

1 Увод

Доступност радиоактивних стандарда у смислу производње и даље дистрибуције је неопходно за извођење тачних мерења у многим областима и дисциплинама које подразумевају радиоактивност. Ово подразумева између осталог, мерења за основна истраживања нуклеарних распада и реакција, за радиоеколошка и геохемијска истраживања, за мониторинг животне средине, за контролу квалитета радиофармацеутика у производњи и администрацију за испитивање специјалних нуклеарних материјала у нуклеарној енергетици и индустрији оружја. Ови стандарди се даље принципијално користе за калибрацију инструмената који се користе за мерење радиоактивности и за мониторинг радиохемијских процедура. Већина стандарда су (или би бар требали да буду) направљени и компатибилни са националним стандардима. Као резултат, примарне методе стандардизације су на врху хијерархије производње стандарда које су потребне да широм света обезбеде компатибилност и тачност [1].

Примарне или апсолутне технике мерења активности подразумевају директно мерење нуклеарних прелаза у јединици времена извора једног радиоактивног изотопа при чему мерење не зависи од неког другог мерења активности [2]. Како се примарна стандардизација активности своди на детекцију и квантификацију емитованог зрачења, реализација SI јединице бекерел [Bq] подразумева различите технике и приступе за сваки радиоизотоп појединачно. Одговарајући метод се реализује према шеми распада радиоизотопа. Тренутно доступне шеме распада [3] са различитим нивоом тачности и прецизности су резултат рада више деценија у области “Радиоактивна метрологија”, која обухвата све аспекте радиоактивних мерења, као што је одређивање активности, периода полураспада, енергетских нивоа и вероватноћа прелаза [4]. Процес стандардизације извора у смислу одређивања његове активности подразумева и детаљан опис поступка припреме узорка и мерења и утврђивање мерне несигурности.

Постоји неколико принципијално различитих метода за мерење апсолутне активности: метод мерењем масе радиоизотопа, високо ефикасне методе бројања на дефинисаном просторном углу и коинцидентне методе [5]. Свака од метода захтева одговарајућу припрему узорка [6], употребу одговарајуће инструментације, специфичну експерименталну поставку и адекватну обраду и интерпретацију података.

Од открића радиоактивности до данас, методе мерења апсолутне активности испитиване су и готово усавршене за практично све радиоизотопе од интереса, а постигнуте тачности су реда величине десетине процента до неколико процената у зависности од сложености шеме распада. На пример мерне несигурности метода за мерење активности узорака изотопа ^{152}Eu који има веома сложену шему распада могу бити око 0.1% [7,8,9], међутим релативна одступања различитих метода иду и до 1% [7,8]. Достицању добрих резултата претходило је много рада у усаврашавању поступка издвајања и производње извора одређеног радиоизотопа, развоју детектора и пратеће електронике, усавршавању експерименталних техника и теорије интеракције радиоактивног зрачења са материјом као и усавршавању математичких модела за правилну интерпретацију података.

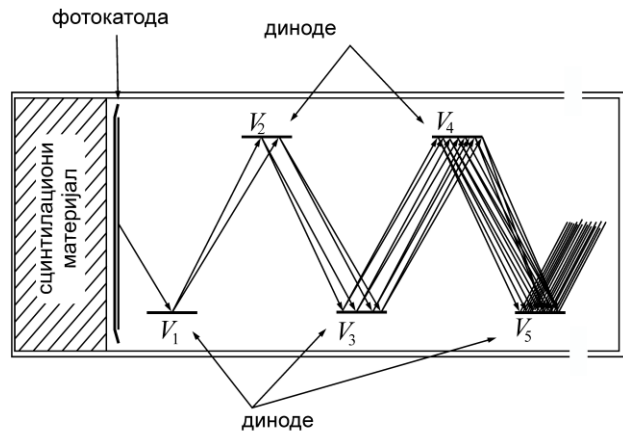
2 Детектори и пратећа електроника за мерење активности

2.1 Развој детектора

Врло брзо након открића радиоактивности од стране Хенри Бекерела 1896, пронађен је принцип за детекцију појединачних радиоактивних зрака. Први уређај који је могао детектовати појединачне зраке био је спинтарископ, а изумео га је Крукс 1903. Приметио је да екран израђен од цинк сулфида изложен α честицама светлуца при удару α честица. Слаби светлосни сигнали могли су бити уочени помоћу увеличавајућег стакла. Радерфорд и Гајгер су нашли да на униформном екрану сачињеним од великог броја сцинтилационих тачака свака сцинтилација одговара удару једне α -честице. У том смислу је пронађен врло једноставан и практичан метод за бројање индивидуалних α -честица. Метод је усавршен и највише коришћен од стране Радерфорда и његових студената све до неких тридесетих година 20-ог века. Овај начин мерења изискивао је велике напоре оних који су посматрали сцинтилације. Уобичајна процедура подразумевала је да једна особа броји у току једног минута, а затим је долазила друга особа. Сваки посматрач је могао учествовати у највише 20 мерења.

Детектовање јонизујућег зрачења помоћу сцинтилационе светлости индуковане у цинк сулфиду је једна од првих техника детектовања и бројања зрачења. Развој електричних кола и разумевање интеракције зрачења са материјом допринео је да се ова метода готово потпуно замени методама електричног бројања 1930-их. Међутим, проналажењем начина да се светлосни сигнали конвертују у електричне, 1940-их је сцинтилациона техника поново саживела. Принцип конверзије светлосних сигнала у електричне се заснивао на мултипликацији електрона који су настали фотоелектричним ефектом. За ово су коришћене фотомултипликаторске цеви чији је задатак да умножи број фотоелектрона. Принцип је приказан на Слици 2.1. Бројање оком је заувек превазиђено.

Уследило је истраживање материјала који најбоље конвертују јонизујуће зрачење у светлосне сигнале. До 1947. и 1948. пронађено је неколико различитих материјала од којих се издвајају органски сцинтилатори: Антрацен ($C_{14}H_{10}$), транс-стилбен ($C_{14}H_{12}$), нафталин ($C_{10}H_8$). Осим антрацена који има верременску константу од око 30 ns, остали имају око неколико ns. У току 1950-их је откривено да се кристал NaI активира талијумом, а постао је врло брзо и комерцијално доступан. Ово је био и први практични чврсти детекторски медијум за гама спектрометрију, а остао је и данас најпопуларнији сцинтилациони детектор због велике ефикасности и релативно ниске цене, доступности итд. Течни сцинтилатори такође су пронађени већ 1948., међутим интерес за ове медијуме није постојао до 1960-их.



Слика 2.1 Принцип конверзије и појачања светлосног сигнала изазваног радиоактивним зрачењем у електрични сигнал помоћу фотомултипликаторске цеви. Радиоактивно зрачење генерише светлост у сцинтилационом материјалу која фотоэффектом ствара примарне фотоелектроне на фотокатади. Електрони са фотокатаде стижу на прву диноду која је на вишем напону V_1 са које избијају нове електроне. Ови електрони даље избијају са друге диноде нове електроне, итд. Систем се састоји обично од 10 до 14 динода. У зависности од изведбе фотомултипликатора, фактор умношка броја електрона може ићи и до 10^7 . Постоје различите конфигурације фотомултипликатора прилагођене датом намени (види нпр. [Leo]).

Истраживање у области производње сцинтилационих материјала поставља неколико критеријума који дефинишу шта је добар сцинтилациони материјал.

- Дати материјал мора имати велику сцинтилациону ефикасност, тј. висок светлосни одзив за дату депоновану енергију честице или фотона. На апсолутној скали ефикасности су мале, али ипак много веће од ефикасности гасног бројача исте запремине. Само неколико процената од депоноване енергије настају у форми фотона.

- Ако сцинтилатор треба да одреди и енергију упадног зрачења, мора постојати веза између енергије упадног зрачења и количине створене светлости. У идеалном случају веза је линеарна, што је у пракси задовољено само у уској области енергије. Понекад су битније временске карактеристике детектора и тада треба изабрати материјал који има брзи одзив на упадно зрачење и производи временске сигнале са кратким временом пораста и опадања. У том смислу при избору сцинтилационих материјала треба наћи компромис између захтева високе сцинтилационе ефикасности, линеарности и брзог одзива.

- Материјал мора бити транспарентан за сопствену сцинтилациону светлост. Ако ово није задовољено онда се он прави у виду танког филма. Транспарентност се може постићи комбинацијом сцинтилационог материјала са такозваним померачем таласне дужине (*wavelength shifter*). Апсорпцијом и реемисијом таласна дужина примарне светлости се помера у област веће таласне дужине која се више не самоапсорбује. Ово се такође употребљава ради прилагођавања таласне дужине на осетљивост електронског уређаја за детекцију светлости као што је фото цев или светлосна диода.

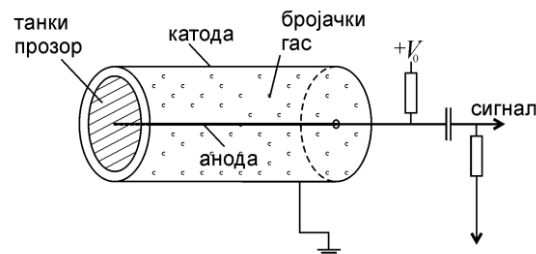
- За практичну примену треба размотрити колико добро може радити изабрани материјал, у којој величини и којој форми је доступан (важно за неорганске сцинтилаторе) и колико лако или колико тешко је са њим руковање (ломљивост, осетљивост на влагу или испарења, вакумска отпорност итд.).

70-тих година дошло је до развоја и детаљног истраживања различитих типова неорганских сцинтилатора као што су BGO, CWO, CSI, BaF₂ итд. који су у међувремену у великој мери заменили NaI. Развој у области неорганских сцинтилатора је стимулисан углавном применом у медицини као што је томографија X-зрачењем и позитрон-емисиона томографија (PET). За медицинску примену потребни су робусни, јефтине и високо ефикасни сцинтилатори са веома брзим временом одзива. Детаљан

преглед о принципима сцинтилационог бројања и карактеристикама сцинтилационих бројача дат је у [10].

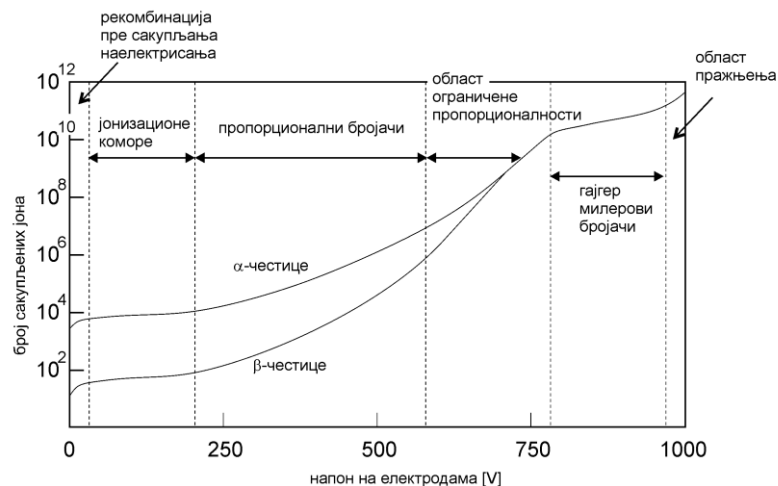
Услов да неки материјал може бити коришћен за детектовање радиоактивног зрачења није само способност конверзије зрачења у велики број носиоца наелектрисања него и могућност да се ово наелектрисање креће под дејством електричног поља. Гасови ово у потпуности задовољавају и први детектори засновани на јонизацији били су гасни детектори. Најједноставнији тип је јонизациона комора која је већ постојала као основна алатка у раним истраживањима Х-зрачења. Користећи јонизациону комору током лета балона, Hess је 1910. дао први доказ о постојању космичког зрачења.

Принцип рада гасних бројача заснива се на чињеници да радиоактивно зрачење врши јонизацију гаса, тј. ствара велики број парова електрон-јон. У комори у којој се налази гас смештене су електроде под напоном које сакупљају генерисано наелектрисање. Карактеристике гасног бројача зависе од врсте радног гаса или смеше гасова облика и величине бројача као и употребљеног напона на електродама. Принципијална шема гасног бројача је приказана на Слици 2.2.



Слика 2.2 Принципијална шема гасног бројача. Радиоактивно зрачење доспева у област где се налази гас кроз танки прозор. Сакупљање наелектрисања створеног јонизацијом врши се помоћу катоде и аноде које су на различитим потенцијалима.

Карактеристика гасног бројача јако зависи од примењеног напона на електродама што је илустровано на Слици 2.3. Уколико је напон на електродама неколико десетина волти долази до рекомбинације јона пре сакупљања јона што резултује у недовољно јаким сигналу. Са повећањем напона број сакупљених јона се повећава и практично при одређеном напону сви јони су сакупљени на електродама. Даљим повећањем напона до око 250 волти електрони још немају довољно енергије да изврше даљу јонизацију. У овој области раде јонизационе коморе које служе за детекцију гама зрачења. Даљим повећањем напона електрони све више имају енергију да врше даљу јонизацију и практично у области пропорционалних бројача, гасни бројач може служити као спектрометар. Излазни сигнал је вишеструко појачан. Даљим повећањем напона улази се у област ограничене пропорционалности где је рад врло нестабилан и нема практичну сврху. Даљим повећањем напона практично се врши лавинска јонизација и ствара се струјни импулс који не зависи од енергије упадног зрачења. Ова област позната је као Гајгер Милерова област и има широку примену у изради јефтиних бројача који служе за детектовање радиоактивног зрачења. Даљим повећањем напона практично се гас јонизује и без упадног зрачења, те ова област нема практични интерес.



Слика 2.3 Број сакупљених јона на електродама у зависности од примењеног напона на електродама према [Melissinos] .

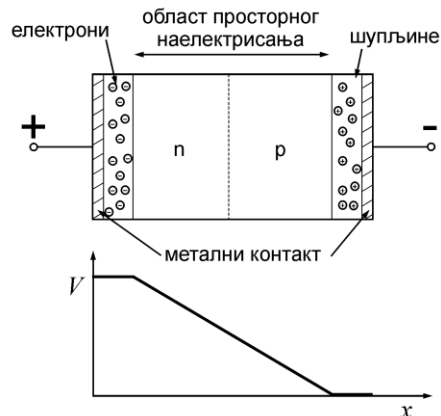
Развој гасних детектора започео је 1908. радом Радерфорда и Гајгера који су описали први цилиндрични електрични бројач за α -честице. Следило је његово побољшање 1912. увођењем сферног бројача. Даљи прогрес је постигнут 1913. кад је направљен детектор за β -честице. 1928. Гајгер и Милер увели су нови тип гасног бројача, који је имао одзив на индивидуалне догађаје индуковане зрачењем дајући јак сигнал. Овај бројач данас се назива Гајгер-Милеров бројач или популарно ГМ бројач. Бројач је даље усавршаван у 1930-им и због своје једноставности, лаког руковања и јефтиноће, нашао се веома брзо у употреби. ГМ бројач нема особину да мери енергију упадног зрачења и има веома лоше временске карактеристике (велико мртво време) па је ограничен на веома ниске брзине бројања. Међутим, за детектовање присуства радиоактивног зрачења и процену контаминације Гајгер Милерови бројачи су незаменљиви с обзиром на њихову цену и економичност.

Увођењем мрежасте јонизационе коморе (1940. Frisch), која још увек налази примену у алфа спектрометрији, настављен је развој гасних детектора. У касним 1940-им Фриш је увео трећи тип гасног детектора. Био је то пропорционални бројач који је појачавао струју изазвану пражњењем у гасу. Важна примена пропорционалних бројача је била спектрометрија нискоенергетских X-зрака. Данас се пропорционални бројачи често користе за рутинска мерења у многим нуклеарним лабораторијама за мерења алфа и бета зрачења. Гасни детектори могу давати врло прецизне резултате активности извора за одређени радиоизотоп уколико су правилно калибрисани. Детаљан опис карактеристика гасних детектора дат је у [11].

Врло брзо је схваћено да употреба чврстог детекторског медијума уместо гаса може имати велику предност у примени детекције зрачења, јер су чврста тела око 1000 пута гушћа него гасови, што имплицира да димензије чврстог детектора могу бити знатно мање од еквивалентног гасног детектора. Радови о могућности примене кристала за детекцију зрачења већ су објављени 1932. [Jafe, Van Harden]. Међутим, детектори зрачења који мере јонизацију произведену у чврстим диелектрицима и који су аналогни гасним детекторима, појавили су се тек 1950-их и у раним 1960-им. Следио је брзи развој полупроводничких детектора.

Принцип рада полупроводничког детектора приказан је на Слици 2.4. Инверзно поларизовани PN-спој има особину да сакупи парове електрон-шупљина који су генерисани упадним зрачењем унутар просторног наелектрисања. Количина генерисаних парова електрон-шупљина пропорционална је енергији упадног зрачења,

па је полупроводнички детектор погодан за спектрометрију. Полупроводнички детектори праве се у разним варијантама при чему су најчешће коришћени Si и Ge.



2.4 Инверзно поларизовани PN-спој и потенцијал дуж PN-споја. Област просторног наелектрисања осетљива је на упадно зрачење. Неактивни слој полупроводника је у области где су нагомилани главни носиоци наелектрисања (електрони у n-делу и шупљине у p-делу) јер у овој области нема пада потенцијала. Код беспримесног германијума готово целу запремину заузима неутрални германијум, док су P и N делови врло танки слојеви.

Детектори са дифузним спојем и површинском баријером нашли су широку примену у детектовању алфа честица. Процес дрифтовања јона, прво демонстриран од стране Pell 1960. омогућио је практичан метод помоћу кога се могу добијати веће активне запремине. Ови тзв. дрифтовани детектори, брзо су се раширили у нуклеарним наукама.

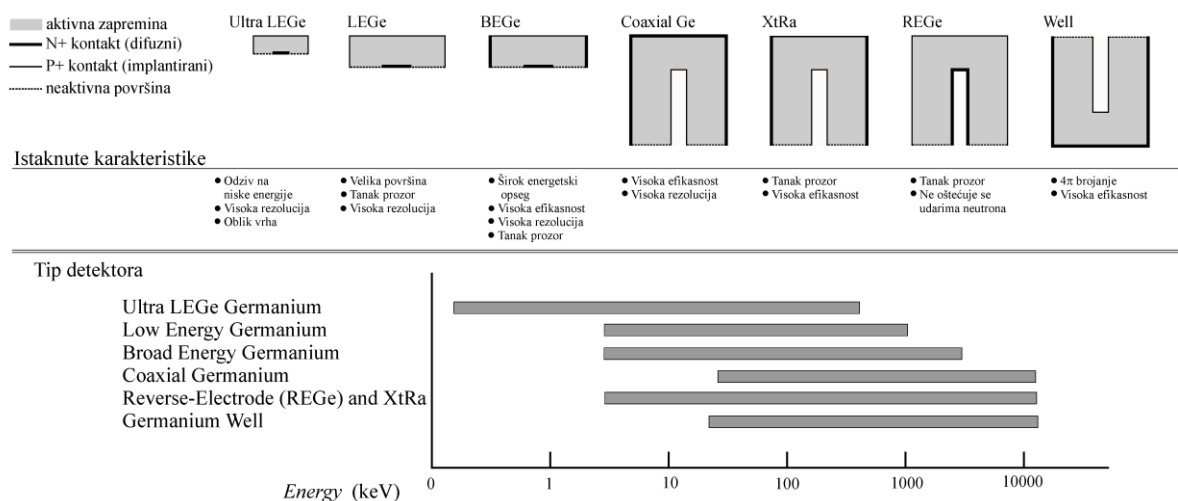
Данас силицијум као полупроводнички материјал доминира у детекторима у форми диоде које се користе за спектрометрију наелектрисаних честица, док се германијум више користи за детектовање гама зрачења. Силицијумски детектори су постали најчешћи избор за спектроскопију X-зрачења у нижем енергетском домену, као и за спектроскопију бета зрачења. Добра особине силицијума као полупроводничког материјала за израду детектора зрачења је велика доступност и рад на собним температурама. Са друге стране, недостаци силицијумских детектора су немогућност израде већих монокристалних структура и слабија резолуција.

Германијум са друге стране обезбеђује бољу резолуцију и развијени су поступци за израду релативно великих монокристалних структура, али се кристал мора хладити на ниске температуре ради минимизирања термалног шума. Производња Ge(Li) детектора захтева велике вештине, међутим када су ови детектори постали комерцијално доступни, нашли су примену широм света.

Први детектори базирани на полупроводнику германијуму били су германијум литијумски Ge(Li) детектори који су имали једно велико ограничење: он је морао да ради али и да се складишти на ниским температурама. Међутим, у току 1970. и 1972. развијен је поступак за добијање ултрачистог германијума (HPGe-*High purity Germanium*) што је омогућило производњу германијумских детектора, без компензовања литијумом. Германијумски детектори чије су нечистоће мање од једног атома примесе на 10^{10} атома германијума називају се беспримесни германијум. Ови детектори могу се излагати собним температурама без последица, али пре него што се прикључе на висок напон морају се охладити на ниске температуре.

Принцип рада германијумских детектора аналоган је јонизационим коморама. Уместо гаса, медијум је сада полупроводнички материјал. Пролаз јонизујућег зрачења креира парове електрон-шупљина (уместо електрон-јон) који се онда сакупљају

електричним пољем. Предност полупроводника је та што је средња енергија потребна за креирање пара електрон шупљина неких 10 пута мања од енергије потребне за креирање јонског пара у гасу. Због тога је количина произведене јонизације за дату енергију за ред величине већа што резултира у повећању енергетске резолуције за ред величине. Штавише, због њихове веће густине, имају већу зауставну моћ од гасних детектора. Имају компактну величину и имају веома брзо време одзива. Осим силицијума, сви полупроводници уопште захтевају хлађење на ниске температуре (77 K) пре него што почну са радом. Ово наравно подразумева додатни криогени систем који се прислања уз детектор. Један од данашњих проблема везаних за истраживања у области полупроводничких детектора, у ствари је проналажење материјала који могу радити на собним температурама. Кристални материјали су такође осетљивији на радијациона оштећења што им скраћује век трајања. Германијумски детектори највише се користе за детекцију γ -зрачења, а праве се у разним варијантама у зависности од намене: планарни, коаксијални и детектор у облику јаме (well). На Слици 2.5 приказани су разни типови детектора који су сачињени од беспримесног германијума.



Слика 2.5 Типови детектора од беспримесног германијума према произвођачу *Canberra* [12]. За сваки тип детектора истакнута је важна карактеристике и област енергије γ -зрачења у којој се примењује.

Детаљан преглед о принципима рада, развоју и примени полупроводничких детектора дат је у [13].

Развој детектора зрачења није био могућ без паралелног развоја опреме која прима сигнале са детектора и производи погодан излазни сигнал. У овом сегменту истраживања могу се издвојити неки значајни догађаји. Williams је 1931. наставио рад Greipacher-a из 1926, правећи први линеарни појачавач који може да појача сигнал у слабо јонизованој комори проласком алфа честица. 1940. направљен је фотомултипликатор. У раним 1950-им широк спектар појачавача базиран на колима са вакуум-диодима је постао доступан. Њихове перформансе су се постепено побољшавале, као на пример увођењем 1956. кола са повратном спрегом. Током касних 1950-их и у раним 1960-им кола са вакумским цевима су замењена транзисторским колима. Ово је убрзо довело до развоја преносивих детектора зрачења. Направљени су инструменти који су могли да раде на великим брзинама бројања. У току 1960-их компјутерска технологија се примењује на детекторе зрачења. Многе предности микропроцесора (централне јединице за процесирање или интегрисана кола) доводе до развоја мерне инструментације са карактеристикама које задовољавају и превазилазе потребе експеримената.

Уоште говорећи, нуклеарна инструментација може бити базирана на аналогној и дигиталној електроници или комбинацији ове две. Тенденција развоја опреме је наклоњена дигиталној обради сигнала уз што ранију дигитализацију јер се овим могу постићи квалитетнији спектрални подаци и боље перформансе на већим брзинама бројања. Детаљи о савременим електричним колима који се примењују за детекцију зрачења и аспектама будућег развоја нуклеарне електронике дати су у [14].

Детаљији историјски преглед развоја детектора за детекцију и мерење јонизационог зрачења на основу кога је написан овај преглед дат је у [15].

2.2 Дигитални системи за обраду сигнала

Зрачење које доспе у активну запремину полупроводничког детектора производи велики број парова електрон шупљина. Инверзном поларизацијом PN споја, електрично поље изазива кретање носиоца наелектрисања ка изводима који су повезани на претпојачавач. Квалитет информације о количини створеног наелектрисања зависи од претпојачавача чији је задатак да сакупи генерисано наелектрисање и претвара у користан електрични сигнал.

Конвенционални гама спектрометријски систем за обраду сигнала обухвата следеће:

- Претпојачавач који сакупља носиоце наелектрисања
- Појачавач, чија је примарна функција да обезбеди информацију о висини сигнала из претпојачавача обликовањем сигнала
- AD-конвертор који мери висину обликованог сигнала
- Меморија која смешта број догађаја.

Систем са дигиталном обрадом сигнала изводи исте функције али на дигитализованом моделу претпојачавачког сигнала. Таква дигитализација захтева екстремно брзе AD конверторе. Од свих типова AD конвертора, блиц AD конвертор је најбржи. У принципу, у форми великог броја једноканалних анализатора, комплетно мерење висине сигнала чини се скоро тренутно. Без обзира на њихову комплексност у смислу броја компоненти n -битни ADC захтева $2n-1$ индивидуалних једноканалних анализатора и потребна је већа снага у поређењу са другим типовима ADC. Главни недостатак је била ограниченост резолуције на 8 до 10 битова, што је еквивалентно 1-2k канала. Модерне варијанте блиц ADC су револуционализовали мерење висине сигнала. Они сада могу да обезбеде 14-битну резолуцију што је еквивалентно 16k спектру, на брзини бројања од 10 MHz што одговара мерењу висине сигнала сваких 0.1 μ s. Код конвенционалних AD конвертора време пораста претпојачавачког излазног сигнала је реда величине 0.5-1 μ s, што зависи од величине детектора, а време опадања је око 150-200 μ s. Модерни блиц AD конвертор због тога може мерити висину веома брзо променљивог сигнала као што је претпојачавачки сигнал. Он практично дигитализује сав део сигнала, и пораст и опадање. Уколико се располаже сигналом у дигиталној форми, онда је могуће извршити математичке операције на цифрама за даљи



Слика 2.6 Троугаони (трапезоидни) сигнал који се користи у дигиталним анализаторима.

спектрометријски процес који подразумева обликовање сигнала, *pole-zero* поништавање, враћање базне линије на нулу, одбацивање наседајућих сигнала и корекција на балистички дефицит. Све ово функције врше се дигиталном електроником.

Најзначајнији аспект дигиталне обраде сигнала у нуклеарној спектроскопији (*Digital Spectrum Analysis* (Canberra–DSA) или *Digital Signal Processing* (ORTEC–DSP)) је тај да нема ограничења у математичким операцијама које се могу извршити дигиталним путем у поређењу са математичким операцијама које се могу извршити аналогном електроником. На пример, најбољи аналогни филтер сигнала који се може постићи је семи-гаусијанског облика али би са теоријског аспекта шпицасти, троугаони и Гаусијански филтери били бољи. Дигитални филтер може емулирати све ове. У пракси комерцијално доступни дигитални системи користе троугаоно обликовање са равним врхом, као што је приказано на Слици 2.6. Сви ови системи имају неколико опција за подешавање времена пораста и опадања сигнала, као и ширину платоа (*flat top*) што дозвољава да се савршено ускладе детектор и претпојачавачки систем. Мењајући ширину платоа и нагиб, постиже се боља корекција на балистички дефицит. Произвођач ORTEC такође садржи у његовом DSP систему коло за одбацивање ниских фреквенција, што ради заједно са трапезоидним филтером, како би се отклонио електронски шум проузрокован струјама од уземљења и микрофонија.

Контроле на DSA/DSP системима су софтверске, а не ручне и веома су сличне традиционалним аналогним системима. Једина разлика која постоји јесу LLD (*Low Level Discrimination*) и ULD (*Upper Level Discrimination*) контроле. У дигиталном систему, ово се врши након дигитализације, што значи да ће електронски шум испод LLD и даље доприносити мртвом времену спектрометра иако се не појављује у спектру.

Могу се издвојити неколико предности дигиталних процесора сигнала у односу на аналогне системе:

- Боља температурска стабилност јер када је сигнал једном дигитализован следеће операције су независне од температуре
- Већа брзина бројања, због тога што дигитализација и процеси филтеровања могу бити рађени брже него код конвенционалних ADC система
- Боља стабилност резолуције на већим брзинама бројања. Аналогни системи генерално имају лошије карактеристике на већим брзинама бројања. Код дигиталних система много су мањи губици у резолуцији.
- Побољшана стабилност врха. Много је мањи помак кад се брзина бројања повећа у дигиталним системима него у аналогним.

Предности дигиталних система у смислу резолуције, броју прихваћених корисних сигнала у јединици времена, мањем шуму и могућности прилагођавања облика сигнала ради елиминисања балистичког дефицита γ -спектрометрији са германијумским детекторима коментарисани су на пример у [16]. Такође у [17,18, 19 и 20] дато је поређење карактеристика неколико дигиталних спектроскопских јединица различитих произвођача. Општи закључак који следи из ових радова је да се DSP системи препоручују за рад на већим брзинама бројања. Међутим аналогни системи према [17] показују мању осетљивост на деградацију резолуције и грешке у одброју под врхом пуне енергије референтног врха при промени времена обликовања сигнала. У том смислу, квалитет спектралних података при употреби DSP система доста зависи од подешавања облика сигнала појачавача с обзиром на брзину бројања.

Постоје ипак специјални аналогни системи који имају и боље карактеристике од дигиталних, међутим код комерцијално доступних јединица за обраду сигнала, дигитални системи имају боље карактеристике од аналогних [21].

Тенденција развоја модерних детекторских система усмерена је ка дигиталном процесирању информација при чему се врше бројне операције са сакупљеним сигнаlima. Ово подразумева, селектовање сигнала по висини и бројање у вишеканалном анализатору како би се резултати представили у форми хистограма, препознавање сигнала, испитивање наседања сигнала (*pile-up inspection*), дискриминација по времену издизања сигнала и друго.

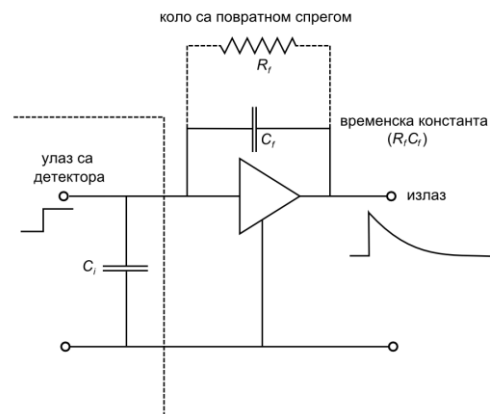
Модерне изведбе система за процесирање дигитализују сигнал са детектора у што ранијем нивоу, а то је излаз са претпојачавача. Овакви системи се називају дигитални спектрометри, на супрот аналогним који имају особину да конвертују сигнал у дигиталну форму након филтера за обликовање сигнала. Рана дигитализација нуди озбиљне предности и нове могућности у нуклеарној инструментацији. У ово спадају ниже цене, употреба трансферних функција са бољим индексом шума, одсуство флукуација и дрифтова која се јављају код аналогних кола и побољшане карактеристике на већим брзинама бројања.

На пример, у дигиталном спектрометру након што је сигнал претворен у обликовани врх дигиталним филтером, ухваћени максимум врха је одмах доступан као дигитална вредност. Може се употребити као адреса у хистограмском процесу без потребе додавања додатног закашњења. Другим речима, вишеканални анализатор, у својој комплексној форми практично нестаје.

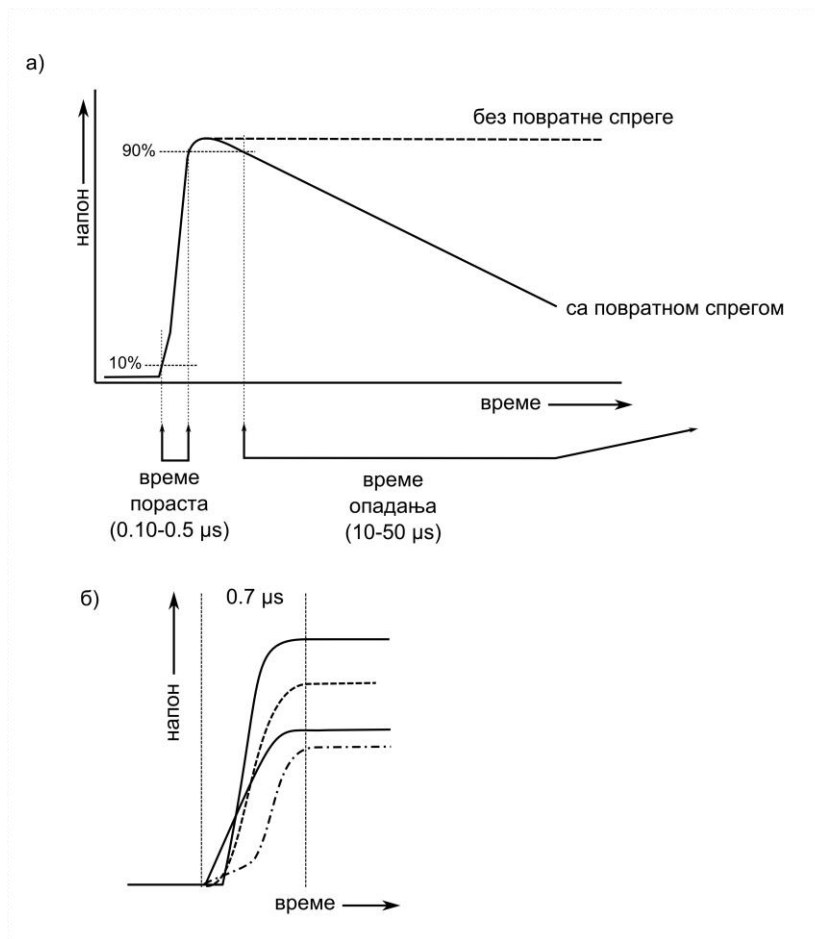
Данас, универзалне дигиталне јединице за обраду сигнала, које могу да препознају и процесуирају сигнале било са сигнал-ресет или континуалним-ресет претпојачавачима су комерцијално доступне. Оне обично укључују прилагодљиву структуру која омогућава аутоматску оптимизацију параметра система као функције улазне брзине бројања, нестабилност базне линије, фонски шум итд. У пракси ова погодност долази обично на цену додавања неколико eV на енергетску резолуцију. Кориснику је остављено да обезбеди перфектан спој претпојачавача са дигиталним процесором сигнала елиминишући паразитне токове и да изврши фина подешавања биаса, времена интеграције, појачања, границе дискриминатора и тако даље, ако мерења захтевају добру тачност.

2.2.1 Појачавачи са повратном спрегом и отпорником

Шематска поставка конвенционалног претпојачавача који сакупља наелектрисање и генерише сигнал приказан је на Слици 2.7. Наелектрисање из детектора се сакупља на кондензатору C_f ефективно интегрално детекторски сигнал наелектрисања. Како се наелектрисање прикупља, напон на кондензатору расте, производећи степенасту промену напона. Без даљег дејства, улазни сигнал на улазу би остао исти. Да би се омогућило пражњење кондензатора и припрема улаза за следећи сигнал, велики отпорник R_f , који се назива повратни отпорник, повезан је паралелно са кондензатором. Овај тип претпојачавача осим кондензатора има отпорник у повратној спрези (*resistive feedback amplifier*).

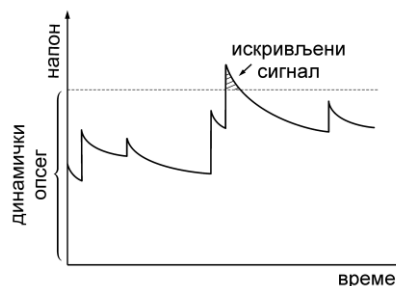


Слика 2.7 Шема претпојачавача са повратном спрегом и отпорником.



Слика 2.8 а) Облик сигнала који генерише претпојачавач са повратном спрегом. Сигнал је окарактерисан кратким временом пораста од 100-500ns и дугим временом опадања, типично 50-150 μs. б) типичан облик водеће ивице сигнала.

Излазни сигнал је карактерисан брзим временом пораста, 100 до 700 ns, што је одређено детекторском карактеристиком сакупљања наелектрисања, и дугим временом распада (неколико десетина микросекунди) што је одређено временском константом повратног кола, $T_f = R_f C_f$. Облик излазног сигнала је приказан на Слици 2.8.



Слика 2.9 Наседање сигнала на претпојачавачу са повратном спрегом.

Детаљан облик водеће ивице сигнала ће зависити од позиције интеракције унутар детектора. Средње време сакупљања зависи од величине детектора, око 300-400 ns је типично за германијумски детектор релативне ефикасности 50%. Ова информација је садржана у претпојачавачком сигналу у делу пораста сигнала. У идеалном случају, висина сигнала је пропорционална енергији гама зрака која се апсорбује у детектору.

Претпојачавач који има отпорник у повратној спрези има два главна ограничења:

-услед дугог времена опадања сигнала, осим у случају веома ниских брзина бројања, сукцесивни сигнали ће наредати један на други (Слика 2.9). Ово је неизбежно али нема значајне последице јер појачавач може обезбедити информацију о висини сигнала од сваке ивице пораста сигнала. Још је важније да на великим брзинама бројања средњи ниво DC напона на улазу ће расти до вредности до које је обезбеђена линеарност између наелектрисања и висине сигнала што се назива динамички опсег. Коначно, на великим брзинама бројања, DC напон ће расти до вредности која је близу напона напајања претпојачавача (24V), на којој ће транзистори унутар претпојачавача престати да раде. То ће закључати коло и неће бити сигнала на излазу. Ови услови су постигнути кад је производ детекторске струје и отпорника повратне спреге већи од динамичког опсега. Најмодернији спектрометарски претпојачавачи обезбеђују видљиву индикацију превелике брзине бројања у форми LED индикатора који је формиран у кућишту претпојачавача. Индикатор почиње да светли када је улазна брзина бројања 75% вредности од максималне.

- Друго ограничење претпојачавача са повратном спрегом са отпорником је да отпорник R_f има сопствени шум (Џонсонов шум) што може бити велики проблем са малим сигнаlima. Да би се минимизирао проблем слабих сигнала одабира се велика вредност отпорности R_f . Ово са друге стране имплицира велику константу распада односно дуго време опадања сигнала, што уводи проблем наседања сигнала. У принципу било би могуће редуковати константу распада смањујући C_f , али тиме би се утицало на линеарност претпојачавача. Међутим постоји област за редуковање вредности R_f , како би се на цену резолуције добиле боље перформансе на већим брзинама бројања.

Детаљна теорија дигиталне обраде сигнала која се уопште користи у нуклеарној електроници је дата у [14] док је специјална примена дигиталне електронике у гама спектроскопији дата у [21].

3 Технике мерења активности

Од открића радиоактивности до данас развијају се и усавршавају технике за квантификацију броја емитованог зрачења у јединици времена из неког радиоактивног извора. Принципијално постоје три различите технике мерења апсолутне активности: мерење масе узорка које подразумева претходна релативна мерења емитованог зрачења ради одређивања периода полураспада, бројање појединачних распада путем детекције емитованог зрачења са познатом ефикасношћу и коинцидентно бројање које се заснива на симултаног детекцији две честице емитоване при једном распаду. Примарне или апсолутне технике активности подразумевају мерења која се базирају на употреби само временског стандарда али не и других мерења активности. Реализацијом апсолутне технике мерења активности врши се еталонирање јединице Бекерел [5].

3.1 Јединица радиоактивности и дефиниција активности

За квантификацију радиоактивности у почетку нису коришћене јединице које се данас користе. У првим мерењима Марија Кири је одређивала “Радијантну активност” преко струје кроз јонизациону комору у којој је радиоактивна супстанца била нанешена на једну електроду. Струја која је била произведена α -честицама које се емитују из слоја површине 1cm^2 на који је нанешен уранијум оксид (U_3O_8 ; око 20 mg/cm^2) коришћена је као јединица. Ова јединица касније се називала “уранијумска јединица” која одговара струји од $5,78 \times 10^{-13}\text{ A}$.

Открића других радиоактивних језгара као и тенденција наглог развоја истраживања у области примењене радиоактивности у целом свету намеће потребу за дефинисање генерално прихваћеног радиоактивног стандарда. Када је произведена већа количина радијума која је постала доступна, Интернационална Комисија за Стандардизацију Радијума, основана 1910, дала је задатак Марији Кири да припреми примарни стандард радијума. Годину дана касније презентовала је свој стандард у форми $22,99\text{ mg}$ чистог радијум-хлорида запечаћеног у танку стаклену цев. У исто време комисија је увела “Кири” као јединицу за радон и дала дефиницију: Један Кири радона је количина радона у равнотежи са једним грамом радијума. Касније је ова јединица уопштена за све радиоактивне потомке радијума и било који радиоактивни елемент.

Међутим, за било који радиоактивни елемент неопходна је била нова дефиниција. Еквивалент 1 mg радијума је био дефинисан као она количина радиоактивног елемента за које је број дезинтеграције атома у једној секунди исти као за 1 mg радијума. Цифра од $3,7 \times 10^{10}$ α -честица s^{-1} је била предложена као еквивалент за 1 g радијума. Дефиниција јединице за радиоактивност је била везана за јединицу масе. Ово се одржало до 1950. године када је јединица Кири редефинисана: Кири је јединица радиоактивности било ког изотопа (више не елемента) у којем је број дезинтеграција у секунди $3,700 \times 10^{10}$. Од тада 1 Ci (Један Кири) није више идентичан са 1 g радијума

(разлика је око 1%), већ је то број дезинтеграција неког језга у јединици времена. За брзину трансформације или брзину дезинтеграције препоручен је термин “Активност”.

При успостављању Интернационалног Система Јединица (SI) 1960. године јединица активности више није могла бити Кири, јер у овом систему изведене јединице морају бити узајамно повезане правилима множења или дељења без примене било каквог мултипликационог фактора (као $3,700 \times 10^{10}$ у случају дефиниције јединице Кири) различитог од 1. Због практичних разлога јединица Кири се одржала ван SI система, а реципрочна секунда (s^{-1}) је постала јединица SI система активности којој је 1975. године дато име Бекерел.

Сходно редефинисању јединице активности уводи се и појам активности: *Активност одређене количине радиоактивних језгара у одређеном енергетском стању у датом временском тренутку је количник dN кроз dt , где је dN очекивана вредност броја спонтаних нуклеарних прелаза из тог енергетског стања у временском интервалу dt . $A = dN/dt$. [5].*

3.2 Метод мерењем масе

Веза између активности и масе одржала се за неке методе мерења активности дугоживећих радиоизотопа. Маса m је директно повезана са бројем атома N у узорку преко релације:

$$m = A_r \frac{N}{N_A}, \quad (3.2.1)$$

где је A_r релативна атомска маса и N_A је Авогадров број. У дефиницији активности диференцијални члан dN представља број радиоактивних језгара која се трансформишу у времену између t и $t+dt$, тј. $dN = N(t) - N(t+dt)$. Активност је пропорционална броју радиоактивних атома у узорку:

$$A = \lambda N, \quad (3.2.2)$$

где се константа пропорционалности λ назива константа распада, а једнака је $\ln 2 / T_{1/2}$, где је $T_{1/2}$ период полураспада. Комбинацијом једначина (3.2.1) и (3.2.2) добијамо:

$$A = \lambda m \frac{N_A}{A_r} \quad (3.2.3)$$

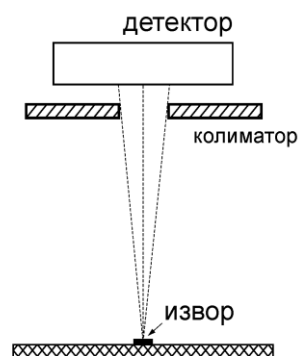
У овом примеру маса m је маса нераспаднутих језгара, која за дугоживеће радиоизотопе може бити врло блиска маси узорка. Због тога је метод одређивања активности из масе ограничен на дугоживеће природне радиоизотопе као што су ^{235}U , ^{238}U , ^{226}Ra , ^{232}Th , или ^{40}K . Несигурности за N_A и A_r су занемарљиве, па је релативна несигурност активности детерминисана несигурношћу периода полураспада која износи око 0,1% за ^{235}U и ^{238}U , и око 0,5% за ^{232}Th и ^{40}K као и несигурношћу одређивања масе нераспаднутих језгара. Ако је материјал у хемијском једињењу, мора се размотрити и масени удео.

Алтернатива за одређивање активности мерењем масе је пребројавањем радиоактивних атома N и одређивање активности из (3.2.2). Две такве технике су акцелераторска масена спектрометрија и резонантна јонизациона спектрометрија која се све више користи за одређивање малих количина дугоживећих радиоизотопа у околини. За одређивање старости узорака (датирање) методом одређивања активности ^{14}C најпрецизнија техника је управо пребројавање активних језгара техником акцелераторске масене спектрометрије [22].

Метод мерењем масе, тј. пребројавањем активних језгара не може се сматрати потпуно апсолутном методом. Било да се активност добија из масе m или броја радиоактивних атома N , потребно је познавати период полураспада, што подразумева претходна релативна мерења са употребом временског стандарда. Дакле мора се одредити присутност нечистоћа, што подразумева спектроскопска мерења. Међутим, сва мерења која претходе не морају нужно подразумевати калибрацију ефикасности, јер за одређивање периода полураспада треба располагати информацијом о брзини опадања активности али не и о апсолутној активности. Међутим, за дугоживеће радиоизотопе који су поменути, период полураспада се баш добија из (3.2.2) мерењем активности A и N , па се ове методе строго говорећи ипак сврставају у релативне (индиректне) методе за мерење активности.

3.3 Методе 100% ефикасности

Методе високе ефикасности подразумевају детекцију свих распада у датом извору или квантификацију емитованих честица у одређени просторни угао за коначни интервал времена. Типични детектори који се користе за оваква мерења су пропорционални бројачи, течни сцинтилатори, гасни бројачи, детектори у облику јаме и сендвич конфигурације без детекторског прозора [4]. Принципијална шема експерименталне поставке за бројање на одређеном просторном углу је приказана на Слици 3.1.

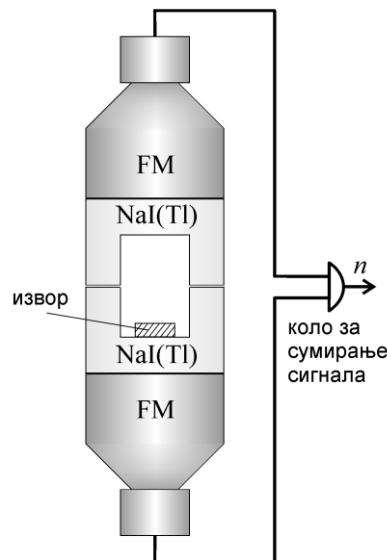


Слика 3.1. Принципијална шема експерименталне поставке за мерење активности на дефинисаном просторном углу. Положај активног дела извора и колимактора мора бити прецизно измерен.

Бројање у 4π или 2π геометрији изводи се за β^- и γ -емитере али и за α -емитере за које се компензује ефекат апсорпције детектовањем γ -фотона који прате распад. На Слици 3.2 је приказана варијанта 4π геометрије која је реализована помоћу два сцинтилациона детектора у облику јаме који су повезани на коло за сумирање сигнала. Ова техника је погодна за изotope који приликом распада емитују више фотона јер и поред велике запремине кристала ефикасност не може бити стопроцентна. Због тога потребно је израчунати ефикасност детекције фотона одговарајућих енергија, што у случају једноставне геометрије доноси врло малу мерну несигурност. Ефикасност која се постиже је већа од 95%.

Радиоактивни изотопи који се налазе у гасовитој фази мере се у пропорционалним бројачима при чему се они мешају са бројачким гасом. Уопште је наелектрисане честице могуће детектовати са скоро 100% ефикасношћу, али у већини случајева потребно је размотрити и квантификовати ефекат самоапсорпције и ефекат зидова. У том смислу β^- -емитери фаворизују 4π геометрију јер у 2π геометрији и при одређеном просторном углу долази до повратног расејања или расејања на дијафрагми

која дефинише просторни угао. Поправке на ефекте апсорпције и расејања врше се помоћу посебних експеримената, теоретским израчунавањима и Monte Carlo симулацијама.



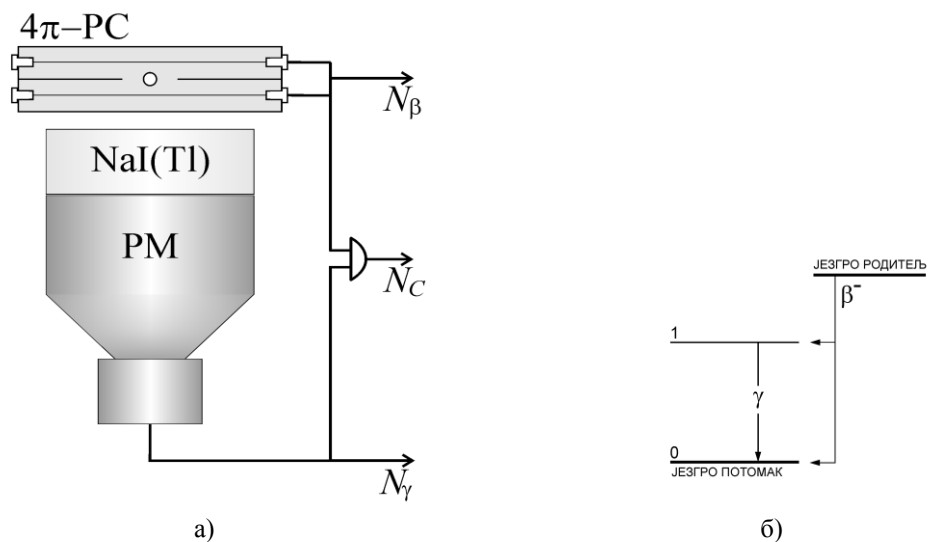
Слика 3.2 Принципјална шема експерименталне поставке за мерење активности γ -емитера у 4π геометрији. Извор се налази унутар детектора.

Бројање на одређеном просторном углу где се подразумева изотропна расподела емитованих честица може бити врло прецизна техника мерења апсолутне активности. Бројање α -честица једна је од најтачнијих метода за примарно одређивање активности α -емитера са релативном грешком која за велики број изотопа износи око 0.1%. Оваква мерења захтевају изузетну контролу геометријских услова где је за распрострањене узорке ипак потребно извршити одређене корекције на расподелу радиоактивности у самом узорку и ефекте самоапсорпције.

3.4 Коинцидентна техника мерења активности

Проблем одређивања апсолутне активности израчунавањем ефикасности детекције емитованих честица превазиђен је увођењем коинцидентне технике. Прве експерименте где се коинцидентни догађаји користе за одређивање ефикасности детекције извели су Geiger и Werner [23]. У наредном периоду након развоја електронике за регистровање коинцидентних догађаја следи све већа примена коинцидентне технике у разним областима нуклеарне физике [24]. Von Baeyer 1935. [25] је први применио коинцидентни метод за одређивање активности извора на основу симултане емисије два радиоактивна зрака која се емитују приликом трансформације језгара. Детаљан преглед раног развоја коинцидентне технике дат је у [26]. Данас су принципи мерења коинцидентном техником у нуклеарној физици добро дефинисани (видети на пример [27]). С обзиром на могућност примене на велики број радиоизотопа и тачност методе, коинцидентна техника је прихваћена као стандард за мерење апсолутне активности. Коинцидентна техника се користи и усавршава у практично свим лабораторијама где се производе стандардни извор или постоји потреба за стандардизацијом и употребом калибрационих радиоактивних извора високе тачности.

Стандардна или конвенционална конфигурација коинцидентне технике за мерење апсолутне активности подразумева употребу два детектора од којих је у идеалном случају сваки осетљив само на један тип зрачења [2]. Детектори су повезани на коинцидентно коло чији је задатак да региструје догађај симултане детекције две честице различитог типа. У идеалном случају, детектор наелектрисаних честица опкољава цео извор, при чему се ефекат угаоних корелација честица различитог типа поништава. За детекцију наелектрисаних честица може служити гасни бројач или течни сцинтилатор. Детектор за гама зрачење може бити полупроводнички или сцинтилациони са заштитом како не би детектовао наелектрисане честице. Принципијална шема експерименталне поставке где се за детекцију наелектрисаних честица користи пропорционални бројач, а за детекцију гама зрачења сцинтилациони, приказана је на Слици 3.3.а.



Слика 3.3 а) Експериментална поставка коинцидентне технике са два детектора. За детекцију наелектрисаних честица користи се пропорционални бројач у 4π геометрији, а за детектовање γ -зрачења сцинтилациони NaI детектор. **б)** Проста шема распада неког радиоизотопа која због постојања вероватноће емисије γ -зрачења при распаду омогућава примену коинцидентне технике.

За просту шему распада приказаној на Слици 3.3.б, у којој је β -распад праћен могућом емисијом једног фотона, број регистрованих догађаја у јединици времена у каналу који одговара β -детектору је:

$$N_{\beta} = A\varepsilon_{\beta}, \quad (3.4.1)$$

где је A активност узорка и ε_{β} ефикасност детекције бета-честица.

У гама детектору, број регистрованих догађаја у јединици времена је:

$$N_{\gamma} = Ap_{\gamma}\varepsilon_{\gamma}, \quad (3.4.2)$$

где је p_{γ} вероватноћа за емисију гама-фотона, а ε_{γ} вероватноћа за детекцију гама фотона (потпуна или делимична апсорпција).

У идеалном случају, број коинцидентних догађаја које региструје одговарајуће коло је:

$$N_c = A p_\gamma \varepsilon_\gamma \varepsilon_\beta, \quad (3.4.3)$$

при чему уколико је регистрован коинцидентни догађај, не долази до губитка одброја у регуларним каналима.

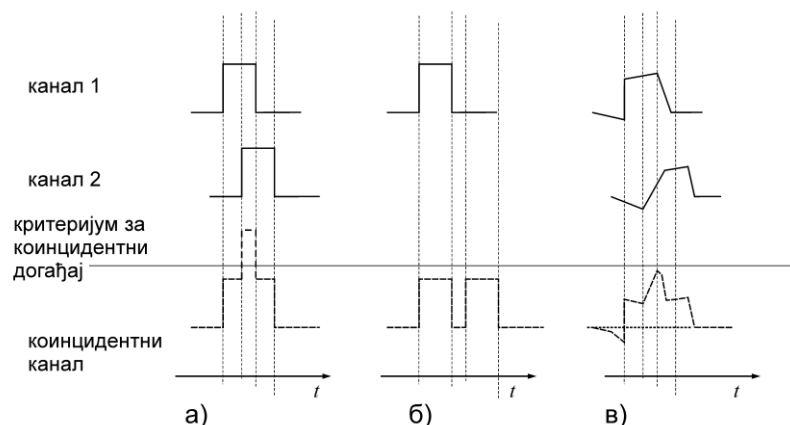
Из једначина (3.4.1), (3.4.2) и (3.4.3) могу се елиминисати непознате ефикасности чиме се добија формула за одређивање активности

$$A = \frac{N_\beta N_\gamma}{N_c}. \quad (3.4.4)$$

Фундаментална важност релације (3.4.4) је принципијална могућност њене примене за апсолутно мерење активности β -емитера чији распад може бити праћен емисијом γ -или X-фотонима, без познавања ефикасности детектора. Метод је применљив и на α -емитере чији распад може бити праћен емисијом γ - или X-фотонима [28].

Формула (3.4.4) и принцип коинцидентног мерења ипак има извесна ограничења у смислу експерименталних услова и шеме распада. При реализацији експеримента, детектори не могу бити 100% осетљиви само на један тип зрачења. Могућност комптоновог расејања може допринети лажном коинцидентном догађају. Коинцидентно коло не може се понашати идеално тако да извесан број коинцидентних догађаја не одговара стварним коинциденцијама [29].

На Слици 3.4 је приказан случај идеалног и неидеалног понашања коинцидентног кола. У идеалном случају сигнали који пристижу на коинцидентно коло имају правоугаони облик и исту дужину трајања τ . Уколико су детектори временски усаглашени, сигнали у првом и другом каналу који се преклапају унутар времена резолуције коинцидентног кола 2τ биће забележени као коинцидентни догађаји. Ако детектори нису временски усаглашени, тј. постоји временска разлика која је већа од τ (време трајања сигнала) између сигнала који су се догодили у истом тренутку, коинцидентни догађај неће бити регистрован. Неправилан облик сигнала уводи додатни проблем где у зависности од начина преклапања може доћи до губитка у одброју коинцидентних догађаја.



Слика 3.4 Принципијални проблеми коинцидентног бројања. а) Идеални случај где сигнали који се доводе на коинцидентно коло имају правоугаони облик, и преклапање унутар времена резолуције 2τ увек даје одброј у коинцидентном каналу. б) сигнали имају идеални облик, али временски коло није усаглашено, тј. постоји извесно кашњење сигнала у другом каналу те се коинцидентни догађај не региструје. в) сигнали нису идеалног облика што узрокује да сумарни сигнал не превазилази критеријум за регистровање коинцидентног догађаја.

Уколико се активност мери на већим брзинама бројања неопходне су корекције на случајне коинциденције [30]. На пример, ако се десе два распада унутар времена τ , постоји могућност да се од једног језгра детектује наелектрисана честица, а од другог γ -фотон. У том случају регистрована је случајна коинциденција, па се број регистрованих коинциденција мора кориговати на случајне догађаје.

С обзиром да је правац емисије γ -фотона спрегнут са правцем емисије наелектрисане честице (ефекат угаоних корелација) уколико β - или α -бројач не опкољава цео извор, потребне су рачунске корекције. У пракси, ефекат угаоних корелација се поништава постављањем извора унутар бројача наелектрисаних честица (4 π -геометрија). Међутим, уколико апсорпција унутар извора није изотропна, ефекат угаоних корелација може утицати на резултате мерења.

Формула (3.4.4) није применљива за распрострањене узорке јер ефикасност зависи од положаја самог емитера унутар извора. Само у специјалном случају када је испуњен услов да је производ средњих ефикасности β и γ канала једнак средњој вредности производа ефикасности β и γ канала [29]:

$$\bar{\varepsilon}_{\beta} \cdot \bar{\varepsilon}_{\gamma} = \overline{\varepsilon_{\beta} \cdot \varepsilon_{\gamma}}, \quad (3.4.5)$$

Формула (3.4.4) је егзактна. Следи доказ.

Ако су ефикасности различите, одброј у β -каналу је

$$N_{\beta} = a \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\beta i}, \quad (3.4.6)$$

где је a активност елементарног извора унутар распрострањеног узорка који је издељен на n -извора; $\varepsilon_{\beta i}$ је ефикасност за i -ти извор. Слично, за гама канал важи:

$$N_{\gamma} = ap_{\gamma} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\gamma i} \quad (3.4.7)$$

где је $\varepsilon_{\gamma i}$ ефикасност за i -ти извор. Одброј у коинцидентном каналу је:

$$N_c = ap_{\gamma} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\beta i} \varepsilon_{\gamma i}. \quad (3.4.8)$$

Формуле (3.4.6), (3.4.7) и (3.4.8) могу се написати и на другачији начин ако се узму у обзир дефиниције средњих вредности:

$$\bar{\varepsilon}_{\beta} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\beta i}, \quad \bar{\varepsilon}_{\gamma} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\gamma i} \quad \text{и} \quad \overline{\varepsilon_{\beta} \cdot \varepsilon_{\gamma}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_{\beta i} \cdot \varepsilon_{\gamma i}, \quad (3.4.9)$$

при чему је укупна активност извора

$$A = a \cdot n. \quad (3.4.10)$$

Уколико је задовољен услов (3.4.5), јасно је да се из (3.4.6), (3.4.7) и (3.4.8) добија (3.4.4). Међутим, у пракси је услов (3.4.5) врло ретко задовољен, па је за мерење

активности коинцидентном техником потребно располагати изворима веома малих димензија, тј. у тачкастој геометрији.

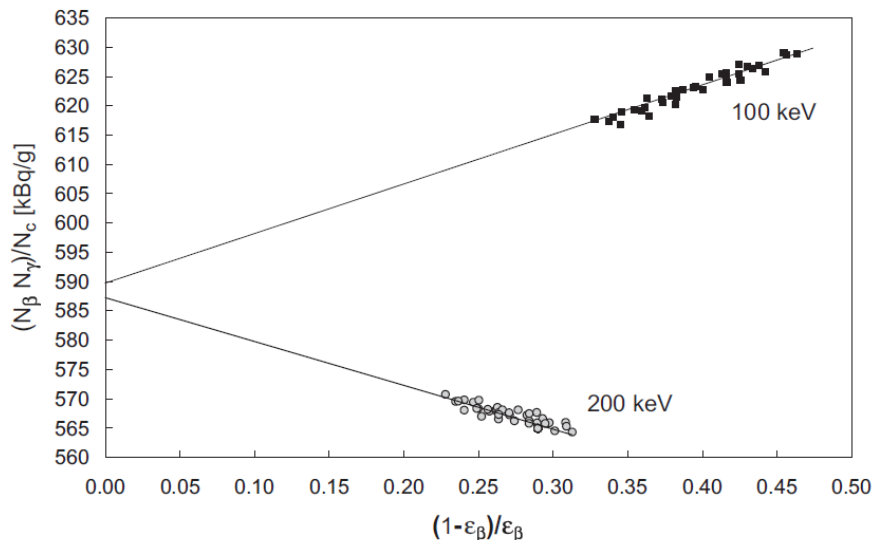
За радиоизотопе са сложеном шемом распада (могућност емисије више гама кваната и емисија конверзионих електрона), коинцидентни метод се практично своди на метод 100% ефикасности. У овом случају не примењује се директно Формула (3.4.4). Претпоставља се да је постигнута ефикасност наелектрисаних честица 100%, али због доњег нивоа дискриминатора (LLD) није могуће детектовати све наелектрисане честице. Израз који се узима као независна променљива и која зависи од ефикасности наелектрисаних честица је дата преко

$$N_{\gamma} / N_c - 1. \quad (3.4.11)$$

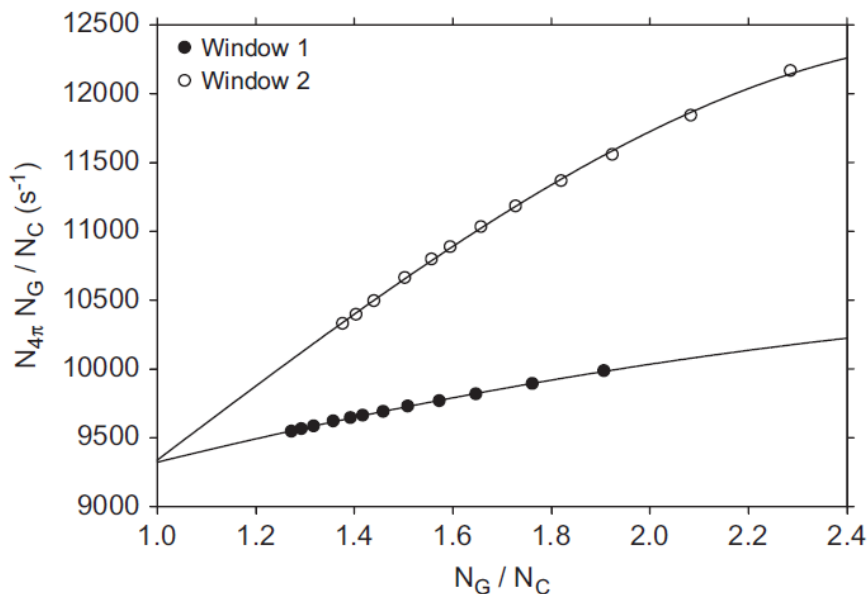
За просту шему распада као на Слици 3.3.б Формула (3.4.11) изражена преко ефикасности има облик

$$1 / \varepsilon_{\beta} - 1. \quad (3.4.12)$$

Мењање ефикасности наелектрисаних честица ε_{β} се практично врши уметањем апсорбера различитих дебљина или мењањем нивоа дискриминатора у β -каналу. За различите вредности доњег нивоа дискриминатора или дебљине апсорбера мери се одброј у каналу гама фотона, у каналу наелектрисаних честица и коинцидентном каналу. За ове податке, црта се график активности која се рачуна помоћу (3.4.4) у зависности од (3.4.11). Екстраполацијом фита који је у идеалном случају линеаран, на вредност где је $\varepsilon_{\beta} = 1$, добија се активност узорка. Пример експерименталних резултата са добром линеарношћу је приказан на Слици 3.5, док је на Слици 3.6. приказан пример где експериментални резултати не могу бити фитовани линеарном функцијом.



Слика 3.5 Резултати мерења активности извора ^{152}Eu према [7]. Експериментални подаци су добијени мењањем ефикасности помоћу апсорбера за два различита нивоа дискриминатора β -канала.



Слика 3.6 Резултати мерења активности извора ^{133}Ba према [31]. Експериментални подаци су добијени мењањем ефикасности помоћу апсорбера за два различита нивоа дискриминатора γ -канала.

Сложеност концидентне технике која подразумева употребу два детектора огледа се у експерименталним условима које је потребно обезбедити ради постизања што боље тачности. У случају сложених радиоизотопа, потребно је обезбедити што бољу линеарност функције $A(N_\gamma / N_c - 1)$, а затим вршити екстраполацију. Боља линеарност функције може се постићи подешавањем области енергије која се може детектовати у γ -каналу. Поред свих проблема око подешавања електричних кола и детекторских система, ипак једноставност технике лежи у чињеници да се метод не заснива на обради спектралних података, већ само на бројању одговарајућих догађаја у β , γ и коинцидентном каналу.

Међутим, прилагођавање технике с обзиром на сложеност шеме распада не огледа се само у броју путања којим се врши деексцитација потомка а треба их детаљно разматрати, енергији емитованих фотона и интерној конверзији, већ и евентуалном постојању метастабилних стања. Уколико су у шеми распада присутна метастабилна стања тачни резултати добијају се само уколико је енергетски опсег за детекцију γ -зрачења правилно подешен и уколико се познају вероватноће за деексцитацију у одређене нивое [32].

Појавом брзих дигиталних система за обраду података и рачунарских система са великим меморијским капацитетом, коинцидентна техника се може модификовати. Уколико се сними временска дистрибуција сигнала β и γ -канала, нема потребе за увођењем коинцидентног кола. Подаци се складиште у меморију рачунара, а затим се према произвољно одређеном времену резолуције класификују коинцидентни догађаји. Park и сарадници [33] су развили ову технику и упоређивали резултате конвенцијалне и дигиталне технике која подразумева снимање временске дистрибуције сигнала (дводимензионална коинцидентна техника). Њихова мерења су показала да се резултати добијени конвенцијалном и коинцидентном техником разликују за мање од 0.5%. Једино ограничење које се јавља у дигиталној техници која подразумева снимање временске расподеле сигнала јесте брзина бројања. Развој ове технике у адекватну замену за конвенционалну коинцидентну технику још је у току [34].

Коинцидентна техника са два детектора у било којој варијанти иако спада у најтачније методе захтева доста лабораторијске праксе. За сложене радиоизотопе заснива се на екстраполацији података која подразумева 100% ефикасност детектора за β -честице.

Без обзира на све тешкоће које се јављају при реализацији коинцидентне технике на два детектора постигнуте тачности су врло често испод 1% чиме се ова метода сврстава у најтачније методе за мерење апсолутне активности. Извор ^{60}Co у тачкастој геометрији се мери са грешком од 0.1%, а усаглашеност методе између различитих лабораторија је око 0.2% [35]. Активност извора ^{133}Ba мерена коинцидентном техником где је бројач наелектрисаних честица течни сцинтилатор добија се са мерном несигурношћу од 0.244% при чему је усаглашеност резултата са другим лабораторијама у оквиру 0.5% [31]. Активност тачкастих извора ^{152}Eu одређеном коинцидентном техником добија се са мерном несигурношћу са мањом од 0.3% [7, 36]. Усаглашеност резултата различитих варијанти коинцидентне технике и различитих лабораторија је око 0.5% [8].

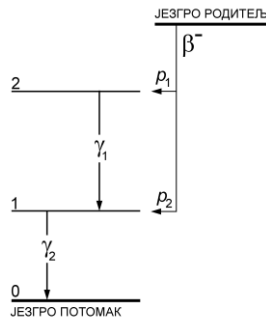
Принцип коинцидентног мерења за радиоизотопе са једноставном шемом распада врло је моћан јер не захтева познавање ефикасности детекције, а постигнуте тачности обезбеђују квалитетно еталонирање примарних стандарда. Извори калибрисани овом техником често се користе као примарни стандарди за производњу секундарних стандарда као и за калибрацију γ -спектрометра, Черенковљевих детектора итд. Међутим мерне несигурности коинцидентне методе са два детектора нису потпуно схваћене због нелинеарности које се јављају у екстраполацијама и неиделаних понашања детектора [37]. Употреба течних сцинтилатора за детектовање наелектрисаних честица у коинцидентној техници наилази на проблем јер течни сцинтилатор могу активирати комптонски расејани фотони са нижом енергијом. Као резултат добијају се већа неслагања међу резултатима добијеним коинцидентном техником када се користе течни сцинтилатори и гасни детектори наелектрисаних честица [7]. Детаљнија анализа о карактеристикама течних сцинтилатора за мерење апсолутне активности коинцидентном техником и калибрацији течних сцинтилатора дата је у [38].

Веома корисна чињеница је да коинцидентни принцип мерења може бити реализован и на једном детектору уколико се радиоактивни изотоп распада путем емисије фотона у каскади [2, 39, 40, 41, 42, 43]. У смислу експерименталне поставке техника на једном детектору је много једноставнија јер не захтева употребу два детектора и коинцидентног кола.

4 Метода сумарног врха или фотон-фотон коинцидентна техника на једном спектрометру

Ако се радиоизотоп распада уз могућност емисије два фотона у каскади, у γ -спектру може бити присутан такозвани сумарни врх који одговара потпуној апсорпцији ова два фотона, а налази се на енергији једнакој збиру енергија појединачних фотона. Како је информација о коинцидентним догађајима управо садржана у сумарном врху, нема потребе за коришћењем коинцидентног кола, чиме је експериментална поставка знатно поједностављена. У практичном смислу, коинцидентни метод са једним детектором се може врло лако реализовати у лабораторији за мерење ниских радиоактивности која је опремљена гама спектрометром.

Принцип методе апсолутног мерења активности помоћу једног спектрометра заснива се уствари на ефекту правог коинцидентног сумирања [44, 45]. Метод су први реализовали Brinkman и сарадници [39] при чему су мерили активност радиоизотопа са једноставном шемом распада ^{60}Co , ^{46}Sr , ^{22}Na и ^{18}F на сцинтилационом NaI спектрометру.



Слика 4.1 Произвольна шема распада при чему емисија β -честице може бити праћена емисијом два фотона у каскади.

У циљу дефинисања методе према оригиналном раду Brinkman и сарадника размотрићемо γ -спектар радиоизотопа чија је шема распада приказана на Сlici 4.1. Према приказаној шеми нема директног распада у основно стање потомка, тако да је распад праћен емисијом једног фотона или два фотона у каскади. Претпостављамо да су средња времена живота побуђених стања потомка много мања од времена резолуције спектрометра и периода полураспада. Ради једноставности, уводимо и претпоставку да нема интерне конверзије. Са аспекта експерименталне поставке, разматрамо случај 2π или 4π геометрије при чему се ефекат угаоних корелација поништава. При описаним условима, брзина бројања у врху пуне енергије γ_1 фотона је

$$N_1 = A\varepsilon_1 p_1 (1 - \eta_2), \quad (4.1)$$

где је A активност узорка, ε_1 ефикасност врха пуне енергије за γ_1 фотон, η_2 је тотална ефикасност за други фотон (γ_2) емитован у каскади и p_1 је вероватноћа за распад путем каскадне емисије фотона.

Брзина бројања у врху пуне енергије који одговара γ_2 фотону је:

$$N_2 = A\varepsilon_2(p_1(1-\eta_1) + p_2) \quad (4.2)$$

где је ε_2 ефикасност врха пуне енергије за γ_2 фотон, η_1 тотална ефикасност за γ_1 фотон; p_2 је вероватноћа за распад путем емисије једног фотона.

Брзина бројања у сумарном врху који се јавља на енергији једнакој збиру енергија γ_1 и γ_2 фотона је

$$N_\Sigma = Ap_1\varepsilon_1\varepsilon_2. \quad (4.3)$$

Тотална брзина бројања је

$$N_T = A(p_1(\eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2) + p_2\eta_2). \quad (4.4)$$

Ако према шеми приказаној на Слици 4.1 претпоставимо да нема директног распада у основно стање потомка, распад у прво или друго ексцитовано стање потомка је сигуран догађај:

$$p_1 + p_2 = 1 \quad (4.5)$$

Сада из једначина (4.1), (4.2), (4.3) и (4.4) помоћу услова (4.5), можемо елиминисати ефикасности врхова пуне енергије и тоталне ефикасности, при чему се добија формула за мерење активности из спектралних података

$$A = N_T + \frac{N_1N_2}{N_\Sigma}. \quad (4.6)$$

За разлику од коинцидентне технике са два детектора, у формули (4.6) фигурише тотална брзина бројања N_T , јер регистровање коинцидентног догађаја подразумева губитак у регуларним врховима, што није случај код коинцидентне технике са два детектора. Тотална брзина бројања је број детектованих распада у јединици времена. С обзиром на то, однос производа брзина бројања у врховима пуне енергије према брзини бројања у коинцидентном врху претставља број не-детектованих распада у јединици времена. Збир броја детектованих и недетектованих распада даје укупну активност.

При извођењу формуле (4.6) нису узете у обзир случајне коинциденције (допринос у сумарном врху и губици у врховима пуне енергије и сумарном врху) и ефекти угаоних корелација. Поправке на случајне коинциденције које се манифестују наседањем сигнала, могу се занемарити уколико је средње време између два узастопна догађаја у детектору (детектована каскада или појединачни фотон) много веће од времена резолуције спектрометра. Такође уколико је тачкасти извор стављен на сам кристал детектора (2 π -геометрија) ефекти угаоних корелација се поништавају и формула (4.6) је директно применљива. Експериментална процедура подразумева сакупљање спектра са довољном статистиком и обраду спектралне слике. Тачност методе може бити лимитирана због проблема приликом обраде спектралних података, тј. постојање комптоновог континуума, неиделаног облика врхова (не гаусовски облик) на већим брзинама бројања и могућих интерференција врхова у спектру. Такође

присуство електронског шума захтева постављање доњег нивоа дискриминатора на одређену вредност што имплицира непознавање укупног броја детектованих догађаја. Као једна могућност за решавање овог проблема је екстраполација спектралних података до нулте енергије [46]. Са друге стране, доњи ниво дискриминатора резултира да се комптонски расејани фотони који су у детектору депоновали мању енергију од постављеног нивоа LLD не детектују. У том смислу тотална ефикасност је функција и доњег нивоа дискриминатора.

Спектрални подаци добијени помоћу германијумског детектора у смислу резолуције, обезбеђују најквалитетније услове за реализацију коинцидентне технике на једном детектору. Са друге стране, на коаксијалном детектору не постаји начин да се потпуно елиминишу ефекти угаоних корелација експерименталним путем јер се 2π геометрија не може 100% реализовати (почетак активног дела германијума је неколико милиметра удаљен од спољашњег дела капе детектора). Једино детектор у облику јаме (Слика 2.5) може да обезбеди услове 4π геометрије где рачун корекције на угаоне корелације није потребан. У свим преосталим геометријским поставкама рачун корекције на ефективне угаоне корелације ради избегавања систематске грешке и обезбеђивања веће тачности је неопходан.

Метод мерења апсолутне активности помоћу једног детектора за различите радиоизотопе демонстрирали су неколико аутора. При томе су користили различите поступке за корекцију података на случајне коинциденције, угаоне корелације и губитак одброја услед постојања доњег нивоа дискриминатора.

Kim et al. [46] развили су метод за корекцију доприноса случајних коинциденција у сумарном врху и губитке у врховима услед случајних коинциденција који подразумева снимање више спектра са различитим временом резолуције. Експерименти су рађени на коаксијалном германијумском детектору при чему су за обраду сигнала користили аналогну електронику. Поправку на ефекат угаоних корелација рачунали су помоћу технике Monte Carlo и применом закона апсорпције γ -зрачења [47]. Метод су демонстрирали на извору ^{60}Co . Веома важна чињеница која следи из овог рада је да се поправке на ефективне угаоне корелације где су ефикасности рачунате техником Monte Carlo и законом апсорпције гама зрачења веома мало разликују (испод 1%) у случају каскадних фотона извора ^{60}Co . Грешке у рачуну ефикасности неопходне за рачун поправке на ефективне угаоне корелације се у великој мери потиру, што није случај када се активност рачуна релативном методом на основу обсервације једног врха у спектру и рачуном ефикасности врха пуне енергије техником Monte Carlo [48], а поготово законом апсорпције гама зрачења.

Формула коју су користили Kim и сарадници [46] за мерење активности је

$$A(\tau) = \left(N_T(\tau) + \frac{N_1(\tau)N_2(\tau)}{N_\Sigma(\tau)} \right) w_{eff}, \quad (4.7)$$

где је N_T тотална брзина бројања, N_1 и N_2 су брзине бројања на енергији 1173.2 keV и 1332.5 keV, респективно, а N_Σ је брзина бројања у сумарном врху на енергији 2505.7 keV. Ознака τ у загради сугерише да су спектрални подаци сакупљани при одређеном времену резолуције спектрометра; w_{eff} је поправка на ефективне угаоне корелације. Спектрални подаци (тотална брзина бројања, брзине бројања у врховима пуне енергије и сумарном врху) сакупљани за различито време резолуције τ обезбеђују скуп вредности $\{\tau_i, A_i(\tau_i)\}$. Екстраполацијом линеарног фита активности у функцији времена резолуције на вредност $\tau = 0$ добијена је активност која је коригована на случајне коинциденције јер у теоријском смислу за нулто време резолуције нема могућности за

наседање сигнала. Спектри су снимани на разним растојањима од капе детектора и разним временима резолуције. Корекција на постојање доњег нивоа дискриминатора је рађена обсервацијом спектра са различитим нивоом доњег нивоа дискриминатора и екстраполацијом података на нулту вредност доњег нивоа дискриминатора. Мерна несигурност методе је процењена на 2% при брзинама бројања не већим од 15 kcps. На већим брзинама бројања квалитет спектра је знатно опао па је податке било немогуће анализирати стандардним аналогним мултиканалним анализатором.

Коинцидентна техника мерења активности подразумева рачун корекције на распрострањеност узорка, а у случају једног детектора потребне су и корекције на угаоне корелације. Рачун поправке на распрострањеност узорка и ефективне угаоне корелације за изворе ^{60}Co рачунали су Vidmar et al. [50] Monte Carlo техником. Мерења активности и рачун поправке на цилиндричним узорцима дали су концентрације активности које се слажу у оквиру 1% са другим методама. Ефекти случајних коинциденција су били занемарљиви. Грешка у одређивању активности има тенденцију раста уколико се висина узорка повећава, а не узимају се у обзир корекције на угаоне корелације и распрострањеност.

Мерење активности коинцидентном техником на n-планарном германијумском детектору је спроведена и за изотоп ^{57}Co од стране Iwahara et al. [51] где су коришћене праве коинциденције X- и γ -фотона. Пошто су сумарни врхови помоћу којих се мерила активност настали путем x- γ коинциденција за које не постоје угаоне корелације, интерпретација експерименталних података је једноставнија. Ефекат заступљености случајних догађаја у сумарном врху је елиминисан експерименталним путем тако што су снимани узорци са истим концентрацијама активности различитих маса. Снимањем зависности концентрације активности од брзине бројања за узорке различитих маса, те екстраполацијом на нулту брзину бројања, добијена је концентрација активности коригована на ефекат случајних коинциденција. Резултати су били у сагласности у оквиру 1.4 % са другим методама.

Поправку на случајне коинциденције су такође демонстрирали Carogni et al. [52] мерећи активност извора ^{125}I фотон-фотон коинцидентном техником на NaI детектору. Корекције на случајне коинциденције су извршене техником екстраполације активности на нулу. Како се мерење заснива на детекцији нискоенергијског фотона од 35.5 keV проблем са одређивањем површине врхова је минимизиран јер практично Комптоновог континуума нема. За овај изотоп метод достиже тачност око 0.13% али уз коришћење података из шеме распада.

Сви радиоизотопи чија се активност мери коинцидентном методом помоћу једног детектора имају релативно једноставну шему распада, а кључни податак је један коинцидентни (сумарни) врх. Међутим, теоријски гледано, примена једног спектрометра за одређивање апсолутне активности сложенијих γ -емитера могућа је решавањем једначина бројања за регуларне и сумарне врхове по непозатој активности [53]. Спектрални подаци и једначине бројања за врхове у спектру и тоталну брзину бројања могу се посматрати као систем једначина нелинеарних једначина по ефикасностима и тоталним ефикасностима које уз извесне апроксимације могу бити решене нумеричким поступком по непозатој активности. Novković et al. [54] унапређују формализам [53] разматрајући све могуће путање при распаду и исходе у детектору при чему су развили метод за мерење активности сложених гама емитера само на основу спектралних података. Разматрањем свих путања и могућих исхода и обрадом спектралне слике добијене помоћу германијумског детектора, мерили су активност тачкастог извора ^{57}Co [54]. Уз квалитетну обраду спектралних података мерена активност се слагала са активностима декларисаним од стране произвођача извора у оквиру 1%.

За извор ^{133}Ba , Novković et al. [55, 56] су успешно применили развијени формализам и поступак за добијање једначина бројања за све врхове у спектру. У једначинама за брзине бројања фигуришу непознате ефикасности врха пуне енергије, тоталне ефикасности и активност. Како је број једначина мањи од непознатих величина (Ефикасности и активност) уведене су одређене апроксимације. Претпостављањем облика *peak-to-total* функције у зависности од енергије гама зрачења као

$$\varepsilon(E) / \eta(E) = 1 + kE \quad (4.8)$$

где је $\varepsilon(E)$ ефикасност врха пуне енергије на енергији E , $\eta(E)$ је тотална ефикасност на истој енергији и параметар k је непознати параметар, број једначина је изједначен са бројем непознатих величина. Нумеричким поступком решен је систем нелинеарних једначина чија су решења: ефикасности врха пуне енергије кориговане на ефекат правога коинцидентног сумирања, параметар k који дефинише *peak-to-total* функцију и активност извора. Описаном процедуром Novković et al. су постигли мерну несигурност одређивања активности тачкастог извора ^{133}Ba око 1%, али при брзинама бројања где су корекције на случајне коинциденције занемарљиве [55, 56]. Поправке на угаоне корелације нису биле разматране, јер за извор ^{133}Ba ефекат је практично занемарљив (<0,3 %) када се тачкасти извор налази на капи детектора.

5 Случајне коинциденције у спектралним подацима γ -емитера

При већим брзинама бројања могу се јавити проблеми са губитком резолуције, нестабилности центроида врха пуне енергије, знатним продужењем времена мерења, лошим односом површине врхова према континууму, одступањима од Поасонове статистике и нетачним обрачунавањем мртвог времена, у екстремним случајевима може доћи и до гашења бројачког система услед сатурације и превеликог одброја [57, 58]. Уколико се постигну услови при којима је могуће сакупити спектралне податке, интерпретација података на великим брзинама бројања је отежана јер врхови у спектру немају облик гаусијана и пате од губитка и доприноса од случајних коинциденција.

У циљу превазилажења или бар минимизације поменутих проблема при већим брзинама бројања, произвођачи пратеће електронике уводе различита софтверска и хардверска решења [59]. Хардверска решења подразумевају израду електричних кола која могу процесуирати велики број пристижућих сигнала у јединици времена без знатног губитка енергетске резолуције система. Као добро решење уводи се што ранија дигитализација улазних сигнала и могућност укључивања кола за одбацивање наседајућих сигнала (*pile-up rejection*) [21]. Смањењем ефективног времена резолуције добијају се боље перформансе при већим брзинама бројања. Међутим фундаментално ограничење код германијумских детектора је време потребно да се наелектрисање које произведе упадно зрачење сакупи на електродама, па време резолуције не може бити краће од овог времена [13]. Један од показатеља добротe спектроскопског система и јесте однос брзине бројања према резолуцији. Дигитални системи имају предност када је у питању оптимизација спектроскопског система за услове мерења, јер пружају могућност софтверске контроле за одабирање облика сигнала појачавача (време пораста и ширина платоа) чиме се могу постићи оптималне перформансе у смислу резолуције и брзине бројања [60]. Комерцијално доступни дигитални спектроскопски системи разликују се у перформансама па је упоређивање њихових карактеристика при различитим условима мерења корисна информација при употреби дигиталних спектроскопских јединица [17, 19].

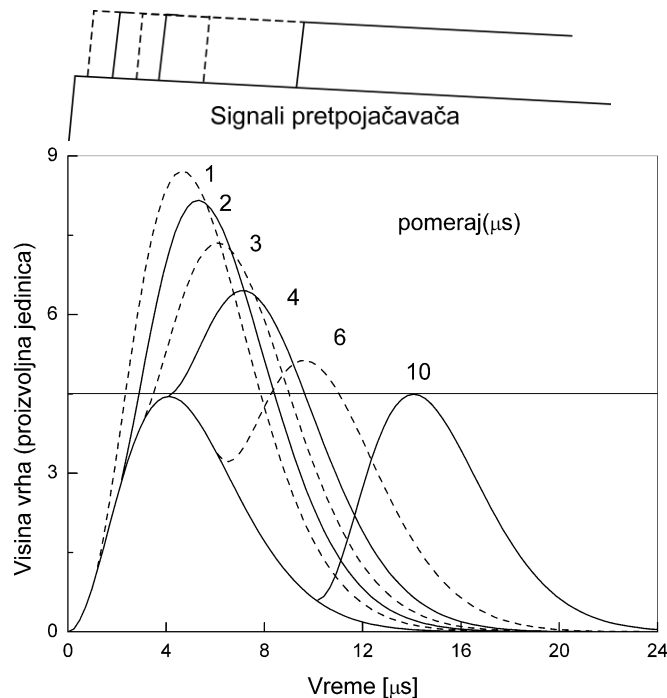
И поред ограничења које произвођач поставља на брзину бројања за спектралне податке са одговарајућом мерном несигурношћу, постоји неколико начина да се подаци коригују и практично прошири опсег употребљивости спектралног уређаја. Приликом мерења активности, где су релевантни подаци брзине бројања у одговарајућим врховима пуне апсорпције, претходни аутори су корекцију на губитке и доприносе у врховима чинили обрадом више спектралних података који одговарају различитим концентрацијама активности, при чему се екстраполацијом података на активност која одговара нултој концентрацији активности добила активност која нема губитке и доприносе на случајне коинциденције, нпр. видети [52]. Метод екстраполације на спектралне податке који немају проблем са већом брзином бројања може се реализовати и варијацијом времена резолуције спектрометра [46]. Још једна могућност корекције спектралних података на случајне коинциденције при већим брзинама бројања је помоћу ефективног времена резолуције спектрометра [61].

Свакако је увођењем дигиталних спектроскопских јединица у гама спектрометрију са опцијом одбацивања наседајућих сигнала (*pile-up rejection*) знатно побољшан квалитет спектра на већим брзинама бројања [62].

5.1 Доприноси случајних коинциденција у сумарном врху

Фундаментално ограничење на брзину бројања поставља чињеница да сигнали настали детекцијом фотона имају коначну дужину трајања. Уколико дође до преклапања сигнала, они могу бити одбачени или пак прихваћени као један догађај. Уколико је спектроскопски систем опремљен колом за одбацивање наседајућих сигнала, спектрални подаци при већим брзинама бројања биће квалитетнији.

Насумично сумирање или сумирање наседајућих сигнала је последица да су два или више гама фотона детектована скоро симултано. Ако оба пристигну унутар временског интервала који је једнак временском интервалу сигнала појачавача, неће бити препознати као одвојени догађаји. Резултујући излазни сигнал биће еквивалентан висини првог сигнала који је пристигао плус део висине другог сигнала, што зависи од тога колико су сигнали близу. Ситуација је демонстрирана на Слици 5.1, која представља рачунати облик сигнала претпојачавача и појачавача када два сигнала једнаких величина пристижу на улаз претпојачавача. Представљени су различити облици за различите степене преклапања. На графику се види да за врло блиску коинциденцију висина комбинованог сигнала, који ће мултиканални анализатор покушати да мери је скоро сума висина оба сигнала.

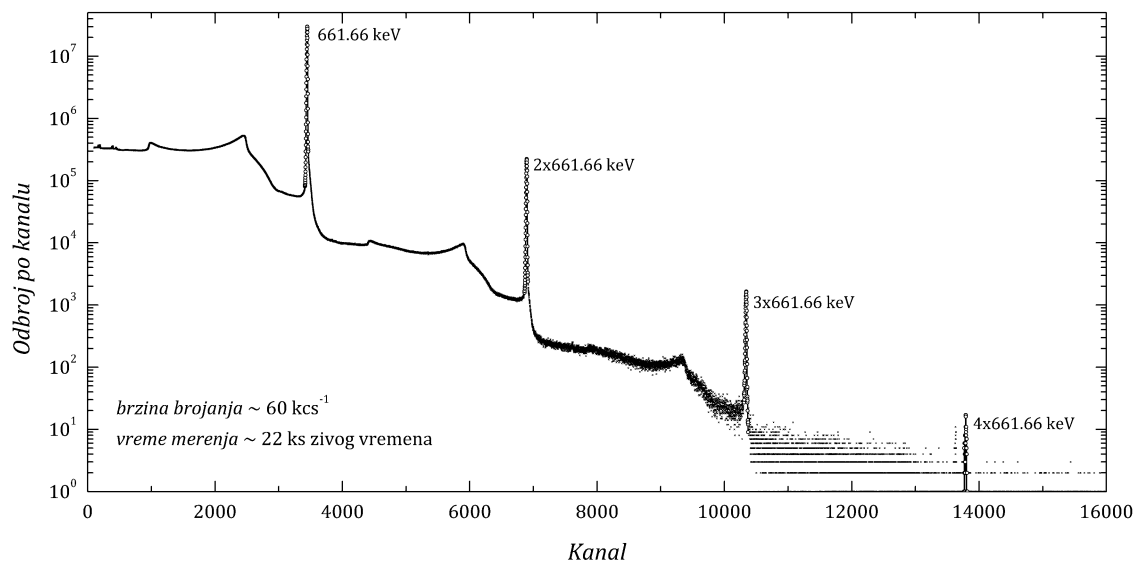


Слика 5.1 Рачунати облици сигнала који се преклапају. Облици сигнала су семигаусијански.

Овакве случајне коинциденције су непожељне јер оне узрокују губитке у одброју из врхова пуне енергије у спектру. Ако замислимо да су оба гама зрака која пристижу на детектор унутар времена резолуције појачавача потпуно апсорбована, и због тога предодређени да допринесу одброју под врхом пуне енергије, коинциденција

ће резултовати у губитку једног одброја из сваког врха и настанак одброја негде у спектру.

Резултат преклапања сигнала услед велике брзине бројања приказан је у спектру извора ^{137}Cs (Слика 5.2), где се виде врхови настали случајним коинциденцијама, тј. насадањем сигнала унутар времена резолуције спектрометра. Врх пуне енергије који одговара једином фотону емитованом при распаду извора ^{137}Cs је на енергији 662.7 keV. Даље је уочљив континуум изнад максималне енергије емитованог фотона при распаду, што је резултат симултане детекције два фотона унутар времена разлагања спектрометра. Даље се јављају врхови случајних коинциденција на енергијама 2×662.7 keV, 3×662.7 keV и 4×662.7 keV, који су резултат насумичног сумирања потпуно апсорбованих два, три и четири фотона. Континуум је резултат вишеструких потпуних и непотпуних апсорпција.

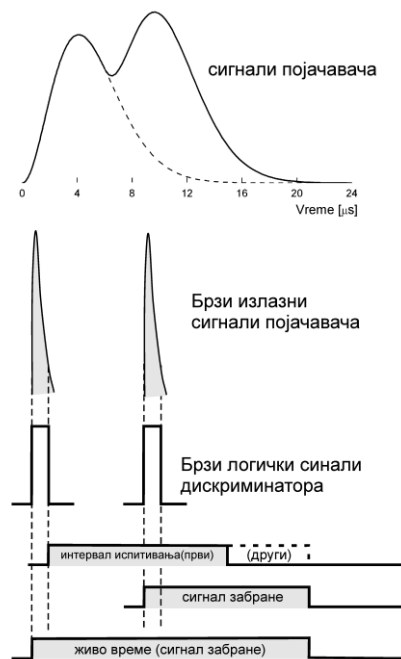


Слика 5.2 Спектар тачкастог извора ^{137}Cs снимљен на коаксијалном HPGe детектору релативне ефикасности 35% у лабораторији за гама спектрометрију Департмана за физику у Новом Саду. Поред регуларног врха на 662.7 keV уочљиви су континуум и три врха који су настали насумичним сумирањем.

Са Сlike 5.1 се јасно види да је *pile-up* врх појачавача неправилно обликован. Врх сигнала се појављује касније и врх је шири него што се очекује за један сигнал. Ова чињеница је кључна за хардверско решење. Електронско коло које манипулише сигнаlima, Слика 5.3 даје увид у процедуру. Паралелно са нормалним сигналом, који производи нормалан излаз на појачавачу, постављен је брз појачавач (брзи диференцијатор приказан на слици испод). Употребљавајући врло кратке временске константе, настају сигнали са великим шумом, али што је довољно да одреди у врло кратком временском интервалу да је сигнал детектован. Ефекат шума је онда елиминисан употребљавајући дискриминатор да обезбеди кратки логички сигнал. Логички сигнал стартује временски период, који се назива инспектујући интервал, што је еквивалентно дужини сигнала. Ако други сигнал пристигне унутар овог инспекционог периода (што ће се детектовати његовим брзим сигналом појачавача), сигнал капије ће се генерисати који се може користити за спречавање складиштења оригиналног сигнала. Губитак ових сигнала из спектра мора бити урачунат за мало повећање мртвог времена у мултиканалном анализатору, а ово се обезбеђује мртвим временом капије из појачавача.

Актуелни начин у којем ће овај сигнал капије бити изведен зависи од тога дали се *pile-up* десио на водећој или опадајућој ивици сигнала. Из статистичких разлога, сигнал капије мртвог времена са водеће ивице *pile-up*-а мора бити искључен до

следећег сигнала који ће бити детектован. На малим брзинама бројања, ово може узети неко време, што резултује у продуженом и нереалистичном мртвом времену. Због овога се препоручује да се искључи коло за одбацивање наседајућих сигнала при ниским брзинама бројања, када иначе оно није ни потребно.



Слика 5.3 Принцип рада кола за корекцију наседајућих сигнала.

Као што је описано, није могуће разложити сигнале који су ближи него што је очекивана ширина једног излазног сигнала појачавача, 2.5 до 3 времена потребног за постизање максимума сигнала у зависности од облика сигнала. Било који пар сигнала који су ближи него овај биће одбачени. Јасно је да ће бити ситуације где сигнал може пристићи пре него што се претходни сигнал вратио на своју базну линију па ће касније порастати. Овај сигнал би имао добру висину али ће бити одбачен без обзира на то. (погледати на Слици 5.1 сигнал са закашњењем од $10\mu\text{s}$). Редуковање времена резолуције може допринети извесном смањењу непотребних одбацивања.

Доступни су појачавачи који исто тако омогућују алтернативно значење *pile-up* одбацивања детектујући закаснело време пораста сигнала од минималне до максималне вредности. Како ће сигнали који пате од балистичког дефицита или заробљавања наелектрисања такође каснити, ови сигнали ће бити одбачени.

Ефикасност одбацивања наседајућих сигнала може бити импресивно. Иако је очигледно да се помоћу кола за одбацивање наседајућих сигнала постиже одбацивање великог броја наседнутих сигнала, преостаје један мали број који се дешава услед тога што брзи појачавач има коначно време резолуције. Ово је приказано већ на Слици 5.2 где се уочавају сумарни врхови настали двоструким, троструким и четвороструким случајним коинциденцијама. Због тога што ови наилазе унутар времена резолуције кола за одбацивање наседајућих сигнала (око 250 ns), они никад не могу бити отклоњени електронском методом базираном на облику сигнала.

Када је коло за одбацивање наседајућих сигнала укључено постоје резидуалне случајне коинциденције које је потребно кориговати. Било да је коло за одбацивање

наседајућих сигнала укључено или искључено, потребно је вршити корекције на случајне коинциденције услед коначног времена резолуције спектрометра.

У неким колима, може се чинити да су сви наседајући сигнали уклоњени. Било какав резидуални губитак на великим брзинама бројања се додељује ограничењима система за корекцију на мртво време. Наиме постоји један стандардизовани тест којим се проверава тачност корекције на мртво време. Сигурно је да коло за одбацивање наседајућих сигнала не може у потпуности уклонити случајне коинциденције што се манифестује кроз појаву врхова случајних коинциденција. Грешке у обрачунавању мртвог времена управо су резултат случајних коинциденција које се манифестују у спектралним подацима.

Сигнал ће учествовати у сумирању уколико се уназад и унапред у временском интервалу τ региструје још један фотон. Ово време τ назива се време резолуције електронског система. Користећи се Поасоновом дистрибуцијом, може се једноставно показати да је вероватноћа случајних коинциденција p_c унутар времена τ дато са

$$p_c = 1 - e^{-2R\tau} \quad (5.1.1)$$

где је R средња брзина бројања. Ова вероватноћа се може изједначити са делимичним губитком у површини за неки врх у спектру. Ако је P мерена површина врха, а P_T стварна површина врха, важи:

$$\frac{P_T - P}{P_T} = p_c = 1 - e^{-2R\tau}. \quad (5.1.2)$$

Ако формулу (5.1.2) реаранжирамо, добијамо једноставну формулу за корекцију површине врха на случајне коинциденције:

$$P_T = P e^{-2R\tau}. \quad (5.1.3)$$

Због тога што је сумирање случајно, ова корекција је применљива на све врхове у спектру, али да би је применили поребно је познавати време резолуције τ . Без кола за одбацивање наседајућих сигнала може се очекивати да ће оно бити истог реда величине као и време обликовања сигнала појачавача, неколико μs . Међутим време резолуције се најбоље процењује експериментом.

Ако логаритмујемо израз (5.1.3) налазимо:

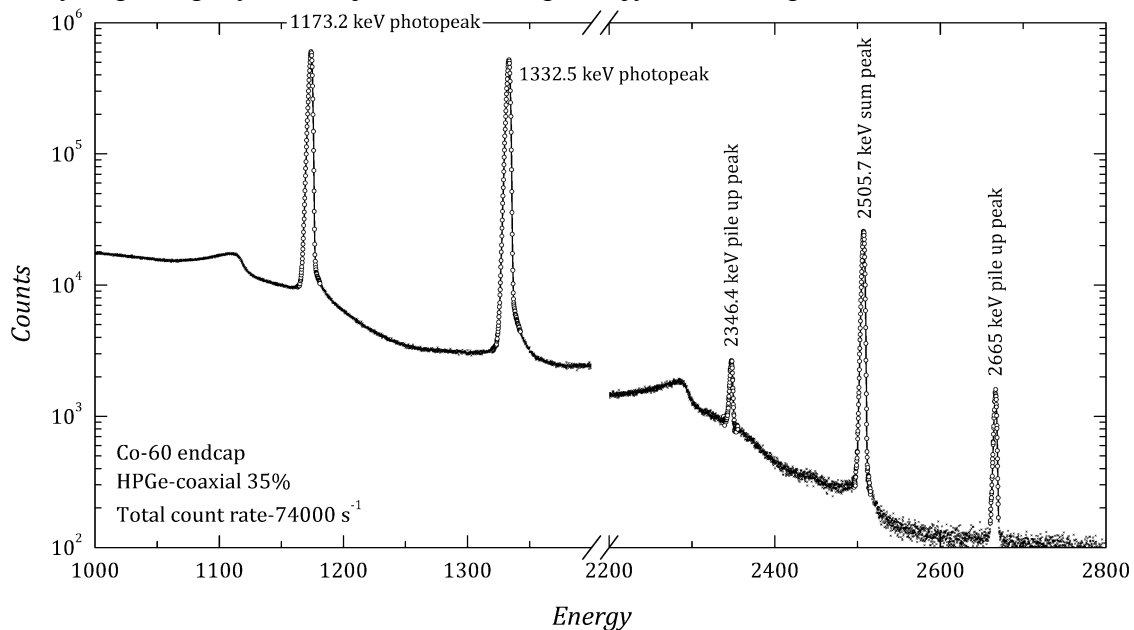
$$\ln P = \ln P_T - 2R\tau. \quad (5.1.4)$$

Фактор који је потребно наћи је 2τ , а то је у ствари коефицијент правца линеарне зависности $\ln P$ у функцији брзине бројања R . Налажење стварне брзине бројања R је проблем. Употребом мерача брзине бројања на излазу појачавача није решење јер ће и он сам имати проблема са наседањем сигнала. Коришћење излаза мерача улазне брзине бројања на појачавачу требао би да обезбеди сигнале који су мање више без губитака. Међутим ако програм за анализу спектра прави корекције не постоји механизам екстерног читавања брзине бројања. У пракси је најједноставније да се брзина бројања прочита из самог спектра. Укупан одброј у спектру се може сабрати и поделити са живим временом што даје процену брзине бројања R . Ово није сасвим тачно јер сигнали испод доњег нивоа дискриминатора и изван линеарне капије неће бити узети у обзир. Без обзира на све, ово даје довољно добру емпиријску процену за време резолуције.

Процедура којом се експериментално одређује време резолуције се назива “метод покретног извора” и изводи се на следећи начин:

- (1) Фиксирати извор ^{137}Cs на таквој позицији у близини детектора да је укупна брзина бројања 2000 cps. Важно је да овај извор остане на фиксној позицији у току наредних мерења.
- (2) Сакупити спектар за довољно дуго времена да би се обезбедила површина врха 661.6 keV ^{137}Cs , са прецизношћу бољом од 1%.
- (3) Измерити површину врха на енергији 661.6 keV и израчунати средњу брзину бројања.
- (4) Поставити извор другог радиоизотопа на такву позицију тако да не дође до интерференције са врхом на енергији 661.6 keV, а да се укупна брзина бројања удвостручи. Конвенционалан радиоизотоп за ово је ^{152}Eu .
- (5) Измерити овај поступак и поновити поступак.
- (6) Померити извор ближе детектору како би се повећала брзина бројања и поновити мерење.
- (7) Поновити корак (6) све док тотална брзина бројања не пређе нормалну област рада и подаци престану да буду линерани.
- (8) Нацртати зависност природног логаритма површине врха ^{137}Cs у функцији брзине бројања R и израчунати нагиб-он управо одговара корекционом фактору.

Други начин да се одреди корекциони фактор, тј. ефективно време резолуције спектрометра јесте обсервација врха случајних коинциденција. У спектру након довољно дугог времена мерења настаје врх који је резултат преклапања сигнала који потичу од фотона емитованих из различитих језгара (истих или различитих изотопа). Ови врхови називају се *pile-up* врхови или врхови случајних коинциденција. Типичан спектар који садржи *pile-up* врхове је приказан на Слици 5.4. Ови врхови разликују се од регуларних врхова по мање или више израженом репу на нижој енергији [61, 62]. Помоћу ових врхова могуће је одредити ефективно време резолуције спектрометра [61]. Фотони који се детектују у временском интервалу већим од ефективног времена резолуције али мањим од тзв. очекиваног времена за *pile-up* бивају одбачени уколико је коло за одбацивање наседајућих сигнала укључено. Информација о коригованом времену мерења регулисано је колом за корекцију на живо време.



Слика 5.4. Спектар тачкастог извора Со-60 снимљен на коаксијалном HPGe детектору у лабораторији за гама спектрометрију Департамента за физику у Новом Саду.

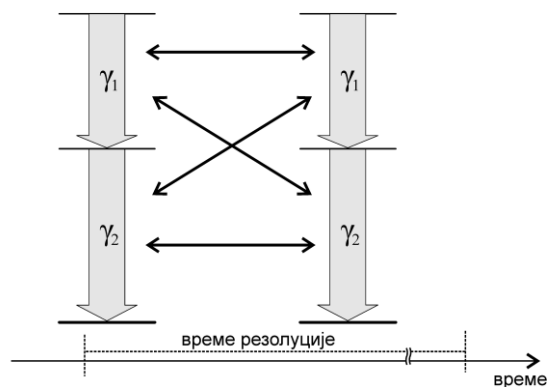
Радиоактивни распад је процес који се поковава Поасоновој статистици. На основу тога може се аналитички проценити број догађаја који су резултат потпуне

апсорпције два некорелисана фотона. Уколико је брзина бројања у врху пуне енергије N , брзина бројања у њему одговарајућем врху случајних коинциденција који се јавља на двоструко већој енергији је:

$$N' = \tau N^2 \quad (5.1.5)$$

где је τ ефективно време резолуције спектрометра. Дакле, уколико је ефективно време резолуције спектрометра познато, може се проценити број догађаја у јединици времена који одговарају потпуној апсорпцији два некорелисана фотона.

У случају извора Co-60 који се распада путем емисије два каскадна фотона енергија 1173.2 keV и 1332.5 keV у спектру настају два врха случајних коинциденција на 2346.4 keV и 2665 keV. Такође настаје сумарни врх на енергији 2505.7 keV који је резултат правих и случајних коинциденција. Како се активност извора Co-60 фотон-фотон коинцидентном техником одређује управо помоћу сумарног врха на енергији 2505.7 keV, који садржи информацију о правим коинцидентним догађајима, треба извршити корекцију на доприносе одброја услед случајних коинциденција.



Слика 5.5 Каскадна емисија фотона из два распада која су се догодила у временском интервалу који је мањи од времена резолуције спектрометра.

У циљу разматрања броја случајних коинциденција у сумарном врху, размотрићемо шему која садржи емисију два каскадна фотона. Према Сlici 5.5, γ_1 -фотон из оба језгра може бити детектован унутар времена резолуције само на један начин, γ_1 из првог и γ_1 из другог језгра. Исто важи и за γ_2 -фотон. Међутим γ_1 и γ_2 фотони који потичу од два различита језгра могу бити детектовани на два различита начина. γ_1 из првог, а γ_2 из другог језгра, или γ_2 из првог, а γ_1 из другог језгра. У том смислу брзину бројања случајних коинциденција у коинцидентном врху на енергији једнакој збиру енергија γ_1 и γ_2 фотона за разлику од једначине (5.1.5) има фактор умношка 2

$$N_C = 2\tau N_1 N_2. \quad (5.1.6)$$

Ако време резолуције процењујемо помоћу (5.1.5), где уочавамо два врха настали наседањем сигнала, допринос случајних коинциденција у сумарном врху можемо написати преко брзина бројања у *pile-up* врховима

$$N_C = 2\sqrt{N'_1 N'_2}, \quad (5.1.7)$$

где су N'_1 и N'_2 брзине бројања у одговарајућим *pile-up* врховима на енергијама $2E_{\gamma 1}$ и $2E_{\gamma 2}$.

У сложенијим шемама распада могуће је да се један од *pile-up* врхова преклапа са регуларним врхом. У том случају, допринос у сумарном врху се може написати преко једног *pile-up* врха ако се узму у обзир релације (5.1.5) и (5.1.6)

$$N_c = 2N'_1 \frac{N_2}{N_1}, \quad (5.1.8)$$

или

$$N_c = 2N'_2 \frac{N_1}{N_2}. \quad (5.1.9)$$

5.2 Губици у врховима услед случајних коинциденција

Ако је коло за одбацивање наседајућих сигнала укључено, услед коначног ефективног времена разлагања спектрометра губици у врховима су могући. Ови губици доприносе комптоновом континууму и *pile-up* врховима. Измерене брзине бројања у регуларним врховима морају бити кориговане на случајне коинциденције. У пракси, треба одредити време резолуције спектрометра, а затим извршити корекцију. Стварна брзина бројања у регуларном врху је према [44]:

$$N_p = \frac{N}{L_\tau} \quad (5.2.1)$$

где је N мерена површина врха пуне енергије подељена са живим временом, а L_τ фактор за губитке услед насумичног сумирања. Фактор L_τ је такође према [44]:

$$L_\tau = 1 - \tau N_T \quad (5.2.2)$$

где је τ ефективно време резолуције и N_T је стварна брзина бројања. Како у пракси стварна брзина бројања није позната, она се мора апроксимирати измереном брзином бројања тј. бројем регистрованих догађаја у јединици времена.

Ако сматрамо да у спектру нема случајних коинциденција трећег реда, тј. нема детекције три некорелисана фотона унутар времена разлагања спектрометра, брзина бројања у *pile-up* врху је:

$$N'_k = \tau \frac{N_k^2}{(1 - \tau N_T)^2}, \quad (5.2.3)$$

при чему је $k = 1$ за фотон из каскаде са мањом енергијом и $k = 2$ за фотон са већом енергијом. Решавањем (5.2.3) по времену резолуције τ добијамо

$$\tau_{\pm} = \frac{1}{N_T} \left(1 + \frac{N_k^2}{2N_T N'_k} \left(1 \pm \sqrt{\frac{4N_T N'_k}{N_k^2} + 1} \right) \right) \quad (5.2.4)$$

где решење за знаком “+” има смисао очекиваног времена између два прихваћена *pile-up* догађаја док решење са знаком “-“ има смисао ефективног времена резолуције спектрометра.

Ефективно време резолуције може се израчунати и помоћу два *pile-up* врха, ако комбинујемо релације (5.1.7) и (5.2.3):

$$\sqrt{N'_1 N'_2} = \tau \frac{N_1 N_2}{(1 - \tau N_T)^2}. \quad (5.2.5)$$

Решавањем по ефективном времену резолуције налазимо

$$\tau_{\pm} = \frac{1}{N_T} \left(1 + \frac{N_1 N_2}{2 N_T \sqrt{N'_1 N'_2}} \left(1 \pm \sqrt{\frac{4 N_T \sqrt{N'_1 N'_2}}{N_1 N_2} + 1} \right) \right). \quad (5.2.6)$$

Изведена формула (5.2.6) има исти смисао као и (5.2.4) само што овде фигуришу брзине бројања у два *pile-up* врха.

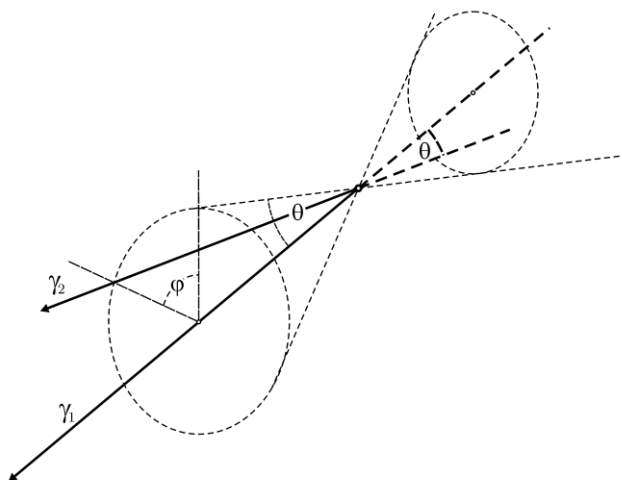
6 Эффективне угаоне корелације фотона

Вероватноћа емисије честице радиоактивног језгра зависи у општем случају од угла између осе која се поклапа са спином језгра и правцем емисије. Под уобичајним условима, укупно зрачење из језгра је изотропно јер су језгра насумично распоређена у простору. Анизотропни карактер емисије појединачног зрачења се може једино уочити ако скуп посматраних језгара није насумично распоређен.

Један од начина да се постигну услови при којима се испољава анизотропија зрачења јесте да се језгра на веома ниским температурама поставе у јак градијент магнетног или електричног поља, што узрокује поларизацију и усмерење језгара. У таквим условима мери се угаона дистрибуција зрачења у односу на правац примењеног поља.

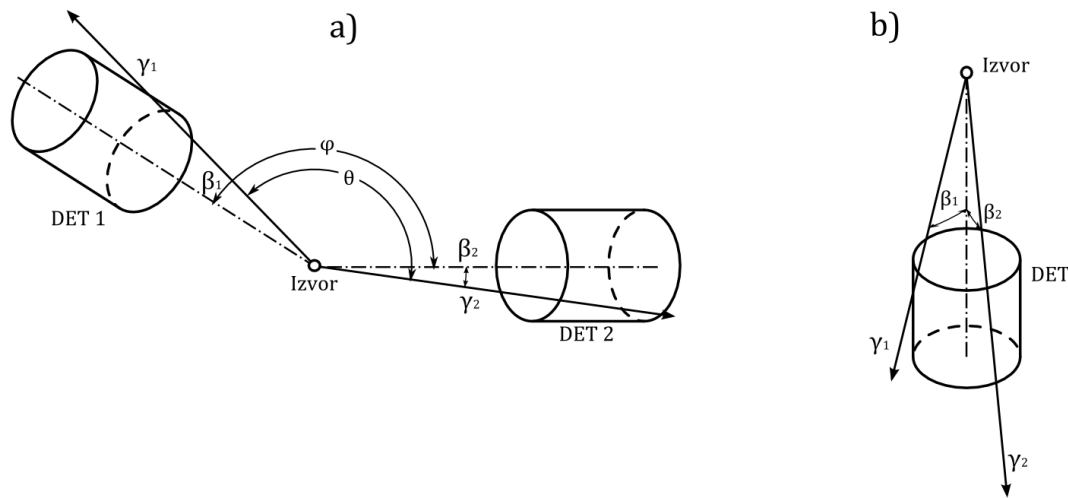
Други начин је да се посматрају само она језгра чији спин лежи у одређеном правцу. Ово се може постићи уколико се језгро распада путем сукцесивне емисије два зрака: \vec{R}_1 и \vec{R}_2 . Обсервација \vec{R}_1 у фиксном правцу \vec{k}_1 одабира скуп језгара која немају изотропну дистрибуцију оријентације спина. Пратеће зрачење \vec{R}_2 онда испољава дефинитивну угаону корелацију у односу на \vec{k}_1 . Обично се користи термин угаона корелација која обухвата корелацију правца и поларизације. У корелацијама правца (угаоне корелације) посматрају се само правци зрачења, али не и поларизација.

Вероватноћа да други фотон емитован у каскади има правац кретања у односу на први фотон дефинисан углом θ (Слика 6.1), описује се функцијом дирекционих корелација $W(\theta)$. Релативна вероватноћа да је други гама зрак емитован у просторни угао $d\Omega$ у правцу који заклапа угао θ са правцем емисије првог гама фотона из каскаде је $W(\theta)d\Omega$.



Слика 6.1. Два фотона емитована из каскаде у правцима који заклапају угао θ . Функција угаоних корелација гама фотона је парна ($W(\theta) = W(-\theta)$) и симетрична у односу на азимутални угао ϕ .

Функција $W(\theta)$ се може израчунати теоријски уколико су познати спинови ексцитованих стања из којих се емитују фотони, мултиполности фотона и односи мешања. Проблем је примарно везан за експериментално одређивање $W(\theta)$, а онда се теоријском конструкцијом функције угаоних корелација управо додељују вредности непознатих параметара из шеме распада (спинови, мултиполности и односи мешања). Детектори су постављени око извора тако да је један фиксиран, а други се може померати за произвољни угао (Слика 6.2.а). Снимањем броја коинциденција за сваки угао добија се функција $W(\varphi)$ која се извесним корекцијама на коначне димензије и ефикасност детектора конвертује у $W(\theta)$. Детаљан преглед теорије угаоних корелација и експерименталне процедуре за одређивање функције угаоних корелација дато је у [63].



Слика 6.2 а) Принципијална шема екперименталне поставке за мерење угаоних корелација два фотона. Детектор 1 се може обртати у равни око фиксне осе док је други детектор фиксиран. б) Ефекат угаоних корелација на једном детектору се испољава у утицају на вероватноћу правога коинцидентног сумирања. У случају аксијалне симетрије извор-детектор теорија за израчунавање поправке на ефекат угаоних корелација се своди на теорију за два детектора при чему је угао $\varphi = 0$.

У експериментима са једним детектором, где се каскадна емисија фотона манифестује кроз губитке и доприносе у регуларним врховима као и појавом сумарних врхова, угаоне корелације фотона утичу на вероватноћу правога коинцидентног сумирања. Међутим, поправке на ефективне угаоне корелације два каскадна фотона при израчунавању корекционих фактора за право коинцидентно сумирање су безначајне [64], па се не примењују у релативним мерењима активности. У методи апсолутног одређивања активности помоћу једног детектора, брзина бројања у сумарном врху је директно пропорционална вероватноћи правога коинцидентног сумирања, а због тога и корекционом фактору на ефективне угаоне корелације [46]. У зависности од геометрије извор-детектор, као и јачине спрезања праваца фотона емитованих у каскади, уколико се не узме у обзир корекциони фактор на ефективне угаоне корелације мерна несигурност у одређивању активности може бити и већа од 10% [46, 50].

Теоријско израчунавање функције угаоних корелација $W(\theta)$ за било која два каскадна фотона детаљно је проучено и може се применити на било коју шему распада са познатим спиновима стања, мултиполности фотона и односима мешања. Међутим, распрострањеност узорка и димензије детектора захтевају усредњавање функције $W(\theta)$ услед варијације ефикасности унутар извора.

6.1 Ефективне угаоне корелације за коаксијални HPGe детектор

Функција угаоних корелација $w(\theta)$ између каскадних фотона γ_1, γ_2 емитованих из прелаза $I_i \xrightarrow{\gamma_1} I \xrightarrow{\gamma_2} I_f$ (I_i, I, I_f ; спинови нивоа) је дата према [66]

$$W(\theta) = \sum_{\text{парно } k}^{k_{\max}} A_{kk} P_k(\cos \theta), \quad (6.1.1)$$

где је θ угао између праваца емисије γ -фотона, P_k је Лежандров полином и A_{kk} је коефицијент угаоних корелација. Сумирање се врши по парним индексима k , почевши од нуле при чему је k_{\max} дато са

$$k_{\max} = \min(2I, L_1 + L_1', L_2 + L_2') \quad (6.1.2)$$

где су L_1, L_1' и L_2, L_2' угаони моменти однешени емитованим фотонима. Коефицијенти угаоних корелација су дати са

$$A_{kk} = A_k(L_1 L_1' I_i I) A_k(L_2 L_2' I_f I), \quad (6.1.3)$$

где су коефицијенти $A_k(L_1 L_1' I_i I)$ и $A_k(L_2 L_2' I_f I)$ дати са:

$$A_k(L_1 L_1' I_i I) = \frac{F_k(L_1 L_1' I_i I) + 2\delta_1 F_k(L_1 L_1' I_i I) + \delta_1^2 F_k(L_1' L_1' I_i I)}{1 + \delta_1^2} \quad (6.1.4)$$

$$A_k(L_2 L_2' I_f I) = \frac{F_k(L_2 L_2' I_f I) + 2\delta_2 F_k(L_2 L_2' I_f I) + \delta_2^2 F_k(L_2' L_2' I_f I)}{1 + \delta_2^2} \quad (6.1.5)$$

Овде су F_k коефицијенти који зависе од спина стања између којих се врши емисија фотона као и мултиполности фотона

$$F_k(LL'I_{i,f}I) = (-1)^{I_i+I-1} [(2L+1)(2L'+1)(2I+1)(2k+1)]^{1/2} \begin{pmatrix} L & L' & k \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} L & L' & k \\ I & I & I_{i,f} \end{matrix} \right\}, \quad (6.1.6)$$

где су $()$ и $\{ \}$, Wigner-ови 3- j и 6- j симболи, респективно. Однос мешања мултиполности је изражен преко нумеричког фактора δ за одговарајући гама зрак који је назначен у индексу.

У зависности од спинова нивоа између којих се врши прелаз као и мултиполарности прелаза и односа мешања, правац другог фотона емитованог у каскади може имати тенденцију да прати правац емисије првог фотона или супротно, да прати правац који је нормалан на правац првог фотона емитованог у каскади.

Подаци из шеме распада изотопа ^{60}Co , ^{133}Ba и ^{152}Eu који су потребни за израчунавање функције угаоних корелација два каскадна фотона (6.1.1) дати су у

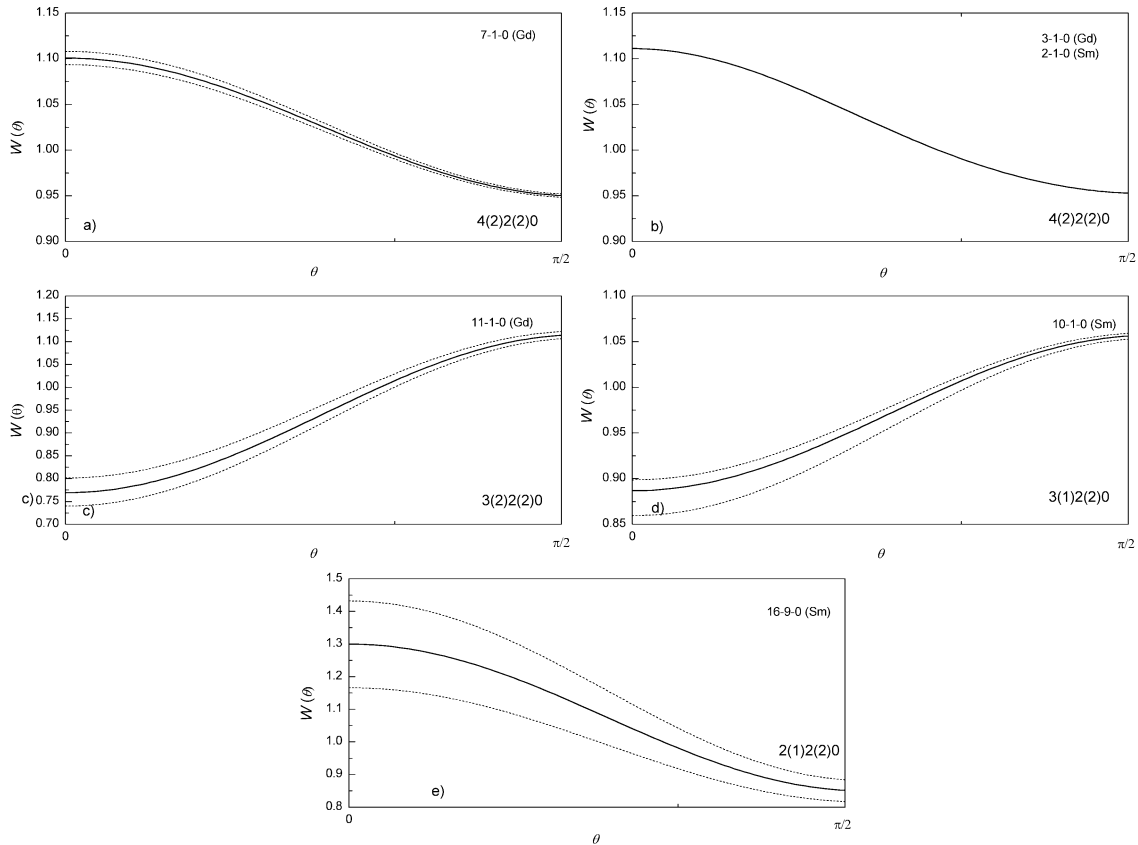
Табели 6.1. За израчунавање Функције (6.1.1), која зависи од параметара из шеме распада датих у Табели 6.1, написана је процедура у програму *Mathematica* која је дата у Прилогу А. У последње три колоне Табеле 6.1 приказана је израчуната функција угаоних корелација $W(\theta)$ као и њене вредности за угао између два фотона 90° и 0° . За прелазе код којих нема мешања мултиполности коефицијенти функције угаоних корелација су тачно одређени као односи целих бројева. Вредности функције угаоних корелација на угловима 90° и 0° такође су дати као односи целих бројева. У осталим случајевима коефицијенти угаоних корелација су реални бројеви чија тачност зависи од мерне несигурности односа мешања мултиполности прелаза.

Табела 6.1 Подаци потребни за израчунавање функције угаоних корелација за неке каскаде емитоване при трансформацији изотопа ^{60}Co , ^{133}Ba и ^{152}Eu према [65]. У последње три колоне дата је функција угаоних корелација за одговарајућу каскаду, као и њене вредности за угао $\theta = 0$ и $\theta = \pi/2$.

Род.	Прелаз	Пот.	Спинови и мултиполарности							$\bar{w}(\theta)$	$\bar{w}(0)$	$\bar{w}(90^\circ)$
			I_i	L_i	δ	I	L_2	δ	I_f			
^{60}Co	$3 \rightarrow 1 \rightarrow 0$	^{60}Ni	4	2	0	2	2	0	0	$\frac{5}{126}(24 + 3\cos^2\theta + \cos^4\theta)$	$\frac{10}{9}$	$\frac{20}{21}$
^{133}Ba	$4 \rightarrow 3 \rightarrow 2$	^{133}Cs	1/2	1	0.15_{-5}^{+6}	3/2	1	-0.114	5/2	$1.0033 - 0.0100\cos^2\theta$	0.9933	1.0033
	$4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$		1/2	1	0.15_{-5}^{+6}	3/2	1	0.022	5/2	$0.9859 + 0.0424\cos^2\theta$	1.0282	0.9859
	$4 \rightarrow 3 \rightarrow 0$		1/2	1	0.15_{-5}^{+6}	3/2	2	0	7/2	$1.0160 - 0.0480\cos^2\theta$	0.9680	1.0160
	$4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$		1/2	2	0	5/2	1	0.125(15)	5/2	$0.8549 + 0.4353\cos^2\theta$	1.2902	0.8549
	$4 \rightarrow 2 \rightarrow 0$		1/2	2	0	5/2	1	0.96(5)	7/2	$1.2456 - 0.7368\cos^2\theta$	0.5088	1.2456
	$4 \rightarrow 1 \rightarrow 0$		1/2	2	0	5/2	1	-0.151(2)	7/2	$0.9821 + 0.0538\cos^2\theta$	1.0359	0.9821
	$3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$		3/2	1	-0.114	5/2	1	0.125(15)	5/2	$1.1576 - 0.4727\cos^2\theta$	0.6849	1.1576
	$3 \rightarrow 2 \rightarrow 0$		3/2	1	-0.114	5/2	1	0.96(5)	7/2	$0.7333 + 0.8001\cos^2\theta$	1.5334	0.7333
	$2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$		5/2	1	0.125(15)	5/2	1	-0.151(2)	7/2	$0.9818 + 0.0547\cos^2\theta$	1.0364	0.9818
^{152}Eu	$3 \rightarrow 1 \rightarrow 0$	^{152}Gd	4	2	0	2	2	0	0	$\frac{5}{126}(24 + 3\cos^2\theta + \cos^4\theta)$	$\frac{10}{9}$	$\frac{20}{21}$
	$7 \rightarrow 1 \rightarrow 0$		3	1(2)	0.002(6)	2	2	0	0	$0.9496_{-18}^{+18} + 0.1512_{-54}^{+55}\cos^2\theta$	1.1008	0.9496
	$11 \rightarrow 1 \rightarrow 0$		3	1(2)	$+29_{-11}^{+42}$	2	2	0	0	$1.1154_{-75}^{+81} - 0.346_{-24}^{+24}\cos^2\theta$	0.7691	1.1154
	$2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$	^{152}Sm	4	2	0	2	2	0	0	$\frac{5}{126}(24 + 3\cos^2\theta + \cos^4\theta)$	$\frac{10}{9}$	$\frac{20}{21}$
	$10 \rightarrow 1 \rightarrow 0$		3	1(2)	-8.7(6)	2	2	0	0	$1.0568_{-33}^{+29} - 0.170_{-9}^{+24}\cos^2\theta$	0.8864	1.0568
	$16 \rightarrow 9 \rightarrow 0$		2	1(2)	$+0.07_{-9}^{+11}$	2	2	0	0	$0.850_{-34}^{+32} + 0.45_{-10}^{+10}\cos^2\theta$	1.2994	0.8503

Израчунате функције угаоних корелација за каскаде изотопа ^{152}Eu из Табеле 6.1 приказане су графички на Слици 6.3. Као што се види, различите каскаде доносе различиту функцију угаоних корелација. Тенденција да правац емисије другог фотона

буде у правцу емисије првог фотона већа је уколико за угао $\theta = 0$ функција W има већу вредност. Супротна ситуација је када други фотон има тенденцију да прати нормалан правац на правац емисије првог фотона што се испољава максималном вредношћу функције W за угао $\pi/2$. Несигурност функције угаоних корелација представљена је испрекиданом линијом која потиче од мерне несигурност односа мешања. Највећа асиметрија правца емисије изражена је за каскаду $2(1)2(2)0$, међутим овде је и велика мерна несигурност односа мешања.



Слика 6.3 Функције угаоних корелација каскадних фотона који се могу емитовати при распаду ^{152}Eu . а) $7 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ каскада ^{152}Gd други фотон емитован у каскади има тенденцију да прати правац првог фотона; б) каскаде $3 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ ^{152}Gd и $2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ ^{152}Sm , овде такође правац емисије другог фотона има тенденцију да прати правац другог фотона у каскади али је функција врло тачно одређена јер не долази до мешања; ц) каскада $11 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ ^{152}Gd , овде правац другог фотона има тенденцију да прати правац нормалан на емисију првог фотона. Црткана линија означава несигурност функције угаоних корелација због мерне несигурности односа мешања; д) Каскада $10 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ ^{152}Sm , исто као под ц) само што је ефекат мање изражен; е) Каскада $16 \rightarrow 9 \rightarrow 0$ ^{152}Sm , правац емисије другог фотона има тенденцију да прати правац другог фотона али је несигурност веома изражена.

Одређивање односа мешања се управо базира на експерименталном одређивању функције $W(\theta)$ [66]. Међутим, услед коначних димензија детектора, угао између правца фотона је одређен само у неком интервалу, па се мора вршити корекција и усредњавање по просторном углу. Ефикасност детекције је функција упадног угла фотона па се и ту морају вршити корекције. Добијена функција се фитује сумом Лежандрових полинома. Због тога, мерења се интерпретирају као усредњене вредности по ефективном просторном углу под којима се виде детектори од тачкастог извора за дати угао између оса детектора. Добијена функција представља функцију ефективних угаоних корелација и израчунава се по формули:

$$w_{eff}(\theta) = \sum_{k=parno}^{k_{max}} A_{kk} P_k(\cos \theta) Q_k(\gamma_1) Q_k(\gamma_2) \quad (6.1.7)$$

где је $Q_k(\gamma_1)$ атенуациони коефицијент за детектор намењен детектовању првог фотона и $Q_k(\gamma_2)$ атенуациони коефицијент за детектор намењен детектовању другог фотона из каскаде.

При мерењу активности помоћу једног детектора, коефицијенти угаоних корелација се сматрају познатим, а задатак је одредити функцију ефективних угаоних корелација за дато растојање тачкасти извор-детектор.

У случају једног детектора и тачкастог извора који је постављен аксијално (Слика 6.2.б), угао θ у формули (6.1.7) је једнак нули (угао $\varphi=0$, према Слици 6.2.а), а угаоне корелације гама фотона емитованих при прелазу $I_i \xrightarrow{\gamma_1} I \xrightarrow{\gamma_2} I_f$ (I_i, I, I_f ; спинови нивоа) се описују функцијом ефективних угаоних корелација чији крајњи облик зависи од растојања извора од детектора [47], а дата је са:

$$w_{eff}(d) = \sum_{k=parno}^{k_{max}} A_{kk} Q_k(\gamma_1) Q_k(\gamma_2) \quad (6.1.8)$$

где су A_{kk} коефицијенти угаоних корелација, $Q_k(\gamma_1)$ и $Q_k(\gamma_2)$ су атенуациони корекциони фактори за први и други гама зрак емитован у каскади.

Атенуациони фактори који фигуришу у (6.1.8) се односе на попаравку услед коначних димензија и ефикасности детектора. За случај аксијалне симетрије могу се према [67, 68] изразити преко

$$Q_k(\gamma_i) = \frac{J_k(\gamma_i)}{J_0(\gamma_i)}, \quad (6.1.9)$$

где је

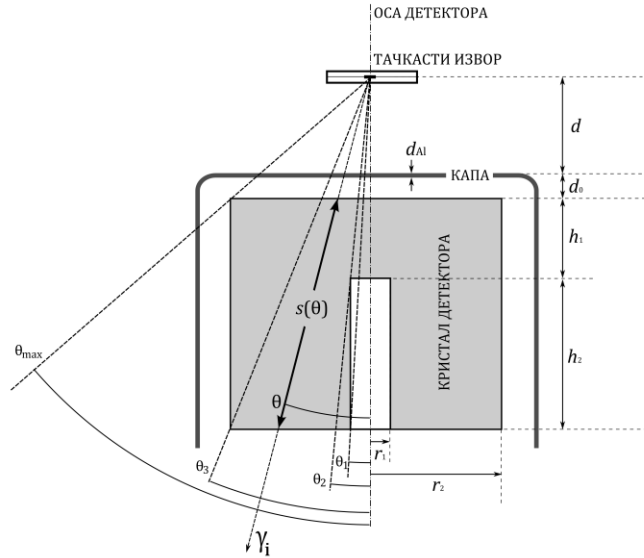
$$J_k(\gamma_i) = \int_0^{\theta_{max}} P_k(\cos \theta) \varepsilon(\theta, \gamma_i) \sin \theta d\theta. \quad (6.1.10)$$

$P_k(\cos \theta)$ су обични Лежандрови полиноми реда k ; $\varepsilon(\theta, \gamma_i)$ је ефикасност детекције γ_i фотона у функцији упадног угла θ .

Проблем налажења функције ефективних угаоних корелација (6.1.8) дакле захтева познавање детаљне шеме распада (спинови стања, мултиполност и однос мешања), а у случају аксијално постављеног тачкастог извора ефикасност детекције у функцији упадног угла фотона у односу на осу детектор извор за одговарајућу енергију фотона. За коаксијални германијумски детектор на Слици 6.4 дате су димензије којима је потребно располагати.

У интегралима дефинисаним са (6.1.10) фигурише ефикасност детекције у функцији упадног угла и енергије фотона. Ефикасност за дату геометрију се најтачније може израчунати помоћу Monte Carlo технике, на пример [69], неким од програма за трансфер ефикасности уколико је позната ефикасност у тачкастој геометрији за неко растојање извора од капе детектора [70, 71, 72, 73] или помоћу закона апсорпције гама зрачења [74]. Kim et al. [47] су за рачун ефикасности користили и MC код и закон апсорпције гама зрачења. Њихови резултати су показали да се за фотоне из извора ^{60}Co ефективне угаоне корелације добијене помоћу израчунатих ефикасности техником Monte Carlo не разликују више од око 0.8% ако су ефикасности рачунате једноставном применом закона апсорпције гама зрачења.

Рачун ефективних угаоних корелација помоћу закона апсорпције гама зрачења је много једноставнији од технике Monte Carlo, јер се лако прилагођава различитим енергијама фотона. Свакако, у било ком случају потребно је познавати све димензије детектора, дистрибуцију неактивних слојева германијума и прецизан положај извора.



Слика 6.4 Геометријска поставка извор-детектор са ознакама димензија потребних за израчунавање ефективних угаоних корелација помоћу закона апсорпције. Назначене области дефинисане угловима у којима се врши интеграција су такође приказани.

У циљу налажења функције ефективних угаоних корелација (6.1.8) потребно је одредити релативну ефикасност за енергије фотона из каскаде у функцији упадног угла рачунат у односу на осу детектора. Према закону апсорпције гама зрачења, вероватноћа за некохерентно расејање гама кванта на атомима германијума може се изразити преко формуле:

$$\mathcal{E}_{inc}(\gamma_i) = 1 - \exp(-\mu_{Ge}(\gamma_i)s) \quad (6.1.11)$$

где је $\mu_{Ge}(\gamma_i)$ линеарни атенуациони коефицијент за Германијум (комптоново расејање, производња парова и фотоелектрични ефекат) за енергију фотона γ_i ; s је максимална дужина расположиве путање. Дужина путање s је функција упадног угла θ , што се јасно види на Слици 6.4, где је приказан тачкасти извор постављен у оси коаксијалног германијумског детектора.

Како је кристал детектора смештен у кућиште од алуминијума, постоји вероватноћа да фотон буде расејан пре него што доспе у осетљиву запремину германијума. Ако се то узме у обзир, релацију (6.1.11) још треба помножити са вероватноћом апсорпције у алуминијуму

$$\exp(-\mu_{Al}(\gamma_i)s_{Al}) \quad (6.1.12)$$

где је $\mu_{Al}(\gamma_i)$ линеарни атенуациони коефицијент за алуминијум за фотон енергије γ_i , при чему је s_{Al} расположива путања у алуминијуму која је такође функција упадног угла θ . С обзиром на геометријску поставку (Слика 6.4) и горње разматрање, ефикасност за детекцију γ_i фотона је дата са:

$$\varepsilon(\theta, \gamma_i) = \exp(-\mu_{Al}(\gamma_i) \frac{d_{Al}}{\cos \theta}) \times \begin{cases} (1 - \exp(-\mu_{Ge}(\gamma_i) \frac{h_1}{\cos \theta})) & , 0 \leq \theta \leq \theta_1 \\ (1 - \exp(-\mu_{Ge}(\gamma_i) (\frac{d_0 + 2h_1 + h_2 + d}{\cos \theta} - \frac{r_1}{\sin \theta}))) & , \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 \\ (1 - \exp(-\mu_{Ge}(\gamma_i) \frac{h_1 + h_2}{\cos \theta})) & , \theta_2 \leq \theta \leq \theta_3 \\ (1 - \exp(-\mu_{Ge}(\gamma_i) (\frac{r_2}{\sin \theta} - \frac{d + d_0}{\cos \theta}))) & , \theta_3 \leq \theta \leq \theta_{\max} \end{cases} \quad (6.1.13)$$

где су области у којима важи одговарајућа функцију (6.1.13) дефинисане са

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \arctan \frac{r_1}{d_0 + d + h_1 + h_2} \\ \theta_2 &= \arctan \frac{r_1}{d_0 + d + h_1} \\ \theta_3 &= \arctan \frac{r_2}{d_0 + d + h_1 + h_2} \\ \theta_{\max} &= \arctan \frac{r_2}{d_0 + d} \end{aligned} \quad (6.1.14)$$

Ознаке које фигуришу у (6.1.13) и (6.1.14) дате су на Слици 6.4 уз нумеричке податке у Табели 6.2 за коаксијалног HPGe детектор релативне ефикасности 35% који је коришћен у експериментима у овом раду.

Табела 6.2 Подаци о детектору потребни за израчунавање ефективних угаоних корелација.

h_1	17.1 mm
h_2	34 mm
r_1	4.5 mm
r_2	29.6 mm
ρ_{Ge}	5.323 g/cm ³
ρ_{Al}	2.700 g/cm ³
d_0	6.4(9) mm
d_{Al}	1.5 mm

Подаци који се односе на линеарне атенуационе коефицијенте за алуминијум и германијум у функцији енергије фотона добијени су помоћу X-com (NIST) базе података са интернета. Одговарајући атенуациони коефицијенти добијени су интерполацијом одговарајућих тачака. Димензије детектора су биле дате уз пратећу документацију детектора. Највећа несигурност односи се на удаљеност горње површине кристала германијума од капе детектора која износи ± 0.9 mm.

Интеграл дефинисан са (6.1.10) није могуће израчунати аналитички, па је коришћен нумерички поступак у оквиру софтверског пакета *Mathematica* [75]. Написана је комплетна процедура у програму *Mathematica* која на основу задатих

димензија детектора и карактеристика фотона и прелаза омогућава да се израчуна поправка на ефективне угаоне корелације (Прилог А). Функција је дефинисана у општем смислу и може се употребити за било коју каскаду за произвољан коаксијалан HPGe детектор. Овде је дат само крајњи образац прилагођен *Mathematici*, којим се позива функција за израчунавање поправке на ефективне угаоне корелације за тачкасти извор који се налази на одређеном растојању од капе детектора:

$$\text{weff} = [\{E_1, L_1, \delta_1\}, \{E_2, L_2, \delta_2\}, \{I_i, I, I_f\}, \{h, H, d_1, d_2, r, l, dl, d_a, x\}] \quad (6.1.15)$$

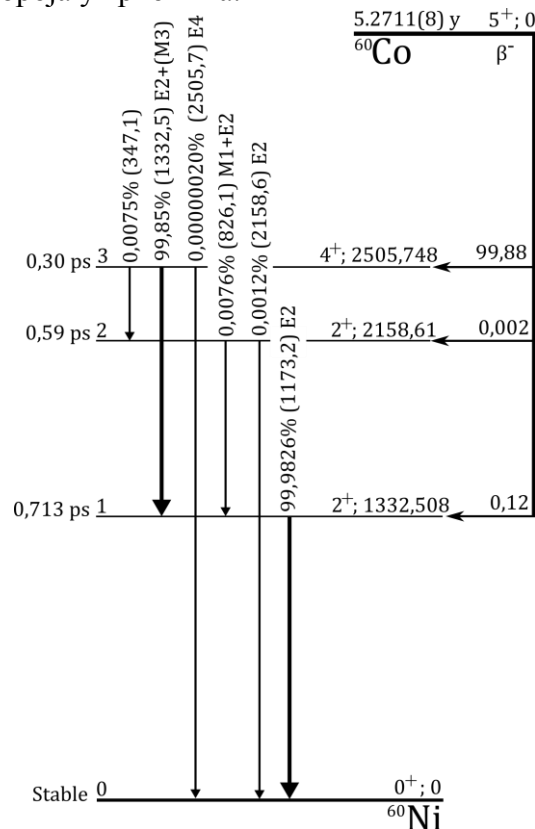
Потребно је унети следеће податке: E_1 и E_2 енергије првог и другог фотона емитованог у каскади у јединицама keV; L_1 и L_2 - одговарајуће ниже мултиполности такође првог и другог фотона; δ_1 и δ_2 су односи мешења (*mixing ratio*); I_i , I и I_f су спинови почетног, интермедијарног и финалног стања респективно; у четвртој витичастој загради треба унети димензије које се односе на детектор и геометријску поставку, а одговарајуће ознаке конзистентне су са ознакама приказаним на Слици 6.4.

7 Примена методе сумарног врха на изворе ^{60}Co , ^{133}Ba и ^{152}Eu

У претходним одељцима су дефинисане корекције које се могу применити у методи сумарног врха ради постизања веће тачности. Радиоизотопи ^{60}Co , ^{133}Ba и ^{152}Eu имају различите шеме распада и стога је метод потребно прилагодити датој шеми. У том смислу овде ће бити изведене формуле за мерење активности помоћу спектралних података са одговарајућим корекцијама за сваки радиоизотоп.

7.1 Извор ^{60}Co

Извор ^{60}Co се распада емисијом β^- честице уз емисију γ -фотона. Према шеми распада (Слика 7.1) и подацима [76], распад Co^{60} у 99.9988% случајева иде преко неких побућених стања ^{60}Ni , а у 99.85% емитују се два фотона у каскади. Ако се занемаре остали прелази врло слабог интензитета, модел објашњен у поглављу 4 је у потпуности применљив. Међутим уколико није реализована 2π геометрија, у формуле се морају увести корекције на ефективне угаоне корелације. Такође, потребно је унети и одговарајуће корекције на допринос случајних коинциденција у сумарном врху и корекције на губитке одброја у врховима.



Слика 7.1 Шема распада изотопа Co-60 према [76].

Према датој шеми распада, ако занемаримо интерну конверзију, брзина бројања у врху пуне енергије на енергији 1173.2 keV је

$$N_1 = A\varepsilon_1(p_1 + p_2(1 - \eta_2 w_{eff}))L_\tau, \quad (7.1.1)$$

где је A активност извора, ε_1 је ефикасност врха пуне енергије за фотон енергије 1173.2 keV; p_1 је вероватноћа реализације путање $3 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ (Слика 7.1); p_2 је вероватноћа да се реализује путања $1 \rightarrow 0$; η_2 је тотална ефикасност за фотон енергије 1332.5 keV; w_{eff} је фактор ефективних угаоних корелација каскадних фотона енергије 1173.2 и 1332.5 keV; L_τ је поправка за губитке услед ефективног времена резолуције дефинисан преко (5.2.2) и (5.2.6).

Брзина бројања у врху на енергији 1332.5 keV је:

$$N_2 = A\varepsilon_2 p_2 (1 - \eta_1 w_{eff}) L_\tau. \quad (7.1.2)$$

Брзина бројања у сумарном врху је:

$$N_\Sigma = A p_2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 L_\tau w_{eff} + N_C, \quad (7.1.3)$$

где је N_C допринос одброја у сумарном врху услед случајних коинциденција.

Тотална брзина бројања, при чему се губици на случајне коинциденције занемарују је:

$$N_T = A(p_1 \eta_1 + p_2(\eta_2 + \eta_1 - \eta_1 \eta_2 w_{eff})) \quad (7.1.4)$$

Ако елеминишемо ефикасности из система (7.1.1, 7.1.2, 7.1.3 и 7.1.4) налазимо формулу за израчунавање активности:

$$A = \left(N_T + \frac{N_1 N_2}{(N_\Sigma - N_C) L_\tau} \right) w_{eff}. \quad (7.1.5)$$

Уврштавањем одброја случајних коинциденција у сумарном врху преко (5.1.7), у Формулу (7.1.5), налазимо

$$A = \left(N_T + \frac{N_1 N_2}{(N_\Sigma - 2\sqrt{N_1' N_2'}) L_\tau} \right) w_{eff}, \quad (7.1.6)$$

у којој фигуришу само спектрални подаци и фактор корекције на случајне коинциденције L_τ и ефективне угаоне корелације w_{eff} .

За мали допринос случајних коинциденција у сумарном врху ($N_C \ll N_\Sigma$), формула (7.1.5) се може другачије написати применом Тајлорове формуле за развој у ред у околини тачке 0:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!} f''(0)x^2 + \dots \quad (7.1.7)$$

У том циљу напишимо (7.1.5) у нешто другачијој форми:

$$A = \left(N_T + \frac{N_1 N_2}{N_\Sigma (1 - N_C / N_\Sigma) L_\tau} \right) w_{eff} = \left(N_T + \frac{N_1 N_2}{N_\Sigma L_\tau} \frac{1}{1-x} \right) w_{eff} = \left(N_T + \frac{N_1 N_2}{N_\Sigma L_\tau} f(x) \right) w_{eff} \quad (7.1.8)$$

где је $f(x) = \frac{1}{1-x}$, и $x = \frac{N_C}{N_\Sigma}$.

Узимањем само прва два члана ($f(x) \approx 1+x$), развоја у ред, добијамо:

$$A = \left(N_T + \frac{N_1 N_2}{N_\Sigma L_\tau} + \frac{N_1 N_2}{N_\Sigma L_\tau} \frac{N_C}{N_\Sigma} \right) w_{eff} = \left(N_T + \frac{N_1 N_2}{N_\Sigma L_\tau} + \frac{N_1 N_2 N_C}{N_\Sigma^2 L_\tau} \right) w_{eff} \quad (7.1.9)$$

при чему је $N_C = 2\tau N_1 N_2$ према (5.1.6). Ако сада одброј случајних коинциденција N_C изразимо преко (5.1.6) и трећи члан помножимо са τ / τ , формула (7.1.9) постаје:

$$A = \left(N_T + \frac{N_1 N_2}{N_\Sigma L_\tau} + \frac{N_1 N_2 2\tau N_1 N_2}{N_\Sigma^2 L_\tau} \frac{\tau}{\tau} \right) w_{eff} = \left(N_T + \frac{N_1 N_2}{N_\Sigma L_\tau} + 2 \frac{(\tau N_1^2)(\tau N_2^2)}{(\tau N_\Sigma^2) L_\tau} \right) w_{eff}. \quad (7.1.10)$$

С обзиром на (5.1.5) изрази у заградама у (7.1.10) се могу написати као:

$$A = \left(N_T + \frac{N_1 N_2}{N_\Sigma L_\tau} + 2 \frac{N'_1 N'_2}{N'_\Sigma L_\tau} \right) w_{eff}, \quad (7.1.11)$$

где су N'_1 , N'_2 врхови случајних коинциденција за фотоне из каскада и налазе се на 2346 keV, 2664 keV и N'_Σ на 5011 keV је врх случајних коинциденција сумарног врха. Тачност апроксимативне формуле (7.1.11) је боља од 1% уколико је допринос случајних коинциденција у сумарном врху мањи од 10%. У формули (7.1.11) се види да је апсолутна активност извора ^{60}Co мерљива преко спектралних података који су резултат регуларних сигнала и сигнала који се преклапају унутар ефektivног времена резолуције, а потичу од детектовања фотона из распада два различита језгра. У том смислу, спектар је збир регуларних и коинцидентних сигнала. Због тога се може сматрати да се и тотални одброј састоји од регуларног и коинцидентног. У Формули (7.1.11) тотална брзина бројања се може написати као збир једноструких догађаја N_T^0 и двоструких догађаја N'_T :

$$A = \left(N_T^0 + \frac{N_1 N_2}{N_\Sigma L_\tau} + 2 \left(N'_T + \frac{N'_1 N'_2}{N'_\Sigma L_\tau} \right) \right) w_{eff} \quad (7.1.12)$$

Иако Формула (7.1.12) није директно применљива и захтева снимање спектра у ширем енергетском интервалу (0-5020 keV), помоћу ње се на елегантини начин врши корекција на случајне коинциденције у сумарном врху. Такође произилази да се спектрални подаци на већим брзинама бројања састоје од једног регуларног спектра и његове копије где се регуларни и сумарни врх налазе на двоструко већим енергијама.

Са друге стране формула (7.1.6) није апроксимативна али се може другачије написати уколико се фактор за губитке у врховима L_τ експлицитно изрази преко времена резолуције, тј. преко спектралних података. На основу дискусије о случајним коинциденцијама, L_τ у формули (7.1.6) се може изразити преко (5.2.2), и ефektivног

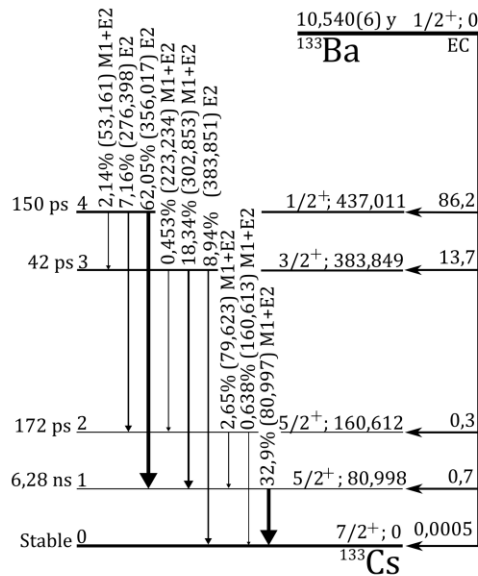
времена резолуције датим са једначином (5.2.6). Тада се добија формула за мерење активности у којој фигуришу само спектрални подаци и поправка на ефективне угаоне корелације:

$$A = N_T \left(\left(\left(\frac{N_\Sigma}{2\sqrt{N'_1 N'_2}} - 1 \right) \left(\sqrt{\frac{4N_T \sqrt{N'_1 N'_2}}{N_1 N_2} + 1} - 1 \right) \right)^{-1} + 1 \right) w_{eff} . \quad (7.1.13)$$

Формула (7.1.13) је применљива за било који изотоп који се распада путем емисије два каскадна фотона без *crossover* прелаза и директног распада у основно стање потомка. Од калибрационих извора то су још ^{24}Na и ^{46}Sc [76] за која нису потребна додатна разматрања.

7.2 Извор ^{133}Ba

Извор ^{133}Ba је радиоизотоп који се распада путем захвата електрона. Шема распада према [77] је дата на Слици 7.2.



Слика 7.2 Шема распада извора ^{133}Ba .

Каскада $4 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ је база за развој коинцидентне технике на једном детектору јер нема директан *crossover* прелаз. Могућа су два приступа. Развој методе разматрањем свих путања распада и исхода у детектору [54] укључујући могућност случајних коинциденција, и развој једноставне методе која подразумева израчунавање додатног корекционог фактора.

7.3 Метод свих исхода са случајним коинциденцијама

Поступак за формирање једначина бројања за све врхове пуне апсорпције и тоталну брзину бројања разматрајући све путање и исходе у детектору за изотоп ^{133}Ba је дат у [55, 78]. Ослањајући се на третман случајних коинциденција дефинисан у одељцима 5.1 и 5.2, овде ће бити дат поступак за добијање једначина бројања које укључују и случајне коинциденције.

Ако разматрамо неку сложену шему распада, одброј у врху пуне енергије у општем случају на енергији E_i резултат је догађаја потпуне апсорпције једног фотона енергије E_i и потпуне апсорпције два или више потпуно апсорбована фотона (право коинцидентно сумирање) чији је збир енергија једнак E_i а емитовани су из појединачних распада језгра. Допринос у врху на енергији E_i услед ових догађаја обележено је са $N'(E_i)$. Такође допринос одброја у врху пуне енергије могу дати случајне коинциденције које су резултат потпуне апсорпције два или више фотона која потичу из распада два језгара која су се десила у интервалу времена мањем од ефективног времена резолуције спектрометра. Допринос случајних коинциденција у врху пуне енергије од случајних коинциденција обележено је са $N''(E_i)$. Укупан одброј у врху пуне енергије се на основу ових разматрања може написати као:

$$N(E_i) = N'(E_i) + N''(E_i) \quad (7.3.1)$$

где се један прим односи на једноструке догађаје, а двоприм на двоструке догађаје (случајне коинциденције).

Разматрајући шему распада може се креирати скуп свих енергија које одговарају потпуним апсорпцијама емитованих фотона

$$\mathbf{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_n\} \quad (7.3.2)$$

са вероватноћама

$$\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}. \quad (7.3.3)$$

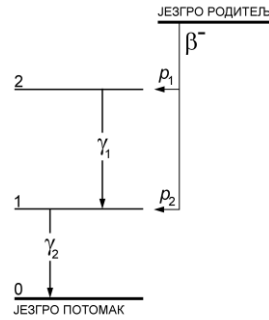
Брзине бројања у врховима пуне енергије услед једноструких догађаја ће бити дате општим изразом:

$$N'(E_i) = AP_i L_\tau. \quad (7.3.4)$$

Са друге стране, допринос одброја у врху на енергији E_i услед случајних коинциденција према (5.1.5) је

$$N''(E_i) = \tau A^2 \sum_{j,k} P_j P_k. \quad (7.3.5)$$

где су P_j , и P_k вероватноће за исход пуних апсорпција на енергијама E_j и E_k при чему мора важити $E_i = E_j + E_k$.



Слика 7.3 Пример једноставне шеме распада на коју се може применити метод свих исхода.

Као пример размотримо једноставну шему распада дату на Слици 7.3 Скуп свих могућих енергија за догађаје без случајних коинциденција је:

$$\mathbf{E} = \{E_1, E_2, E_3\}, \quad (7.3.6)$$

где су E_1 и E_2 енергије за врхове пуне енергије фотона γ_1 и γ_2 ; E_3 је енергија која одговара сумарном врху ($E_3 = E_1 + E_2$). Вероватноће за исход догађаја на енергијама у скупу (7.3.6) су

$$\mathbf{P} = \{P_1, P_2, P_3\}, \quad (7.3.7)$$

где је P_1 вероватноћа за исход који подразумева потпуну апсорпцију само фотона енергије E_1 , P_2 вероватноћа за исход потпуне апсорпције само фотона E_2 и P_3 вероватноћа за потпуну апсорпцију оба фотона што резултира одброју на енергији E_3 .

Могуће депоноване енергије услед случајних коинциденција су:

$$\mathbf{E}_C = \mathbf{E} \oplus \mathbf{E}, \quad (7.3.8)$$

где \oplus означава да се сваки елемент из скупа \mathbf{E} мора сабрати са сваким из истог скупа. Резултат је:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_C &= \{2E_1, E_1 + E_2, E_1 + E_3, E_2 + E_1, 2E_2, E_2 + E_3, E_3 + E_1, E_3 + E_2, 2E_3\} = \\ &= \{E_{C1}, E_{C2}, E_{C3}, E_{C4}, E_{C5}, E_{C6}, E_{C7}, E_{C8}, E_{C9}\} \end{aligned}, \quad (7.3.9)$$

што значи да случајне коинциденције доносе још 5 *pile-up* врхова и допринос у сумарном врху на енергији $E_1 + E_2$. Енергије на којима се јављају врхови у спектру су дефинисани унијом скупова (7.3.6) и (7.3.9)

$$\mathbf{E}_U = \mathbf{E} + \mathbf{E}_C, \quad (7.3.10)$$

што је за конкретни пример

$$\mathbf{E}_U = \{E_1, E_2, E_3, E_{C1}, E_{C3}, E_{C5}, E_{C6}, E_{C9}\}, \quad (7.3.11)$$

јер у скупу (7.3.9) има енергија које се понављају ($E_{C2} = E_{C4} = E_3$, $E_{C3} = E_{C7}$, $E_{C6} = E_{C8}$).

Вероватноће за дате исходе случајних коинциденција дефинисаних скупом (7.3.9) се могу рачунати множењем одговарајућих вероватноћа из скупа (7.3.7) који садржи 3 елемента,

$$\mathbf{P}_C = \mathbf{P} \otimes \mathbf{P} \quad (7.3.12)$$

где \otimes означава да се сваки елемент из скупа \mathbf{P} множи са сваким елементом из истог скупа. За конкретан пример:

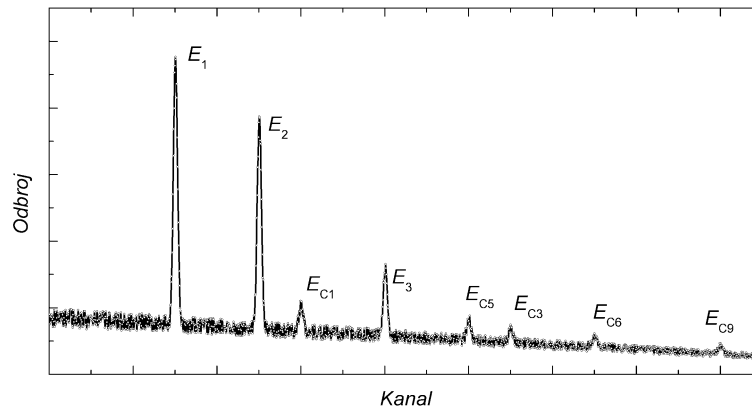
$$\begin{aligned} \mathbf{P}_C = \{P_1^2, P_1P_2, P_1P_3, P_2P_1, P_2^2, P_2P_3, P_3P_1, P_3P_2, P_3^2\} = \\ \{P_{C1}, P_{C2}, P_{C3}, P_{C4}, P_{C5}, P_{C6}, P_{C7}, P_{C8}, P_{C9}\} \end{aligned} \quad (7.3.13)$$

Конечна једначина бројања за за било који врх (регулатни, сумарни или *pile-up*), с обзиром на (7.3.1), (7.3.4), (7.3.5) и (7.3.13) на енергији E_i је дата са:

$$N(E_i) = AP_iL_\tau + \tau A^2 \left(\sum_j P_{Cj} \right)_{E_i} \quad (7.3.14)$$

где су P_{Cj} све вероватноће из скупа (7.3.13) са исходима на енергији E_i из скупа (7.3.9). У случају прости шеме распада датај на Слици 7.3 налазимо једначине бројања за све врхове који се могу појавити у спектру.

$$\begin{aligned} N(E_1) &= AP_1L_\tau \\ N(E_2) &= AP_2L_\tau \\ N(E_3) &= AP_3L_\tau + 2\tau A^2 P_1P_2 \\ N(E_{C1}) &= \tau A^2 P_1^2 \\ N(E_{C3}) &= 2\tau A^2 P_1P_3 \\ N(E_{C5}) &= \tau A^2 P_2^2 \\ N(E_{C6}) &= 2\tau A^2 P_2P_3 \\ N(E_{C9}) &= \tau A^2 P_3^2 \end{aligned} \quad (7.3.15)$$



Слика 7.4 Пример спектра са врховима пуне енергије (E_1, E_2), сумарним врхом (E_3) и *pile-up* врховима ($E_{C1}, E_{C3}, E_{C5}, E_{C6}, E_{C9}$) у којима је брзина бројања дата са (7.3.15).

На Слици 7.4 приказан је симулирани спектар где се појављују сви врхови дефинисани једначинама датим са (7.3.15).

7.3.1 Једначине бројања за ^{133}Ba

Према [55] за изотоп ^{133}Ba ако се узму у обзир и X-фотони који су резултат захвата електрона и интерне конверзије, скуп могућих енергија које одговарају потпуним апсорпцијама фотона садржи 167 елемената:

$$\mathbf{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_{167}\}, \quad (7.3.1.1)$$

којима одговара скуп вероватноћа:

$$\mathbf{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_n\} \quad (7.3.1.2)$$

Ако укључимо случајне коинциденције помоћу једначина (7.3.8) и (7.3.12) добијамо скуп који садржи 27889 елемената међу којима има 2369 различитих. Случајне коинциденције доносе 27889 различитих исхода са потпуним апсорпцијама фотона али са енергијама од којих су 2369 различите. Ово је утврђено анализом скупа у програму *Mathematica*. Ако се узму у обзир регуларни догађаји дефинисани скупом енергија (7.3.1.1) добијамо скуп од 2375 енергија:

$$\mathbf{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_{2375}\} \quad (7.3.1.3)$$

од којих 6 врхова одговара потпуним апсорпцијама једног фотона без могућих доприноса случајних коинциденција, 161 су регуларни и сумарни врхови у којима је присутан допринос од правих и случајних коинциденција, а 2208 су чисти врхови случајних коинциденција, тј. *pile-up* врхови. Ако се размотри спектар извора ^{133}Ba добијен помоћу коаксијалног HPGe детектора (Слика 7.5) који има малу ефикасност у нискоенергетској области, заључујемо да није потребно разматрати цео скуп дефинисан са (7.3.1.3). Дакле иако теорија предвиђа 167 врхова у спектру, многи од њих биће веома слабог интензитета те се и њихове случајне коинциденције могу занемарити. У том смислу креиран је скуп који одговара енергијама емитованих фотона и најинтензивнијег сумарног врха:

$$\mathbf{E} = \{30.08, 35.3, 53.16, 79.61, 81.0, 160.61, 223.24, 276.4, 302.85, 356.01, 357.4, 383.85, 437.01\} \quad (5.24) \quad (7.3.1.4)$$

Сада према (7.3.8) помоћу скупа (7.3.1.4) налазимо скуп енергија које одговарају догађајима случајних коинциденција,

$$\mathbf{E}_C = \{61.6, 66.1, 70.6, 83.96, 88.46, 106.32, 110.41, 111.8, 114.91, 116.3, 132.77, 134.16, 159.22, 160.61, 162.0, 191.41, 195.91, 213.77, 240.22, 241.61, 254.04, 258.54, 276.4, 302.85, 304.24, 307.2, 311.7, 321.22, 329.56, 333.65, 338.15, 356.01, 357.4, 382.46, 383.85, 386.81, 388.2, 391.31, 392.7, 409.17, 410.56, 414.65, 419.15, 435.62, 437.01, 438.4, 446.48, 463.46, 464.85, 467.81, 472.31, 490.17, 499.64, 516.62, 518.01, 526.09, 544.46, 552.8, 579.25, 580.64, 597.62, 605.7, 607.09, 632.41, 633.8, 658.86, 660.25, 686.7, 712.02, 713.41, 714.8, 739.86, 741.25, 767.7, 793.02, 794.41, 820.86, 874.02\} \quad (7.3.1.5)$$

Енергије које су приказане укошеним словима у (7.3.1.5) односе се на врхове које могу настати само случајним коинциденцијама односно као резултат прихватања наседнутих сигнала (*pile-up*), док су преостале енергије иначе и резултат регуларних догађаја (право коинцидентно сумирање).

За случај ^{133}Ba , помоћу скупа (7.3.1.4) и (7.3.1.5) и процедуре описане у одељку 7.3. креиран је систем који укључује поправку на случајне коинциденције:

$$n(31) = N'(30.8)$$

$$n(35) = N'(35.3)$$

$$\begin{aligned}
n(53) &= N'(53.16) \\
n(81) &= N'(81.0) + N'(79.61) \\
n(161) &= N'(160.61) + N''(160.61) + N''(162.0) \\
n(223) &= N'(223.24) \\
n(276) &= N'(276.4) \\
n(303) &= N'(302.85) \\
n(356) &= N'(356.01) + N'(357.4) + N''(356.01) + N''(357.4) \\
n(384) &= N'(383.85) + N''(383.85) \\
n(437) &= N'(437.01) + N''(435.62) + N''(437.01) + N''(438.4) \\
n(712) &= N''(712.02) + N''(713.41) \\
n_r &= N_r \tag{7.3.1.6}
\end{aligned}$$

Као што се види систем (7.3.1.6), садржи додатну једначину на 712 keV што претставља чисти *pile-up* врх. Такође су присутни и додатни чланови у једначинама за допринос у регуларним врховима. У зависности од врсте детектора, систем једначина се може прилагодити експерименталним условима. На пример, уколико се користи детектор који има малу ефикасност за X-фотоне, треба само елементе који одговарају ефикасностима врха пуне енергије X-фотона на 31 и 35 keV у матрици ефикасности изједначити са нулом. Такође, уколико је спектар снимљен на мањим брзинама бројања и врх случајних коинциденција на 712 keV није уочљив, систем не треба модификовати него се као експериментални податак за брзину бројања у овом врху стави вредност нула.

За креирање и решавање система (7.3.1.6) написана је процедура помоћу програмског пакета *Mathematica* која је у целости дата у Прилогу Б. У оквиру одговарајућег програма, функција

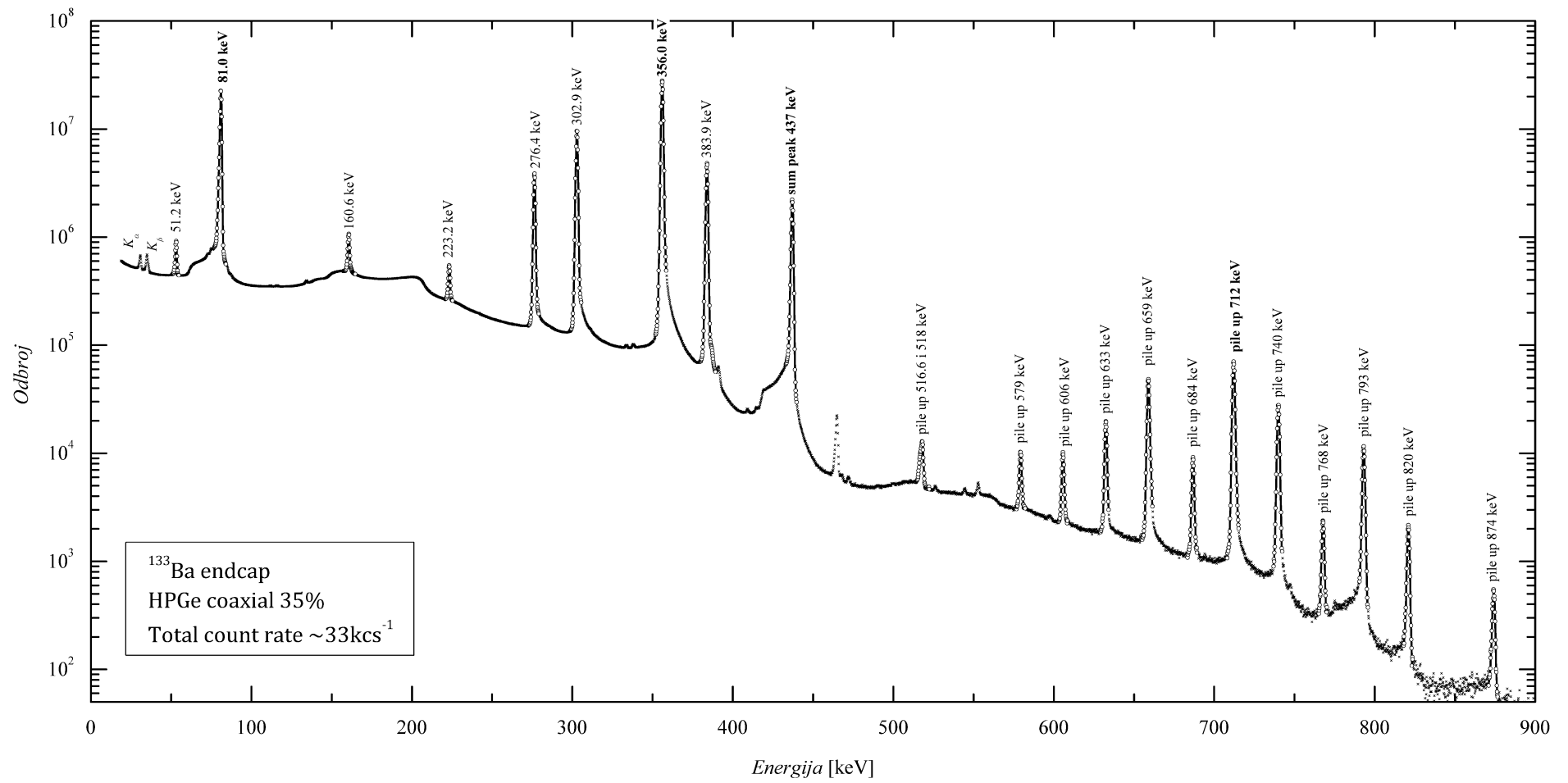
$$\text{resch}\{N53160_N81000_N160610_N223000_N276000_N302850_N356000_N383850_N437000_Npu_Nt_}\tag{7.3.1.7}$$

решава систем (7.3.1.6) у коме су ефикасности детекције X-фотона редуковане на нулу. У дату функцију треба унети одговарајуће брзине бројања на енергијама које су овде назначене у eV уз ознаку N (*net count rate*). N_{pu} се односи на *pile-up* врх на енергији 712 keV помоћу кога се практично врши корекција на случајне коинциденције. Уколико је у спектру врх на енергији 712 keV статистички безначајан, једноставно треба на место N_{pu} уписати нулу или веома мали број. Као решење за ефективно време резолуције спектрометра добиће се вредност блиска нули, што има смисао да је допринос случајних коинциденција у спектру безначајан. Ефективно време резолуције из спектралних података се може израчунати само ако су присутне случајне коинциденције у знатној мери. Иако се за корекцију на случајне коинциденције могао употребити било који други *pile-up* врх, врх на енергији 712 keV има највећи интензитет.

Са друге стране, решење које садржи могућност детекције X-фотона тражи се помоћу функције:

$$\text{reschX}\{N30800_N35300_N53160_N81000_N160610_N223000_N276000_N302850_N356000_N383850_N437000_Npu_Nt_}\tag{7.3.1.8}$$

Процедура која дефинише функцију за налажење активности извора ^{133}Ba на основу спектралних података где је укључена могућност детекције X-фотона такође је дата у Прилогу Б.



Слика 7.5 Гамма спектар тачкастог извора ^{133}Ba снимљен на капи коаксијалног HPGe детектора релативне ефикасности 35% у лабораторији за гамма спектрометрију Департмана за Физику у Новом Саду.

7.3.2 Поједностављени третман за изотоп ¹³³Ba

Систем једначина (7.3.1.6) је егзактан, међутим његово креирање и решавање захтева употребу одговарајућег софтвера. Знатно поједностављење анализе једначина бројања се добија ако се спектар снима на детектору који има малу ефикасност за X-фотоне. У том циљу уводимо редуковане ефикасности врха пуне енергије које дефинишемо са:

$$\tilde{\epsilon}_{i,f} = \frac{\epsilon_{i,f}}{1 + \alpha_{i,f}}, \quad (7.3.2.1)$$

где су $\alpha_{i,f}$ тотални конверзиони коефицијенти за прелаз из стања $i \rightarrow f$; $\epsilon_{i,f}$ су ефикасности врха пуне енергије за гама-фотон који се емитује у прелазу $i \rightarrow f$. Редуковане ефикасности овде уводимо јер се једначине за брзине бројања лакше креирају уколико се користе вероватноће прелаза, а не интензитети линија. У том смислу редуковане ефикасности се могу схватити као ефикасности детектора где је омотач језгра неактиван део детектора. Уколико дође до интерне конверзије, фотон није детектован. Слично уводимо редуковане тоталне ефикасности

$$\tilde{\eta}_{i,f} = \frac{\eta_{i,f}}{1 + \alpha_{i,f}} \quad (7.3.2.2)$$

где је $\eta_{i,f}$ тотална ефикасност за фотон емитован при прелазу $i \rightarrow f$.

Брзина бројања у врху на енергији 81 keV при чему сматрамо да се врх на енергији 79.6 keV не може раздвојити од врха на 81 keV, разматрајући све путање распада према шеми приказаној на Слици 7.2 и уведеним редукованим ефикасностима (7.3.2.1) и (7.3.2.2) је

$$N(81) = A\tilde{\epsilon}_{10} [p_{5410}(1 - \tilde{\eta}_{41}) + p_{54210}(1 - \tilde{\eta}_{42})(1 - \tilde{\eta}_{21}) + p_{54310}(1 - \tilde{\eta}_{43})(1 - \tilde{\eta}_{31}) + p_{543210}(1 - \tilde{\eta}_{43})(1 - \tilde{\eta}_{32})(1 - \tilde{\eta}_{21}) + p_{5310}(1 - \tilde{\eta}_{31}) + p_{53210}(1 - \tilde{\eta}_{32})(1 - \tilde{\eta}_{21})](1 + c_1)L_r \quad (7.3.2.3)$$

где индекси означавају одговарајуће путање; p је вероватноћа за реализацију путање која је назначена у индексу; c_1 је корекциони фактор који се узима у обзир ако врх на енергији од 79.6 keV није раздвојен од врха на енергији 81 keV са задовољавајућом тачношћу и дат је са:

$$c_1 = \frac{\left(1 - \frac{\eta_{41}}{1 + \alpha_{41}}\right) \left(p_{54210} \left(1 - \frac{\eta_{42}}{1 + \alpha_{42}}\right) + \left(1 - \frac{\eta_{32}}{1 + \alpha_{32}}\right) \left(p_{543210} \left(1 - \frac{\eta_{43}}{1 + \alpha_{43}}\right) + p_{53210} \right) \right)}{p_{5410} \left(1 - \frac{\eta_{41}}{1 + \alpha_{41}}\right) + \left(1 - \frac{\eta_{31}}{1 + \alpha_{31}}\right) \left(p_{54310} \left(1 - \frac{\eta_{43}}{1 + \alpha_{43}}\right) + p_{5310} \right) + \left(1 - \frac{\eta_{21}}{1 + \alpha_{21}}\right) \left(p_{54210} \left(1 - \frac{\eta_{42}}{1 + \alpha_{42}}\right) + \left(1 - \frac{\eta_{32}}{1 + \alpha_{32}}\right) \left(p_{543210} \left(1 - \frac{\eta_{43}}{1 + \alpha_{43}}\right) + p_{53210} \right) \right)} \quad (7.3.2.4)$$

где су η одговарајуће тоталне ефикасности.

Једначина за брзину бројања у врху на енергији 356 keV је:

$$N(356) = A(1 - \tilde{\eta}_{10})(p_{5410}\tilde{\epsilon}_{41} + p_{54210}\tilde{\epsilon}_{42}\tilde{\epsilon}_{21} + p_{54310}\tilde{\epsilon}_{43}\tilde{\epsilon}_{31} + p_{543210}\tilde{\epsilon}_{43}\tilde{\epsilon}_{32}\tilde{\epsilon}_{21})(1 + c_2)L_r \quad (7.3.2.5)$$

где је корекциони члан c_2 дат са:

$$c_2 = \frac{\frac{\varepsilon_1}{1+\alpha_1} \left(p_{54210} \frac{\varepsilon_{42}}{1+\alpha_{42}} + p_{543210} \frac{\varepsilon_{43}}{1+\alpha_{43}} \frac{\varepsilon_{32}}{1+\alpha_{32}} \right)}{p_{5410} \frac{\varepsilon_{41}}{1+\alpha_{41}} + p_{54310} \frac{\varepsilon_{43}}{1+\alpha_{43}} \frac{\varepsilon_{31}}{1+\alpha_{31}} + \frac{\varepsilon_1}{1+\alpha_1} \left(p_{54210} \frac{\varepsilon_{42}}{1+\alpha_{42}} + p_{543210} \frac{\varepsilon_{43}}{1+\alpha_{43}} \frac{\varepsilon_{32}}{1+\alpha_{32}} \right)}, \quad (7.3.2.6)$$

а произилази из чињенице да догађаји потпуне апсорпције на енергији 357.4 keV који се не могу одвојити од догађаја на 356 keV који настају као резултат детекције фотона из прелаза $4 \rightarrow \dots \rightarrow 2$ и $1 \rightarrow 0$ без детекције фотона на енергији 79.6 keV.

Брзина бројања у сумарном врху на енергији 437 keV је:

$$N(437) = A(p_{5410} \tilde{\varepsilon}_{41} \tilde{\varepsilon}_{10} + p_{54210} \tilde{\varepsilon}_{42} \tilde{\varepsilon}_{21} \tilde{\varepsilon}_{10} + p_{54310} \tilde{\varepsilon}_{43} \tilde{\varepsilon}_{31} \tilde{\varepsilon}_{10} + p_{543210} \tilde{\varepsilon}_{43} \tilde{\varepsilon}_{32} \tilde{\varepsilon}_{21} \tilde{\varepsilon}_{10})(1+c_\Sigma)L_\tau + N_C \quad (7.3.2.7)$$

где је N_C допринос одброја у врху услед случајних коинциденција, а корекциони фактор је одређен са:

$$c_\Sigma = \frac{\frac{\varepsilon_{20}}{1+\alpha_{20}} \left(p_{54320} \frac{\varepsilon_{43}}{1+\alpha_{43}} \frac{\varepsilon_{32}}{1+\alpha_{32}} + p_{5420} \frac{\varepsilon_{42}}{1+\alpha_{42}} \right) + p_{5430} \frac{\varepsilon_{43}}{1+\alpha_{43}} \frac{\varepsilon_{30}}{1+\alpha_{30}}}{\frac{\varepsilon_1}{1+\alpha_1} \left(p_{5410} \frac{\varepsilon_{41}}{1+\alpha_{41}} + p_{54310} \frac{\varepsilon_{43}}{1+\alpha_{43}} \frac{\varepsilon_{31}}{1+\alpha_{31}} + \frac{\varepsilon_1}{1+\alpha_1} \left(p_{54210} \frac{\varepsilon_{42}}{1+\alpha_{42}} + p_{543210} \frac{\varepsilon_{43}}{1+\alpha_{43}} \frac{\varepsilon_{32}}{1+\alpha_{32}} \right) \right)} \quad (7.3.2.8)$$

и јавља се услед постојања *crossover* прелаза за прво побуђено стање. Тотална брзина бројања је:

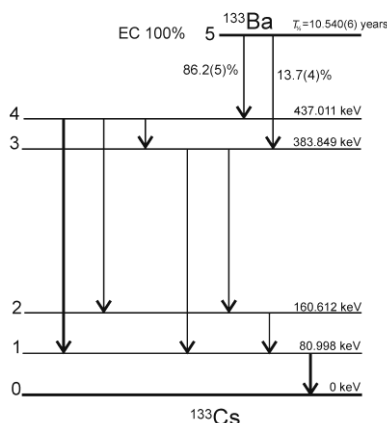
$$N_\tau = A(1 - [(1 - \tilde{\eta}_{10})(p_{5410}(1 - \tilde{\eta}_{41}) + p_{54210}(1 - \tilde{\eta}_{42})(1 - \tilde{\eta}_{21}) + p_{54310}(1 - \tilde{\eta}_{43})(1 - \tilde{\eta}_{31}) + p_{543210}(1 - \tilde{\eta}_{43})(1 - \tilde{\eta}_{32})(1 - \tilde{\eta}_{21}) + p_{5310}(1 - \tilde{\eta}_{31}) + p_{53210}(1 - \tilde{\eta}_{32})(1 - \tilde{\eta}_{21})])](1+c_\tau)) \quad (7.3.2.9)$$

где је корекциони фактор одређен са:

$$c_\tau = \frac{\left(1 - \frac{\eta_{30}}{1+\alpha_{30}}\right) \left(p_{5430} \left(1 - \frac{\eta_{43}}{1+\alpha_{43}}\right) + p_{530} \right) + \left(1 - \frac{\eta_{20}}{1+\alpha_{20}}\right) \left(p_{5420} \left(1 - \frac{\eta_{42}}{1+\alpha_{42}}\right) + \left(1 - \frac{\eta_{32}}{1+\alpha_{32}}\right) \left(p_{54320} \left(1 - \frac{\eta_{43}}{1+\alpha_{43}}\right) + p_{5320} \right) \right)}{\left(1 - \frac{\eta_1}{1+\alpha_1}\right) \left(p_{5410} \left(1 - \frac{\eta_{41}}{1+\alpha_{41}}\right) + \left(1 - \frac{\eta_{31}}{1+\alpha_{31}}\right) \left(p_{54310} \left(1 - \frac{\eta_{43}}{1+\alpha_{43}}\right) + p_{5310} \right) + \left(1 - \frac{\eta_1}{1+\alpha_1}\right) \left(p_{54210} \left(1 - \frac{\eta_{42}}{1+\alpha_{42}}\right) + \left(1 - \frac{\eta_{32}}{1+\alpha_{32}}\right) \left(p_{543210} \left(1 - \frac{\eta_{43}}{1+\alpha_{43}}\right) + p_{53210} \right) \right) \right)} \quad (7.3.2.10)$$

и укључује све путање које садрже *crossover* прелаз за прво побуђено стање.

Уколико би сви корекциони фактори дати са (7.3.2.4), (7.3.2.6), (7.3.2.8) и (7.3.2.10) били једнаки нули шема распада изотопа ^{133}Ba би изгледала као на Слици 7.6. Систем према шеми на Слици 7.6 био би егзактно решив по активности, уз додатну претпоставку да се врхови на енергијама 356 keV и 357.4 keV као и 81 keV и 79.6 keV могу раздвојити.



Слика 7.6 Знатно упрошћена шема распада изотопа ^{133}Ba . Прелази $2 \rightarrow 0$ и $3 \rightarrow 0$ су изостављени.

Систем једначина (7.3.2.4), (7.3.2.6), (7.3.2.8) и (7.3.2.10) је написан тако да се уз помоћ корекције на допринос и губитке услед случајних коинциденција може егзактно решити по непознатој активности. Ако се за корекцију на случајне коинциденције користи врх на енергији 712 keV, који је превасходно резултат детекције два фотона од 356 keV унутар времена резолуције спектрометра, треба написати једначину за допринос случајних коинциденција у сумарном врху (437 keV) и једначину за одброј на 712 keV. Према (5.1.8), допринос случајних коинциденција у сумарном врху је:

$$N_c = 2N(712) \frac{N(81)}{N(356)} \quad (7.3.2.11)$$

Релација (5.1.7) се овде не може користити јер *pile-up* врх на енергији 162 keV који је резултат детекције два фотона енергије 81 keV се преклапа са регуларним врхом на 160.6 keV.

Корекције на губитке услед случајних коинциденција и ефективног времена резолуције спектрометра уводе се у једначине (7.3.2.3), (7.3.2.5), (7.3.2.7) помоћу (5.1.8) и (5.2.4) при чему се ефективно време резолуције спектрометра рачуна помоћу:

$$\tau_{\pm} = \frac{1}{N_T} \left(1 + \frac{N^2(356)}{2N_T N(712)} \left(1 \pm \sqrt{\frac{4N_T N(712)}{N^2(356)} + 1} \right) \right) \quad (7.3.2.12)$$

Уколико се у систем дефинисан једначинама (7.3.2.3), (7.3.2.5), (7.3.2.7) и (7.3.2.9) уведу експлицитни изрази (7.3.2.11), (7.3.2.1) и (7.3.2.12), добија се формула за израчунавање активности у којој фигуришу само спектрални подаци

$$A = N_T \left(c \left(\left(\frac{N(437)R(356)}{2N(712)N(81)} - 1 \right) \left(\sqrt{1 + \frac{4N_T N(712)}{N^2(356)} - 1} \right) \right)^{-1} + 1 \right). \quad (7.3.2.13)$$

Корекциони члан c који фигурише у (7.3.2.13) дат је преко појединачних корекционих чланова дефинисаним са (7.3.2.4), (7.3.2.6), (7.3.2.8) и (7.3.2.10):

$$c = \frac{(1+c_T)(1+c_{\Sigma})}{(1+c_1)(1+c_2)} \quad (7.3.2.14)$$

У корекционом фактору (7.3.2.14) фигуришу имплицитно вероватноће које се могу израчунати уз помоћ података из шеме распада изотопа ^{133}Ba као и ефикасности врха пуне енергије и тоталне ефикасности које је потребно измерити или израчунати помоћу Monte Carlo симулација за специфичну геометрију мерења и податке о детектору. За изотоп ^{133}Ba , параметри из шеме распада према [65, 77] су дати у Табели 7.1, а релевантни подаци за детектор у Табели 6.2.

Табела 7.1 Вероватноће за реализације путања у распаду изотопа ^{133}Ba према подацима из [65, 77].

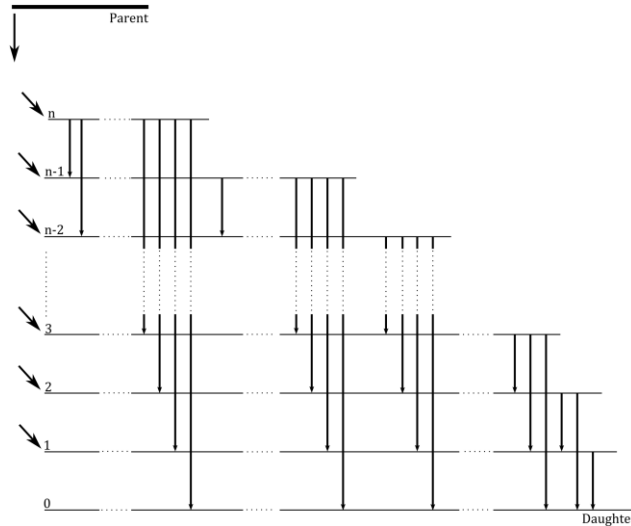
P_{5320}	0.000246(20)	P_{5430}	0.0477(20)
P_{54320}	0.000270(20)	P_{54210}	0.0685(26)
P_{53210}	0.00215(12)	P_{5310}	0.091(4)
P_{543210}	0.00235(14)	P_{54310}	0.100(4)
P_{5420}	0.0078(5)	P_{5410}	0.636(4)
P_{530}	0.0435(20)		

Уз помоћ пакета Geant 4 [69], рађене су Monte Carlo симулације спектра извора ^{133}Ba за неколико детектора. Овако добијени спектри коришћени су за израчунавање нумеричких вредности тоталних ефикасности и ефикасности врха пуне енергије које фигуришу у корекционим факторима. Експерименти су симулирани за извор у тачкастој геометрији који се налазио на капи коаксијалних HPGe детектора. Симулације су рађене за 3 детектора релативних ефикасности 35%, 100%, и 22%. Нумеричке вредности корекционих фактора за наведене детекторе и тачкасти извор стављен на капу детектора су редом: 1.090(18), 1.096(16) и 1.089(15) из чега се закључује да они слабо зависе од ефикасности детектора уколико су снимљени у истој геометрији, односно нумеричка вредност корекционог фактора је највише одређена параметрима из шеме распада. У циљу налажења мерне несигурности корекционих фактора нумеричке вредности за ефикасности врхова пуне енергије и тоталне ефикасности добијене Monte Carlo симулацијама су вариране у интервалу $\pm 10\%$.

7.4 Метод сумарног врха за сложене радиоизотопе

У претходном одељку на случају ^{133}Ba показано је да се једноставна формула за одређивање активности помоћу спектралних података може добити уводећи извесне корекционе чланове који се у најбољем случају рачунају Monte Carlo техником. Строго говорећи, метод у том смислу није апсолутан, али је свакако зависност мерене активности од израчунатих ефикасности и података из шеме распада сведена на минимум. На пример, варијација ефикасности врха пуне енергије и тоталних ефикасности у интервалу $\pm 10\%$ донела је мерну несигурност корекционог фактора око 1.7%. На примеру ^{133}Ba показано је да се за релативно сложени гама емитер може применити техника мерења активности на једном спектрометру обсервацијом два регуларна и једним сумарним врхом.

Као пример радиоизотопа са веома сложеном шемом распада, доступан као комерцијални стандард је изотоп ^{152}Eu . У циљу добијања општијих формула које ће касније бити примењене на изотоп ^{152}Eu разматрамо произвољну сложену шему распада датој на Слици 7.7.



Слика 7.7 Сложена шема распада.

Шема на Слици 7.7 се састоји од n -екситованих нивоа. Да би се извеле једначине бројања у врховима пуне апсорпције треба увести извесна ограничења у смислу шеме распада и експерименталне поставке:

- извор је тачкаст
- ефекти угаоних корелација емитованих фотона су занемарљиви
- случајне коинциденције су занемарљиве у односу на праве коинциденције
- β -честице, конверзиони електрони и X-зраци не могу бити детектовани
- средња времена живота ексцитованих стања су много мања од времена резолуције спектрометра
- сви емитовани фотони имају различите енергије

Претпоставимо да желимо да одредимо активност извора преко каскада $2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$, $4 \rightarrow 3 \rightarrow 0 \dots$ до $n \rightarrow n-1 \rightarrow 0$. У том циљу формирамо једначине бројања за релевантне врхове у спектру.

Према шеми распада на Слици 7.7 и горњим претпоставкама, брзина бројања у врху пуне енергије који одговара енергији гама-фотона емитованог при прелазу $1 \rightarrow 0$ је

$$N(1 \rightarrow 0) = A\tilde{\epsilon}_{1 \rightarrow 0}(p_{1 \rightarrow 0} + p_{2 \rightarrow 1 \rightarrow 0}(1 - \tilde{\eta}_{2 \rightarrow 1}) + p_{3 \rightarrow 1 \rightarrow 0}(1 - \tilde{\eta}_{3 \rightarrow 1}) + p_{3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0}(1 - \tilde{\eta}_{3 \rightarrow 2})(1 - \tilde{\eta}_{2 \rightarrow 1}) + \dots + p_{n \rightarrow n-1 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0}(1 - \tilde{\eta}_{n \rightarrow n-1}) \dots (1 - \tilde{\eta}_{2 \rightarrow 1})) \quad (7.4.1)$$

где је A активност извора; $\tilde{\epsilon}$ означава редуковану ефикасност врха пуне енергије дефинисану са (7.3.2.1) за гама-фотон емитован при прелазу који је назначен у индексу; p се односи вероватноћу реализације путање која је такође назначена у индексу; $\tilde{\eta}$ се односи на редуковану тоталну ефикасност (деф. (7.3.2.2)) за гама-фотон назначен у индексу.

Слично, за врх на енергији који одговара фотону који се емитује при прелазу $2 \rightarrow 1$ брзина бројања је:

$$N(2 \rightarrow 1) = A\tilde{\epsilon}_{2 \rightarrow 1}(1 - \eta_{1 \rightarrow 0})(p_{2 \rightarrow 1 \rightarrow 0} + p_{3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0}(1 - \tilde{\eta}_{3 \rightarrow 2}) + \dots + p_{n \rightarrow n-1 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0}(1 - \tilde{\eta}_{n \rightarrow n-1}) \dots (1 - \tilde{\eta}_{3 \rightarrow 2})). \quad (7.4.2)$$

Брзина бројања у сумарном врху који одговара разлици енергија другог побуђеног и основног стања потомка је

$$N_{\Sigma}(2 \rightarrow 1 \rightarrow 0) = A\tilde{\mathcal{E}}_{2 \rightarrow 1}\tilde{\mathcal{E}}_{1 \rightarrow 0}(p_{2 \rightarrow 1 \rightarrow 0} + p_{3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0}(1 - \tilde{\eta}_{3 \rightarrow 2}) + \dots + p_{n \rightarrow n-1 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0}(1 - \tilde{\eta}_{n \rightarrow n-1}) \dots (1 - \tilde{\eta}_{3 \rightarrow 2})), \quad (7.4.3)$$

при чему смо написали једначину без могућности детекције фотона емитованог при директном прелазу $2 \rightarrow 0$, што није реална ситуација, али једино тако написана једначина може учинити систем решивим.

Тотална брзина бројања која потиче од фотона који се емитују у путањама које садрже прелаз $1 \rightarrow 0$ је

$$N_D(1 \rightarrow 0) = A(P_{1 \rightarrow 0} - ((1 - \eta_{1 \rightarrow 0})(p_{1 \rightarrow 0} + p_{2 \rightarrow 1 \rightarrow 0}(1 - \eta_{2 \rightarrow 1}) + \dots + p_{n \rightarrow n-1 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0}(1 - \eta_{n \rightarrow n-1}) \dots (1 - \eta_{2 \rightarrow 1}))) \quad (7.4.4)$$

где је задовољен услов

$$P_{1 \rightarrow 0} = p_{1 \rightarrow 0} + p_{2 \rightarrow 1 \rightarrow 0} + \dots + p_{n \rightarrow n-1 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0} \quad (7.4.5)$$

који имао смисао да је вероватноћа за реализацију свих путања које садрже прелаз $1 \rightarrow 0$ једнака збиру вероватноћа за реализацију појединих путања са прелазом $1 \rightarrow 0$.

Из једначина (7.4.1), (7.4.2), (7.4.3) и (7.4.4) помоћу (7.4.5) могуће је елиминисати ефикасности врха пуне енергије и тоталне ефикасности чиме се добија:

$$AP_{1 \rightarrow 0} = N_D(1 \rightarrow 0) + \frac{N(1 \rightarrow 0)N(2 \rightarrow 1)}{N_{\Sigma}(2 \rightarrow 1 \rightarrow 0)} \quad (7.4.6)$$

Изведена формула (7.4.6) може бити уопштена за било коју каскаду из шеме на Слици 7.7, која укључује прелаз у основно стање потомка:

$$AP_{i \rightarrow 0} = N_D(i \rightarrow 0) + \frac{N(i \rightarrow 0)N(i+1 \rightarrow i)}{N_{\Sigma}(i+1 \rightarrow i \rightarrow 0)} \quad (7.4.7)$$

где индекс i узима вредности $i = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$. Међутим, $N(i \rightarrow 0)$, $N(i+1 \rightarrow i)$ и $N_{\Sigma}(i+1 \rightarrow i \rightarrow 0)$ у једначини (7.4.7) се односе на спектралне податке који потичу само из каскаде $i+1 \rightarrow i \rightarrow 0$ чиме нису исцрпљени сви могући исходи, јер се одброј под врхом пуне енергије који одговара фотону нпр. $i+1 \rightarrow i$ може добити из путање која не садржи само прелаз $i \rightarrow 0$, већ и нпр. $1 \rightarrow 0$, па у том смислу формула (7.4.7) има извесна ограничења за примену на једном спектрометру, јер емисије фотона из различитих путања са истом сумом енергија могу резултирати у одброју под истим врхом пуне енергије. Због тога, да би формула (7.4.7) била применљива, треба кориговати брзине бројања у врховима само на догађаје који фигуришу у заградама (7.4.7).

Ако претпоставимо да нема распада у основно стање потомака добијамо услов:

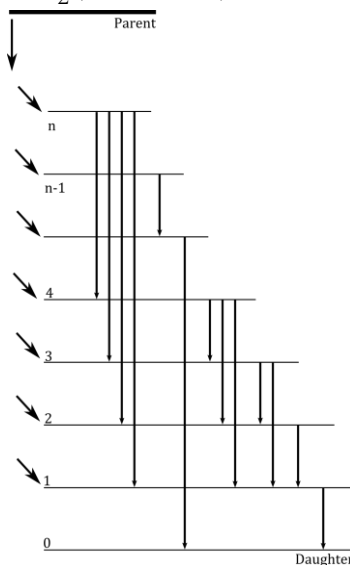
$$\sum_{i=1}^{n-1} P_{i \rightarrow 0} = 1 \quad (7.4.8)$$

Сумирајући леву и десну страну једначине (7.4.7) по индексу i

$$A \sum_{i=1}^{n-1} P_i = \sum_{i=1}^{n-1} \left(N_D(i \rightarrow 0) + \frac{N(i \rightarrow 0)N(i+1 \rightarrow i)}{N_{\Sigma}(i+1 \rightarrow i \rightarrow 0)} \right) \quad (7.4.9)$$

добиамо формула за мерење активности

$$A = N_D + \frac{N(1 \rightarrow 0)N(2 \rightarrow 1)}{N_\Sigma(2 \rightarrow 1 \rightarrow 0)} + \frac{N(3 \rightarrow 2)N(2 \rightarrow 0)}{N_\Sigma(3 \rightarrow 2 \rightarrow 0)} + \dots + \frac{N(n \rightarrow n-1)N(n-1 \rightarrow 0)}{N_\Sigma(n \rightarrow n-1 \rightarrow 0)}. \quad (7.4.10)$$



Слика 7.8 Специфична шема распада која се може егзактно решити по активности

Због ограничења која се односе на добијање информације из спектралних података о брзини бројања за догађаје који су назначени у заградама Формуле (7.4.10), овако дефинисани метод даје увид у приступ решавању проблема мерења апсолутне активности сложених емитера помоћу једног детектора, а не и егзактан начин за мерење активности. У практичном смислу, *crossover* за каскаду од интереса може бити веома слаб (случај изотопа ^{60}Co), па се формула (7.4.10) може егзактно применити, тј своди се на Формулу (4.6).

Смисао члана N_D је број детектованих распада у јединици времена, а одређује се из тоталне брзине бројања. Остали чланови означавају не-детектоване распада у јединици времена, а одређују се помоћу сумарних врхова и врхова пуне енергије фотона који се емитују у одговарајућој каскади. Шема распада претстављена на Слици 7.7 је најопштији случај у смислу постојања свих могућих прелаза између ексцитованих стања, тако да уз крајњу претпоставку да не постоји ни један *crossover* прелаз за прво побуђено стање, тј. да се сви ексцитовани нивои празне кроз путање које садрже прелаз $1 \rightarrow 0$ једначина (7.4.10) се своди на:

$$A = N_D + \frac{N(1 \rightarrow 0)N(i \rightarrow 1)}{N_\Sigma(i \rightarrow 1 \rightarrow 0)} \quad (7.4.11)$$

која је егзактна, где индекс узима вредности $i = \{2,3,4,\dots,n\}$ и све брзине бројања могу бити одређене из одговарајућих врхова, а сумарни врх може бити произвољно изабран, односно онај који је најинтензивнији и не интерферира са неким врхом.

Ако се уведу извесна ограничења или поједностављења као у шеми распада датој на Слици 7.8, формула (7.4.10) може донети егзактну формулу за активност ако постоји више деекситација у основно стање потомка. На пример, ако постоје два директна прелаза у основно стање потомка при чему су путање које садрже ова два прелаза потпуно независне, тј. нема истих фотона који се емитују у оба случаја, што је приказано на Слици 7.8, следи формула за мерење активности:

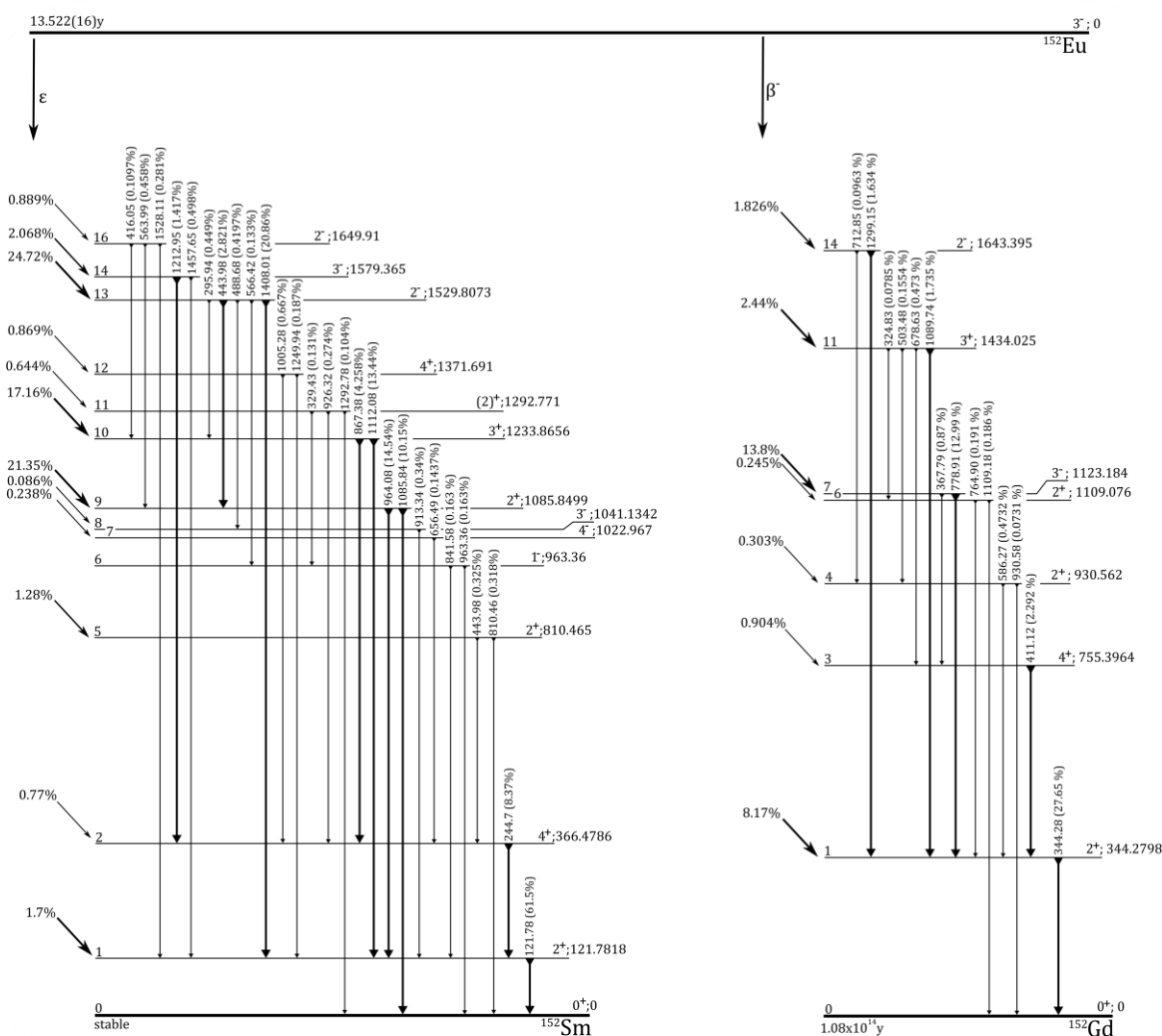
$$A = N_D + \frac{N(1 \rightarrow 0)N(i \rightarrow 1)}{N_{\Sigma}(i \rightarrow 1 \rightarrow 0)} + \frac{N(5 \rightarrow 4)N(4 \rightarrow 0)}{N_{\Sigma}(5 \rightarrow 4 \rightarrow 0)}, \quad (7.4.12)$$

где је индекс $i = \{2,3,6\}$, тј. постоје три различита сумарна врха, па се коинцидентно бројање може одредити из произвољних сумарних врхова.

Разматрајући сложену и специфичну шему распада дату на Сликама 7.7 и 7.8, дата је принципијална процедура којом треба приступити сложеним шемама распада у циљу добијања једноставне формуле за мерење активности помоћу гама-спектра добијеним једним детектором.

7.4.1 Могућност примене коинцидентне методе на једном детектору за изотоп ^{152}Eu

Изотоп ^{152}Eu се распада захватом електрона у ^{152}Sm и емисијом β -честице у ^{152}Gd . Поједностављена шема распада према [79] је приказана на Слици 7.9.



Слика 7.9 Упростиена шема распада ^{152}Eu . Вероватноће у заградама се односе на вероватноће прелаза (емисија фотона+конверзиони електрони)

С обзиром да се изотоп ^{152}Eu распада пуем захвата електрона или емисијом бета честице, постоје две независне шеме распада које припадају различитим потомцима.

При емисији бета честице изотоп ^{152}Eu се распада у неко од ексцитованог стања ^{152}Gd која се у већини случајева празне емисијом фотона или конверзионих електрона преко првог побуђеног стања. Уколико се реализује бета распад, само 0.9% иде преко два *crossover* за прво побуђено стање ^{152}Gd .

У циљу разматрања могућности примене методе сумарног врха за извор ^{152}Eu , уводимо апроксимацију да при реализацији бета распада све деексцитације иду преко првог побуђеног стања ^{152}Gd .

При захвату електрона, изотоп ^{152}Eu се распада у неко од ексцитованих стања ^{152}Sm , међутим и овде уочавамо да се потомак деексцитује у основно стање највише преко прелаза $1 \rightarrow 0$ и $9 \rightarrow 0$ тј. укупно у 99% случајева. Вероватноћа за деексцитацију кроз прелазе $5 \rightarrow 0$, $6 \rightarrow 0$ и $11 \rightarrow 0$ је мања од 1%. С обзиром на ове чињенице, у циљу извођења формула за мерење активности преко сумарних врхова, уводимо апроксимацију да распад ^{152}Eu иде кроз путање које садрже само прелазе $1 \rightarrow 0$ и $9 \rightarrow 0$ при захвату електрона у ^{152}Sm и $1 \rightarrow 0$ при емисији бета честице у ^{152}Gd , чиме се добија услов:

$$p_{1,0}^{\text{Sm}}(\gamma + ce) + p_{9,0}^{\text{Sm}}(\gamma + ce) + p_{1,0}^{\text{Gd}}(\gamma + ce) = 0.993(12) \square 1 \quad (7.4.1.1)$$

где се ознака p односи на вероватноћу реализације прелаза у основно стање потомака (интерна конверзија+емисија фотона).

Ако се описани поступак за налажење формуле за активност описан у претходном одељку примени на шему распада изотопа ^{152}Eu према Слици 7.9, активност се мери преко три каскаде, тј формула за активност је:

$$A = N_D + \left(\frac{N(1 \rightarrow 0)N(i \rightarrow 1)}{N_{\Sigma}(i \rightarrow 1 \rightarrow 0)} \right)_{\text{Sm}} + \left(\frac{N(9 \rightarrow 0)N(j \rightarrow 0)}{N_{\Sigma}(j \rightarrow 9 \rightarrow 0)} \right)_{\text{Sm}} + \left(\frac{N(1 \rightarrow 0)N(k \rightarrow 1)}{N_{\Sigma}(k \rightarrow 1 \rightarrow 0)} \right)_{\text{Gd}} \quad (7.4.1.2)$$

где се критеријуми за одређивање индекса i , j и k најбоље могу сагледати упоређивањем просте шеме датој на Слици 7.7 и упрошћене шеме ^{152}Eu на Слици 7.9

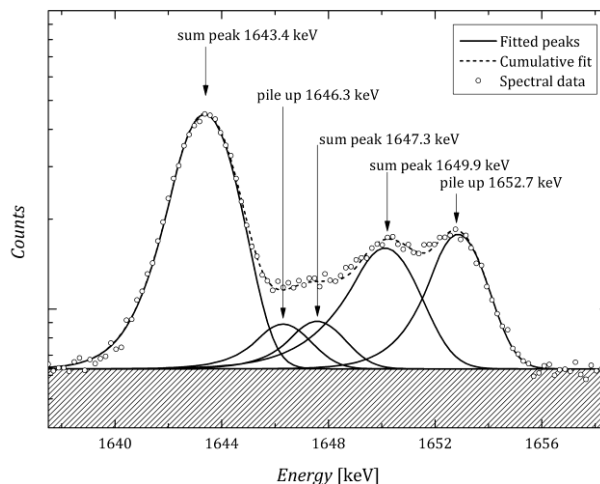
Индекс i може узимати вредности 2, 7, 8, 10, 12, 13 и 14, јер ексцитована стања којима одговарају ови бројеви немају директан *crossover* за прво побуђено стање. Међутим, с обзиром на интензитете прелаза, индекси 2 и 10 су добар избор јер каскаде $2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ и $10 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ имају довољно интензивне емисије фотона и имају само два фотона који се емитују и при реализацији $9 \rightarrow 0$. То су фотони који се емитују при прелазу $13 \rightarrow 9$ и $16 \rightarrow 9$, и веома су слабог интензитета, 2.8% и 0.45% респективно.

Закључујемо да индекс j може имати вредности 13 и 16, али је једини избор 16 јер за каскаду $13 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ одговара сумарни врх на енергији 1529.8 keV који на већим брзинама бројања може интерферирати са регуларним врхом на енергији 1528.1 keV.

Индекс k може имати вредности 3, 7 и 11 због тога што ови немају *crossover* за прво побуђено стање ^{152}Gd . Прелаз $14 \rightarrow 1$ има велики интензитет, али има *crossover* слабог интензитета који није уцртан на шеми приказаној на Слици 7.9.

Брзине бројања које фигуришу у првом, другом и четвртном члану у једначини (7.4.1.2) могу бити одређени из спектралних података, док трећи члан може захтевати извесне корекције. Брзине бројања у врховима на енергијама 1085.8 keV, 564 keV и 1649.8 keV такође настају из путања које садрже прелаз $1 \rightarrow 0$ из Sm-152. Због тога је рачуната корекција за трећи члан у једначини (7.4.1.2) ослањајући се на функцију ефикасности врха пуне енергије за коаксијални HPGe детектор. Израчунавања су показала да је корекциони фактор којим треба помножити трећи члан у формули (7.4.1.2) између 0.95 и 1.05 што зависи од растојања извор-детектор. Међутим, знајући

вероватноће емисије гама-фотона при прелазу $9 \rightarrow 0$ ^{152}Sm , која износи 10.15%, следи да корекциони члан примењен на једначину (7.4.1.2) побољшава резултат активности за око 5%. Са друге стране, одговарајући сумарни врх на енергији 1649.8 keV јако интерферира са осталим врховима што уноси велику несигурност у одређивању површине, минимално око 10% (Слика 7.10). У том смислу корекција на трећи члан може бити непотребна.



Слика 7.10 Спектрални подаци ^{152}Eu добијени помоћу HPGe детектора у области сумарног врха на енергији 1649.9 keV.

С озиром на разматрања, Формула (7.4.1.2) је апроксимативна, али се ипак може проценити њена несигурност услед учињених апроксимација. Апроксимација у смислу занемаривања неколико прелаза, што је изражено преко Формуле (7.4.1.1) уноси несигурност од око 1%, док у идеалном случају где су површине врхова одређене са несигурношћу мањом од 0.1%, уз корекцију на трећи члан, добијамо укупну несигурност око 1.5%, што је врло добра апроксимација.

Узимајући у обзир апроксимацију изражену Формулом (7.4.1.1) и мерне несигурности вероватноћа прелаза $1 \rightarrow 0$, $9 \rightarrow 0$ ^{152}Sm и $1 \rightarrow 0$ ^{152}Gd [79] следи процењена грешка модела на око 1.5%. Такође је јасно да се за мерење апсолутне активности мора користити барем три сумарна врха. Међутим усложњавање модела настаје уколико се разматра распрострањени извор, случајне коинциденције и угаоне корелације.

7.4.2 Проблем са распрострањеним узорцима

У циљу једноставности, овде се разматра гама емитер који емитује при распаду два фотона у каскади са занемарљивим ефектом угаоних корелација. Такође сматрамо да је активност униформно распрострањена по запремини узорка. Ако извор изделимо на n тачкастих извора са једнаким активностима, следи формула за активност елементарног извора методом сумарног врха:

$$a_i = A / n = N_D^i + \frac{N_1^i N_2^i}{N_\Sigma^i}, \quad (7.4.2.1)$$

где су N_1^i , N_2^i брзине у врховима пуне енергије елементарног извора и N_Σ^i је њима одговарајући сумарни врх. N_T^i је укупан одброј који потиче од i – тог извора. Сумирањем активности које одговарају сваком елементарном извору, укупна активност распрострањеног извора је:

$$A = N_D + \sum_{i=1}^n \frac{N_1^i N_2^i}{N_\Sigma^i}. \quad (7.4.2.2)$$

Међутим, спектрални подаци су интегрални тако да се информација о одброју сваког елементарног извора не може добити из спектралних података. Укупни одброји под врховима пуне енергије и сумарном врху се могу исказати преко формула:

$$N_1 = \sum_{i=1}^n N_1^i \quad (7.4.2.3)$$

$$N_2 = \sum_{i=1}^n N_2^i \quad (7.4.2.4)$$

и

$$N_\Sigma = \sum_{i=1}^n N_\Sigma^i. \quad (7.4.2.5)$$

при чему следи неједнакост због варијације ефикасности:

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_1^i N_2^i}{N_\Sigma^i} \neq \frac{\sum_{i=1}^n N_1^i \sum_{i=1}^n N_2^i}{\sum_{i=1}^n N_\Sigma^i}. \quad (7.4.2.6)$$

Из овог разматрања може се закључити да егзактна формула за мерење активности распрострањених извора преко спектралних података не постоји. Међутим у специјалном случају ако претпоставимо да је испуњен један од услова

$$\frac{N_1^i}{N_\Sigma^i} = const. \quad (7.4.2.7)$$

или

$$\frac{N_2^i}{N_\Sigma^i} = const. \quad (7.4.2.8)$$

неједнакост у Једначини (7.4.2.6) може бити замењена једнакошћу. То значи да је активност распрострањеног узорка мерљива једначином

$$A = N_T + \frac{N_1 N_2}{N_\Sigma} \quad (7.4.2.9)$$

где су N_1 , N_2 брзине у врховима пуне енергије и N_Σ је њима одговарајући сумарни врх. N_T је укупан одброј који потиче од распрострањеног узорка.

Експлицитна једначина за брзину бројања у врху пуне енергије ако занемаримо ефекат угаоних корелација, разматрајући једноставан емитер са два каскадна фотона, за елементарни извор је:

$$N_1^i = a\varepsilon_1^i (1 - \eta_2^i), \quad (7.4.2.10)$$

док је одброј у сумарном врху

$$N_{\Sigma}^i = a\varepsilon_1^i\varepsilon_2^i, \quad (7.4.2.11)$$

где ε_1^i , ε_2^i , и η_2^i означавају ефикасности врхова пуне енергије и тоталне ефикасности за први и други фотон емитован у каскади. Следи израз за однос одброја у врху пуне енергије према одброју у сумарном врху

$$\frac{N_1^i}{N_{\Sigma}^i} = \frac{1-\eta_2^i}{\varepsilon_2^i}. \quad (7.4.2.12)$$

Из горње дискусије, а такође и разматрајући Једначину (7.4.2.12) може се закључити да веће варијације ефикасности унутар запремине узорка ће узроковати веће неслагање праве и мерене активности уколико се Формула (7.4.2.9) примени на мерење активности распрострањеног узорка.

7.4.3 Ефективне угаоне корелације изотопа ^{152}Eu

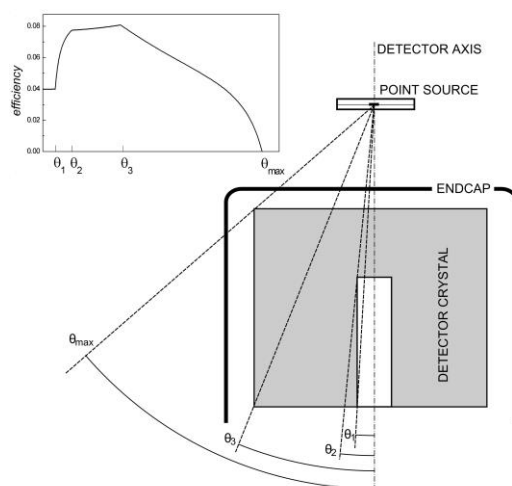
Ефективне угаоне корелације изотопа ^{152}Eu не уносе значајне корекције у рачуну ефикасности врха пуне енергије у присуству правог коинцидентног сумирања[64]. Међутим, мерење активности методом сумарног врха могу захтевати рачун поправке на ефективне угаоне корелације што зависи од експерименталне поставке. Активност за двофотонске гама емитере мерена методом сумарног врха директно је пропорционална корекционом фактору на ефективне угаоне корелације. Ово се може уопштити за сложене емитере уколико су одброји у релевантним врховима пуне енергије преваходно резултат детекције једног фотона, а одброји у сумарном врху резултат детекције два фотона. У овом случају, уз апроксимацију да спектрометар има малу ефикасност за х-фотоне који се емитију при распаду, једначина за активност се може уопштити на сложен емитер:

$$A = \sum_{i=1}^n \sum_k \left(\frac{N_1^{ik} N_2^{ik}}{N_{\Sigma}^{ik}} + N_D^{ik} \right) w_{ik} \quad (7.4.3.1)$$

где i означава сумирање преко свих елементарних двофотонских извора, док k означава сумирање преко запремине распрострањеног извора. N_1^{ik} и N_2^{ik} су брзине бројања услед потпуне апсорпције фотона из елементарног извора, док је N_{Σ}^{ik} брзина бројања правих коинциденција емитованих фотона од елементарних извора. N_D^{ik} је тотална брзина бројања која потиче из одређене каскаде на одговарајућој позицији; w_{ik} је корекциони члан за ефективне угаоне корелације који се односи на одговарајућу каскаду. У случају ^{152}Eu , највећи проблеми се јављају због чињенице да каскаде преко којих се може вршити мерење могу долазити из различитих путања које садрже емисију више фотона. Међутим ако размотримо целокупну шему распада ^{152}Eu и одговарајуће вероватноће за реализације одређених путања, израчунавања су показала да се 9.2% путање $2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$, 96.7% путање $10 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ и 100% путање $16 \rightarrow 9 \rightarrow 0$ у шеми изотопа ^{152}Sm реализује кроз емисију два фотона. Штавише, 39% путање $3 \rightarrow 1 \rightarrow 0$, 99,5% путање $7 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ и 98.3% путање $11 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ у потомку ^{152}Gd се реализује кроз двофотонску емисију. Повећавањем растојања извора од капе детектора, вероватноћа за не детекцију фотона који су емитовани симултано са двоструком каскадом ће бити ближа јединици, а вероватноћа за детекцију троструке каскаде ће бити занемарљива. Ово имплицира да ће модел

угаоних корелација двоструких каскада бити тачнији на већем растојању извора од детектора.

Рачун функције ефективних угаоних корелације захтева теоријска израчунавања ефикасности за све могуће упадне углове и све енергије гама зрака услед коначне величине детектора. Функција релативне ефикасности у зависности од угла за дату енергију може се добити техником Monte Carlo или употребом експоненцијалног закона апсорпције гама зрачења. Иако је модел експоненцијалног закона апсорпције гама зрачења веома поједностављена слика интеракције гама зрачења са материјалом и кристалом детектора, он ипак доноси релативне ефикасности у случају извора ^{60}Co које су довољне за израчунавање ефективних угаоних корелација са грешком мањом од 1% [47]. У експериментима са ^{152}Eu , тачкасти извори су постављани дуж осе детектора. Због тога је функција (6.1.13) одређена у назначеним доменама и границама интеграције (6.1.14) користећи се подацима о детектору који су дати уз документацију произвођача. За рачун ефикасности врха пуне енергије у функцији упадног угла је коришћена NIST-ова база податка за атенуационе коефицијенте за германијум и густина германијума (5.323 g/cm^3). Типичан облик функције ефикасности у зависности од упадног угла гама зрака је представљена на Слици 7.11.



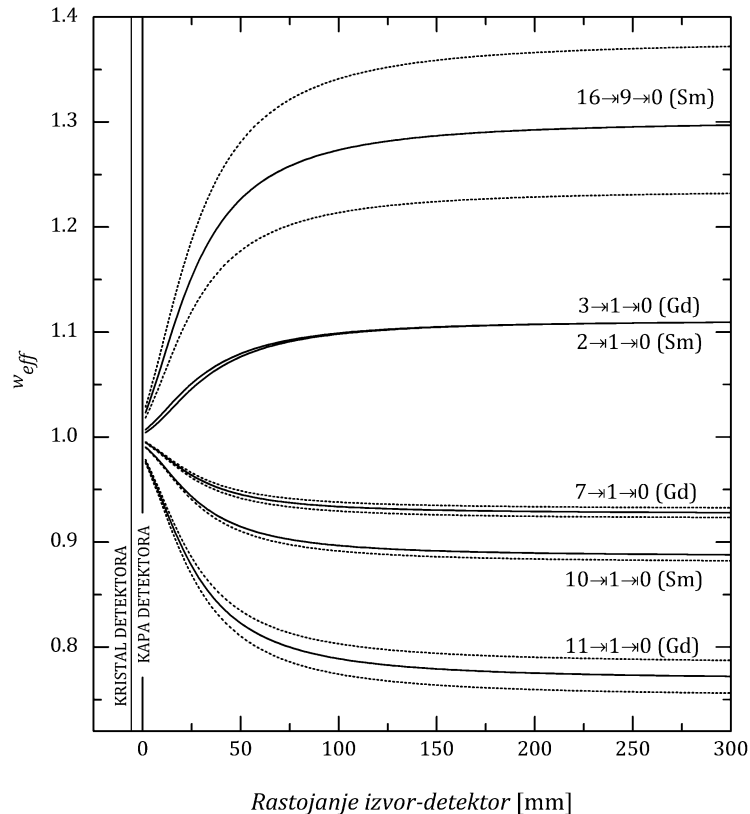
Слика 7.11 Експеримент са тачкастом геометријом. Назначени углови означавају различите домене функције ефикасности и границе интеграције.

За рачун функције угаоних корелација за одређену каскаду потребно је одредити коефицијенте угаоних корелација. Они се могу рачунати користећи се подацима о спиновима нивоа, мултиполарности прелаза, односима мешања и табличним подацима F -коефицијената. Деекситације $3 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ (Gd) и $2 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ (Sm) састоји се од чистих E2 прелаза, па су због тога коефицијенти угаоних корелација врло тачно одређени. Са друге стране, остале каскаде се састоје од мешаних прелаза па су коефицијенти угаоних корелација јако зависни од односа мешања. У Табели 7.2 су приказани коефицијенти угаоних корелација добијени за релевантне каскаде за мерење активности извора ^{152}Eu . Грешке коефицијената угаоних корелација потичу од мерне несигурности односа мешања.

Табела 7.2. Коefицијенти угаоних корелација неких каскада изотопа ^{152}Eu .

Прелаз	Каскада	Однос мешања δ	A_{22}	A_{44}
$2 \xrightarrow[245\text{keV}]{E2} 1 \xrightarrow[122\text{keV}]{E2} 0(\text{Sm})$	4(2)2(2)0	0	0.1020	0.0091
$3 \xrightarrow[411\text{keV}]{E2} 1 \xrightarrow[344\text{keV}]{E2} 0(\text{Gd})$	4(2)2(2)0	0	0.1020	0.0091
$7 \xrightarrow[779\text{keV}]{E1+M2} 1 \xrightarrow[344\text{keV}]{E2} 0(\text{Gd})$	3(1)2(2)0	0.002(6)	-0.0730(47)	/
$11 \xrightarrow[1090\text{keV}]{M1+E2} 1 \xrightarrow[344\text{keV}]{E2} 0(\text{Gd})$	3(1)2(2)0	$+29^{+42}_{-11}$	-0.231(16)	/
$10 \xrightarrow[1112\text{keV}]{M1+E2} 1 \xrightarrow[122\text{keV}]{E2} 0(\text{Sm})$	3(1)2(2)0	-8.7(6)	-0.1136^{+67}_{-58}	/
$16 \xrightarrow[564\text{keV}]{E1+M2} 9 \xrightarrow[1086\text{keV}]{E2} 0(\text{Sm})$	2(1)2(2)0	$+0.07^{+11}_{-9}$	0.299^{+68}_{-64}	/

За рачун корекционих чланова на ефективне угаоне корелације овде је коришћена процедура која је написана у програму *Mathematica* [Прилог А]. На Слици 7.12 су приказане добијене функције ефективних угаоних корелација у зависности од растојања извора од капе детектора за γ -каскаде изотопа ^{152}Eu које су коришћене у мерењима. Као што се види на Слици 7.12, поправка на ефективне угаоне корелације може имати вредност већу или мању од један. Уколико правац емисије другог фотона емитованог у каскади има тенденцију да прати правац емисије првог фотона поправка је већа од један, што резултира у већој вероватноћи правог коинцидентног сумирања. Супротно, ако правац емисије другог фотона емитованог у каскади има тенденцију да прати правац нормалан на правац емисије првог фотона, вероватноћа правог коинцидентног сумирања је мања, тј. поправка на ефективне угаоне корелације је мања од један.



Слика 7.12 Ефективне угаоне корелације каскадних фотона емитованих из тачкастог извора ^{152}Eu за разна растојања извора од капе детектора. Функције су добијене помоћу закона апсорпције гама зрачења и нумеричких интеграција. Црткане линије означавају горње и доње границе апсолутних грешака функције угаоних корелација које су узрок несигурности односа мешања.

7.4.4 Случајне коинциденције у спектралним подацима извора ^{152}Eu

Мерења на великим брзинама бројања могу утицати на квалитет спектра што се манифестује у неправилним облицима врхова пуне енергије као и губицима у одбројима под врховима пуне енергије. Међутим, DSP спектроскопске јединице са опцијом за одбацивање наседајућих сигнала доста добро коригују податке на мртво време и наседање сигнала. Ипак и при укљученом колу за одбацивање наседајућих сигнала дисторзија врхова може бити и даље присутна што зависи од брзине бројања. Scates i Harwell [19] су демонстрирали тачност кола за корекцију на наседање сигнала и мртво време на истој спектроскопској јединици која је коришћена у овим истраживањима. Њихови тестови су показали да грешке у брзинама бројања у врховима пуне енергије у спектру извора ^{152}Eu не превазилазе 5% уколико брзина бројања не превазилази 255 kHz. Међутим, проблем са наседањем сигнала на овим брзинама је доста изражен, јер брзо коинцидентно коло за корекцију наседнутих сигнала има своје време резолуције. У методи сумарног врха најважнији подаци су брзине бројања у сумарним врховима где могу бити присутни одброји услед случајних коинциденција. У том смиуслу потребно је вршити корекције сумарних врхова на случајне коинциденције. Такође су могући доприноси случајних коинциденција у спектралном коинтинууму. Уколико се активност извора жели добити само из спектралних података морају се користити врхови случајних коинциденција како би се добила информација о ефективном времену резолуције. У случају извора ^{152}Eu пажљивом анализом је нађено да је добро дефинисан врх случајних коинциденција на енергији 1742.3 keV. Он настаје потпуном апсорпцијом фотона енергије 344.3 keV емитованог из ^{152}Gd и апсорпцијом фотона енергије 1408 keV емитованог из ^{152}Sm . Услед тога што ови фотони потичу из различитих потомака јасно је да је врх на енергији 1752.3 keV резултат само случајних коинциденција. На основу разматрања о случајним коинциденцијама у Одељку 5 следи да је ефективно време резолуције на основу спектралних података извора ^{152}Eu

$$\tau = \frac{1}{N_D} \left(1 + \frac{N(344.3)N(1408)}{2N_D N(1752.3)} \left(1 - \sqrt{\frac{4N_D(1752.3)}{N(344.3)N(1408)}} \right) \right), \quad (7.4.4.1)$$

где N означава брзину бројања у врху на енергији која је назначена у загради.

Брзина бројања у врху случајних коинциденција у сумарном врху на енергији $E_1 + E_2$ је

$$N_c(E_1 + E_2) = 2(2\tau)N'(E_1)N'(E_2), \quad (7.4.4.2)$$

где су $N'(E_1)$ и $N'(E_2)$ кориговане брзине бројање на губитке услед случајних коинциденција. Уколико се искористи ефективно време резолуције дато са (5.2.4) налазимо допринос случајних коинциденција у сумарном врху

$$N_c(E_1 + E_2) = \frac{N(1752.3)N(E_1)N(E_2)}{N(344.3)N(1408)}, \quad (7.4.4.3)$$

где N означава мерене брзине бројања у одговарајућим врховима. Из ових разматрања следи да је корекције на допринос случајних коинциденција у одговарајућим сумарним врховима могуће извршити само на основу спектралних података.

На већим брзинама бројања постоји вероватноћа да два некорелисана догађаја могу бити детектована унутар времена резолуције спектрометра, што може довести до

губитка одброја у регуларним врховима. Губици услед наседања сигнала који доприносе спектралном континууму могу се израчунати користећи се ефективним временом резолуције и тоталном брзином бројања

$$L_{\tau} = 1 - \tau N_D \quad (7.4.4.4)$$

Међутим, иако се очекује да корекције на губитке побољшавају квалитет података, на великим брзинама бројања остаје проблем са интерференцијом врхова.

7.4.5 Једначине за мерење апсолутне активности ^{152}Eu

Изведена једначина (7.4.1.2) за апсолутно мерење активности извора ^{152}Eu је у извесном смислу ограничена јер не садржи корекционе факторе за угаоне корелације и губитке и доприносе у врховима услед случајних коинциденција. Према разматрањима о случајним догађајима, корекције на случајне коинциденције се врло лако могу уградити у формулу за активност. Корекције на ефективне угаоне корелације се такође могу додати у полазне једначине ако претпоставимо да:

- Одброј у сумарним врховима је резултат детекције само двоструких каскада
- Корекције на ефективне угаоне корелације су уграђене само у формуле за сумарне врхове, а не и у врхове пуне енергије и тоталну брзину бројања
- Сумирање са X-зрацима је занемарљиво
- Ефикасности и угаоне корелације су исте унутар малог распрострањеног извора.

Сада, уколико користимо наведене претпоставке и искористимо сва разматрања у претходном одељку, може се показати да формула за мерење апсолутне активности има облик

$$A = N_D + \left(\frac{w_{eff}(i \rightarrow 1 \rightarrow 0)}{\frac{N_{\Sigma}(i \rightarrow 1 \rightarrow 0)}{N(121.8)N(i \rightarrow 1)} - \frac{N_C(1752.3)}{N(344.3)N(1408)}} \right)_{Sm} L_{\tau}^{-1} + \left(\frac{w_{eff}(16 \rightarrow 9 \rightarrow 0)}{\frac{N_{\Sigma}(1649.8)}{N(564)N(1085.8)} - \frac{N(1752.3)}{N(344.3)N(1408)}} \right)_{Sm} L_{\tau}^{-1} + \left(\frac{w_{eff}(k \rightarrow 1 \rightarrow 0)}{\frac{N_{\Sigma}(k \rightarrow 1 \rightarrow 0)}{N(344.3)N(k \rightarrow 1)} - \frac{N(1752.3)}{N(344.3)N(1408)}} \right)_{Cd} L_{\tau}^{-1} \quad (7.4.4.5)$$

где је N мерена брзина бројања у врху под енергијом која је означена у загради; w_{eff} означава поправку на ефективне угаоне корелације за одговарајућу позицију детектор-извор; N_D је тотална брзина бројања и L_{τ} фактор за губитке у врховима на случајне коинциденције који се рачуна помоћу (7.4.4.1) и (7.4.4.4).

Формула (7.4.4.5) која је овде изведена за апсолутно мерење активности захтева одређивање површине 6 регуларних врхова, три сумарна врха и укупне површине спектра. Такође потребно је израчунати фактор за ефективне угаоне корелације за одговарајућу каскаду. Додатно, потребно је извршити и корекције на губитке у врховима на случајне коинциденције помоћу врха случајних коинциденција на енергији 1752.3 keV и регуларног врха на енергији 1408 keV.

7.4.6 Једначине за директно мерење апсолутне активности ^{152}Eu

Док су проблеми извођења тоталне брзине бројања које потичу из елементарних извора и елиминација тоталних вероватноћа прелаза превазиђени сумирањем три члана који одговарају недетектованим распадима, трећи члан у Формули (7.4.4.5) доноси највећу несигурност јер се врх на 1649.8 keV преклапа са другим врховима (Слика 7.10), а такође он није резултат емисије само једне каскаде фотона, већ више различитих каскада доводе до реализације сумарног врха на истој енергији.

Различите каскаде уносе различите несигурности у метод. Због тога је пожељно да се метод модификује тако да се активност мери само помоћу једне каскаде. Ако се вероватноће за одређене прелазе узму као познате вредности, могуће је написати формуле за мерење активности помоћу једне каскаде. Једначина (7.4.7) се може уопштити за било коју каскаду, на пример каскада $j \rightarrow 1 \rightarrow 0$, даје

$$P_{i \rightarrow 0} A = N_D(i \rightarrow 0) + \frac{N(i \rightarrow 0)N(j \rightarrow 1)}{N_\Sigma(j \rightarrow i \rightarrow 0)}. \quad (7.4.6.1)$$

Ако ову једначину поделимо са вероватноћом реализације свих путања који иду преко прелаза $i \rightarrow 0$, налазимо $P_{i \rightarrow 0}$ и уведемо апроксимацију да је укупна брзина бројања која долази само од оних путања које садрже прелаз $i \rightarrow 0$

$$N_D(i \rightarrow 0) = P_{i \rightarrow 0} N_D, \quad (7.4.6.2)$$

где је N_D укупна брзина бројања која долази од свих путања, налазимо формулу за мерење активности преко једне каскаде $j \rightarrow i \rightarrow 0$

$$A = N_D + \frac{N(i \rightarrow 0)N(j \rightarrow i)}{P_{i \rightarrow 0} N_\Sigma(j \rightarrow i \rightarrow 0)}. \quad (7.4.6.3)$$

Као што се види из Формуле (7.4.6.3), активност γ -емитера са сложенем шемом распада може се мерити преко једног сумарног врха уколико је позната вероватноћа реализације прелаза $i \rightarrow 0$. Формула (7.4.6.3) не садржи поправке на случајне коинциденције и корекциони фактор на угаоне корелације. Међутим, ове поправке се лако уводе уколико је одброј у сумарном врху $N_\Sigma(j \rightarrow i \rightarrow 0)$ увек резултат потпуне апсорпције фотона који се сукцесивно емитују при прелазу $j \rightarrow i \rightarrow 0$.

Према сличном поступку описаном у Одељку 7.4.5, модификована Формула (7.4.6.3) која садржи поправке на угаоне корелације и корекцију на случајне коинциденције је:

$$A = N_D + \frac{w_{eff}(j \rightarrow i \rightarrow 0)}{P_{i \rightarrow 0} \left(\frac{N_\Sigma(j \rightarrow i \rightarrow 0)}{N(i \rightarrow 0)N(j \rightarrow i)} - 2\tau \right) L_\tau} \quad (7.4.6.4)$$

Ако се ефективно време резолуције спектрометра одређује помоћу једног врха случајних коинциденција који је настао као резултат детекције два различита фотона који не граде сумарни врх, Формула (7.4.6.4) се може написати у виду:

$$A = N_D + \frac{w_{eff}(j \rightarrow i \rightarrow 0)}{P_{i \rightarrow 0} \left(\frac{(N_{\Sigma}(j \rightarrow i \rightarrow 0) - N'(E_1 + E_2))}{N(i \rightarrow 0)N(j \rightarrow i)} - \frac{N'(E_1)N(E_2)}{N(E_1)N(E_2)} \right) L_{\tau}}, \quad (7.4.6.5)$$

где се ознака N' односи на одброј под врхом случајних коинциденција који настаје апсорпцијом фотона енергије E_1 и E_2 .

За извор ^{152}Eu прелази кроз које се у 99% случајева врши декситација потомака у основно стање су $1 \rightarrow 0$ за потомак ^{152}Sm и $1 \rightarrow 0$ и $9 \rightarrow 0$ за потомак ^{152}Gd . У том смислу, на основу (7.4.6.5) могу се написати три формуле за мерење активности ^{152}Eu :

$$A = N_D + \frac{w_{eff}^{\text{Sm}}(i \rightarrow 1 \rightarrow 0)}{p_{1 \rightarrow 0}^{\text{Sm}}(\gamma + ce) \left(\frac{(N_{\Sigma}(i \rightarrow 1 \rightarrow 0) - N(1752.3))}{N(121.8)N(i \rightarrow 1)} - \frac{N(1752.3)}{N(344.3)N(1408)} \right) L_{\tau}}, \quad (7.4.6.6)$$

$$A = N_D + \frac{w_{eff}^{\text{Gd}}(j \rightarrow 1 \rightarrow 0)}{p_{1 \rightarrow 0}^{\text{Gd}}(\gamma + ce) \left(\frac{(N_{\Sigma}(j \rightarrow 1 \rightarrow 0) - N(1752.3))}{N(344.3)N(j \rightarrow 1)} - \frac{N(1752.3)}{N(344.3)N(1408)} \right) L_{\tau}}, \quad (7.4.6.7)$$

$$A = N_D + \frac{w_{eff}^{\text{Sm}}(16 \rightarrow 9 \rightarrow 0)}{p_{9 \rightarrow 0}^{\text{Sm}}(\gamma + ce) \left(\frac{(N_{\Sigma}(16 \rightarrow 9 \rightarrow 0) - N(1752.3))}{N(344.3)N(16 \rightarrow 9)} - \frac{N(1752.3)}{N(344.3)N(1408)} \right) L_{\tau}}. \quad (7.4.6.8)$$

где $i = \{2, 10\}$ и $j = \{3, 7, 11\}$ за шему распада према [79], N_D је тотална брзина бројања, w_{eff} је корекциони фактор за ефектне угаоне корелације, а $p(\gamma + ce)$ је тотална вероватноћа прелаза (емисија фотона и интерна конверзија) за прелаз који је назначен у индексу; N се односи на брзине бројања у врху пуне енергије и сумарном врху на енергији која је назначена у загради. L_{τ} се односи на корекциони члан на губитке услед насумичног сумирања. Тачност изведених једначина (7.4.6.6), (7.4.6.7) и (7.4.6.8) зависи од геометријске поставке. Ако је тачкасти извор удаљен од детектора, апроксимација укупне брзине бројања је боља јер је она мањи удео активности. Поправка на угаоне корелације ће такође бити тачнија јер на већој удаљености мање се испољава утицај ефикасности детектора. Такође уколико постоји вероватноћа да одброј под сумарним врхом буде резултат и троструких каскада, он ће бити занемарљив, јер је на већој удаљености ефикасност мања. Негативна последица веће удаљености извора од детектора је дуже време мерења како би се сакупила довољна статистика у сумарним врховима.

8 Експеримент

Стандардна процедура калибрације ефикасности врха пуне енергије гама спектрометра који служи за рутинска мерења радиоактивности подразумева употребу калибрационих извора чија је активност декларисана од стране произвођача са грешком од једног до неколико процената. У лабораторији за гама спектрометрију Департмана за физику у Новом Саду у циљу калибрације HPGe детекторских система набављен је сет тачкастих и волуминозних стандардних извора од којих су неки вишефотонски гама емитери. Као такви они су погодни за тестирање коинцидентне технике на једном детектору.

Извор ^{60}Co управо је идеални радиоизотоп за тестирање коинцидентне технике на једном детектору јер је то β - емитер који се распада уз каскадну емисију два фотона у више од 99% случајева. Метод је прво тестиран на тачкастом извору ^{60}Co , при чему је изведена формула која садржи корекцију на случајне коинциденције помоћу једног спектра и ефекат угаоних корелација.

Метод је даље примењен на тачкасти извор ^{133}Ba који има сложенију шему распада, али знатно мање изражен ефекат угаоних корелација. У циљу мерења активности ^{133}Ba једним детектором унапређен је постојећи метод који захтева формирање једначина бројања које садрже све могуће исходе у детектору [54] имплементацијом корекције на случајне коинциденције. Даље је развијен једноставни поступак који се може применити на детектору који има малу ефикасност за X-фотоне.

У циљу тестирања метода, на веома сложеним шемама испитана је могућност мерења активности извора ^{152}Eu на једном гама спектрометру у тачкастој, цилиндричној и маринели геометрији. Како је распад ^{152}Eu праћен могућом емисијом много фотона у каскади код којих је мање или више изражен ефекат угаоних корелација, написана је процедура којом је могуће израчунати поправку на ефективне угаоне корелације за било коју каскаду, а која се може применити за било који изотоп и било који коаксијални германијумски детектор.

8.1 Дигитална спектроскопска јединица *Inspector 2000*

Инспектор 2000 је преносива спектроскопска јединица са добрим перформансама на већим брзинама бројања базирана на технологији дигиталне обраде сигнала (*DSP-Digital Signal Processing*). Ова јединица се може употребити за све HPGe, NaI и Cd(Zn)Te апликације уобичајне у карактеризацији околине, нуклеарним мерама заштите; декомисији и деконтаминацији; и у мониторингу постројења. Уређај обезбеђује добре перформансе у смислу брзине бројања, резолуције и термалне стабилности.

Најважнији део спектроскопске јединице Inspector-2000 је DSP подсистем. За разлику од конвенционалих система, који дигитализују сигнале на крају ланца обраде сигнала, *Inspector 2000* дигитализује претпојачавачке сигнале на предњем делу ланца

обrade сигнала. Овакав приступ минимизира количину аналогних кола што резултира у повећаној стабилности, тачности и репродукцибилности.

8.2 Апсолутно мерење активности извора ^{60}Co

Апсолутна активност тачкастих калибрационих извора ^{60}Co је мерена на коаксијалном HPGe детектору релативне ефикасности 35% произвођача *Canberra*. Извори су мерени на капи детектора у циљу минимизирања ефекта угаоних корелација и на разним растојањима од капе детектора. Ради постизања добре контроле репродукцибилности експерименталних услова, израђени су специјално припремљени носачи извора за мерење на капи и на растојању 30 mm (Прилог В). За обраду сигнала коришћена је преносива дигитална спектроскопска јединица *Inspector 2000* такође произвођача *Canberra*. Коло за одбацивање наседајућих сигнала је било укључено. Спектри су сакупљани у оквиру програмског пакета *Genie 2000* [80].

Укупно је сакупљено 14 спектра чији су подаци приказани у Табели 8.1. За мерење су коришћена два тачкаста извора ^{60}Co , један знатно мање активности Amersham-No 11188 (извор-1) јер је стандардизован 01.06.1976. године када је имао активност 384.8($\pm 2\%$) kBq. Други је произвођача Areva-Framatome ANP, чији је серијски број No 40885/186 (извор-2), а активност декларисана од стране произвођача на датум 15.02.2005. је била 397.7($\pm 1.5\%$) kBq.

При већим брзинама бројања јављају се проблеми са анализом врхова у спектру. Иако програм *Genie 2000* има уграђену процедуру за интерактивно фитовање врхова у спектру, на већим брзинама бројања процедура није адекватна за добијање површине врха. Према литератури [81] која је пратећа документација софтвера континуум се може представити степенастом функцијом

$$B_i = \frac{B_1}{n} + \frac{B_2 - B_1}{nG} \sum_{j=1}^i y_j, \quad (8.2.1)$$

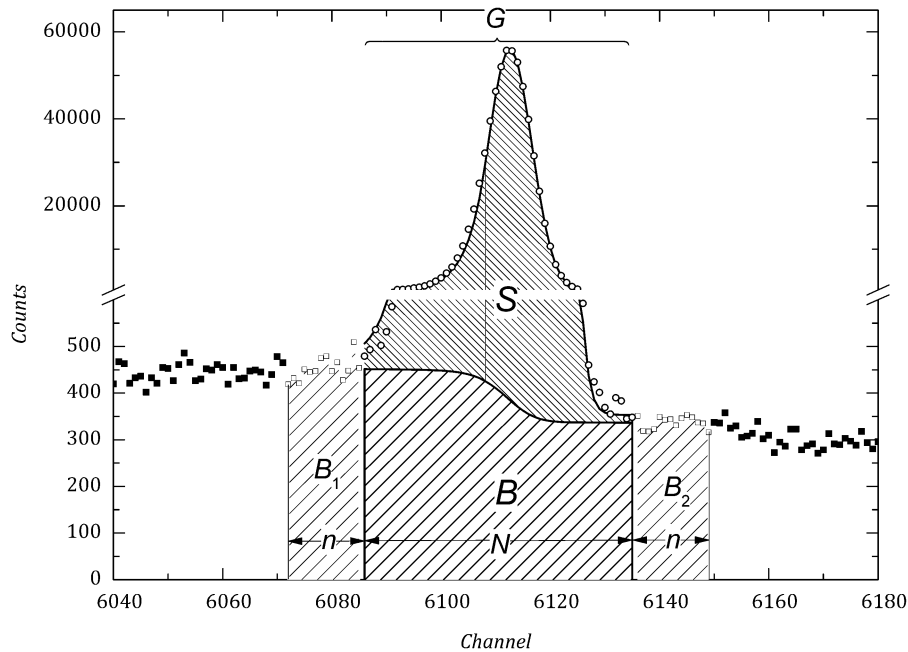
где је B_i (*background*) одброј који одговара континууму у i -том каналу испод врха пуне енергије, B_1 је укупан одброј континуума лево од врха пуне енергије, B_2 је укупан одброј континуума десно од врха пуне енергије, n је укупан број канала који се користи за израчунавање континуума и исти је и лево и десно од врха пуне енергије, G (*gross counts*) је укупан одброј под врхом пуне енергије у области од интереса, y_j одброј у j -том каналу.

Типичан изглед степенастог континуума који се обрачунава према описаном алгоритму (програм *Genie 2000*) врха пуне енергије и гаусијанског фита са експоненцијалним репом је приказан на Слици 8.1. Аналитички облик функције за опис врха пуне енергије који користи програм *Genie 2000* према [81] је дат са

$$F_i = \begin{cases} H \exp\left(-\frac{(x_i - C_p)^2}{2\sigma^2}\right), & x_i > C_p - T \\ H \exp\left(\frac{T(2x_i - 2C_p + T)}{2\sigma^2}\right), & x_i < C_p - T \end{cases} \quad (8.2.2)$$

где је H висина врха, C_p број канала који одговара енергији потпуно апсорбованог фотона (не мора бити цео број јер је извршена енергетска калибрација), σ - је дисперзија и повезана је са ширином на половини висине где је одузет континуум

$\sigma = \frac{FWHM}{2.355}$. Параметар T означава израженост репа на нижој енергији. Уколико има мању вредност, почетак репа је ближи центроиду. Већа вредност параметра T означава да је мање изражен реп на нижој енергији.



Слика 8.1. Типичан изглед степенастог континуума који се обрачунава према формули (8.2.1). Врх пуне енергије на 1173.2 keV је добијен из тачкастог извора ^{60}Co на HPGe детектору релативне ефикасности 35% и помоћу дигиталне спектроскопске јединице *Inspector 2000* при брзини бројања 10.9 ks^{-1} . Подаци под врхом пуне енергије су фитовани гаусијаном са експоненцијалним репом чија је формула дата са 8.2.2. Ознаке на графику имају следећа значења: B_1 -континуум лево од врха пуне енергије; B_2 -континуум десно од врха пуне енергије; B -степенasti континуум; S -површина под врхом пуне енергије; G -укупан одброј под врхом пуне енергије; N -укупан број канала под врхом пуне енергије; n -број канала лево или десно до врха пуне енергије који служи за израчунавање средње вредности континуума на левој и десној страни.

Као што се види на Слици 8.1 гаусијан са експоненцијалним репом није довољно адекватан за опис врха пуне енергије на већим брзинама бројања, јер се лево од центроида фит недовољно поклапа са експерименталним тачкама. Међутим од интереса је да се нађе укупан одброј под врхом пуне енергије, што у случају синглета значи да је довољно дефинисати континуум и релевантну област врха пуне енергије. Информација о укупном одброју под врхом пуне енергије може се онда наћи као разлика укупног одброја у области од интереса и одброја под дефинисаним континуумом. У том случају тачност информације о површини врха пуне енергије зависи од адекватног избора области интеграције и колико је добро апроксимиран континуум. Са друге стране, уколико се инфомација о површини испод врха пуне енергије жели добити из фита, а гаусијан са експоненцијалним репом није довољно адекватан, може се једноставно додати неколико врхова у области репа како би збир две функције пратио експерименталне податке. Овакав приступ није уобичајан, али у пракси доноси веома тачну информацију о укупној површини врха пуне енергије путем фитовања.

У случају спектра извора ^{60}Co (извор-2) врхови у спектру нису могли бити фитовани гаусијаном са експоненцијалним репом, па је због тога написана посебна процедура у програму *MATHEMATICA*, којом се одређује површина под врхом пуне

енергије. Подаци који су сакупљени у оквиру програма *Genie 2000* уčitани су у програм *MATHEMATICA*, а затим је сваки врх појединачно обрађен. Врхови у спектрима извора ^{60}Co нису фитовани, јер нема мултиплитета, већ је извршена корекција на континуум, а преостали одброј је сумиран у релевантној области врха.

За опис континуума испод врха пуне енергије користила се линеарна функција на коју је био суперпониран степенести континуум који је описан функцијом:

$$S(E) = Hp_s \operatorname{erfc}\left(\frac{E - E_c}{\delta}\right), \quad (8.2.3)$$

где је $\operatorname{erfc}(x)$ комплементарна функција грешке и дефинисана је са

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} \exp(-t^2) dt. \quad (8.2.4)$$

при чему је $x = \frac{E - E_c}{\delta}$, где је E_c број канала који одговара положају центроида, параметар δ је повезан са ширином линије преко релације $FWHM = 1,665\delta$. H је висина врха, а параметар p_s дефинише висину прегиба степенесте функције.

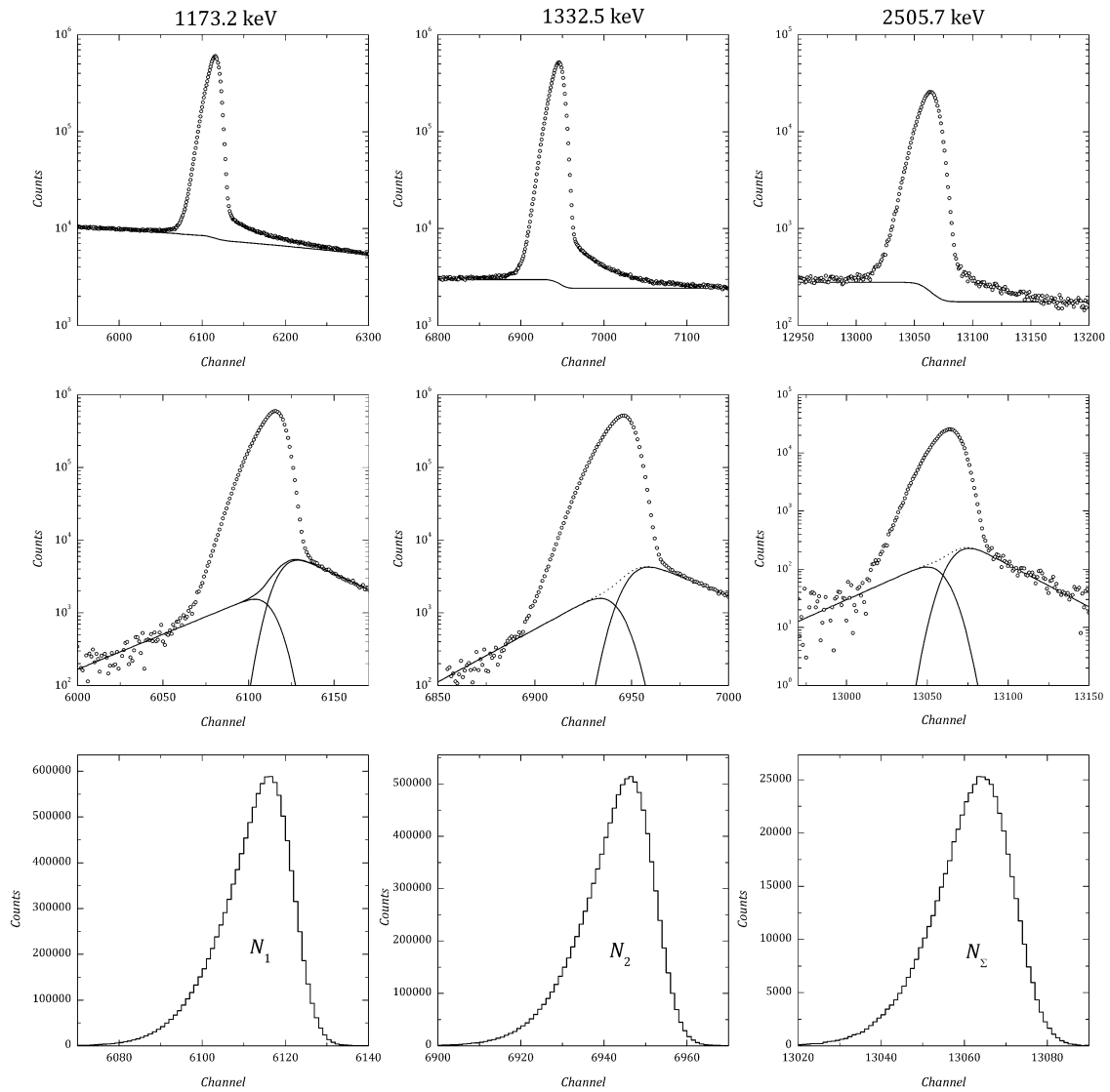
Репови на вишој и нижој енергији нису узети као регуларни догађаји, већ су одузети од одброја који је коригован на степенести и линеаран континуум. Реп на нижој енергији је одређен помоћу функције:

$$T_l = Hp_l \exp\left(\frac{E - E_c}{\beta_l}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{E - E_c}{\delta} + \frac{\delta}{2\beta_l}\right) \quad (8.2.5)$$

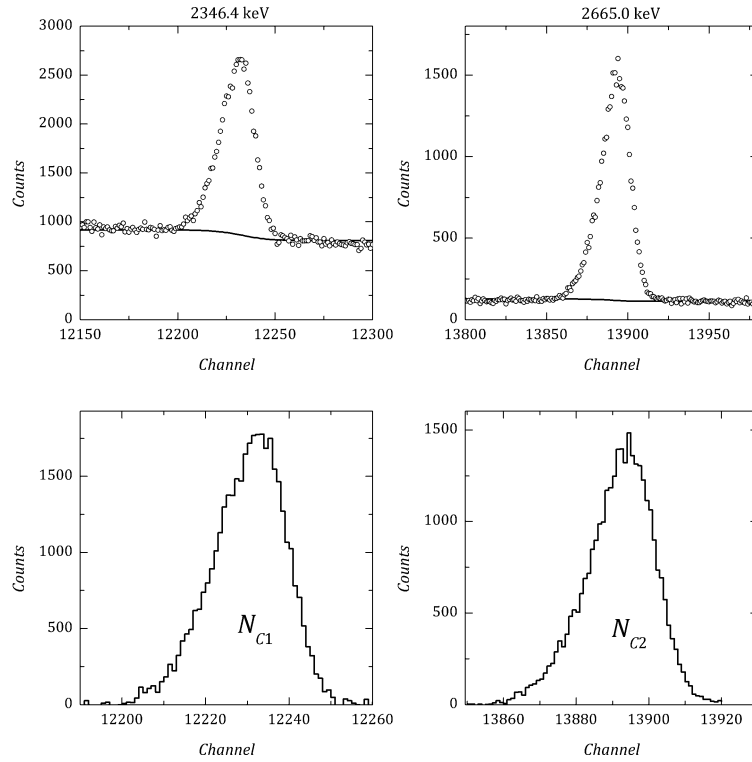
где p_l дефинише висину репа, а β_l нагиб. Реп на вишој енергији је описан помоћу сличне функције:

$$T_h = Hp_h \exp\left(-\frac{E - E_c}{\beta_h}\right) \operatorname{erfc}\left(-\frac{E - E_c}{\delta} + \frac{\delta}{2\beta_h}\right) \quad (8.2.6)$$

где параметар p_h дефинише висину репа на вишој енергији, док β_h означава нагиб. Континуум за врхове случајних коинциденција је описан само помоћу степенесте функције. Процедура одређивања врхова у спектру извора ^{60}Co је илустрована на Сликама 8.2 и 8.3.



Слика 8.2. Процедура одређивања површине врхова у спектру извора ^{60}Co који је добијен помоћу HPGe детектора релативне ефикасности 35% и дигиталне спектроскопске јединице. *Pile-up* рецектор је био укључен. Спектар је сниман када се извор налазио на капи детектора. Брзина бројања је била 74000 s^{-1} при чему је мртво време било 74.65%. На сликама је приказана процедура одређивања нето површине врха пуне енергије. Приказани су регуларни врхови на 1173.2 keV и 1332.5 keV и коинцидентни врх на енергији 2505.7 keV. У релевантној области врха пуне енергије прво је дефинисан степености континуум (за све врхове) и линеарни континуум (само за врх на енергији 1173.2 keV-прва врста). Након извршене корекције, дефинисани су репови на вишој и нижој енергији који су одузети од спектралних података (средња врста). Преостали одброј је сумиран у приказаној области (последња врста).



Слика 8.3. Процедура одређивања површине *pile-up* врхова у спектру извора ^{60}Co који је добијен помоћу HPGe детектора релативне ефикасности 35% и дигиталне спектроскопске јединице. *Pile-up* редектор је био укључен. Спектар је сниман када се извор налазио на капи детектора. Брзина бројања је била 74000 s^{-1} при чему је мртво време било 74.65%. На сликама је приказана процедура одређивања нето површине врха пуне енергије. Приказани су детаљи *pile-up* врхова који се појављују у спектру извора Co-60 на енергијама 2346.4 keV и 2665.0 keV. У релевантној области врха дефинисан је степенести континуум помоћу којег се кориговао одброј. Након извршене корекције преостали одброј је сумиран у приказаној области (последња врста).

Подаци из сваког спектра су уврштени у формулу:

$$A = \frac{N_T}{t} \left(\left(\left(\frac{N_\Sigma}{2\sqrt{N_{C1}N_{C2}}} - 1 \right) \left(\sqrt{\frac{4N_T\sqrt{N_{C1}N_{C2}}}{N_1N_2} + 1} - 1 \right) \right)^{-1} + 1 \right) w_{eff} \quad (8.2.7)$$

где је N_T укупна површина спектра, t живо време мерења, N_Σ нето површина сумарног врха на енергији 2505.7 keV, N_1 нето површина врха на енергији 1173.2 keV, N_2 нето површина врха на енергији 1332.5 keV, N_{C1} нето површина *pile-up* врха на енергији 2346.4 keV и N_{C2} нето површина *pile-up* врха на енергији 2665 keV. w_{eff} је фактор за корекцију на ефективне угаоне корелације и рачунат је за дато растојање помоћу Формуле (6.1.15). У Табели 8.1 су дати резултати мерења активности са и без корекције на ефективне угаоне корелације. Када се извор налазио на капи детектора фактор за корекцију на ефективне угаоне корелације уноси поправку око +1%. На већим растојањима корекције на ефективне угаоне корелације су више изражене и без узимања у обзир ових корекција систематска грешка може ићи и до 10% са тенденцијом опадања израчунате активности.

У мерну несигурност резултата активности урачунате су статистичка грешка нето одброја у врховима пуне енергије, сумарног врха и врхова случајних коинциденција, фит континуума, модел угаоних корелација који према [47] износи око

0.8%, грешка у позицији извора при рачунању ефективних угаоних корелација и време мерења.

Статистичка грешка нето одброја је рачуната по формули:

$$\sigma = \frac{1}{A} \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial N_1}\right)^2 N_1 + \left(\frac{\partial A}{\partial N_2}\right)^2 N_2 + \left(\frac{\partial A}{\partial N_{C1}}\right)^2 N_{C1} + \left(\frac{\partial A}{\partial N_{C2}}\right)^2 N_{C2} + \left(\frac{\partial A}{\partial N_\Sigma}\right)^2 N_\Sigma + \left(\frac{\partial A}{\partial N_T}\right)^2 N_T} \quad (8.2.8)$$

Грешка у одређивању континуума је процењена тако што су варирани параметри у функцијама које описују континуум у границама визуелне прихватљивости фита.

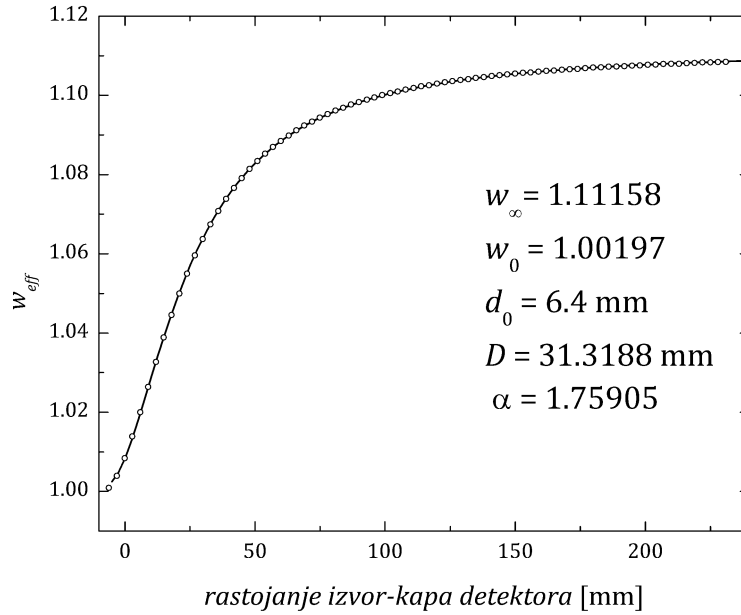
Грешка у позицији извора условљена је непознавањем тачне позиције детекторског прозора која према подацима произвођача износи ± 0.9 mm и мерном несигурношћу са којом је мерено растојање извора до капе детектора (нонијус са тачношћу 0.1 mm). У случају специјално припремљених носача, грешка је још мања око 0.01 mm јер су носачи прављени на стругу са прецизношћу 0.01 mm. Међутим фолија у којој се налази тачкасти извор је савитљива па је грешка процењена на око 0.1 mm. Ради процене мерне несигурности у прорачуну ефективних угаоних корелација због непознавања тачне позиције детекторски кристал-радиоактивни извор, подаци за ефективне угаоне корелације добијени Функцијом (6.1.15) у зависности од растојања извора до капе детектора d су фитовани функцијом:

$$w_{eff}(d) = w_\infty + \frac{w_0 - w_\infty}{1 + ((d + d_0) / D)^\alpha} \quad (8.2.9)$$

где параметри имају следећа значења: w_∞ је вредност ефективних угаоних корелација када би се извор налазио у бесконачности. За каскаду 4(2)2(2)0, што је каскада извора ^{60}Co , позната је тачна вредност и она је једнака суми коефицијента A_{kk} датим са (6.1.3) без атенуационих фактора што износи $10/9=1.1111\dots$ w_0 је вредност угаоних корелација када се извор налази на кристалу германијума, што је немогуће експериментално реализовати, и она би у идеалном случају била једнака јединици, јер би тада био задовољен услов 2π геометрије. Параметар D се односи на нормално растојање извора од кристала германијума где ефективне угаоне корелације достижу вредност $\frac{w_\infty + w_0}{2}$.

d_0 је растојање између спољашње површине капе детектора и горње површине осетљиве запремине кристала германијума. Параметар α је сразмеран брзини промене ефективних угаоних корелација.

Добијена зависност ефективних угаоних корелација помоћу функције (8.2.9) за германијумски детектор коришћен у експериментима и каскаду ^{60}Co 4(2)2(2)0 је приказана на Слици 8.4 заједно са параметрима фита.



Слика 8.4 Фит ефективних угаоних корелација за каскаду ^{60}Co 4(2)2(2)0 и германијумски детектор коришћен у експериментима према подацима добијеним помоћу функције (6.1.15) писаној у програму *Mathematica*. На графикону су дате нумеричке вредности параметара.

Као што се види према резултатима фита (Слика 8.4), w_∞ и w_0 врло добро се слажу са теоријским вредностима (Табела 6.1). С обзиром да је у спецификацији произвођача дато растојање између спољашње површине капе детектора и горње површине осетљиве запремине кристала германијума, d_0 је познати податак. Параметри D и α су фитовани и они су карактеристични за сваки детектор.

Интересантно је да се параметри који фигуришу у функцији ефективних угаоних корелација могу проценити само на основу димензија кристала германијума и растојања спољашњег слоја капе детектора и дебљине неосетљивог дела германијума. На основу ове процене добија се да је параметар D приближно једнак полупречнику кристала германијума. Параметар α је приближно једнак 2. Ако се нађе извод Функције (8.2.9) по растојању d ($d=x$)

$$\frac{dw}{dx} = \frac{\alpha \cdot (w_\infty - w_0)}{D \cdot \left(1 + \left(\frac{d_0 + x}{D}\right)^\alpha\right)^2} \cdot \left(\frac{d_0 + x}{D}\right)^{\alpha-1} \quad (8.2.10)$$

и његова вредност у тачки $x = D - d_0$:

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=D-d_0} = \frac{\alpha \cdot (w_\infty - w_0)}{4D} \quad (8.2.11)$$

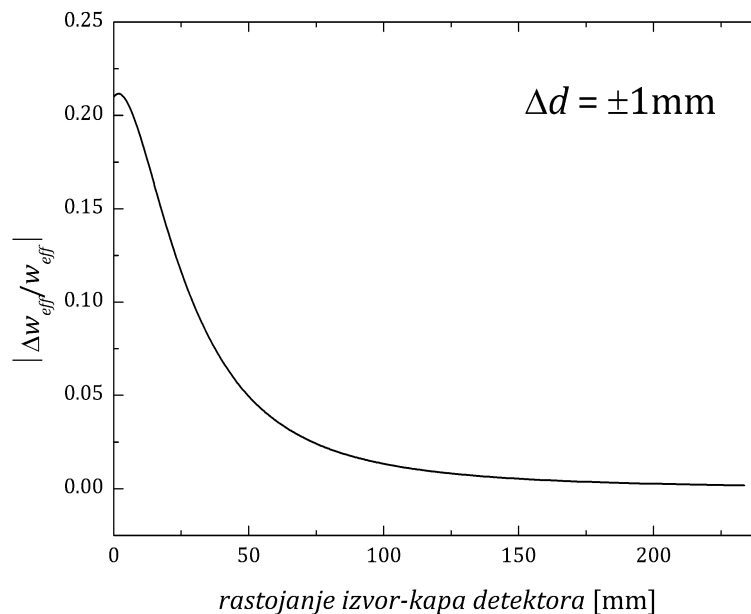
може се проценити вредност параметра α . У тачки $x = D - d_0$ вредност угаоних корелација је достигла половину од максималне вредности, међутим у области $-d_0 < x < D$ функција ефективних угаоних корелација је скоро линеарна (Слика 8.4) па важи:

$$\left(\frac{dw}{dx}\right)_{x=D-d_0} \approx \frac{(w_\infty - w_0)}{2D} \quad (8.2.12)$$

Изједначавањем (8.2.11) и (8.2.12) налазимо да је $\alpha = 2$.

За вредности параметра w_∞ узима се теоријска вредност 1.111, а за w_0 вредност 1. Параметар растојања спољашњег дела капе детектора од осетљиве запремине кристала германијума d_0 је фиксиран као и код фитовања, тј. познат је из документације детектора. Оваквом проценом добија се функција која се не разликује од фитоване функције за $\pm 1\%$ при било ком растојању извор-детектор и за разне димензије кристала германијума.

За анализу грешке при израчунавању поправке на ефективне угаоне корелације услед мерне несигурности позиције извора коришћен је први извод Функције (8.2.10) са нумеричким вредностима параметра. На основу ове функције добијена је релативна грешка ефективних угаоних корелације услед мерне несигурности позиције извор-кристал германијума. Релативна грешка у функцији растојања извора од капе детектора приказана је на Слици 8.5. Најмања несигурност је на већим растојањима, што је и очекивано јер се на већим растојањима све мање испољава утицај ефикасности детектора, односно функција ефективних угаоних корелација постаје више геометријског карактера.



Слика 8.5 Релативна грешка ефективних угаоних корелација услед мерне несигурности позиције извор-кристал германијума.

Грешка у времену мерења је процењена на основу броја цифара које даје мерни инструмент. Овај податак дат је у оквиру програма за сакупљање спектра *Gamma Acquisition and Analysis* из пакета *Genie 2000*.

У зависности од статистике одброја укупна мерна несигурност апсолутних активности варира од 2% до 5% на нивоу поверења 95.45% ($k = 2$). Међутим, измерене активности не одступају од вредности коју је декларисао произвођач за више од 1.5% када је при рачунању активности унета корекција на ефективне угаоне корелације.

Познавајући период полураспада ^{60}Co ($T_{1/2} = 5.271(8)$ год) све мерене активности приказане у Табели 8.1 које се односе на један исти извор могу се прерачунати на датум који је дат у декларацији произвођача извора уз мерену активност. Прерачунавањем

свих 13 мерених активности извора-2 на датум декларисан од стране произвођача и израчунавањем отежане средње вредности добијен је резултат $A_{exp} = 397.7 \pm 2.6$ kBq што је практично иста вредност коју је добио произвођач. У овом случају мерна несигурност је око 0.65 % јер је рачуната као статистичка грешка отежане средње вредности укупних мерних несигурности (Табела 8.1). Права мерна несигурност ипак је нешто већа јер већи сет мерења не уклања мерну несигурност у прорачуну ефективних угаоних корелација (0.8%) и фиту континуума (0.5%). У том случају резултат мерења активности тачкастог извора ^{60}Co на основу 13 спектра са систематском и статистичком грешком је: $A_{exp} = 397.7 \pm 2.3^{stat} \pm 3.3^{sist}$.

Табела 8.1 Експериментални подаци и мерене апсолутне активности тачкастих извора ^{60}Co .

СПЕКТАР		Извор-1*			Извор-2**											
Датум мерења		14.10.2008	11.07.2005	10.10.2008	10.10.2008	10.10.2008	10.10.2008	10.10.2008	10.10.2008	29.09.2009.	29.09.2009.	30.09.2009.	30.09.2009.	14.10.2009	20.10.2009	20.10.2009
растојање извора од капе детектора d [mm]		1.5	15	1.5	17.3	31.6	48.4	64.1	1.5	1.5	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0	30.0
Живо време t [s]		65229.25	13.03	600.00	600.00	600.00	600.00	600.00	1709.31	1448.50	3281.24	4154.55	5585.75	2756.04	2918.16	
Мртво време DT [%]		3.69	74.09	79.60	54.47	36.84	25.46	19.04	74.65	74.62	37.00	36.98	37.42	36.21	35.77	
Брзина бројања [kcs ⁻¹]		1.9	76.1	85.6	41.8	24.1	15.2	10.9	74.1	73.9	24.2	24.2	24.6	23.6	23.3	
Енергија [keV]	ознака	Нето површине врхова														
1173.2	N_1	1.162×10^7	8.899×10^4	4.623×10^6	2.383×10^6	1.380×10^6	8.664×10^5	6.062×10^5	1.134×10^7	9.600×10^6	7.381×10^6	9.347×10^6	1.274×10^7	6.046×10^6	6.305×10^6	
1332.5	N_2	1.035×10^7	8.054×10^4	4.111×10^6	2.125×10^6	1.239×10^6	7.800×10^5	5.437×10^5	1.009×10^7	8.540×10^6	6.611×10^6	8.348×10^6	1.142×10^7	5.404×10^6	5.643×10^6	
2505.7	N_Σ	5.411×10^5	2.41×10^3	2.443×10^5	5.31×10^4	1.683×10^4	6.64×10^3	3.12×10^3	5.640×10^5	4.745×10^5	9.915×10^4	1.267×10^5	1.761×10^5	7.979×10^4	8.270×10^4	
2346.4	N_{C1}	0	2.32×10^2	1.877×10^4	4.74×10^3	1.71×10^3	7.39×10^2	3.19×10^2	3.746×10^4	3.276×10^4	8.363×10^3	1.130×10^4	1.535×10^4	6.675×10^3	7.485×10^3	
2665.0	N_{C2}	8.15×10^2	2.66×10^2	1.515×10^4	4.07×10^3	1.38×10^3	5.64×10^2	2.57×10^2	3.156×10^4	2.636×10^6	7.053×10^3	8.877×10^3	1.271×10^4	5.757×10^3	5.853×10^3	
Површина спектра	N_T	1.247×10^8	9.91×10^5	5.136×10^7	2.507×10^7	1.443×10^7	9.146×10^6	6.527×10^6	1.266×10^8	1.071×10^8	7.942×10^7	1.006×10^8	1.375×10^8	6.509×10^7	6.788×10^7	
Измерене A_{exp} и референтне A_{ref} активности без поправке на ефективне угаоне корелације																
A_{ref} [kBq]		5.46±0.11	377±6	246±4	246±4	246±4	246±4	246±4	216.7±3.2	216.7±3.2	216.5±3.2	216.5±3.2	215.5±3.2	215.0±3.2	215.0±3.2	
A_{exp} [kBq]		5.32±0.11	373±19	243±5	236±5	234±6	228±8	228±11	214.0	215.0	214.5	213.0	213.2	212.2	211.9	
A_{exp}/A_{ref}		0.97	0.989	0.988	0.959	0.951	0.927	0.927	0.988	0.992	0.991	0.984	0.989	0.985	0.983	
Измерене A_{exp} и референтне A_{ref} активности са поправком на ефективне угаоне корелације																
Угаоне корелације w_{eff}		1.0115	1.0392	1.0115	1.0436	1.0659	1.0818	1.0904	1.0115	1.0115	1.0639	1.0639	1.0639	1.0639	1.0639	
A_{ref} [kBq]		5.46±0.11	377±6	246±4	246±4	246±4	246±4	246±4	216.7±3.2	216.7±3.2	216.5±3.2	216.5±3.2	215.5±3.2	215.0±3.2	215.0±3.2	
A_{exp} [kBq]		5.40±0.11	388±19	245±5	246±5	249±7	246±9	248±12	216.5±4.6	217.5±4.6	217.0±4.6	215.5±4.6	215.7±4.6	214.6±4.7	214.3±4.7	
A_{exp}/A_{ref}		0.989	1.028	0.996	1.000	1.012	1.000	1.008	0.999	1.004	1.002	0.995	1.001	0.998	0.997	
Узрок мерне несигурности експериментално мерене активности [%]																
Статистика		0.11	2.3	0.17	0.47	0.93	1.6	2.3	0.11	0.12	0.34	0.3	0.26	0.38	0.38	
Фит континуума		0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	
Модел угаоних корелација		0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	
Позиција детекторског прозора		0.21	0.18	0.21	0.17	0.09	0.05	0.03	0.21	0.21	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	
Време мерења		<0.1	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1	<0.1	
Укупна мерна несигурност $k=2$		2.0	5	2.0	2.1	2.7	3.7	5	2.1	2.1	2.2	2.2	2.2	2.2	2.2	

*Извор-1 (Amersham-No 11188, активност на датум: 01.06.1976. 384.8±7.7 kBq)

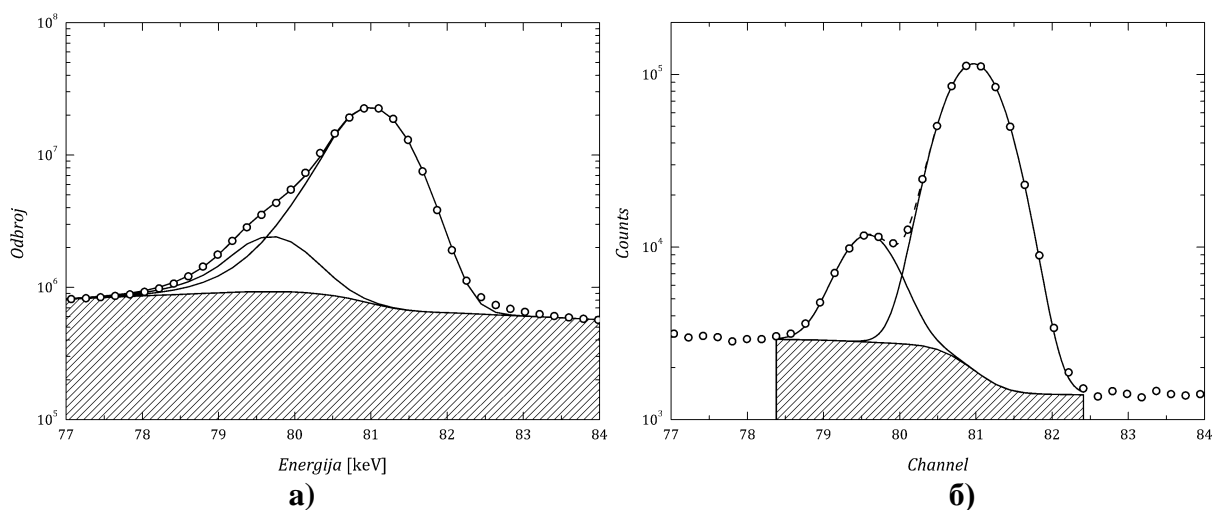
**Извор-2 (Areva-Framatome ANP, No 40885/186, активност на датум: 15.02.2005. 397.7±6.0 kBq).

8.3 Апсолутно мерење активности извора ^{133}Ba

Апсолутна активност тачкастих калибрационих извора ^{133}Ba је такође мерена помоћу коаксијалног HPGe детектора релативне ефикасности 35% произвођача *Canberra*. Мерена су два тачкаста извора који су постављани на капу детектора. Искоришћен је и један спектар који је раније снимљен за калибрацију ефикасности детектора, а мерен је на растојању 10 cm од капе детектора. За обраду сигнала и овде је коришћена је преносива дигитална спектроскопска јединица *Inspector 2000* произвођача *Canberra*. Коло за одбацивање наседајућих сигнала је било укључено у сваком експерименту. Спектри су сакупљани помоћу програма *Gamma Acquisition and Analysis* у оквиру програмског пакета *Genie 2000*.

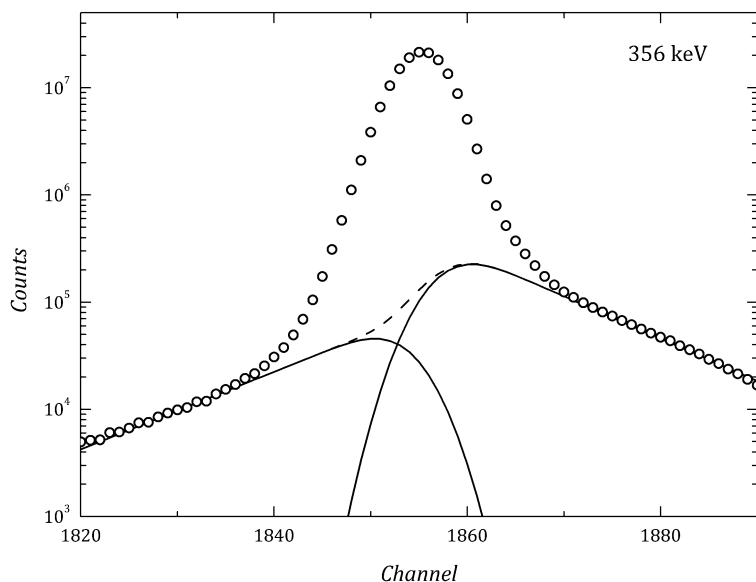
За мерење су коришћена два тачкаста извора ^{133}Ba , један из сета калибрационих извора Amersham-No. 11188 (извор-1), а други такође из сета калибрационих тачкастих извора Amersham-No. 260662-1 (извор-2). Укупно је сакупљено 3 спектра чији су подаци приказани у Табели 8.2.

Спектри су обрађени у програму *Gamma Acquisition and Analysis*, при чему се користила опција за интерактивно фитовање врхова према алгоритму описаном у претходном одељку и коришћењем процедуре написане у програму *Mathematica*. Коришћењем базе података за извор ^{133}Ba која се налази у програму, идентификовани су регуларни врхови у спектру, а затим је извршена енергетска калибрација. Потом је извршена калибрација облика врха, што подразумева калибрацију ширине на половини висине у функцији енергије и калибрацију параметра репа у функцији енергије, при чему су коришћене само синглетне линије. Типичан изглед фита мултиплитета на различитим брзинама бројања помоћу уграђене процедуре *Interactive Peak Fit* из спектра извора ^{133}Ba је приказан на Слици 8.6. На већим брзинама бројања (Слика 8.6. а) врхови су више деформисани, тј. израженији је реп на вишој и нижој енергији. Због тога информација о нето површини која је добијена помоћу *Interactive Peak Fit*, има већу несигурност. Са друге стране на мањим брзинама бројања, слика 8.6.б., врхови имају Гаусов облик без знатно изражених експоненцијалних репова па су врхови боље раздвојени, а информације о површини добијене фитовањем су на већем нивоу значајности.

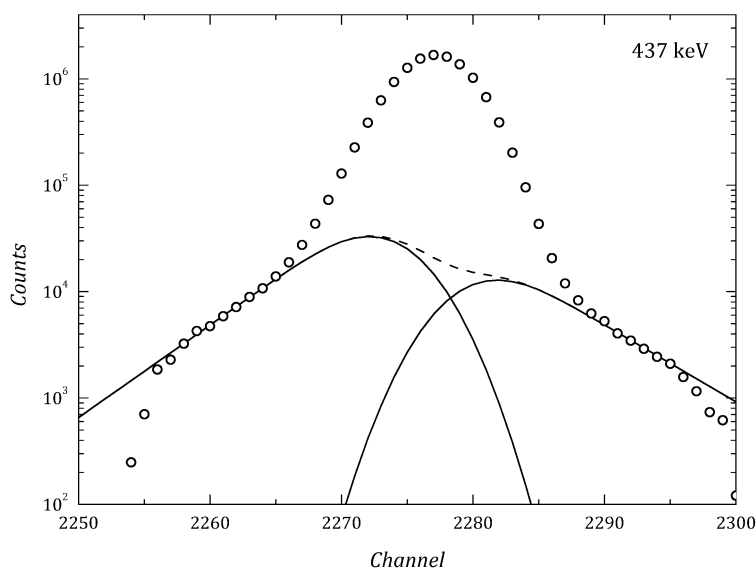


Слика 8.6. Изглед фита мултиплитета 79.6 keV и 81.0 keV из спектра ^{133}Ba који је снимљен при брзини бројања а) 33 kcs⁻¹ и б) 1.8 kcs⁻¹. При мањим брзинама бројања мултиплетет је добро раздвојен и може се фитовати Гаусовом функцијом, међутим на већим брзинама бројања изражен је већи реп на нижој енергији па се фит иако добар, мора узети са дозом опрезности.

Спектрални подаци извора активности 62.3 kBq (Табела 8.2) комплетно су обрађени у оквиру програма *Genie 2000* и потпрограма *Interactive Peak Fit Analysys*. На већим брзинама бројања, знатно су биле израженије деформације врхова. Процедура у програму *MATHEMATICA* (илустрована на сликама 8.7 и 8.8) коришћена је за добијање информације о површини врха на енергији 356 keV и сумарног врха на енергији 437 keV у спектрима извора ^{133}Ba активности 48.2 kBq и 95.0 kBq. Остали врхови фитовани су програмом *Interactive Peak Fit Analysys*.



Слика 8.7 Изглед врха на енергији 356 keV са континуумом који је описан функцијама (8.2.5) и (8.2.6). Информација о површини врха добијена је одузимањем континуума од спектралних података и сумирањем у релевантној области врха.



Слика 8.8 Изглед сумарног врха на енергији 437 keV са континуумом који је описан функцијама (8.2.5) и (8.2.6). Информација о површини врха добијена је одузимањем континуума од спектралних података и сумирањем у релевантној области врха.

Активност извора ^{133}Ba је добијена помоћу две методе. Методом формирања и решавањем једначина бројања за линије у спектру извора ^{133}Ba и помоћу једноставне формуле што је описано у Одељцима 7.3.1 и 7.3.2. Метод свих исхода је коришћен у

неколико варијанти, без случајних коинциденција и са случајним коинциденцијама. Такође је испитан утицај ефективних угаоних корелација на рачун активности.

Формализам за формирање једначина бројања у програму *MATHEMATICA* који су развили Новковић и сарадници [54] је овде идентичан, са тим да су овде у једначине уведени корекциони чланови на губитке услед случајних коинциденција, додате су једначине за допринос случајних коинциденција у регуларним врховима и уведена је додатна једначина за *pile-up* врх на енергији 712 keV. Међутим уколико су брзине бројања мање, и спектрални подаци не садрже статистички значајне врхове случајних коинциденција, при решавању система треба доделити вредност за нето површину врха на енергији 712 keV нула, чиме се једначине у систему своде на оне које немају корекцију на насумично сумирање.

Уколико су резултати случајних коинциденција уочљиви у спектру, што се манифестује појавом *pile-up* врхова (Слика 7.5), једно од решења система који садржи корекцију на случајне коинциденције је и време резолуције спектрометра. Вредности добијене помоћу формуле (7.3.1.7) су дате у Табели 8.3. Уколико је статистички безначајан врх на енергији 712 keV, решење за време резолуције је вредност блиска нули, што није реално решење, али сугерише да су ефекти случајних коинциденција безначајни у спектралним подацима.

Иако су овде формиране полазне једначине за брзине бројања које садрже могућност детекције X-фотона врхови настали детекцијом x-зрачења нису употребљени. Детектор коришћен у експериментима има малу ефикасност за детектовање фотона у области енергија испод 50 keV, стога је у једначинама бројања постављена вредност нула за ефикасност врхова пуне енергије на 30 и 35 keV. Тиме се занемарује сваки одброј који је настао евентуалном детекцијом x-фотона. Да је ово адекватна процедура, потврдио је тест при чему су коришћене једначине бројања за X-фотоне на енергијама 30.8 keV и 35.3 keV и површине врхова пуне енергије за ове X-фотоне. Разлике у мереним активностима са и без разматрања детекције X-фотона биле су на петој цифри, што је знатно мање од мерне несигурности методе. Ради постизања тачније информације о активности извора ¹³³Ba уколико детектор има малу ефикасност за X-фотоне, нема потребе да се користе једначине бројања за врхове на енергијама 30.8 keV и 35.3 keV. Међутим како су решења система и ефикасности врхова пуне енергије кориговане на ефекат правога коинцидентног и насумичног сумирања за ове фотоне, уколико је потребна ова информација, треба користити систем са једначинама бројања на 30.8 keV и 35.3 keV.

Такође је испитан утицај ефективних угаоних корелација, при чему су у једначине додате поправке на ефективне угаоне корелације.

За израчунавање активности једноставном методом коришћена је формула:

$$A = \frac{N_r}{t} \left(c \left(\left(\frac{N_\Sigma N_2}{2N_c N_1} - 1 \right) \left(\sqrt{1 + \frac{4N_r N_c}{N_2^2}} - 1 \right) \right)^{-1} + 1 \right) w_{eff} \quad (8.3.1)$$

која је изведена у одељку 7.3.2 (Формула 7.3.2.13), с тиме да је овде без детаљног извођења по аналогији са формулом за активност извора ⁶⁰Co (8.2.7), додат мултипликативни фактор поправке на ефективне угаоне корелације. Одброј у сумарном врху на 437 keV превасходно долази из детектовања каскаде 4→1→0, па је ефекат угаоних корелација највише изражен за ту каскаду.

Спектар извора мереног на растојању 10 cm, 11.04.2005. није имао статистички значајан одброј у *pile-up* врху на енергији 712 keV. Због тога формула (8.3.1) није директно применљива. Потребно је наћи граничну вредност активности када одброј у

врху случајних коинциденција тежи нули. За безначајан одброј у врху случајних коинциденција налазимо формулу за израчување активности:

$$A = \lim_{N_C \rightarrow 0} \frac{N_T}{t} \left(c \left(\left(\frac{N_\Sigma N_2}{2N_C N_1} - 1 \right) \left(\sqrt{1 + \frac{4N_T N_C}{N_2^2}} - 1 \right) \right)^{-1} + 1 \right) w_{eff} = \frac{1}{t} \left(N_T + c \frac{N_1 N_2}{N_\Sigma} \right) w_{eff} \quad (8.3.2)$$

Формула (8.3.2) је слична као и формула коју су извели Brinkman и сарадници, са тим да овде фигурише корекциони фактор јер постоји кросовер прелаз за прво побуђено стање потомка и појава мултиплитета на 81 keV (Слика 8.6). Корекциони фактор се добија уврштавањем ефикасности врха пуне енергије и тоталних ефикасности у корекционе факторе које фигуришу у (7.3.2.14)

На растојању 10 cm од капе детектора нису посебно рађене Monte Carlo симулације, али су уз помоћ програма ANGLE [82] ефикасности врха пуне енергије и тоталне ефикасности за линије у спектру ^{133}Ba за растојање 1.5 mm од капе детектора добијене помоћу Monte Carlo симулација прерачунате за растојање 100 mm од капе детектора. Овако израчунати корекциони фактор је $c = 1.07695$.

Табела 8.2 Експериментални подаци тачкастих извора ^{133}Ba добијени помоћу HPGe детектора и дигиталне спектроскопске јединице.

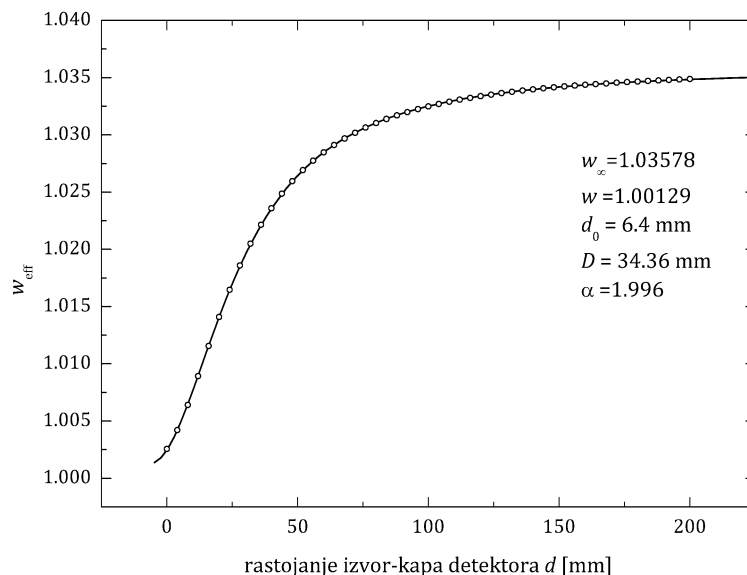
Извор	1	1	2
Датум мерења	11.04.2005.	04.03.2009.	11.03.2009.
Растојање од капе детектора [mm]	100	1.5	1.5
Живо време [s]	2323.68	47927.45	36323.26
Мртно време [%]	3.25	27.08	45.59
Енергија [keV]	ознака	Нето површина	
53.2		$1.73(4) \times 10^4$	$2.075(27) \times 10^6$
79.6		$4.14(8) \times 10^4$	$5.10(3) \times 10^6$
81.0		$5.44(5) \times 10^5$	$1.025(4) \times 10^8$
79.6 и 81.0	N_1	$5.85(6) \times 10^5$	$1.076(5) \times 10^8$
160.6		$1.101(14) \times 10^4$	$3.072(18) \times 10^6$
223.2		$6.1(5) \times 10^3$	$1.431(10) \times 10^6$
276.4		$8.24(6) \times 10^4$	$1.915(7) \times 10^7$
302.9		$1.950(7) \times 10^5$	$5.032(10) \times 10^7$
356.0		$5.736(11) \times 10^5$	$1.510(3) \times 10^8$
357.4*		$1.02(8) \times 10^3$	$1.86(11) \times 10^6$
356.0 и 357.4*	N_2	$5.746(12) \times 10^5$	$1.508(4) \times 10^8$
383.8		$7.82(4) \times 10^4$	$2.621(11) \times 10^7$
437.0*	N_Σ	$2.67(6) \times 10^3$	$1.201(4) \times 10^7$
712.0	N_C	/	$2.343(14) \times 10^5$
Укупна површина спектра	N_T	3.855×10^6	7.753×10^8
A_{ref} [kBq]		62.3±3.1	48.2±2.3
			95.0±3.8

Корекциони фактор на ефективне угаоне корелације се за растојање 100 mm израчунава помоћу процедуре написане у програму *MATHEMATICA* која се позива Функцијом (6.1.15). Према подацима о коришћеном детектору, растојању извора од капе детектора и подацима из шеме распада извора ^{133}Ba за каскаду $4 \rightarrow 1 \rightarrow 0$:

$$1/2 \xrightarrow{E2(\delta=0)} 5/2 \xrightarrow{M1(\delta=-0.151)} 7/2 \quad (8.3.3)$$

нађено је да корекциони фактор за ефективне угаоне корелације при растојању извора од капе детектора 100 mm износи: $w_{eff} = 1.0325$.

У циљу применљивости Формуле (8.3.1) на произвољном растојању од детектора рачуната је поправка на ефективне угаоне корелације и функција корекционог фактора у зависности од растојања извора од капе детектора. Помоћу процедуре у програму *MATHEMATICA* генерисан је сет података од 100 тачака ефективних угаоних корелација и растојања извора од капе детектора. Подаци су фитовани Функцијом (8.2.9) чији су параметри фита приказани на Слици 8.9.

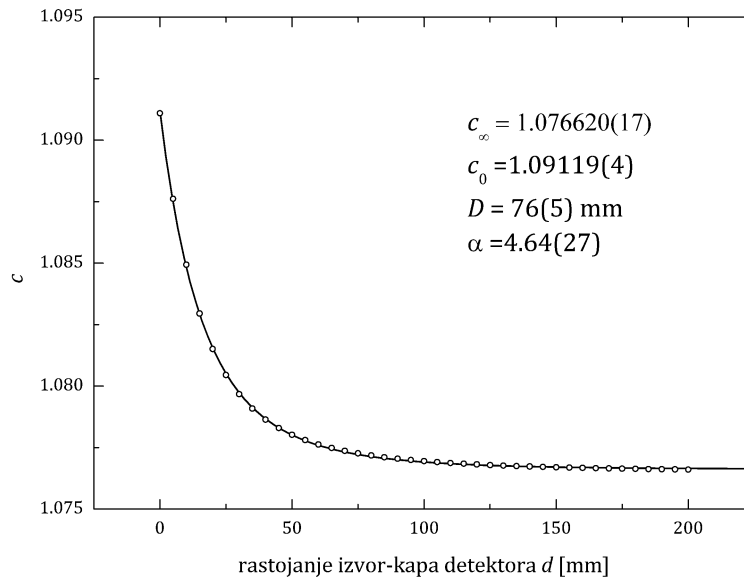


Слика 8.9 Зависност ефективних угаоних корелација за каскаду $1/2 \xrightarrow[E2(\delta=0)]{356\text{keV}} 5/2 \xrightarrow[M1(\delta=-0.151)]{81\text{keV}} 7/2$ из извора ^{133}Ba од растојања од капе коаксијалног германијумског детектора релативне ефикасности 35%. Параметри дати на слици фигуришу у функцији датој Формулом (8.2.9).

За рачун корекционог фактора услед сложености шеме распада на произвољном растојању извора од капе детектора, ефикасности врхова пуне енергије и тоталне ефикасности на растојању 1.5 mm од капе детектора добијене Monte Carlo симулацијама су прерачунате преко просторних углова у 100 тачака на растојању 0 до 200 mm од капе детектора. Ови подаци су затим фитовани функцијом:

$$c = c_{\infty} + \frac{c_0 - c_{\infty}}{(1 + x/D)^{\alpha}}, \quad (8.3.4)$$

чије су вредности параметра, облик и експериментални подаци приказани на Слици 8.10. Смисао параметара је следећи: c_{∞} је вредност корекционог фактора када се извор налази на растојању много већем од димензија детектора, c_0 је корекциони фактор када се извор налази на капи детектора, D је параметар који је повезан са димензијама кристала детектора, а параметар α означава брзину промене корекционог фактора са растојањем.

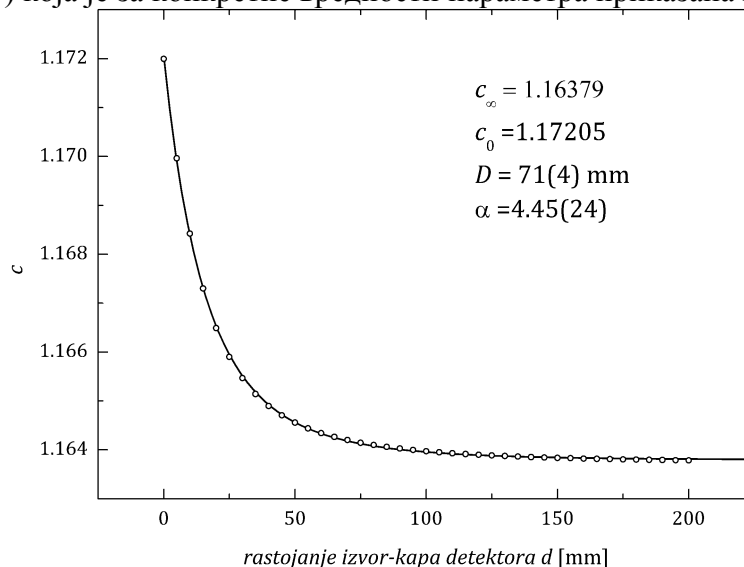


Слика 8.10 Корекциони фактор за рачунање апсолутне активности извора ^{133}Ba који фигурише у једначини (8.3.1) и (8.3.3) у функцији растојања тачкастог извора од капе детектора. Овај корекциони фактор је применљив када се мултиплитет 79.6 keV и 81 keV не може раздвојити. За рачун корекционог фактора, дате вредности параметара треба унети у Једначину 8.3.4.

У случају спектра извора ^{133}Ba снимљен на растојању 10 cm од капе детектора, мултиплитет на енергији 81 keV могао је бити довољно добро раздвојен (Слика 8.6 б). Због тога корекциони фактор дат преко једначине (5.28) није потребан, а корекциони фактор дат са (7.3.2.14) се своди на:

$$c = \frac{(1 + c_T)(1 + c_\Sigma)}{(1 + c_2)} \quad (8.3.6)$$

Истим поступком описаним у претходном параграфу је формиран скуп тачака за корекционе факторе за разна растојања извора од капе детектора. Подаци су фитовани функцијом (8.3.5) која је за конкретне вредности параметра приказана на Слици 8.11.



Слика 8.11 Корекциони фактор за рачунање апсолутне активности извора ^{133}Ba који фигурише у једначини (8.3.1) и (8.3.2) у функцији растојања тачкастог извора од капе детектора. Овај корекциони фактор је применљив када се мултиплитет 79.6 keV и 81 keV може раздвојити. При томе користи се само одброј у врху на енергији 81 keV. За рачун корекционог фактора дате параметре треба унети у једначину (8.3.4).

Као што се види на Сликама 8.10 и 8.11 корекциони фактори се врло мало мењају са растојањем извора од капе детектора. Релативна промена фактора је и мања уколико се у спектру може врх на енергији 79.6 keV одвојити од врха на енергији 81 keV. У том смислу, пожељно је сакупити спектар на мањим брзинама бројања и на већем растојању од капе детектора. У случају спектра сниманог на растојању 10 cm од капе детектора, поменути врхови су добро раздвојени, а нумеричка вредност корекционог фактора је према (8.3.4) 1.164.

Експериментално измерене активности описаним методама и обрадом спектралних података приказане су у Табели 8.3.

У спектралним подацима извора мереног на растојању 100 mm од капе детектора нису били видљиви доприноси случајних коинциденција кроз појаву *pile-up* врхова, па није ни коришћена процедура са случајним коинциденцијама. Међутим, време резолуције спектрометра је познато на основу претходних мерења, па је процењен одброј случајних коинциденција у сумарном врху. На основу тих разматрања, може се закључити и да при брзини бројања од 1.6 kcs^{-1} није занемарљив утицај случајних коинциденција. У том смислу, потребно је дуже време мерења како би се постигла боља статистика у сумарном врху и врху случајних коинциденција на 712 keV.

Испитан је и утицај ефективних угаоних корелација и конзистентност методе када се мултиплитет на 80 keV може и не може раздвојити. Када је за мерење активности коришћен метод свих исхода у детектору (систем једначина 7.3.1.6), корекције на ефективне угаоне корелације су донеле поправку на мерену активност око +1.5%. Међутим, у случају једноставне формуле (8.3.1), ефективне угаоне корелације доминантне каскаде доносе поправку око +3%. Метод свих исхода са раздвојеним и нераздвојеним мултиплитетом на 80 keV је еквивалентан на мањим брзинама бројања јер практично даје исте резултате. Једноставна формула такође даје исте резултате без обзира дали користимо раздвојене или нераздвојене мултиплитете и одговарајуће корекционе факторе.

Резултати мерења активности извора ^{133}Ba на већим брзинама бројања су нешто другачији. Према резултатима мерених активности, било да се ради о методу свих исхода или једноставној формули, корекције на случајне коинциденције су неопходне. Поправка на случајне коинциденције доноси око 2.3 % бољу вредност за мерену активност извора-1, када је спектар добијен поставком извора на капу детектора. За извор-2, чији је спектар добијен на већој брзини бројања, поправка је израженија и износи око 5%, што није занемарљиво. Метод свих исхода и једноставна формула доносе врло сличне резултате, али се ипак испољава тенденција да једноставна формула доноси нешто већу вредност активности. Ефективне угаоне корелације практично нису имале никакав утицај на мерену активност извора који су били стављани на капу детектора. Поправка на ефективне угаоне корелације када се извор налази на капи детектора износи око 0.3%, што је и очекивано јер је у овом случају скоро задовољена 2π геометрија, где се ефекат угаоних корелација поништава. У доминантној каскади извора ^{133}Ba , каскада $4 \rightarrow 1 \rightarrow 0$, ефекат угаоних корелације при великом растојању извора од капе детектора ($W(0)$) је према Табели 6.1, 1.036 на основу чега је јасно да фотони нису јако спрегнути, али ефекат није занемарљив.

Када је у питању утицај раздвајања мултиплитета у области 80 keV, на већим брзинама бројања резултати се знатно разликују. Резултати активности са раздвојеним мултиплитетом дају веће вредности активности од оних које су добијене са не раздвојеним мултиплитетом. Као што се види на Слици 8.5.a где је приказан врх на енергији 81 keV, не постоји минимум између два врха пуне енергије, већ само тачка превоја, што није довољно за тачну информацију о површини врхова. На већим брзинама бројања треба користити модел са заједничким мултиплитетом, док је на мањим брзинама бројања пожељно користити једначине са раздвојеним

мултиплитетима, јер се не мора вршити апроксимација да су ефикасности на 79.6 keV и 81.0 keV једнаке. Такође су корекциони фактори у једноставној формули мање зависни од растојања извора од детектора.

Табела 8.3 Експериментално мерене активности помоћу података из Табеле 8.2.

	ИЗВОР 1				ИЗВОР 2	
A_{ref} [kBq]	62.3±3.1		48.2±2.3		95.0±3.8	
Мултиплитет 79.6 keV и 81 keV није раздвојен						
<i>Метод свих исхода</i>						
Без угаоних корелација	<i>Без случ.</i>	<i>Са случ.</i>	<i>Без случ.</i>	<i>Са случ.</i>	<i>Без случ.</i>	<i>Са случ.</i>
A_{exp} [kBq]	60.1±3.5	/	46.8±3.5	47.9±3.4	90.5±3.8	94.8±4.0
A_{exp}/A_{ref}	0.965	/	0.971	0.994	0.954	0.999
Са угаоним корелацијама						
A_{exp} [kBq]	61.0±3.7	/	46.9±3.5	47.9±3.4	90.6±3.8	94.9±4.0
A_{exp}/A_{ref}	0.979	/	0.973	0.994	0.954	0.999
<i>Једноставна формула</i>						
	(8.3.3)		(8.3.1)			
<i>Корекциони фактор c</i>	1.077(18)		1.090(18)		1.090(18)	
<i>Ефективне угаоне корелације</i>	1.0325		1.0031			
A_{exp} [kBq]	62.7±2.9	/	47.0±3.4	48.2±3.4	90.8±4.0	95.4±4.0
A_{exp}/A_{ref}		/	0.975	1.000	0.956	1.004
Мултиплитет 79.6 keV и 81 keV је раздвојен						
<i>Метод свих исхода</i>						
Без угаоних корелација	<i>Без случ.</i>	<i>Са случ.</i>	<i>Без случ.</i>	<i>Са случ.</i>	<i>Без случ.</i>	<i>Са случ.</i>
A_{exp} [kBq]	60.1±3.5	/	47.5±3.4	48.5±3.4	92.8±4.0	97.3±4.0
A_{exp}/A_{ref}	0.965	/	0.985	1.006	0.977	1.024
Са угаоним корелацијама						
A_{exp} [kBq]	61.0±3.7	/	47.6±3.5	48.6±3.5	92.8±4.0	97.4±4.0
A_{exp}/A_{ref}	0.982	/	0.986	1.008	0.977	1.024
<i>Једноставна формула</i>						
	(8.3.3)		(8.3.1)			
<i>Корекциони фактор c</i>	1.164(14)		1.173(15)		1.173(15)	
<i>Ефективне угаоне корелације</i>	1.0325		1.0031			
A_{exp} [kBq]	62.7±2.9	/	47.8±3.4	48.9±3.4	93.4±4.0	98.1±4.0
A_{exp}/A_{ref}	1.006	/	0.990	1.012	0.983	1.033
τ [ns]	/		473		506	
k [MeV ⁻¹]	7.1		4.5		4.4	

Мерне несигурности измерених активности дате су на нивоу значајности 95.45%. За рачунање мерне несигурности активности добијене методом свих исхода, направљена је процедура у програму *Mathematica* која омогућава да се вредности површине врхова које се уносе у Функцију (7.3.1.7) која примењује процедуру написану у програму *Mathematica* запишу преко релације:

$$N_i = N_{i_0} + p_i \Delta N_{i_0} \quad (8.3.7)$$

где је N_{i_0} експериментално измерена вредност површине врха пуне енергије (Табела 8.2), p_i је параметар којом се функцијом *Random* у програму *Mathematica* додељује случајна вредност -1, 0 или 1 и ΔN_{i_0} је експериментално одређена несигурност површине врха пуне енергије. Овако дефинисане нето површине врхова се уносе у

функцију (7.3.1.7) која решава систем једначина чији је излазни податак активност извора ^{133}Ba . Понављањем поступка израчунавања активности увек са различитим вредностима параметара p_i нађена је горња и доња граница апсолутне грешке мерене активности. Грешка у прорачуну угаоних корелација није узета у обзир, али она је и занемарљива када се извор налазио на капи детектора. За растојање 100 mm грешка је рачуната истом процедуром као и за површине врхова. Генерисан је код при чему се вршила насумична варијација поправке на ефективне угаоне корелације у границама $\pm 1\%$ за каскаде са два фотона. Ово се одразило на мерену активност највише $\pm 0.1\%$.

За израчунавање мерне несигурности површине врхова узета је у обзир статистика одброја и грешка при одређивању континуума. Међутим, параметри који дефинишу континуум нису одређени потпуно аналитички. Ширина на половини висине је одређена мерењем висине врха и ширине на половини висине бројањем канала који захватају врх на половини висине. Остали параметри који одређују континуум су фиксирани онда када је линија континуума најбоље пратила експерименталне податке. Затим су параметри варијани у границама визуелне прихватљивости праћења експерименталних података и рачуната је површина врха. На тај начин утврђене су мерне несигурности у одређивању континуума, која се директно рефлектује на одређивање површине врха. За мерне несигурности врхова чије су површине одређене само из програма *Interactive Peak Fit Analysis* узете су вредности које даје програм и вршена је варијација континуума мењањем граница интеграције и мењањем броја тачака са леве и десне стране врха којима се рачуна континуум.

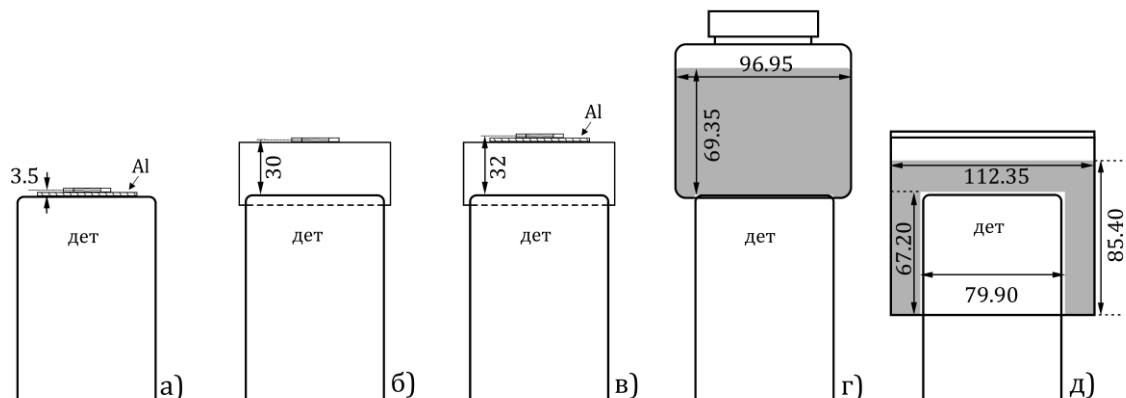
Мерна несигурност методе помоћу једноставне формуле (8.3.1) рачуната је стандардним поступком проналажења парцијалних извода по измереним брзинама бројања:

$$\sigma = \frac{1}{A} \sqrt{\left(\frac{\partial A}{\partial N_1}\right)^2 N_1 + \left(\frac{\partial A}{\partial N_2}\right)^2 N_2 + \left(\frac{\partial A}{\partial N_c}\right)^2 N_c + \left(\frac{\partial A}{\partial N_s}\right)^2 N_s + \left(\frac{\partial A}{\partial N_T}\right)^2 N_T} \quad (8.3.8)$$

Овако израчуната грешка такође је дата на нивоу значајности 95.45% у Табели 8.3.

8.4 Апсолутно мерење активности извора ^{152}Eu

Апсолутна активност калибрационих извора ^{152}Eu мерена је на коаксијалном HPGe детектору релативне ефикасности 35% у тачкастој, цилиндричној и маринели геометрији. Експерименталне поставке приказане су на Слици 8.12.

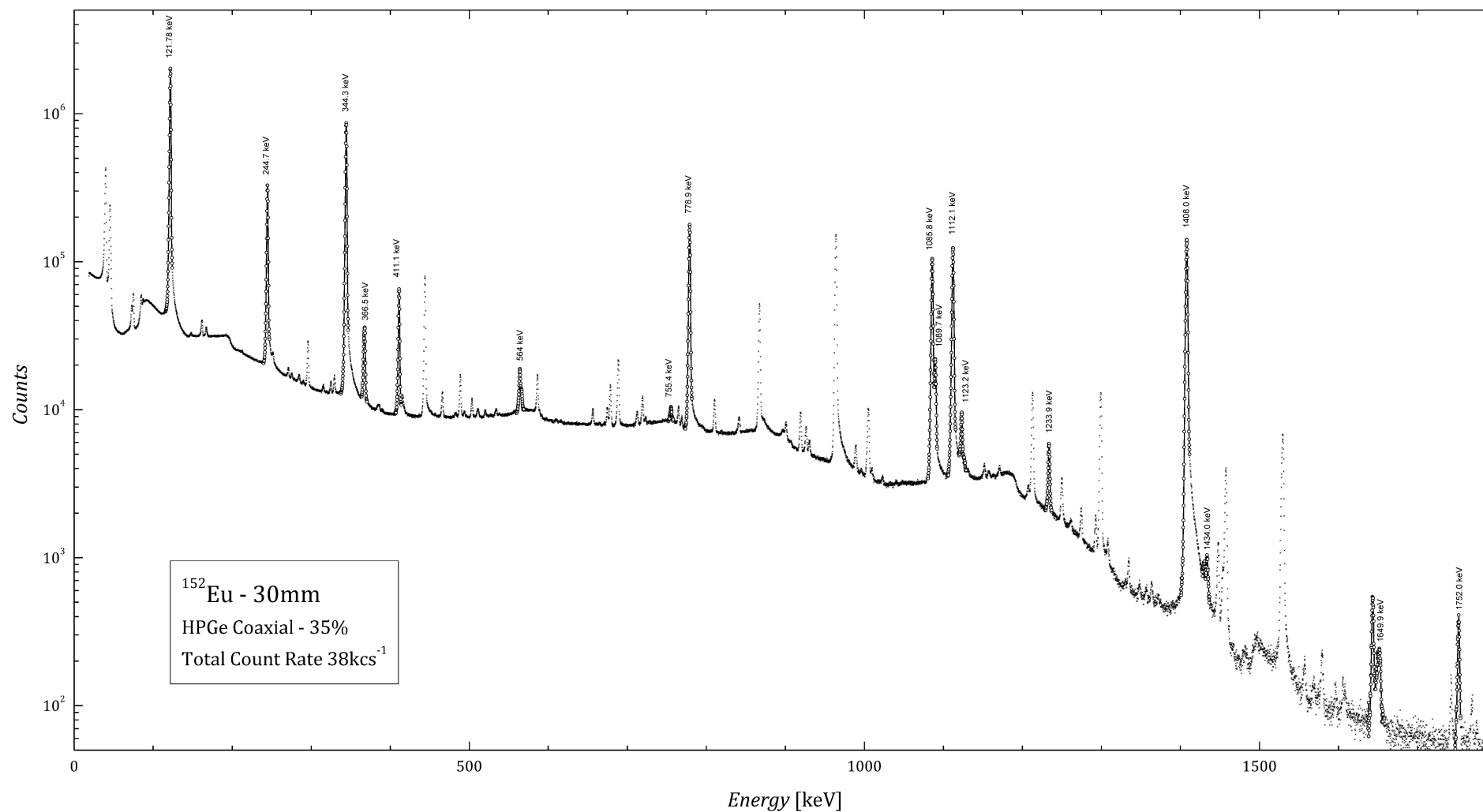


Слика 8.12 Експерименталне поставке за мерење активности извора ^{152}Eu на коаксијалном HPGe детектору. Тачкасти извор Amersham-No. 11188: а) на растојању 3.5 mm од капе детектора са алуминијумским апсорбером дебљине 2 mm, б) на растојању 30 mm од капе детектора без апсорбера и в) на растојању 32 mm од капе детектора са алуминијумским апсорбером дебљине 2mm. Распрострањени извори г) цилиндрични на капи детектора и д) маринели на капи детектора.

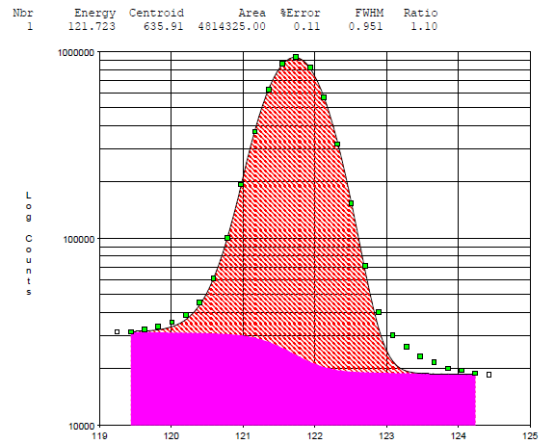
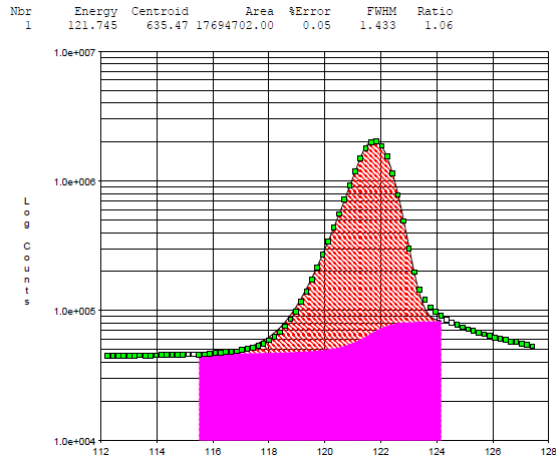
За обраду сигнала и овде је коришћена преносива дигитална спектроскопска јединица *Inspector 2000* произвођача *Canberra*. Коло за одбацивање наседајућих сигнала је било укључено у сваком експерименту, а спектри су сакупљани помоћу програма *Gamma Acquisition and Analysis* у оквиру програмског пакета *Genie 2000*.

Спектри су обрађени у програму *Gamma Acquisition and Analysis* при чему су сви синглети и мултиплитети фитовани у оквиру програма за интерактивно фитовање. Претходно је извршена енергетска калибрација облика врха креирањем базе података за релевантне синглетне линије у спектру извора ^{152}Eu . Ово је учињено за сваки спектар појединачно јер су снимани на различитим брзинама бројања. Пример спектра извора ^{152}Eu приказан је на Слици 8.13.

Спектрални подаци најлошијег квалитета добијени су за тачкасти извор ^{152}Eu при растојању 3.5 mm од капе детектора (брзина бројања 87kcs^{-1}). Ради поређења квалитета спектралних података на Слици 8.14. приказан је врх на енергији 121.8 keV који је добијен на брзини бројања 38kcs^{-1} и 6kcs^{-1} . Највећу несигурност у обради врхова на већим брзинама бројања управо доноси проблем дефиниције континуума и репа на нижој и вишој енергији. Уграђена функција са експоненцијалним репом за нижу енергију није адекватна на великим брзинама бројања, већим око 40kcs^{-1} . У програму *Interactive Peak Fit* не постоји опција за дефинисање репа на вишој енергији, тако да се за горњу границу релевантне области врха пуне енергије узимао практично део где долази до знатног одступања од гаусовог облика. Ово се јасно види на Слици 8.14.а, у логаритамској скали. Слична процедура за одређивање површине врхова на већим брзинама бројања коришћена је у [62]. Метод сумарног врха слабо зависи од ефикасности детекције, а управо ефикасност врха пуне енергије зависи и од начина на који је дефинисан врх пуне енергије. У том смислу, при мерењу активности само помоћу спектралних података није битна информација о ефикасности врха пуне енергије, већ је важно да се за одређивање врхова усвоји одговарајућа процедура која се примењује једнако на све врхове у спектру.



Слика 8.13 Спектар тачкастог извора ^{152}Eu снимљен на растојању 30 mm од капе коаксијалног HPGe релативне ефикасности 35% помоћу дигиталне спектроскопске јединице. У спектру су маркирани врхови који су коришћени за мерење апсолутне активности.



а)

б)

Слика 8.14 Врх на енергији 121.8 keV на различитим брзинама бројања. а) Брзина бројања 38 kcs⁻¹; јасно је изражен проблем репа на вишој и нижој енергији и велико одступање од гаусовог облика. б) Брзина бројања 6 kcs⁻¹; фит није идеалан, али неадекватан опис репа на вишој и нижој енергији обухвата само десет до двадесет процената реда величине, док је у претходном случају неслагање репова на више десетина процената реда величине. Област врха пуне енергије и континуум је јасно дефинисан.

Иако је статистичка грешка мања на већим брзинама бројања, главну несигурност у мереној површини врха ипак доноси облик врха и облик континуума. Спектрални подаци различитих извора ¹⁵²Eu снимани при различитим геометријама сумирани су у Табели 8.4.

Резултати мерења активности извора ¹⁵²Eu на основу података из Табеле 8.4 и формуле (7.4.4.5) дати су у Табели 8.5. Као што се види у резултатима мерења, активности се разликују у зависности од избора фотонских каскада. За тачкасти извор мерен на растојању 3.5 mm од капе детектора велика брзина бројања је узрок великог одступања од референтне вредности активности. Врхови у спектру тачастиг извора ¹⁵²Eu мереног на растојању 3.5 mm од капе детектора су били јако деформисани. Такође преклапање са другим врховима онемогућило је прецизно мерење површине врхова па је то главни узрок великог одступања. Активности истог извора мерене на растојању 30 mm од капе детектора су у много бољој сагласности са референтним активностима. Нема већег одступања од 3%. Такође на растојању 32 mm од капе детектора нема већег одступања од 3%. Најбољи резултати добијају се за комбинације каскада 10→1→0 ¹⁵²Sm и 7→1→0 ¹⁵²Gd. Спектар добијен за извор постављен на растојању 100 mm од капе детектора даје активности које одступају и до 20% од референтне активности. Овде је узрок слаба статистика у релевантним сумарним врховима и врху случајних коинциденција.

Табела 8.4 Спектрални подаци калибрационих извора ^{152}Eu у разним геометријама добијеним помоћу коаксијалног HPGe детектора релативне ефикасности 35% и DSP спектроскопске јединице.

	Тачкасти извор				Распрострањени извори		
	Растојање извора од капе детектора				Облик		
	3.5 mm	30 mm	32 mm	100 mm	Цилиндричан	Маринели	
<i>Датум мерења</i>	06.01.2010.	13.11.2009.	07.01.2010.	06.04.2005.	07.04.2005.	08.04.2005.	
<i>Време мерења [s]</i>	13633.34	3600.56	44391.97	7776.21	75748.82	9537.28	
<i>Мртво време [%]</i>	81.39	51.82	43.35	19.82	5.75	10.86	
Прелаз	E [keV]	Површине врхова					
1→0 ^{152}Sm	121.8	$1.36(5) 10^8$	$1.75(3) 10^7$	$1.65(2) 10^8$	$1.096(3) 10^7$	$1.688(10) 10^7$	$4.830(5) 10^6$
2→1 ^{152}Sm	244.7	/	$2.93(3) 10^6$	$2.90(3) 10^7$	$2.0130(12) 10^6$	$3.309(5) 10^6$	$9.384(23) 10^5$
1→0 ^{152}Gd	344.3	$7.50(20) 10^7$	$8.28(8) 10^6$	$8.09(7) 10^7$	$5.385(20) 10^6$	$1.010(3) 10^7$	$2.915(3) 10^6$
2→1→0 ^{152}Sm	366.5	*	*	*	$1.78(5) 10^4$	$8.48(6) 10^4$	$3.38(13) 10^4$
3→1 ^{152}Gd	411.1	$4.20(9) 10^6$	$5.47(5) 10^5$	$5.50(5) 10^6$	$3.845(15) 10^5$	$8.50(9) 10^4$	$1.898(13) 10^5$
16→9 ^{152}Sm	564	$9.20(28) 10^5$	$9.94(20) 10^4$	$9.87(5) 10^5$	$6.59(4) 10^4$	$1.255(6) 10^5$	$3.56(11) 10^4$
3→1→0 ^{152}Sm	755.4	$5.1(5) 10^5$	$1.9(4) 10^4$	$1.6(3) 10^5$	$4.96(29) 10^3$	$2.37(5) 10^4$	$9.29(26) 10^3$
7→1 ^{152}Gd	778.9	$1.68(3) 10^7$	$1.91(3) 10^6$	$1.925(10) 10^7$	$1.297(3) 10^6$	$2.654(3) 10^6$	$7.273(18) 10^5$
9→0 ^{152}Sm	1085.8	$1.396(20) 10^7$	$1.266(10) 10^6$	$1.272(5) 10^7$	$7.939(9) 10^5$	$1.808(3) 10^6$	$5.062(15) 10^5$
11→1 ^{152}Gd	1089.7	$2.00(5) 10^6$	$2.25(8) 10^5$	$2.17(7) 10^6$	$1.388(4) 10^5$	$2.948(7) 10^5$	$8.04(4) 10^4$
10→1 ^{152}Sm	1112.1	$1.45(3) 10^7$	$1.518(20) 10^6$	$1.557(14) 10^7$	$1.0204(10) 10^6$	$2.225(5) 10^6$	$5.976(25) 10^5$
7→1→0 ^{152}Gd	1123.2	$1.72(10) 10^6$	$6.05(18) 10^4$	$4.73(9) 10^5$	$8.4(11) 10^3$	$7.46(3) 10^4$	$3.10(8) 10^4$
10→1→0 ^{152}Sm	1233.9	$1.44(4) 10^6$	$4.95(10) 10^4$	$3.74(4) 10^5$	$5.79(16) 10^3$	$4.71(11) 10^4$	$1.89(6) 10^4$
13→1 ^{152}Sm	1408	$1.80(4) 10^7$	$1.87(3) 10^6$	$1.96(3) 10^7$	$1.2939(12) 10^6$	$2.870(3) 10^6$	$7.710(14) 10^5$
11→1→0 ^{152}Gd	1434	$1.79(5) 10^5$	$6.3(3) 10^3$	$4.48(8) 10^4$	$7.0(5) 10^2$	$7.4(3) 10^3$	$3.34(18) 10^3$
16→9→0 ^{152}Sm	1649.9	$5.8(5) 10^4$	$1.78(35) 10^3$	$1.341(20) 10^4$	$1.70(25) 10^2$	$1.45(5) 10^3$	$5.73(40) 10^2$
1→0 ^{152}Gd + 13→1 ^{152}Sm	1752.3	$1.14(3) 10^5$	$4.69(23) 10^3$	$3.90(6) 10^4$	$8.85(34) 10^2$	$3.2(4) 10^2$	$1.84(20) 10^2$
површина спектра		$1.191(19) 10^9$	$1.380(14) 10^8$	$1.320(13) 10^9$	$8.898(3) 10^7$	$2.286(23) 10^8$	$5.654(6) 10^7$

Грешке у површинама врхова пуне енергије су дате са мерном несигурношћу на нивоу поверења 68.3%.

Табела 8.5 Активности извора ^{152}Eu добијене помоћу формуле (7.4.4.5), спектралних података из Табеле 8.4. при чему су поправке на ефективне угаоне корелације рачунате помоћу процедуре дате у Прилогу А. Испод нумеричких резултата активности дат је однос мерене и референтне активности. Мерна несигурност је дата само за резултате чија средња вредност не одступа више од 10% од референтне активности. Мерне несигурности су дате на нивоу значајности 95.45% ($k = 2$). Резултати мерења који не одступају више од 3% од референтне активности приказане су укошеним словима.

	Тачкасти извор				Распрострањени извори	
	Растојање извора од капе детектора				Геометрија	
	3.5 mm	30 mm	32 mm	100 mm	Цилиндричан	Маринели
Брзина бројања [kcs ⁻¹]	87.4	38.3	29.7	11.4	3.0	5.9
Каскаде	Активност [kBq] и однос мерене и референтне активности					
(2→1→0) ¹⁵² Sm						
(16→9→0) ¹⁵² Sm	/	/	/	336(24) 0.836	15.5 0.43	29.8(14) 0.925
(3→1→0) ¹⁵² Gd						
(10→1→0) ¹⁵² Sm						
(16→9→0) ¹⁵² Sm	274 0.873	310(39) 0.978	305(31) 0.971	424(31) 1.05	16.2 0.484	31.8(14) 0.988
(3→1→0) ¹⁵² Gd						
(2→1→0) ¹⁵² Sm						
(16→9→0) ¹⁵² Sm	/	/	/	385(41) 0.958	18.7 0.558	30.8(14) 0.957
(7→1→0) ¹⁵² Gd						
(10→1→0) ¹⁵² Sm						
(16→9→0) ¹⁵² Sm	282 0.898	309(19) 0.975	310(10) 0.978	473(45) 1.18	20.5 0.612	32.7(14) 1.02
(7→1→0) ¹⁵² Gd						
(2→1→0) ¹⁵² Sm						
(16→9→0) ¹⁵² Sm	/	/	/	399(31) 0.993	19.2 0.573	31.0(16) 0.963
(11→1→0) ¹⁵² Gd						
(10→1→0) ¹⁵² Sm						
(16→9→0) ¹⁵² Sm	290 0.924	312(21) 0.984	317(12) 1.01	487(37) 1.21	19.7 0.627	32.9(16) 1.02
(11→1→0) ¹⁵² Gd						
Средња вредност [kBq]	282	310(16)	311(12)	417(15)	18.3	31.5(6)
A_{exp}/A_{ref}	0.898	0.978	0.989	1.04	0.546	0.978
Референтна Активност [kBq]	314(5)	317(5)	314(5)	402(6)	33.5(17)	32.2(16)

Спектри распрострањених извора добијени су на много мањим брзинама бројања, па су сви врхови били добро дефинисани. Међутим, Формула (7.4.4.5) није адекватна за распрострањене изворе јер нема корекционе чланове услед варијације ефикасности и угаоних корелација унутар запремине извора. Ово је нарочито уочљиво код цилиндричног узорка где су одступања и већа од 50%. Маринели геометрија, иако такође без корекционих фактора, много је прихватљивија за примену методе сумарног врха, што се види из резултата мерења. Без увођења било каквих корекционих фактора на угаоне корелације и варијацију ефикасности добијене су активности које нису одступале више од 10% од референтне активности. Код маринели геометрије све комбинације са каскадом 10→1→0 ¹⁵²Sm дају резултате активности помоћу формуле (7.4.4.5) који не одступају више од 2% од референтне активности.

Користећи спектралне податке извора ^{152}Eu дате у Табели 8.4. тестиране су формуле (7.4.6.6), (7.4.6.7) и (7.4.6.8) изведене у одељку 7.4.6 које се односе на мерење активности помоћу једне каскаде. Измерене активности дате су у Табели 8.6.

Табела 8.6 Активности извора ^{152}Eu мерене на основу спектралних података из Табеле 8.4 и формула (7.4.6.6), (7.4.6.7) и (7.4.6.8). Вероватноће прелаза према [41] које фигуришу у формулама за мерење активности су: $p_{1\rightarrow 0}^{\text{Sm}}(\gamma + ce) = 0.615$, $p_{9\rightarrow 0}^{\text{Sm}}(\gamma + ce) = 0.1015$ и $p_{1\rightarrow 0}^{\text{Gd}}(\gamma + ce) = 0.2765$. Резултати мерења који не одступају више од 2% од референтне активности приказани су укошеним словима.

	Тачкасти извор				Распрострањени извори	
	Растојање извора од капе детектора				Геометрија	
	3.5 mm	30 mm	32 mm	100 mm	Цилиндричан	Маринели
Брзина бројања [kcs ⁻¹]	87.4	38.3	29.7	11.4	3.0	5.9
Каскаде	Активност [kBq] и однос мерене и референтне активности					
(2→1→0) ¹⁵² Sm	/	/	/	351(25) 0.87	18.4* 0.55	29.1(19) 0.90
(10→1→0) ¹⁵² Sm	278(23) 0.89	315(21) 0.99	317(15) 1.01	494(39) 1.23	18.9* 0.56	32.3(18) 1.00
(16→9→0) ¹⁵² Sm	265(34) 0.84	276(21) 0.87	286(10) 0.91	531(160) 1.32	28.1* 0.84	39(5) 1.20
(3→1→0) ¹⁵² Gd	271(40) 0.86	318(128) 1.00	293(106) 0.93	238(28) 0.59	4.9* 0.15	28.7(14) 0.89
(7→1→0) ¹⁵² Gd	302(33) 0.96	317(23) 1.00	313(15) 1.00	417(59) 1.04	19.3* 0.58	32.0(15) 0.99
(11→1→0) ¹⁵² Gd	330(27) 1.05	325(39) 1.03	337(27) 1.07	467(77) 1.16	19.0* 0.57	32.7(29) 1.02
Средња вредност [kBq]	289(14) 0.92	310(28) 0.98	310(22) 0.99	486(39) 1.21	21.2* 0.63	32.3(5) 1.16
Референтна Активност [kBq]	314(5)	317(5)	314(5)	402(6)	33.5(17)	32.2(16)

На основу резултата приказаних у Табели 8.6. може се закључити да нису све каскаде адекватне за мерење активности помоћу формула (7.4.6.6), (7.4.6.7) и (7.4.6.8). Највећа одступања се добијају за каскаду 16→9→0 потомка ^{152}Sm . Ово је и очекиван резултат с обзиром да сумарни врх није добро дефинисан јер се преклапа са суседним врховима ван моћи разлагања спектрометра. Такође, теоријски модел за овај сумарни врх је веома груб јер одброј под сумарним врхом настаје услед више различитих каскада где се ни једна не може издвојити као довољно доминантна. Каскада 3→1→0 потомка ^{152}Gd исто доноси веома лоше резултате, са великом мерном несигурношћу, одступања и до 90%. Узрок је веома лоше дефинисан сумарни врх на 755 keV за који се не може дефинисати јасан континуум нити положај центроида. Каскада 2→1→0 ^{152}Sm доноси нешто боље резултате, али на мањим брзинама бројања.

На већим брзинама бројања међусобна интерференција сумарног врха каскаде 2→1→0 потомка ^{152}Sm на 366.5 keV и регуларног врха на енергији 367.8 keV онемогућује да се раздвоји овај мултиплитет. На мањим брзинама бројања, цилиндар и маринели и тачкасти на 10 cm могуће је рачунати активност и помоћу ове каскаде. Најбољи резултати добијају се за каскаде 10→1→0 потомка ^{152}Sm и 7→1→0 потомка ^{152}Gd за спектралне податке тачкастих извора постављених на растојање 30 mm и 32 mm од капе детектора као и за Маринели геометрију. Каскада 7→1→0 потомка ^{152}Gd доноси најбоље резултате на свим брзинама бројања осим за цилиндричну геометрију.

Из резултата мерења произилази да недостатак корекционих фактора за цилиндричну геометрију резултира у великој систематској грешци мерне активности. Услед тога статистичка грешка није ни приказана јер је она много мања од систематске. Израчунавање корекционих фактора за цилиндричну геометрију представља

компликовану процедуру јер се положаји елементарних извора не поклапају са осом детектора. Асиметричан положај извора доводи у питање тачности упортебе законе апсорпције гама зрачења за добијање релативне ефикасности у функцији упадног угла фотона. За детаљно испитивање тачности методе потребно је располагати резултатима рачунатим Monte Carlo симулацијама.

Са друге стране изненађујуће добри резултати активности који су добијени за Маринели геометрију без корекционих фактора на основу овог рада могу се објаснити само квалитативно. Према формули (7.4.3.1) и графику за поправке на ефективне угаоне корелације за извор ^{152}Eu (Слика 7.12) где се види да су за каскаде $7 \rightarrow 1 \rightarrow 0$, $10 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ и $11 \rightarrow 1 \rightarrow 0$ корекциони фактори на ефективне угаоне корелације мањи од 1, закључујемо да ће сабирци који имају смисао не детектованих распада од елементарних извора приближно бити једнаки јер се на већем растојању очекује и мањи одброј у сумарним врховима. За стандардну Маринели геометрију, на основу експеримента произилази да је приближно задовољен услов једнакости у формули за активност распрострањеног узорка

$$N_D + \sum_{i=1}^n \left(\frac{N_1^i N_2^i}{N_\Sigma^i} \right) \square \sum_{i=1}^n \sum_k \left(\frac{N_1^{ik} N_2^{ik}}{N_\Sigma^{ik}} + N_D^{ik} \right) w_{ik} . \quad (8.4.1)$$

која се мери преко n каскада. Такође, претходни услов примењен на формулу за активност помоћу једне каскаде се своди на:

$$N_D + \frac{N_1 N_2}{p N_\Sigma} \square \sum_k \left(\frac{N_1^k N_2^k}{p N_\Sigma^k} + N_D^k \right) w_k . \quad (8.4.2)$$

Детаљна анализа важности Једнакости (8.4.2) захтева Monte Carlo израчунавања што превазилази оквире овог рада.

На брзинама бројања мањим од 40 kcs^{-1} (у овим експериментима са DSP јединицом) при чему се из спектралних података добијају врло тачне информације о површинама врхова активности тачкастих извора могу се мерити са грешком не већом од 2% процената уколико се узму у обзир поправке на ефективне угаоне корелације. За стандардну Маринели геометрију запремине 450 ml која обухвата капу коаксијалног HPGe детектора, резултати активности могу имати мање одступање од 2% без икаквих корекција.

За израчунавање мерне несигурности експериментално одређених активности тачкастог узорка узета је у обзир грешка у одређивању површине врхова пуне енергије, сумарних врхова и врхова случајних коинциденција, као и мерна несигурност ефективних угаоних корелација.

У процени грешке у одређивању површине врха није узета у обзир само статистичка грешка, већ је вршена и варијација континуума и област интеграције. Варијација облика интеграције нема много утицаја на грешку уколико врх не лежи на континууму неког врха у окружењу. Међутим сумарни врх на 1434 keV лежи на репу ка вишој енергији врха пуне енергије на 1408 keV и интерферира са још једним сумарним врхом на енергији 1430 keV па се варијација области интеграције одражава и на облик континуума и на укупну површину врха. Ово је илустровано на Слици 8.15.

Мерна несигурност корекционог фактора на ефективне угаоне корелације процењена је из несигурности положаја извора и геометрије детектора. Такође узета је у обзир грешка модела апсорпције гама зрачења према литератури [47]. У овом смислу угаоне корелације доносе несигурност од око 2%.

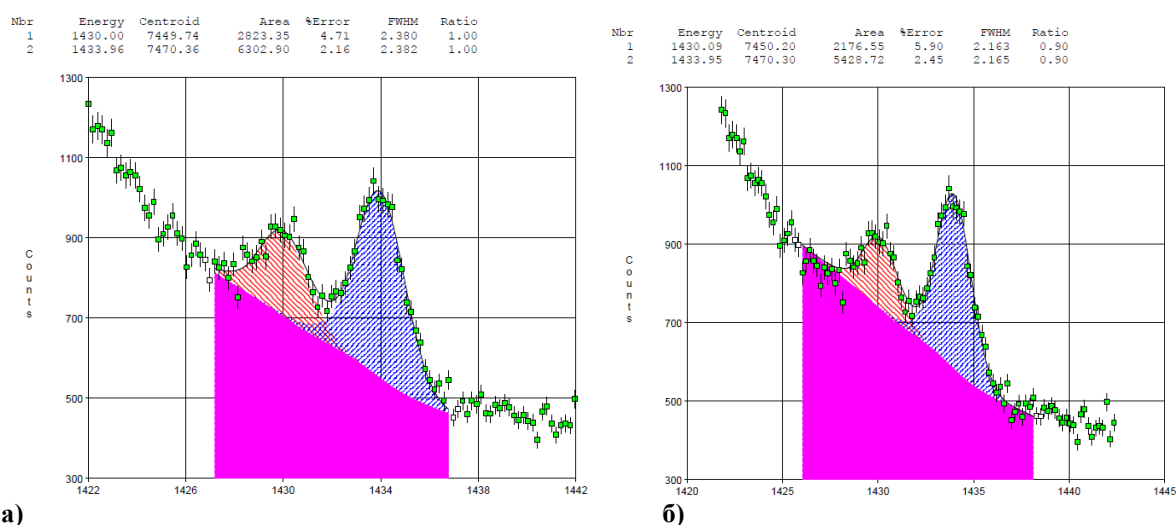
Грешка на корекцију на живо време имплицитно је садржана у грешки врха случајних коинциденција, јер се на основу њега кориговао одброј у одговарајућим

врховима. Инструментална грешка самог алгоритма DSP јединице и уграђеног сата није позната. Време мерења које је дато уз спектралне податке приказано је са безначајном грешком у самом спектру, 0.0005 s.

Укупна релативна мерна несигурност на нивоу поверења 95.45% рачуната је обрасцем:

$$\sigma = \frac{2}{A} \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial A}{\partial N_i} \right)^2 (\Delta N_i)^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial N_T} \right)^2 (\Delta N_T)^2 + \sigma_w^2}, \quad (8.4.3)$$

где је A одговарајући аналитички израз за активност, формуле (7.4.4.5), (7.4.6.6), (7.4.6.7) и (7.4.6.8) и N_i су нето површине врхова коришћене у спектру; N_D је укупна брзина бројања. Ознака Δ се односи на апсолутну грешку површине врха; σ_w је релативна грешка за корекциони фактор на ефективне угаоне корелације.



Слика 8.15 Варијација области интеграције утиче на облик континуума што уноси мерну несигурност у одређивању површине врха. Ово је јасно истакнуто код сумарног врха на енергији 1434 keV. Површина врха у случају а) 6300; у случају б) 5428.

На брзинама бројања не већим од 40 kcs^{-1} мерна несигурност средње вредности активности тачкастих извора која је добијена помоћу 3 каскаде не превазилази 5%. Мерења распрострањених узорка на мањим брзинама бројања доносе много мању мерну несигурност у одређивању површине врхова па су јасан показатељ ограничења тачности методе. Статистичка грешка средње вредности активности за Маринели геометрију преко три каскаде је око 2%.

Мерна несигурност методе која користи само једну каскаду нешто је већа. Са довољном статистиком мерна несигурност средње вредности је мања од 10% за брзине бројања мање од 40 kcs^{-1} . Резултати на распрострањеним узорцима указују да грешка при мерењу активности само на основу једне каскаде може бити мања од 5%.

9 Закључак

Коинцидентна техника мерења активности тачкастих извора ^{60}Co , ^{133}Ba и извора ^{152}Eu у тачкастој, цилиндричној и маринели геометрији на једном детектору је успешно реализована помоћу коаксијалног HPGe детектора и дигиталне спектроскопске јединице. Резултати мерења су сумирани у Табели 9.1.

Табела 9.1 Сумарни резултати мерења активности извора ^{60}Co , ^{133}Ba и ^{152}Eu

	A_{ref} [kBq]	A_{exp} [kBq]	Метод
^{60}Co	397.7±6.0	397.7±2.3 ^{stat} ±3.3 ^{sist.}	Формула (8.2.7) 13 спектара
^{133}Ba 1	48.2±2.3	48.2±3.4	Формула (8.3.1) Један спектар
^{133}Ba 2	95.0±3.8	95.4±4.0	
^{152}Eu тачкасти	314±5	311±12	Формула (7.4.4.5) Један спектар
^{152}Eu цилиндрични	33.5±1.7	18.3	
^{152}Eu маринели	32.2±1.6	31.5±0.6	
^{133}Ba 1	48.2±2.3	47.9±3.4	Метод свих исхода Један спектар
^{133}Ba 2	95.0±3.8	94.9±4.0	
^{152}Eu тачкасти	314±5	310±22	Једна варијанта Формуле (7.4.6.4) Један спектар
^{152}Eu цилиндрични	33.5±1.7	21.2	
^{152}Eu маринели	32.2±1.6	32.3±0.5	

Активност тачкастог калибрационог извора ^{60}Co која је добијена на основу 13 мерења на једном гама спектрометру на различитим растојањима од капе детектора када су узете у обзир ефективне угаоне корелације је у одличној сагласности са резултатом који је добио произвођач. Детаљна анализа грешке доноси мерну несигурност око 1.4%. Резултати указују да се може постићи минимална несигурност око 0.5% уколико се поправке на ефективне угаоне корелације израчунају са већом тачношћу.

Активност тачкастих извора ^{133}Ba добијена једноставним поступком такође са поправком на ефективне угаоне корелације и насумично сумирање доноси резултате који имају мерну несигурност око 4%. Резултати су у доброј сагласности <1% са методом који је добио произвођач. Метод свих исхода даје сличне резултате.

За изворе ^{152}Eu резултати мерења зависе од облика извора. Сложеност шеме одражава се на тачност методе која се овде може проценити на минимално око 5%.

За једноставне шеме који се распадају путем емисије 2 фотона у каскади уз одговарајућу процедуру и употребу DSP спектроскопске јединице могу се постићи добри резултати и на брзинама бројања од око 80 kcs⁻¹. За сложеније шеме распада

јавља се проблем са интерферирањем врхова у спектру. У том смислу извор ^{133}Ba и ^{152}Eu треба мерити на брзинама бројања која су испод 10 kcs^{-1} .

У овом раду демонстрирана је предност принципа коинцидентне технике на једном детектору у односу на коинцидентну технику са два детектора јер није било потребе за било каквим хардверским подешавањима. Међутим сложеност технике одразила се на обраду и анализу спектралних података која практично и уноси највећи проблем у постизању већих тачности.

Метод као такав, док се не појаве детектори са много бољом временском и енергетском резолуцијом може имати велики значај у лабораторијској пракси која подразумева обраду и анализу спектралних података као и у рутинској калибрацији када се не захтева тачност испод 1% за двофотонске каскадне емитере и око 5% за сложене гама емитере.

Прилози

Прилог А

Угаоне корелације каскадних фотона

А.1 Коефицијенти угаоних корелација

У одељку 6.1 дата је формула за израчунавање функције угаоних корелација (6.1.1) и формула (6.1.8) за израчунавање ефективних угаоних корелација. У овим формулама фигуришу коефицијенти угаоних корелација (6.1.3) који се израчунавају производима функција (6.1.4) и (6.1.5). У коефицијентима (6.1.4) и (6.1.5) фигуришу F коефицијенти који се израчунавају помоћу 3- j и 6- j симбола. У [63] дата је табела F коефицијената за одговарајуће спинове стања и угаоних момената фотона. Међутим, програм *Mathematica* има уграђене функције за налажење 3- j и 6- j симбола, па је писањем програма у *Mathematici* процедура описана у одељку 6.1 знатно поједностављена.

Дефинисана је функција помоћу које се израчунава F симбол:

```
F[k_,L_,L1_,Ii_1,Ic_]:=
((-1)^(Ii+Ic-1))((2L+1)(2L1+1)(2Ic+1)(2k+1))^(1/2)
ThreeJSymbol[{L1,1},{L1,1},{k,0}]SixJSymbol[{L,L1,k},{Ic,Ic,Ii
}]
```

Где је k број коефицијента (2, 4 6,...), L је угаони момент фотона, $L1$ виши мутипол угаоног момента фотона који се уноси уколико је прелаз мешан, Ii је спин иницијалног или финалног стања, а Ic је спин интермедијарног стања.

Прво је дефинисана општа функција за израчунавање коефицијента угаоних корелација који фигуришу у једначини (6.1.3).

```
A[k_,L1_,Ii_,Ic_,δ_]:=
If[Abs[δ]>0,((-1)^(Ii+Ic-1))
((2L1+1)(2L1+1)(2Ic+1)(2k+1))^(1/2)
ThreeJSymbol[{L1,1},{L1,-1},{k,0}]
SixJSymbol[{L1,L1,k},{Ic,Ic,Ii}]+2δ((-1)^(Ii+Ic-1))
((2L1+1)(2Ic+1)(2(L1+1)+1)(2k+1))^(1/2)
ThreeJSymbol[{L1,1},{L1+1,-1},{k,0}]
SixJSymbol[{L1,L1+1,k},{Ic,Ic,Ii}]+δ^2((-1)^(Ii+Ic-1))
((2(L1+1)+1)(2(L1+1)+1)(2Ic+1)(2k+1))^(1/2)
ThreeJSymbol[{L1+1,1},{L1+1,-1},{k,0}]
SixJSymbol[{L1+1,L1+1,k},{Ic,Ic,Ii}]/(1+δ^2),((-1)^(Ii+Ic-1))
```



```

((2L1+1) (2L1+1) (2Ic+1) (2k+1))^(1/2)
ThreeJSymbol[{L1, 1}, {L1, -1}, {k, 0}]
SixJSymbol[{L1, L1, k}, {Ic, Ic, Ii}]

```

Функција угаоних корелација два каскадна фотона дефинисана је програмом који се користи претходном функцијом за дефинисање коефицијената угаоних корелација:

```

W[{L1_, δ1_}, {L2_, δ2_}, {ii_, iin_, if_}:=1+Sum[A[k, L1, ii, iin, δ1]
A[k, L2, if, iin, δ2]LegendreP[k, Cos[θ]],
{k, 2, If[And[Abs[δ1]>0, Abs[δ2]>0],
If[EvenQ[Min[2 iin, L1+1, L2+1]], Min[2 iin, L1+1, L2+1],
Min[2 iin, L1+1, L2+1]-1],
If[And[Abs[δ1]>0, δ2==0],
If[EvenQ[Min[2 iin, L1+1, 2 L2]], Min[2 iin, L1+1, 2 L2],
Min[2 iin, L1+1, 2 L2]-1],
If[And[Abs[δ2]>0, δ1==0], If[EvenQ[Min[2 iin, 2 L1, L2+1]],
Min[2 iin, 2 L1, L2+1], Min[2 iin, 2 L1, L2+1]-1],
If[EvenQ[Min[2 iin, 2 L1, 2 L2]], Min[2 iin, 2 L1, 2 L2],
Min[2 iin, 2 L1, 2 L2]-1]]], 2}

```

A.2 Ефективне угаоне корелације

Функција за израчунавање ефективних угаоних корелација је нешто сложенија, јер се морају увести атенуациони фактори који зависе од ефикасности детекције фотона одређене енергије као и упадног правца фотона. Овде је функција за коефицијент апсорпције гама зрачења за германијум и алуминијум дата експлицитно која је претходно фитована на податаке из базе X-com.

```

Wef[{E1_,L1_,δ1_},{E2_,L2_,δ2_},{ii_,iin_,if_},{h_,H_,d1_,d2_,
r_,l_,dl_,da_,x_}] :=
(miGe=0.0316561261+0.0002319430/s^3-
0.00079310/s^2+0.0084990217/s-0.0112175448 s+0.002015730
s^2;miAl=0.015327108+0.000028199513/s^3-
0.0005806215/s^2+0.005744249060/s-0.0046190547
s+0.000696183637 s^2;
En={E1/1000,E2/1000};
μAl=Table[miAl/.s→En[[i]],{i,1,Length[En]}];
μGe=Table[miGe/.s→En[[i]],{i,1,Length[En]}];
dis=r+dl+x;
{θ1=ArcTan[d1/(dis+H-d1)],θ2=ArcTan[d1/(dis+h-d1)],
θ3=ArcTan[(d2-d1)/(dis+H-d1)],θ4=ArcTan[(d2-d1)/dis]};
f11=Exp[-μAl[[1]](1+da)Sec[θ]] Exp[-μGe[[1]]d1 Sec[θ]]
(1-Exp[-μGe[[1]](h-d1)Sec[θ]]);
f12=Exp[-μAl[[2]](1+da)Sec[θ]] Exp[-μGe[[2]]d1 Sec[θ]]
(1-Exp[-μGe[[2]](h-d1)Sec[θ]]);
f21=Exp[-μAl[[1]](1+da)Sec[θ]] Exp[-μGe[[1]]d1 Sec[θ]]
(1-Exp[-μGe[[1]]((h+H+dis-2d1)Sec[θ]-d1 Csc[θ])]);
f22=Exp[-μAl[[2]](1+da)Sec[θ]] Exp[-μGe[[2]]d1 Sec[θ]]
(1-Exp[-μGe[[2]]((h+H+dis-2d1)Sec[θ]-d1 Csc[θ])]);
f31=Exp[-μAl[[1]](1+da)Sec[θ]] Exp[-μGe[[1]]d1 Sec[θ]]
(1-Exp[-μGe[[1]](H-d1)Sec[θ]]);
f32=Exp[-μAl[[2]](1+da)Sec[θ]] Exp[-μGe[[2]]d1 Sec[θ]]
(1-Exp[-μGe[[2]](H-d1)Sec[θ]]);
f41=Exp[-μAl[[1]](1+da)Sec[θ]] Exp[-μGe[[1]]d1 Sec[θ]]
(1-Exp[-μGe[[1]]((d2-d1)Csc[θ]-(dis)Sec[θ])]);
f42=Exp[-μAl[[2]](1+da)Sec[θ]] Exp[-μGe[[2]]d1 Sec[θ]]
(1-Exp[-μGe[[2]]((d2-d1)Csc[θ]-(dis)Sec[θ])]);
J01=
NIntegrate[f11 Sin[θ],{θ,0,θ1}]+
NIntegrate[f21 Sin[θ],{θ,θ1,θ2}]+
NIntegrate[f31 Sin[θ],{θ,θ2,θ3}]+
NIntegrate[f41 Sin[θ],{θ,θ3,θ4}];
J21=
NIntegrate[f11 Sin[θ] LegendreP[2,Cos[θ]],{θ,0,θ1}]+
NIntegrate[f21 Sin[θ] LegendreP[2,Cos[θ]],{θ,θ1,θ2}]+
NIntegrate[f31 Sin[θ] LegendreP[2,Cos[θ]],{θ,θ2,θ3}]+
NIntegrate[f41 Sin[θ] LegendreP[2,Cos[θ]],{θ,θ3,θ4}];
J41=
NIntegrate[f11 Sin[θ] LegendreP[4,Cos[θ]],{θ,0,θ1}]+
NIntegrate[f21 Sin[θ] LegendreP[4,Cos[θ]],{θ,θ1,θ2}]+
NIntegrate[f31 Sin[θ] LegendreP[4,Cos[θ]],{θ,θ2,θ3}]+

```

```

NIntegrate[f41 Sin[θ] LegendreP[4,Cos[θ]],{θ,θ3,θ4}];
J02=
NIntegrate[f12 Sin[θ],{θ,0,θ1}]+
NIntegrate[f22 Sin[θ],{θ,θ1,θ2}]+
NIntegrate[f32 Sin[θ],{θ,θ2,θ3}]+
NIntegrate[f42 Sin[θ],{θ,θ3,θ4}];
J22=
NIntegrate[f12 Sin[θ] LegendreP[2,Cos[θ]],{θ,0,θ1}]+
NIntegrate[f22 Sin[θ] LegendreP[2,Cos[θ]],{θ,θ1,θ2}]+
NIntegrate[f32 Sin[θ] LegendreP[2,Cos[θ]],{θ,θ2,θ3}]+
NIntegrate[f42 Sin[θ] LegendreP[2,Cos[θ]],{θ,θ3,θ4}];
J42=
NIntegrate[f12 Sin[θ] LegendreP[4,Cos[θ]],{θ,0,θ1}]+
NIntegrate[f22 Sin[θ] LegendreP[4,Cos[θ]],{θ,θ1,θ2}]+
NIntegrate[f32 Sin[θ] LegendreP[4,Cos[θ]],{θ,θ2,θ3}]+
NIntegrate[f42 Sin[θ] LegendreP[4,Cos[θ]],{θ,θ3,θ4}];
Q21=J21/J01;
Q41=J41/J01;
Q22=J22/J02;
Q42=J42/J02;
q={Q21 Q22,Q41 Q42};
(1+Sum[A[k,L1,ii,iin,δ1] A[k,L2,if,iin,δ2] q[[k/2]],
{k,2,If[And[Abs[δ1]>0,Abs[δ2]>0],
If[EvenQ[Min[2 iin,L1+1,L2+1]],Min[2 iin,L1+1,L2+1],
Min[2 iin,L1+1,L2+1]-1],
If[And[Abs[δ1]>0,δ2==0],
If[EvenQ[Min[2 iin,L1+1,2 L2]], Min[2 iin,L1+1,2 L2],
Min[2 iin,L1+1,2 L2]-1],
If[And[Abs[δ2]>0,δ1==0],If[EvenQ[Min[2 iin,2 L1, L2+1]],
Min[2 iin,2 L1, L2+1],Min[2 iin,2 L1,L2+1]-1],
If[EvenQ[Min[2 iin,2 L1,2 L2]],Min[2 iin,2 L1,2 L2],
Min[2 iin,2 L1,2 L2]-1]]]],2})

```

Прилог Б

Дефинисање функције за израчунавање активности извора Ва-133 помоћу спектралних података

Овде је дата процедура којом се у програму *Mathematica* формира систем једначина за брзине бројања у спектралним подацима извора ^{133}Ba . Након уношења ове процедуре дефинисана је функција помоћу које се добијају одговарајуће ефикасности кориговане на право коинцидентно сумирање. Као излазни податак добија се време резолуције, *peak-to-total* функција и активност извора.

Прво се дефинише матрица која се формира помоћу одговарајуће шеме распада, а означава постојеће прелазе при деексцитацији потомка ^{133}Ba у ^{133}Cs . На пр. у21 означава да постоји прелаз (емисија γ -фотона или конверзионог електрона са пратећим x -зрачењем) са нивоа 1 у основно стање (0) потомка ^{133}Cs . При формирању процедуре за добијање једначина бројања за изотоп ^{133}Ba , основно стање потомка (^{133}Cs) је обележено са бројем 1. Прво побуђено стање са бројем 2, друго побуђено са бројем 3 и тако даље. Број 6 означава основно стање ^{133}Ba из којег се врши захват електрона.

$$y = \{ \{0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{y_{21}, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{y_{31}, y_{32}, 0, 0, 0, 0\}, \{y_{41}, y_{42}, y_{43}, 0, 0, 0\}, \{0, y_{52}, y_{53}, y_{54}, 0, 0\}, \{0, 0, 0, y_{64}, y_{65}, 0\} \};$$

Следи дефинисање ознака за могуће исходе при одговарајућем прелазу. На пример d[42] означава прелаз $3 \rightarrow 1$, а скуп у угластој загради дефинише одговарајући исход: pa[42]- потпуна апсорпција x_α -фотона емитованог при конверзији у прелазу $3 \rightarrow 1$, pb[42]-потпуна апсорпција x_β -фотона емитованог при конверзији у прелазу $3 \rightarrow 1$, g[42]-потпуна апсорпција гама фотона емитованог при прелазу $3 \rightarrow 1$ и q[42]-не детектовање прелазу.

$$\begin{aligned} d[65] &= \{pa[65], pb[65], q[65]\}; \\ d[54] &= \{pa[54], pb[54], g[54], q[54]\}; \\ d[53] &= \{pa[53], pb[53], g[53], q[53]\}; \\ d[52] &= \{pa[52], pb[52], g[52], q[52]\}; \\ d[43] &= \{pa[43], pb[43], g[43], q[43]\}; \\ d[42] &= \{pa[42], pb[42], g[42], q[42]\}; \\ d[41] &= \{pa[41], pb[41], g[41], q[41]\}; \\ d[32] &= \{pa[32], pb[32], g[32], q[32]\}; \\ d[31] &= \{pa[31], pb[31], g[31], q[31]\}; \\ d[21] &= \{pa[21], pb[21], g[21], q[21]\}; \\ d[64] &= \{pa[64], pb[64], q[64]\}; \end{aligned}$$

Следи дефинисање ознака за скуп енергија које се могу депоновати у детектору при потпуној апсорпцији одговарајућег фотона. На пример, z[2,1] означава скуп енергија фотона, израженим у eV, који се могу емитовати при прелазу $1 \rightarrow 0$. Прва и друга вредност је свуда иста јер су то x_α и x_β фотони. Трећа вредност означава енергију γ -фотона, а уколико је једнака нули, што је случај са прелазима z[6,5] и z[5,4], прелаз није праћен емисијом γ -фотона. Ово је зато што се ^{133}Ba распада захватом електрона, а z[6,5] и z[5,4] означавају енергије при распаду ^{133}Ba у четврто и треће ексцитовано

стање потомка ^{133}Cs , уз могућност емисије α -фотона. Четврта вредност, која постоји само за гама прелазе свуда је нула, јер уколико нема детекције, депонована енергија у детектору је нула.

```
z[65]={30800,35300,0};
z[54]={30800,35300,53160,0};
z[32]={30800,35300,79610,0};
z[21]={30800,35300,81000,0};
z[31]={30800,35300,160610,0};
z[43]={30800,35300,223240,0};
z[53]={30800,35300,276400,0};
z[42]={30800,35300,302850,0};
z[52]={30800,35300,356010,0};
z[41]={30800,35300,383850,0};
z[64]={30800,35300,0};
```

Следи формирање матрице постојећих прелаза:
MatrixForm[y];

Уколико се ова матрица степенује добијају се путање које се могу реализовати при распаду. Путање распада у n корака добијају се дизањем полазне матрице на n -ти степен, при чему само последња врста прве колоне има смисла. То је зато што само последња врста садржи прелазе који се односе на распад ^{133}Ba у неко од ексцитованих стања потомка ^{133}Cs , а прва колона садржи прелазе који се односе на нужну деексцитацију у основно стање потомка.

```
dec[2]=MatrixPower[y,2][[6,1]];
dec[3]=MatrixPower[y,3][[6,1]];
dec[4]=MatrixPower[y,4][[6,1]];
dec[5]=MatrixPower[y,5][[6,1]];
```

Формирањем скупа прелаза у одговарајућем броју корака могу се дефинисати вероватноће за одговарајуће исходе. На пример, dec[2] је матрица чија последња врста прве колоне садржи све прелазе у два корака. На пример dec[2][[6,1]] = y41y64, указује да постоји распад ^{133}Ba у треће побуђено стање потомка при чему се оно деексцитије директним прелазом у основно стање.

Следи израчунавање матрице вероватноће реализације путање у два корака и формирање одговарајуће матрице за могуће енергије емитованих фотона.

Путања у ДВА КОРАКА: ПУТАЊА 6→4→1

```
pro[641]=Table[d[64][[i]] d[41][[j]],{i,3},{j,4}];
Energy[641]=Table[z[64][[i]] +z[41][[j]],{i,3},{j,4}];
```

pro[641] је матрица која садржи вероватноће за емисију одговарајућих фотона при распаду ^{133}Ba у ^{133}Cs у два корака. Експлицитан облик је:

$$pro[641] = \begin{pmatrix} pa[64]pa[41] & pa[64]pb[41] & pa[64]g[41] & pa[64]q[41] \\ pa[64]pb[41] & pb[64]pb[41] & pb[64]g[41] & pb[64]q[41] \\ q[64]pa[41] & q[64]pb[41] & q[64]g[41] & q[64]q[41] \end{pmatrix}$$

На пример, матрични елемент $\text{pro}[641][[1,1]] = \text{pa}[64]\text{pa}[41]$ означава вероватноћу за каскадну емисију два $x_{K\alpha}$ фотона. Матрични елемент $\text{pro}[641][[1,3]] = \text{pa}[64]\text{pb}[41]$ означава вероватноћу за каскадну емисију $x_{K\alpha}$ фотона и конверзионог $x_{K\beta}$ фотона.

Следи дефинисање матрица вероватноћа и енергија за распада у три корака.

ПУТАЊЕ ТРИ КОРАКА

Према експлицитном облику матрице $\text{dec}[3]$ закључујемо да постоји пет путања у три корака. Такође, уводи се матрица угаоних корелација wef1 између гама фотона емитованих у каскади $4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$.

ПУТАЊА $6 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

```
wef1 = {{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,w310,1},{1,1,1,1}};
pro[6421] = Table[d[64][[i]] d[42][[j]] d[21][[k]]
wef1[[j,k]],{i,3},{j,4},{k,4}];
Energy[6421]=
Table[z[64][[i]]+z[42][[j]]+z[21][[k]],{i,3},{j,4},{k,4}];
```

ПУТАЊА $6 \rightarrow 4 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

```
wef2={{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,w320,1},{1,1,1,1}};
pro[6431]=Table[d[64][[i]] d[43][[j]] d[31][[k]]
wef2[[j,k]],{i,3},{j,4},{k,4}];
Energy[6431]=Table[z[64][[i]]
+z[43][[j]]+z[31][[k]],{i,3},{j,4},{k,4}];
```

ПУТАЊА $6 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 1$

```
wef3={{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,w410,1},{1,1,1,1}};
pro[6521]=Table[d[65][[i]] d[52][[j]] d[21][[k]]
wef3[[j,k]],{i,3},{j,4},{k,4}];
Energy[6521]=Table[z[65][[i]]
+z[52][[j]]+z[21][[k]],{i,3},{j,4},{k,4}];
```

ПУТАЊА $6 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1$

```
wef4={{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,w420,1},{1,1,1,1}};
pro[6531]=Table[d[65][[i]] d[53][[j]] d[31][[k]]
wef4[[j,k]],{i,3},{j,4},{k,4}];
Energy[6531]=Table[z[65][[i]]+
z[53][[j]]+z[31][[k]],{i,3},{j,4},{k,4}];
```

ПУТАЊА $6 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 1$

```
wef5={{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,w430,1},{1,1,1,1}};
pro[6541]=Table[d[65][[i]] d[54][[j]] d[41][[k]]
wef5[[j,k]],{i,3},{j,4},{k,4}];
Energy[6541]=Table[z[65][[i]]
+z[54][[j]]+z[41][[k]],{i,1,3},{j,4},{k,4}];
```

У четири корака постоје четири могућих питања.

Пућање у ЧЕТИРИ КОРАКА:

ПУТАЊА 6→4→3→2→1

```
wef6={{{{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,w321},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,w210,1},{1,1,1,1}}};
```

```
pro[64321]=
```

```
Table[d[64][[i]] d[43][[j]] d[32][[k]] d[21][[l]]
```

```
wef6[[i,j,k,l]],{i,3},{j,4},{k,4},{l,4}];
```

```
Energy[64321]=Table[z[64][[i]]
```

```
+z[43][[j]]+z[32][[k]]+z[21][[l]],{i,3},{j,4},{k,4},{l,4}];
```

ПУТАЊА 6→5→3→2→1

```
wef7={{{{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,w421},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,w210,1},{1,1,1,1}}};
```

```
pro[65321]=Table[d[65][[i]] d[53][[j]] d[32][[k]] d[21][[l]]
```

```
wef7[[i,j,k,l]],{i,3},{j,4},{k,4},{l,4}];
```

```
Energy[65321]=Table[z[65][[i]]
```

```
+z[53][[j]]+z[32][[k]]+z[21][[l]],{i,3},{j,4},{k,4},{l,4}];
```

ПУТАЊА 6→5→4→2→1

```
wef7={{{{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,1}},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,1,w431},{1,1,1,1},{1,1,1,1},{1,1,w310,1},{1,1,1,1}}};
```

```
pro[65421]=Table[d[65][[i]] d[54][[j]] d[42][[k]] d[21][[l]]
```

```
wef7[[i,j,k,l]],{i,3},{j,4},{k,4},{l,4}];
```

```
Energy[65421]=Table[z[65][[i]]
```

```
+z[54][[j]]+z[42][[k]]+z[21][[l]],{i,3},{j,4},{k,4},{l,4}];
```


Функција **penergy[30800]** налази позиције у скупу свих енергија **energyall** које одговарају депонованим енергијама од 30800 eV у детектору. Једначина бројања **cts[30800]** представља суму вероватноћа из матрице свих вероватноћа **proall** које одговарају депоновању фотона енергије 30800 eV. Позиције вероватноћа које одговарају фотонима 30800 eV исте су као и позиције у скупу свих енергија, па се налазе помоћу позиција у скупу дефинисаним помоћу функције **penergy[30800]**.

35.3 keV

```
penergy[35300]=Position[energyall,35300];  
cts[35300]=Sum[proball[[penergy[35300][[i]]]],  
{i,Length[penergy[35300]]}];
```

53.16 keV

```
penergy[53160]=Position[energyall,53160];  
cts[53160]=Sum[proball[[penergy[53160][[i]]]],  
{i,Length[penergy[53160]]}];
```

79.61 keV

```
penergy[79610]=Position[energyall,79610];  
cts[79610]=Sum[proball[[penergy[79610][[i]]]],  
{i,Length[penergy[79610]]}];
```

81.0 keV

```
penergy[81000]=Position[energyall,81000];  
cts[81000]=Sum[proball[[penergy[81000][[i]]]],  
{i,Length[penergy[81000]]}];
```

160.61 keV

```
penergy[160610]=Position[energyall,160610];  
cts[160610]=Sum[proball[[penergy[160610][[i]]]],  
{i,Length[penergy[160610]]}];
```

223.24 keV

```
penergy[223240]=Position[energyall,223240];  
cts[223240]=Sum[proball[[penergy[223240][[i]]]],  
{i,Length[penergy[223240]]}];
```

276.4 keV

```
penergy[276400]=Position[energyall,276400];  
cts[276400]=Sum[proball[[penergy[276400][[i]]]],  
{i,Length[penergy[276400]]}];
```

302.85 keV

```
penergy[302850]=Position[energyall,302850];  
cts[302850]=Sum[proball[[penergy[302850][[i]]]],
```

```
{i, Length[penergy[302850]]}];
```

356.01 keV

```
penergy[356010]=Position[energyall, 356010];  
cts[356010]=Sum[proball[[penergy[356010][[i]]]],  
{i, Length[penergy[356010]]}];
```

357.4 keV

```
penergy[357400]=Position[energyall, 357400];  
cts[357400]=Sum[proball[[penergy[357400][[i]]]],  
{i, Length[penergy[357400]]}];
```

383.85 keV

```
penergy[383850]=Position[energyall, 383850];  
cts[383850]=Sum[proball[[penergy[383850][[i]]]],  
{i, Length[penergy[383850]]}];
```

Сумарни врх (нема crossover прелаза) у спектру извора ^{133}Ba налази се на енергији 437 keV. Следи дефинисање одговарајуће једначине бројања.

437.01 keV

```
penergy[437010]=Position[energyall, 437010];  
cts[437010]=Sum[proball[[penergy[437010][[i]]]],  
{i, Length[penergy[437010]]}];
```

Следи дефинисање укупног одбораја у спектру (континуум плус површина свих врхова).

Тотални одброј

```
penergy[0]=Position[energyall, 0];  
ctstotal=1-  
Sum[proall[[penergy[0][[i]]]], {i, Length[penergy[0]]}];
```

Вероватноћа за одброј негде у спектру налази се као сума свих вероватноћа за не детектовање фотона.

Претходно дефинисане једначине бројања не укључују могућност случајних коинциденција, што при већим брзинама бројања може бити недостатак. Због тога, уводе се једначине бројања које укључују могућност детектовања два или више фотона која су емитована из два језгра.

Једначине бројања са случајним коинциденцијама налазе се помоћу скупа свих енергија које се могу депоновати у детектору при емисији фотона из једног распада. Прво је формирана листа позиција енергија које се могу депоновати у детектору при потпуним апсорпцијама једног гама фотона или више фотона чија сума енергија одговара енергији појединачном фотону.

```
possignenergy=Flatten[{penergy[30800], penergy[35300],  
penergy[53160], penergy[79610], penergy[81000], penergy[160610],  
penergy[223240], penergy[276400], penergy[302850],
```

```
penergy[356010],penergy[383850],penergy[437010],  
penergy[357400]}}];
```

Након што су утврђене позиције енергија фотона, формира се збир свих енергија у скупу енергија појединачних фотона, јер случајне коинциденције при потпуној апсорпцији два фотона дају одброј једнак збиру енергија појединачних фотона. Скуп енергија које су резултат случајних коинциденција је:

```
chanceenergy=Flatten[Table[energyall[[possignenergy[[i]]]]+  
energyall[[possignenergy[[j]]]],{i,Length[possignenergy]},  
{j,Length[possignenergy]}]];
```

Вероватноће за одброј услед случајних коинциденција налази се као производ одговарајућих вероватноћа за детекцију фотона емитованих из једног језгра. .

```
chanceprobability=Flatten[Table[proall[[possignenergy[[i]]]]  
proall[[possignenergy[[j]]]],{i,Length[possignenergy]},  
{j,Length[possignenergy]}]];
```

Следи формирање једначина бројања за врхове случајних коинциденција који су израженији у спектру или дају допринос врховима пуне енергије.

161 keV

```
poschanceenergy[159220]=Position[chanceenergy,159220];  
poschanceenergy[160610]=Position[chanceenergy,160610];  
poschanceenergy[162000]=Position[chanceenergy,162000];  
poschanceenergy[163000]=Position[chanceenergy,163000];  
ctsch[159220]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[159220][[i]]]],  
{i,Length[poschanceenergy[159220]}]];  
ctsch[160610]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[160610][[i]]]],  
{i,Length[poschanceenergy[160610]}]];  
ctsch[162000]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[162000][[i]]]],  
{i,Length[poschanceenergy[162000]}]];  
ctsch[163000]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[163000][[i]]]],  
{i,Length[poschanceenergy[163000]}]];
```

276.4 keV

```
poschanceenergy[276400]=Position[chanceenergy,276400];  
ctsch[276400]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[276400][[i]]]],  
{i,Length[poschanceenergy[276400]}]];
```

302.85 keV

```
poschanceenergy[302850]=Position[chanceenergy,302850];  
poschanceenergy[304240]=Position[chanceenergy,304240];  
poschanceenergy[307200]=Position[chanceenergy,307200];
```

```

poschanceenergy[311700]=Position[chanceenergy,311700];
ctsch[304240]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[304240][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[304240]]}];
ctsch[307200]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[307200][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[307200]]}];
ctsch[311700]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[311700][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[311700]]}];
ctsch[302850]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[302850][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[302850]]}];

```

356.4 keV

```

poschanceenergy[356010]=Position[chanceenergy,356010];
poschanceenergy[357400]=Position[chanceenergy,357400];
ctsch[357400]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[357400][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[357400]]}];
ctsch[356010]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[356010][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[356010]]}];

```

383.5 keV

```

poschanceenergy[382460]=Position[chanceenergy,382460];
poschanceenergy[383850]=Position[chanceenergy,383850];
poschanceenergy[386810]=Position[chanceenergy,386810];
poschanceenergy[391310]=Position[chanceenergy,391310];
ctsch[382460]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[382460][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[382460]]}];
ctsch[383850]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[383850][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[383850]]}];
ctsch[386810]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[386810][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[386810]]}];
ctsch[391310]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[391310][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[391310]]}];

```

437 keV

```

poschanceenergy[435620]=Position[chanceenergy,435620];
poschanceenergy[437010]=Position[chanceenergy,437010];
poschanceenergy[438400]=Position[chanceenergy,438400];
ctsch[435620]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[435620][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[435620]]}];
ctsch[437010]=

```

```
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[437010][[i]]]],  
{i,Length[poschanceenergy[437010]]}];  
ctsch[438400]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[438400][[i]]]],  
{i,Length[poschanceenergy[438400]]}];
```

712 keV

```
poschanceenergy[712020]=Position[chanceenergy,712020];  
poschanceenergy[713410]=Position[chanceenergy,713410];  
poschanceenergy[714800]=Position[chanceenergy,714800];  
ctsch[712020]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[712020][[i]]]],  
{i,Length[poschanceenergy[712020]]}];  
ctsch[713410]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[713410][[i]]]],  
{i,Length[poschanceenergy[713410]]}];  
ctsch[714800]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[714800][[i]]]],  
{i,Length[poschanceenergy[714800]]}];
```

518.01 keV

```
poschanceenergy[518010]=Position[chanceenergy,518010];  
poschanceenergy[516620]=Position[chanceenergy,516620];  
ctsch[516620]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[516620][[i]]]],  
{i,Length[poschanceenergy[516620]]}];  
ctsch[518010]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[518010][[i]]]],  
{i,Length[poschanceenergy[518010]]}];
```

552.8 keV

```
poschanceenergy[552800]=Position[chanceenergy,552800];  
ctsch[552800]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[552800][[i]]]],  
{i,Length[poschanceenergy[552800]]}];
```

579.25 keV

```
poschanceenergy[579250]=Position[chanceenergy,579250];  
poschanceenergy[580640]=Position[chanceenergy,580640];  
ctsch[579250]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[579250][[i]]]],  
{i,Length[poschanceenergy[579250]]}];  
ctsch[580640]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[580640][[i]]]],  
{i,Length[poschanceenergy[580640]]}];
```

605.7 keV

```
poschanceenergy[605700]=Position[chanceenergy,605700];
```

```
poschanceenergy[607090]=Position[chanceenergy,607090];
ctsch[605700]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[605700][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[605700]]}];
ctsch[607090]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[607090][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[607090]]}];
```

632.41 keV

```
poschanceenergy[632410]=Position[chanceenergy,632410];
poschanceenergy[633800]=Position[chanceenergy,633800];
ctsch[632410]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[632410][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[632410]]}];
ctsch[633800]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[633800][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[633800]]}];
```

659 keV

```
poschanceenergy[658860]=Position[chanceenergy,658860];
poschanceenergy[660250]=Position[chanceenergy,660250];
ctsch[658860]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[658860][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[658860]]}];
ctsch[660250]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[660250][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[660250]]}];
```

686.7 keV

```
poschanceenergy[686700]=Position[chanceenergy,686700];
ctsch[686700]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[686700][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[686700]]}];
```

739.86 keV

```
poschanceenergy[739860]=Position[chanceenergy,739860];
poschanceenergy[741250]=Position[chanceenergy,741250];
ctsch[739860]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[739860][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[739860]]}];
ctsch[741250]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[741250][[i]]]],
{i,Length[poschanceenergy[741250]]}];
```

767.7 keV

```
poschanceenergy[767700]=Position[chanceenergy,767700];
ctsch[767700]=
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[767700][[i]]]],
```

```
{i, Length[poschanceenergy[767700]]}};
```

793.02 keV

```
poschanceenergy[793020]=Position[chanceenergy, 793020];  
poschanceenergy[794410]=Position[chanceenergy, 794410];  
ctsch[793020]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[793020][[i]]]],  
{i, Length[poschanceenergy[793020]]}};  
ctsch[794410]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[794410][[i]]]],  
{i, Length[poschanceenergy[794410]]}};
```

820.86 keV

```
poschanceenergy[820860]=Position[chanceenergy, 820860];  
ctsch[820860]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[820860][[i]]]],  
{i, Length[poschanceenergy[820860]]}};
```

874.02 keV

```
poschanceenergy[874020]=Position[chanceenergy, 874020];  
ctsch[874020]=  
Sum[chanceprobability[[poschanceenergy[874020][[i]]]],  
{i, Length[poschanceenergy[874020]]}};
```

Претходно дефинисане вероватноће које служе за формирање једначина бројања не садрже нумеричке податке потребне за практичну употребу. У том циљу уз помоћ базе података за изотоп ^{133}Ba уводе се неопходни нумерички фактори. Прво се дефинишу матрице које садрже податке о нормализованој вероватноћи за реализацију прелаза са одређеног нивоа. На пример ако постоји три могућа прелаза са четвртог побуђеног нивоа у основно стање, сума вероватноћа за појединачне прелазе мора бити једнака јединици. Следе подаци који фигуришу у матрици X:

```
x={{0,0,0,0,0,0},{1,0,0,0,0,0},{0.102689,0.897311,0,0,0,0},{0.  
3170109,0.66567,0.017309,0,0,0},{0,0.738197,0.0878088,0.173994  
,0,0},{0,0,0,0.138,0.862,0}};
```

Прва врста садржи само нулте вредности јер се потомак ^{133}Ba , ^{133}Cs даље не распада. За прво побуђено стање одговара друга врста у матрици X и једина вредност је у првој колони једнака јединици јер прелаз у основно стање је сигуран прелаз. Последња врста има две вредности, једна је вероватноћа за распад ^{133}Ba у четврто побуђено стање ^{133}Cs (вредност 0.862), а друга је вероватноћа за распад у треће побуђено стање (вредност 0.138). Очигледно је збир једнак јединици. Овде је према подацима из шеме распада занемарена могућност деексцитације у основно и прво и друго побуђено стање ^{133}Cs . Следе подаци за конверзионе коефицијенте за одговарајуће прелазе,

```
a={{0,0,0,0,0,0},{1.74,0,0,0,0,0},{0.31,1.77,0,0,0,0},{0.0203,  
0.0443,0.0995,0,0,0},{0,0.0256,0.0569,6.02,0,0},{0,0,0,0,0,0}}  
;
```

И подаци за енергије γ -фотона који се емитују при одговарајућим прелазима.

$$e_n = \{ \{0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{81, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{160, 79.61, 0, 0, 0, 0\}, \{383.85, 302.85, 223.24, 0, 0, 0\}, \{0, 356.01, 276.4, 53.16, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 30, 35, 0\} \};$$

Матрица која уводи ознаке за ефикасност врха пуне енергије подразумевајући да детектор има заменарљиво малу ефикасност за детекцију X-фотона, тј. уводи се да је ефикасност за X-фотоне једнака нули.

$$e = \{ \{0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{e_{81}, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{e_{161}, e_{81}, 0, 0, 0, 0\}, \{e_{384}, e_{303}, e_{223}, 0, 0, 0\}, \{0, e_{356}, e_{276}, e_{53}, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0\} \};$$

Ознака e_{81} означава ефикасност врха пуне енергије на енергији 79.6 keV и 81 keV. Ако желимо да укључимо X-фотоне на 30 и 35 keV уместо горње, треба учитати матрицу ефикасности која садржи и ефикасност за детекцију x-фотона на енергији 35 keV и 31 keV:

$$e = \{ \{0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{e_{81}, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{e_{161}, e_{81}, 0, 0, 0, 0\}, \{e_{384}, e_{303}, e_{223}, 0, 0, 0\}, \{0, e_{356}, e_{276}, e_{53}, 0, 0\}, \{0, 0, 0, e_{35}, e_{31}, 0\} \};$$

Конверзиони коефицијенти за K X фотоне су дати матрицом.

$$a_k = \{ \{0, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{1.46, 0, 0, 0, 0, 0\}, \{0.24, 1.515, 0, 0, 0, 0\}, \{0.0169, 0.0381, 0.0853, 0, 0, 0\}, \{0, 0.0211, 0.0461, 4.93, 0, 0\}, \{0, 0, 0, 0, 0, 0\} \};$$

Следе подаци за вероватноћу захвата K електрона са прелазом у четврто и треће побуђено стање ^{133}Cs , респективно.

$$p_k = \{0.672, 0.7734\};$$

Следећи податак је вероватноћа уколико је захваћен K електрон да се емитује K_α или K_β фотон, респективно.

$$g_k = \{0.809251, 0.190749\};$$

Следи податак о флуоресцентном приносу, тј. вероватноћи да емитовани x-фотон напусти омотач језгра.

$$w = 0.894;$$

Следи дефиниција матрице тоталне ефикасности за све фотоне који се могу емитовати при распаду ^{133}Ba .

$$t = e (1 + k e_n);$$

Овде је k непознати праметар који ће бити излазна величина при решавању система једначина за ^{133}Ba .

Следи дефиниција вероватноће за детекцију K_α фотона под врхом пуне енергије.

$p_{\alpha 65} = x \cdot a_k / (1+a)$ w $g_k[[1]]$
 $e[[6,5]] + \{ \{0,0,0,0,0,0\}, \{0,0,0,0,0,0\}, \{0,0,0,0,0,0\}, \{0,0,0,0,0,0,0\}, \{0,0,0,0,0,0,0\}, \{0,0,0,0,0,0,0\}, \{0,0,0,x[[6,4]] e[[6,5]] p_k[[2]]\} w$
 $g_k[[1]], x[[6,5]] e[[6,5]] p_k[[1]] w g_k[[1]], 0 \}$;

Следи дефиниција вероватноће за детекцију K_{β} фотона под врхом пуне енергије:

$p_{\beta 64} = x \cdot a_k / (1+a)$ w $g_k[[2]]$
 $e[[6,4]] + \{ \{0,0,0,0,0,0\}, \{0,0,0,0,0,0\}, \{0,0,0,0,0,0\}, \{0,0,0,0,0,0,0\}, \{0,0,0,0,0,0,0\}, \{0,0,0,0,0,0,0\}, \{0,0,0,x[[6,4]] e[[6,4]] p_k[[2]]\} w$
 $g_k[[2]], x[[6,5]] e[[6,4]] p_k[[1]] w g_k[[2]], 0 \}$;

Следи дефиниција вероватноће за детекцију γ -фотона под врхом пуне енергије:

$p_{\gamma 64} = x \cdot e / (1+a)$;

Вероватноћа за не-детекцију фотона било које врсте при реализацији одговарајућег прелаза је:

$q_k = x \cdot (1 - t[[6,4]] a_k / (1+a) w g_k[[1]] - t[[6,5]] a_k / (1+a) w$
 $g_k[[2]] - t / (1+a))$;

Коначно се налазе изрази за вероватноће детекције (ознака p) фотона и не-детекције фотона (ознака q) при реализацији одговарајућег прелаза који садрже нумеричке вредности према шеми распада и нуклеарним подацима.

$p_{\alpha 65} = p_{\alpha 65}[[6,5]]$;
 $p_{\beta 64} = p_{\beta 64}[[6,5]]$;
 $q_{65} = q_k[[6,5]]$;
 $p_{\alpha 64} = p_{\alpha 64}[[6,4]]$;
 $p_{\beta 64} = p_{\beta 64}[[6,4]]$;
 $q_{64} = q_k[[6,4]]$;
 $p_{\alpha 54} = p_{\alpha 54}[[5,4]]$;
 $p_{\beta 54} = p_{\beta 54}[[5,4]]$;
 $g_{54} = p_{\gamma 54}[[5,4]]$;
 $q_{54} = q_k[[5,4]]$;
 $p_{\alpha 53} = p_{\alpha 53}[[5,3]]$;
 $p_{\beta 53} = p_{\beta 53}[[5,3]]$;
 $g_{53} = p_{\gamma 53}[[5,3]]$;
 $q_{53} = q_k[[5,3]]$;
 $p_{\alpha 52} = p_{\alpha 52}[[5,2]]$;
 $p_{\beta 52} = p_{\beta 52}[[5,2]]$;
 $g_{52} = p_{\gamma 52}[[5,2]]$;
 $q_{52} = q_k[[5,2]]$;
 $p_{\alpha 43} = p_{\alpha 43}[[4,3]]$;
 $p_{\beta 43} = p_{\beta 43}[[4,3]]$;
 $g_{43} = p_{\gamma 43}[[4,3]]$;
 $q_{43} = q_k[[4,3]]$;
 $p_{\alpha 42} = p_{\alpha 42}[[4,2]]$;
 $p_{\beta 42} = p_{\beta 42}[[4,2]]$;
 $g_{42} = p_{\gamma 42}[[4,2]]$;
 $q_{42} = q_k[[4,2]]$;
 $p_{\alpha 41} = p_{\alpha 41}[[4,1]]$;

```

pb[41]=pbeta[[4,1]];
g[41]=pgama[[4,1]];
q[41]=qk[[4,1]];
pa[32]=palfa[[3,2]];
pb[32]=pbeta[[3,2]];
g[32]=pgama[[3,2]];
q[32]=qk[[3,2]];
pa[31]=palfa[[3,1]];
pb[31]=pbeta[[3,1]];
g[31]=pgama[[3,1]];
q[31]=qk[[3,1]];
pa[21]=palfa[[2,1]];
pb[21]=pbeta[[2,1]];
g[21]=pgama[[2,1]];
q[21]=qk[[2,1]];

```

Једначине бројања које садрже корекције на губитке и доприносе услед случајних коинциденција и које садрже све неопходне нумеричке вредности дате су функцијама:

$$n30800[Nt_]:=A \text{ cts}[30800][[1]] (1-dvatau Nt)$$

$$n35300[Nt_]:=A \text{ cts}[35300][[1]] (1-dvatau Nt)$$

$$n53160[Nt_]:=A \text{ cts}[53160][[1]] (1-dvatau Nt)$$

$$n81000[Nt_]:=A (\text{ cts}[81000][[1]] + \text{ cts}[79610][[1]]) (1-dvatau Nt)$$

$$n161000[Nt_]:=A \text{ cts}[160610][[1]] (1-dvatau Nt) + \\ dvatau A^2 \text{ ctsch}[160610][[1]] + \\ dvatau A^2 \text{ ctsch}[162000][[1]]$$

$$n223240[Nt_]:=A \text{ cts}[223240][[1]] (1-dvatau Nt)$$

$$n276400[Nt_]:=A \text{ cts}[276400][[1]] (1-dvatau Nt)$$

$$n302850[Nt_]:=A \text{ cts}[302850][[1]] (1-dvatau Nt)$$

$$n356010[Nt_]:=A \text{ cts}[356010][[1]] (1-dvatau Nt) + \\ A \text{ cts}[357400][[1]] (1-dvatau Nt) + \\ dvatau A^2 \text{ ctsch}[356010][[1]] + \\ dvatau A^2 \text{ ctsch}[357400][[1]]$$

$$n383850[Nt_]:=A \text{ cts}[383850][[1]] (1-dvatau Nt) + \\ dvatau A^2 \text{ ctsch}[383850][[1]]$$

$$n437000[Nt_]:=A \text{ cts}[437010][[1]] (1-dvatau Nt) + \\ dvatau A^2 \text{ ctsch}[437010][[1]] + \\ dvatau A^2 \text{ ctsch}[438400][[1]] + \\ dvatau A^2 \text{ ctsch}[435620][[1]]$$

$$n712000=dvatau A^2 (\text{ ctsch}[712020][[1]] + \\ \text{ ctsch}[713410][[1]])$$

```
ntotal=A ctstotal[[1]];
```

За конкретно растојање извора од детектора треба унети нумеричке вредности ефективних угаоних корелација. Овде је дат пример за растојање извора 1.5 mm од капе детектора за извор ^{133}Ba :

```
{w310=0.998,w320=1.04,w410=1.0031,w420=0.96,w430=0.986,  
w321=0.97,w210=1.003,w421=1.025,w431=1.012,w432=0.997}
```

Уколико се занемарују ефекти угаоних корелација, матричне елементе за ефективне угаоне корелације дефинисане у претходном скупу треба изједначити са јединицом.

Следи дефинисање функције

```
resch[{N53160,N81000,N1616100,N302850,N356000,N383850,N437000,Nsluc,Nt}]
```

која решава горњи систем једначина бројања. Дата функција за конкретне вредности брзине бројања у врховима пуне енергије при чему број уз ознаку N означава енергију у eV, даје ефикасности врха пуне енергије које су кориговане на право и случајно коинцидентно сумирање, време резолуције спектрометра, параметар k који дефинише функцију *peak to total* и активност извора у Bq. При мањим брзинама бројања, што се манифестује да врх случајних коинциденција на енергији 712 keV није статистички значајан, треба унети вредност нула. У овом случају време резолуције које се добија као решење је теоријска вредност која је блиска нули.

```
resch [{N53160_,N81000_,N160610_,N223000_,N276000_,N302850_,  
N356000_,N383850_,N437000_,Nsluc_,Nt_}] :=  
FindRoot[{N53160==n53160[Nt],N81000==n81000[Nt],  
N160610==n161000[Nt],N223000==n223240[Nt],N276000==n276400[Nt],  
,N302850==n302850[Nt],N356000==n356010[Nt],  
N383850==n383850[Nt],N437000==n437000[Nt],  
Nsluc==n712000,Nt==ntotal},  
{e53,N53160/Nt},{e81,N81000/Nt},{e161,N160610/Nt},  
{e223,N223000/Nt},{e276,N276000/Nt},{e303,N302850/Nt},  
{e356,N356000/Nt},{e384,N383850/Nt},  
{dvatau,5 10^(-7)},{k,0.0035},{A,Nt}}]
```

Горња функција не узима у обзир емисију и детекцију пратећег x-зрачења при распаду ^{133}Ba и подразумева читавање матрице ефикасности ϵ где су елементи ϵ_{35} и ϵ_{31} једнаки нули.

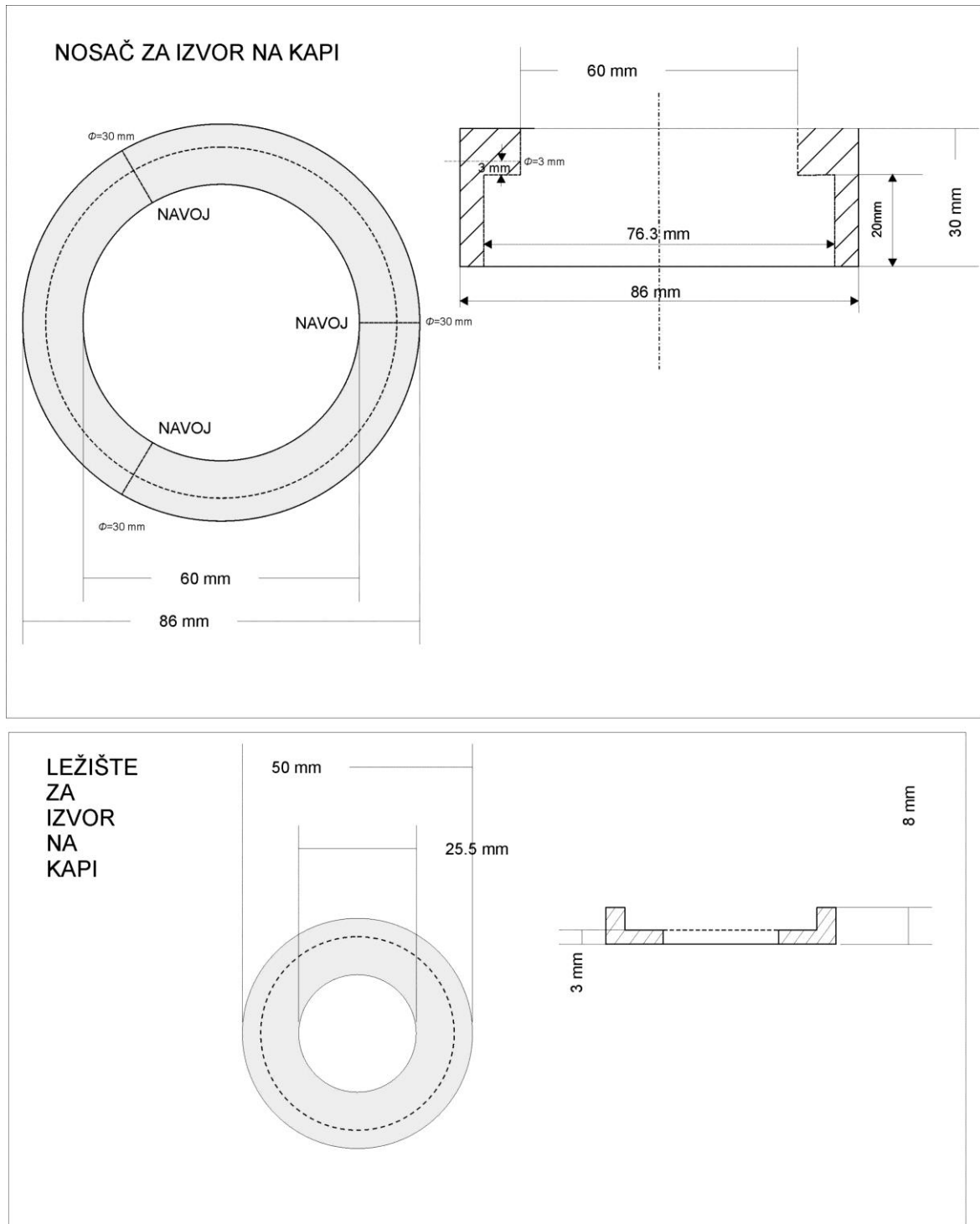
Следи функција која укључује могућност детекције x-фотона. Ова функција подразумева претходно читавање матрице ефикасности која садржи чланове ϵ_{35} и ϵ_{31} . (Страна 120, матрица ϵ)

```
reschX [{N30800_,N35300_,N53160_,N81000_,N160610_,N223000_,  
N276000_,N302850_,N356000_,N383850_,N437000_,Nsluc_,Nt_}] :=  
FindRoot[{N30800==n30800[Nt],N35300==n35300[Nt],  
N53160==n53160[Nt],N81000==n81000[Nt],N160610==n161000[Nt],  
N223000==n223240[Nt],N276000==n276400[Nt],N302850==n302850[Nt],  
,N356000==n356010[Nt],N383850==n383850[Nt],  
N437000==n437000[Nt],Nsluc==n712000,Nt==ntotal},  
{e31,N30800/Nt},{e35,N35300/Nt},{e53,N53160/Nt},
```

```
{e81,N81000/Nt},{e161,N160610/Nt},{e223,N223000/Nt},  
{e276,N276000/Nt},{e303,N302850/Nt},{e356,N356000/Nt},  
{e384,N383850/Nt},{dvatau,5 10^(-7)},{k,0.0035},{A,Nt}]
```

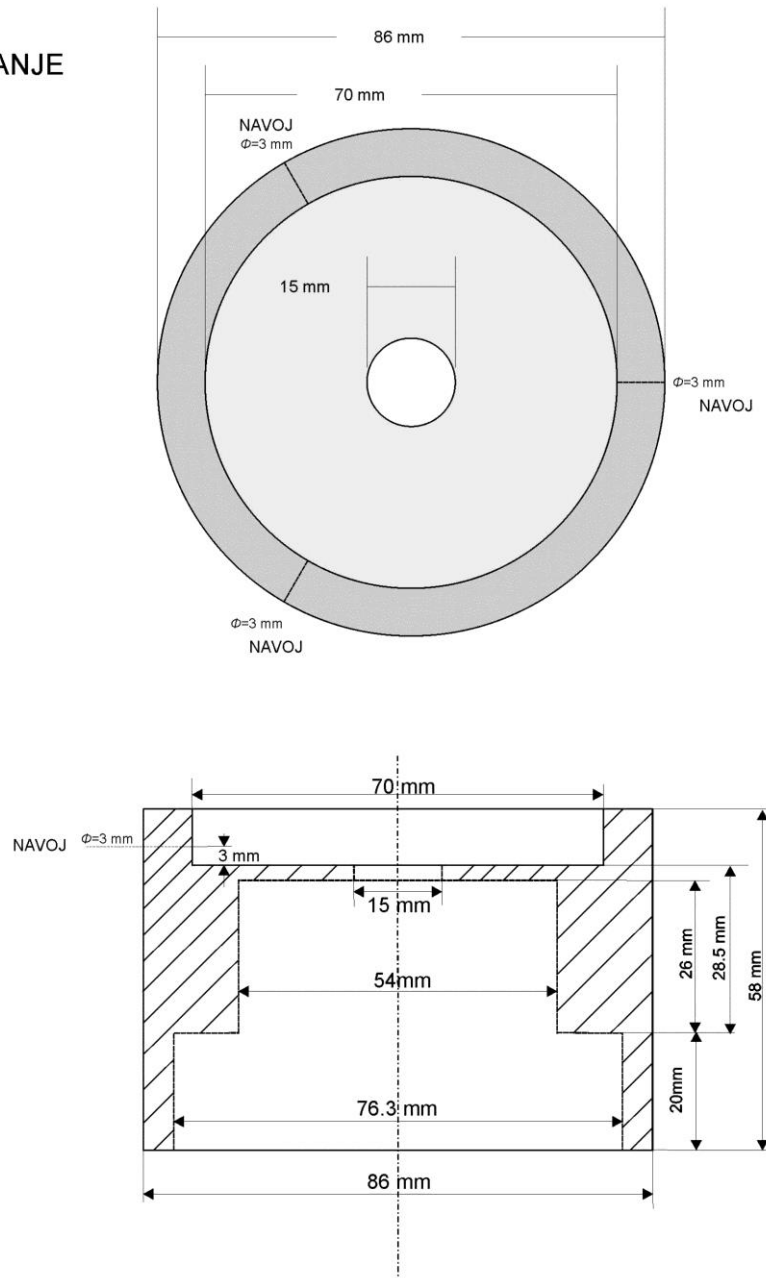
Прилог В

Шеме носача извора

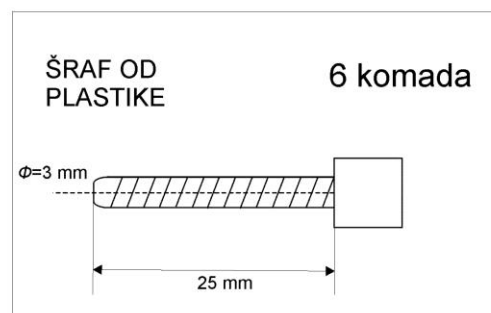
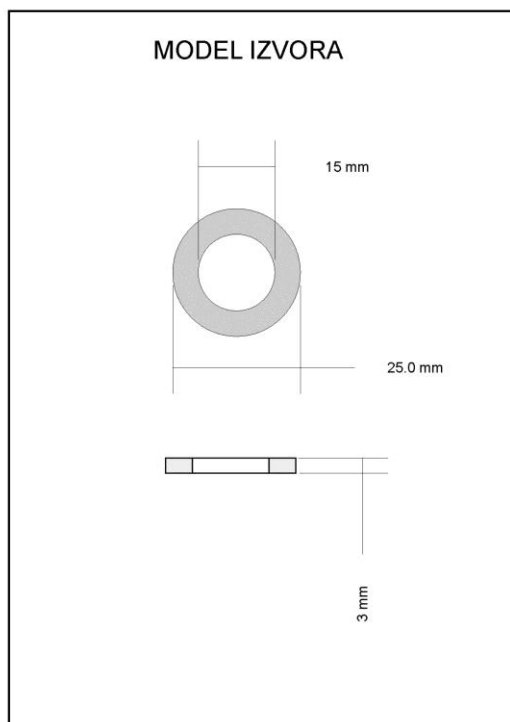
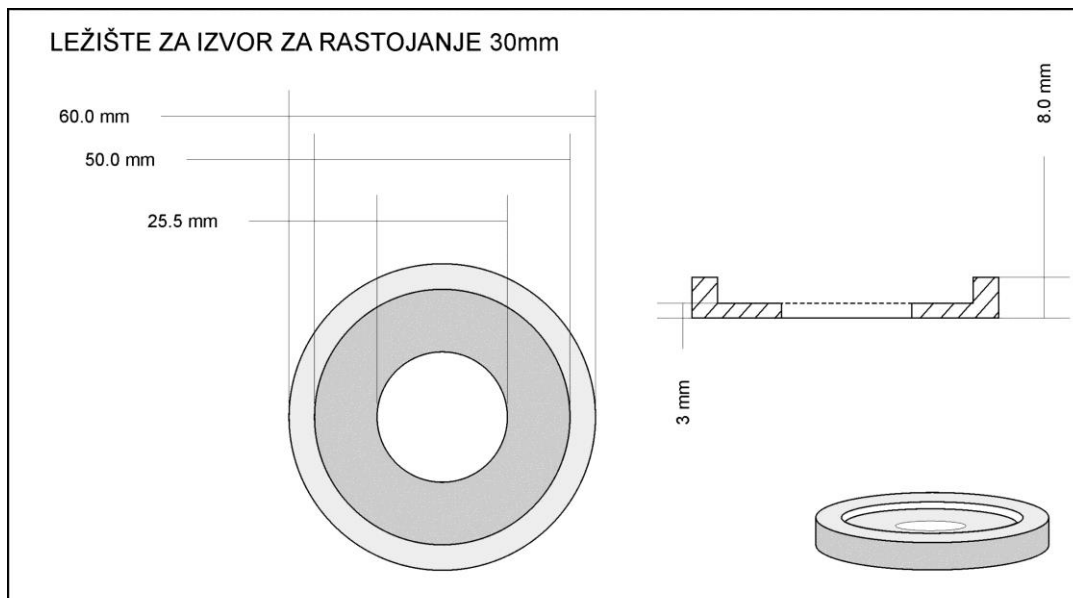


Слика В.1 Носач тачкастог извора за коаксијални HPGe детектор за нулто растојање извор-капа детектора са могућношћу центрирања извора и лежиште за извор.

**NOSAČ
ZA
RASTOJANJE
30 mm**



Слика В.2 Носач тачкастог извора за коаксијални HPGe детектор за растојање извор-капа детектора 30.0 mm са могућношћу центрирања извора.



Слика В.3 Лежиште за извор за растојање 30.0 mm, модел тачкастог извора и пластични шрафови за носаче.

Прилог Г

Објављени радови на тему дисертације

I. Bikit, T. Nemes, D. Mrda. *Simple method for absolute activity measurement of ^{60}Co source.* Nucl. Inst. Meth. A, 603(2009) 333-336.

I. Bikit, T. Nemes, D. Mrda, N. Jovančević. *On the absolute source activity measurement with a single detector: the ^{133}Ba case.* Nucl. Inst. Meth. A, 612(2009) 103-111.

T. Nemes, D. Mrda, I. Bikit. *Absolute activity measurement of ^{152}Eu sources with a single detector.* Nucl. Inst. Meth. A 648(2011) 114-123.