitons in condensed matter: a paradigm, Physica D 1, 44 (1984)
- 4./ K.Kopinga, A.M.C. Tinus and W.J.M. de Jonge: Phys. Rev. B 29 (5) 2868 (1984)
- 5./ Članak M. Stejnера i K. Kjemsа u knjizi Trends in Physics, editor M.M. Wolfson, A. Higler Ltd London (1978)
- 6./ Dj. Mušicki: Uvod u teorijsku fiziku I, ŠIP Srbija Beograd (1975)
- 7./ J. Tjon J. Wright: Phys. Rev. B 15(7) 3470 (1977)
- 8./ S.G. Azevedo, M.A. de Moura, Claudete Covdeiro and B. Žekš, J. Phys C 15 7391 (1982)
- 9./ H.J. Mikeska: Phys. Rev. B 26 (9) 5213 (1982)
- 10./ A.S. Davydov: Teorija tverdogo tela, Nauka, Moskva (1976)