

D-200

Природно-математички факултет

Радна заједница заједничких послова

НОВИ САД

- 4. IX. 1981

Приједо.	Број	Број
03	10/62	

diplomski rad

KVANTNA HROMODINAMIKA
КАО
TEORIJSKI MODEL
INTERAKCIJE HADRONA

Tristan T. Hibš

Institut za Fiziku
Prirodno-matematički fakultet
Univerzitet u Novom Sadu

u Novom Sadu,
septembar 1981.

Zadatak ovog rada je da pruži pregled i komentar razvoja i dostignuća kvantne hromodinamike, jedinog kandidata za pravu teoriju jakih interakcija.

Čestice koje interaguju ovom interakcijom nose ime - hadroni. Mada interaguju i drugim interakcijama (elektromagnetskom, slabom, gravitacionom), jaka interakcija ubedljivo dominira u svim procesima gde učestvuju samo hadroni i intermedijарне čestice (u energetskoj oblasti na koju će laboratorije, verovatno, još dugo biti ograničene!). Stoga se interakcije hadrona mogu poistovetiti sa jakom interakcijom.

Poseban naglasak će biti na doslednoj izgradnji osnove za kanonički formalizam teorije, na osnovu eksperimentalnih činjenica u ovoj oblasti.

U uvodu će biti date osnovne ideje i principi koji se koriste u proučavanju jakih interakcija, kao i razlozi za to. Ostalo gradivo rada je rasporedjeno po poglavljima :

1. Hadroni	6.
2. Klasični formalizam	18.
3. Kvantizacija	27.
4. Renormalizacija	39.
5. Rezultati QCD	52.
D Dodaci	
D1, D2	61.
D3, D4	62.
D5, D6	63.
D7	64.
D8	65.
D9	66.
D10	67.
- Neke oznake korišćene u radu	69.
- Korišćena literatura i reference	70.
- Tablice	72.



Ovim se naročito zahvaljujem prof.
Dr. Milanu Nikoliću, što mi je omogućio i po-
mogao da se upoznam sa ovom oblašću fizike.
Takodje se zahvaljujem i kolegi Božidaru
Kovačeviću na korisnim diskusijama.

Rad posvećujem roditeljima.

Uvod

.1 Istraživanje strukture materije je jedan od zadataka koji čovek sebi oduvek postavlja. Jasno da su se, tokom istorije, a i prema oblasti, metodi razlikovali. U atomskoj fizici se, na primer, najveći deo informacija o strukturi atoma dobija proučavanjem atomskih spektara x-zraka. Ovde energije merene u spektru odgovaraju razlikama energijskih nivoa istih atoma, u raznim stanjima. Ova je razlika, po pravilu, mnogo manja od totalnih energija mirovanja posmatranih atoma. Njihov odnos može biti oko 10^{-8} ¹⁾.

Analogan se metod koristi i u nuklearnoj fizici, proučavajući tri vrste spektra: α , β i γ . Ovde je odnos energije prelaza i totalne energije nešto manje drastičan i može biti reda 10^{-6} ²⁾. (Uz napomenu da su ovo slučajno izabrani primeri, dok se spektor atomske fizike nalazi u granicama pet redova veličine, a nuklearne - dva-tri, oko ovih primera!)

Ovakav metod se koristi i u fizici elementarnih čestica, ali je ovaj odnos energija daleko veći³⁾.

.2 Suštinsko drugačiji metod je uveo Ernest Rutherford, analizom eksperimenata H. Geigera i E. Marsdена (1910 - 13). Bombardujući atome zlata α -česticama, utemeljen je najefikasniji metod u fizici čestica - metod sudarnih procesa. Logika Rutherfordove analize eksperimentalnih rezultata predstavlja okosnicu ispitivanja strukture subnuklearnih čestica, kao što je to bila i za ispitivanje strukture atoma, te atomskog jezgra.

.3 Za razliku od atomske i nuklearne spektroskopije, u hadronskoj spektroskopiji⁴⁾ je često nemoguće definisati odnos "posmatrani sistem" - "njegova energetska stanja" - "zračenje" (koje predstavlja razlike energijskih nivoa pojedinih stanja). Znatno veće energije, koje se javljaju u sudarima od interesa za ovu oblast, omogućuju efekte "stvaranje čestica iz energije". Sa porastom energije eksperimenta, javljaju se i nove čestice, koje ne mogu da se predstave kao energijsko stanje neke druge! Sve ovo ukazuje na suštinske razlike izmedju ovih oblasti fizike.

.4 Tema ovog rada je analiza jake interakcije, pa je rad ograničen na oblast spektra hadrona - jedinih (ima ih više stotina!) koji podležu jaku interakciju. Time je odbačen mali broj čestica (6 leptona), ali i uticaj drugih tipova interakcije. Tačnije, u fizici hadrona jaka interakcija dominira, te ostali efekti mogu da se zanemare.

Dok je, u okviru atomske fizike, elektromagnetna interakcija odgovorna za skoro sve fenomene, u oblasti nuklearne i hadronske, jaka dominira. Međutim, postoji prilična razlika u pojmu ove interakcije u ove dve oblasti. U toku ovog rada će se pokazati da "pravom" jakom interakcijom možemo smatrati onu "unutar-hadronsku". Njen Van der Waalsovski ostatak ima šanse da bude nuklearna jaka interakcija.⁵⁾

Nasuprot odličnom poznavanju elektromagnetne interakcije (formiranjem renormalizovane kvantne elektrodinamike - pedesetih godina), o jaku se interakciji ni izdaleka ne zna sve! Jedan od krajnjih rezultata razvitka ove oblasti ja, dakle izgradnja konzistentne teorije, koja će uspešno reprodukovati spektor hadrona i njihove interakcije. Na taj način, ona će objasniti fenomene jake interakcije - kako u hadronskoj, tako i u nuklearnoj fizici!

.5 Prvu teoriju jake interakcije (odsad JI) je dao H. Yukawa (1935.). Na osnovu nje je tražena i nadjena porodica π -mezona, a tada poznati fenomeni su bili dovoljno dobro opisani. Kasnije su, međutim,

otkrivene nove, čudne ("strange") čestice, čije je uvrštavanje u teoriju zahtevalo veliko proširenje porodice π -mezona u porodicu SU(3) mezona. Otkrićem ljudjnosti ("charm"), išlo se dalje, na SU(4) ... itd. (1. poglavljje) Osim toga, Yukawa-ini intermedijarni bozoni (π , a i ostali mezoni, nosioci Yukawa-ine JI) nose i nanelektrisanje. To već intuitivno ukazuje na zavisnost elektromagnetne i JI.

.6 Pored zahteva iz odeljka .4, logično je tražiti i to da teorija jake interakcije, na jednostavan i zadovoljavajući način reprodukuje rezultate Yukawa-ine teorije. Podrazumeva se da teorija mora biti relativistička i kvantna. Stoga ne iznenadjuje da pravo rešenje problema treba tražiti metodama relativističke kvantne teorije polja.⁷

S druge strane teorija JI bi trebala da bude tzv. lokalna gauge-teorija! Razlozi mogu da budu sledeći:

- Opšta teorija relativiteta i kvantna elektrodinamika (obe lokalne gauge-teorije) veoma dobro opisuju fenomene u svojim oblastima. Ova druga je, bez konkurenциje, "prava" teorija elektromagnetskih pojava. Prva, istina, nije dostigla takav stepen potpunosti i preciznosti, ali je neizbežna u tumačenju gravitacionih pojava. Činjenica da se, do sada, nije uspešno u kvantizaciji opšte teorije relativiteta, ne umanjuje njen značaj ... Osim toga, njene modifikovane varijante zadržavaju svojstva lokalne gauge-teorije.

- Lokalne gauge teorije imaju veoma jasan osnovni princip, lako shvatljiv fizički smisao, a i formalizam im je, principijelno, jednostavan.⁸

- Pošto je krajnji cilj - napraviti jedinstvenu teoriju polja, ujediniti sve tipove interakcija, poželjno je da teorije pojedinih interakcija budu, bar principijelno, isto izgradjene. Naime, ako bi izgradili teoriju JI, koja ne bi bila lokalna gauge-teorija, morali bi ili stvarati (verovatno logički nekonzistentan!) sistem ujedinjavanja, ili slične teorije elektromagnetskih, slabih i gravitacionih pojava.⁹

.7 Osnovni princip lokalne gauge teorije je sledeći: Posmatrajmo sistem objekata koji poseduje skup unutrašnjih stepena slobode. Stepeni slobode tih objekata se nalaze u nekakvim odnosima, te celokupni sistem ima odredjenu zavisnost od njih. Ako je posmatrani sistem objekata izolovan, ne postoji razlog za promenu te zavisnosti! Međutim, objekti unutar sistema ne moraju biti izolovani, ta mogu menjati svoju zavisnost od unutrašnjih stepeni slobode. Da bi se "ravnoteža" celog sistema održala, objekti moraju da razmenjuju informacije o svojim zavisnostima, te se menjati (u prostoru unutrašnjih stepeni slobode) u skladu sa tim informacijama. Razmena ovih informacija predstavlja interakciju, budući da ima dvostruki zadatak: poneti informaciju o promeni; diktirati novu promenu.

primedbe

¹ primer: ^2H linija, iz Balmerovog spektra, odgovara energijskom prelazu od $\approx 3 \cdot 10^{-19} \text{J}$, dok totalna energija atoma iznosi $\approx 1.5 \cdot 10^{-19} \text{J}$. Faktor $\Delta E/E$, dakle, iznosi oko $2 \cdot 10^{-9}$! (prema R2.1)

² primer: $^3\text{H} \xrightarrow{\beta^-} ^3\text{He}$: $E_\beta \approx 3 \cdot 10^{-15} \text{J}$, $E(^3\text{H}) \approx 4.5 \cdot 10^{-10} \text{J}$, te je $\Delta E/E \approx 6.7 \cdot 10^{-6}$ (R2.2)

³ primer: $p^+ \pi^+ \rightarrow n^0$: $m_\pi/m_p \approx 0.15$ (R2.7)

⁴ spektroskopija hadrona je tema 1. poglavljja, a spektroskopija leptona nije predmet ovog rada, jer ne podležu JI.

⁵ otuda uspešno poredjenje nuklearne JI sa medjumolekularnim silama ...

- ... ovaj je cilj, izgleda, još jako daleko ...
- † mada ni one, izgleda, nisu dovoljno moćne, te je za potpuno rešenje postavljenog problema potrebno još više razviti postojeći formalizam, ili pronaći neki novi, bolji ... (o čemu nisam našao informacije)
- § što, ponekad, važi samo u principu ...
- ♦ ne zaboraviti da je teorija elektro - slabe interakcije — takodje lokalna gauge - teorija!
- „unutrašnji“ ovde znači da ne zavisi od prostor-vremena.

1. Hadroni

1.1 Pre nego što se pristupi izgradnji lokalne gauge-teorije JI, koja odgovara zahtevima iz uvodnog poglavlja, potrebno je detaljnije se upoznati sa onim što sam nazvao "objekti" i "sistemi objekata" - konstituentima hadrona i samim hadronima. U tom smislu je pogodno razvoj i sadašnje stanje hadronske spektroskopije, koji su i uslovi li izgradnju i razvoj teorije JI. U nedostatku boljeg metoda, klasifikacija hadrona je odigrala presudnu ulogu u izgradnji modela strukture hadrona.

1.2 Pre pola veka je W. von Heisenberg u fiziku čestica uveo pojam i formalizam izospina. Pošto se proton i neutron (po iskustvima nuklearne i rane hadronske fizike) razlikuju samo po naelektrisanju, a neznatna razlika u masi se može pripisati upravo razlici u naelektrisanju, Heisenberg ih je definisao kao dva stanja jedne iste čestice - nukleona. Ova dva stanja se razlikuju po različitim orijentacijama unutrašnjeg stepena slobode, izospina:

$$I_3(p) = +\frac{1}{2} \quad I_3(n) = -\frac{1}{2} \quad (1.1)$$

Veza sa naelektrisanjem je data formulom

$$Q = I_3 + B/2 \quad (1.2)$$

gde je B-barionski broj. Sam formalizam izospina je, inače, identičan formalizmu običnog, "Dirac-ovog" spina.

1.3 Na osnovu ovog formalizma, izgradjen je Fermi - Young-ov model (R2.5), po kome se mezoni reproducuju kao vezana stanja nukleona i antinukleona, a barioni - nukleona i mezona. Stoga, mezoni formiraju triplet i singlet:

$$2 \otimes \bar{2} = 1 \oplus 3 \quad (1.3)$$

Ovako se, na primer, može prikazati kao stanje (p, \bar{n}) , koje, pri suda ru sa (n) proizvodi (p) - što odgovara eksperimentima. U istom modelu, barioni obrazuju dva dubleta i jedan kvartet:

$$(2 \otimes \bar{2}) \otimes 2 = 2 \oplus 2 \oplus 4 \quad (1.4)$$

Što, takodje, odgovara eksperimentalnim činjenicama (tablica I). Model je bio konzistentan i odgovarao je realnom svetu - ali, bez čudnih čestica.

tablica I					
mezon	Q	I	I_3	S	masa(MeV/c ²)
π^+	+1	1	+1	0	139.6
π^0	0	1	0	0	135.0
π^-	-1	1	-1	0	139.6
barion					
p	-1	1/2	+1/2	0	938.3
n	0	1/2	-1/2	0	939.6
$\Delta^{++}(1232)$	+2	3/2	+3/2	0	1230
$\Delta^+(1232)$	+1	3/2	+1/2	0	do
$\Delta^0(1232)$	0	3/2	-1/2	0	1234
$\Delta^-(1232)$	-1	3/2	-3/2	0	

1.4 Pošto je čudnost osobina nezavisna od izospina, predstavlja nov stepen slobode, te se prethodni skup od dva elementa (dve orijentacije izospina) mora proširiti na tri elementa. S tim u vezi, Fermi -

- Yang-ov model se mora proširiti, a logično je očekivati prelaz sa $SU(2)$ na $SU(3)$, uz zadržavanje principa izgradnje mezona i bariona, iz odeljka 1.3. Što se tiče mezona, slika odgovara. Sada mezoni obrazuju singlet i oktet, što ček više odgovara eksperimentalnoj situaciji, budući da se kao singletni mezon, javlja η (najniži po masi), koji ima latentnu čudnost. (Predstavljen je $s\bar{s}$ -parom ...)

$$3 \otimes \bar{3} = 1 \oplus 8 \quad (1.5)$$

Medjutim, sa barionima je situacija bila veoma loša:

$$(3 \otimes \bar{3}) \otimes 3 = 3 \oplus 3 \oplus 6 \oplus 15 \quad (1.6)$$

budući se, u prirodi, ne javljaju ni (anti)seksteti, ni 15-plet! Ovaj je model, inače, poznat kao Sakata-in, a osnovnom tripletu grupe $SU(3)$ se pridružuju čestice ρ , π i Λ , - tzv. Sakatoni. Istovremeno, činjenica da je razlika masa Λ i ρ 137 puta veća nego za π i ρ , ukazuje da je ova simetrija samo aproksimativna, ali ne može objasniti tako ozbiljne kvalitativne nedostatke modela (kao (1.6)).

1.5 Oktetni put ("eightfold way") je šema koju su predložili M. Gell-Mann i Y. Ne'eman, gde je uočeno da direktni proizvodi okteta grupe $SU(3)$ daju multiplete koji odgovaraju stvarnosti :

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus \bar{10} \oplus 27 \quad (1.7)$$

Pojava okteta i dekupleta (uporediti sa tablicom II, u dodatku) u ovom proizvodu je osigurala uspeh ove šeme, uprkos nejasnoj prirodi antidekupleta, 27-pleta i drugih, viših multipleta u proizvodima $(8)^2$ sa $n > 2$. S druge strane, ova šema ne predstavlja fizički model, jer ni triplet, ni oktet nemaju smisao skupa realnih fizičkih čestica! Samim tim, za razliku od razmatranja u odeljcima 1.3 i 1.4, ovde nije jasno kad multiplet predstavlja mezone, a kad barione ...

1.6 Primetimo da činjenica da desne strane (1.3) i (1.4) odgovaraju realnoj situaciji (zanemarujući čudne čestice, u duhu primedbe 3)), ne određuju jednoznačno leve strane istih jednačina! U $SU(2)$ je, naime $\mathbf{1}$ i $\mathbf{\bar{2}}$ ekvivalentno! Stoga se može, u neodgovarajućoj (1.6), pokušati sa $\mathbf{3}$, umesto sa $\mathbf{\bar{3}}$ (poštovanjem (1.5) odgovara, ne treba menjati) :

$$(3) = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \quad (1.8)$$

Ova promena je "popravila" jednačinu (1.6), te sada i mezonski i barionski multipleti nalaze svoje mesto u modelu.

1964. su Gell-Mann i Zweig predložili da se fundamentalnom tripletu grupe $SU(3)$ pripisu realne fizičke čestice, ali ne hadroni, već elementi njihove strukture - nazvani kvarkovi (u oznaci q). Prema (1.5) i (1.8), po ovom modelu su mezoni vezano stanje (q,\bar{q}) , a barioni (q,q,\bar{q}) . Analogno Sakatonima, kvarkovi se javljaju u tri varijante: u,d i s . Da bi barioni imali barionski broj $B=1$, kvarkovi moraju imati $B=1/3$. Ako se, medjutim, kvarkovima pripisu ista naselektrisanja kao Sakatonima, dobijamo, na primer, za proton :

$$Q(p) = +1 \quad p = (u,u,d) \quad (1.9)$$

$$\text{ali} \quad Q(u,u,d) = 1 + 1 + 0 = 2 \quad (1.10)$$

gde je iskorišćena aditivna osobina operatora naselektrisanja. Potpunijom se analizom dobija, za sve barione :

$$Q_{(\text{barioni})}^{\text{exp}} = Q_{(\text{barioni})}^{\text{model}} - 1 \quad (1.11)$$

Da bi se model uskladio sa eksperimentom, Gell-Mann i Zweig su izvršili transformaciju :

$$Q_{(\text{kvark})}^{\text{model}} \rightarrow Q_{(\text{kvark})}^{\text{model}} - \frac{1}{3} \quad (1.12)$$

rasporedjujući "višak" iz (1.11) podjednako na sve kvarkove⁶ na ovaj se način dobijaju, dosledno, vrednosti kvantnih brojeva kvarkova (tablica III, prema R2.3, R2.4, R2.5, ...) :

tablica III

	Q	I	I_3	S	C	B'	T	spin
u	+2/3	1/2	+1/2	0	0	0	0	1/2
d	-1/3	1/2	-1/2	0	0	0	0	1/2
s	-1/3	0	0	-1	0	0	0	1/2
c	+2/3	0	0	0	+1	0	0	1/2
b	-1/3	0	0	0	0	-1	0	1/2
t	+2/3	0	0	0	0	0	+1	1/2

Prema ovom modelu, iz činjenice da su svi mezoni Bose-čestice, a svi barioni Fermi-čestice, sledi da su i kvarkovi fermioni. Najprostiji izbor, a ujedno i najpovoljniji je :

$$\delta(q) = \frac{1}{2} \quad \delta_s(q) = \pm \frac{1}{2} \quad (1.13)$$

1.7 Činjenica da se, u Gell-Mann - Zweig-ovom modelu iz 1964. kvarkovi javljaju u tri varijante (kasnije prošireno na šest ...), može da se tumači kao tri stepena slobode jednog kvarka :

$$q^a, a=1,2,3 \Rightarrow \{q^a\} = \{u,d,s\} \quad (1.14)$$

Opštепrihvaćen naziv za ovu osobinu kvarka je „aroma“ ("flavor"), kao i oznaka za odgovarajuću grupu - $SU(3)_f$.

1974. je, međutim, otkrivena čestica $\psi(3100)$, koja ne spada u $SU(3)_f$ klasifikaciju, te predstavlja dokaz postojanja novog, četvrtog stepena slobode, nazvanog ljupkost ("charm"), u oznaci C. Prirodno, grupa $SU(3)_f$ se, zbog nezavisnosti c od s,u i d, morala proširiti na $SU(4)_f$.

1979. je otkrivena čestica $\Lambda(9460)$, koja se ne može svrstati u $SU(4)_f$ -porodice, pa je broj aroma (opet!) morao biti povećan, a odgovarajuća grupa proširena u $SU(5)_f$. Novi stepen slobode je dobio naziv lepota ("beauty"), sa oznakom B' (u tabeli III, inače - b), a ponekad se koristi i naziv dno ("bottom").

Budući da eksperimentalnih podataka u graničnom broju aroma nema (izgleda se pojavljuju neograničeno, sa porastom energije), a teorija daje samo slab argument da ih ima manje od 16 (4. poglavlje), uobičajena je oznaka :

$$q^a, a=1,2, \dots N \Rightarrow \{q^a\} = \{u,d,s,c,b, \dots ?\} \quad (1.15)$$

gde je odgovarajuća grupa :

$$SU(N)_f \quad (1.16)$$

Prema teoriji grupa (rezultati, na primer, u R2.7 i R3.13), te odeljku 1.6 sledi da se, zavisno od N (dakle, energije na kojoj se vrše eksperimente), hadroni se pojavljuju u multipletima prema :

$$\bar{N} \otimes N = 1 \oplus \left[\left(\begin{matrix} N-1 \\ 2 \end{matrix} \right) \right] \quad \text{za mezone,} \quad (1.17)$$

$$\text{a za barione: } (N)^3 = \left[\left(\begin{matrix} N+2 \\ 3 \end{matrix} \right) \right] + 2 \times \left[\left(\begin{matrix} N+1 \\ 3 \end{matrix} \right) \right] + \left[\left(\begin{matrix} N \\ 3 \end{matrix} \right) \right] \quad (1.18)$$

gde je $\left(\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right) = n! / k!(n-k)!$, a zagrade tipa $\left[\begin{matrix} n \\ l \end{matrix} \right]$ označavaju n-plet.

1.8 Već je ranije primećeno da se javljaju hadroni koji su potpuno identični (po kvantnim brojevima!), sem, možda, po spinu i par-

nosti, ali se veoma razlikuju po masi. Iskustvo iz atomske i nuklearne fizike ukazuje na to da se ove čestice mogu smatrati raznim pobudjenjima istog hadrona, kao sistema kvarkova. Na primer, $-\bar{\Lambda}, \bar{\Xi}; \bar{8}, \bar{A}_4, \bar{B}, \bar{A}_2$ mezoni se, osim po masama, razlikuju samo po spinu i parnosti i imaju, redom $\bar{J}^P: 0^-, 1^-; 0^+, 1^+, 1^+, 2^+$. Potpuno ista struktura kvantnih brojeva se dobija i preko Gell-Mann - Zweig-ovog modela, uz pretpostavku da kvarkovi, u vezanom stanju, obrazuju spin mezoma :

$$\bar{J} = \bar{S}_q + \bar{S}_{\bar{q}} + \bar{\ell} = \bar{S} + \bar{\ell} \quad (1.19)$$

gde je sa \bar{S}_q označen spin kvarka (antikvarka), a $\bar{\ell}$ je operator ugaonog momenta.

Koristeći standardne spektroskopske oznake, sledi da se navedena stanja mogu reprodukovati kao :

$${}^1S_0, {}^3S_1, {}^3P_0, {}^3P_1, {}^3P_2 \quad (1.20)$$

stanja (q, \bar{q}), a oznake su, naravno, tipa ${}^{2S+1}(l)J$ i $l=1, 2, 3 \dots \Rightarrow S, P, D \dots$. Ova se stanja odnose na cele SU(N) porodice mezona. Princip je, dakle, sledeći: kombinacijama kvarkova po aromama se reprodukuju porodice, te se, zatim, orbitalnim eksitacijama realizuje višestrukost cele porodice na nivoima sa višom masom. Ovako dobijena šema izgleda veoma dobro, tim pre što je skoro popunjena (uporediti sa tablicom IV u dodatku, prema R2.4). Ovo veoma ubedljivo prikazuje valjanost modela.

1.9 Sa druge strane, Gell-Mann - Zweig-ov model veoma dobro reprodukuje i barione! Ovde porodice bariona obrazuju singlete, oktete i dekuplete, što se, u principu, slaže sa eksperimentalnim podacima mada je identifikacija čestica sa elementima multipleta daleko teži i komplikovaniji zadatak kod bariona nego kod mezona. Potpuno su popunjene samo jedan oktet i jedan dekuplet, od čestica sa najnižom masom (koji se, prema tome uzimaju za osnovna stanja). Istina, ovde se javljaju i neki problemi sa brojem čestica : prema (1.8) oktet je dvostruk a postoji i singlet. Čestice (eventualnog) drugog okteta i singleta se, međutim, nalaze suviše visoko (po masi) da bi se mogli tumačiti kao osnovna stanja (ili?). S druge strane, uzimajući u obzir i spin, moramo preći na grupu SU(6), prema kojoj sledi, po :

$$(6)^3 = 20 \oplus 70 \oplus 70 \oplus 56 \quad (1.21)$$

da se barioni javljaju u multipletima po 56, 70, 20 čestica. Pošto barioni dekupleta imaju $J^P = (3/2)^+$, znači da imaju 4 moguće projekcije spina, te ih je 40. Sa $(1/2)^+$ -oktetom (iz analognih razloga) čini 56-plet. Na sličan se način obrazuju i ostali multipleti (1.21). Iznad ≈ 1400 MeV/c² se barionski spektar veoma komplikuje, pa je razvrstavanje čestica ili čak predviđanje neotkrivenih, relativno neistražena oblast hadronske spektroskopije. Stoga je i identifikacija multipleta sa česticama diskutabilna.

1.10 Do sada smo koristili uslove da se mezoni sastoje iz kvarka i antikvarka a barioni iz tri kvarka - kao aksioma modela. Međutim, poželjno je, naravno, smanjiti broj aksioma, te naći odgovor na pitanje zašto postoje stanja tipa (q, \bar{q}) i (q, q, \bar{q}) a ne i (q, q) , ili (q, q, \bar{q}, \bar{q}) , (q, q, q, \bar{q}) , ... Treba, u najgorem slučaju, svesti ove aksiome na neki osnovni princip (ad hoc - uveden?). Budući da atomska jezgra postaje sa svim celim brojevima nukleona, prava teorija mora biti takva da dozvoli postojanje vezanih stanja $3N$ kvarkova (gde $N=1$ odgovara hadronima, tj. atomskom jezgru 1H , a $N=2, 3, 4 \dots$ ostalim jezgrima, počev od 2H), kao i sisteme koji predstavljaju vezana stanja jednog ili više parova $q-\bar{q}$ (naravno, i $q-\bar{q}$ parovi unutar atomskih jezgara ...).

10.

- 1.11 Uporedimo ovako obrazovani model sa realnošću! Jedan od najčešće navodjenih primera je proizvodnja hadrona u e^+e^- anihilaciji. U 5. poglavlju je ovaj proces detaljnije razmatran a sada će se zadovoljiti citiranjem rezultata (R1.6, R2.4, R3.1, R3.12 ...) :

$$R = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadroni})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = N_c \sum_a Q_a^2 \quad a \Rightarrow u,d,s \dots \quad (1.22)$$

gde je a - indeks arome, a N_c - broj eventualnih, dodatnih stepeni slobode kvarkova. Ako posmatramo, redom, energijske ¹⁰oblasti : ispod 3GeV (3.1 GeV/c²) je masa najlakšeg (c, \bar{c}) - mezona - $\Delta(3100)$, te je, dakle, prag „ljupkosti“; ispod 9.4 GeV (prag za „lepotu“) je 9.46 GeV jer je najlakši (b, \bar{b}) mezon - $\Upsilon(9460)$; te iznad ove vrednosti. U prvom se slučaju sme javiti samo u, d i s kvarkovi, u drugom i c , a u trećem i b kvark. Tada:

$$R(1) = N_c \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} N_c \quad (1.23a)$$

$$R(2) = R(1) + \frac{4}{3} N_c = \frac{10}{9} N_c, \quad R(2) - R(1) = \frac{4}{9} N_c \quad (1.23b)$$

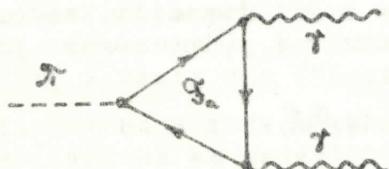
$$R(3) = R(2) + \frac{1}{3} N_c = \frac{11}{9} N_c, \quad R(3) - R(2) = \frac{1}{9} N_c \quad (1.23c)$$

Eksperimentalne vrednosti iznose (prema R3.12) ≈ 2 za (1.5 - 3.7) GeV do $= 4$ za 32 GeV (!) sa eksperimentalnom greškom oko 10 - 20 %. Vrednost $R(2)$ je (R2.4) za oko 2 - 2.5 veća od $R(1)$, pri čemu nije oduzet deo koji otpada na proizvodnju novog τ -leptona na oko 2 GeV, a koja iznosi ~ 1 . (U R2.4 se, na primer, iznose i podaci za 0.5 - 1 veći od navedenih; o njima detaljnije u 5. poglavlju ...) Iz ovog sledi :

$$R(1) \approx 2 \quad R(2) \approx 3 - 3.5 \quad R(3) \approx 4 \quad (1.24)$$

- 1.12 1969. su J.S.Bell i R.Jackiw, a nezavisno i S.L.Adler diskutovali anomalije koje se javljaju raspadiма tipa $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ (slika 1).

Radeći metodama kvantne teorije, dobija se (prema R1.6, R3.1, R3.13)¹¹, da poluširina ovog raspada iznosi :



sl. 1 raspad $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$

gde je N_c faktor uveden u odeljku 1.11, $\alpha \approx 1/137$ - konstanta fine strukture iz elektrodinamike (potiče od interakcije fermionske petlje sa fotonima, M_π - masa π^0), a f_3 tzv. dimenzionala konstanta interakcije, odredjena iz $\pi^0 \rightarrow \mu^+\mu^-$. Izmeđena vrednost $\Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)$ je (7.95 ± 0.55) eV (prema R3.1). Iz (1.25) sledi :

$$N_c = \sqrt{\frac{288\pi^3}{\alpha^2} \Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma) f_3^2 / M_\pi^3} \approx 3.02 \quad (1.26)$$

a prema R1.6 se dobija $N_c \approx 2.95$.

- 1.13 U R2.4 i R1.6 se razmatra i jedan drugi aspekt ovog problema. Naime, kad se računa amplituda raspada, javlja se multiplikativni faktor (u jednačini (1.25) je dat u zagradi) :

$$\sum_a \tau_a^0 Q_a^2 \quad (1.27)$$

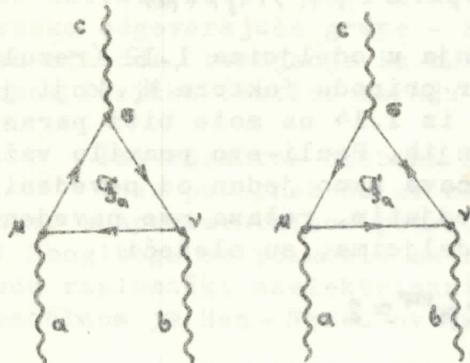
Ovaj se izraz dobija korišćenjem precizno razradjenog formalizma (datog, na primer, u R1.1, R1.2 ili R1.6 ...). Pošto to već daleko izlazi iz okvira ovog rada, daću ovde samo simboličko izvodjenje¹². Prema R3.13, u te-

oriji sa unutrašnjom simetrijom, kojoj odgovara grupa $SU(N)$ i generatori λ^a , amplituda interakcije tri bozona preko fermionske petlje, mora biti proporcionalna faktoru

$$\Sigma [(\lambda^a, \lambda^b) \cdot \lambda^c] \quad (1.28)$$

Sa slike 2 je jasno kako se javlja taj faktor. Pošto su fotonii gauge-bozoni kvantne elektrodinamike, odgovara im grupa $U(1)$, sa tri-vijalnim jediničnim matricama.

π je pseudoskalarni mezon, ali pripada izovektorskemu tripletu (π^+, π^0, π^-), te uz njegov vertex sledi netrivijalna Pauli matica. Stoga možemo pisati:



$$u: -iQ_a \quad (1.29a)$$

$$v: -iQ_a \quad (1.29b)$$

sl. 2 Grafovi koji doprinose inter- akciji 3 bozona preko fermionske petlje

$$c: g\tau_3/2 \quad (1.29c)$$

sa $a=b=\gamma$ (fotonii), $c=\pi^0$, a $G_a = u, d$ - kvarki. Uz pretpostavku da fermioni koji se mogu javiti u petlji mogu imati još jedan, dodatni skup stepeni slobode, sumiranje po njima daje (opet) multiplikativni faktor N_c iz odeljka 1.11 :

$$\langle 2\pi | A | \pi^0 \rangle \sim \sum_a [(-iQ_a, -iQ_a) \cdot g\tau_3/2] \cdot N_c = gH \cdot \sum_a \tau_3 Q_a^2 \quad (1.30)$$

gde je faktor (1.27) samo pomnožen sa g (odatle, posle, $\frac{1}{2}$!). Pošto je

$$\tau_3^u = +1 \quad \tau_3^d = -1 \quad (1.31)$$

sledi da

$$N_c \sum_a \tau_3^a Q_a^2 = N_c \left(\frac{4}{3} - \frac{1}{3} \right) = (N_c/3) \quad (1.32)$$

1.14 Interesantno je pozabaviti se (najzad) problemom čija analiza predstavlja najtipičniji primer metodologije u hadronskoj spektroskiji : problemom statistike osnovnih stanja bariona. U odeljku 1.6 je već naglašeno da su barioni i kvarkovi ferioni, sa spinom $1/2$. Razumljiva je pretpostavka (zahtev?) da se, u osnovnom stanju, kvarkovi nalaze u relativnom S -stanju (dakle, bez dodatne energije angуларног момента!). U $(3/2)^+$ dekupletu je to moguće samo ako su svi spinovi u istoj orientaciji. Stoga :

$$|\Delta^{++}, \frac{3}{2}\rangle = |u\uparrow\rangle|u\uparrow\rangle|u\uparrow\rangle \quad (1.33a)$$

$$|\Delta^-, \frac{3}{2}\rangle = |d\uparrow\rangle|d\uparrow\rangle|d\uparrow\rangle \quad (1.33b)$$

$$|\Omega^-, \frac{3}{2}\rangle = |s\uparrow\rangle|s\uparrow\rangle|s\uparrow\rangle \quad (1.33c)$$

tj. stanja tih bariona su simetrična u odnosu na razmenu bilo koja dva kvarka. Zbog relativnog S -stanja, sledi da je totalna funkcija simetrična, te ovi barioni ne bi imali Fermi - statistiku! Jedini način da se ona povrati, je (uporediti sa odeljkom 1.15) ad-hoc uvesti novi kvantni broj, dimenzije najmanje tri, te antisimetrisovati po njemu. Pišemo, uz izostavljanje spinova :

$$|\Delta^{++}\rangle \sim \epsilon_{ijk} |u_i\rangle|u_j\rangle|u_k\rangle \quad (1.34a)$$

$$|\Delta\rangle \propto e^{ik} |d_i\rangle |d_j\rangle |d_k\rangle \quad (1.34b)$$

$$|\Omega\rangle \propto e^{ik} |s_i\rangle |s_j\rangle |s_k\rangle \quad (1.34c)$$

što se generališe na sve barione, te za mezone¹⁵:

$$|M_b^a\rangle \propto \delta_{ij} |q_i^a\rangle |q_b^a\rangle \quad |B^{abc}\rangle \propto e^{ik} |q_i^a\rangle |q_j^b\rangle |q_k^c\rangle \quad (1.35)$$

1.15 Poredeći rezultate razmetranja u odeljcima 1.12 (rezultat (1.26) i 1.14, te uzimajući u obzir prirodu faktora N_c , koji je uveden u račun, jasno je da rešenje problema iz 1.14 na može biti parastatistička ranga 3, za kvarkove (tada bi, za njih, Pauli-evo pravilo važilo tek kad su u grupama po tri!) - jer ona rešava samo jedan od navedenih problema, ne i ostale. Novi kvantni broj, međutim, rešava sve navedene probleme. Naime, sa $N_c=3$, rezultati, po odeljcima, su sledeći:

$$1.11) : R(1)^{\text{teo}} = 2 \quad R(1)^{\text{exp}} \approx 2 \quad (1.36a)$$

$$R(2)^{\text{teo}} = 3\frac{1}{3} \quad R(2)^{\text{exp}} \approx 3-3.5^{16} \quad (1.36b)$$

$$R(3)^{\text{teo}} = 3\frac{2}{3} \quad R(3)^{\text{exp}} \approx 4 \quad (1.36c)$$

$$(R(2)-R(1))^{\text{teo}} = 1\frac{1}{3} \quad (R(3)-R(1))^{\text{exp}} \approx 1-1.5 \quad (1.36d)$$

$$1.12) ^{17} : \Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)^{\text{teo}} = \begin{cases} 7.63 \text{ eV} \\ 7.86 \text{ eV} \end{cases} \quad \Gamma(\pi^0 \rightarrow 2\gamma)^{\text{exp}} = \begin{cases} (737 \pm 1.5) \text{ eV} \\ (795 \pm 0.55) \text{ eV} \end{cases} \quad (1.37a)$$

$$(1.37b)$$

1.16 Zbog izuzetnog slaganja pretpostavke iz odeljka 1.14 sa eksperimentalnim podacima, pogodno je ovu novu osobinu uvesti u model. Novi kvantni broj "nosi" grupu $SU(3)$. Za ovu vrstu grupe je interesantno to da jedino konfiguracije tipa $(q, \bar{q})^N$, $(q, q, q)^M$, te proizvoljan proizvod ovakva dva činioca može imati singletno stanje! Naime:

$$(3 \otimes \bar{3})^N = (1 \oplus 8)^N \quad (1.38)$$

$$(3 \otimes 3 \otimes \bar{3})^M = (1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10)^M \quad (1.39)$$

dok:

$$(3)^2 = \bar{3} \oplus 6, \quad (3)^4 = 3 \cdot \bar{3} \oplus 3 \cdot 15 \oplus 2 \cdot \bar{6} \oplus 15' \quad (1.40)$$

što je već dovoljno da se zaključi da gore navedeno pravilo važi. Znači, sada iz modela sledi da su mogući jedino mezoni, multimezoni⁹, barioni, multibarioni (atomska jezgra, prema nukleonskom modelu), te multibario-mezoni (atomska jezgra sa mezonima)¹⁹, ako se pretpostavi da jedino singleti ove grupe mogu biti slobodne čestice. Ovim je problem nepostojanja "egzotičnih" čestica (npr. one iz odeljka 1.10) prebačen sa Gell-Mann - Zweig-ovog modela na novi kvantni broj! Ovakvo rešenje, u principu, nije zadovoljavajuće, ali ne treba zaboraviti da, zasad, radimo tek u nekoj vrsti "kinematičkog" modela. Tek će dinamika presuditi o ispravnosti modela.

1.17 Pre nego što razmotrimo još neke osobine modela, koji smo sada razvili, da se pozabavimo osobinama novog kvantnog broja. Sumerajmo činjenice:

- vezano stanje kvarka i antikvarka sa istim kvantnim brojem
- daje singlet (1.38);

- vezano stanje tri kvarka sa različitim kvantnim brojevima (ortogonalnim, u okviru grupe $SU(3)!$), daje singlet (1.39);
- bilo koje drugo vezano stanje (prema odeljku 1.16) - ne da je singlet!

Zbog analogije sa bojama u optici i likovnoj umetnosti, (crvena, plava i žuta - tri ortogonalne boje koje mogu imati kvarkovi, te zelena, narandžasta i ljubičasta - tri odgovarajuće, ortogonalne "anti-boje" za antikvarkove), novi kvantni broj je i nazvan bojom ("colour"), te je oznaka odgovarajuće grupe - $SU(3)$. Pošto leptoni uopšte nemaju ovaj stepen slobode, tvrdjenje iz odeljka 1.16 se može preformulisati u "sve slobodne fizičke čestice moraju biti bele!"

- 1.18 Interesantna osobina kvarkova - razlomački naboј - bila je dovoljan podstrek da se organizuje prava potraga za njihovom direktnom, eksperimentalnom potvrdom. Slobodni kvark, međutim, nije pronađen! Zbog toga se pokušalo sa reformulisanjem modela, tako da kvarkovi ne budu razlomački naelektrisani. Do sada, jedini (uspešan?) model sa tom osobinom je Han - Nambu - ov (uporediti tablice V i III). Osnovna odlička ovog modela je zavisnost naelektrisanja od boje. U stvari ispostavlja se da naelektrisanje kvarkova mora biti razloženo, ako naelektrisanje ne zavisi od boje. Pošto je prosečno naelektrisanje kvarka (po aromama) identično sa naelektrisanjem u tzv. standardnom modelu (Gell-Mann - Zweig - ov model obojenih kvarkova), zasada ne postoji odlučujući eksperiment za izbor od dva modela. (Uporediti sa primedbom 14.)

tablica V			
Q	crveno	plavo	žuto
u	0	+1	+1
d	-1	0	0

Uместo toga, korisno je razmotriti (prema R3.13, recimo) dinamiku kvarkonijuma - vezanog stanja (teških) kvarkova. Interesantno je da, nasuprot π^0 , η^0 i η^0 , koji su stanja "mešane arome" ("mixed flavour") :

$$|\pi^0\rangle \sim |u\bar{u}\rangle - |\bar{d}\bar{d}\rangle \quad (1.41)$$

$$|\eta^0\rangle \sim 2|\bar{s}\bar{s}\rangle - |\bar{u}\bar{d}\rangle - |\bar{d}\bar{d}\rangle \quad (1.42)$$

$$|\eta^0\rangle \sim |u\bar{u}\rangle + |\bar{d}\bar{d}\rangle + |\bar{s}\bar{s}\rangle \quad (1.43)$$

familije ψ i χ - mezona su stanja "čistih aroma" :

$$|\psi\rangle \sim |c\bar{c}\rangle ; |\chi\rangle \sim |b\bar{b}\rangle \quad (1.44)$$

te su stoga i pogodnija za proučavanje. Osim toga, pošto su c i b kvark relativno teški (prema R3.1, R3.13 masa im je 1-2 reda veličine veća od "lakih" u, d i s kvarkova, te otud, verovatno i "čista stanja" (1.44)), pa se može primeniti nerelativističko razmatranje. (q, \bar{q}) interakcija je, u prvoj aproksimaciji, Coulomb - ovskog tipa, te je jedan deo potencijala oblika :

$$\mathcal{V}_c(r) = - \frac{\alpha_s}{r} \delta(\text{hadron}) \quad (1.45)$$

gde je α_s - konstanta interakcije JI. Faktor $\delta(\text{hadron})$ iznosi (R3.13) $4/3$ za (q, \bar{q}) u mezonu, a $2/3$ za (q, q) u barionu (standardan, aproksimativni način rešavanja problema 3 tela svodjenjem na kombinacije parova ...) Osim toga, poredeći nekoliko osnovnih potencijala (Coulomb - , linearni i harmonijski), sa eksperimentalnim podatcima, zaključeno je (R2.4) da se za drugi član potencijala može birati - linearni. Tada :

$$\tilde{\mathcal{V}}(r) = K \cdot r - \frac{\alpha_s}{r} \delta(\text{hadron}) \quad (1.46)$$

te se može pisati klasičan Hamiltonijan :

$$\mathcal{H}(\text{hadron}) = \sum_i m_i + \sum_i \frac{P_i^2}{2m_i} + \sum_{ij} \tilde{\mathcal{V}}(r_{ij}) \quad (1.47)$$

Ovakav oblik hamiltonijana omogućuje veoma uspešno predviđanje rezonan-
ci u (c, \bar{c}) i (b, \bar{b}) porodicama (posle postupka sličnog onom u tretiranju
linearnog harmonijskog oscilatora). Analizirajući osobine linearne delatnosti
potencijala (1.46) vidimo da ne dozvoljava oslobadjanje kvarkova iz veza-
nog stanja (a time i narušavanje beline slobodnih čestica - u duhu odelj-
ka 1.17). Ovaj efekat se, izgleda zasad, podudara sa eksperimentalnim či-
njenicama navedenim u početku ovog odeljka.

1.19 Pored navedenih pokazatelja za "obojenost" kvarkova, (odeljci
1.11-1.15) korisno je navesti još jedno razmatranje u vezi sa
spektrom hadrona (prema R2.4). Hamiltonian tipa (1.47) određuje masu
hadrona u prvoj aproksimaciji, kao rezultat interakcije monopolnih nabo-
ja boje²². Sledeci stepen tačnosti se postiže (setimo se slučaja sa tzv.
Lamb-ovim pomerajem!) preko magnetobojene interakcije:

$$\mathcal{H}_M \propto -\vec{\mu}_a \cdot \vec{\mu}_b \quad (1.48)$$

Ovde $\vec{\mu}_i$ predstavlja magnetobojeni dipolni momenat. Po analogiji sa mag-
netnim momentom u elektrodinamici

$$\vec{\mu}^{ED} \propto \frac{e}{m} \vec{s} \quad (1.49a)$$

pišemo :

$$\vec{\mu}_a \propto g \frac{T_a}{m} \vec{s} \quad (1.49b)$$

gde je g - konstanta interakcije, \vec{s} - operator spina, m - masa kvarka, a T_a
sa $a = 1, 2, 3 \dots 8$ generatori grupe $SU(3)_c$. Dalje sledi :

$$\mathcal{H}_M \propto -\frac{g_1 g_2}{m_1 m_2} \text{Tr} \{ T_{1a} T_{2a} \} (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2) \quad (1.50)$$

Koristeći identitet:

$$(T_{1a} + T_{2a})^2 = T_{1a}^2 + T_{2a}^2 + 2 T_{1a} T_{2a} \quad (1.51)$$

$$\text{mezoni : } (\vec{s}_1 + \vec{s}_2)^2 = \vec{s}_1^2 + \vec{s}_2^2 + 2 \vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 \quad (1.52)$$

$$\text{barioni : } (\vec{s}_1 + \vec{s}_2 + \vec{s}_3) = \vec{s}_1^2 + \vec{s}_2^2 + \vec{s}_3^2 + 2(\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_2 + \vec{s}_2 \cdot \vec{s}_3 + \vec{s}_3 \cdot \vec{s}_1) \quad (1.53)$$

te činjenicu da su $s_i > 0$, budući da generatori grupe "vode računa" o pojedinih predznacima, a najzad i uslove :

$$(T_{1a})^2 = \frac{4}{3} \quad (\vec{s}_i)^2 = \frac{3}{4} \quad \vec{s}_i \cdot \vec{s}_i = \vec{s} \quad (1.54)$$

$$\text{mezoni : } (T_{1a} + T_{2a})^2 = (0)^2 = 0 \quad |\vec{s}| = 0, 1, \dots \quad (1.55)$$

$$\text{barioni : } (T_{1a} + T_{2a} + T_{3a})^2 = (-T_3)^2 = \frac{4}{3} \quad |\vec{s}| = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots \quad (1.56)$$

sledi (izostavljajući sve multiplikativne faktore, koji su identični za
mezone i barione) :

$$\mathcal{H}_M^m \propto -\left\{-\frac{8}{3}\right\} (S^m(S^{m+1}) - \frac{3}{2}) \quad (1.57)$$

$$\mathcal{H}_M^b \propto -\left\{-\frac{4}{3}\right\} (S^b(S^{b+1}) - \frac{9}{4}) \quad (1.58)$$

Da, umesto magnetobojene interakcije imamo "običnu", magnetnu,
proizvod $e_1 e_2$ bi bio negativan za mezone, a pozitivan za barione, a istog
intenziteta. Stoga bi masa $(3/2)^+$ - bariona bila za 3 (nekakve) jedinice
mase manja od mase $(1/2)^+$ - bariona; masa 0^- - mezona za 2 (iste) jedini-
ce mase manja od mase 1^- - mezona. Odnos ovih razlika nije dobar (upore-
ce mase manja od mase 1 - mezona).

di kasnije), osim toga, masa $(3/2)^+$ - bariona je veća od mase $(1/2)^+$ - bariona!

Pošto se, međutim, radi u ne-Abelovoj grupi $SU(3)_c$, g, su isti i pozitivni, a T_a -faktori su izračunati i dati u vitičastim zgradama u (1.57) i (1.58) (podelivši sa dva, dobijamo T_a -faktor po kvarku, upravo $\frac{1}{2}$ (hadron) iz (1.45)!). Vidimo da su ovi faktori istog, negativnog znaka, ali je faktor za barione dvaput manji od onog za mezone, te se odnos masa, kvalitativno, dobija dobar! Kvantitativno, sledi da je razlika između barionskih masa (dva najniža multipleta!) 1.5 (nekih) jedinica, a za dva najniža multipleta mezona - 2 (iste) jedinice. Odnosno, ovo pojednostavljen razmernanje predviđa da je ova razlika kod bariona, jednaka $3/4$ odgovarajuće razlike kod mezona. Prema podacima iz R2.7 se lako dobi:

$$\overline{M}_o = 433.7 \text{ MeV} \quad \overline{M}_l = 855.2 \text{ MeV} \quad (1.59)$$

što predviđa razliku od oko 316 MeV. Razlika između masa Δ -kvarteta i nukleonskog dubleta je 293 MeV, te je predviđanje ispunjeno sa greškom oko 7.8%! (Zbog različite strukture barionskih multipleta, nije baš jasno kako bi trebalo usrednjiti masu po oktetu, a kako po dekupletu, a da srednje vrednosti budu ekvivalentne. Stoga ovo poređenje ne treba uzimati previše strogo, mada je, naravno, zgodan pokazatelj ...)

Ovo rezonovanje neposredno dokazuje da interakcija kvarkova mora biti ne-Abelove prirode (bar dominantan deo!), što nedvosmisleno ukazuje na postojanje unutrašnjeg kvantnog bôja dimenzije bar 2^+ .

1.20 Pored svih ovih razmatranja, koje navode na korekcije prvobitnog Gell-Mann - Zweig-ovog modela, potrebno je uočiti, da se u oblasti dinamike mogu javiti ozbiljni problemi kod ovako prosto shvaćenog modela. Primera radi, kod sudara leptona sa hadronima, "pravi" sudar se, u stvari, odigrava između leptona i kvarkova. S tim u vezi, postoji verovatnoća da svaki kvark, unutar hadrona, poneće deo impulsa iz sudara. Uobičajeno je da se, u analizi eksperimenata ovakve vrste, deo impulsa, koji je lepton predao hadronu, normira početnim impulsom leptona (ovako normirane delove impulsa ču označavati sa \mathcal{F}). Tada, smatrajući funkcije $q_a(x)$ distribucijama kvarkova aroma u hadronu (tj. verovatnoćom njegovog nalaženja), deo impulsa koji je poneo taj kvark iznosi $\mathcal{F} q_a(x)$. Na osnovu zakona o održanju impulsa sledi:

$$\int_0^1 dx \cdot x \cdot \sum_a (q_a(x) - \bar{q}_a(x))^{(\text{exp})} = 1 \quad (1.60)$$

gde (exp) označava tip eksperimenta. U sumu su uvršteni i antikvarkovi, zbog efekta polarizacije vakuma (4. poglavljje). S druge strane, za analizu eksperimenta je pogodno uvesti tzv. strukturne funkcije, u oznaci $F_2^{(\text{exp})}(x)$ koje su definisane kao:

$$F_2^{(\text{exp})}(x) = \left\{ \sum_a x q_a(x) Q_a^2 \right\}^{(\text{exp})} \quad (1.61)$$

Pošto postoji način za (indirektno) merenje ovih veličina, pogodno je izraz (1.60) prepisati u obliku:

$$\int_0^1 dx \sum_{(\text{exp})} C_{(\text{exp})} F_2^{(\text{exp})}(x) = 1 \quad (1.64)$$

gde se $C_{(\text{exp})}$ dobijaju pomoću izraza (1.61). Uvrštenje eksperimentalno određenih vrednosti $F_2^{(\text{exp})}$ u integral (1.64), međutim, ne daje 1, nego $\approx \frac{1}{2}$! Zbog sistematskog ponavljanja ovih rezultata logično se zaključilo, da kvarkovi nisu jedini elementi strukture hadrona (tzv. partoni - opšti naziv), te da su u hadronu prisutni i neki drugačiji partoni, koji ne učestvuju u slabim i elektromagnetskim interakcijama, ali "odnose" 50% impulsa! Funkcija ovih partona bi mogla da bude prenošenje jake interakcije medju kvarkovima. Podržavajući tu ideju, odomaćio se naziv gluoni

(od glue = lepak, na engleskom), pošto "lepe" kvarkove u vezano stanje - hadron. (Izrazi (1.60) - (1.64) su dati simbolički.)

1.21 Time problemi i uspesi hadronske spektroskopije ni iz daleka nisu iscrpeni, ali je i ovo dovoljno da se, sa prilično sigurnosti, standardni model spin 1/2 kvarkova prihvati. Tek ovako definisan, razmatran i potvrđen (dovoljno?), ovaj model može poslužiti kao osnova za nadogradnju u pogledu dinamike, u nadi da će se osvedočiti kao "pravi" model, pogodan za razvoj kompletne teorije.

primedbe

¹ setimo se D.I.Mendeljejeva i stvaranja periodnog sistema elemenata, koji se sa manjim izmenama i danas koristi ...

² ovo je opravданo, jer se obe čestice ponašaju jednako u pogledu jake interakcije. Pošto je elektromagnetna interakcija za tri reda veličine "slabija" od jake, njen doprinos u masi hadrona može da se očekuje reda 1%, što odgovara eksperimentalnim podacima - razlika masa n i p je 1.38% njihove prosečne mase.

³ ovo važi samo aproksimativno, jer nema singletnog mezona ispod praga čudnosti ...

⁴ za razliku od (1.6), ovde ne može da se tumači kao porodica antibario- na (videti dalji tekst) ...

⁵ uz logičan zahtev da barionski broj ne zavisi od činjenice da se radi o u,d ili s kvarku. Osim toga, ovaj zahtev je neophodan da bi se sve kombinacije kvarkova mogle ostvariti, a da barioni imaju B=1.

⁶ uz logičan zahtev da kvarkova bude što manje; za razliku od ovog, u Han - Nambu-ovom modelu je uveden još jedan skup stepeni slobode, a nanelektrisanje zavisi od oba skupa (odeljak 1.18)! U Gell-Mann - Zweig-ovom modelu će biti potrebno uvesti (isti) dodatni skup stepeni slobode (odeljci 1.11 - 1.16 i 1.19), ali nanelektrisanje neće zavisiti od njih, što je, principijelno, podesnije!

⁷ uporediti sa odeljkom 1.4

⁸ sem u vezi sa masom ...

⁹ objekti kao (q, \bar{q}, q, \bar{q}) su primećeni samo u prelaznom režimu raspada tipa $\xi \rightarrow (\bar{\Xi}, \bar{\Xi}) \rightarrow \bar{\Xi} + \bar{\Xi}$ (R4.1, na primer), dok viši multimezoni (još?) nisu primećeni.

¹⁰ u centru masa, naravno ...

¹¹ Oprez! U R1.6 se koristi definicija $\frac{1}{\pi}$ koja odstupa za faktor 2 od one u R3.1 i R3.13 - otuda u R1.6 faktor 64 umesto 32 u (1.25).

¹² ... koje je više kvalitativnog, nego kvantitativnog smisla ...

¹³ ... kad se radi detaljnije, javljaju se i Γ matrice, ali posle nalaženja traga, ostaje rezultat kao u (1.30).

¹⁴ U stvari je svejedno da li nanelektrisanje zavisi od tog novog kvantnog broja (što je pokazano u R2.4), ukoliko su usrednjena nanelektrisanja jednakana, po aromama, sa onim iz tablice III.

¹⁵ da bi struktura bariona bila invarijantna u prostoru ovog novog kvantnog broja (opet princip minimalne zavisnosti).

¹⁶ uporediti sa odeljkom 1.11 i 5. poglavljem!

¹⁷ prema podacima iz R1.6 i R3.1, redom,

¹⁸ druge mogućnosti su diskutovane u R3.14, sa istim zaključkom ...

¹⁹ treba imati na umu da se tu podrazumevaju i hiperjezgra, sa česticama $\Lambda, \Sigma, \Lambda_c$ itd., te sa mezonima, koji takodje mogu nositi neku od "viših aroma". Takva se jezgra, svakako mogu smatrati eksitiranim stanjima običnih. S druge strane, ove "teške" čestice se raspadaju veoma brzo, te je njihov uticaj u domenu nuklearne fizike diskutabilan ...

²⁰ postoji, naravno i stroži kriterijum i način; o tome u 5. poglavljtu.

²¹ nazvan zarobljenost (confinement).

²² pogodno je činjenicu da kvark ima boju prevesti na posedovanje naboja boje - analogno električnom naboju. Takodje, po analogiji sa električnom i magnetnom interakcijom, može da se govori o "color-electric" i "color-magnetic" (recimo: elektrobojenoj i magnetobojenoj) interakciji. Termine u zagradi će nadalje koristiti u ovom smislu.

²³ inače bi važilo razmatranje kao za "običnu" (Abelovu U(1)) interakciju.

²⁴ Najjednostavniji način polazi od činjenice: integrali tipa

$$\left\{ \int_0^1 d\alpha (q_a(\alpha) - \bar{q}_a(\alpha)) \right\}^{\text{hadron}} = \left\{ N(q_a) - N(\bar{q}_a) \right\}^{\text{hadron}} \quad (1.62)$$

prebrojavaju višak kvarkova u odnosu na antikvarkove, arome α , u hadronu. Pomoću (1.61) prepisujemo (1.62):

$$\left\{ N(q_a) - N(\bar{q}_a) \right\}^{\text{hadron}} = \left\{ \int_0^1 d\alpha \sum_{\text{exp}} G_{\text{exp}} F_2^{(\text{exp})}(\alpha) \right\}^{\text{hadron}} \quad (1.63)$$

Pošto se za svaki hadron leva strana (1.63) zna, $\int_0^1 d\alpha F_2^{(\text{exp})}(\alpha)$ se može odrediti. Parametrizacijom i korišćenjem i drugih relacija (nezavisnih od (1.60) - (1.64), datih, na primer u R2.4) moguće je odrediti oblik "utačnjavanjem", sa dovoljno eksperimentalnih podataka ...

²⁵ najzad, nešto mora da "drži" kvarkove u hadronu ...

2. Klasični formalizam

2.1 Zadatak ovog i narednih poglavlja je i da prikaže razvoj teorije JI¹, na bazi modela datog u 1. poglavlju. U pogledu formalizma kojim se teorija zasniva i razvija, može da se bira između Lagrange-ovog i Hamilton-ovog. Pošto oba imaju izvesne nedostatke, pogodno je kombinovati ih u tzv. kanonički formalizam². Naime, u prvom delu poglavlja će biti izведен lagranžian, a u drugom (- na osnovu prvog), jednačine kretanja, kao i odgovarajući hamiltonijan. (Koristim nazive lagranžian i hamiltonijan za funkcije i prostora i vremena; u literaturi se nalazi i termin Lagrange-ova gustina.)

Kao kanoničke koordinate se javljaju:

$$-\psi_a^i(x) \left(\bar{\psi}_i^a(x) \right); a = u, d, s, c, b \dots, i = \text{crveno, plavo, žuto} \quad (2.1)$$

bispinorska funkcija polja kvarka (antikvarka) i

$$-A_A^{\mu}(x), j A^{i\mu}(x); \quad A = 1, 2, \dots, 8, i, j = \text{crveno, plavo, žuto}, \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (2.2)$$

dva alternativna izraza za gluonsku (Lorentz - 4-vektorsko) polje. Prvi izraz odgovara gluonu u regularnoj reprezentaciji grupe $SU(3)_c$, gde se ponaša kao 8-vektor, a drugi, u fundamentalnoj reprezentaciji, gde se ponaša kao 3×3 matrica. Veza između ova dva oblika je:

$$j A^{i\mu}(x) = A_A^{\mu}(x) [T^A]_j^i \quad (2.3)$$

gde su $[T_A]^i_j$ generatori grupe $SU(3)_c$ u fundamentalnoj reprezentaciji (nešto više u odeljku 2.3)

2.2 Sledeci logiku kojom je u radu opisano kompletiranje Gell-Mann Zweig-ovog modela, pogodno je krenuti od definisanja lagranžiana za slobodne kvarkove:

$$\mathcal{L}_s(x) \equiv \bar{\psi}_i^a(x) (1 \delta_a^b \hat{\partial} - m_a^b) \psi_b^i(x) \quad (2.4)$$

m je matrica masa; u opštem slučaju, naravno, nedijagonalna. Kako, međutim, ni jedan član u totalnom lagranžijanu (2.29) sem drugog dela (2.4) ne zavisi od indeksa arome, matricu masa je moguće dijagonalizovati unitarnom transformacijom u prostoru arome, a da se, pri tome, ostali deo lagranžijana (2.29) ponaša trivijalno, te ostane isti. Tada se menja struktura funkcija polja kvarkova, ali samo u prostoru arome, što sledi iz nezavisnosti arome i boje u standardnom modelu (eto zašto je ovakav izbor pogodniji ...). Nadalje će matricu masa smatrati dijagonalizovanom a indekse arome izostaviti⁴:

$$(m_a^b)_{\text{dijag.}} \rightarrow m \quad (2.5)$$

gde podrazumevam m kao dijagonalnu matricu, sa masama kvarkova kao dijagonalnim elementima. (Uporediti ovo razmatranje sa onim u R3.1)

2.3 S druge strane, posmatrajmo uslov normiranja polja kvarkova:

$$\int d^4x (\bar{\psi}_i^a(x) \psi_b^i(x)) = 1 \quad (2.6)$$

Osnovni zahtev kvantne teorije (a to je krajnji cilj!) dozvoljava samo transformacije koje ne menjaju ovaj izraz, dakle - unitarne. Najopštija unitarna transformacija u vezi sa bojom je tzv. lokalna gauge-transfornacija (odsad LGT), koja na sledeći način transformiše polje kvarka:

$$\xi: \psi_i^a(x) \rightarrow \psi'_i(x) \equiv [\xi(x)]_j^i \psi_j^a(x) \quad (2.7)$$

iz čega sledi :

$$\tilde{g} \cdot \int d^4x / |\psi(x)|^2 \rightarrow \int d^4x / |\tilde{\psi}_j(x) \psi^i(x)|^2 = \int d^4x / |\psi^i(x)|^2 \quad (2.8)$$

gde je, u drugom delu izraza (2.8), iskorišćen uslov da LGT ne menja izraz (2.6). odatle sledi :

$$[\tilde{\psi}_j(x)]^\dagger \tilde{\psi}_k(x) = (\tilde{\psi}(x))_j^\dagger \tilde{\psi}_k(x) = \delta_{jk} \quad (2.9)$$

odnosno, operatori LGT se mogu pisati kao :

$$\tilde{\psi}_j(x) = [\exp\{ik(x)\}]_j^i = 1 + i h_j(x) + g^i h_k(x) h_j^k(x) \quad (2.10)$$

gde je $h_j(x)$ hermitski operator u istom bazisu kao i operatori LGT u (2.10) te ima 8 nezavisnih komponenti (Rl.8). Pogodno je definisati 8 ortogonalnih operatora, koji čine potpun skup, te $\tilde{\psi}_j(x)$ uvek može da se razvije po njima. Obično se biraju generatori grupe, T_A (uporediti sa (2.3)), te množilične konstante :

$$h_j(x) = -ig \partial_j^i(x) = -ig \partial^A(x) (T_A)_j^i \quad (2.11)$$

Generatori grupe, bez obzira u kojoj se reprezentaciji izraze, zadovoljavaju relacije :

$$[T_A, T_B] = if_{ABC}^C T_C \quad (2.12)$$

sa f_{ABC} kao $8 \times 8 \times 8$ matricom strukturnih konstanti grupe $SU(3)$, datih u dodatku, u tablici VI. Obično se, u metričnoj reprezentaciji, T_A biraju :

$$T_A = \frac{1}{2} \lambda_A \quad (2.13)$$

sa λ_A Gell-Mann-ovim matricama (tablica VII, u dodatku).

2.4 GI zahteva da "pravi" lagranžijan, koji odgovara stvarnoj dinamici kvarkova, bude invarijsantan u odnosu na LGT (2.10) i (2.11). Proverom se vidi da α_s to nije :

$$\tilde{g} \cdot \alpha_s \rightarrow \alpha'_s = \alpha_s + g \bar{\psi}_i(x) \partial^i \psi^i(x) \quad (2.14)$$

Da bi se ovaj "višak" uklonio, potrebno je prvobitnom lagranžijanu dodati član istog oblika, koji će, posle transformacije ukloniti "višak", a ostaviti prvobitni lagranžijan sa dodatnim članom.

S druge strane, "višak" u (2.14) ima smisao (hipotetične) interakcije $\bar{\psi} i \psi$ sa $\partial^i \psi$. Stoga i član koji uvedemo, mora imati smisao interakcije. U dodatku D1 i odeljku .7 je pokazano da se moraju javiti izvesni "glasnici" (8 vrsta), koji deluju kao operatori medju kvarkovima. Gluonsko polje ima tačno te osobine! Stoga :

$$\alpha_s \rightarrow \alpha_1 = \alpha_s + g \bar{\psi}_i(x) \partial^i \psi^i(x) \quad (2.15a)$$

2.5 Sada LGT lagranžijana glasi :

$$\tilde{g} \cdot \alpha_1 \rightarrow \alpha_3 + g \bar{\psi}_i(x) \partial^i \psi^i(x) + g \bar{\psi}_i(x) (\tilde{g}_{00} \partial^i(x) \tilde{g}(x))_i^j \psi^j(x) \quad (2.16)$$

Zahtev GI se može pisati :

$$\tilde{g} \cdot \alpha \rightarrow \alpha' = \alpha \Rightarrow \delta_g \alpha = \alpha' - \alpha = 0 \quad (2.17)$$

Jedini način da (2.17) bude ispunjeno za (2.15) (dodatak D3), je da gluonsko polje podleže zakonu LGT :

$$\tilde{g} \cdot j \tilde{A}_\mu^i(x) \rightarrow \tilde{g}_i^j(x) \alpha_\mu^k(x) (\tilde{g}(x))_j^k - \frac{i}{g} (\partial_\mu \tilde{g}_i^j(x)) (\tilde{g}(x))^k_j \quad (2.18)$$

Dakle, gauge polje QCD-a, gluonsko polje, se transformiše i rotacijom i translacijom. Ovo je posledica ne-abelovske prirode $SU(3)$.

2.6 (2.15) se može, konciznije pisati u obliku :

$$\mathcal{L}_1 = \bar{\psi}(x) (\not{i} \not{\partial}^i(x) - \delta^i_m) \psi^i(x) \quad (2.15b)$$

gde je (sledeći uobičajeni postupak) redefinisan „običan“ izvod ∂ u kovarijantni $\not{\partial}$. Kovarijantnost znači da je oblik zadržan, ili što je u radu korišćeno, da se operatori transformišu prema poznatom zakonu transformacije - rotacijom. Da je $\not{\partial}$ zaista kovarijantan, sledi iz toga što je lagranžian (2.15) gauge-invarijantan, te :

$$\bar{\psi}(x) (\not{g}^i(x))^i (\not{i} \not{\partial}^k(x) - \delta^k_m) \not{g}^k_j(x) \psi^j(x) \quad (2.19)$$

odakle sledi da :

$$\not{g}^i_j(x) = \not{g}^i_k(x) \not{g}^k_\mu(x) \not{g}^\mu_j(x) \quad (2.24)$$

što se slaže sa definicijom kovarijantnosti koju koristim. Uporedjujući (2.15a) i (2.15b), dobija se eksplicitni izraz za kovarijantni izvod, koji ovde navodim u fundamentalnoj, pa regularnoj reprezentaciji :

$$\not{j} \not{\partial}^i_\mu(x) = \delta^i_j \partial_\mu - ig \not{j} \not{A}^i_\mu(x) \quad (2.21a)$$

$$\not{e} \not{\partial}^A_\mu(x) = \delta^A_B \partial_\mu + g f^{ACB} A^C_\mu(x) \quad (2.21b)$$

2.7 Pošto je i QED gauge-teorija, prirodno je što se dobija analogni lagranžian. Suštinska razlika izmedju QED i QCD je u prirodama grupe koje odgovaraju ovim teorijama - $U(1)$ i $SU(3)$, redom.

Naime, skup gauge-transformacija u (2.10) i (2.11) čini grupu (u odnosu na operaciju sukcesivne primene). Provera ovog je jednostavna i zasniva se na činjenici da se ermitski operator A može razviti po potpunom skupu generatora grupe. $U(1)$ je jednodimenzionala Abelova grupa, a $SU(3)$ ne-Abelova, dakle nekomutativna grupa (legantan prikaz ove razlike u R3.5). Zakon gradijentne invarijantnosti (QED analogon relacije (2.18) u QCD) glasi :

$$\text{Gosp.: } \not{A}(x) = \not{A}_\mu(x) + \frac{i}{e} (\not{\partial}_\mu \not{g}(x)) (\not{g}^i(x)) \quad (2.22)$$

Vidimo da se gauge-polje u QED (fotonski potencijal) transformiše samo translacijom.¹² Stoga je opasno nekritički se pozivati na rezultate QED u QCD ili ih uopštavati bez detaljnije analize.

Ipak, zgodno je, po ugledu na QED, definisati struje kvarkova :

$$\not{j}_A^\mu(x) = \bar{\psi}(x) \not{\partial}^\mu(T_A)_j \psi^j(x) \quad (2.23a)$$

$$[\not{j}^\mu(x)]_j = 2 \not{j}_A^\mu(x) (T^A)^j \quad (2.23b)$$

jer onda može da se piše :

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_S + g \not{j}_A^\mu(x) \not{A}_\mu^A(x) = \mathcal{L}_S + g \text{Tr} \{ \not{j}^\mu(x) \not{A}_\mu(x) \}^{13} \quad (2.15c)$$

gde je drugi član, naravno, lagranžian interakcije (ne potpun ! Videti odeljak 2.9).

Bez uvodjenja polja (2.2) koje interaguje sa kvarkovima preko drugog člana u (2.15a) i (2.15c), teorija ne bi bila gauge-invarijantna. To, u duhu dodatka D1 i odeljaka .7, znači da sami kvarkovi ne čine potpun model strukture hadrona!¹⁴ Iz ovog sledi da gluoni moraju biti realna, fizička polja.¹⁵

Gluoni :

- pripadaju regularnoj reprezentaciji grupe $SU(3)$, tj. u njoj se ponašaju kao 8-vektori (da bi potirali efekat $\frac{1}{2}$);
- su bozoni (da ne bi remetili statistiku hadrona);
- posle kvantizacije, predstavljajuće spin - 1 čestice ($A_\mu(x)$ je Lorentz - 4-vektor);
 - u fundamentalnoj reprezentaciji se ponašaju kao operatori (da bi bili "glasnici" u duhu odeljka .7 i dodatka D1);
 - u fundamentalnoj reprezentaciji očigledno ne komutiraju, (jer sadrže, prema (2.3), nekomutativne generatore $SU(3)$);
 - čuvaju GI lagranžijana (2.15) (interakcijom sa kvarkovima!)

2.8 Lagranžijan (2.15), međutim, nije potpun, jer ne opisuje kretanje gluonskog polja! Po (2.15) bi gluoni morali biti "zamrznuti"¹⁷, te ne bi bili pravi "glasnici" u duhu odeljka .7 i dodatka D1.

Sigurno je, da gluonski deo lagranžijana mora biti (bar?) bilinearan u odnosu na gluonska polja (ili njihove izvode! Videti R1.4 za tumačenje ovog stava.), inače je nemoguće definisati verovatnoću "prelaska" gluona iz jedne u drugu prostor-vremensku tačku ... (videti R1.1 - R1.7). Znamo (iz iste literature) da bi faktori bilinearni u odnosu na gluonska polja bili tzv. maseni članovi, a numerički faktori pred njima - kvadrati masa gluona. Ako ih lagranžijan ne bude sadržao, (kao što ni QED - lagranžijan ne sadrži) - gluoni neće imati masu mirovanja, kao ni fotoni.

Dosledna konstrukcija gluonskog lagranžijana zahteva diferencijalnu geometriju (u prostoru boje), gde su A tzv. afina polja ... Umesto toga, daću izvodjenje, koje se temelji na GI, kovarijantnosti i biranju najjednostavnijih mogućnosti.

Zbog ne-Abelove strukture, ne može se jednostavno prepisati fotonski lagranžijan :

$$\mathcal{D}_\gamma = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}(x) \quad F_{\mu\nu}(x) \equiv A_{\nu,\mu}(x) - A_{\mu,\nu}(x) \quad (2.24)$$

u QCD analogon - jer ne bi bio gauge - invarijantan! Da je $F_{\mu\nu}(x)$ (bar) kovarijantna veličina, trag bilinearnog člana po kovarijantnim $F_{\mu\nu}$ bi bio i Lorentz - i gauge - invarijantan, te bi odgovarao svrsi.

Uočimo da je \mathcal{D} - kovarijantna veličina; bilineal će takođe biti kovarijantan. Birajući izmedju "običnog" kvadratnog člana, komutatora i antikomutatora, odlučujemo se za komutator:

$$[\mathcal{D}_\mu(x), \mathcal{D}_\nu(x)]_j^i = [g_i^\mu \partial_\mu - ig_i^\mu A_\mu^i(x), g_j^\nu \partial_\nu - ig_j^\nu A_\nu^i(x)] \quad (2.25)$$

odakle se (prema dodatku D4) dobija :

$$[\mathcal{D}_\mu(x), \mathcal{D}_\nu(x)]_j^i = -ig \{ A_{\nu,\mu}^i(x) - A_{\mu,\nu}^i(x) + g f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \} (\tau_a) \quad (2.26)$$

što ima upravo željene osobine! (Druge dve varijante ne eliminisu članove poput $\partial_\mu \partial_\nu$, kojima ne može da se da smisao u lagranžijanu, jer su slobodni članovi. Biranje komutatora je, na neki način, i logično, jer se radi o bozonima. Osim toga, za grupu $U(1)$, nelinearni član u (2.26) otpada, te ostaje poznat fotonski tenzor polja!) Stoga definišemo :

$$(\mathcal{G}_{\mu\nu}(x))_j^i = \frac{i}{g} [\mathcal{D}_\mu(x), \mathcal{D}_\nu(x)] \quad (2.27)$$

kao i :

$$F_{\mu\nu}^A(x) = 2 \text{Tr} \{ T^A \mathcal{G}_{\mu\nu}(x) \} = \{ A_{\nu,\mu}^A(x) - A_{\mu,\nu}^A(x) + g f^{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \}^{19} \quad (2.28)$$

2.9 Sada se može pisati osnovni lagranžijan za QCD :

$$\alpha_{QCD} = \alpha_s + \alpha_{\gamma A} + \alpha_{YM} = \alpha_s + \alpha_A + \alpha_I \quad (2.29)$$

$$\alpha_s = \bar{\psi}_i(x) (i \hat{\partial} - m) \psi^i(x) \quad (2.30)$$

$$\alpha_{\gamma A} = g \partial_\mu^\mu(x) A_\mu^\mu(x) = g \partial_\mu^\mu \{ \delta_\mu^\mu(x) A_\mu^\mu(x) \} \quad (2.31)$$

$$\alpha_{YM} = \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\mu(x) F_{\mu\nu}^\nu(x) = \frac{1}{2} \partial_\mu^\mu \{ (F_{\mu\nu}(x))^2 \} \quad (2.32)$$

gde je, u drugom delu (2.29), (2.32) podeljeno na dva dela:

$$\alpha_{YM}^{21} = \alpha_A + \alpha_{AA} \quad (2.33)$$

$$\alpha_A = \frac{1}{4} (A_{\nu\mu}^\mu(x) - A_{\mu\nu}^\mu(x)) (A_A^{\nu\mu}(x) - A_A^{\mu\nu}) \quad (2.33a)$$

$$\alpha_{AA} = g f_{BC}^A A_A^{\mu\nu}(x) A_B^\nu(x) A_C^\mu(x) - \quad (2.33b)$$

$$- g \frac{1}{4} f_{BC}^A f_{AD}^B A_\mu^\nu(x) A_\nu^\rho(x) A_\rho^\mu(x) A_e^\nu(x) \quad (2.33c)$$

Pošto postoje i gluon-gluon interakcije, tek je (2.31) sa (2.33b,c) pot-puni lagranžijan interakcije! Ovo je veoma važno, naročito ako se prime-njuje perturbativni račun (pogotovo što konstanta interakcije nije uvek čak ni manja od 1!).

2.10 Iz ovih izraza se vidi da pored "foton skog" dela (2.33a), Yang Mills-ov lagranžijan ima trilinearni i kvadrilinearni član. Ova dva zadnja, prikazani u (2.33b) i (2.33c), opisuju samo-interakciju gluonskog polja. Već ovo ukazuje na izrazite komplikacije u odnosu na QED. Gluoni, zbog međusobne interakcije mogu da obrazuju gauge-invari-jantni, dakle, fizički objekat - vezano stanje dva ili više gluona. Pošto pripadaju oktetu boje (odeljak 2.7), prema (1.7) isl., mogu da obrazuju singlet boje, što je formalan dokaz za mogućnost postojanja fizičkih objekata - vezanih stanja gluona, tzv. gluonijuma (ili "glueballs"). Ovo predstavlja i jedan od značajnih nedostataka QCD-a, jer - gluonijum nije eksperimentalno pronađen!

S druge strane, upravo ovi članovi čine QCD jedinim, zasad poz-natim, kandidatom za uspešnu teoriju hadronskih interakcija. Naime, zna-se da obezbedjuju tzv. "asimptotsku slobodu", a postoje i indicije da obezbedjuju i efekat zatvorenosti (videti 4. i 5. poglavlje).

Matrica masa, koja je u odeljku 2.1 diskutovana, predstavlja hamiltonijan interakcije kvarkova, koje ne zavise od boje, a zavise od arome (i, možda, još nekog kvantnog broja?) - na primer, slabe interakci-je. Radeći na energijama do oko 10^4 GeV, možemo zanemariti ovaj član, zbog velike razlike u intenzitetima konstanti interakcije. Tek oko 10^6 GeV bi trebalo da konstante interakcija budu približno iste, te da ovaj član po-stane značajan za QCD.

2.11 Sada se može pristupiti izvodjenju Euler-Lagrange-ovih jedna-čina, prema opštoj formuli:

$$\left\{ (\partial \dot{x} / \partial t_i(x)) - \partial [\partial x / \partial t_i \dot{x}_i(x)] = 0 \right\}; \quad (2.34)$$

gde su $\dot{x}_i(x)$ polja kanoničkih koordinata (odeljak 2.1). Za kvarkove je do-voljno posmatrati (2.15b), odakle sledi:

$$(i \hat{\partial}^i(x) - \delta_i^j m) \psi^j(x) = 0 \quad (2.35)$$

odnosno, uzimajući u obzir (2.21):

$$(i \hat{\partial}^i(x) - m) \psi^i(x) = -g_j \hat{\partial}^i(x) \psi^j(x) \quad (2.36)$$

Analogno ovome, variranje po ψ bi dalo poznatu jednačinu, za antikvarkove, koja se može dobiti i prostim adjungovanjem (2.36) :

$$\bar{\psi}_j(x)(i\partial^i + m) = +g \bar{\psi}_i(x) \partial^i(x) \quad (2.37)$$

Ovim jednačinama se može dati standardno tumačenje - da su gluoni izvori kvarkova, te da su bez njih, kvarkovi slobodni.

2.12 Varirajući (2.29) po A_μ^A (tj. pišući odgovarajuće Euler - Lagrange - jednačine) vidimo da (2.31) daje :

$$\partial_A^\nu(x) \{ g j_B^\mu(x) A_\mu^B(x) \} = g j_A^\nu(x) \quad (2.38)$$

gde je iskorišćeno (2.23a). Pošto u ovom delu ne figurišu izvodi po A , ovo je jedini doprinos (2.31) Euler - lagrange-ovim jednačinama. (2.32) daje :

$$\partial_A^\nu(x) \left\{ \frac{-1}{4} F_{\alpha\beta}(x) F_c^{\alpha\beta}(x) \right\} = \frac{-1}{2} \left\{ (\partial_A^\nu(x) F_{\alpha\beta}(x)) F_c^{\alpha\beta}(x) \right\} \quad (2.39)$$

$$\partial_A^\nu(x) [A_{\alpha\beta}^c(x) - A_{\beta\alpha}^c + g f_{\alpha\beta}^c A_\sigma^D(x) A_\sigma^E(x)] = g (f_{AE}^c \delta_\sigma^\nu A_\sigma^E(x) + f_{ED}^c A_\sigma^D(x) \delta_\sigma^\nu) \quad (2.40)$$

te sledi :

$$\partial_A^\nu(x) \alpha_{YM} = \frac{-g}{2} f_{AB}^c (A_{\alpha\beta}^B(x) F_c^{\beta\gamma}(x) - A_{\beta\alpha}^B(x) F_c^{\gamma\beta}(x))_{\sigma, \gamma} = g f_{AB}^c A_\mu^B(x) F_c^{\mu\nu}(x) \quad (2.41)$$

Variranje po izvodima gluonskih polja daje :

$$\partial_A^{\nu, \mu}(x) \{ A_{\alpha\beta}^c(x) - A_{\beta\alpha}^c(x) + g f_{\alpha\beta}^c A_\sigma^D(x) A_\sigma^E(x) \} = \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu - \delta_\beta^\nu \delta_\alpha^\mu \quad (2.42)$$

pa podrazumevajući jednačinu analognu (2.39) sledi :

$$\partial_A^{\nu, \mu}(x) \alpha_{YM} = \frac{-1}{2} \{ F_A^{\mu\nu}(x) - F_A^{\nu\mu}(x) \} = -F_A^{\mu\nu}(x) \quad (2.43)$$

i najzad,

$$\partial_\mu(\partial_A^{\nu, \mu}(x) \alpha_{YM}) = -\partial_\mu F_A^{\mu\nu}(x) \quad (2.44)$$

Sumirajući sad (2.38), (2.41) i (2.44), prema (2.34) :

$$\delta_A^c \partial_\mu F_c^{\mu\nu}(x) + g f_{AB}^c A_\mu^B(x) F_c^{\mu\nu}(x) + g j_A^\nu(x) = 0 \quad (2.45)$$

Koristeći (2.21b), ova se relacija piše u konciznijem obliku :

$$_A \partial_\mu^c(x) F_c^{\mu\nu}(x) = -g j_A^\nu(x) \quad (2.46)$$

i predstavlja "Maxwell-ove jednačine" za QCD, u kompaktnom obliku, čiji analogon u QED glasi:

$$\partial_\mu F_c^{\mu\nu}(x) = +e j_c^\nu(x) \equiv +e \bar{\psi}(x) \partial^\nu \psi(x) \quad (2.47)$$

Smisao (2.46), ja, analogno (2.36), taj da struja kvarkova predstavlja izvor gluona. Međutim, za razliku od kvarkova, sami gluoni nisu slobodni! Stoga struja kvarkova nije očuvana! (Drugim rečima, ne zadovoljava jednačinu kontinuiteta!)

2.13 Ponovnim diferenciranjem (2.47) se dobija jednačina kontinuiteta za QED. Sa (2.46) to nije slučaj, jer u $F_c^{\mu\nu}(x)$ ima nelinearnih članova. Da bi se našla struja koja zadovoljava jednačinu kontinuiteta za QCD, mora se razdvojiti linearni i nelinearni deo svakog $F_c^{\mu\nu}(x)$; stoga je zgodno definisati :

$$G_A^{\mu\nu}(x) = A_A^{\nu, \mu}(x) - A_A^{\mu, \nu} \quad (2.48)$$

te sledi :

$$\partial_\mu \tilde{J}_A^\nu(x) = -g \tilde{J}_A^\nu(x) \quad (2.49a)$$

sa:

$$\tilde{J}_A^\nu(x) \equiv f_{AB}^C [\partial_\mu (A_B^\mu(x) A_C^\nu(x)) + g_{BD}^{22} A_\mu^D(x) F_C^{DV}(x)] + j_A^\nu(x) \quad (2.49b)$$

jer nelinearnosti potiču ne samo od članova u F_C^{DV} , nego i u ∂_μ^A ! na ovaj način je nadjena struja koja zadovoljava jednačinu kontinuiteta (a sama jednačina se lako dobija - ponovnim diferenciranjem (2.49a), te iz jednačavanjem leve strane sa nulom, zbog linearnosti G_A^ν !).²³ Međutim, struja (2.49b) nije gauge-kovarijantna kao (2.23a). Ovo se lako pokazuje, pošto su leve strane (2.46) i (2.49a) očigledno kovarijantne i nekovarijantne, redom!

Za struju (2.23a), postoji analogon jednačine kontinuiteta. Ako na (2.46) primenimo operator - kovarijantni izvod, po Poincare-ovoj leme, leva strana je identički jednaka nuli (posledica matematičkih osobina kovarijantnog izvoda i gluonskog tenzora polja!). Stoga važe relacije:

$$\partial_\mu \tilde{J}_A^\mu(x) = 0 \quad (2.50)$$

i

$${}^g \partial_\mu(x) \tilde{J}_A^\mu(x) = 0 \quad (2.51)$$

2.14 Identitet :

$$[a, [b, c]] + [b, [c, a]] + [c, [a, b]] = 0 \quad (2.52)$$

poznat kao Bianchi-ev ili Jacobi-ev, može da posluži za dobijanje još jedne jednačine, korisne u daljem radu:

$$[\partial_\tau(x) Q_{\mu\nu}(x)] + [\partial_\mu(x), Q_{\nu\tau}(x)] + [\partial_\nu(x), Q_{\tau\mu}(x)] = 0 \quad (2.53)$$

što sledi iz definicije (2.27). Pogodno je uvesti dualni tenzor:

$$(\tilde{Q}_{\mu\nu}(x))^i_j = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} (Q^{\sigma\tau}(x))^i_j ; \quad \tilde{F}_{\mu\nu A}(x) = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} F_A^{\sigma\tau}(x) \quad (2.54)$$

tada (2.53) glasi:

$${}^g \partial_\mu(x) \tilde{F}_A^{\mu\nu}(x) = 0 \quad (2.55)$$

što su druge dve „Maxwell-ove jednačine“ za QCD, u kompaktnom obliku!

2.15 Zapazimo, da tragom QED može da se definiše:

$$E_A^i(x) = F_A^{i0}(x) \quad B_A^i(x) = \tilde{F}_A^{i0}(x) \equiv \frac{1}{2} g_{AB} \epsilon^{ijk} F_B^B(x)^{24} \quad (2.56)$$

Interesantno je da se elektrobojeno (magnetobojeno) polje najjednostavnije i najelegantnije izvode upravo iz (dualnog) gluonskog tenzora polja, te su, stoga elektrobojeno i magnetobojeno polje jedno drugom dualna polja. U tom smislu, postoji bitna razlika izmedju (2.46) i (2.55). Prva je posledica kanoničkog formalizma, a druga - matematičkog identiteta! Tu je razlike izmedju (2.46) i (2.55) je standardno: postoje elektrobojjeni monopolni naboji (u kvarkovima), ali ne postoje magnetobojeni monopolni naboji! Stoga pojedinačne „Maxwell-ove jednačine“ izvedene iz (2.46) i (2.55) nemaju isto poreklo ni smisao!

2.16 Kanonički konjugovane momente poljima (2.1) i (2.2) dobijamo po formuli:

$$\mathcal{P}^i(x) \equiv \partial \mathcal{L} / \partial (\partial_0 \mathcal{L}_i(x)) \quad (2.57)$$

Vidimo da:

$$\tilde{\mathcal{H}}_j(x) = i \bar{\psi}_j(x) \partial^0 + i \psi_j^\dagger(x) \quad (2.58)$$

Poredeći (2.57) sa (2.43), te koristeći (2.56) i antisimetričnost $\tilde{F}_A^{AB}(x)$:

$$\tilde{\mathcal{H}}_A''(x) = \tilde{F}_A^{AB}(x) = (0, E_A^i(x)) \quad (2.59)$$

Sada može da se piše i hamiltonijan (kao i za ostale izraze u ovom odeljku - videti još i poglavlje 3!):

$$\mathcal{H}(x) = \tilde{\mathcal{H}}_j(x) \partial_0 \psi^j(x) + \tilde{\mathcal{H}}_A''(x) \partial_0 A_\mu^A(x) - \mathcal{L}_{QCD} \quad (2.60)$$

Ovim je klasični deo kanoničkog formalizma, praktično, završen. Sledeće bi bilo, pomoću Poisson-ovih zagrada, formulisati jednačine kretanja u Hamilton-ovom obliku. Umesto toga, u idućem poglavlju će se, uvodjenjem komutacionih i antikomutacionih relacija (uz zamenu funkcija kanoničkih varijabli odgovarajućim operatorima!), sprovesti kovariantna kvantizacija.

primedbe

¹ zbog analogije sa bojom (odeljak 1.17), nazvane kvantna hromodinamika, u oznaci QCD.

² detaljnije o ovome, videti u R1.5. Inače, ovi formalizmi su dovoljno poznati, a za opširnija razmatranja, videti R1.1 - R1.7.

³ kvarkovi su „nosioци reprezentacije“ (representation carrier R1.8), te zato pripadaju tzv. fundamentalnoj reprezentaciji, tj. u njoj se ponašaju kao trodimenzionalni vektori. Gluoni, kao gauge bosoni, moraju biti operatori u fundamentalnoj, dakle 8-vektori u regularnoj reprezentaciji. Uporediti sa R1.8 i R2.4.

⁴ stepeni slobode koji odgovaraju slaboj interakciji, mogu biti zanemareni već i zbog toga što je doprinos slabe interakcije više redova veličine manji od doprinosa JI ...

⁵ o masama nešto više u 4. poglavlju.

⁶ videti R1.8

⁷ spuštanje i podizanje indeksa boje (u obe reprezentacije) ne igra nikakvu ulogu, s obzirom na euklidsku prirodu prostora boje ...

⁸ prema R2.4

⁹ za intuitivno objašnjenje, videti dodatak D1.

¹⁰ ovo se ne može smatrati ad hoc uvodjenjem, jer počiva na logičnom zahtevu GI ...

¹¹ dodatak D2

¹² u jednodimenzionom prostoru U(1) je rotacija, prirodno, nemoguća ...

¹³ trag se odnosi na sumiranje po svim indeksima boje.

¹⁴ eto opravdanja za ispravku modela u odeljku 1.20.

¹⁵ koliko i kvarkovi ...

¹⁶ za druge, manje formalne razloge, videti R3.8 i R3.2.

¹⁷ u suprotnosti sa bilo kojom formulacijom kvantne fizike ...

¹⁸ gluoni, po svojoj prilici, ostaju bez mase, kao i fotonii.

¹⁹ prema odeljku 2.6

²⁰ videti 3.poglavlje.

²¹ ovaj, tzy. čisti, gauge - lagranžijan opisuje dinamiku gauge - polja (za QCD - gluona), bez fermiona. Za abelovske teorije, to je trivijalno (ne-interagujuće) zračenje (npr. fotona, za QED), dok za neabelovske teorije, odgovara netrivialnom (samo-interagujućem) zračenju. Pošto se fermionski deo lagranžijana QCD i QED može smatrati istim (principijelno), moguće je detaljnije proučavati samo ovaj deo lagranžijana QCD, a potom fermione "ubaciti" - po analogiji sa QED! Na ovaj način su problemu slabih interakcija pristupili C.N.Yang i R.L.Mills (1954.) i R.Shaw (1955.), sa rezultatom : - neabelovski gauge - lagranžijan za proizvoljnu grupu $SU(n)$. Radovi Yanga i Millsa su predstavljali osnovu za razvoj teorije slabih interakcija, a docnije i teorije JI, te ovaj deo lagranžijana nosi njihovo ime.

²² euklidski metrički tenzor u prostoru boje.

²³ ovako definisan, uslov kovarijantnosti je zahtev da se operatori u fundamentalnoj reprezentaciji transformišu prema dobro poznatom zakonu rotacije : $A \rightarrow A' = GAG^{-1}$, gde su, u našem slučaju, G - operatori LGT.

²⁴ uz pomoć identiteta $-E^{i_0\sigma\tau} = E^{ijk} \quad i,j,k=1,2,3 ; \sigma,\tau=0,i \quad (\sigma \rightarrow j, \tau \rightarrow k)$

²⁵ elektrobojeno polje je, dakle, kanonički konjugovan momenat gluonskom polju. Cinjenica da magnetobojeno polje nije kanonički momenat nijednom fizičkom polju, još je jedna posledica razlike diskutovane u odeljku 2.15.

3. Kvantizacija

3.1 Postupak kanoničke kvantizacije zahteva da se funkcije kanoničkih koordinata (2.1) i (2.2) zamene odgovarajućim operatorima, kao i njihovi momenti (što će bez promene oznaka, odsad, podrazumevati), te da se Poisson-ove zgrade dosledno zamene: antikomutacionim zgradama za fermionske, a komutacionim za bozonske i „mešane“ izraze.

Pored ovoga, naglasak će biti i na kovarijantnosti čitavog postupka (u ovom poglavlju, pod kovarijantnošću podrazumevam očiglednu Lorentz-kovarijantnost, tj. očigledno podjednako tretiranje svih 4 dimenzija prostor-vremena).

Poisson-ove zgrade se pojavljuju u Hamilton-ovim jednačinama kretanja i identitetima medju samim kanoničkim promenljivama. Ove zadnje daju:

$$\{\psi_a^i(x), \psi_b^j(y)\} \delta(x_0 - y_0) = \delta_a^b \delta_i^j \delta^{(4)}(x-y) \quad (3.1a)$$

$$\{\psi_a^i(x), \psi_b^j(y)\} \delta(x_0 - y_0) = \{\psi_i^a(x), \psi_j^b(y)\} \delta(x_0 - y_0) = 0 \quad (3.1b)$$

$$[A_m^A(x), E_n^B(y)] \delta(x_0 - y_0) = i \delta_m^n \delta_A^B \delta^{(4)}(x-y) \quad m,n = 1,2,3 \quad (3.2a)$$

$$[A_\mu^A(x), A_\nu^B(y)] \delta(x_0 - y_0) = [E_\mu^A(x), E_\nu^B(y)] \delta(x_0 - y_0) = 0 \quad \mu, \nu = (0, m), (0, n) \quad (3.2b)$$

$$[A_\mu^A(x), \psi_a^i(y)] \delta(x_0 - y_0) = [E_\mu^A(x), \psi_a^i(y)] \delta(x_0 - y_0) = \dots = 0 \quad (3.3)$$

U lagranžijanu (2.33) se član $\partial^\mu A_\mu^A$ ne pojavljuje, te je stoga:

$$\alpha_{QCD} : E_A^0(x) \equiv 0 \quad (3.4)$$

pa je A_0^A tzv. cirkularna koordinata i važi:

$$[A_0^A(x), E_B^n(y)] \delta(x_0 - y_0) = i \delta_0^n \delta_A^B \delta^{(4)}(x-y) \equiv 0 \quad (3.5)$$

jer je $\delta_0^n \neq 0$, pošto $n \neq 0$! Sada se A_0^A ponaša kao običan, kompleksan broj, te je kovarijantnost izgubljena.

3.2 Da bi se kovarijantnost povratila, neophodno je dodati član lagranžijanu (2.29) (i pokvariti gauge-invarijantnost?), koji će povratiti A_0^A operatorski karakter:

$$\alpha_{QCD} \rightarrow \alpha_{QCD} - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\nu A_\nu^A(x))^2 \equiv \alpha_{QCD}^{\text{fix}} \quad (3.6)$$

Sada:

$$E_A^M(x) = F_A^{M0}(x) - \frac{1}{\alpha} \mathcal{E}^{M0}(\partial_\mu A_\mu^M) \quad (3.7)$$

pa (3.2a) može da predje u standardnu formu:

$$[A_\mu^A(x), E_\nu^B(y)] \delta(x_0 - y_0) = i \delta_\mu^A \delta_\nu^B \delta^{(4)}(x-y) \quad (3.8)$$

Interesantno je da (3.6) još uvek poseduje izvesnu GI²! S druge strane, jednačina kretanja (2.46) postaje:

$$e \partial_\mu^A(x) F_A^{M0}(x) = -g \delta_\mu^M(x) - \frac{1}{\alpha} \partial^\nu (\partial_\mu A_\nu^M(x)) \quad (3.9)$$

te, na ovaj način, proizvoljni parametar iz (3.6), ulazi u „Maxwell-ove jednačine“!

3.3 Parametar α nije, u principu, ničim određen. Postoje, međutim, dva specijalna uslova $\alpha=1$ i $\alpha=0$, poznati kao Feynman-ov i Landau-ov uslov.⁴ Njihov smisao će se jasnije videti u odeljku 3.10.

Citav ovaj postupak se može izbeći samo ako se uvedu dodatni uslovi. Tada je, međutim, kovarijancija izgubljena. Najčešće se problem (3.5) rešava tako da se vremenski gluoni "izbace" iz teorije, tzv. Weyl-ovim uslovom (koriste se još i nazivi : vremenski ili kanonički; videti Rl.5) :

$$\overset{\circ}{A}_A(x) = 0 \quad (3.10)$$

što praktično znači da se klasa LGT (2.10) i (2.11) ograničava na potklasu, koja dozvoljava (3.10). Tada su relacije, (3.1)-(3.3), dovoljne u smislu problema (3.5).

Postoje još i tzv. aksijalni uslov i uslov nulte ravni (često se naziva i uslovom svetlosnog konusa) :

$$\overset{3}{A}_A(x) = 0 \quad (3.11)$$

$$\overset{3}{A}_A(x) + \overset{0}{A}_A(x) = 0 \quad (3.12)$$

Korišćenje dodatnih uslova (ovih i brojnih drugih) upravo ima smisao potpunog otklanjanja GI, kako bi gluonsko polje bilo jednoznačno određeno. Nejednoznačnost ima za posledicu mogućnost narušavanja komutacionih relacija (3.2) i (3.3), jer se, pogodno odabranom gauge-transformacijom, može anulirati neko od gluonskih polja.

Prema R3.3, uslovi (3.11) i (3.12) su pogodni za sudarne procese, a (3.10) za tretiranje efekta zarobljenosti ...

Pošto uslov (3.10) ostavlja lagranžijan (2.29) invarijantnim u odnosu na klasu prostornih LGT, obično se dodaje uslov :

$$\partial_i A_A^i(x) = 0 \quad (3.13)$$

koji bi trebalo da otkloni i tzv. longitudinalne gluone (jer je Fourier-transform : $\partial_\mu \overset{0}{A}_A = 0$; za detalje, videti Rl.2 i R3.3), međutim, zbog ne-Abelove strukture $SU(3)$, ∂_μ -parametar LGT nije harmonijska funkcija i (3.13) ne određuje jednoznačno gluonsko polje! Zbog ovih poteškoća se više ne može slediti standardni postupak kavantizacije u QED, već se mora pribeti egzaktnijem metodu - metodu funkcionalnih generatrisa ("generating functionals").

3.4 Pre nego što se predje na ovaj metod, korisno je, na primer, sledeći R3.2 ukazati preciznije na problem i eventualno dati ideju za rešenje.

Primenom kovarijantnog izvoda na (3.9), te koristeći Poencaré-ovu lemu i relaciju (2.51), koja se ne menja, jer kvarkovi ne interaguju sa $\partial_i A_A$, sledi :

$${}_A \mathcal{D}_\mu^\nu(x) \partial^\mu (\partial_\nu A_A^\nu(x)) = 0 \quad (3.14)$$

zahvaljujući tome, polje $\partial_i A_A$ inetraguje sa gluonskim, što se jasnije vidi iz :

$$\partial^2 (\partial_\nu A_A^\nu(x)) = -g \{_{ABC} A_\mu^\nu(x) \partial^\mu (\partial^\nu A_\nu^c(x)) \quad (3.15)$$

Stoga član koji je dodat u (3.6) nije trivijalan, u smislu da doprinosi S-matriци. Pošto znamo da, pored transverzalnih gluona nema pravih, fizičkih stepeni slobode (videti primedbu 2)!), ovaj dodatak S-matriци treba otkloniti. Lorentz-ov uslov :

$$\partial_\nu A_A^\nu(x) = 0 \quad (3.16)$$

ne dolazi u obzir, jer narušava relacije (3.2).

3.5

Funkcionalna generatrisa se definiše:

$$\mathcal{Z}\{\delta\} = \int D(A) \exp\left\{i \int d^4x [\mathcal{L}(A(x)) + \delta(x) \cdot A(x)]\right\} \quad (3.17)$$

tako da:

$$T(x_1, \dots, x_n) = (-i)^n \frac{\delta^n \mathcal{Z}\{\delta\}}{\delta \delta(x_1) \dots \delta \delta(x_n)} \Big|_{\delta=0} \quad (3.18a)$$

gde je

$$\mathcal{T}\{\delta\} = \mathcal{Z}\{\delta\} / \mathcal{Z}\{0\} = \exp\{\chi\{\delta\}\} \quad (3.18b)$$

predstavlja uopštenje:

$$d(A_j) = \prod_i dA_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \rightarrow D(A) = \prod_{(x)} A(x), \quad x \in [-\infty, \infty] \quad (3.19)$$

Zbog (3.18) su $\mathcal{T}\{\delta\}$ i $\chi\{\delta\}$ normirani:

$$\mathcal{T}\{0\} = 1 \quad \chi\{0\} = 0 \quad (3.20)$$

$\delta(x)$ su spoljne struje - izvori polja koja "ulaze" u posmatrani graf, kome odgovaraju -

$T(x_1, \dots, x_n)$ tzv. povezane Green-ove funkcije (nazivi u vezi sa ovom temom su prema R3.13!) n-tog reda:

$$T(x_1, \dots, x_n) = \langle G\{A(x_1) \dots A(x_n)\} \rangle \quad (3.21)$$

gde su oduzete amplitudne "nepovezane" grafove (sa $\mathcal{T}\{\delta\}$ umesto $\chi\{\delta\}$) se dobijaju i nepovezani grafovi, ali bez vakuum-vakuum doprinosa!).

Skup Green-ovih funkcija do n-tog reda predstavlja n-tu aproksimaciju procesa kome odgovaraju. Pošto u lagranžijanu interakcije figuriše konstanta interakcije (videti (2.31) i (2.33b,c)), iz ovog formalizma proizilazi perturbativno tretiranje QCD, kako se najčešće i formuliše, prema stepenima konstante interakcije.

Istini za volju, (3.16) nije dobro definisano (u matematičkom smislu) u Rieman-ovom prostoru, pa se prelazi u Minkowski-ev, koji je pogodniji, zbog euklidske, pozitivne i definitne metrike.

Jedini integral ovakve vrste, koji je rešen eksplicitno, je integral Gausovog tipa:

$$\int D(A) \exp\left\{-\iint dx dy A(x) \mathcal{K}(x,y) A(y)\right\} = \det \mathcal{K} \equiv \exp[\mathcal{H}\{\log \mathcal{K}\}] \quad (3.22)$$

Zbog jednostavnosti će, privremeno, izostaviti fermionski deo te tako, od lagranžijana (2.29) ostaje samo Yang-Mills-ov deo.

3.6 Principijelno, problem nejednoznačnosti gluonskog polja treba rešiti oduzimanjem "viška" stepeni slobode, tj. dodavanjem izvesnih kontračlanova. Stoga, definišimo funkcionalnu generatrisu prema (2.33) :

$$\mathcal{Z}\{\delta\} = \int D(A_\mu^A) \exp\left\{i \int d^4x \left(\frac{1}{4} F_A^{MN}(x) F_{MN}^A(x) + i \delta_\mu^\mu(x) A_\mu^A(x)\right)\right\} \quad (3.23)$$

Množeći konstantnim faktorom, nezavisnim od δ , ništa se ne menja u "fiziči", jer $\mathcal{T}\{\delta\}$ ostaje isto (zbog (3.18)):

$$C = \int D(\phi^A(x)) \exp\left\{\frac{i}{2} \int d^4x (\phi^A(x) \phi_A(x))\right\} \quad (3.24)$$

Pošto treba da se eliminiše sloboda izbora gluonskog polja (2.18), treba "prointegraliti" po svim mogućim parametrima LGT (setimo se metoda u statističkoj fizici). Stoga se bira $\phi^A(x)$ kao funkcional transformisanog gluonskog polja A_μ^A . Posle smene promenljive u integralu:

$$C = \int D(\vartheta) \det \left[\frac{\delta \phi^A \{ A \}}{\delta \vartheta^\mu} \right] \exp \left\{ -i \int d^4x (\phi^A \{ A \})^2 \right\} \quad (3.25)$$

3.7 Pogodno je (odeljci 3.1 i 3.2) izabrati :

$$\phi^A(x) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \partial^\mu A_\mu^A(x) \quad (3.26)$$

pa se dobija :

$$\mathcal{Z} \{ \delta \} = \int D(\vartheta, A) \det \left[\frac{\delta \phi^A \{ A \}}{\delta \vartheta^\mu} \right] \exp \left\{ i \int d^4x [\mathcal{L}_{QCD} + \delta_\mu^\mu(x) \bar{A}_\mu^A(x)] \right\} \quad (3.27)$$

Pošto se vrši integracija po svim $\vartheta^\mu(x)$, može se, u determinanti u (3.27), uzeti infinitezimalno $\delta^\mu(x)$. Tada :

$$\delta_\mu \phi^A \{ A \} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \partial^\mu (\delta_\mu A_\mu^A(x)) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \partial^\mu [-\bar{A}_\mu^A(x) \vartheta^\mu(x)] \quad (3.28)$$

pa sledi :

$$\det \left[\frac{\delta \phi^A \{ A(x) \}}{\delta \vartheta^\mu(y)} \right] \propto \det \mathcal{K}_B^A(x-y, A_\mu(x)) = \det [\partial^\mu_B \bar{A}_\mu(x) \delta^{(4)}(x-y)] \quad (3.29)$$

3.8 Da bi se ova determinanta "prebacila" u eksponent (te tako dobili, smisleni, integral eksponencionalnog funkcionala!), potrebno je iskoristiti osobine gausovskog integrala, definisanog sa poljima koja imaju Fermi-statistiku :

$$\det[\mathcal{K}] \equiv \int D(\bar{\eta}, \eta) \exp \left\{ i \int d^4x d^4y \bar{\eta}_A(x) \mathcal{K}_B^A(x, y) \eta^B(y) \right\} \quad (3.30)$$

Smenom izraza za jezgro \mathcal{K}_B^A iz (3.29) :

$$\det[\mathcal{K}] \equiv \int D(\bar{\eta}, \eta) \exp \left\{ i \int d^4x \bar{\eta}_A(x) (\partial^\mu_B \bar{A}_\mu(x)) \eta^B(x) \right\} \quad (3.31)$$

Uvrštenjem (3.31) u (3.27), dobijamo funkcionalnu generatrisu \mathcal{Z} , kao da smo lagranžijanu (3.6) dodali :

$$\mathcal{L}_a = \bar{\eta}_A(x) \partial^\mu_B \bar{A}_\mu(x) \eta^B(x) = \partial^\mu (\bar{\eta}_A(x) \partial_\mu^B(x) \eta^B(x)) - (\partial^\mu \bar{\eta}_A(x)) \partial_\mu^B(x) \eta^B(x) \quad (3.32)$$

3.9 Parcijalnom integracijom se prvi član uvek može eliminisati (zbog (3.18b), bez ikakvih graničnih uslova!). Pomoću funkcionalne generatrise (3.17) se, u stvari, računaju matrični elementi za procese koje opisuje lagranžijan. Za realne, fizičke prosece, matrični element ne može biti zavisan od izbora gauge-polja. Stoga se, u (3.27), integracija po ϑ može izbeći birajući, na primer $\vartheta^\mu(x) = 0$. Tada ovaj deo integrala daje konstantu, koja, prema (3.18b) ne doprinosi Green-ovim funkcijama, te se može izostaviti. Stoga ostaje :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} \{ \delta_A^A(x), \bar{\omega}_A(x), \omega^A(x) \} &= \int D(A_\mu^A(x), \bar{\eta}_A(x), \eta^A(x)) \\ &\cdot \exp \left\{ i \int d^4x \left[\mathcal{L}_{QCD}^{\text{eff}} + \delta_A^A(x) A_\mu^A(x) + \bar{\eta}_A(x) \omega^A(x) + \bar{\omega}_A(x) \eta^A(x) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.33)$$

gde je

$$\mathcal{L}_{QCD}^{\text{eff}} = \mathcal{L}_{QCD} - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu^A(x))^2 - \partial^\mu \bar{\eta}_A(x) \partial_\mu^A(x) \eta^B(x) \quad (3.34)$$

prema (3.31), $\bar{\eta}_A$ i η^A su skalari sa Fermi-statistikom! Jedini način za realizaciju tog zahteva je da ova polja budu tzv. Grassman-ovi brojevi. Antikomutacione relacije glase :

$$\{ \eta^A(x), \bar{\eta}_B(y) \} \delta(x_0 - y_0) = \delta_B^A \delta^{(4)}(x-y) \quad (3.35a)$$

$$\{ \eta^A(x), \eta^B(y) \} \delta(x_0 - y_0) = \{ \bar{\eta}_A(x), \bar{\eta}_B(y) \} \delta(x_0 - y_0) = 0 \quad (3.35b)$$

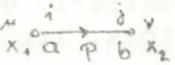
kao i ostale komutacione relacije sa gluonskim poljem.

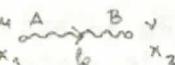
Zbog toga što "potiru" jedan deo stepeni slobode gluonskih po-

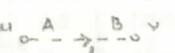
lja (i stoga imaju negativnu verovatnoću!), polja η_A i $\bar{\eta}_A$ se nazivaju avetima ("ghost") Faddeeva i Popova, koji su ih uveli. Iz formalne sličnosti drugog dela (koji ostaje) (3.32) i (2.15b), slede zajedničke osobine fermionskih kvark- i avet-polja.

3.10 Pošto je funkcionalna generatrisa QCD jednoznačno definisana, može se pristupiti formulisanju Feynman-ovih pravila za izračunavanje (3.18a). Svakoj od ovih Green-ovih funkcija odgovara Feynman-ov graf. Osnovni elementi grafa su:

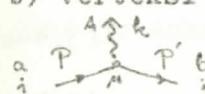
a) propagatori :

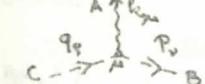
- kvark :  $i \delta_a^i \delta_b^a / (\hat{P} - m - i\epsilon)$ (3.36)

- gluon :  $-i \delta_B^A [\delta_{\mu\nu} - (1-\alpha) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}] / (k^2 + i\epsilon)$ (3.37)

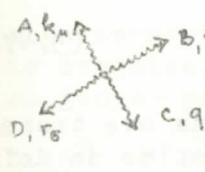
- avet :  $i \delta_B^A / (k^2 + i\epsilon)$ (3.38)

b) verteksi :

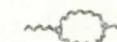
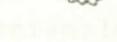
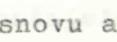
 $(ig) \delta^\mu (T_A)_j^i \delta_B^a (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - P' - k)$ (3.39)

 $-g f_{ABC} P_\mu (2\pi)^4 \delta^{(4)}(q - P - k)$ (3.40)

 $g f_{ABC} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + p + q) [\delta_{\mu\nu}(k - P)_3 + \delta_{\nu\rho}(P - q)_\mu + \delta_{\rho\mu}(q - k)_\nu]$ (3.41)

 $(-ig) (2\pi)^4 \delta^{(4)}(k + p + q + r) \{ f_{EAB} f_{CD}^E (\delta_{\mu 3} \delta_{\nu 6} - \delta_{\mu 5} \delta_{\nu 3}) + f_{EAC} f_{DB}^E (B_{\mu 6} B_{\nu 3} - B_{\mu 3} B_{\nu 6}) + (B_{\mu 6} B_{\nu 5} - B_{\mu 5} B_{\nu 6}) + f_{EAD} f_{BC}^E (B_{\mu 3} B_{\nu 6} - B_{\mu 6} B_{\nu 3}) \}$ (3.42)

3.11 Da bi se, pomoću ovih faktora i odgovarajućih grafova, izračunala (3.18a), potrebno je:

- nacrtati sve topološki različite povezane dijagrame,⁸ tako da stepen konstante interakcije određuje n iz (3.18a);
- svim linijama i verteksima grafa pridružiti faktore iz odeljka 3.10
- sumirati po mogućim aromama (s obzirom na totalnu energiju i masu kvarkova) svih kvark-petlji;
- svakoj Fermi-petlji pridružiti faktor (-1);
- izvršiti integraciju po svim unutrašnjim momentima, kao i Fourier-transformaciju po svim upadnim i izlaznim momentima, deleći faktorom $(2\pi)^4$ pri svakoj integraciji po 4-momentu;
- podeliti faktorom degeneracije datog grafa (npr. 2 za , 6 za , ali 1 za !);

- pridružiti relativne predznake Green-ovih funkcija na osnovu anti-komutacija Fermi-linija i komutacija Boze-linija potrebnih da dva grafa prevedu u jedan. Relativni predznak grafova različitih stepena aproksimacije može da se odredi izračunavanjem predznaka subgrafova koji ih razlikuje;

Jasno je da pravila u ova dva odeljka važe samo u slučaju da

je \mathcal{G} dovoljno malo da su doprinosi višeg reda dovoljno manji od prethodnih, te takav razvoj brzo konvergira. Sa sporom konvergencijom, razvoj, formalno gledano, odgovara fizičkom procesu, ali je praktično izračunavanje glomazno, komplikovano i neefikasno. Divergentan razvoj, jasno, nema smisla.

3.12 1976. su C.Becchi, A.Rouet i R. Stora otkrili da je lagranžijan (3.34) još uvek invarijantan u odnosu na skup „specijalnih“ transformacija, koje su, po njima, dobile ime BRS transformacije. Postupak u odeljcima 3.6 - 3.9 je bio dosledan i (3.34) obezbedjuje samo prave, fizičke stepene slobode kao doprinos S-matrici. Ujedno, jedino (3.34) zaista ima osobine „dobrog“ lagranžijana. Stoga, izgleda, ova simetrija treba da ostane očuvana?

Pokazaće se (odeljci 3.19 - 3.23) da je BRS simetrija u tesnoj vezi sa prostor-vremenom, a ne prostorom boje. Zato, po analiziji sa Lorantz-simetrijom, možemo očekivati očuvanost i za ovu simetriju. BRS transformacije glase:

$$\delta_s \psi_a^i(x) = ig \bar{\epsilon} \eta^A(x) (T_A)_j^i \psi_a^j(x) \quad (3.44a)$$

$$\delta_s \bar{\psi}_j^a(x) = -ig \bar{\epsilon} \eta^A(x) (T_A)_j^i \bar{\psi}_j^a(x) \quad (3.44b)$$

$$\delta_s A_\mu^A(x) = \bar{\epsilon}_B \partial_\mu^A(x) \eta^B(x) \quad (3.45)$$

$$\delta_s \eta^A(x) = -\frac{g}{2} \bar{\epsilon} f^A_{BC} \eta^B(x) \eta^C(x) \quad (3.46)$$

$$\delta_s \bar{\eta}_A(x) = \frac{\bar{\epsilon}}{\alpha} \partial_\mu A_\mu^A(x) \quad (3.47)$$

3.13 Dokaz da je (3.34) zaista invarijantno u odnosu na ove transformacije biće dat u odeljku 3.14. Pre toga primetimo da definicijom:

$$\theta^A(x) \equiv \eta^A(x) \bar{\epsilon} = -\bar{\epsilon} \eta^A(x) \quad (3.48)$$

uz uslove:

$$\{\eta^A(x), \bar{\epsilon}\} = \{\bar{\eta}_A(x), \bar{\epsilon}\} = 0 ; [\eta^A(x)]^2 = [\bar{\eta}_A(x)]^2 = \bar{\epsilon}^2 = 0 \quad (3.49)$$

sledi da su

$$\delta_s \psi_a^i(x) = -ig \theta^A(x) (T_A)_j^i \psi_a^j(x) ; \delta_s A_\mu^A(x) = -\bar{\epsilon}_B \partial_\mu^A(x) \theta^B(x) \quad (3.50)$$

potpune (a ne infinitezimalne) transformacije. Njihov oblik je, međutim, isti kao da se radi o infinitezimalnim LGT!

Uzrok tome je činjenica da je θ^A izgradjen od (raznorodnih) antikomutirajućih (Grassman-ovih) brojeva, te zadovoljava:

$$\theta^A(x) \theta^B(y) = 0 \Rightarrow \{\theta^A(x), \theta^B(y)\} = 0 \quad (3.51)$$

što sledi iz:

$$\theta^A(x) \theta^B(y) = \eta^A(x) \bar{\epsilon} \eta^B(y) \bar{\epsilon} = -\eta^A(x) \eta^B(y) \bar{\epsilon} \bar{\epsilon} = 0 \quad (3.52)$$

gde je iskorišćeno (3.48) i (3.49).

Stoga se potpuni oblik generatora BRS-transformacije podudara sa generatorima LGT u infinitezimalnom obliku:

$$(\mathcal{G}_s(x))_j^i \equiv (\exp\{-ig \theta^A(x) T_A\})_j^i = \delta_j^i - ig \theta^A(x) (T_A)_j^i \quad (3.53)$$

3.14 Prema prethodnom odeljku sledi da je (2.29) automatski BRS-invarijantno, jer je gauge-invarijantno. Stoga posmatrajmo BRS-transformaciju dodatka u (3.6) :

$$\delta_s \alpha^{fix} = \frac{1}{2\alpha} \delta_s [(\partial^{\mu} A_{\mu}^A(x)) (\partial_{\nu} A_{\nu}^V(x))] \quad (3.54)$$

$$\delta_s \alpha^{fix} = \frac{1}{\alpha} (\partial_{\mu} A_{\mu}^M(x)) \delta_s (\partial_{\nu} A_{\nu}^A(x)) = \frac{1}{\alpha} (\partial_{\mu} A_{\mu}^M(x)) \partial^{\nu} (\delta_s A_{\nu}^A(x)) \quad (3.55)$$

te iz (3.45) sledi :

$$\delta_s \alpha^{fix} = - \frac{\bar{\epsilon}}{\alpha} (\partial_{\mu} A_{\mu}^M(x)) \partial^{\nu} \delta_s A_{\nu}^A(x) \eta^B(x) \quad (3.56)$$

S druge strane, BRS-transformacija (3.32) glasi :

$$\delta_s \alpha_A = \delta_s \bar{\eta}_A(x) \partial^{\nu} \delta_s A_{\nu}^A(x) \eta^B(x) = \frac{\bar{\epsilon}}{2} (\partial_{\mu} A_{\mu}^M(x)) \partial^{\nu} (\delta_s A_{\nu}^A(x) \eta^B(x)) \quad (3.57)$$

te je

$$\delta_s \alpha^{fix} = - \delta_s \alpha_A \quad (3.58)$$

čime je dokazano da je

$$\delta \alpha_{act}^{eff} = 0 \quad (3.59)$$

3.15 Na osnovu osobina Grassman-ovih brojeva (i sličnosti sa spinorima - "običnim" Fermi-poljima) može da se uvede avetski broj, u oznaci $N_a(\gamma)$, tako da :

$$N_a(\gamma) = 1 \quad N_a(\bar{\gamma}) = N_a(\bar{\epsilon}) = -1 \quad (3.60)$$

a za ne-avetska polja jednako nuli. Osim toga, avetski broj ima aditivna svojstva, pa i (3.48) ima avetski broj nula (odatle formalna sličnost sa gauge-parametrom).

3.16 Analogno jednačinama kretanja, moguće je izvesti tzv. Ward-Takashi identitete, varijacionim postupkom, gde su varijacije kanoničkih promenljivih posledica BRS-transformacije. Radi kratkoće, privremeno će izostaviti fermionski deo (3.34). Tada je funkcionalna generatrisa :

$$\mathcal{Z}\{\delta, \omega, \bar{\omega}\} = \int \mathcal{D}(A, \bar{\eta}, \eta) \exp\left\{i \int d^4x [\alpha_{act}^{eff} + \delta_A A + \bar{\eta}_A \omega + \bar{\omega}_A \eta]\right\} \quad (3.61)$$

Variranje prema BRS-transformacijama daje :

$$\int \mathcal{D}(A, \bar{\eta}, \eta) \int d^4x (\delta_A \delta_A A + \delta_s \bar{\eta}_A \omega - \bar{\omega}_A \delta_s \eta) \exp\left\{ \dots \right\} = 0 \quad (3.62)$$

Zamenom polja funkcionalnim izvodima po njihovim izvorima daje :

$$0 = \bar{\epsilon} \int d^4x \left[\delta_A^{\mu} (\delta_c^A \partial_{\mu} + g f_{BC}^A \frac{\delta}{i \delta \bar{\omega}_c}) \frac{\delta}{i \delta \bar{\omega}_c} + \frac{1}{\alpha} \partial_{\mu} \frac{\delta}{i \delta \bar{\omega}_c} \omega^A + \frac{g}{2} \bar{\omega}_A \{^A_B C \frac{\delta}{i \delta \bar{\omega}_B} \frac{\delta}{i \delta \bar{\omega}_A} \} \right] \mathcal{T}\{\delta; \omega, \bar{\omega}\} \quad (3.63)$$

Jedno rešenje ove jednačine bi bilo da ceo integral bude proporcionalan $\bar{\epsilon}$ te se (3.63) svodi na identitet, a to je, na neki način, trivijalno rešenje. Netrivijalno rešenje se dobija izjednačavanjem kompletog integrala iz (3.63) sa nulom. Diferenciranjem te netrivijalne jednačine :¹³

$$\frac{i}{\alpha} \frac{\partial}{\partial y^{\mu}} \frac{\delta \mathcal{T}\{\delta; \omega, \bar{\omega}\}}{i \delta \bar{\omega}_{\mu}(y)} = \int d^4x \delta_A^{\mu} (\delta_c^A \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + g f_{BC}^A \frac{\delta}{i \delta \bar{\omega}_c}) \mathcal{T}_d^c\{\delta; x, y\} \quad (3.64a)$$

gde je

$$\mathcal{T}_d^c\{\delta; x, y\} \equiv \frac{\delta}{i \delta \bar{\omega}_c(x)} + \frac{\delta}{i \delta \omega^c(x)} \mathcal{T}\{\delta; \omega, \bar{\omega}\} \Big|_{\omega=\bar{\omega}=0} \quad (3.64b)$$

opšti avet-propagator, uz prisustvo izvora gluona δ_A^{μ} . Zbog toga što, diferencirajući zadnji sabirak iz (3.63) po ω dobijamo član čiji avetski broj, posle anuliranja ω i $\bar{\omega}$, nije nula kao kod prva dva, - on ne doprinosi (3.64). Dosledno tumačenje ovog će biti dato u odeljku 3.23.

3.17 Variranjem funkcionalne generatrise (3.61) samo po $\bar{\eta}$ sledi :

$$\int D(A, \eta, \bar{\eta}) / d\bar{x} \delta_{\bar{\eta}} [\partial_A^{\mu} \partial_{\mu}^B \eta^A + \omega^B] \exp \{ \quad \} \quad (3.65)$$

tj. jadnačine kretanja za η . Pošto gluoni interaguju preko izvoda kovarijantnog izvoda :

$$\partial_A^{\mu} \partial_{\mu}^B \eta^A = \partial^{\mu} \eta + g f_{cA}^B (\partial_A^{\nu} A_{\nu}^c) \eta^A = -\omega^B \quad (3.66)$$

sledi da aveti, u stvari, interaguju sa poljem A ! (otuda aveti nisu potrebni ako se radi sa uslovima (3.10) i (3.13), ali ostaje dilema u smislu odeljka 3.3) Zamenom pôlja izvodima po njihovim izvorima :

$$[\partial^{\mu} (\delta_c^A \partial_{\mu} + g f_{cA}^B \frac{\delta}{i \delta \bar{\omega}_B}) \frac{\delta}{i \delta \bar{\omega}_A} + \omega^B] T\{\bar{\eta}; \bar{\omega}, \omega\} = 0 \quad (3.67)$$

te diferenciranjem po ω , za $\omega = \bar{\omega} = 0$, sledi :

$$\partial^{\mu} (\delta_c^A \partial_{\mu} + g f_{cA}^B \frac{\delta}{i \delta \bar{\omega}_B}) T_o^c \{\bar{\eta}; x, y\} = \int d^4 z K_c^A(x-z; \frac{\delta}{i \delta \bar{\omega}_B}) T_o^c \{\bar{\eta}; z, y\} \quad (3.68)$$

gde je iskorišćena oznaka iz (3.29), dok drugi sabirak (3.67) daje :

$$-i \delta_o^A \delta^{(4)}(x-y) T\{\bar{\eta}; 0, 0\} \quad (3.69)$$

Sumiranjem ova dva člana, prema (3.67); dobijaju se :

$$\partial^{\mu} (\delta_c^A \partial_{\mu} + g f_{cA}^B \frac{\delta}{i \delta \bar{\omega}_B}) T_o^c \{\bar{\eta}; x, y\} = i \delta_o^A \delta^{(4)}(x-y) T\{\bar{\eta}; 0, 0\} \quad (3.70)$$

što, zajedno sa (3.63), čini Ward - Takashi - identiteti za povezane Green-ove funkcije neabelovske teorije, u funkcionalnom obliku.

Proširenje na fermione (kvarkove i njihove izvore) daje :

$$\begin{aligned} i \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_A} \frac{\delta T\{\bar{\eta}; \bar{\xi}; \xi; 0, 0\}}{\delta \bar{\omega}_A^B} &= \int d^4 x [\delta_A^{\mu} (\delta_c^A \partial_{\mu} + g f_{cA}^B \frac{\delta}{i \delta \bar{\omega}_B}) - \\ &- g \bar{\xi}_i (T_c)_i^j \frac{\delta}{\delta \bar{\xi}_j} + g \xi^i (T_c)_j^i \frac{\delta}{\delta \xi^j}] T_o^c \{\bar{\eta}; \bar{\xi}, \xi; x, y\} \end{aligned} \quad (3.71)$$

i

$$\partial^{\mu} (\delta_c^A \partial_{\mu} + g f_{cA}^B \frac{\delta}{i \delta \bar{\omega}_B}) T\{\bar{\eta}; \bar{\xi}, \xi; x, y\} = i \delta_o^A \delta^{(4)}(x-y) T\{\bar{\eta}; \bar{\xi}, \xi; 0, 0\} \quad (3.72)$$

Ovo su potpuni W - T - identiteti, u funkcionalnom obliku. (Prelaskom na identiteti za lCI - videti 4. poglavlje - Green-ove funkcije, obično u impulsnom prostoru, dobijaju se S - T - identiteti, po J.C.Taylor-u i A.A. Slavnovu.) Da bi se dobili identiteti za pojedine Green-ove funkcije, potrebno je ove diferencirati po svim spoljnim izvorima, pa izvore izjednačiti sa nulom. Pošto su izvori aveta već izjednačeni sa nulom, sledi da se oni, za svaku Green-ovu funkciju, smeju pojavljivati samo u zatvorenim petljama! Ovo ograničenje u mnogome pojednostavljuje proračune, dozvoljavajući samo one grafove koji, u smislu odeljka 3.23, odgovaraju fizičkim Green-ovim funkcijama.

3.18 Tipičan primer W - T - identiteta za odredjenu Green-ovu funkciju je identitet za gluonski propagator. Diferenciranjem (3.71) po $\bar{\omega}^{\mu}$, a zatim po x_v , sledi (za $\bar{\eta} = \bar{\xi} = \xi = 0$) :

$$\left. \frac{i}{\delta} \frac{\partial}{\partial x_v} \frac{\delta^2 T\{\bar{\eta}; \bar{\xi}, \xi; 0, 0\}}{\delta \bar{\omega}_A^B(y) \delta \bar{\omega}_E^B(x)} \right|_{\bar{\eta}=\bar{\xi}=\xi=0} = -i \frac{\partial}{\partial x_v} (\delta_B^{\mu} \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}_A^{\mu}} + g f_{cB}^E \frac{\delta}{i \delta \bar{\omega}_E^{\mu}}) T\{\bar{\eta}; \bar{\xi}, \xi; x, y\} \quad (3.73)$$

što, korišćenjem (3.72) daje :

$$\frac{i}{\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} i [D_\nu^{\mu}(x-y)]_D^E = -i(i \delta_D^E \delta^{(4)}(x-y) \tilde{F}\{j; \bar{E}, E; 0, 0\}) \Big|_{j=\bar{E}=E=0} \quad (3.74)$$

odnosno, prema (3.20) :

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial y^\mu} [D_\nu^{\mu}(x-y)]_D^E = -\alpha \delta_D^E \delta^{(4)}(x-y) \quad (3.75)$$

ili, posle Fourier - transformacije, :

$$k^\nu k_\mu [\tilde{D}_\nu^{\mu}(k)]_D^E = \frac{-\alpha}{(2\pi)^4} \delta_D^E \quad (3.76)$$

Interesantno je da, uz Landau-ov uslov ($\alpha=0$), gluonski propagatori moraju biti transverzalni. Za Feynman-ov uslov je karakteristično da gluonski propagatori nisu transverzalni, ali je izraz znatno jednostavniji (videti (3.37)).

3.19 Posmatrajući jednačine (3.44) - (3.47) vidimo da prve tri, u skladu sa odeljkom 3.13, mogu da se smatraju specijalnom LGT, izvedenom sa (3.48) kao parametrom transformacije. Druge dve izgledaju potpuno proizvoljne (mada, naravno, u skladu sa očuvanjem kvantnih brojeva); izostavljajući parametar \bar{E} u (3.46) se, na primer, može konstruisati i jednostavniji izraz (linearan?), koji, međutim, ne bi, sa ostalim izrazima, bio simetrija lagranžijana (3.34)! Postavlja se pitanje da li transformacije (3.44) - (3.47) predstavljaju (u izvesnom smislu) kanoničke transformacije neke nove teorije?

Takva teorija postoji. Mada ona sama izlazi iz okvira ovog rada, korisno je navesti neke osnovne crte, sa ciljem primene upravo u QCD! ¹⁵

Teorija je odredjena operatorima Q i \mathfrak{D} , koji zadovoljavaju relacije :

$$\{Q, Q\} = [\mathfrak{D}, \mathfrak{D}] = 0; [\mathfrak{D}, Q] = -iQ \quad (3.77)$$

gde je Q ermitski generator „prave“ BRS-transformacije (u geometrijskoj interpretaciji - translacije), a \mathfrak{D} ermitski generator transformacije skale polja sa avetskim brojem različitim od nule (u geometrijskoj interpretaciji - homotetija!):

$$Q: \epsilon \rightarrow \epsilon + \lambda \quad ; \quad \mathfrak{D}: \epsilon \rightarrow e^\epsilon \epsilon \quad (3.78)$$

gde su ϵ i λ antikomutirajući kompleksni brojevi (elementi Grassmann-ove algebре), a Q -realan parametar. Definiše se i 5-dimenzionalni superprostor, te superpolja (analogoni polja - funkcija 4-dimenzionog prostora-vremena) :

$$(x_\mu, \bar{E}) = (x, \bar{E}) \quad ; \quad \eta^A(x, \bar{E}) \quad (3.79)$$

Bilo koje superpolje se, analogonom Taylor-ove teoreme, može razviti (uz uslov Grassmann-ove algebре: $\bar{E}^2 = 0$) :

$$G: \eta^A(x, \bar{E}) = \eta^A(x, 0) + \bar{E} C^A(x, 0) \equiv \eta^A(x) + \bar{E} C^A(x) \quad (3.80)$$

3.20 U skladu sa definicijama u prethodnom odeljku, dejstvo operatora Q i \mathfrak{D} na superpolje je :

$$U(Q) \eta^A(x, \bar{E}) U^\dagger(Q) = \eta^A(x, \bar{E} + \lambda) \quad (3.81)$$

$$U(\mathfrak{D}) \eta^A(x, \bar{E}) U^\dagger(\mathfrak{D}) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\mathfrak{D}} \eta^A(x, e^\mathfrak{D} \epsilon) \quad (3.82)$$

gde d u (3.82) predstavlja BRS-dimenziju (faktor homotetije) i podudara se sa avetskim brojem (odeljak 3.15). Zbog Fermi - statistike parametra $\bar{\epsilon}$, polja η^A i C^A imaju suprotnu statistiku!

Primenom $\partial_{\bar{\epsilon}}$ na (3.80) sledi :

$$\partial_{\bar{\epsilon}} \eta^A(x, \bar{\epsilon}) = \partial_{\bar{\epsilon}} [\eta^A(x) + \bar{\epsilon} C^A(x)] = C^A(x) \quad (3.83)$$

BRS-translacija, dakle, glasi :

$$Q(\lambda) : \eta^A(x) = \eta^A(x, 0) \rightarrow \eta^A(x, \lambda) = \eta^A(x) + \lambda C^A(x) \quad (3.84a)$$

$$Q(\lambda) : C^A(x) \equiv \partial \eta(x, \bar{\epsilon}) / \partial \bar{\epsilon} \rightarrow \partial \eta(x, \bar{\epsilon} + \lambda) / \partial (\bar{\epsilon} + \lambda) = C^A(x) \quad (3.84b)$$

a BRS-homotetija :

$$\mathcal{D}(e) : \eta^A(x) \rightarrow e^{de} \eta^A(x) \quad (3.85a)$$

$$\mathcal{D}(e) : C^A(x) \rightarrow e^{de} C^A(x) \quad (3.85b)$$

te sledi veza izmedju BRS-dimenzije prve i druge komponente bilo kog superpolja :

$$d' = d + 1 \quad (3.86)$$

Paralelno suprotnoj statistici superpolja, sledi suprotna parnost njihovih dimenzija! Iz (3.84b) sledi da je druga komponenta svakog superpolja invarijantna u odnosu na BRS-translaciju!

Pogodno je koristiti sledeće nazive :

- ireducibilno superpolje - ako se ne može razložiti na sumu superpolja koja imaju iste transformacione osobine (3.81) i (3.82));

- trivijalno superpolje - ako mu je druga komponenta jadnaka nuli, ali nije samo druga komponenta nekog superpolja.

3.21 Prema (3.80), sledi za gluonsko superpolje :

$$A_\mu^A(x, \bar{\epsilon}) = A_\mu^A(x) + \bar{\epsilon} \alpha_\mu^A(x) \quad (3.87)$$

Poredjenje sa infinitezimalnom LGT (kao najopštijoj transformaciji u prostoru boje) daje :

$$-\partial_\mu^A(x) \partial_\nu^B(x) = \bar{\epsilon} \alpha_\mu^A(x) = -\alpha_\mu^A(x) \bar{\epsilon} \quad (3.88)$$

te sladi najjednostavniji izbor :

$$\alpha_\mu^A(x) \equiv \partial_\mu^A(x) \eta^B(x) \quad (3.89)$$

a podrazumeva se (3.48). Uvedeno je, međutim, novo superpolje η , sa BRS-dimenzijom +1! Da bi se opisala njihova dinamika, potrebno je dati lagranžijan (bar) bilinear po ovakvim superpoljima, a BRS-dimenzije nula, jer je α_μ^A takav. Stoga se mora uvesti komplementarno $\bar{\eta}$ sa $d_{\bar{\eta}} = -1$.

$$\eta^A(x, \bar{\epsilon}) = \eta^A(x) + \bar{\epsilon} C^A(x) \quad \bar{\eta}_A(x, \bar{\epsilon}) = \bar{\eta}_A(x) + \bar{\epsilon} \bar{C}_A(x) \quad (3.90)$$

Najjednostavniji netrivijalni izbori (uz očuvanje kvantnih brojeva) su :

$$C^A(x) \propto f_B^A \eta^B(x) \eta^C(x) \quad \bar{C}_A(x) \propto \partial_\mu A_\mu^A(x) \quad (3.91)$$

Faktori uz ove izraze se biraju tako da efektivni lagranžijan (3.34) bude invarijantan u odnosu na razvoj superpolja, po petoj dimenziji (3.79), oko $\bar{\epsilon} = 0$.

3.22 Ispitujući osobine Green-ovih "super"-funkcija, lako se dolazi do zaključka da, na osnovu kvantnomehaničke definicije srednjih vrednosti važi :

$$\langle \mathcal{G}(\varphi_1^A(x, \bar{\epsilon}) \varphi_2^B(y, \bar{\zeta})) \rangle = e^{(d_1+d_2)\epsilon} \langle \mathcal{G}(\varphi_1^A(x, \epsilon^a \bar{\epsilon}) \varphi_2^B(y, \epsilon^b \bar{\zeta})) \rangle \quad (3.92)$$

što diktira razvoj po $\bar{\epsilon}$:

$$\langle \mathcal{G}(\varphi_1^A(x, \bar{\epsilon}) \varphi_2^B(y, \bar{\zeta})) \rangle = \delta(\bar{\epsilon} - \bar{\zeta}) f^{AB}(x-y) \quad \text{za } d_1 + d_2 = -1 \quad (3.93a)$$

$$= h^{AB}(x-y) \quad \text{za } d_1 + d_2 = 0 \quad (3.93b)$$

$$= 0 \quad \text{inače} \quad (3.93c)$$

Uz uvrštenje A_μ^A , η^A i $\tilde{\eta}_A$, dobijaju se S-T identiteti Greenovih funkcija za dve tačke. Istina, tačan oblik funkcija f^{AB} i h^{AB} , ovako jednostavnim razmatranjem ne može da se odredi, ali restriktivna osobina (3.93) može biti od velike pomoći prilikom konkretnih računa.

3.23 Najzad, zapazimo da u asimptotskim superpoljima (kao i "običnim" asimptotskim poljima) nelinearni članovi otpadaju. Stoga, posle Fourier - transformacije :

$$\tilde{A}_\mu^A(k, \bar{\epsilon})_{as} = \tilde{A}_\mu^A(k)_{as} - i \bar{\epsilon} k_\mu \tilde{\eta}^A(k)_{as} \quad (3.94a)$$

$$\tilde{\eta}^A(k, \bar{\epsilon})_{as} = \tilde{\eta}^A(k)_{as} \quad (3.94b)$$

$$\tilde{\tilde{\eta}}_A(k, \bar{\epsilon})_{as} = \tilde{\tilde{\eta}}_A(k)_{as} - i \frac{\bar{\epsilon}}{\alpha} k_\mu \tilde{A}_\mu^A(k)_{as} \quad (3.94c)$$

Sledi da je $\tilde{\eta}$ netrivialno superpolje zbog (3.94c). η je netrivialno, jer je proporcionalno drugoj komponenti netrivialnog dela (3.94a). Pošto su transverzalne komponente k identički jednake nuli, transverzalne komponente gluonskog superpolja su trivijalne. Na sličan način sledi da su longitudinalna i vremenska komponenta gluonskog superpolja - netrivialne (naravno, u smislu odeljka 3.20).

U teoriji BRS-simetrije (koristi se i naziv supersimetrija), postoji dokazana teorema (videti R3.11) : ako je S-matrica (za bilo kakvu dinamiku!) konačna i BRS-invariantna, doprinose joj samo trivijalna superpolja. Pošto, na ovaj način, realne, fizičke stepene slobode u QCD predstavljaju samo transverzalni gluoni (i, naravno, kvarkovi, nezavisno od ovog razmatranja), zaključujemo da aveti zaista (i potpuno) potrije sve nefizičke stepene slobode gluona.

3.24 Sada, pošto je pokazano da lagranđian (3.34) opisuje potpunu i jednoznačnu dinamiku QCD, te pošto su kompletirane komutacione i antikomutacione relacije ((3.1), (3.8), (3.2b), (3.3) i (3.35)), može da se pristupi razvijanju operatora kanoničkih promenljivih u red po odgovarajućim operatorima kreacije i anihilacije. Iz navedenih komutacionih i antikomutacionih relacija, tada, slede odgovarajuće relacije i za operatore kreacije i anihilacije.

Feynman-ova se pravila mogu primenjivati dosledno (u duhu odeljaka 3.10 i 3.11), te pomoću njih računati matrične elemente za određene procese. U ovom računu je, međutim, mora da se uzme u obzir činjenica da se kvarkovi i gluoni ne smeju pojaviti kao slobodne čestice. To smeju da budu tek njihova vezana stanja, i to ako su singleti boje!

U toku neposrednog računa se javljaju integrali po 4-impulsi- ma čestica koje obrazuju zatvorene petlje. Ovakvi integrali često divergiraju (intuitivno, jer se impuls ne može ničim ograničiti, pa inte-

gracija do beskonačnosti ne mora biti konvergentna), te računat matrični element postaje (besmisleno) beskonačan!

Da, bi se ovo izbeglo, razradjen je kompletan proces tzv. renormalizacije. Suština tog procesa je da se lagranžijanu, koji sam po sebi, nema fizički smisao, dodaju takvi beskonačni članovi da se u krajnjim izrazima (matričnim elementima) ne javljaju divergencije. Sledće poglavlje će dati pregled problema renormalizacije, kao i postupka.

primedbe

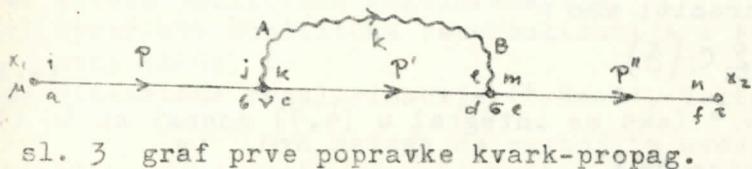
- ¹ odsad ću, kod konjugovanog momenta polja kvarka, izostavljati i .
- ² dodatak u (3.6) sadrži polje ∂A , te narušava GI. Međutim, ono ima 8 komponenti, pa još uvek preostaje 8 "viška"! Ovo sledi iz činjenice da gluon nema masu mirovanja a ima spin 1, te stoga samo transverzalne komponente polja kao realne, fizičke objekte;
- ³ redefinicija lagranžijana je učinjena samo da bi $E_A^0 \neq 0$!
- ⁴ to što, po Landau-ovom uslovu sledi da je lagranžijan divergentan, ne utiče na "fiziku", jer lagranžijan, sam po sebi nema fizičkog smisla.
- ⁵ tipična primena u R3.3, R1.6
- ⁶ pošto je ∂ kolinearan sa impulsom, posle Fourier-transformacije bi, u uglastoj zagradi u (3.31) stajao k umesto ∂ , što znači da (zbog osobina k) sa avetima interaguju vremenski i longitudinalni gluoni. 16 aveta, negativnom verovatnoćom (R3.1), "potiru" gluone sa kojima interaguju. (Ovo nije dokaz, već intuitivni zaključak!)
- ⁷ prema R1.1-3, R1.6, R3.1, R3.13, uz usaglašavanja ...
- ⁸ metoda grafova podrazumeva impulsnu sliku, te je neophodno izvršiti Fourier-transformaciju ulazno-izlaznih impulsa. Uzimajući u obzir samo lCI dijagrame, dobijaju se prave ("proper") Green-ove funkcije, te pridruživanjem odgovarajućih spinora, uz $p_i^i = m^i$, slede potpune amplitude raspršenja.
- ⁹ \sum_A se podrazumeva; tačnije, kvadratom podrazumevam kontrakciju po svim indeksima (kao u (2.32), na primer).
- ¹⁰ dodatak D7 i (3.47) ...
- ¹¹ do odeljka 3.19 su zavisnosti od prostor-vremena naznačene samo gde je neophodno. Sumiranje po ponovljenim indeksima je označeno tačkom (a indeksi izostavljeni), gde god ne dovodi do zabune.
- ¹² isto što u vitičastoj zagradi iz (3.61).
- ¹³ podrazumevajući levi, funkcionalni izvod, a posle $\bar{\omega} = \omega = 0$
- ¹⁴ pošto drugi funkcionalni izvod u (3.73) predstavlja Green-ovu funkciju za dva izvora gluonskog polja - to može biti samo gluonski propagator izmedju dve odgovarajuće prostor-vremenske tačke X i Y ...
- ¹⁵ uglavnom, tragom R3.11
- ¹⁶ definiše se tako da "normalna" statistika (ona koja odgovara Lorentz-transformacionim osobinama) povlači parno d !
- ¹⁷ za koje biramo da je $d = 0$, pošto je to najjednostavniji izbor (ali i stoga što - bar neki - gluoni treba da su realne fizičke čestice, koje moraju biti invarijantne u odnosu na BRS-homotetiju ...)

4. Renormalizacija

4.1 ... Verujem da su to bili Oppenheimer i Waller, 1930. koji su, nezavisno, prvi primetili da kvantna teorija polja, posle prve aproksimacije, daje ultravioletno divergentne rezultate za radijativnu sopstvenu energiju. ... Problem su rešili (bar za QED), posle rata, Feynman, Schwinger i Tomonaga, te Dyson. Otkriveno je da sve divergencije ne staju merene, konačne vrednosti mase i nanelektrisanja elektrona identificuju, ne sa parametrima m i e iz Lagranžijana, već sa masom i nabojem elektrona, izračunatih iz m i e , uzimajući u obzir činjenicu da su elektroni i foton uvek okruženi oblacima virtuelnih fotona i ee parova. Iznenada, sve vrste proračuna su postale moguće i dale spektakularnu sglasnost sa eksperimentima.¹

4.2 Problem o kome Weinberg govorio u svom nobelovskom govoru, pojavljuje se i u QCD. Ovde je situacija daleko složenija nego u QED. Činjenica da, kao slobodne fizičke čestice, mogu da se pojave samo vezana stanja kvarkova i gluona, komplikuje proračune, ali ne u tom smislu. QCD analogon citiranom problemu QED se jasno vidi pri izračunavanju npr. radijacione korekcije sopstvene energije kvark-propagatora, koja, u prvoj aproksimaciji (po Weinberg-ovom tekstu - drugoj!), potiče od samo-razmene jednog virtuelnog gluona, kao na slici 3.

4.3



sl. 3 graf prve popravke kvark-propag.

Dosledno pravilima iz odeljka 3.10 i 3.11 doprinos ovog (jedinog) grafa sopstvenoj energiji kvark-propagatora, uz Feynman-ov uslov ($\alpha = 1$) glasi:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p''}{(2\pi)^4} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \cdot \frac{i e^{-ipx_1} \delta_j^a \delta_b^a}{\hat{p} - m - i\epsilon} \cdot \frac{-i \delta_B^a g_{ve}}{k^2 + i\epsilon} \cdot i g \gamma^\nu (T_A)_K^j \delta_c^b (2\pi)^4 \delta^4(p - p' - k) \cdot \\ \cdot \frac{i \delta_c^b \delta_d^c}{\hat{p}' - m - i\epsilon} \cdot i g \gamma^\nu (T_B)_m^l \delta_e^d (2\pi)^4 \delta^4(p' - p'' - k) \cdot \frac{i e^{ipx_2} \delta_m^l \delta_n^e}{\hat{p}'' - m - i\epsilon} \quad (4.1)$$

što se može napisati kao:

$$\int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cdot \frac{i e^{-ipx_1}}{\hat{p} - m - i\epsilon} \cdot \mathcal{T}_2(p)_{nf}^{ia} \cdot \frac{i e^{ipx_2}}{\hat{p} - m - i\epsilon} \quad (4.2)$$

gde je

$$\mathcal{T}_2(p)_{nf}^{ia} = \frac{4}{3} \delta_n^l \delta_f^a (ig)^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \gamma^\nu \frac{1}{\hat{p} - k - m - i\epsilon} Y_\nu \quad (4.3)$$

4.4 Za veliko k , član izmedju dva γ se ponaša kao k^{-1} , a pretvodni razlomak kao k^{-2} . Pošto je, posle integracije po uglovima, $dk \rightarrow k^3 dk$, sledi da:

$$\mathcal{T}_2(p) \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \int k^3 dk k^{-3} \underset{k \rightarrow \infty}{\sim} \int dk \propto \ln k = \infty \quad (4.4)$$

odnosno, \mathcal{T}_2 (često se naziva amputirana Green-ova funkcija) linearno divergira. Zapravo:

$$\mathcal{T}_2(p) \propto P \Rightarrow \frac{1}{\hat{p} - k - m - i\epsilon} = \frac{\hat{p} - k + m}{(\hat{p} - k)^2 - m^2 - i\epsilon} \propto P \quad (4.5)$$

jer virtuelni foton ne bi smeо da naruši proporcionalnost doprinosa u-lazno-izlaznom impulsu ((4.2)), te \mathcal{T}_2 divergira „samo“ logaritamski!

4.5 Ovo je najprostiji primer. Jasno da se, kod komplikovanih grafova mogu javiti (i, po pravilu, javljaju se) višestruke divergencije. Kvantna teorija polja zahteva da se u n-toj popravci uzmu u obzir svi grafovi n-tog stepena (po konstanti interakcije). Stoga je pogodno definisati stepen divergencije.

Posmatrajmo Green-ovu funkciju proizvoljnog reda. Da bi izbegli divergencije, uvedimo parametar Λ , kao gornju granicu svih onih integrala koji bi divergirali za gornju granicu ∞ . Tada :

$$G_n^\Lambda(P_i) = \int_0^\Lambda d^4 k_1 \dots d^4 k_\ell J_n(P_i; k_1 \dots k_\ell) \quad (4.6)$$

U limesu $\Lambda \rightarrow \infty$:

$$G_n(P_i) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} G_n^\Lambda(P_i) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \int_0^\Lambda d^4 k_1 \dots d^4 k_\ell J_n(P_i; k_1 \dots k_\ell) \quad (4.7)$$

$$\lim_{\{k_i\} \rightarrow \infty} G_n(P_i) \sim \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} \begin{cases} \Lambda^D & D \neq 0 \\ \ln \Lambda & D=0 \end{cases} \quad (4.8)$$

čime je definisan D - stepen divergencije.

4.6 Jasno da D mora biti funkcija od ℓ , a funkcional od J_n ! Osim toga, (4.7) sigurno konvergira za :

$$D < 0 \quad (4.9)$$

Prema (4.7), D se može izraziti kao :

$$D = 4 \cdot \ell + \sum_{i=1}^{\ell} c_i \{J\} \quad (4.10)$$

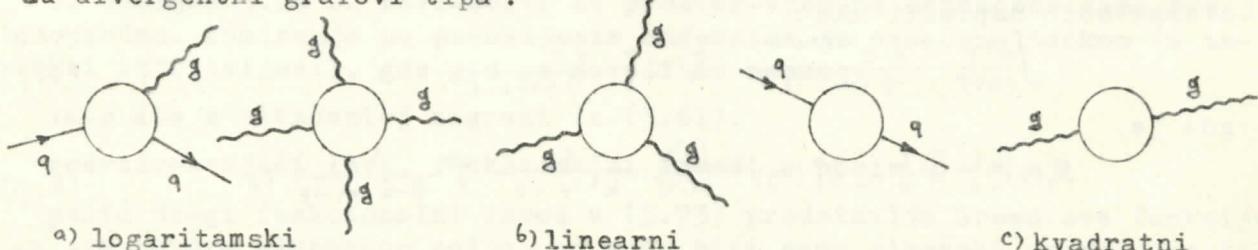
gde je c_i "stepen J po k_i " (ako se integral u (4.7) odnosi na k_i !).

Na osnovu činjenice da :

- aveti ne mogu biti pridruženi spoljnim linijama;
 - postoji samo elementi grafova dati u odeljku 3.10;
- sledi formula (R3.13) :

$$D = 4 - E_A - \frac{3}{2} E_A \quad (4.11)$$

gde je E_A (E_A) broj spoljnih gluonskih (kvark) linija datog grafa. Stoga su divergentni grafovi tipa :



sl. 4 divergentni tipovi grafova i stepen njihove divergencije
(što sledi samo na osnovu (4.11)!)

Polazeći od činjenice da je skup tipova divergentnih grafova konačan (te je stoga i broj divergentnih grafova u n-toj popravci konačan!), Gerard 't Hooft je pokazao da se sve amplitude, koje odgovaraju realnim, fizičkim procesima, mogu renormalizovati, tj. moguće je sprovesti potpun i matematički dobro definisan postupak u duhu odeljka 4.1! (Egzaktan dokaz je daleko složeniji, te ovde nije iznesen. Napomene radi, okosnicu dokaza predstavljaju W-T, odnosno S-T identiteti (3.63), (3.70) i (3.76), čuvajući GI fizičkih objekata u duhu odgovarajućih razmatra-nja u ovom radu.)

4.7 "4" u (4.10) i (4.11) je posledica 4-dimenzionalnosti prostor-vremena. Da je on (recimo) 3-dimenzionalan, doprinosi grafova sa slike 4c bi postali linearne, sa 4b - logaritamski divergentni, a sa 4a - konvergentni! U stvari, za konvergenciju grafova sa slike 4a, dovoljno je da prostor-vreme ima $4 - \xi$ dimenzija (gde je ξ neki mali broj). U limesu $\xi \rightarrow 0$, integrali divergiraju kao i pre. Međutim, ostavljajući $\xi \ll 1$ i $\xi \neq 0$, logaritamske divergencije iščezavaju. Ovo je suština postupka tzv. regularizacije. (Analitičko produženje dimenzije prostor-vremena sa 4 na $4 - \xi$, dovodi do toga da se divergencije (4.7) pojave u obliku $1/\xi$.)

U ovom poglavlju će se, na jednom jednostavnom primeru, pokazati postupak regularizacije, te potom otklanjanje singulariteta, što u stvari, predstavlja renormalizaciju. Osim toga što otklanja logaritamske divergencije, postupak regularizacije je veoma pogodan, jer su integrali (u matematičkom smislu!) bolje definisani, mada znatno komplikovaniji.

4.8 Bez pretenzija da se pitanje renormalizacije podrobniye obradi, neizbežno je, makar površno, dati pregled raznih postupaka regularizacije! Regularizacijom se naziva svaki dobro definisan matematički postupak koji izoluje singularitete Feynman-ovih dijagrama, te omogućuje njihovo otklanjanje.

U literaturi se sreću:

- a) Pauli - Villar metoda,
- b) metoda analitičke regularizacije,
- c) Speer-ova analitička renormalizacija i Bogoliubov - Parasiuk - Hepp pristup (BPH), te
- d) dimenziona regularizacija (t Hooft, Veltman; Bollini, Giambiagi).

a) Ova metoda se sastoji u uvodjenju polja sa masama (regulatori) na takav način da eliminišu singularitete. Pomoćna polja nemaju nikakvu fizičku interpretaciju, te je postupak ekvivalentan običnom presecanju integrala (uporediti sa (4.6)). Postupak je (istina, samo za QED) razvijen do te mere da je moguće izvršiti GI regularizaciju u svim stepenima aproksimacije perturbativnog razvoja.

b) Osnovni princip ove metode je u analitičkom produženju osovine propagatora, te:

$$\xrightarrow[\mathcal{P}]{(q)} \rightarrow [\hat{\mathcal{P}}^{-m-i\xi}]^{\alpha} \rightarrow [\hat{\mathcal{P}}^{-m-i\xi}]^{\alpha} \quad (4.12)$$

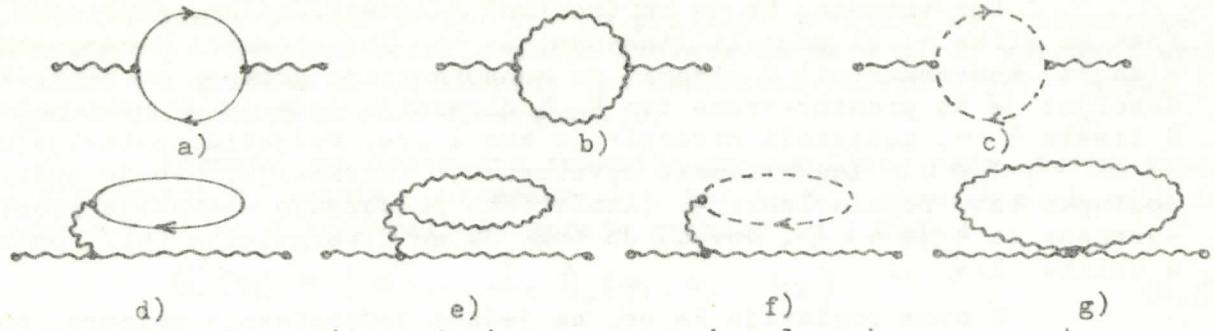
i tsl., tako da Feynman-ovi integrali postaju izrazi sa singularitetima tipa (višestrukih) polova po ($\alpha - 1$). Oduzimanjem ovih neželjenih polova, dobijaju se željene vrednosti Feynman-ovih integrala.

c) Ova metoda je slična prethodnoj, s tim da se svakoj unutrašnjoj liniji pridružuje drugi parametar analitičkog produženja propagatora. Potom se singulariteti izdvajaju kao polovi po tim parametrima.

d) Ideja ovog metoda je već prikazana u odeljku 4.7. Zbog činjenice da je tehnika zasnovana na analitičkom produženju prostor-vremena, očigledno je gauge-invarijantna! Ova izuzetna prednost u odnosu na ostale tehnike je dovela do popularnosti ove metode. Stoga, u ovom radu, druge tehnike neće biti diskutovane. Osim toga, odsad ću, zbog poređenja sa literaturom, sa ξ označavati parametar koji otklanja divergenciju propagatora za $\mathcal{P}^2 = m^2$ u (3.36) npr., dok ću sa ϵ označavati parametar iz odeljka 4.7.

4.9 Kao primer se, najčešće, uzima sopstvena energija gluona u prvoj aproksimaciji (tj. aproksimaciji drugog stepena po konstanti interakcije. Tada, prema odeljku 3.11, crtamo sve dozvoljene gra-

fove :

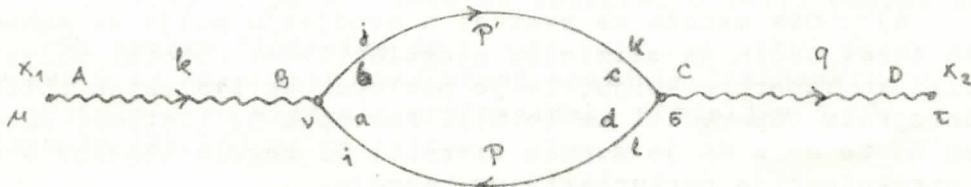


sl. 5 svi mogući grafovi prve popravke gluonskog propagatora

Grafove na slikama 5d) - f) ne treba uzimati u obzir, jer su njihovi doprinosi identički jednaki nuli (za QCD), zbog ne-abelovske strukture $SU(3)$ - odnosno - antisimetričnosti generatora $SU(3)$, koji se javljaju na vrteksima. Pri izračunavanju doprinosa grafa na slici 5g), vidi se amputirana greenovska funkcija uopšte ne zavisi od ulazno-izlaznog impulsa. Stoga je doprinos ovog grafa neinteresantna konstanta, koja se, posle re-normalizacije može normirati na nulu.

4.10 Green-ova funkcija za graf na slici 5a) glasi :

$$\text{Tr} \left\{ \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{d^n p'}{(2\pi)^n} \frac{d^n q}{(2\pi)^n} (-1) \cdot \frac{-ie^{-ikx_1} \delta_B \delta_{uv}}{k^2 + i\xi} \cdot ig \gamma^v(T^c)_j^i \delta_b^{(2\pi)} \delta^u((k+p)-p') \cdot \right. \\ \left. - \frac{i \delta_k \delta_c^b}{p-m-i\xi} \cdot ig \gamma^e(T_c)_k^j \delta_d^c (2\pi) \delta^u((p-p)-q) \cdot \frac{i \delta_i \delta_a^d}{p-m-i\xi} \cdot \frac{-ie^{iqx_2} \delta_d \delta_{er}}{q^2 + i\xi} \right\} \quad (4.13)$$



slika 6

odnosno :

$$\frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta_B^A g_{uv} \frac{ie^{-ikx_1}}{k^2 + i\xi} \cdot \tilde{\mathcal{G}}_2^{v\bar{e}}(k, a)_c^B \cdot \frac{ie^{-ikx_2}}{k^2 + i\xi} g_{er} \delta_d^c \quad (4.14)$$

gde je :

$$\tilde{\mathcal{G}}_2^{v\bar{e}}(k, a)_c^B = -(ig)^2 \sum_j \text{Tr} \left\{ (T^c T_c) \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \gamma^v \frac{i}{\hat{p} + k - m_j - i\xi} \gamma^e \frac{i}{\hat{p} - m_f - i\xi} \right\} \quad (4.15)$$

što daje :

$$(ig)^2 \frac{1}{2} \delta_c^B \sum_j \int \frac{d^n p}{(2\pi)^n} \frac{\text{Tr} \{ \gamma^v(\hat{p} + \hat{k} + m_j) \gamma^e(\hat{p} + m_f) \}}{[(\hat{p} + \hat{k})^2 - m_f^2 - i\xi][\hat{p}^2 - m_f^2 - i\xi]} \quad (4.16)$$

gde je sumiranje po aromama (\sum_j) eksplicitno napisano, da bi se videla zavisnost popravke gluonskog propagatora od broja (i mase) kvarkova! Ovde i nadalje podrazumevam :

$$m_s \equiv m_{ff} \quad (4.17)$$

gde je m_{ff} dijagonalna matrica masa razmatrana u odeljku 2.2. Iz (4.15) se vidi da "teži" kvarkovi manje doprinose ovoj popravci; njihov doprinos, u prvoj aproksimaciji, opada sa drugim stepenom mase. Ovo je bilo i za očekivati, jer je verovatnoća da se kvantnom fluktuacijom, iz vakuma pojavi masivan par $q\bar{q}$ manja od one za "lakši" par.

4.11 Kao konačan rezultat, dobija se γ :

$$\mathcal{F}_2^{v^6}(k, \alpha)_c = -i(k^v k^6 - \beta^{v^6} k^2) \mathcal{F}_2(k, \alpha)_c \quad (4.18)$$

$$\mathcal{F}_2(k, \alpha)_c = \frac{\alpha_3}{\pi} (2\pi)^{\epsilon/2} \frac{1}{2} \delta_c^B \sum_{\ell} \Gamma(\epsilon/2) \int_0^1 dx [2x(x-1)] \left[\frac{v^2}{R_f^2} \right]^{\epsilon/2} \quad (4.19)$$

sa

$$R_f^2 \equiv x(x-1)k^2 - m_f^2 + i\xi \quad (4.20a)$$

$$\alpha_3 \equiv (\beta^2/4\pi) v^{-\epsilon/2} \quad (4.20b)$$

gde je v parametar skale, koji u limesu $\epsilon \rightarrow 0$ nestaje iz izraza (4.18) - (4.20).

Vidi se da je singularitet lokalizovan kao singularitet s obzirom na razvoj (R3.1)

$$\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) = 1 - \frac{1}{2}(n-4) + \frac{1}{8}\left(v^2 + \frac{\pi^2}{6}\right)(n-4)^2 + \dots \quad (4.21)$$

i rekurziju

$$\Gamma(n+1) = n \Gamma(n) ; \quad \Gamma(n-1) = \frac{1}{n-1} \Gamma(n) \quad (4.22)$$

sledi :

$$n=4-\epsilon \quad \Gamma(\epsilon/2) = \frac{2}{\epsilon} \left(1 - \frac{v^2}{2} + \dots \right) \quad (4.23)$$

gde se vidi da $\Gamma(\epsilon/2)$ ima prost pol u $\epsilon = 0$.

4.12 Prema načinu na koji se ovakvi singulariteti uklanjaju, razlikuju se pojedine renormalizacione šeme. Nadalje će, uglavnom, biti govora o 't Hooft-ovoj ϵ -renormalizaciji, te je, stoga ovde dat pregled :

a) μ - renormalizacija;

$$\text{def.} \quad \mathcal{F}_2^{\mu^2}(k^2) \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [\mathcal{F}_2(k^2; \epsilon) - \mathcal{F}_2(\mu^2; \epsilon)] \quad (4.24)$$

gde je μ^2 - euklidска vrednost kvadrata 4-impulsa propagatora.

b) Weinbergova šema nezavisna od mase;

konstante renormalizacije (videti u kasnijem tekstu) se dobijaju iz regularizovanih Green-ovih funkcija izračunatih za neku euklidsku vrednost impulsa propagatora, anulirajući sve masene članove.

c) λ - renormalizacija;

analogno prethodnim šemama, ovde se za vrednost kvadrata 4-impulsa uzima, približno, odgovarajuća masa. Zbog ovog odstupanja se javlja zavisnost od masenog parametra λ .

d) 't Hooft-ova ϵ - renormalizacija;

ova šema će biti detaljnije prikazana u sledećim odeljcima.

4.13 Svi ovi renormalizacioni postupci se odnose na perturbativnu QCD, te moraju biti definisani za svaki stepen aproksimacije u perturbativnom razvoju. Drugim rečima, renormalizacioni program se može provoditi stepen po stepen u perturbativnom razvoju. Da bi se iz konačnih rezultata (onih koji su fizički značajni!) otklonile divergencije, lagranđijanu (koji sam po sebi nema fizički smisao) se moraju dodati novi članovi. Teorija se minimalno menja ako su ti novi članovi proporcionalni starima. Tada se ovaj aditivni postupak pretvara u multiplikativni.

Da lagranđijanu ne bi dodavali uvek nove i nove članove (tak-

ve da se ne može preći na multiplikativan oblik!), neophodno je pokazati da se može sprovesti "minimalna promena". U protivnom, broj članova koje treba dodati je beskonačan, a ne može se prikazati kao proizvod skupa multiplikativnih konstanti i odgovarajućih članova "starog" lagranžijana. Stoga postupak ne bi bio dobro definisan, što opravdava zahtev za "minimalnom promenom" teorije.

Dovodeći do kraja proceduru za gluonski propagator, vidimo da se dobija izraz proporcionalan gluonskom propagatoru u nultoj aproksimaciji. To znači da se isti rezultat dobija dodavanjem (2.33a), pomnoženog odgovarajućim faktorom, lagranžijanu (3.34). Slično se može pokazati i za ostale članove lagranžijana (3.34), odnosno elemente grafova iz odeljka 3.10. Stoga, novi, renormirani lagranžijan može da se piše:

$$\mathcal{L}_{QCD}^{\text{eff}} \rightarrow \mathcal{L}_{QCD}^{\text{eff}} + \Delta_2 \frac{1}{4} G_A^{\mu\nu}(x) G_A^{\mu\nu}(x) + \Delta_3 \frac{3}{2} G_A^{\mu\nu}(x) f_{BC}^A A_B^B(x) A_C^C(x) + \dots \quad (4.25a)$$

$$+ \Delta_4 \frac{g^2}{4} f_{EAB} f^{ECF} A_E^A(x) A_F^B(x) A_C^C(x) A_D^D(x) - i \Delta_{2F} \bar{\psi}_i(x) \hat{\partial} \psi_i(x) \quad (4.25b)$$

$$+ \Delta_m \bar{\psi}_i(x) m \psi^i(x) - \Delta_{3F} g \bar{\psi}_i(x) \hat{\psi}^i(x) + \Delta_d \frac{1}{2d} (\partial_\mu A_\mu^A(x))^2 \quad (4.25c)$$

$$+ \Delta_{a2} \partial_\mu \bar{\eta}_A(x) \partial^\mu \eta^A(x) + \Delta_{a3} g \partial_\mu \bar{\eta}_A(x) f^{AB} \eta^B(x) \eta^C(x) \quad (4.25d)$$

ili, simbolički:

$$\mathcal{L}_{QCD}^{\text{eff}} \rightarrow (1 + \Delta) \mathcal{L}_{QCD}^{\text{eff}} \quad (4.26)$$

Svi Δ faktori se mogu smatrati redovima po stepenima d_s .

4.14 Egzaktan dokaz renormalizabilnosti QCD se svodi na dokaz da je ovo dovoljan broj Δ faktora za otklanjanje UV divergencija iz fizički značajnih rezultata.

S druge strane, mogu da se uvedu renormalizacione konstante:

$$(q\bar{q}): \mathcal{Z}_{2F} \equiv 1 - \Delta_{2F} \quad (gg): \mathcal{Z}_2 \equiv 1 - \Delta_2 \quad (a\bar{a}): \mathcal{Z}_{a2} \equiv 1 - \Delta_{a2} \quad (4.27)$$

$$(q\bar{q}g): \mathcal{Z}_{3F} \equiv 1 - \Delta_{3F} \quad (ggg): \mathcal{Z}_3 \equiv 1 - \Delta_3 \quad (gggg): \mathcal{Z}_4 \equiv 1 - \Delta_4 \quad (a\bar{a}g): \mathcal{Z}_{a3} \equiv 1 - \Delta_{a3} \quad (4.28)$$

$$(\bar{q}m\bar{q}): \mathcal{Z}_m \equiv 1 - \Delta_m \quad \alpha: \mathcal{Z}_\alpha \equiv 1 - \Delta_\alpha \quad (4.29)$$

Potom se definišu:

$$\overset{\circ}{A}_\mu^A(x) \equiv \mathcal{Z}_2^{\frac{1}{2}} A_\mu^A(x); \quad \overset{\circ}{\psi}^i(x) \equiv \mathcal{Z}_{2F}^{-\frac{1}{2}} \psi^i(x); \quad \overset{\circ}{\eta}^A(x) \equiv \mathcal{Z}_{a2}^{-\frac{1}{2}} \eta^A(x) \quad (4.30)$$

$$\overset{\circ}{g}_{TM} \equiv \mathcal{Z}_3 \mathcal{Z}_2^{-\frac{3}{2}} g; \quad \overset{\circ}{g}_a \equiv \mathcal{Z}_{a3} \mathcal{Z}_{a2}^{-1} \mathcal{Z}_3^{-\frac{1}{2}} g \quad (4.31a, b)$$

$$\overset{\circ}{g}_F \equiv \mathcal{Z}_{3F} \mathcal{Z}_{2F}^{-1} \mathcal{Z}_3^{-\frac{1}{2}} g; \quad \overset{\circ}{g}_4 \equiv \mathcal{Z}_4 \mathcal{Z}_3^{-2} g^2 \quad (4.31c, d)$$

$$\overset{\circ}{m} \equiv \mathcal{Z}_m \mathcal{Z}_{2F}^{-1} m; \quad \overset{\circ}{\alpha} \equiv \mathcal{Z}_\alpha^{-1} \mathcal{Z}_3 \alpha \quad (4.32)$$

Da bi se zadržala BRS-invarijantnost, neophodno je staviti

$$\overset{\circ}{g}_{TM} = \overset{\circ}{g}_a = \overset{\circ}{g}_F = \overset{\circ}{g}_4 = \overset{\circ}{g} \quad (4.33)$$

odakle sledi:

$$\mathcal{Z}_2 / \mathcal{Z}_3 = \mathcal{Z}_{a2} / \mathcal{Z}_{a3} = \mathcal{Z}_{2F} / \mathcal{Z}_{3F} = \mathcal{Z}_3 / \mathcal{Z}_4 \quad (4.34)$$

što se može izvesti i iz S-T identiteta (pošto su ovi posledica BRS-in-

varijantnosti).

Prema tome, fiksirajući normalizaciju \mathcal{Z}_F , \mathcal{Z}_3 , \mathcal{Z}_α i \mathcal{Z}_4 , te birajući pogodne \mathcal{Z}_F , \mathcal{Z}_3 i \mathcal{Z}_α , renormalizacija je jednoznačno određena. Stoga :

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{eff}}(A, \psi, \eta; g, d, m_f) \rightarrow (1+\delta) \mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{eff}} = \mathcal{L}_{\text{QCD}}^{\text{eff}}(A, \psi, \eta; g, d, m_f) \quad (4.35)$$

4.15 U 't Hooft-ovoj \mathcal{E} -renormalizaciji se zahteva :

$$\mathcal{Z}_i = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \mathcal{Z}_i^n(g, m, v) \quad (4.36)$$

tj.

$$g = v^{1/2} g \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \mathcal{Z}_g^n(g, m, v) \right) \equiv v^{1/2} g \mathcal{Z}_g \quad (4.37)$$

$$m_f = m_f \left(\delta_f^{1/2} + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \mathcal{Z}_m^n(g, m, v) \right) \equiv (\mathcal{Z}_m)^{1/2} m_f \quad (4.38)$$

gde je $\mathcal{Z}_f^{1/2}$ očigledno dijagonalna (zbog nezavisnosti boje i arome)!

Singulariteti u (4.36) - (4.38) su upravo takvi da potiru one iz Feynman-ovih integrala. (U prvoj aproksimaciji, dakako, sume imaju samo jedan sabirak!)

Na ovaj se način dobija potpuni gluonski propagator :

$$i \mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = -i \delta_B^A \left\{ \frac{S_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2}{k^2 + i\varepsilon} \left[1 + \mathcal{T}(k^2/v^2, m_f^2/v^2, d_s) \right]^{-1} + d \frac{k_\mu k_\nu / k^2}{k^2 + i\varepsilon} \right\} \quad (4.39)$$

gde se drugi sabirak ne renormalizuje zbog S-T identiteta :

$$k^\mu k^\nu \mathcal{D}_{\mu\nu}(k) = -i \delta_B^A d \quad (3.76)$$

$\mathcal{T}_2(k^2/v^2, m_f^2/v^2, d_s)$ je sopstvena energija gluona u prvoj aproksimaciji ($\sim g^2$) data izrazima (4.19) i (4.20) posle postupka opisanog u odeljku 4.15.

Prema R3.1 :

$$\mathcal{T}_2(k^2/v^2, m_f^2/v^2, d_s) = -\frac{d_s}{\pi} \delta_B^A \sum_{\gamma} \int_0^1 dk (k-x) \left[\gamma - \ln 2\pi + \ln \left(\frac{R^2}{v^2} \right) \right] \quad (4.40)$$

Ovaj integral nije eksplicitno rešiv, te se uzimaju rešenja za $-k^2 \gg m_f^2$ i $-k^2 \ll m_f^2$ zatim vrši aproksimativna interpolacija.

4.16 Formalno, (4.39) se može, uz Landau-ov uslov, pisati :

$$\mathcal{D}(k) = \mathcal{D}_0(k) [1 + \mathcal{T}]^{-1} = \mathcal{D}_0 - \mathcal{D}_0 \mathcal{T} \mathcal{D}_0 + \dots = \mathcal{D}_0 [1 - \bar{\mathcal{T}} \mathcal{D}] \quad (4.41)$$

odnosno :

$$\tilde{\mathcal{D}}(k) = [\mathcal{D}^{-1}(k) - \mathcal{D}_0^{-1}(k)]_{\mu\nu} \propto (S_{\mu\nu} k^2 - k_\mu k_\nu) \quad (4.42)$$

što, bez obzira na uslov (po d), ukazuje na transverzalnost polarizacije vakuma!

Detaljnijom analizom (R3.13) se vidi da, bez kvarkova, $\tilde{\mathcal{D}}(k)$ ostaje transverzalno, ali bez aveti, longitudinalni deo ne iščezava!

4.17 U opštem slučaju Green-ova funkcija bilo kog grafa ima oblik :

$$\Gamma_{n_A, n_q}(k_i; p_j) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (Z_A(\varepsilon))^{n_A/2} (Z_q(\varepsilon))^{n_q/2} \cdot \Gamma_{n_A, n_q}(k_i; p_j; \varepsilon) \quad (4.42)$$

gde je (Γ) (ne)renormirana Green-ova funkcija. Jasno da je, u ovoj notaciji, funkcija iz odeljaka 4.10 - 4.13 te 4.15 - $\Gamma_{\varepsilon, 0}$. U (4.42) su eksplicitno naznačene zavisnosti Green-ovih funkcija od broja i impulsa ulazno - izlaznih kvarkova. Pored toga, ova funkcija zavisi od gauge-pa-

parametra α , konstante jake interakcije \mathcal{J} , te skale ν , koja je uvedena u (4.19) odnosno skale μ ili λ , zavisno od šeme u kojoj se radi. Zavisnost od α otpada, zbog W-T identiteta.⁸ Stoga: $\Gamma_{\alpha_1 \alpha_2}(\bar{z}_i)$ zavise od parametra skale; $\Gamma_{\alpha_1 \alpha_2}(\bar{z}_i)$ zavise od ϵ ; $\Gamma_{\alpha_1 \alpha_2}$ je nezavisno od ϵ , a $\Gamma_{\alpha_1 \alpha_2}$ od parametra skale! Zato :

$$\mu \frac{d}{d\mu} \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2}(k_i; p_j; \bar{d}_s; m_f; \alpha; \epsilon) = 0 \quad (4.43)$$

odnosno, uz $\bar{z}_A \equiv \bar{z}_2$, $\bar{z}_q \equiv \bar{z}_{2F}$:

$$0 = \mu \frac{d}{d\mu} \left[\bar{z}_A (\bar{g}, \epsilon, \mu) \bar{z}_q (\bar{g}, \epsilon, \mu) \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2}(k_i; p_j; \bar{d}_s; \bar{d}_s, \epsilon, \mu; m_f, \alpha; \mu) \right] \quad (4.44)$$

$$= \bar{z}_A \bar{z}_q \mu \left\{ -\frac{n_A}{2} \bar{z}_A \frac{\partial \bar{z}_A}{\partial \mu} - \frac{n_q}{2} \bar{z}_q \frac{\partial \bar{z}_q}{\partial \mu} + \frac{\partial \bar{d}_s}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \bar{d}_s} + \frac{\partial}{\partial \mu} + \sum_f \frac{\partial m_f}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m_f} \right\} \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2} \quad (4.45)$$

$$= \left\{ -n_A \gamma_A - n_q \gamma_q + \bar{d}_s \beta \frac{\partial}{\partial \bar{d}_s} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} - \sum_f \gamma_f m_f \frac{\partial}{\partial m_f} \right\} \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2} \quad (4.46)$$

gde je tzv. Gell-Mann - Low (ili Callan - Symanzik) funkcija :

$$\bar{d}_s \beta(\bar{d}_s, x_f, \alpha) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} d_s(\bar{d}_s, x_f; \epsilon, \mu) \quad (4.47)$$

sa

$$x_f \equiv m_f / \mu \quad (4.48)$$

te "anomalne dimenzije" :

$$\gamma_{A,q}(\bar{d}_s, x_f, \alpha) = \frac{1}{2} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mu}{\bar{z}_{A,q}} \cdot \frac{\partial \bar{z}_{A,q}}{\partial \mu} \quad (4.49)$$

$$\gamma_f(\bar{d}_s, x_f, \alpha) = -\frac{\mu}{m_f} \frac{\partial m_f}{\partial \mu} \quad (4.50)$$

$$\beta_\alpha(\bar{d}_s, x_f, \alpha) = \mu \frac{\partial \alpha}{\partial \mu} \quad (4.51)$$

4.18 Označimo sa D dimenziju Greenovih funkcija u jedinicama mase. Tada, prema Euler-ovoj teoremi za homogene funkcije važi :

$$\left\{ \lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \sum_f m_f \frac{\partial}{\partial m_f} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} - D \right\} \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2}(\lambda k_i; \lambda p_j; \bar{d}_s, m_f, \alpha; \mu) \quad (4.52)$$

Pomoću (4.46) i (4.52) se $\mu \frac{\partial}{\partial \mu}$ može eliminisati :

$$\left\{ -\lambda \frac{\partial}{\partial \lambda} + \bar{d}_s \beta \frac{\partial}{\partial \bar{d}_s} + \beta_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sum_f [1 + \gamma_f] x_f \frac{\partial}{\partial x_f} + (D - \gamma_r) \right\} \Gamma_{\alpha_1 \alpha_2}(\lambda, \dots) \quad (4.53)$$

sa

$$\gamma_r \equiv -\frac{1}{2} (n_A \gamma_A + n_q \gamma_q) \quad (4.54)$$

Ova parcijalna diferencijalna jednačina prvog reda (Gell-Mann - Low, ili homogena Callan - Symanzik jednačina) se rešava na sledeći način : Potraže se rešenja

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \bar{d}_s(\lambda, \bar{d}_s) = \bar{d}_s \beta(\bar{d}_s) \quad , \quad \bar{d}_s(1, \bar{d}_s) = \bar{d}_s \quad (4.55)$$

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \bar{x}_f(\lambda, \bar{d}_s) = -\bar{x}_f [1 + \gamma_f(\bar{d}_s)] \quad , \quad \bar{x}_f(1, \bar{d}_s) = x_f \quad (4.56)$$

$$\lambda \frac{d}{d\lambda} \bar{\alpha}(\lambda, \bar{d}_s) = \beta_\alpha(\bar{d}_s) \quad , \quad \bar{\alpha}(1, \bar{d}_s) = \alpha \quad (4.57)$$

pa je tada rešenje (4.53) dato :

$$\Gamma(\lambda k_i; \lambda p_j; \bar{d}_s, x_f, \alpha; \mu) = \lambda^D \Gamma(k_i; p_j; \bar{d}_s, \bar{x}_f, \bar{\alpha}; \mu) e^{- \int_0^\lambda \frac{dt}{t} \gamma_r(t, \bar{d}_s)} \quad (4.58a)$$

$$= \Gamma(k_i; p_j; \bar{d}_s, \bar{x}_f, \bar{\alpha}; \mu) \exp \left\{ D \ln \lambda - \int_0^\lambda \frac{dt}{t} \gamma_r(t, \bar{d}_s) \right\} \quad (4.58b)$$

Iz ovog formalnog rešenja se vidi da γ_r doprinosi dimenziji Green-ovih funkcija u jedinicama mase - otuda naziv anomalne dimenzije. U jednačini (4.53) je uveden član koji potiče od zavisnosti Green-ovih funkcija od gauge-parametra - radi opštosti. Odgovarajuća funkcija-koefficijent je uvedena u (4.51), gde je (ne baš opravданo) svrstana u anomalne dimenzije; iz (4.58) se vidi da nema tu osobinu!

4.19 Iz (4.55) sledi :

$$\int_1^{\lambda} \frac{d\lambda'}{\lambda'} = \ln \lambda = \int_{\alpha_s}^{\bar{\alpha}_s} \frac{d\xi}{\xi} \beta'(\xi) ; \quad \xi = \xi(\lambda, \alpha_s) \quad (4.59)$$

čije bi rešenje po $\bar{\alpha}_s$ odredilo osobine teorije. Stepeni red β po α_s glasi :

$$\text{G.: } \beta(\bar{\alpha}_s) = \frac{\bar{\alpha}_s}{\pi} \beta_1 + \left(\frac{\bar{\alpha}_s}{\pi} \right)^2 \beta_2 + \dots \quad (4.60)$$

tada :

$$\ln \lambda = \int_{\alpha_s}^{\bar{\alpha}_s} \frac{d\xi}{\xi} \left[\frac{\xi}{\pi} \beta_1 + \frac{\xi^2}{\pi^2} \beta_2 + \dots \right]^{-1} \quad (4.61)$$

4.20 Da bi se odredile konstante β_i , pogodno je sa $\xi = \bar{\alpha}_s$ preći na θ :

$$\xi = \bar{\alpha}_s = \bar{\theta}^2/4\bar{u} = t^2/4\bar{u} \quad (4.62)$$

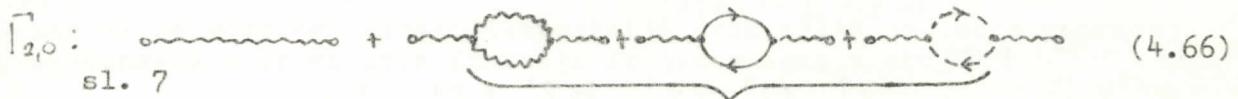
$$\ln \lambda = \int_g^{\bar{\theta}} \frac{2t dt}{t^2} \left[\frac{t^2}{4\bar{u}^2} \beta_1 + \frac{t^4}{16\bar{u}^3} \beta_2 + \dots \right]^{-1} \quad (4.63)$$

$$= \int_g^{\bar{\theta}} dt \left[\frac{t^3}{64\bar{u}^2} \beta_1' + \frac{t^5}{64\bar{u}^3} \beta_2' + \dots \right]^{-1} \quad (4.64)$$

gde je

$$2\beta_i = (\beta_i^{(i)}) \quad (4.65)$$

S druge strane, u nultoj i prvoj aproksimaciji (tačnije, prva aproksimacija sadrži nultu aproksimaciju i prvu popravku ...) doprinose grafovi :



U odeljcima 4.10 i 4.11 je računat doprinos trećeg grafa u (4.66). Zbog nezavisnosti boje i arome, zanemarujući mase kvarkova, ovaj doprinos je proporcionalan broju aroma N_F . (Mase bi uneškoliko pokvarile ovu proporcionalnost, jer kvarkovi sa većom masom manje utiču. Zbog (4.48), ovo važi za one arome za koje je $x_f \ll 1$, te se broj aroma odnosi na ovaj skup!)

Kod drugog i četvrtog grafa se javlja faktor $C_2(G)$ - sopstvena vrednost kvadratnog Kazimir-ovog operatora (zbog traga i faktora na oba verteksa). Zbog Fermi-statistike, doprinos avet-petlje umanjuje doprinos gluonske petlje.

4.21 Doprinos polarizacije vakuma se može prikazati :

$$\mathcal{R}_2^{\mu\nu}(k) = -i(\delta^{\mu\nu} k^2 - k^\mu k^\nu) S_B^A \mathcal{J}_2(k^2) \quad (4.69)$$

gde je sopstvena energija (prema R3.13) :

$$\tilde{J}_2(k^2) = \frac{\alpha_s}{4\pi} \left(\frac{13}{6} C_2(G) - \frac{2}{3} N_f \right) \left(\ln \frac{k^2 - i\epsilon}{\lambda^2} - \frac{2}{\epsilon} \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \quad (4.70)$$

gde je

$$\lambda = \gamma \exp \left\{ \frac{1}{2} \Gamma'(1) \right\} \quad (4.71)$$

Odgovarajuća konstanta renormiranja je :

$$\Gamma_{2,0} : Z_2 = Z_A = 1 - \frac{\alpha_s}{\pi} \left(\frac{13}{6} C_2(G) - \frac{2}{3} N_f \right) \left(\ln \frac{\mu^2}{\lambda^2} - \frac{2}{\epsilon} \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \quad (4.72)$$

Ostale konstante renormiranja su :

$$\Gamma_{0,2} : Z_{2P} = Z_q = 1 + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \quad (4.73)$$

$$\Gamma_{1,2} : Z_{3F} = 1 + \frac{\alpha_s}{\pi} \frac{3}{4} C_2(G) \left(\ln \frac{\mu^2}{\lambda^2} - \frac{2}{\epsilon} \right) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \quad (4.74)$$

Iz uslova (4.31) i (4.33) sledi :

$$g = \frac{Z_{3F}}{Z_{2P} Z_2} \bar{g} \quad (4.75)$$

odakle se dobija, uvrštenjem (4.72) - (4.74), te razvijanjem (4.72) u red :

$$g = \bar{g} \left\{ 1 - \frac{\alpha_s}{\pi} \left(\frac{11}{6} C_2(G) - \frac{1}{3} N_f \right) \left(\ln \frac{\mu^2}{\lambda^2} - \frac{2}{\epsilon} \right) \right\} + \mathcal{O}(g^2) \quad (4.76)$$

Redefinicija β (preko g umesto α_s) glasi :

$$\tilde{\beta} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mu \frac{\partial}{\partial \mu} g(g, \epsilon, \mu) \quad (4.77)$$

te je :

$$\tilde{\beta} = g^3 \beta' / 16\pi^2, \quad \beta' = - \left(\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{2}{3} N_f \right) \quad (4.78)$$

4.22 Prelaskom sa α_s na g , (4.61) postaje :

$$\ln \lambda = \int_g^{\bar{g}} dt / \tilde{\beta}(t) \quad (4.79)$$

Iz (4.78) sledi :

$$\ln \lambda = \int_g^{\bar{g}} dt \left(\frac{t^3}{16\pi^2} \beta' \right)^{-1} = \frac{16\pi^2}{\beta'} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\bar{g}^2} - \frac{1}{g^2} \right) \quad (4.80)$$

$$\bar{g}^{-2} = g^{-2} - \beta' \ln \lambda / 8\pi^2 \quad (4.81)$$

$$\bar{g} = g / \sqrt{1 + \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3} C_2(G) - \frac{2}{3} N_f \right) \ln \lambda^2} \quad (4.82)$$

odnosno :

$$\bar{\alpha}_s = \alpha_s / \left(1 + \frac{\alpha_s}{12\pi} (33 - 2N_f) \ln \lambda^2 \right) \quad (4.83)$$

Iz obe se relacije vidi da sa porastom $\lambda (> 1)$, $\bar{\alpha}_s$ opada, sve dok je

$$N_f \leq 16 \quad (4.84)$$

što znači da manje od 17 aroma kvarkova obezbedjuje monotono opadanje $\bar{\alpha}_s$ sa porastom $\lambda^2 = Q^2/\mu^2$ - što znači da je QCD asimptotski slobodna pri velikim impulsima (velikim energijama, malim razdaljinama).

Nasuprot tome, sa 17 ili više aroma, $\bar{\alpha}_s$ bi raslo sa λ sve do $\lambda_s^2 = \exp(-12\pi/\alpha_s(33-2N_f))$, kada bi

$$\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_s^+} \bar{\alpha}_s = +\infty, \quad \lim_{\lambda \rightarrow \lambda_s^-} \bar{\alpha}_s = -\infty \quad (4.85)$$

te bi posle toga težilo nuli, po negativnim vrednostima ... Ali! Za $N_f > 16$, u oblasti $\lambda \in [1, \lambda_0]$, $\bar{\chi}_s$ sigurno postaje veće od 1. Tada perturbativni razvoj gubi smisao, pa i izraz (4.83)! Stoga, o slučaju $N_f > 16$, u perturbativnoj QCD, ne može ništa odredjeno da se kaže!

4.23 Celom ovom razmatranju može de se da jedna ozbiljna zamerka.

Efekti drugih interakcija nisu uzimani u obzir. Slaba i elektromagnetna ne utiču pogubno na ove rezultate (videti, npr. R3.7, R3.8 ili R3.13 ...), ali gravitacija može! Za razliku od ostalih, gravitacija ima (očigledno) nesaturaciono, kumulativno dejstvo, a prostire se do beskonačnosti ... Prilikom pojave virtuelnog $q\bar{q}$ para (koji čini q -petlju u (4.13) npr.), putem kvantnih fluktuacija, ne postoji način da se ograniči impuls (otuda integracija do ∞ !). Pojava (velike) mase $\sim \sqrt{P^2}$, mada na kratko vreme ($\sim 1/\sqrt{P^2}$), prema opštoj teoriji relativiteta, menjaju lokalnu strukturu prostor-vremena - javlja se gravitaciono polje, proporcionalno $\sqrt{P^2}$. Očigledno, svako razmatranje u ovom radu, postaje bezznačajno (mada, verovatno, tačno) kada $P \rightarrow \infty$. Problem je, međutim, upravo u nepoznavanju mikroteorije gravitacije ...

U svakom slučaju, ovaj se rad odnosi na doprinos JI, odnosno QCD, te se, na taj način, ogradijujem od ovog problema.

4.24 Konstante renormalizacije imaju interesantnu osobinu kompozicije. Označimo sa $Z\{R\}$ skup svih konstanti, u zavisnosti od renormalizacione šeme i parametara koji su korišćeni. Tada :

$$\Gamma_R(\dots) = Z\{R\}^\circ \Gamma(\dots) \quad (4.84a)$$

$$\Gamma_{R_1}(\dots) = Z\{R_1\}^\circ \Gamma(\dots) \quad (4.84b)$$

te

$$\Gamma_{R_1}(\dots) = Z(R_1, R_2) \Gamma_{R_2}(\dots) \quad (4.85)$$

gde

$$Z(R_1, R_2) = Z\{R_1\}/Z\{R_2\} \quad (4.86)$$

Jasno da se može definisati kompozicija ovih veličina (koje omogućuju preračunavanje Green-ovih funkcija iz jedne šeme u drugu) :

$$Z(R_i, R_j) \cdot Z(R_k, R_l) \quad (4.87)$$

Tada skup $Z(R_i, R_j)$ sa operacijom množenja (4.87) ima strukturu Abelove grupe ako i samo ako :

$$\text{u (4.87)} \quad i = l \quad \text{ili} / i = k \quad (4.88)$$

jer :

$$Z(R_i, R_j) Z(R_j, R_k) = Z(R_i, R_k) \quad (4.89a)$$

$$Z(R_i, R_j) = Z'(R_j, R_i) \quad (4.89b)$$

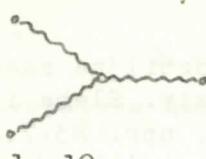
$$Z(R_i, R_j) = 1 \quad (4.89c)$$

$$(Z(R_i, R') Z(R', R_j)) Z(R_j, R_k) = Z(R_i, R') (Z(R', R_j) Z(R_j, R_k)) \quad (4.89d)$$

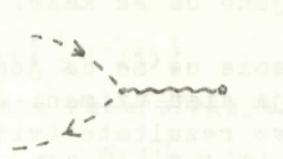
$$Z(R_i, R') Z(R', R_k) = Z(R_i, R_k) Z(R_i, R') = Z(R_i, R_k) \quad (4.90)$$

Stoga se jednačine medju Green-ovim funkcijama koje sadrže zavisnosti od konstanti renormalizacije (npr. (4.53)) nazivaju i jednačine renormalizacione grupe ("Renormalization Group Equation").

4.25 Već u (4.66) i (4.68) postaje jasna suštinska razlika izmedju QED i QCD. Zbog (2.33b) i zadnjeg člana iz (3.34), u QCD postoje grafovi sa



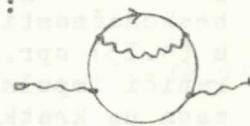
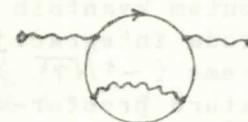
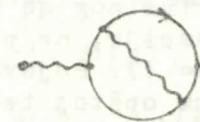
sl. 10



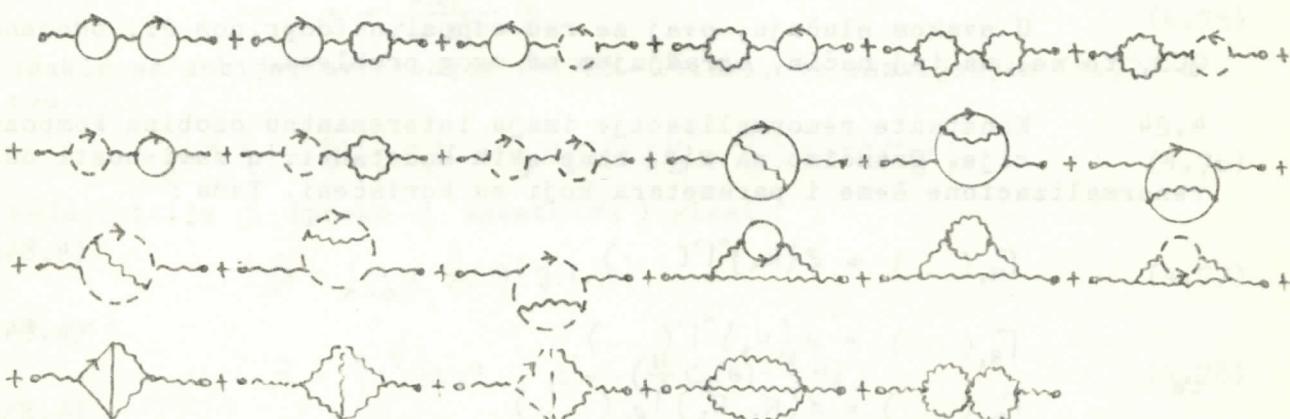
kojih nema u QED. Stoga se, već u prvoj aproksimaciji, javlja veći broj dijagrama, koji, u višim stepenima aproksimacije postaju veoma komplikovani. Npr. u drugoj popravci fotonskog propagatora, doprinose:



sl. 11



a u QCD, u drugoj popravci gluonskog propagatora:



sl. 12

dok su svi tzv. "tadpole" dijagrami (tipa) nebitni, jer se njihovi doprinosi, zbog antisimetričnosti generatora $SU(3)_c$, anuliraju. Nisu uzeti u obzir ni grafovi tipa sl. 5g), jer, u stvari, doprinose neinteresantnu konstantu.

Stoga je odnos relevantnih grafova druge popravke QCD : QED za gauge - propagator (23 : 4), a fermionski (spinorski) propagator (7 : 4). Obratiti pažnju na činjenicu da prvih 9 grafova predstavlja (), a ostali su ICI, što znači da se prekidanjem bilo koje unutrašnje linije, graf ne raspada, tj. ostaje povezan.

4.26 U ovom poglavljiju su dikutovane samo UV divergencije, te ponašanje QCD u UV oblasti. IR oblast povlači $\bar{\alpha}_s > 1$, te perturbativni pristup nema smisla. Ipak, sudeći prema (4.83) ili (4.81), u obliku:

$$\bar{\alpha}_s^{-1} = \alpha_s^{-1} + (33 - 2N_f) \frac{\ln \lambda^2}{12\pi} \quad (4.91)$$

za

$$\lambda^2 = \lambda_0^2 = \exp \left\{ -2\bar{n}/d_s(33-N_f) \right\}, \quad N_f \leq 16 \quad (4.92)$$

(što sa $N_f=6$, $d_s \approx 0.2$ iznosi $\lambda^2 \approx 1.3 \cdot 10^{-4}$ (!)), $\bar{\alpha}_s$ postaje (beskonačno?) veliko, te je i energija veze (beskonačno?) velika - kvarkovi se ne mogu "izvaditi" iz hadrona (naravno, ni gluoni!). Međutim, viši članovi razvoja (4.60) mogu pomeriti tačku divergencije $\bar{\alpha}_s$ (u beskonačnost?) ili, čak, učiniti $\bar{\alpha}_s$ konačnim za svaku λ^2 ! Stoga nikakav strogi sud o ponašanju α_s ne može da se da. Ohrabrujuće je, dakako, što α_s raste u IR oblasti, te ukazuje na asimptotsku ($P \rightarrow 0$) zarobljenost. Nešto više o ovom, u sledećem poglavljiju.

prime dbe

^ R3.7

efekti zarobljenost će, u ovom radu, samo površno biti diskutovani (videti 5. poglavlje)

precizno definisan postupak za izračunavanje S-matričnih elemenata dat je u R1.1 - R1.4, te R1.6

srećna okolnost za QED, da je $\alpha_s \approx e^2/4\pi \approx 1/137$, znači da grafovi višeg reda doprinose mnogo manje, te se brzo postiže velika tačnost (već sa pravkama 2-3. reda). U QCD, međutim, $\bar{\alpha}_s$ uzima vrednosti ~ 0.1 pa do 1, 2, 5, ... ? Tada perturbacioni razvoj veoma sporo konvergira, ili, čak, nema smisla ...

detaljnije o tome u R1.6, R1.13, R3.14

videti i D8

videti D9

R3.13

nažalost, (zasad?) nekvantiziranoj - što unekoliko umanjuje vrednost ovog zaključivanja ...

5. Rezultati QCD

5.1 U 3., poglavlju su prikazana Feynman-ova pravila, a u 4. - diskutovana njihova primena. Jasno da je takav pristup izračunavanja S-matričnih elemenata, u suštini, perturbativni. S druge strane veličina konstante fine strukture za QCD, α_s , dovodi do spore konvergencije perturbativnog reda ili, čak, njegove divergencije. Stoga :

a) Proračuni (u perturbativnoj QCD) druge aproksimacije daju rezultate sa tačnošću do 10%. Za poboljšanje na 1%, neophodno je uzeti u obzir treću, pa i četvrtu popravku, što komplikuje račun do te mere da trud postaje neracionalan. S druge strane, struktura grafova je, zahvaljujući neabelovskoj strukturi $SU(3)$, takva da (zasad) nije pronadjen način za egzaktno sumiranje svih doprinosa;

b) Kao i u QED, javlja se neperturbativna oblast, ali je ona fizički značajna! IR oblast QCD bi trebalo da reprodukuje sve rezultate hadronke spektroskopije ... No, dobro definisani potpuni metodi neperturbativne QCD (još?) ne postoje, tj. sadašnji metodi iziskuju ozbiljne aproksimacije.

U narednih nekoliko odeljaka će biti prikazano 4 neperturbativna metoda, a potom fenomenološki rezultati QCD, u oba režima.

5.2 Masa hadrona, u QCD, zavisi od konstante interakcije i skale uvedene u renormalizaciji. (Zavisnost od masa kvarkova zanemaruju radi jednostavnosti.) Prava, fizička masa, međutim, mora biti nezavisna od postupka renormalizacije :

$$\mu \frac{d}{d\mu} M(g, \mu) = \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \tilde{\beta} \frac{\partial}{\partial g} \right\} M(g, \mu) = 0 \quad (5.1)$$

Ova se diferencijalna jednačina može rešiti Fourier-ovom metodom :

$$M(g, \mu) = G(g) \cdot M(\mu) \quad (5.2)$$

tada

$$\frac{\mu \cdot \partial M}{M \cdot \partial \mu} = - \frac{\tilde{\beta}}{G} \frac{\partial G}{\partial g} = K \quad (5.3)$$

gde K ne zavisi ni od μ , ni od g . Sledi :

$$M(\mu) = \mu^K, \quad G(g) = \exp \left\{ -K \int dg \tilde{\beta}^{-1} \right\} \quad (5.4)$$

zavisi samo od faktora skale i može se apsorbovati u konstantu integracije u $G(g)$, te :

$$M(g, \mu) \propto \exp \left\{ -K \int dg \tilde{\beta}^{-1} \right\} \quad (5.5)$$

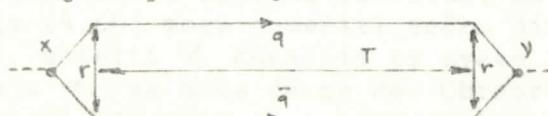
Iz (4.64) sledi :

$$M(g, \mu) \propto \exp \left\{ -K \int dg \left[\frac{g^3}{64\pi^2} \beta' + \frac{g^5}{64\pi^3} \beta'' + \dots \right] \right\} \quad (5.6)$$

što znači da je perturbativan pristup besmislen!

5.3 Wilson-ov kriterijum

Strogo govoreći, u okviru relativističke kvantne fizike nije moguće definisati potencijal sile, jer ovaj ne omogućuje pojavu virtuelnih čestica. Ovaj se problem može izbeći limesom $m_f \rightarrow \infty$. Tada kvarkovi predstavljaju statičke izvore elektro-magnetobojenog polja (koje je predstavljeno potencijalom). Tada se interakcija $q\bar{q}$ može analizirati pomoću petlje (slika 13). Pošto nema stvaranja $q\bar{q}$ parova, interakcija je opisana isključivo gluonskom dinamikom.



sl. 13

Razmatranje će ograničiti na me-

zone, koji su singleti $SU(3)_c$. Prenošenje naboja boje duž ove petlje je opisano :

$$\langle U(\varphi) \rangle = \langle \exp \left\{ -ig \oint_{\gamma} ds^{\mu}(x) j_{\mu}^{(i)}(x) \right\} \rangle \quad (5.7)$$

gde γ označava petlju. Kvantnometohaničko očekivanje je :

$$\langle W(\varphi) \rangle = \langle 0 | \mathcal{G}_r \mathcal{G} \exp \left\{ -ig \oint_{\gamma} ds^{\mu}(x) j_{\mu}^{(i)}(x) \right\} | 0 \rangle \quad (5.8)$$

odnosno

$$W(\varphi) = Z \langle 0 | \int D(A) \mathcal{G}_r U(\varphi) \exp \{ S_E(A) \} | 0 \rangle \quad (5.9)$$

gde je S_E Hamiltonovo dejstvo sa $x=(\vec{x}, i\omega t)$ i Minkovski-evom metrikom. (Problemi u vezi sa nejednoznačnošću zbog LGI neće ponovo biti diskutovani.) Zbog osobina S_E , $Z \langle 0 |$ i traga u (5.9), važi :

$$\delta_g \{ G_r U(\varphi) \} = 0 \Rightarrow \delta_g W(\varphi) = 0 \quad (5.10)$$

Za planarnu petlju se definiše :

$$\tilde{V}(\tau) = -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} W(\varphi) \quad (5.11)$$

- potencijal "statične QCD".

5.4 Pošto cilj ovog rada nije detaljnije razmatranje perturbativnih metoda, citiraću, bez izvodjenja, potencijal (npr. R3.13):

$$\tilde{V}(\tau) = \frac{-4}{3} \frac{d_S(\mu)}{\tau} \left(1 + \frac{11}{8\pi} d_S(\mu) \tau \ln \mu + \dots \right) \quad (5.12)$$

Sledi da se $\tilde{V}(\tau)$ ponaša kao Coulomb-ovski za male τ , a bar kao linearne (tačkice u (5.12)) za veliko τ ! Ovakav potencijal drži statičke kvarkove zarobljene. Kad bi se moglo pokazati da isto važi i za pokretljive kvarkove (čija masa nije beskonačna), efekat zarobljenosti bi bio dokazana osobina QCD! Ovaj uslov zarobljenosti (tumačen putem osobina potencijala) se često naziva Wilson-ov kriterijum, po K.G. Wilsonu.

Ovim je, ujedno, potvrđen rezultat iz odeljka 1.18!

5.5 Rešetka

Po analogiji sa postupkom dimenzione regularizacije, kontinualno prostor-vreme se zamenjuje 4-dimenzionom rešetkom sa parametrom rešetke ϵ (Zbog jednostavnosti se, naravno, radi sa kubnom rešetkom.) Tada su :

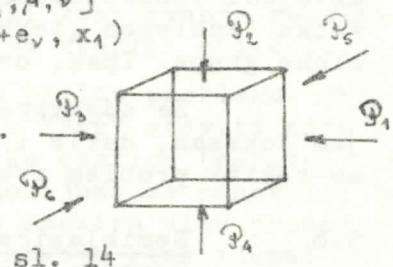
tačke x - koordinate $x = \epsilon(n^0, n^1, n^2, n^3)$

ivice b - koordinate $b = (x_2, x_1) = (x_1 + e_\mu, x_1) = [x_1; \mu]$

stranice \mathcal{P} - koordinate $\mathcal{P} = (x_4, x_3, x_2, x_1) = [x_1; \mu, \nu]$
 $= (x_1 + e_\mu, x_1 + e_\mu + e_\nu, x_1 + e_\nu, x_1)$

kocke K - sa orijentacijom kao na slici 14

super-kocka \mathcal{S} - sa odgovarajućom orijentacijom.



sl. 14

5.6 Tada :

$$\psi_a(x) \rightarrow \psi_a(n^0, n^1, n^2, n^3) \quad (5.13)$$

tj. definišu se spinori koji naboje vezuju za čvorove rešetke. Gauge polja, gluoni, opisuju prenošenje naboja duž ivica, te stoga :

54.

$$G \exp \left\{ i \int_b ds^{\mu} j_{\mu}^i(x) \right\} \rightarrow U(b) = \exp \left\{ i \int_b d^i(b) \right\} \quad (5.14)$$

a

$$\Psi \rightarrow \sum b_i \quad (5.15)$$

te

$$G \exp \left\{ i \int_{\varphi} ds^{\mu} j_{\mu}^i(x) \right\} \rightarrow U(\varphi) = \prod_{b_i \in \varphi} U(b_i) \quad (5.16)$$

Osim toga,

$$U(-b) = U^{-1}(b) \quad \text{jer} \quad (x_1, x_2) = -(x_2, x_1) \quad (5.17)$$

"Paralelni prenos" preko stranice daje :

$$U(R_x) = G \prod_{b_i \in \partial} U(b_i) = U(b_4) U(b_3) U(b_2) U(b_1) \quad (5.18)$$

odnosno :

$$\begin{aligned} U(R_x) &= \exp \left\{ i \left[\sum_i d(b_i) - \frac{i}{2} \sum_{i>k} [d(b_i), d(b_k)] + \dots \right] \right\} \\ &= \exp \left\{ i F(R) \right\} \end{aligned} \quad (5.19)$$

te stoga

$$G_{\mu\nu}(x) \rightarrow F(R) \quad (5.20)$$

u infinitezimalnom obliku. (Sa R_x je označen rub ∂ .)

5.7 Osnovni problem u ovom prilazu je definicija Dirac-ovog spinora u čvorovima rešetke (R3.13). Inače, kao i u funkcionalnoj reprezentaciji, kvantnomehanička srednja vrednost nekog funkcionala od je :

$$\langle \Omega\{u\} \rangle = Z\{0\} \int \Omega(u) \Omega\{u\} \exp S_{\epsilon}\{u\} \quad (5.21)$$

sa

$$S_{\epsilon}\{u\} = \frac{1}{2g^2} \sum_{\partial} G_{\mu\nu} \{ U(\partial) + U'(\partial) - 2 \} \quad (5.22)$$

i

$$Z\{0\} = \int \Omega(u) \exp S_{\epsilon}\{u\} \quad (5.23)$$

gde

$$\Omega(u) = \prod_{b \in \partial} (\Omega\{g^A\} \prod_A \delta^A\{u(b)\}) \quad (5.24)$$

Zbog analogije (5.21) sa (kvantnom) statističkom fizikom, uz identifikaciju

$$g^2 \propto kT \quad (5.25)$$

moguće je rezultate ove razvijene oblasti fizike preneti na QCD (podrazumevajući visokotemperaturni režim). Pri prelazu na beskonačno finu rešetku (analogon "termodinamičkog limesa") koristi jednačina renormalizacione grupe. Ipak, ovaj postupak još nije dovoljno usavršen.

Za odgovarajuću rešetku konačne gustine je Wilson-ov kriterijum dokazan, dakle i efekat zarobljenosti. Stoga je veoma važno egzaktно rešiti problem prelaska $\epsilon \rightarrow 0$. (Više o ovom metodu u R3.3 i R3.13).

5.8

Semiklasičan pristup

Osnovna ideja ovog metoda je naći rešenja klasične Yang - Mills teorije, te ih prilagoditi kvantnoj fizici. Zahvaljujući ovom metodu, otkrivena je i proučena topološki netrivijalna struktura QCD.

Naime, zahtevajući da

$$\lim_{r \rightarrow \infty} G_{\mu\nu}^A(x) = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} j_{\mu}^i(x) = \frac{-i}{g} (\partial_{\mu} g^A)_k (\tilde{g}^{(i)}_k)^k \quad (5.26)$$

te da LGT ((2.10), (2.11)) u $\tau \rightarrow \infty$ ima neku fiksnu vrednost, na primer :

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\tilde{g}(\alpha))^i_u = (\tilde{g}(\infty))^i_u \propto 1 \quad (5.27)$$

Tada sva polja koja zadovoljavaju (5.26) sa (5.27) predstavljaju osnovno stanje (za svako x !). (Istini za volju, zahtev (5.26) može da se preformuliše na manje strog način; Rl.6.) Međutim, za razliku od abelovske QED, u QCD se ova polja ne mogu prevesti jedno u drugo kontinualnom gauge-transformacijom. Drugim rečima QCD vakum ima topološki netrivijalnu strukturu. Moguće je definisati topološki kvantni broj, koji je očuvan. Stoga se javljaju nedisipativna rešenja jednačine kretanja (4.26) - tzv. instantoni (pseudočestice). Njihovo predstavljanje zahteva nelinearne jednačine (što omogućuje nedisipativnost rešenja, ali, tehnički, onemogućuje egzaktno rešenje! Ipak, raznim aproksimativnim i numeričkim metodama se ovi objekti mogu ispitivati.)

5.9 MIT Bag

Budući da je eksperimentalna činjenica (zasad?) da kvarkovi ne mogu da izadju iz hadrona, uz Dirac-ovu jednačinu za kvarkove :

$$(i\partial - m_f) \psi_f^i(x) = 0 \quad (5.28)$$

se postavlja graničan uslov da su kvarkovi ograničeni na sferu poluprečnika R ($\sim 10^{-16}$ m).

Da bi se ovaj granični uslov „objasnio“, uvodi se pritisak, B , tako da totalna energija (R2.4) glasi :

$$E(R) = \sum_i N_i \sqrt{m_i^2 + \chi_i^2/R^2} + B \frac{4\pi}{3} R^3 \quad (5.29)$$

gde je χ_i impuls kvarka unutar hadrona. Ravnotežno stanje sledi za :

$$\partial E / \partial R = 0 \quad (5.30)$$

što za $m_i = 0$ daje :

$$R_c = \sqrt[4]{(\sum_i N_i \chi_i^2) / 2\pi B} \quad (5.31)$$

te je masa hadrona :

$$M \propto B^{1/4} \cdot N_c^{3/4} \quad (5.32)$$

5.10 Ovakav se pristup najčešće koristi u hadronskoj spektroskopiji.

Da bi slika bila realnija, moraju se uzeti u obzir i gluoni. Tada, umesto (5.28), treba rešavati jednačine kretanja (2.46) i (2.51), sa istim graničnim uslovom, tj. uvedjenjem istog „pritiska“. Često se koristi klasičan Hamiltonov formalizam, pa se vrši kvantovanje rezultata ili se Hamiltonijan klasične teorije prevede na kvantni oblik ...

Vidi se da je ovo takodje semiklasičan prilaz problemu. Zbog netrivijalnosti radijalnog dela QCD, moguće je, u "Bag" staviti samo gluone. Takav objekat bi takodje predstavljaо fizičku česticu (naravno, uz uslov da je $SU(3)$ -singlet!). - Predviđanje gluonijuma se ponovilo; to je jedna od slabih tačaka QCD - jer u hadronskom spektru nisu pronadje ne čestice koje bi se mogle tumačiti kao brojna stanja gluonijuma!

5.11 Do kraja poglavlja ću prikazati nekoliko načina za testiranje

QCD. Perturbativni metod je pogodan za izračunavanje efikasnih preseka za procese na visokim energijama. Za niskoenergetske procese, kao i hadronski spektar, uglavnom se radi neperturbativnim metodama.

5.12 $e^+e^- \rightarrow \text{hadroni}$

U prvom poglavlju je ovaj proces diskutovan, u naivnoj slici standardnog kvark-modela. Teorija JI prikazana u poglavljkima 2 - 4 omogućuje dovoljno dobar pristup izračunavanju efikasnog preseka.

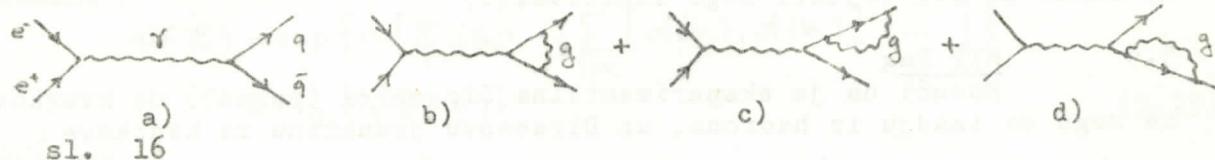
Simgolički :

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow H) = \left| e^+ \overline{e} \gamma \text{H} \right|^2 = \text{Im} \left\{ e^+ \overline{e} \gamma \text{H} \overline{\gamma} e^- \right\} \quad (5.33a)$$

sl. 15

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow H) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{s} e^2 \text{Im} \left\{ F(s) \right\} \quad (5.33b)$$

U nultoj aproksimaciji, dovoljan je graf na slici 16a). Ostali grafovi sa slike 16 doprinose prvoj popravci.

5.13 Po teoremi Bloch-a i Nordsiek-a, fizički potpun efikasnji presek, u ovoj popravci, mora sadržati još dva dijagrama :

sl. 17

Gluoni na slici 17 mogu biti ili tzv. meki (sa malom energijom) - tada se, eksperimentalno ne mogu otkriti zbog konačne rezolucije bilo kog mernog instrumenta;

ili tzv. tvrdi (sa velikom energijom), ali kolinearni (kvark ili anti-kvark) - tada se, iz analognih razloga, ne mogu razlučiti. Uzimajući u obzir sve ove doprinose, radeći prema pravilima iz odeljaka 3.10 i 3.11, dobijaju se (R3.1, R3.12, R3.13, R1.6 ...), u limesu $m_q \rightarrow 0$:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow H) = \frac{4\pi\alpha_s^2}{3s} 3 \cdot e^2 \sum_f Q_f^2 \left\{ 1 + \frac{\bar{\alpha}_s}{\pi} + \mathcal{O}(\bar{\alpha}_s^2) \right\} \quad (5.34)$$

sa Mandelstam-ovom varijablom (prema konvenciji iz R2.7) :

$$s = (\not{P}_{e^+} + \not{P}_{e^-})^2 = \not{P}_\gamma^2 = \not{P}_H^2 = E_{cm}^2 \quad (5.35)$$

S druge strane, za $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ važi (iz QED) analogan izraz :

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} e^2 = \frac{4\pi\alpha^2}{3s} \quad (5.36)$$

naravno, za $m_\mu \rightarrow 0$! Stoga je veličina definisana u (1.22) :

$$R(s) = 3 \sum_f Q_f^2 \left\{ 1 + \frac{\bar{\alpha}_s(1)}{\pi} + \mathcal{O}(\bar{\alpha}_s^2(s)) \right\} \quad (5.37)$$

što, u nultoj aproksimaciji, potvrđuje (1.22). QCD popravka ima smisao da se vrednost R , iz (1.22) postiže pri $s \rightarrow \infty$, „odozgo“. S obzirom na činjenicu da je broj kvarkova zavisan od s , sledi oblik funkcije (5.37), kao na slici 18.

sl. 18

gde je odnos pragova i QCD popravki prikazan proizvoljno, radi očiglednosti.

5.14 Da bi ovaj QCD test bio realan, treba vratiti mase kvarkova u račun. Interesantno je da se tada javljaju divergencije u izrazu za $\bar{e}(e^- \rightarrow H)$ i to oko pragova $R(s)$ -a. Stoga, zapravo, perturbativni razvoj gubi na značaju. Međutim, ove divergencije ukazuju na rezonance, koje se zaista javljaju, većinom okc praga nove arome.

Posmatrajući $\tilde{F}(\zeta)$ - amputiranu Green-ovu funkciju za proces $e^+ e^- \rightarrow H$ kao kompleksnu funkciju kompleksne promenljive

$$\zeta = s e^{i\varphi} \quad (5.38)$$

može da se primeni Cauchy-eva teorema :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint d\zeta \zeta^p \tilde{F}(\zeta) = 0 \quad (5.39)$$

Fizički je interesantna oblast

$$s \geq 4m_q^2 \quad (5.40)$$

jer se tada pojavljuju kvarkovi. Stoga integraciju u (5.39) treba vršiti po konturi kao na slici 19. Tada se (5.39) raspada na dva člana, pa važi:

$$\int_{4m_q^2}^s dt t^{p+\frac{1}{2}} I_m \{ \tilde{F}(t) \} = - \frac{s^{p+1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\varphi e^{i(p+1)\varphi} \tilde{F}(se^{i\varphi}) \quad (5.41)$$

R.Shankar je (1977) predložio da se desna strana (5.41) integrali direktno, koristeći QCD izraz za I_m , a leva uz uvrštenje eksperimentalnih vrednosti za s iz (5.33b). Na ovaj način se efekti rezonanci u eksperimentalnim podacima veoma uspešno izbegavaju usrednjavanjem- integracijom.

R.G.Moorhouse, H.R.Pennington i G.C.Ross su iste godine sprovele ovaj postupak. Uz

$$\Lambda \approx 500 \text{ MeV} ; \lambda^2 = s/\Lambda^2 \quad (5.42)$$

što daje

$$\lambda, (\sqrt{s} \sim 16 \text{ GeV}) \sim 1 \quad (5.43)$$

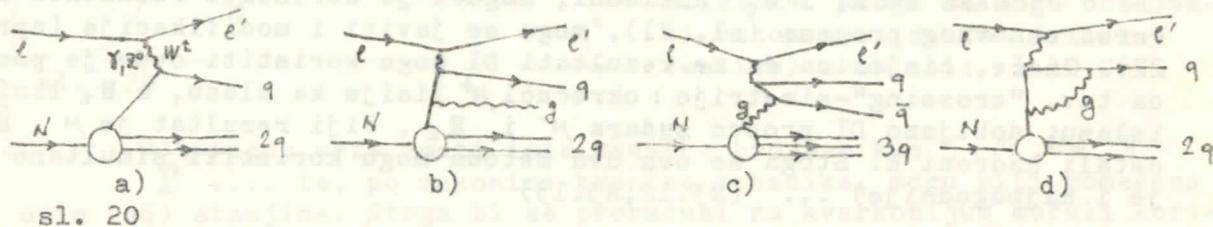
te renormalizovane mase kvarkova :

$$m_{u,d} \approx 10 \text{ MeV} \quad m_s \approx .35 \text{ GeV} \quad m_c \approx 1.85 \text{ GeV} \quad m_b \approx 2.4 \text{ GeV} \quad (5.44)$$

potvrdili su slaganje QCD rezultata unutar 10% greške (uporediti sa odjeljkom 5.1). (R3.1, R3.13)

5.15 "Deep Inelastic" (DI)

Duboko neelastični sudari su opšte ime za sve sudare tipa $e^+ e^- \rightarrow H$, na visokim energijama. Najčešće se vrše sudari e^+, μ^+, \bar{q}, q , sa nukleonima. U nāltoj aproksimaciji, proces je prikazan dijagramom na slici 20a). Slike 20b),c),d) prikazuju grafove koji doprinose u prvoj aproksimaciji (ne sve!):



5.16 U analizi ovog procesa se posmatra diferencijalni presek :

$$\frac{d^2\sigma(e, N)}{dE' d\Omega} = \frac{Q^2}{Q^4} \cdot \frac{e'}{E} \cdot \frac{1}{2} \mathcal{L}^{\mu\nu} W^{\mu\nu} \quad (5.45)$$

gde su E i E' energije leptona pre i posle sudara,

$$Q^2 = -t = -(P - P')^2 ; \mathcal{L}^{uv} = \sum_{\text{spin}} \bar{\ell}(P') \gamma^u \ell(P) \bar{\ell}(P) \gamma^v \ell(P') \quad (5.47)$$

Korisno je uvesti sledeće oznake:

$$q = (P - P') , P_N = (M_N, \vec{0}) , \omega, \delta = \vec{P} \cdot \vec{P}' / |\vec{P} \cdot \vec{P}'| \quad (5.48a)$$

$$Q^2 = -q^2 = 4E E' \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad v = P_N \cdot q = M_N (E - E') \quad (5.48b)$$

$$x = Q^2 / 2v \quad y = v / P_N \cdot P = (E - E') / E ; 0 \leq x, y \leq 1 \quad (5.48c)$$

Tada se $\mathcal{W}_{\mu\nu}^{t,N}(v,s)_B^A$ ($A, B = 1, 2, \dots, 8; r = \pm 1$) može razložiti na tri strukturne funkcije:

$$\mathcal{W}_1^r(v,s)_B^A ; \mathcal{W}_{2,3}^r(v,s)_B^A \quad (5.49)$$

Često se koriste i

$$\mathcal{F}_1^r(v,s)_B^A = \mathcal{W}_1^r(v,s)_B^A ; \mathcal{F}_{2,3}^r(v,s)_B^A = v \mathcal{W}_{2,3}^r(v,s)_B^A / M_N^2 \quad (5.50)$$

$$\mathcal{F}_6^r(v,s)_B^A = (\mathcal{F}_2^r(v,s)_B^A - 2 \times \mathcal{F}_1^r(v,s)_B^A) \propto P^u P^v \mathcal{W}_{\mu\nu}^{r,r}(v,s)_B^A \quad (5.51)$$

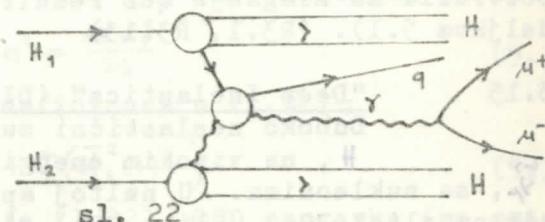
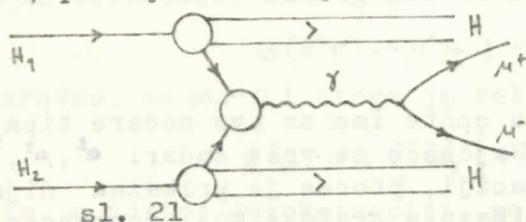
5.17 Poredjenje sa eksperimentom se vrši, kako preko samih funkcija, tako i preko njihovih momenata:

$$M_i^n(s) = \int_0^1 dx \times x^{n-2} \mathcal{F}_i(x,s) \quad (5.52)$$

Pošto struktura teorije utiče na oblik i vrednosti \mathcal{F}_i , na ovaj način je moguće porebiti QCD sa teorijom skalarnog intermedijarnog bozona JI. Eksperimentalno je potvrđena vektorska priroda gluona (mada ni skalar na nije izričito isključena!). Najbolje vrednosti za Λ se kreću od 300 do 600 MeV! Opet se javlja slaganje (mada, mestimično sa graškama i do 20%) koje ukazuju na ispravnost QCD (s tim da teorija nije dovoljno razvijena u smislu predviđanja eksperimentalnih rezultata ...). (R3.13, R3.12)

5.18 Drell-Yan proces

Ovo je, na neki način, obrnuti $e^+ e^- \rightarrow H$ proces (sa μ umesto e). Naime, prilikom sudara dva hadrona, pojavljuje se pored izlaznih hadrona, par myon-antimyon:



Ako su H_1 i H_2 nukleoni, moguće je koristiti rezultate DI. Pored osnovnog procesa (sl. 21), mogu se javiti i modifikacije (npr. sl. 22). Inače, činjenica da se rezultati DI mogu koristiti ovde je posledica tzv. "crossing"-simetrije: okrećući μ^+ liniju ka ulazu, a H_2 liniju ka izlazu, dobijamo DI proces sudara μ^- i H_2 , čiji rezultat je μ^+ , \bar{H}_1 i ostali hadroni H . Stoga se ova dva metoda mogu koristiti simultano (što je i najpogodnije) ... (R3.12, R3.13)

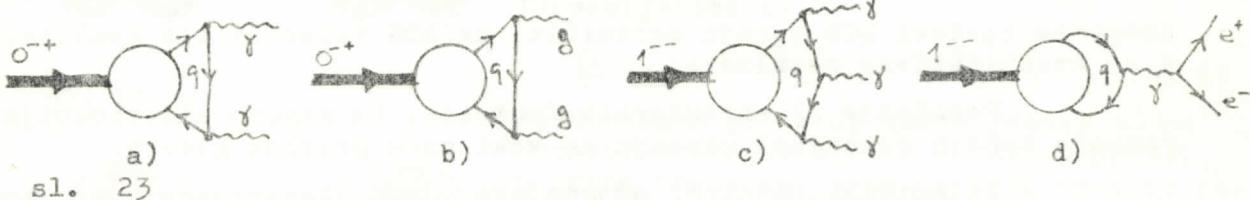
5.19 Kvarkonijum

U odeljcima 1.18 i 1.19 je već diskutovano vezano stanje ($q\bar{q}$). Račun je jednostavniji za masivne kvarkove (c, b, t), jer tada relativistički efekti manje utiču. Pored predviđanja spektra šarmonijuma, bostonijuma (t -kvark još nije otkriven), η_c ; moguće je dati objašnjenje raspadnih procesa (masivnih) mezona.

Postoji tzv. OZI (Okubo-Zweig-Izuka) pravilo formulisano na

osnovu fenomenološkog pristupa i standardnog kvark-modela. Po ovom pravilu, dozvoljeni su raspadi u kojima se ulazni kvarkovi nalaze i u izlaznim stanjima. Anihilacija ulaznog $q\bar{q}$ para i stvaranje izlaznog $q\bar{q}$ para je jednom zabranjem proces, dok više ovakvih anihilacija, odnosno stvaranja $q\bar{q}$ parova povalči višestruku zabranjenost.

Uzimajući o obzir najjednostavnije dijagrame koji doprinose zabranjenim procesima raspada mezona (ulazni delovi!) - na slici 23, dobija se doprinos anihilacije ulaznog $q\bar{q}$ para.



sl. 23

5.20 Rezultati su (R3.13):

$$\mathcal{B}_f = \frac{\Gamma(1^- \rightarrow e^+ e^-)}{\Gamma(1^- \rightarrow \gamma\gamma)} = \frac{81\pi}{40(\bar{a}_s^2 - 9)} \cdot \frac{\alpha_s^2}{\bar{a}_s^2} \cdot Q_f^2 \quad (5.53)$$

Sa ovom relacijom se, za eksperimentalno izmerene \mathcal{B}_f , dobija $\bar{a}_s \approx 370$ MeV, za Ψ porodicu, a $\bar{a}_s \approx 200$ MeV za Υ porodicu. Ove vrednosti \bar{a}_s su korigovane za izvesne neperturbativne efekte (A. Parisi i R. Petronzio). Obratno, uz \bar{a}_s iz (4.91), sa popravkama β funkcije, dobijaju se veoma dobre vrednosti za \mathcal{B}_f - opravdavajući jednostruku zabranu prema OZI pravilu. (R2.4, R3.10, R3.13)

5.21 Gluonijum

Vec je ranije napomenuto i diskutovano predvidjanje vezanih s stanja (g^N) (sa $N > 1$), u QCD, kao realnih fizičkih objekata. Principijelno, računi se u ovoj oblasti bitno pojednostavljaju, jer se kvarkovi pojavljaju tek kao prva popravka, putem kvantnih fluktuacija u polarizaciji vakuma. Problem zarobljenosti, međutim, ni ovde nije rešen.

Po analogiji sa mezonima, talasna funkcija vezanog stanja dva gluona se može pisati:

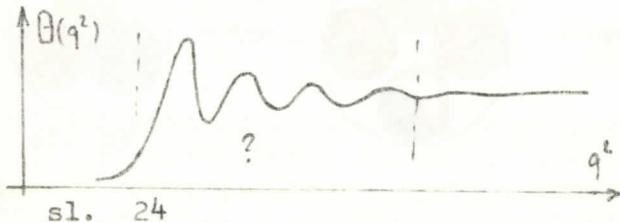
$$G_2(x)^{\theta\tau}_{\mu\nu} \propto F_{\mu\nu}^A(x) F_A^{\theta\tau}(x) \quad (5.54)$$

a po analogiji sa barionima:

$$G_3(x)_{\mu\nu\sigma\tau\lambda\delta} \propto f_{ABC} F_{\mu\nu}^A(x) F_{\sigma\tau}^B(x) F_{\lambda\delta}^C(x) \quad (5.55)$$

Prema strukturi indeksa, vidi se da su zastupljena sva moguća stanja sa celobrojnim spinom.

Prema perturbativnoj QCD, za velike energije



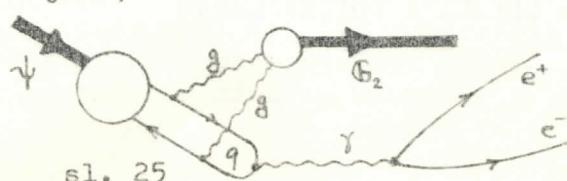
sl. 24

$$G_2(x) \propto F_{\mu\nu}^A(x) F_A^{\theta\tau}(x) \propto q^4 \theta(q^2) \quad (5.56)$$

Za $\theta(q^2)$ se očekuje oblik q^4 kao na slici 24. Stoga se mogu očekivati rezonance (dakle - fizičke čestice) u oblasti 1-10 GeV.

5.22 Gluonijum može imati iste kvantne brojeve kao η , η' , J/ψ , ψ ...

... te, po zakonima kvantne mehanike, mogu biti pomešana sa ovim ($q\bar{q}$) stanjima. Stoga bi se proračuni za kvarkonijum morali korigovati. S druge strane, gluonijum se može pojaviti i u raspadu kvarkonijuma, i to sa relativno velikom verovatnoćom (R3.2) (videti sl. 25).



sl. 25

S tim u vezi, u raspadu $\Psi \rightarrow \gamma + X$ npr. zaista postoji rezonanca na oko 1.85 GeV, koja nije identifikovana. Ovaj primer, sam za sebe nije nikakav dokaz, pošto je u R3.3 i R3.10 predvi-

djen širok spektar mogućih stanja gluonijuma sa masama reda 1 - 2 GeV (R3.10) računato MIT Bag postupkom ... U svakom slučaju ovo je oblast u kojoj tek treba započeti ozbiljnija istraživanja (kako eksperimentalno, tako i teoretski).

5.23³ QCD verovatno nikad neće moći biti tako spektakularno potvrđena kao QED, zbog činjenice da je $\bar{\alpha}_s > \alpha_1 \cdot 10$, te

$$\bar{\alpha}_s > \alpha_1 \cdot 10 \quad (5.57)$$

Stoga se testovi QCD moraju ograničiti na 10% tačnosti ili kvalitativne, a ne kvantitativne rezultate.

Ponašanje DI strukturnih funkcija, te ugaone distribucije u raspodu teških rezonanci ukazuju na vektorsku prirodu gluona.

Asimptotska sloboda objašnjava uspeh standardnog kvark-modela u procesima na visokim energijama. Ovu osobinu potvrđuju i DI procesi.

Dimenzija grupe koja odgovara teoriji JI relativno je sigurno odredjena u hadronskoj spektroskopiji (odeljci 1.11-1.19 te 5.13).

Samointerakcija gluona, direktno, nije potvrđena, no uslovjava asimptotsku slobodu, što se može smatrati indirektnim dokazom ...

Neotkrivanje gluonijuma unosi izvesne sumnje, no moguće je da je "maskiran" izraženijim kvark-hadronskim rezonancama ili, iz nepoznatih razloga ima daleko veću masu ...

Na osnovu svega ovog, QCD može da se prihvati za teoriju JI (ili, bar, jedinog "pravog" kandidata), mada je potrebno znatno upotpuniti i razviti teoriju, kako bi postala fizički (a i matematički) dobro definisana potpuna teorija.

Verovatno je potrebno još mnogo napora da se QCD razvije u pouzdanu teoriju JI medju kvarkovima i gluonima (... hadronima ... ?), te se reši zadatak od koga se krenulo (odeljci .4 - .7). Ne treba, međutim, zaboraviti da QCD već sada pruža izraziti doprinos našem razumevanju fenomena koji potiču od JI.

primedbe

¹ već je napomenuto da je razmatran slučaj $m_f = 0$. Dodatni maseni članovi, naravno, moraju ući u račun, ali ovaj zaključak, na žalost, ostaje.

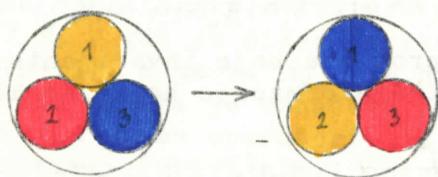
² R3.3

³ delom parafrazirano iz R3.12

D. Dodaci

D1

U 1. poglavlju je pokazano da hadroni mogu da se prikažu kao sistemi vezanih, obojenih kvarkova. U ovom dodatku ću pokušati da dam jedan slikoviti prikaz gauge-principa, za QCD (tragom R3.5).

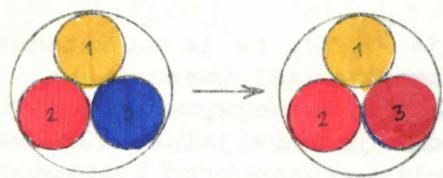


sl. D1

Na slici D1 je dat primer globalne gauge-transformacije. Operator takve transformacije ima oblik :

$$\tilde{G} : \exp\{-i\vartheta_j^i\}, \quad \partial_\mu \vartheta_j^i = 0 \quad (\text{D1.1})$$

Njen smisao je (zbog nezavisnosti ϑ_j^i od prostor-vremena) u tome da svi kvarkovi, u istom trenutku, promene boju na isti način (za isti parametar ϑ_j^i). Ovo dovodi do istovremenog preimenovanja sve tri boje, te hadroni ostaju beli.



sl. D2

Na slici D2 je prikazana suštinski drugačija transformacija, čiji je generator dat u (2.10), i (2.11). U ovom konkretnom primeru je ϑ_j^i izabрано tako da samo 3. kvark promeni boju. Sada, međutim, rezultujući hadron nije beo!

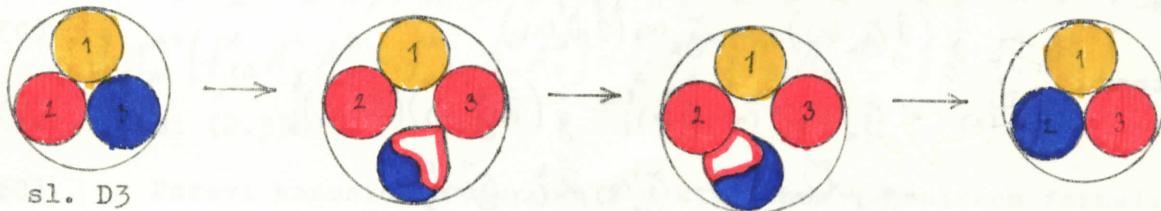
Da bi se njegova belina očuvala, kvarkovi moraju razmenjivati informaciju o svojoj trenutnoj boji, tačnije, o promenama svoje boje, te je potom menjati u skladu sa dobivenom informacijom. Stoga glasnik mora i sam biti obojen, te tako prenositi boju sa kvarka na kvark, tako da hadron uvek bude beo. Pošto ima tri boje, a glasnik mora imati podatak (boju)kvarka od koga je krenuo i kojem će predati boju, sledi da mora postojati tačno 8 različitih glasnika (ima 9 kombinacija, ali identitet ne nosi informaciju). Prikazano u vidu matri- ca :

$$\tilde{\xi}^i \tilde{\xi}_j = \tilde{M}_j^i = \delta_j^i (\delta_e^k M'_k) + \bar{M}_j^i \quad (\delta_j^i \bar{M}_j^i = 0) \quad (\text{D1.2})$$

gde su 8 elemenata matrice \bar{M}_j^i (uz R - crveno, B - plavo, Y - žuto) :

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(R\bar{R} - B\bar{B}); \frac{1}{\sqrt{6}}(2Y\bar{Y} - R\bar{R} - B\bar{B}); R\bar{B}; R\bar{Y}; B\bar{R}; B\bar{Y}; Y\bar{R}; Y\bar{B}$$

Na slici D3 je prikazano dejstvo glasnika. Obratiti pažnju na činjenicu da kvarkovi, unutar hadrona, više nisu izolovani sistemi, te postoji razmena mehaničkog impulsa (preko glasnika), dakle - interakcija!



sl. D3

D2

$$\tilde{G} : \alpha_s = \bar{\psi}_i(x) (i\hat{\partial} - m) \psi^i(x) \rightarrow \bar{\psi}'_i(x) (i\hat{\partial} - m) \psi^i(x) = \tilde{\alpha}'_s \quad (\text{D2.1})$$

iz (2.7) sledi

$$\tilde{\alpha}'_s = \bar{\psi}_i(x) [\tilde{g}(x)]_k^i (i\hat{\partial} - m) [\tilde{g}(x)]_j^k \psi^j(x) \quad (\text{D2.2})$$

Prema (2.10) i (2.11) :

$$\tilde{g}_j^i(x) = \exp\{-ig\hat{\partial}_j^i(x)\} \quad (D2.3)$$

$$\mathcal{L}'_s = i\bar{\psi}_i(x)\tilde{g}_j^i(x)(\hat{\partial}\tilde{g}_j^k(x))\psi_j^k(x) + i\bar{\psi}_i(x)\tilde{g}_j^i(x)\tilde{g}_j^k(x)\hat{\partial}\psi_j^k(x) - \bar{\psi}_i(x)\tilde{g}_j^i(x)\tilde{g}_j^k(x)\hat{\partial}\psi_j^k(x) \quad (D2.4)$$

gde je iskorišćeno svojstvo m da je, u prostoru boje invarijanta, singlet, te komutira sa generatorima gauge transformacije boje. Korišćenjem relacije (2.9) :

$$\mathcal{L}'_s = i\bar{\psi}_i(x)\tilde{g}_j^i(x)\tilde{g}_j^k(x)(-ig\hat{\partial}\hat{\partial}_j^i(x))\psi_j^k(x) + i\bar{\psi}_i(x)\hat{\partial}\psi_j^i(x) - \bar{\psi}_i(x)m\psi_j^i(x) \quad (D2.5)$$

$$\mathcal{L}'_s = \mathcal{L}_s + g\bar{\psi}_i(x)(\hat{\partial}\hat{\partial}_j^i(x))\psi_j^i(x) \quad (D2.6)$$

Za slučaj globalnih simetrija je $\hat{\partial}\hat{\partial}_j^i = 0$, te je \mathcal{L}_s automatski invarijantno. To znači da je standardni kvark-model (bez gluona) invarijantan u odnosu na globalnu gauge transformaciju boja, ali ne i lokalnu. (Sa stanovišta dinamike, ova invarijantnost je trivijalna, ali ima važnu osobinu - zbog činjenice da su hadroni beli, ukupan broj kvarkova se bilo kojom od tri boje, unutar hadrona, ostaje konstantan. Drugim rečima, za beli, izolovan sistem je boja očuvan kvantni broj. Pošto klasa lokalnih transformacija sadrži klasu globalnih, ovo važi i za lokalne gauge transformacije boja.)

D3 Napišimo uslov (2.17) za (2.15a) :

$$0 = \delta_g \mathcal{L}_s \equiv \mathcal{L}_s + g\bar{\psi}_i(x)(\hat{\partial}\hat{\partial}_j^i(x))\psi_j^i(x) + g\bar{\psi}_i(x)(\tilde{g}_j^i(x)\hat{A}(x)\tilde{g}_j^i(x))\psi_j^i(x) - \mathcal{L}_s \quad (D3.1)$$

$$0 = g\bar{\psi}_i(x)[\hat{\partial}\hat{\partial}_j^i(x) + \tilde{g}_j^i(x)\hat{A}(x)\tilde{g}_j^i(x) - \hat{A}(x)]\psi_j^i(x) \quad (D3.2)$$

netrivijalno rešenje glasi :

$$0 = \hat{\partial}\hat{\partial}_j^i(x) + \tilde{g}_j^i(x)\hat{A}(x)\tilde{g}_j^i(x) - i\hat{A}(x) / \tilde{g}_j^i(x), \tilde{g}_j^i(x) \quad (D3.3)$$

$$0 = \tilde{g}_j^i(x)(\hat{\partial}\hat{\partial}_j^i(x))\tilde{g}_j^i(x) + \hat{A}(x) - \tilde{g}_j^i(x)\hat{A}(x)\tilde{g}_j^i(x) \quad (D3.4)$$

$$\hat{\partial} \leftrightarrow u, i \leftrightarrow u \Rightarrow j\hat{A}(x) = \tilde{g}_j^i(x)\hat{A}(x)\tilde{g}_j^i(x) - \tilde{g}_j^i(x)\hat{\partial}\hat{\partial}_j^i(x)\tilde{g}_j^i(x) \quad (D3.5)$$

S druge strane :

$$(\hat{\partial}\tilde{g}_k^i(x)) = \tilde{g}_k^i(-ig\hat{\partial}\hat{\partial}_k^i(x)) = -ig\tilde{g}_k^i(x)(\hat{\partial}\hat{\partial}_k^i(x)) / . \frac{i}{g} \quad (D3.6)$$

te

$$\frac{i}{g}(\hat{\partial}\tilde{g}_k^i(x)) = \tilde{g}_k^i(x)(\hat{\partial}\hat{\partial}_k^i(x)) \quad (D3.7)$$

Stoga :

$$j\hat{A}(x) = \tilde{g}_k^i(x)\hat{\partial}\hat{\partial}_k^i(x)\tilde{g}_k^i(x) - \frac{i}{g}(\hat{\partial}\tilde{g}_k^i(x))(\tilde{g}_k^i(x)) \quad (D3.8)$$

$$igj\hat{A}(x) = -\tilde{g}_k^i(x)\hat{\partial}\hat{\partial}_k^i(x)\tilde{g}_k^i(x) \quad (D3.9)$$

D4

Pri izvodjenju izraza (2.26), mora se uzeti u obzir operatorska struktura $\hat{\partial}_\mu(x)$!

$$[\hat{\partial}_\mu(x), \hat{\partial}_\nu(x)]_i^j \equiv [\delta_\mu^i \delta_\nu^j - ig_{\mu\nu} \omega_{\mu}^i(x), \delta_\mu^k \delta_\nu^l - ig_{\mu\nu} \omega_{\nu}^k(x)] \quad (D4.1)$$

$$= \delta_\mu^i [\delta_\nu^j, \delta_\nu^l] - ig \{ [\delta_\mu^i, j\omega_\nu^l(x)] - [\delta_\nu^j, j\omega_\mu^i(x)] - ig [\omega_\mu^i(x), j\omega_\nu^k(x)] \} \quad (D4.2)$$

koristeći (2.3) sledi :

$$= -ig(T_A)_j^i \left\{ (\partial_\mu A_\nu^A(x) + A_{\nu,\mu}^A(x) - A_\nu^A \partial_\mu) - (\partial_\nu A_\mu^A + A_{\mu,\nu}^A(x) - A_\mu^A \partial_\nu) \right\} - g^2 A_\mu^B(x) A_\nu^C(x) T_B^i L_j^i \quad (D4.3)$$

Usled operatorske strukture (u prostor-vremenu), javljaju se članovi tipa $\partial_\mu A_\nu$, gde se diferenciranje odnosi na funkciju na koju se primenjuje (D4.1), a ne na A_ν , te se potire se članom tipa $A_\nu \partial_\mu$. Inače, indeksom iza zareza je označena izvršena operacija diferenciranja, te članovi tipa $A_{\nu,\mu}$ nisu operatori. Iz ovog sledi da je (D4.1) tzv. običan multiplikativni (trivijalni) operator u prostor-vremenu, dok netrivijalnu operatorsku strukturu u prostoru boje "nosi" samo generator $SU(3)$, što se jasno vidi posle primene (2.12) :

$$[\partial_\mu(x), \partial_\nu(x)]_j^i = -ig(T_A)_j^i \left\{ A_{\nu,\mu}^A(x) - A_{\mu,\nu}^A(x) - g f_{BC}^A A_\mu^B(x) A_\nu^C(x) \right\} \quad (D4.4)$$

Pogodno je antisimetrični tenzor¹ (s obzirom na prostor-vreme) u vitičastoj zagradi u (D4.4) identifikovati sa tenzorom gluonskog polja. U prostoru boje, ova veličina je 8-vektor, te ima $8 \times 6 = 48$ nezavisnih komponenti (jer se, u najopštijem slučaju, ovaj tenzor može prikazati kao 8 antisimetričnih matrica 4×4 , gde su dijagonalni elementi, zbog antisimetričnosti, identički jednaki nuli, a elementi ispod dijagonalnih jednaki negativnim (odgovarajućim) elementima iznad dijagonalnih). Uz pretpostavku da je $\{A^A\}$, u prostoru boje, "polarni" vektor, sledi da je $\{f_{AB}^C A^B A^C\}$ "aksijalni" vektor (za razliku od 3-dimenzionalih aksijalnih vektora, ovaj se može razložiti na 6 ortogonalnih pravaca!), te tenzor gluonskog polja, u prostoru boje ima "VA" strukturu. (zbog diskretnosti prostora, ovi nazivi su samo analogni odgovarajućim nazivima u geometriji 3-dimenzionalnih vektora!)

D5

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} &= \frac{1}{4} (A_A^{V,\mu}(x) - A_A^{A,\nu}(x) + g f_A^B A_B^\mu(x) A_c^\nu(x)) (A_{V,\mu}^A - A_{A,\nu}^A + g f_{BC}^A A_\mu^B(x) A_\nu^C(x)) \\ &= \frac{1}{4} (A_A^{V,\mu}(x) - A_A^{A,\nu}(x)) (A_{V,\mu}^A(x) - A_{A,\nu}^A(x)) - \end{aligned} \quad (D5.1)$$

$$- \frac{1}{4} \left\{ (A_A^{V,\mu}(x) - A_A^{A,\nu}(x)) g f_{BC}^A A_\mu^B(x) A_\nu^C(x) + g f_A^B A_B^\mu(x) A_c^\nu(x) (A_{V,\mu}^A(x) - A_{A,\nu}^A(x)) \right\} \quad (D5.2)$$

$$- \frac{1}{4} g^2 f_A^B A_B^\mu(x) A_c^\nu(x) f_{DE}^A A_\mu^D(x) A_\nu^E(x) \quad (D5.3)$$

(D5.2) :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (A_A^{V,\mu} - A_A^{A,\nu}) g f_{BC}^A A_\mu^B A_\nu^C &= \frac{1}{2} [A_A^{V,\mu} g f_{BC}^A A_\mu^B A_\nu^C - A_A^{A,\nu} g f_{BC}^A A_\mu^B A_\nu^C] = \\ &= -\frac{g}{2} A_A^{A,\nu} [f_{CB}^A A_\nu^C A_\mu^B - f_{BC}^A A_\mu^B A_\nu^C] = \frac{g}{2} A_A^{A,\nu} [f_{BC}^A A_\mu^B A_\nu^C + f_{CB}^A A_\mu^B A_\nu^C] \end{aligned}$$

odakle sledi (2.33b).

D6 Parovi kanoničkih varijabli u klasičnom kanoničkom formalizmu su :

kvark : - $\psi_a^i(x) - \bar{\psi}_a^i(x)$ $i = crveno, plavo, žuto$; $a = u, d, s, c, b, t \dots$ (D6.1a)

gluon : $A_\mu^A(x) - \bar{A}_\mu^A(x)$ $A = 1, 2, \dots, 8$ $\mu = 0, 1, 2, 3$ (D6.1b)

kovarijantni izvod je dat :

$$\partial_\mu(x) = S \partial_\mu - ig(T_A) A_\mu^A(x) \quad (D6.2)$$

¹ f_{AB}^C je antisimetrično tako da je $f_{BC}^A A_\mu^B A_\nu^C$ antisimetrično i s obzirom na prostor-vreme!

(indeksi Kronecker - δ i generatora grupe se podudaraju sa indeksima izvoda ∂)

Lagranžijan :

$$\mathcal{L}_{QCD} = \bar{\psi}_i(x) (i\partial^{\mu} - m) \psi_i(x) + g j_A^A(x) A_A^{\mu}(x) - \frac{1}{4} F_A^{\mu\nu}(x) F_{\mu\nu}^A(x) \quad (D6.3)$$

jednačine kretanja (Euler - Lagranžove jednačine) :

$$(i\partial^{\mu} - m) \psi_i(x) = -g A_A^{\mu}(x) T_A \quad (D6.4a)$$

$$_A D_{\mu}^c(x) F_c^{\mu\nu}(x) = -g j_A^{\nu}(x) \quad (D6.4b)$$

uz definiciju

$$j_A^{\mu}(x) = \bar{\psi}_i(x) \gamma^{\mu}(T_A) \psi_i(x) \quad (D6.5)$$

Konjugovani momenti su :

$$\psi_a^i(x) : \pi_a^i(x) = i \bar{\psi}_i(x) \gamma^a \equiv i \bar{\psi}_i^a(x) \quad (D6.6a)$$

$$A_{\mu}^A(x) : \pi_A^{\mu}(x) = F_A^{\mu\nu}(x) \equiv E_A^{\mu}(x) \quad (D6.6b)$$

Hamiltonijan :

$$\mathcal{H}(x) = i \bar{\psi}_i^a(x) \gamma^a \partial_{\mu} \psi_a^i(x) + E_A^{\mu}(x) \partial_{\mu} A_{\mu}^A(x) - \mathcal{L}_{QCD}(x) \quad (D6.7)$$

D7a Funkcionalni račun može da se smatra uopštenjem računa sa funkcijama više (beskonačno mnogo) promenljivih na račun sa funkcionalima jednog ili više polja (funkcija jedne ili više promenljivih), a s tim u vezi i uopštenje diskretnog skupa kontinualnih argumenata na kontinualnu promenljivu (ili više njih) definisanu na konačnom ili beskonačnom domenu njenog argumenta (takodje kontinualnog!)

$$F(x_1, \dots, x_n); x_i \in (-\infty, \infty) \rightarrow F\{y(x)\}; x \in (-\infty, \infty) \Rightarrow y \in (a, b) \quad (D7.1a)$$

$$F\{y\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n T_n(x_1, \dots, x_n) y(x_1) \dots y(x_n) \quad (D7.1b)$$

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x_i}, i=1,2,3 \dots \rightarrow \frac{\delta}{\delta y(x)}, x \in (-\infty, \infty); \frac{\delta}{\delta y(x)} y(x') = \delta^{(p)}(x-x') \quad (D7.2)$$

$$\frac{\delta}{\delta y(x)} [F\{y\} \cdot G\{y\}] = \frac{\delta F\{y\}}{\delta y(x)} G\{y\} + F\{y\} \frac{\delta G\{y\}}{\delta y(x)} \quad (D7.3)$$

$$T_n(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta}{\delta y(x_1)} \dots \frac{\delta}{\delta y(x_n)} F\{y\} \right|_{y=0} \quad (D7.4)$$

odakle se vidi da je $T_n(x_i)$ simetrično.

$$\prod_{i=1}^n \frac{d^{(p)}}{dy^{(p)}} \rightarrow D(y); \int D(y) = \int D(y + \text{const}) \quad (D7.5)$$

Integral Gauss-ovog tipa :

$$\int D(y) \exp \left\{ - \int dx dx' y(x) A(x, x') y(x') \right\} = (\det A)^{-1} \quad (D7.6)$$

i definicija determinante :

$$\det A \equiv \exp \{ \text{tr} \{ \log A \} \}. \quad (D7.7)$$

$$\int D(z) F\{z\} = \int D(y) J\{z(y)\} F\{z(y)\} \quad (D7.8a)$$

a ako

$$z\{y\}: z(x) = \int dx' Z(x, x') y(x') \Rightarrow J = \det \frac{\delta z\{y\}}{\delta y(x')} = \det Z(x, x') \quad (D7.8b)$$

b

Grassmann-ova algebra; „levi“ infinitezimalni račun:

$$\{\zeta^i, \zeta_j\} = \{\bar{\zeta}_i, \bar{\zeta}_j\} = \{\bar{\zeta}_i, \zeta^j\} = 0 \quad i, j = 1, 2, \dots \quad (\text{D7.9})$$

$$\{\zeta^i, \xi^j\} = \dots = 0 \quad (\zeta^2)^i = (\bar{\zeta}^2)_i = (\xi^2)^i = (\bar{\xi}^2)_i = 0 \quad (\text{D7.10})$$

$$\partial \zeta_i = \frac{\partial}{\partial \zeta_i} : \quad \partial \zeta_i \left(\prod_{j=1}^n \zeta_j^{k_j} \right) = \sum_{j=1}^n \delta_{kj} (-1)^{j-1} \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^n \zeta_l^{k_l} \quad (\text{D7.11})$$

drugim rečima izvod proizvoda $\prod \zeta^k$ po ζ^i se nalazi tako da se elementi proizvoda antikomutuju dok ζ^i ne bude prvi s leva. Tada se ζ^i i $\partial \zeta_i$ jednostavno potiru. Ako proizvod ne sadrži ζ^i , izvod po ζ^i je nula.

$$\int d\zeta_i = 0, \quad \int d\zeta_i \zeta^k = \delta_i^k \Rightarrow \int d\zeta_i \cong \partial \zeta_i \quad (\text{D7.12})$$

$$\zeta^i = \alpha^i_k \xi^k \Rightarrow d\zeta_i = \tilde{\alpha}^k_i d\xi_k \quad \tilde{\alpha} = \det \begin{pmatrix} d\zeta_i \\ d\xi_k \end{pmatrix} = (\det \alpha)^{-1} \prod d\zeta_i \quad (\text{D7.13})$$

Integral Gauss-ovog tipa:

$$\prod_{ij} \int d\zeta_i d\bar{\zeta}_j \exp \left\{ \bar{\zeta}_k \mathbb{A}_l^k \zeta^l \right\} = \det(\mathbb{A}) \quad (\text{D7.14})$$

c Grassmann-ov funkcionalni „levi“ infinitezimalni račun:

$$\{\zeta(x), \zeta(y)\} = \{\bar{\zeta}(x), \zeta(y)\} = \{\zeta(x), \bar{\zeta}(y)\} = 0, \quad x, y \in (-\infty, \infty) \quad (\text{D7.15})$$

$$\{\xi(x), \zeta(y)\} = \dots = 0 \quad \zeta^2(x) = \bar{\zeta}^2(x) = \xi(x) = \bar{\xi}(x) = 0 \quad (\text{D7.16})$$

$$\frac{\delta}{\delta \zeta(x)} \prod_i \zeta(x_i) = \sum_{j=1}^n \delta(x - x_j) (-1)^{j-1} \prod_{i \neq j} \zeta(x_i) \quad (\text{D7.17})$$

Integral Gauss-ovog tipa:

$$\int D(\bar{\zeta}, \zeta) \exp \left\{ \int dx dy \bar{\zeta}(x) \mathbb{A}(x, y) \zeta(y) \right\} = \det(\mathbb{A}) \quad (\text{D7.18})$$

Izraz (3.57) se dobija zahvaljujući antikomutaciji avet-polja, te Jacobi-evog identiteta za antisimetrične strukturne konstante $\{ABC\}$. (Prema R3.13).

D8 Dirac-ova algebra (algebra γ - matrica) je neophodna u izračunavanju Feynman-ovih integrala. Stoga je ovde dat niz korisnih identiteta, prvo u 4 dimenzije, a potom, neki, i u n dimenzija.

a) 4 dimenzije:

$$\{\gamma^a, \gamma^b\} = 2\delta^{ab} \quad \frac{i}{2} [\gamma^a, \gamma^b] = \delta^{ab} \quad \gamma^a \gamma^b = \delta^{ab} - i \epsilon^{abc} \gamma^c$$

$$\gamma^5 = \gamma_5 = \frac{i}{4} \epsilon_{\mu\nu\sigma\tau} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\sigma \gamma^\tau = i \gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3$$

$$\delta_{\mu\nu} \delta^{ab} = 4 \quad \gamma^\mu \gamma_\mu = 4 \cdot 1$$

$$\text{Gr}\{1\} = 4$$

$$\gamma_\mu \gamma^a \gamma^b = -2 \gamma^d$$

$$\text{Gr}\{\gamma^5\} = \text{Gr}\{\delta^{ab}\} = 0$$

$$\gamma_\mu \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d = 4 \delta^{abcd} \cdot 1$$

$$\text{Gr}\left\{ \prod_{i=1}^4 \gamma^{a_i} \right\} = \begin{cases} 0 & \ell \neq 2k \\ \pm 1 & \ell = 2k \end{cases}$$

$$\gamma_\mu \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^e = -2 \gamma^e \gamma^a \gamma^b \gamma^c$$

$$\gamma_\mu \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^e \gamma^f = 2(\gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^e + \gamma^e \gamma^f \gamma^a \gamma^b \gamma^c)$$

² odatle naziv „levi“ ...

$$\text{Tr} \{ \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d \} = 4 (g^{ab} g^{cd} - g^{ac} g^{bd} + g^{ad} g^{bc})$$

$$\text{Tr} \{ \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d \gamma^e \} = -4; \epsilon^{abcde} = 4; \epsilon_{abcd} = (1, -1, 1, -1)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\mu = 0 \quad \gamma_\mu \gamma^\lambda \gamma^\mu \gamma^\nu = 2 \gamma^\lambda \gamma^\nu$$

$$\hat{a} = \gamma^\mu a_\mu \quad \hat{a} \cdot \hat{b} = a \cdot b - i \bar{a}_{\mu\nu} a^\mu b^\nu = a \cdot b + \frac{1}{2} [\hat{a}, \hat{b}]$$

b) n dimenzija :

$$S_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = n \quad \gamma_\mu \gamma^\mu = n \mathbb{1} \quad \{ \gamma^\mu, \gamma^\nu \} = 2 g^{\mu\nu} \quad \gamma^\mu \gamma^\nu = g^{\mu\nu} - i g^{\mu\nu}$$

$$\gamma_\mu \gamma^a \gamma^\mu = (2-n) \gamma^a \quad \gamma_\mu \gamma^a \gamma^b \gamma^\mu = 4 g^{ab} \mathbb{1} + (n-4) \gamma^a \gamma^b$$

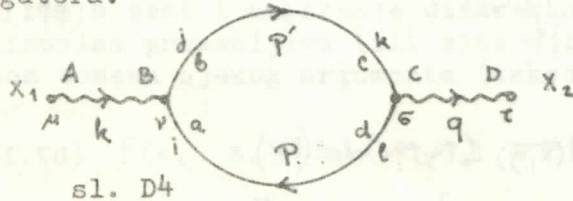
$$\gamma_\mu \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^\mu = -2 \gamma^a \gamma^b \gamma^c - (n-4) \gamma^a \gamma^b \gamma^c$$

$$\text{Tr} \{ \mathbb{1} \} = 2^n \quad \text{Tr} \{ \gamma^a \gamma^b \gamma^c \gamma^d \} = 2^{n/2} (g^{ab} g^{cd} - g^{ac} g^{bd} + g^{ad} g^{bc})$$

D9 Doprinos grafa na slici 5g) se može proceniti i ne računajući celu Green-ovu funkciju . Amputirana Green-ova funkcija je, naime :

$$G_2(k, q) \propto \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \cdot \frac{1}{q^2 + i\epsilon} \quad (\text{D9.1})$$

odakle se vidi da ne zavisi od ulazno-izlaznog impulsa gluonskog propagatora.



Primera radi, ovde će biti izведен izraz (4.18), (4.19), koji potiče od grafa na slici D4 (odnosno 5a).

Uz oznake na slici D4, Green-ova funkcija glasi :

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left\{ \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{d^4 p'}{(2\pi)^4} \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} (-1) \frac{-i e^{-ikx_1} \delta_B^A g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon} i g(T_B)_j^i \delta_B^a \gamma^v (T_B)_j^i \delta^a (k + p + p') \right. \\ \left. i \frac{\delta_k^j \delta_c^b}{\hat{p}' - m - i\epsilon} i g(T_C)_e^j \delta_d^c \gamma^e (2\pi)^4 \delta^4((p' - p) - q) i \frac{\delta_l^i \delta_a^d}{\hat{p} - m - i\epsilon} - i e^{iqx_2} \delta_d^c g_{\mu\nu} \right\} \end{aligned} \quad (\text{D9.2})$$

odnosno :

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta_B^A g_{\mu\nu} \frac{e^{-ikx_1}}{k^2 + i\epsilon} G_2^{v6}(k, a)_c^B \frac{e^{ikx_2}}{k^2 + i\epsilon} \delta_D^c g_{\mu\nu} \quad (\text{D9.3})$$

sa

$$G_2^{v6}(k, a)_c^B = \text{Tr} \left\{ - \sum_j (ig)^2 (T_B)_j^i (T_C)_i^j \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \gamma^v \frac{i}{\hat{p} + k - m_j - i\epsilon} \gamma^v \frac{i}{\hat{p} - m_j - i\epsilon} \right\} \quad (\text{D9.4})$$

$$G_2^{v6}(k, a)_c^B = (ig)^2 \frac{1}{2} \delta_c^B \sum_f \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \text{Tr} \left\{ \gamma^v \frac{1}{\hat{p} + k - m_f - i\epsilon} \gamma^v \frac{1}{\hat{p} - m_f - i\epsilon} \right\} \quad (\text{D9.5})$$

pa prelaskom na n dimenzija:

$$G_2^{v6}(k, a)_c^B = (ig)^2 \frac{1}{2} \delta_c^B \sum_f \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{\text{Tr} \{ \gamma^v (\hat{p} + k + m_f) \gamma^v (\hat{p} + m_f) \}}{[(\hat{p} + k)^2 - m_f^2 - i\epsilon] [p^2 - m_f^2 - i\epsilon]} \quad (\text{D9.6})$$

Na ovom mestu je zgodno iskoristiti identitet

$$\frac{1}{ab} = \int_0^1 dx [ax + b(1-x)]^{-2} \quad (\text{D9.7})$$

uz oznake

$$l_\mu = p_\mu + k_\mu x \quad R_f^2 = x(x-1) k^2 + m_f^2 + i\epsilon \quad (\text{D9.8})$$

sledi

$$\mathcal{G}_2^{\text{vs}}(k, a)_c^B := (ig)^2 \frac{1}{2} \delta_c^B \sum_f \int_{(2\pi)^n} \int_0^l \frac{\text{Gr}\{\gamma^\nu (\hat{p} + \hat{k} + m_f) \gamma^\mu (\hat{p} + m_f)\}}{[e^2 + R^2]^{1/2}} \quad (\text{D9.9})$$

S obzirom da je trag neparnog broja γ - matrica identički jednak nuli, brojilac pod integralom se može napisati :

$$\text{Gr}\{\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho (\hat{p} + k)_\alpha P_\beta + \gamma^\nu \gamma^\mu m_f^2\} \quad (\text{D9.10})$$

što, uz korišćenje identiteta iz dodatka D8 postaje :

$$2^{\nu\mu} (B^{\nu\mu} B^{\mu\beta} - B^{\nu\beta} B^{\mu\beta} + B^{\nu\mu} B^{\mu\beta}) (\hat{p} + k)_\alpha P_\beta + B^{\nu\mu} m_f^2 \quad (\text{D9.11})$$

Prema (D9.8) :

$$(\hat{p} + k)_\alpha P_\beta = (\ell + k(1-x))_\alpha (\ell - kx)_\beta = \ell_\alpha \ell_\beta - k_\alpha k_\beta x(1-x) \quad (\text{D9.12})$$

gde su izostavljeni članovi linearni po k_α , jer se oni, posle simetrične integracije po ℓ , anuliraju. Sada (D9.11) postaje :

$$2^{\nu\mu} (2\ell^\nu \ell^\mu - B^{\nu\mu} \ell^2 - (2k^\nu k^\mu - B^{\nu\mu} k^2)x(1-x) + B^{\nu\mu} m_f^2) \quad (\text{D9.13})$$

Koristeći činjenicu da zbog integracije, važi :

$$\int \frac{d^n \ell}{(2\pi)^n} \cdot (\ell^\nu \ell^\mu) \rightarrow \frac{1}{n} \int d^n \ell \cdot \ell^2 B^{\nu\mu} \quad (\text{D9.14})$$

dobijamo :

$$2^{\nu\mu} \left[\left(\frac{2}{n} - 1 \right) \ell^2 B^{\nu\mu} - (2k^\nu k^\mu - k^2 B^{\nu\mu}) x(1-x) + B^{\nu\mu} m_f^2 \right] \quad (\text{D9.15})$$

odnosno :

$$\mathcal{G}_2^{\text{vs}}(k, a)_c^B = (ig)^2 \frac{1}{2} \delta_c^B \sum_f \int_0^l dx \left[A_f^{\nu\mu}(x) + B_f^{\nu\mu}(x) \right] \quad (\text{D9.16})$$

sa

$$A_f^{\nu\mu}(x) = 2^{\nu\mu} \frac{e^{-2}}{n} B^{\nu\mu} \int \frac{d^n \ell}{(2\pi)^n} \frac{\ell^2}{[\ell^2 - R_f^2]^2} \quad (\text{D9.17})$$

$$\text{i} \quad B_f^{\nu\mu}(x) = -2^{\nu\mu} \left[(2k^\nu k^\mu - B^{\nu\mu} k^2)x(1-x) - B^{\nu\mu} m_f^2 \right] \int \frac{d^n \ell}{(2\pi)^n} [\ell^2 - R_f^2]^{-1/2} \quad (\text{D9.18})$$

Integrali u (D9.17) i (D9.18) su rješivi i izračunavaju se po opštoj formuli (R3.3) :

$$\mathcal{J}^n(r, u) = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{(k^2)^r}{[k^2 - R^2]^u} = i \frac{(-1)^{r-u}}{(4\pi)^{n/2}} \frac{\Gamma(r + \frac{n}{2}) \Gamma(u - r - \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2}) \Gamma(u)} (R^2)^{r+u+\frac{n}{2}} \quad (\text{D9.19})$$

tj.

$$\mathcal{J}^n(1, 2) = -i(4\pi)^{-1/2} \frac{4-E}{E-2} \Gamma(\frac{E}{2})(R^2)^{1-\frac{E}{2}} \quad (\text{D9.20})$$

$$\text{i} \quad \mathcal{J}^n(0, 2) = i(4\pi)^{-1/2} \Gamma(\frac{E}{2})(R^2)^{-\frac{E}{2}} \quad (\text{D9.21})$$

Sada A i B postaju:

$$A_f^{\nu\mu}(x) = (-i)(2\pi)^{-n/2} B^{\nu\mu} \Gamma(\frac{E}{2}) \frac{x(x-1) k^2 + m_f^2}{(R_f^2)^{E/2}} \quad (\text{D9.22})$$

$$B_f^{\nu\mu}(x) = \left[2 \frac{k^\nu k^\mu x(x-1)}{(R_f^2)^{E/2}} - B^{\nu\mu} (x(x-1) k^2 - m_f^2) \right] i(2\pi)^{-n/2} \Gamma(\frac{E}{2}) \quad (\text{D9.23})$$

a njihov zbir iznosi :

$$A_f^{\nu\mu}(x) + B_f^{\nu\mu}(x) = 2i(2\pi)^{-\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{E}{2}) \frac{x(x-1)}{(R^2)^{E/2}} (k^\nu k^\mu - k^2 B^{\nu\mu}) \quad (\text{D9.24})$$

što, uvršteno u (D9.16), dovodi do (4.18), (4.19).

D10 Kao i u celokupnoj literaturi, u ovom je radu korišćen tzv. prirodnji sistem jedinica. Da bi došli do njega, analizirajmo (površno?) Heisenberg-ove relacije :

$$\Delta x_i \Delta p_i \sim t \quad \Delta t \Delta E \sim t \quad i = x, y, z \quad (\text{D10.1})$$

Imamo 8 promenljivih, a 4 relacije, što znači da su 4 promenljive nezavisne. Uz relativistički uslov (tri relacije) :

$$\Delta P_i \sim E/c \quad (\text{Dlo.2})$$

ostaje samo jedan nezavisni parametar. Birajući da je to energija :

$$\Delta K_i \sim tc/E \quad (\text{Dlo.3})$$

$$\Delta E \sim E \quad (\text{Dlo.4})$$

$$\Delta t \sim t/E \quad (\text{Dlo.5})$$

Stavljujući da su $t = c = 1$ (Dlo.6)

dakle, bezdimenzione veličine, sledi da se dužina, vreme, impuls (i naravno, masa) mogu izraziti u jedinicama energije. I to :

$$\dim(x) = \dim(t) = -1 \quad (\text{Dlo.7})$$

$$\dim(p) = \dim(m) = +1 \quad (\text{Dlo.8})$$

Inače, konstante interakcije, konstante fine strukture, te Hamilton-ovo dejstvo moraju ostati bezdimenzione veličine :

$$\dim(g) = \dim(e) = \dim(\alpha_s) = \dim(\alpha_1) = \dim(S) = 0 \quad (\text{Dlo.9})$$

Korisno je, takodje, dati sledeće relacije :

$$\dim(\int d^4x) = -4 \quad (\text{Dlo.10})$$

$$\dim(\text{lagranžijan}) = \dim(\text{hamiltonijan}) = +4 \quad (\text{Dlo.11})$$

$$\dim(\psi) = \frac{3}{2} \quad \dim(A) = \dim(\eta) = \dim(\bar{\eta}) = \dim(\theta) = +1 \quad (\text{Dlo.12})$$

Najzad, ako je potrebno numerički proceniti vrednost nekog izraza, korisne su sledeće relacije (koje potiču iz (Dlo.2) - (Dlo.5)) :

$$x(m) = \frac{1.973289}{E(\text{MeV})} \cdot 10^{-13} \quad t(s) = \frac{6.582173}{E(\text{MeV})} \cdot 10^{-22} \quad (\text{Dlo.13})$$

$$m(\text{kg}) = 1.782676 \cdot 10^{30} \cdot E(\text{MeV}) \quad P(\text{Ns}) = 5.344328 \cdot 10^{22} \cdot E(\text{MeV}) \quad (\text{Dlo.14})$$

gde je prihvaćena konvencija (u nuklearnoj fizici i fizici visokih energija) izražavanja energije u jedinicama MeV. (Numeričke vrednosti prema R2.7. Sve cifre u (Dlo.13), (Dlo.14) su sigurne.)

Neke oznake korišćene u radu :

$$\mu, \nu, \sigma, \tau \dots = 0, 1, 2, 3 \quad S_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1) \quad a = (a_0, \vec{a})$$

$$\partial_\mu = (\partial_0, -\vec{\partial}) = \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad P_\mu = i\hbar \partial_\mu \quad (\hbar = 1)$$

$$\hat{a} = \gamma^\mu a_\mu = \gamma^0 a_0 - \vec{\gamma} \cdot \vec{a} \quad \hat{P} = i\gamma^\mu \partial_\mu = i(\gamma^0 \partial_0 + \vec{\gamma} \cdot \vec{\partial})$$

$$\phi_{\mu, \nu}(x) = (\partial_\nu \phi_\mu(x))$$

$$\partial_A^\mu(x) = \frac{\partial}{\partial A_{\mu}^A(x)} \quad ; \quad \partial_A^{\mu, \nu}(x) = \frac{\partial}{\partial A_{\mu, \nu}^A(x)} \quad ; \quad \partial_\eta = \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (\eta^2 = 0 \Rightarrow \text{"levi"})$$

$$\det \mathcal{T} \quad \mathcal{T}(A(x) B(y)) = \begin{cases} A(x) B(y) & x^0 > y^0 \\ B(y) A(x) & x^0 < y^0 \end{cases}$$

Osim kao Dyson-ov hronološki operator, \mathcal{T} se pojavljuje i kao operator uređenja putanje ("path-ordering operator"), npr. u (5.7).

Sam u odeljku 2.4, nije naznačavana zavisnost lagranžijiana od prostor-vremena, te :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(x)$$

Izuzetno, kod izvodjenja $F_{\mu\nu}^\lambda(x)$, $\partial_\mu A_\nu(x) = A_\nu(x) \partial_\mu$, jer $(\partial_\mu A_\nu(x)) = A_{\nu, \mu}(x)$.

Na svim dijagramima i grafovima, vremenska osa je postavljena horizontalno i usmerena s leva na desno.

U 4. poglavljiju se javlja Euler-ova konstanta u razvoju Γ -funkcije. Označena je sa γ , za razliku od γ -matrica, koje uvek nose indeks ili strelicu 3-vektora. Eulerova konstanta je, inače, definisana :

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = .572\dots$$

Korišćena literatura i reference:

1. Opšta teorija

- 1.1 J.D.Bjorken , S.D.Drell "Relativistische Quantenmechanik" '66.
Hochschultaschenbücher, BI, Manheim
- 1.2 " " " " Relativistische Quantenfeldtheorie" '67.
Hochschultaschenbücher, BI, Manheim
- 1.3 K.Nagy , Gy.Pócsik "Relativisztikus kvantumelektronodinamika"
Tankönyvkiadó, BPest, '75.
- 1.4 N.B.Beresteckij, E.M.Lifsic , L.P.Pitajevszkij
"Relativisztikus kvantumelmélet"
Tankönyvkiadó, BPest, '79.
- 1.5 R.Jackiw Rev.Mod.Phys. 52 n4 p661-72 (oct.'80.)
- 1.6 C.Itzykson , J.B.Zuber "Quantum Field Theory" McGraw Hill, N.York '80.
- 1.7 J.S.Bell "Experimental Quantum Field Theory"
Proc.'77.CERN JINR School pl-35
- 1.8 C.Itzykson , M.Nauenberg Rev.Mod.Phys. 38 n1 p95-120 (jan.'66.)

2. „Elementarne“ čestice i kvarkovi

- 2.1 H.Hänsel , W.Neumann "Elektronenhülle der Atome" VEB,Berlin '77.
- 2.2 H.Hänsel , W.Neumann "Moleküle, Atomen und Elementarteilchen"
VEB, Berlin, '77.
- 2.3 K.Nagy "Kísérleti részecskefizika"
Tankönyvkiadó, BPest, '76.
- 2.4 F.E.Close "An Introduction to Quarks and Partons"
Accademic Press, London '79.
- 2.5 R.D.Young Am.J.Phys. 41 p472-83 (april '73.)
- 2.6 S.L.Glashow Sci.Am. p38-50 (oct. '75)
- 2.7 PARTICLE PROPERTIES DATA BOOKLET APRIL 1980. CERN, Geneve, '80.

3. QCD (i bliske teme)

- 3.1 E.de Rafael "QCD as a Theoretical Framework of the Hadron Interaction" EIP,Kupari, '79.
- 3.2 C.H.Llewellynn-Smith "Topics in QCD" '79 University of Oxford
- 3.3 S.D.Bjorken "Elements of QCD" SLAC-PUB-2372 Dec.'79.
- 3.4 S.J.Brodsky "Perturbative QCD" SLAC-PUB-2447 Dec.'79.
- 3.5 G.'t Hooft Sci.Am. p (june '80.)
- 3.6 S.L.Glashow Rev.Mod.Phys. 52 n3 p539-43 (july '80.)
- 3.7 S.Weinberg " " p515-21 " "
- 3.8 A.Salam " " p525-37 " "
- 3.8 E.Witten Phys.Today p38-43 (july '80.)
- 3.10 J.Kutti "Quark Confinement and the Quark Model"
Proc.'77.CERN JINR School p79-128
- 3.11 K.Fujikawa Progr.Theor.Phys. 63 n4 p1364-83 (april '80.)
- 3.12 J.Ellis , C.T.Sachrajada "QCD and it's Applications"
Proc.'79.Cargése Summer Institute

- 3.13 P.Becher , M.Böhm , H.Joos „Eichtheorien der starken und elektroschwarzen Wechselwirkung“ Teubner, Stuttgart '81.
 3.14 W.Marciano , H.Pagels "QCD" Phys.Rev.(Lett) 36C n3 p137-276 '78.
 3.15 C.Becchi , A.Rouet , R.Stora Comm.Math.Phys. 42 p127-162 '75.
 3.16 R.A.Brandt Nucl.Phys. B116 p413-48 '76.

4 Teorija - eksperiment

- 4.1 F.E.Close "Hadron Spectroscopy"(prelecture notes) EIP,Kupari '80.
 4.2 R.J.Cashmore " " " "
 4.3 R.F.Schwitters Sci.Am. p56-70 (oct. '77.)
 4.4 J.Bouchrot "Hadronic Predictions for Lepton Pairs"
 (prelecture notes) EIP,Kupari '80.
 4.5 R.Turlay "Dimuon Physics III" (prelecture notes)
 EIP,Kupari '80.

EIP - Ecole Internationale de physique des particules elementaires

Tablica II multipleti najlakših hadrona

0^- mezoni (8+1)	π^+	π^0	π^-	η^0	K^+	K^0	\bar{K}^0	K^-	η^0	
Q	+1	0	-1	0	+1	0	0	-1	0	
I ₃	+1	0	-1	0	+1/2	-1/2	+1/2	-1/2	0	
S	0	0	0	0	+1	+1	-1	-1	0	
1/2 ⁺ barioni (8)	P	n	Λ	Σ^+	Σ^0	Σ^-	Ξ^0	Ξ^-		
Q	+1	0	0	+1	0	-1	0	-1		
I ₃	+1/2	-1/2	0	+1	0	-1	+1/2	-1/2		
S	0	0	-1	-1	-1	-1	-2	-2		
3/2 ⁺ barioni (10)	Δ^{++}	Δ^+	Δ^0	Δ^-	Σ^{*+}	Σ^{*0}	Σ^{*-}	Ξ^{*0}	Ξ^{*-}	Ω^-
Q	+2	+1	0	-1	+1	0	-1	0	-1	-1
I ₃	+3/2	+1/2	-1/2	-3/2	+1	0	-1	+1/2	-1/2	0
S	0	0	0	0	-1	-1	-1	-2	-2	-3

Tablica IV mezonski multipleti

1S_0	3S_1	3P_1	3P_0	3P_1	3P_2
$\pi^{\pm,0}$	$\phi^{\pm,0}$	$B^{\pm,0}$	$\delta^{\pm,0}$	$A_1^{\pm,0}?$	$A_2^{\pm,0}$
η^0	ω^0	?	ϵ	D?	f ⁰
K^\pm $(\bar{K})^0$	$K^{*\pm}$ $(\bar{K})^0$	Q_A^\pm Q_B^0	K^\pm $(\bar{K})^0$	$Q_A^\pm?$ $Q_A^0?$	$K^{*\pm}$ $(\bar{K})^{*0}$
η'^0	ϕ^0	?	S^*	E?	f ⁰

Tablica VI strukturni faktori S(3), različiti od nule

$$f_{123} = 1 \quad f_{147} = f_{246} = f_{251} = f_{245} = f_{516} = f_{631} = \frac{1}{2} \quad f_{458} = f_{618} = \sqrt{3}/2$$

kao i svi koji se dobijaju permutacijom indeksa (uz prave predznaake)

Tablica VII Gell-Mann-ove matrice

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} i & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_6 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \lambda_8 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

