UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO- MATEMATIČKI FAKULTET

grupa: F I Z I K A

D I P L O M S K I R A D

T E M A:

-N E H O L O N O M N I S I S T E M I-

NOVI SAD , NOVEMBAR 1973.GODINE. PIPERAC TODOR

Ментор. Др. Б. Милић

Дипл. 28. 11. 1973.

Рад: 6

Одбрана 7

Општа оцена 7

MENTOR,

Doc.Dr. Božidar S. Milić

Zahvaljujem
Doc. Dr. Božidaru S.Miliću na svesrdnoj pomoći i brizi koju mi je pružio tokom pisanja ovog rada.

1. PRINUDNO KRETANJE

1.1. Slobodna i prinudna kretanja.-

Proučavajući mehaničke probleme kretanja sistema čestica, stalno vodimo računa o uticaju sila, bez obzira o kakvom je kretanju riječ. Imajući to u vidu, kretanja možemo podijeliti u dvije grupe. Kretanja pri kojima položaj i brzine čestica nisu ničim ograničena nazivaju se slobodna kretanja, i kod njih na čestici sistema djeluju samo aktivne sile, a ona kod kojih postoje izvjesna ograničenja u pogledu položaja i brzina čestica, i kod kojih osim aktivnih sila djeluju i reakcije veze, zovu se prinudna ili ograničena kretanja. Sistemi čestica, koji nisu ograničeni u svom kretanju, nazivaju se slobodni sistemi, a u protivnom slučaju govorimo o neslobodnim sistemima.

1.2. Pojam broja stepeni slobode za slobodni sistem.-

Neka se posmatrani slobodni sistem sastoji od n tačaka sa masama $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Položaj tog sistema može se odrediti pomoću vektora položaja $r_1, r_2, \ldots, r_n$ u odnosu na koordinatni početak. Uvodeći vektor položaja i-te tačke

1. $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$,

vidimo da za odredjivanje položaja svake tačke sistema treba znati 3n koordinata.

Umjesto Dekartovih koordinata mogu se uvesti druge veličine napr. $q_1, q_2, \ldots, q_{3n}$ kojih takodje ima 3n i to tako, da se iz jednačina

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3n}, t)$$

2. $$y_i = y_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3n}, t)$$

$$z_i = z_i(q_1, q_2, \ldots, q_{3n}, t)$$

mogu odrediti za svaki trenutak t Dekartove koordinate tačaka kad su poznate veličine $q_i (i=1,2,\ldots,3n)$

Veličine $q_1, q_2, \ldots, q_{3n}$, koje odredjuju položaj svih tačaka sistema, zovu se koordinate materijalnog sistema. Sistem od n slobodnih tačaka ima svega 3n koordinata.

Broj nezavisnih skalarnih veličina neophodnih za odredjivanje položaja materijalnog sistema zove se broj stepeni slobode sistema.

Sistem od n slobodnih čestica ima, dakle, onoliko stepeni slobode koliko i koordinata.

Sistem od Sunca, zemlje i mjeseca, smatrajući ih kao tačke, ima devet stepeni slobode.

1.3. Veze i vrste veza.-

Ograničenost kretanja izražava se time što postoji izvjestan broj veza izmedju koordinata svih čestica sistema, koje mogu da sadrže i vremenske izvode koordinata, pa i samo vrijeme. Najinteresantniji slučaj je kad ove veze imaju oblik jednakosti(tzv. zadržavajuće veze):

$$f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_n, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n, t) = 0.$$

Ovo ćemo kraće označavati,

3. $f_j(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t) = 0 \; ; \; j = 1,2,\ldots,k \; ; \; i = 1,2,\ldots,n,$

odnosno, u skalarnom obliku:

4. $f_j(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0 \quad j = 1,2,\ldots,k; \; i = 1,2,\ldots,n,$

gdje je k - broj veza, n-broj čestica sistema.

Ako veze 3. i 4. ne zavise od brzina tačaka $\vec{v}_i = (\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i)$, njihove jednačine biće oblika (tzv. holonomne veze).

5. $f_j(\vec{r}_i, t) = f_j(x_i, y_i, z_i, t) = 0 \quad j = 1,2,\ldots,k; \; i = 1,2,\ldots,n.$

Neslobodni materijalni sistemi, čije je kretanje ograničeno samo konačnim vezama, zovu se holonomni sistemi.

1.4. Neholonomne veze i neholonomni sistemi.-

Posmatrajmo zadržavajuće veze oblika:

7. $f_j(\vec{r}_i, \vec{v}_i, t) = 0 \quad j = 1,2,\ldots,k \; ; \; i = 1,2,\ldots,n,$

odnosno:

8. $f_j(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) = 0.$

Može se dogoditi da se jedna ili više od njih mogu dobiti kao rezultat diferenciranja nekih funkcija, u kojima nema brzina. Tako se napr. može dobiti neka veza diferenciranjem:

9. $\dfrac{d\phi}{dt} = 0,$

gdje je ϕ poznata funkcija koordinata i vremena. U tom slučaju,

10. $\phi(x_i, y_i, z_i, t) = \Gamma,$

gdje je Γ proizvoljna konstanta, zamjenjuje odgovarajući vezu sa brzinama. Pošto je očevidno, za $\phi = \phi(x_i, y_i, z_i, t)$,

$$11.\quad \frac{d\phi}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial\phi}{\partial y_i}\dot{y}_i+\frac{\partial\phi}{\partial z_i}\dot{z}_i\right)+\frac{\partial\phi}{\partial t},$$

zaključujemo da se može desiti samo sa onim vezama oblika 8 ., koje su linearne po brzinama.

Ako se 7-8. ne mogu dobiti diferenciranjem nekog sistema konačnih veza , one se zovu diferencijalne ili neholonomne, a sistem koji se pokorava tim vezama zove se neholonomni sistem.

Konačne veze ,koje zavise od proizvoljnih konstanata, naprimjer veze 10. zovu se semiholonomne. U opštem slučaju diferencijalne veze mogu zavisiti od brzina na proizvoljan način. Ali u većini konkretnih slučajeva sreću se samo one diferencijalne veze koje zavise od brzina linearno, kao što ćemo docnije ilustrovati primjerima.

Svaku linearnu diferencijalnu vezu možemo napisati u obliku :

$$12.\quad \sum_{i=1}^{n}\left(A_{ij}\cdot\dot{x}_i+B_{ij}\cdot\dot{y}_i+C_{ij}\cdot\dot{z}_i\right)+D_j=0,$$

ili vektorski:

$$13.\quad \sum_{i=1}^{n}\vec{P}_{ij}\cdot\vec{V}_i+D_j=0,\ \text{GDJE JE}\ \vec{P}_{ij}(A_{ij},B_{ij},C_{ij}),$$

gdje su A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}, i D_j funkcije koordinata x_i, y_i, z_i, i vremena t .

Primjetimo da linearnost diferencijalnih veza nije obavezna, i ne može se dokazati ili izvesti iz prirode samih mehaničkih problema .Obrnuto, mogu se konstruisati pomoću naročitih mehanizama i takva ograničenja u slobodi kretanja sistema da veze budu izražene i pomoću kvadratnih funkcija brzina.

Mi razmatramo samo linearne diferencijalne veze.

1.5. Pojam broja stepeni slobode neholonomnog sistema.-

Posmatrajmo kretanje sistema sa n čestica i k neholonomnih veza .Pošto od ukupnog broja 3n koordinata čestica sistema zbog k veza ima samo 3n - k nezavisnih koordinata, mjesto pravouglih koordinata uvodimo ma kakav skup od $3n - k = N$ nezavisnih veličina koji potpuno odredjuje položaj posmatranog sistema pri datom prinudnom kretanju. Ovakve veličine nazivaju se nezavisne generalisane koordinate sistema, a njihov broj ,broj stepeni slobode. Ukoliko uzimamo u obzir i holonomne veze onda je broj stepeni slobode jednak : $N = 3n - k_1 - k_2$

1.6. Primjer neholonomnih veza.-

1. Dvije materijalne tačke u ravni spojene štapom nepromjenjive dužine l mogu se kretati samo tako da brzina središta štapa bude usmjerena poštapu (kretanje klizaljke po ravni). Jednačine veze pišu se na slijedeći način:

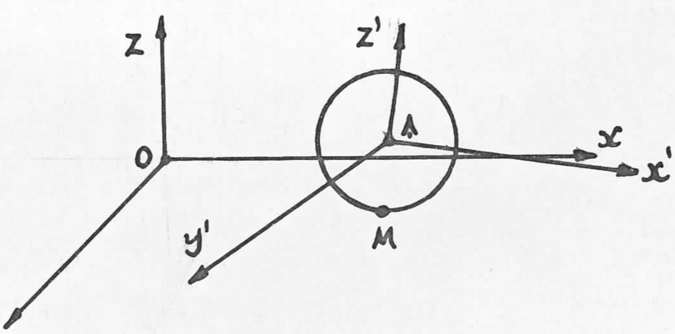
$$z_1 = 0 , \quad z_2 = 0 ,$$

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 - l^2 = 0,$$

$$14. \quad \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{x_1 - x_2} = \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{y_1 - y_2} .$$

Ovaj sistem je neholonoman, jer poslijednja od jednačina 14. odredjuje diferencijalnu vezu .

2. Lopta se kotrlja bez klizanja po ravni.



Uslov kotrljanja bez klizanja je da je brzina tačke dodira jednaka nuli. Koordinate koordinatnog početka sistema $X' Y' Z'$ u odnosu na sistem OXYZ su x_A, y_A, z_A .

Položaj tačke odredjuje se Ojlerovim uglovima θ, φ, ψ, gdje je ugao θ ugao izmdju Z i Z' ose, ugao φ izmdju čvorne linije i X' ose i ugao ψ izmdju X ose i čvorne linije.

Projekcije $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ trenutne ugaone brzine na ose nepomičnog trijedra su:

$$\omega_x = \dot{\psi} \sin\theta \sin\varphi + \dot{\theta} \cos\varphi ,$$

$$15. \quad \omega_y = \dot{\psi} \sin\theta \cos\varphi - \dot{\theta} \sin\varphi ,$$

$$\omega_z = \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi} .$$

Brzina tačke M čvrste sfere ima oblik :

$$16.\quad \vec{V}_M = \vec{V}_A + (\vec{\omega} \times \vec{AM}) ,$$

gdje je $\vec{V}_M = 0$; $\vec{V}_A = (\dot{x}_A , \dot{y}_A , \dot{z}_A)$;

$$\vec{\omega} = (\omega_x , \omega_y , \omega_z) ; \vec{AM}(0, 0, -a),$$

a a je poluprečnik lopte .

Tri skalarne jednačine koje odgovaraju jednačini 14. su

$$\frac{dx_A}{dt} - \omega_x a = 0 ,$$

$$17.\quad \frac{dy_A}{dt} + \omega_y a = 0 ,$$

$$\frac{dz_A}{dt} = 0 ,$$

ili

$$\frac{dx_A}{dt} - a\left(\frac{d\psi}{dt} \sin\theta \sin\varphi + \frac{d\theta}{dt} \cos\varphi\right) = 0 ,$$

$$18.\quad \frac{dy_A}{dt} + a\left(\frac{d\psi}{dt} . \sin\theta \cos\varphi - \frac{d\theta}{dt} . \sin\varphi\right) = 0 ,$$

$$\frac{dz_A}{dt} = 0 ; \quad \Rightarrow z_A = const = a .$$

Prve dvije veze su neholonomne, jer se sistem tih diferencijnih jednačina ne može zamijeniti konačnim jednačinama.

Veza z_A = const. je semiholonomna, a za z = a, prelazi u konačnu vezu. Na osnovu toga možemo reći da, lopta koja se kotrlja po ravni bez klizanja, pruža primjer neholonomnog sistema.

1.7. Uslov za brzine tačaka neslobodnog sistema .-

Uzimajući konačne veze :

$$19.\quad f_l(\vec{r}_i , t) = f_l(x_i , y_i , z_i , t) = 0 \; ; \; l = 1, 2, \ldots, k ,$$

i diferencirajućih po vremenu dobijamo :

$$20.\ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i}\dot{x}_i+\frac{\partial f_l}{\partial y_i}\dot{y}_i+\frac{\partial f_l}{\partial z_i}\dot{z}_i\right)+\frac{\partial f_l}{\partial t}=0\ ;\ l=1,2,\dots,k_1,$$

ili u obliku:

$$21.\ \sum_{i=1}^{n} \mathrm{grad}_i f_l\cdot\vec{V}_i+\frac{\partial f_l}{\partial t}=0.$$

Vektor sa komponentama $\frac{\partial f_l}{\partial x_i}, \frac{\partial f_l}{\partial y_i}, \frac{\partial f_l}{\partial z_i}$ se naziva parcijalni gradijent l - te veze u odnosu na i - tu tačku i obeležava se skraćeno sa $\nabla_i f_l$.

Za diferencijalnu vezu,

$$22.\ \varphi_j=\sum_{i=1}^{n}(A_{ij}\dot{x}_i+B_{ij}\dot{y}_i+C_{ij}\dot{z}_i)+D_j=0\ ;\ j=1,2,\dots,k_2,$$

uvodimo jedan vektor sa koordinatama A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}. Taj vektor ćemo zvati parcijalni gradijent linearne diferencijaln e veze φ_j za i - tu tačku i označiti ga sa q $\mathrm{grad}_i\,\varphi_j$.
Tad diferncijalna veza 22. dobija oblik analog.relaciji 21.

$$23.\ \varphi_j=\sum_{i=1}^{n} q\,\mathrm{grad}_i\,\varphi_j\cdot\vec{V}+D_j=0.$$

Jednačine 2o. i 22. odnosno 21. i 23. daju uslove koje treba da zadovoljavaju brzine tačaka nesolbodnog materijalnog sistema

Parcijalni gradijent ne zadovoljava onaj uslov koji zadovoljava svaki gradijent,naime, da je rot $\mathrm{grad}_i f_l$ = o, jer tazlike;

$$\left(\frac{\partial C_{ij}}{\partial y_i}-\frac{\partial B_{ij}}{\partial z_i},\ \frac{\partial A_{ij}}{\partial z_i}-\frac{\partial C_{ij}}{\partial x_i},\ \frac{\partial B_{ij}}{\partial x_i}-\frac{\partial A_{ij}}{\partial y_i}\right),$$

koje su koordinate vektora rot q $\mathrm{grad}_i\,\varphi_j$, mogu biti različite od nule.Ako ove razlike ne bi bile različite od nule,to jest kad bi bile jednake nuli, onda bi φ_j bio totalni diferencijal, i veza bi bila semiholonomna .

1.8. Uslov za ubrzanja tačaka neslobodnog sistema.-

Ako diferenciramo po vremenu jednačine 21. i 23.:

$$24.\ \frac{df_l}{dt}=0,\ \varphi_j=0\ ;\ l=1,2,\dots,k_1\ ;\ j=1,2,\dots,k_2,$$

dobićemo:

$$25.\ \frac{d^2f_l}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f_l}{\partial x_i}\ddot{x}_i+\frac{\partial f_l}{\partial y_i}\ddot{y}_i+\frac{\partial f_l}{\partial z_i}\ddot{z}_i\right)+D_2 f_l=0\ ;\ l=1,2,\dots,k_1,$$

$$26.\ \frac{d\varphi_j}{dt}=\sum_{i=1}^{n}(A_{ij}\ddot{x}_i+B_{ij}\ddot{y}_i+C_{ij}\ddot{z}_i)+D_2\varphi_j=0\ ;\ j=1,2,\dots,k_2.$$

Izrazi $D_2 f_l$ i $D_2 \varphi_j$ su kvadratne funkcije brzina tačaka sistema .One su homogene kvadratne funkcije ili forme po slijedećim uslovima: 1. da konačne veze ne zavise od vremena $\left(\frac{\partial f_l}{\partial t}=0\right)$, 2.da i diferencijalne (neholonomne)veze ne zavise od vremena ,a da su homogene($D_j = 0$).

Jednačine 25. i 26. možemo napisati u obliku:

$$27.\ \sum_{i=1}^{n}\operatorname{grad}_i f_l\cdot\vec{a}_i+D_2 f_l=0\ ;\ l=1,2,\dots,k_1,$$

$$28.\ \sum_{i=1}^{n}q\operatorname{grad}_i\varphi_j\cdot\vec{a}_i+D_2\varphi_j=0\ ;\ j=1,2,\dots,k_2,$$

gdje je $\vec{a}_i$ ubrzanje i - te tačke sistema .

Ovo su uslovi za ubrzanje tačaka holonomnog i neholonomnog neslobodnog sistema.

1.9. Diferencijalne jednačine kretanja neslobodnog materijalnog sistema sa množiteljima veza (Lagranževe jednačine prve vrste)

Posmatrajmo sistem materijalnih tačaka koji nije slobodan i čije su jednačine veza:

$$29.\ f_l(x_i,y_i,z_i,t)=0\ ;\ l=1,2,\dots,k_1,$$

$$30.\ \varphi_j=\sum_{i=1}^{n}(A_{ij}\dot{x}_i+B_{ij}\dot{y}_i+C_{ij}\dot{z}_i)+D_j=0 ;\ j=1,2,\dots,k_2.$$

Vidjeli smo da ubrzanja tačaka sistema zadovoljavaju gore nadjene uslove:

$$31.\ \frac{d^2 f_l}{dt^2}=\sum_{i=1}^{n}\operatorname{grad}_i f_l\cdot\vec{a}_i+D_2 f_l=0\ ;\ l=1,2,\dots k_1,$$

$$32.\ \frac{d\varphi_j}{dt}=\sum_{i=1}^{n}q\operatorname{grad}_i\varphi_j\cdot\vec{a}_i+D_2 f_l=0\ ;\ l=1,2,\dots k_2.$$

Predpotsavimo da se jednačine kretanja posmatranog sistema poklapaju sa jednačinama kretanja slobodnog materijalnog sistema:

$$33.\ m_i\ddot{\vec{r}}_i=m_i\vec{a}_i=\vec{F}_i\ ;\ i=1,2,\dots,n,$$

odnosno:

34. $\vec{a}_i = \frac{1}{m_i} \cdot \vec{F}_i$,

iz 31. i 32. dobijamo:

35. $\sum_{i=1}^{n} grad_i f_l \cdot \frac{1}{m_i} \cdot \vec{F}_i + D_2 f_l = 0 \; ; l = 1,2,\ldots,K_1$,

36. $\sum_{i=1}^{n} q\, grad_i \varphi_j \cdot \frac{1}{m_i} \vec{F}_i + D_2 \varphi_j = 0 \; ; j = 1,2,\ldots,K_2$.

Ako se jednačine 35. i 36. ili samo neke od njih pretvaraju u indentitet, kažemo da te veze ne djeluju i za njih onda, koristeći 34., slijedi:

37. $\frac{d^2 f_l}{dt^2} = 0 \; , \; \frac{d\varphi_j}{dt} = 0 \; ; \; \begin{matrix} l = 1,2,\ldots,K_1 \\ j = 1,2,\ldots,K_2 \end{matrix}$,

a odavde:

38. $f_l = a_l \cdot t + b_l, \; \varphi_j = C_j \quad l = 1,2,\ldots K_1 ; j = 1,2,\ldots,K_2$.

U opštem slučaju pored aktivnih sila $\vec{F}_i$ (i = 1,2,...,n) uvodimo i sile reakcije $\vec{R}_i$. Tada osnovna jednačina dinamike neslobodnog sistema ima oblik :

39. $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$.

Sila reakcije $\vec{R}_i$ je vektorski zbir reakcija od svake veze, konačne i diferencijalne, što dejstvuju na i-tu česticu. Svaka veza, u opštem slučaju, može dati reakciju koja ima dvije komponente:

- Prvu u pravcu gradijenta ili kvazigradijenta, a
- drugu normalno na njega.

U ovom dijelu ćemo razmatrati samo idealne reakcije, to jest reakcije kolinearne sa pripadajućim gradijentima, odnosno kvazigradijentima:

40. $\vec{R}_i = \sum_{l=1}^{K_1} \lambda_l \, grad_i f_l + \sum_{j=1}^{K_2} \mu_j \, q\, grad_i \varphi_j \; ; \; i = 1,2,\ldots,n$,

gdje su $\lambda_l (l = 1,2,\ldots,K_1)$; $\mu_j (j = 1,2,\ldots,K_2)$ faktori proporcionalnosti, koji se zovu množitelji veza, bilo konačnih bilo difernecijalnih. Oni su funkcije generalisanih koordinata, generalisanih brzina i vremena, i isti su za sve čestice što znači da ne zavise od indeksa i. Ako bi množitelji veza zavisili od broja čestica, onda bi sile reakcije imale oblik:

$$41.\ \vec{R}_i = \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_{il}\, \mathrm{grad}_i f_l + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_{ij}\, q\, \mathrm{grad}_i \varphi_j \quad ; i = 1,2,\ldots,n.$$

Tad bi množitelja veza bilo više nego jednačina veza, to jest imali bismo $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \ldots, \lambda_{1k_1}; \lambda_{21}, \lambda_{22}, \ldots, \lambda_{2k_1}, \ldots,$ a ne množitelje veza $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k_1}, \mu_1, \mu_2, \ldots \mu_{k_2}$.

Uzimajući u obzir sile reakcije 4o. diferencijalna jednačina kretanja čestice glasi:

$$42.\ m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l\, \mathrm{grad}_i f_l + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j\, q\, \mathrm{grad}_i \varphi_j \quad ; i = 1,2,\ldots,n,$$

što napisano u skalarnom obliku daje slijedeći sistem jednačina:

$$m_i \ddot{x}_i = F_{ix} + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j A_{ij},$$

$$43.\ m_i \ddot{y}_i = F_{iy} + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j B_{ij},$$

$$m_i \ddot{z}_i = F_{iz} + \sum_{l=1}^{k_1} \lambda_l \frac{\partial f_l}{\partial z_i} + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j C_{ij} \quad ; i = 1,2,\ldots,n.$$

To je sistem skalarnih diferencijalnih jednačina kretanja neslobodnog materijalnog sistema sa množiteljima veza ili Lagranžev sistem diferencijalnih jednačina kretanja prve vrste .

I u ovom sistemu imamo 3n + k_1 + k_2 nepoznatih (3n koordinata i k_1 + k_2 množitelja veza).Ove su diferencijalne jednačine drugog reda u odnosu na koordinate,a u odnosu na množitelje veza su konačne i linearne .Zato nam za odredjivanje tih nepoznatih služe sem jednačina 43. i jednačine 31. i 32.

Uzimajući u obzir 31. i 32. kao i 42. možemo napisati:

$$44.\ \frac{d^2 f_l}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{grad}_i f_l \cdot \frac{1}{m_i}\left\{\vec{F}_i + \sum_{r=1}^{k_1} \lambda_r\, \mathrm{grad}_i f_r + \sum_{s=1}^{k_2} \mu_s\, q\, \mathrm{grad}_i \varphi_s\right\} + D_2 f_l = 0 \ ; l = 1,2,\ldots,k_1$$

$$45.\ \frac{d^2 \varphi_j}{dt^2} = \sum_{i=1}^{n} q\, \mathrm{grad}_i \varphi_j \cdot \frac{1}{m_i}\left\{\vec{F}_i + \sum_{r=1}^{k_1} \lambda_r\, \mathrm{grad}_i f_r + \sum_{s=1}^{k_2} \mu_s\, q\, \mathrm{grad}_i \varphi_s\right\} + D_2 \varphi_j = 0 \ ; j = 1,2,\ldots$$

Ove jednačine su linearne po λ_r i μ_s $(r = 1,2,\ldots,k_1;\ s = 1,2,\ldots,$

1.1o. Nalaženje konačnih jednačina kretanja .-

Prvo iz 44. i 45. računamo vrijednosti za $\lambda_r (r = 1,2,\ldots,k_1)$ i $\mu_s (s = 1,2,\ldots,k_2)$.Kad to uvrstimo u 43. dobijemo sistem difernecijalnih jednačina sa 3n nepoznatih x_i y_i z_i(i = 1,2,...,n).Pošto su te jednačine drugog reda ,a ima ih 3n to će se integracijom tih jednačina dobiti 6n integracionih konstanti $C_1, C_2, \ldots, C_{6n}$.

Iz uslova 37. neposrednom integracijom dobijamo

46. $f_e = \alpha_e t + \beta_e, \quad \varphi_j = \gamma_j^\mu \; ; \; e = 1,2,\ldots,k_1 \; ; \; j = 1,2,\ldots,k_2,$

gdje $\alpha_e, \beta_e, \gamma_j^\mu$ mogu biti unaprijed date veličine. Pošto su jednačine 46. indentički zadovoljene onda lijeve strane moraju imati istu formu kao i desne, to jest moraju biti oblika :

47. $\alpha_e^*(C_1, C_2, \ldots, C_{6n})t + \beta_e^*(C_1, C_2, \ldots, C_{6n}), \quad e = 1,2,\ldots,k_1,$

$\gamma_j^{\mu *}(C_1, C_2, \ldots C_{6n}) \; ; \; j = 1,2,\ldots,k_2,$

gdje su $\alpha_e^*, \beta_e^*, \gamma_j^{\mu *}$ funkcije od konstanata $C_1, C_2, \ldots, C_{6n}$.

Ako su $\alpha_e, \beta_e, \gamma_j^\mu$ unaprijed date onada mora biti :

$\alpha_e^*(C_1, C_2, \ldots, C_{6n}) = \alpha_e \; ; \; e = 1,2,\ldots,k_1,$

48. $\beta_e^*(C_1, C_2, \ldots, C_{6n}) = \beta_e \; ; \; e = 1,2,\ldots,k_1,$

$\gamma_j^{\mu *}(C_1, C_2, \ldots, C_{6n}) = \gamma_j^\mu \; ; \; j = 1,2,\ldots,k_2.$

To znači da ovih 6n integracionih konstanti nisu proizvoljn već izmdju njih postoji $2k_1 + k_2$ veza. Tad imamo $6n - 2k_1 - k_2$ proizvoljnih konstanata. Ako su date veze 29. i 3o. konstante $\alpha_e, \beta_e, \gamma_j^\mu$ su nule, te veze izmdju konstanata dobijaju oblik:

$\alpha_e^*(C_1, C_2, \ldots, C_{6n}) = 0 \; ; \; e = 1,2,\ldots k_1,$

49. $\beta_e^*(C_1, C_2, \ldots, C_{6n}) = 0 \; ; \; e = 1,2,\ldots k_1,$

$\gamma_j^{\mu *}(C_1, C_2, \ldots, C_{6n}) = 0 \; ; \; j = 1,2,\ldots k_2.$

Ove konstante dobijene integracijom, od kojih su samo $6n - 2k_1 - k_2$ nezavisne, pokazuju da je proces integracije bio opštiji, komplikovaniji nego što je tražio zadatak. Zato s e ove metoda obično ne upotrebljava za rješavanje zadataka iz kretanja neslobodnog sistema. Za to se koriste mnogo zgodnije Apelove jednačine koje će biti objašnjene kasnije. Ovom metodom odredjuju se reakcije veza putem nalažen množitelja veza.

1.11. Rad sila reakcije na virtuelnim pomeranjima .-

Totalni rad sila idelanih reakcija zadržavajućih veza na virtuelnim pomeranjima jednak je nuli. Rad sila reakcije $\vec{R_i}(i = 1,2,\ldots n)$ na virtuelnom pomeranju $\vec{\delta s_i}$ jednak je skalarnom proizvodu $\vec{R_i} \times \vec{\delta s}$

za i -tu tačku,a ukupni rad na svim virtuelnim pomeranjima je

50. $\delta A=\sum_{i=1}^{n}\vec{R}_i\cdot\vec{\delta s}_i$.

Imajući u vidu izraz 4o. možemo napisati :

51. $\delta A=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{k_1}\lambda_l\,grad_i f_l+\sum_{j=1}^{k_2}\mu_j\,q\,grad_i\varphi_j\right)\cdot\vec{\delta s}_i$,

ili

52. $\delta A=\sum_{l=1}^{k_1}\lambda_l\left[\sum_{i=1}^{n}grad_i f_l\cdot\vec{\delta s}_i\right]+\sum_{j=1}^{k_2}\mu_j\left[\sum_{i=1}^{n}q\,grad_i\varphi_j\cdot\vec{\delta s}_i\right]$.

Pošto iz uslova 21. i 23. za virtuelna pomeranja slijedi da je:

53. $\sum_{i=1}^{n}grad_i f_l\cdot\vec{\delta s}_i=0$; $l=1,2,\ldots,k_1$,

$\sum_{i=1}^{n}q\,grad_i f_j\cdot\vec{\delta s}_i=0$; $j=1,2,\ldots,k_2$,

dobijamo da je :

δA = o čime je teorema dokazana.

1.12. Diferencijalne jednačine kretanja neslobodnog materijalnog sistema za proizvoljne koordinate.Lagranževe jednačine druge vrste .-

Treba da napišemo diferencijalne jednačine kretanja neslobodnog materijalnog sistema kad položaj sistema odredjuju proizvoljne generalisane koordinate :

54. $q_1, q_2, \ldots, q_{3n}-1, q_{3n}$,

gdje je n broj čestica .Tada je vektor položaja r indeks i ma koje i - te čestice dat kao:

55. $\vec{r}_i=\vec{r}_i\,(q_1, q_2,\ldots, q_{3n}, t)$.

Jednačine konačnih i linearnih neholonomnih veza imaju oblik:

56. $f_l(\vec{r}_i,t)=0$; $l=1,2,\ldots,k_1$,

$\sum_{i=1}^{n}q\,grad_i\varphi_j\cdot\dot{\vec{r}}_i+D_j=0$ $j=1,2,\ldots,k_2$,

pri čemu je f_l složena funkcija koordinata 54. i vremena.Imajući u vidu da je

57. $\vec{v}_i=\vec{V}_i=\sum_{\partial=1}^{n}\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_\partial}\cdot\dot{q}_\partial+\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial t}$,

jednačina 56. dobija slijedeći oblik :

$$58. \sum_{i=1}^{n} q\, grad_i\, \varphi_j \cdot \left[\sum_{\delta=1}^{n} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\delta} \cdot \dot{q}_\delta + \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right] + D_j = 0 ,$$

što se skraćeno može pisati u obliku :

$$59. \varphi_j = \sum_{\delta=1}^{n} P_{j\delta}\, \dot{q}_\delta + P_j = 0 ,$$

gdje su

$$60. P_{j\delta} = \sum_{i=1}^{n} q\, grad_i\, \varphi_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\delta} ,$$

$$61. P_j = \sum_{i=1}^{n} q\, grad_i\, \varphi_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + D_j = 0 ; \quad \delta = 1, 2, \ldots, N ; \; j = 1, 2, \ldots, K_2 .$$

Za dalje izvodjenje ovih jednačina iskoristićemo Lagranžev ili varijacioni izvod ;

$$62. \frac{\partial T}{\partial q_\nu} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} ,$$

gdje je T kinetička energija sistema . Kinetička energija sistema može se napisati na slijedeći način:

$$63. \partial T = \sum_{i=1}^{n} m_i v_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i \cdot \vec{V}_i .$$

Dalje imamo :

$$64. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i \cdot \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{q}_\nu} ; \quad \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{q}_\nu} = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} ,$$

$$65. \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} ,$$

$$66. \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{V}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} + \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} ,$$

$$67. \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} = \sum_{\delta=1}^{N} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\nu \partial q_\delta} \dot{q}_\delta + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\nu \partial t} ,$$

a iz 57. slijedi :

$$68. \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_\nu} = \sum_{\delta=1}^{N} \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\delta \partial q_\nu} \dot{q}_\delta + \frac{\partial^2 \vec{r}_i}{\partial q_\nu \partial t} ,$$

te je :

$$69. \frac{d}{dt} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} = \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_\nu} .$$

Tada je ;

$$70. \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} = \sum_{i=1}^{n} m_i \dot{\vec{V}}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} + \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \vec{V}_i \cdot \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_\nu} ,$$

a kako je,

71. $\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}_i \cdot \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_\nu} = \frac{\partial T}{\partial q_\nu}$,

dobijamo:

72. $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{a}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}$; $\nu = 1, 2, \ldots, N$.

Pošto je $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i + \sum_{\ell=1}^{k_1} \lambda_\ell \operatorname{grad}_i f_\ell + \sum_{j=1}^{k_2} \mu_j q \operatorname{grad}_i \varphi_j$,
dobijamo:

73. $\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k_1} \lambda_\ell \operatorname{grad}_i f_\ell \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} +$
$+ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_2} \mu_j q \operatorname{grad}_i \varphi_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}$; $\nu = 1, 2, \ldots, 3n$.

Izraz

74. $\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} = Q_\nu$,

zove se generalisana sila. Njen fizički smisao vezan je za proizvod $Q_\nu \cdot \delta q_\nu$. To je rad koji izvrše sve aktivne sile $\vec{F}_i$ na ovim elementarnim pomjeranjima tačaka sistema, kad se samo jedna generalisana koordinata promijeni za δq_ν:

75. $Q_\nu \delta q_\nu = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} \delta q_\nu$.

Sama generalisana sila ne mora imati dimenzije sile, ali proizvod $Q_\nu \times \delta q_\nu$ mora imati dimenzije rada.

Drugi član s desne strane formule 73. možemo transformisati ovako:

76. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k_1} \lambda_\ell \operatorname{grad}_i f_\ell \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} = \sum_{\ell=1}^{k_1} \lambda_\ell \sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}_i f_\ell \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu}$,

a kako je:

77. $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{grad}_i f_\ell \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} = \frac{\partial F_\ell}{\partial q_\nu}$,

gdje je $\vec{F}_1 (q_1, q_2, \ldots, q_{3n}, t)$ funkcija koja se dobije iz funkcije $f_1 (\vec{r}_i, t)$ kad vektore položaja izrazimo pomoću promjenljivih $q_1, q_2, \ldots q_{3n}$. Tada je

78. $\sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k_1} \lambda_\ell \operatorname{grad}_i f_\ell \cdot \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_\nu} = \sum_{\ell=1}^{k_1} \lambda_\ell \frac{\partial F_\ell}{\partial q_\nu}$.

Najzad treći član izraza 73. možemo transformisati na slijedeći način uzimajući u obzir 60.:

$$79.\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k_1}\mu_j\, q\, grad_i \varphi_j \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_\nu} = \sum_{j=1}^{k_2}\mu_j \sum_{i=1}^{n} q\, grad_i \varphi_j \frac{\partial \vec{r_i}}{\partial q_\nu} = \sum_{j=1}^{k_2}\mu_j P_{j\nu},$$

te konačno dobijamo:

$$80.\ \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\nu} - \frac{\partial T}{\partial q_\nu} = Q_\nu + \sum_{\ell=1}^{k_1}\lambda_\ell \frac{\partial F_\ell}{\partial q_\nu} + \sum_{j=1}^{k_2}\mu_j P_{j\nu};\quad \nu = 1,2,\ldots,3n,$$

gdje su konačne i linearne difarencijalne veze oblika:

$$81.\ F_\ell(q_1, q_2, \ldots q_{3n}, t) = 0;\quad \ell = 1,2,\ldots,k_1,$$

$$82.\ \varphi_j = \sum_{\delta=1}^{n} P_{j\delta}\cdot \dot{q}_\delta + P_j = 0;\quad j = 1,2,\ldots,k_2.$$

Sistem jednačina 8o. predstavlja sistem diferencijalnih jednačina kretanja neslobodnog materijalnog sistema sa množiteljima veza holonomnih ,odnosno,neholonomnih u generalisanim koordinatama. Očevidno je da se jednačine 8o. ne odnose na nezavisne generalisane koordinate i njihov broj jednak je 3n (gdje je n broj čestica sistema).Kad bi ove koordinate bile nezavisne izrazi $\vec{r_i} = \vec{r_i}(q_1, q_2, \ldots, q_3$ t)bi zadovoljavali jednačine f_1 ($\vec{r_i}$,t) = o indentično te bi prema tome svi izvodi $\frac{\partial F_1}{\partial q_\nu}$ u jednačinama 8o. bili jednaki nuli.

Prema tome,jednačine 8o. su samo projekcije vektorskih jednačina 42. (kojih takodje ima n ,odnosno 3n skalarnih)na ose generalisanih koordinata.

2. OPŠTI PRINCIPI MEHANIKE

2.1. Pojam i klasifikacija principa.-

Da bismo odredili kretanje nekog sistema čestica neophodno je da zn amo slijedeće:Početno stanje/kinematičko/sistema,veze koje ograničavaju kretanje tog sistema i sile ,koje dejstvuju na mase toga sistema.Poslije toga možemo da formiramo diferencijalne jednačine kretanja sistema koristeći NJutnove postulate o silama i dopunske uslove o silama reakcija.

Medjutim,pored ovog postupka,za obrazovanje difernecijalnih jednačina kretanja sistema postoje i drugi postupci koji dovode do istih diferencijalnih jednačina kretanja.Ovi postupci se formulišu pomoću uslova koje treba da zadovoljava izvjesni analitički izrazi, i nazivaju se opšti principi mehanike.

Postoje dvije kategorije opštih principa mehanike.

U prvu kategoriju spadaju diferencijalni principi čiji je analitički izraz u diferencijalnom obliku. U ovu kategoriju spadaju Dalamberov princip, Lagranžev princip mogućih pomjeranja, Gausov princip i dr.

U drugu kategoriju spadaju integralni principi čiji je analitički izraz predstavljen integralom. Takvi su: Hamiltonov princip, Maupertius-Lagranžev princip, Ojlerov princip, Jakobijev princip, Hemholcov princip i dr. Ovdje će biti od interesa samo oni principi koji važe kako za holonomne, tako i za neholonomne sisteme sa linearnim neholonomnim vezama.

2.2. Dalamberov princip u Lagranževom obliku.-

Neka nam je dat sistem sa vezama u najopštijem obliku, znači neholonoman, reonoman sistem sa nezadržavajućim vezama. Konačne nezadržavajuće veze imaju oblik:

$$83.\quad f_\ell(\vec{r}_i,t)\geq 0\ ;\quad \ell=1,2,\ldots,k_1,$$

a diferencijalne nezadržavajuće veze su oblika:

$$84.\quad \varphi_j=\sum_{i=1}^{n} q\,\mathrm{grad}_i\,\varphi_j\cdot\vec{v}_i+D_j\geq 0\ ;\quad j=1,2,\ldots,k_2.$$

Jednačine 42. možemo napisati u obliku:

$$85.\quad \vec{F}_i-m_i\vec{a}_i=-\sum_{\ell=1}^{k_1}\lambda_\ell\,\mathrm{grad}_i f_\ell-\sum_{j=1}^{k_2}\mu_j\,q\,\mathrm{grad}_i\,\varphi_j\ ;\quad i=1,2,\ldots,n.$$

Obrazujući skalarni proizvod svake od ovih jednačina sa pripadajućim vektorima virtuelnih pomjeranja i sumiranjem za sve tačke sistema dobijamo:

$$86.\quad \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i-m_i\vec{a}_i)\delta\vec{s}_i=-\Big[\sum_{\ell=1}^{k_1}\lambda_\ell\sum_{i=1}^{n}\mathrm{grad}_i f_\ell\cdot\delta\vec{s}_i+\sum_{j=1}^{k_2}\mu_j\sum_{i=1}^{n}q\,\mathrm{grad}_i\,\varphi_j\cdot\delta\vec{s}_i\Big].$$

Uzimajući u obzir uslove za virtuelna pomjeranja koji se dobijaju neposredno iz 83. i 84.:

$$87.\quad \delta f_\ell=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{grad}_i f_\ell\cdot\delta\vec{s}_i\geq 0\ ;\quad \ell=1,2,\ldots,k_1,$$

dobijamo :

88. $\delta \varphi_j = \sum_{i=1}^{n} q\,\mathrm{grad}_i\, \varphi_j \cdot \overrightarrow{\delta s_i} \geq 0 \;;\; j = 1, 2, \ldots, k_2,$

89. $\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \overrightarrow{\delta s_i} \leq 0,$

što u Dekartovim koordinatama daju

90. $\sum_{i=1}^{n} [(F_{ix} - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i + (F_{iy} - m_i \ddot{y}_i)\delta y_i + (F_{iz} - m_i \ddot{z}_i)\delta z_i] \leq 0.$

Ovo je Dalamberov princip u Lagranževom obliku za slučaj nezadržavajućih veza. U slučaju zadržavajućih veza imat ćemo slijedeće uslove:

91. $\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \overrightarrow{\delta s_i} = 0,$

ili u sklarnom obliku

92. $\sum_{i=1}^{n} [(F_{ix} - m_i \ddot{x}_i)\delta x_i + (F_{iy} - m_i \ddot{y}_i)\delta y_i + (F_{iz} - m_i \ddot{z}_i)\delta z_i] = 0.$

Dakle, možemo reći: Svako stvarno kretanje materijalnog sistema se vrši tako da u slučaju nezadržavajućih veza ubrzanja tačaka sistema moraju zadovoljavati uslove 89. za sva virtuelna pomjeranja. U slučaju zadržavajućih veza, koje su ovdje od većeg interesa, virtuelna pomjeranja moraju zadovoljavati uslove 91.

Pokažimo da iz ovog opšteg principa mehanike proizilazi diferencijalne jednačine kretanja sistema sa nezadržavajućim vezama.

1. Neka je sistem slobodan. Tad su varijacije $\overrightarrow{\delta s_i}$ potpuno proizvoljni vektori. Iz jednačine:

93. $\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot \overrightarrow{\delta s_i} = 0,$

koja treba da postoji za sve moguće vrijednosti vektora $\overrightarrow{\delta s_i}$, slijedi da je:

94. $\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i = 0 \;;\; i = 1, 2, \ldots, n.$

Da bismo dokazali prvu od jednačina 94. stavimo da je:

$\overrightarrow{\delta s_2} = \overrightarrow{\delta s_3} = \ldots = \overrightarrow{\delta s_n} = 0,$

te se jednačina 93. svodi na jednačinu:

95. $(\vec{F}_1 - m_1 \vec{a}_1) \cdot \overrightarrow{\delta s_1} = 0,$

koja treba da važi za sve proizvoljne vrijednosti vektora $\overrightarrow{\delta s_1}$.

Ako skalarni prozvod ma koja dva vektora mora biti jednak nuli za sve proizvoljne vrijednosti naprimjer drugog vektora, onda prvi vektor mora biti jednak nuli.Tako je iz 95.,

$$96.\quad \vec{F}_1 - m_1\vec{a}_1 = 0\,,$$
$$\vec{F}_1 = m_1\vec{a}_1\,,$$

što zn ači da se iz Dalamberovog principa za slobodni sistem mogu izvesti diferencijalne jednačine kretanja za taj sistem.

2. Sistem je neslobodan ,a veze zadržavajuće.Jednačine 93. treba da budu zadovoljene ako vektori $\delta\vec{s}_i$ zadovoljavaju uslove :

$$97.\quad \delta f_l = \sum_{i=1}^{n} grad_i f_l \cdot \delta\vec{s}_i = 0\ ;\quad l = 1,2,\ldots,k_1\,,$$

$$98.\quad \delta\varphi_j = \sum_{i=1}^{n} grad_i\,\varphi_j \cdot \delta\vec{s}_i = 0\ ;\quad j = 1,2,\ldots,k_2\,.$$

Da bismo izveli zaključak iz jednačine 93.služimo se Ojlerovom metodom množitelja .Ova metoda se sastoji u tome da se poslije dodavanja jednačini 93. jednačina 97. i 98. prethodno pomnoženih sa množiteljima λ_l i μ_j formalno smatraju svi vektori kao slobodni .

Od tri koordinata ,napr. Dekartovih x_i, y_i, z_i $3n - k_1 - k_2$ koordinata treba smatrati kao nezavisne ,a ostale kao zavisne.U jednačini,koja sleduje iz 95. odnosno 92. poslije dodavanja 97. i 98. dobijamo :

$$99.\quad \sum_{i=1}^{n}\Big[\Big(F_{ix} - m_i\ddot{x}_i + \sum_{l=1}^{k_1}\lambda_l\frac{\partial f_l}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k_2}\mu_j A_{ij}\Big)\delta x_i + (\ldots)\delta y_i + (\ldots)\delta z_i\Big] =$$

Koeficijente kod članova $k_1 + k_2$ sa zavisnim varijacijama možemo izjednačiti sa nulom podesnim izborom množitelja,a koeficijenti kod ostalih nezavisnih varijacija moraju biti jednaki nuli.To znači da su svi koeficijenti jednaki nuli i to dovodi do diferencijalnih jednačina kretanja materijalnog sistema u skalarnom obliku,koji odgovara vektorskim jednačinama 42. Znači da jednačine kretanja materijalnog sistema i to kako holonomnog ,tako i neholonomnog,sa linearnim neholonomnim vezama,izvodimo iz Dalamberovog principa.

3. Pojedine,pa čak i sve veze su nezadržavajuće prirode .Tad Dalamberov princip ima oblik :

$$100.\quad \sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i)\cdot\delta\vec{s}_i \le 0$$

a veze pišemo kao :

lol. $\delta f_l \geq 0, \delta \varphi_j \geq 0, \quad l=1,2,\ldots,k_1; j=1,2,\ldots,k_2.$

Izaberimo, zatim, takve varijacije pri kojima je

lo2. $\delta f_l = 0, \delta \varphi_j = 0; \quad l=1,2,\ldots,k_1; \; j=1,2,\ldots k_2,$

kojima odgovara niz varijacija :

lo3. $(\delta \vec{s}_i)_1 .$

U tom slučaju imamo dvije alternative. Prva alternativa je, da je,

lo4. $\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot (\delta \vec{s}_i)_1 = 0,$

a druga da je

lo5. $\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot (\delta \vec{s}_i)_1 < 0 .$

Druga alternativa je nemoguća. Jer, zbog homogenosti uslova lol. ove uslove zadovoljava i niz

lo6. $(\delta \vec{s}_i)_2 = -(\delta \vec{s}_i)_1,$

koji stavljen u Dalamberov princip daje slijedeći rezultat

lo7. $\sum_{i=1}^{n} (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \cdot (\delta \vec{s}_i)_2 > 0,$

što je u suprotnosti sa Dalamberovim principom .

Prema tome, za sve varijacije koje zadovoljavaju uslove lo2., a birane su i za slučaj nezadržavajućih veza, Dalamberov princip mora biti izražen pomoću jednakosti. Zatim, istim postupkom kao i u 2. dolazimo do difercijalnih jednačina kretanja.

2.3. Gausov princip najmanje prinude.-

Gaus je ovaj princip izveo pomoću metode najmanjih kvadrata. On posmatra dva kretanja , slobodno i prinudno, iz iste tačke i sa istim prozvoljnim brzinama, uvodi pojam odstupanja prinudnog kretanja od slobodnog , zatim formira kvadratnu mjeru tog odstupanja i proširuje na cio sistem. Pošto je data mjera vezana za prinudno kretanje sistema, on tu mjeru naziva prinudom(Zwang).

Princip kaže da od svih mogućih prinudnih kretanja, stvarno kretanje je ono za koje prinuda ima najmanju vrijednost. Neka je m_i i-ta tačka sistema (i = 1,2,... , n) i neka su $\vec{r}_{io}$, $\dot{\vec{r}}_{io}$, $\vec{a}_i$ vektor položaja, brzina i ubrzanje u trenutku t.

Vektor položaja u trenutku t + Δt je ,zadržavajući članove samo drugog reda je:

108. $\vec{r}_i = \vec{r}_{i0} + \dot{\vec{r}}_{i0}\cdot\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}_i(\Delta t)^2.$

Za slobodno kretanje sistema važi jednačina:

109. $m_i\vec{a}_i^{\,*} = \vec{F}_i\,,\quad \vec{a}_i^{\,*} = \frac{\vec{F}_i}{m_i}\,,$

gdje je $\vec{F}_i$ rezultanta svih aktivnih sila,a $\vec{a}_i$ ubrzanje slobodne tačke .Ako je $\vec{r}_i^{\,*}$ vektor položaja tačke kao slobodne , onda je

110. $\vec{r}_i^{\,*} = \vec{r}_{i0} + \dot{\vec{r}}_{i0}\cdot\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\vec{F}_i}{m_i}\cdot(\Delta t)^2.$

Razlika $\vec{r}_i - \vec{r}_i^{\,*}$ jeste odstupanje tačke sa ubrzanjem $\vec{a}_i$ od tačke koja se za isto vrijeme Δt kretala kao slobodna tačka sa ubrzanjem $\vec{a}_i^{\,*}$

111. $\vec{r}_i - \vec{r}_i^{\,*} = \frac{1}{2}(\Delta t)^2\cdot\left(\vec{a}_i - \frac{\vec{F}_i}{m_i}\right).$

Kvadratna mjera tog odstupanja je

112. $(\vec{r}_i - \vec{r}_i^{\,*})^2 = \frac{1}{4}(\Delta t)^4\cdot\left(\vec{a}_i - \frac{\vec{F}_i}{m_i}\right)^2.$

Sada, slično metodi najmanjih kvadrata, treba uzeti u obzir važnost uloge svake pojedine tačke,u zajedničkom zbiru svih odstupanja, materijalni sistem.Svaku kvadratnu mjeru odstupanja treba pomnožiti masom date tačke i sabrati ih

113. $\sum_{i=1}^{n} m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_i^{\,*})^2 = \frac{1}{4}(\Delta t)^4\sum_{i=1}^{n} m_i\left(\vec{a}_i - \frac{\vec{F}_i}{m_i}\right)^2.$

Pošto stalni množitelj $\frac{1}{4}(\Delta t)^2$ nije važan u proučavanju promjene napisane veličine ,možemo pisati

114. $Z = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(\vec{a}_i - \frac{\vec{F}_i}{m_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i\left(a_i^2 - \frac{2\vec{a}_i\cdot\vec{F}_i}{m_i} + \frac{F_i^2}{m_i^2}\right) =$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\left(m_i^2 a_i^2 - 2m_i\vec{a}_i\cdot\vec{F}_i + F_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{m_i}\left(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i\right)^2,$$

što Gaus zove prinuda .

Pokažimo sad uslov stacionarnosti prinude,to jest da njen minimum dovodi do onih ubrzanja koja odgovaraju stvarnom kretanju materijalnog sistema,bilo slobodnog bilo neslobodnog.

Za slobodni sistem iz jednačine 114. slijedi da za proizvoljno $\vec{a}$, pod uslovom da je svaki kvadrat jednak nuli, ova forma uzima najmanju vrijednost.Tad taj uslov dovodi do jednačina kretanja.

115. $m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i$

Ako je sistem neslobodan treba naći diferencijalnu varijaciju prinude,to jest δZ

116. $\delta Z = -2\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i)\delta\vec{a}_i$.

Tada uslov stacionarnosti δZ daje

117. $\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i)\delta\vec{a}_i = 0$.

Vratimo se na naše uslove za ubrzanja :

$$\sum_{i=1}^{n} grad_i f_l \cdot \vec{a}_i + D_2 f_l = 0 \quad ; \quad l = 1,2,\ldots,k_1 \, ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2\, grad_i \varphi_j \, \vec{a}_i + D_2 \varphi_j = 0 \quad ; \quad j = 1,2,\ldots,k_2 \, .$$

U slučaju da imamo dva neslobodna kretanja sistema, iz istog položaja, i sa istim brzinama, varijacije $\delta\vec{a}_i$ treba da zadovoljavaju uslove (kod zadržavajućih veza):

118. $\sum_{i=1}^{n} grad_i f_l \cdot \delta\vec{a}_i = 0 \, , \quad l = 1,2,\ldots k_1 \, ,$

119. $\sum_{i=1}^{n} 2\, grad_i \varphi_j \cdot \delta\vec{a}_i = 0 \, , \quad j = 1,2,\ldots k_2 \, ,$

koji se dobijaju iz jednačina 27. i 28.

Ako sad uporedimo jednačinu 117. za odredjivanje ubrzanja sa jednačinom koja izražava Dalamberov princip

12o. $\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_i - m_i\vec{a}_i)\delta\vec{s}_i = 0$,

pri čemu $\delta\vec{s}_i$ zadovoljava uslove

121. $\sum_{i=1}^{n} grad_i f_l \cdot \delta\vec{s}_i = 0$,

122. $\sum_{i=1}^{n} 2\, grad_i \varphi_j \cdot \delta\vec{s}_i = 0$,

vidimo da ubrzanja $\vec{a}_i$ stvarnog kretanja ,odredjena iz Dalamberovog principa, moraju biti ista sa ubrzanjima odredjenih prema Gausovom principu.Na taj način su Gausovi i Dalamberov princip medjusobnom ekvivalentni.

I Gausov princip, poslije eliminisanja zavisnih varijacija ubrzanja iz 117., dolazimo do jednačina kretanja:

$$123.\quad m_i\vec{a}_i=\vec{F}_i+\sum_{i=1}^{k_1}\lambda_\ell \operatorname{grad}_i f_\ell+\sum_{j=1}^{k_2}\mu_j\, q \operatorname{grad}_i \varphi_j$$

Gausov princip važi i onda kad diferencijalne veze nisu linearne u odnosu na brzine. Neka veza ima oblik:

$$\varphi(\vec{v}_i,\vec{r}_i,t)=0,$$

za varijacije ubrzanja imamo tad linearne uslove:

$$\sum_{i=1}^{n}\operatorname{grad}_{v_i}\varphi\cdot\delta\vec{a}_i=0,$$

gdje vektor $\operatorname{grad}_{v_i}\varphi$ predstavlja djelimični gradijent funkcije za vektor $\vec{v}_i$. Njegove komponente su $\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{x}_i}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{y}_i}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial\dot{z}_i}$.

Ako je funkcija φ linearna u odnosu na brzine, onda je $\operatorname{grad}_{v_i}\varphi=q\operatorname{grad}_i\varphi$. U opštem slučaju $\operatorname{grad}_{v_i}\varphi$ može biti i sam funkcija brzina tačaka sistema. Pošto iz Gausovog principa možemo izvesti diferencijalne jednačine kretanja sistema kao i obrnuto, možemo reći:

"Svaki sistem se kreće sa najmanjom prinudom, od strane masa koje ograničavaju kretanje sistema". To je opšti princip mehanike.

3. APEL-OV METOD

3.1. Kvazikoordinate (pseudokoordinate)

Lagranževe koordinate su okarakterisane time da se promjenljive x_i, y_i, z_i javljaju kao eksplicintne funkcije od q_i i t. Zgodno je, posebno u slučaju neholonomnih sistema, uvesti koordinate opštijeg tipa, u kojima se svaka promjenljiva $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ javlja kao linearna funkcija od $\dot{q}_i$, no u tim funkcijama se u opštem slučaju ne javljaju izvodi po vremenu. Svako $\dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i$ može biti predstavljeno u obliku linearnih funkcija od N promjenljivih, gdje je N broj stepeni slobode sistema. Razmotrimo neholonomni sistem s N stepeni slobode i 1 neholonomnih veza. Pri ispitivanju tog sistema neophodno je N + 1 Lagranževih koordinata $q_1, q_2, \ldots, q_{N+\ell}$. Moguća pomjeranja sistema za dovoljavaju jednačinu:

$$124.\quad 0=\sum_{b=1}^{N+l} P_{jb}\cdot dq_b+P_j\,dt\ ;\quad j=1,2,\dots,l,$$

gdje koeficijenti P_{jb} i P_j ,koji su funkcije od $q_1,q_2,\dots,q_{N+l},t$ imaju neprekidne prve izvode u odgovarajućoj oblasti D nezavisno promjenljivih $q_1,q_2,\dots,q_{N+l},t$.

Uvedimo p novih veličina $\Theta_1,\Theta_2,\dots,\Theta_p$, gdje je p proizvoljan cio broj .Veličine Θ ne određujemo kao funkcije od q i t, no njihovi diferencijali predstavljaju Pfafove forme od q i t

$$125.\quad d\Theta_j=\sum_{b=1}^{N+l} C_{jb}\,dq_b+C_j\,dt,\quad j=1,2,\dots,p.$$

Koeficijenti C_{jb} i C_j su ovdje funkcije od $q_1,q_2,\dots,q_{N+l}$ i imaju neprekidne izvode u oblasti D.

Izrazi 124. i 125. predstavljaju l + p nezavisnih Pfafovih formi i u opštem slučaju nisu totalni diferencijali.Veličine Θ nazivamo kvazikordinatama ili pseudokoordinatama.

Dalje ćemo pisati $\Theta_j=q_{N+l+j}$ tako što ćemo imati n promjenljivih $q_1,q_2,\dots,q_n$, gdje je n = N + l + p pri čemu prvih N + l predstavlja date Lagranževe koordinate ,a ostalih p kvazikoordinate .Pri tome je

$$126.\quad dq_{N+l+j}=\sum_{b=1}^{N+l} C_{jb}\,dq_b+C_j\,dt,\quad j=1,2,\dots,p.$$

Riješimo sada l + p jednačina 124. i 126.odnosno l + p diferencijala d_q izrazivši ih preko ostalih N diferencijala.Ovih N diferencijala, preko kojih izražavamo ostale, mogu biti diferencijali,ili Lagranževih koordinata,ili kvazikoordinata.Ako te pojedinačne koordinate privremeno označimo sa $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_N$,to će za koordinate q_j, koje njima ne pripadaju, biti:

$$127.\quad dq_j=\sum_{b=1}^{N} D_{jb}\cdot d\varphi_b+D_j\,dt.$$

Ukupno će biti l + p takvih jednačina.Jednačine 127. su tačno ekvivalentne sistemima 124. i 126.Koeficijenti D_{jb} i D_j zavise od svih Lagranževih koordinata q i od vremena t,a ni u kom slučaju od $\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_N,t$ .Koordinate x_r zavise od $q_1,q_2,\dots,q_{N+l},t$ i odatle slijedi

$$128.\quad dx_j=\sum_{b=1}^{N+l}\frac{\partial x_j}{\partial q_b}\cdot dq_b+\frac{\partial x_j}{\partial t}\cdot dt\ ;\quad j=1,2,\dots,n.$$

Izrazimo diferencijal svake od navedenih koordinata na desnoj strani 128. preko $d\varphi_1, d\varphi_2, \ldots, d\varphi_N$ iskoristivši pri tom jednačinu 127. Diferencijale dx_r izrazićemo u obliku linearne forme od $d\varphi_1$, $d\varphi_2, \ldots, d\varphi_N, dt$; koeficijenti tih linearnih formi će sadržati sve Lagranževe koordinate q i vrijeme t .

Izmijenimo naše označavanje. U daljnjem N izdvojenih koordinata, (koje mogu biti ili Lagranževe ili, kvazikoordinate), biće označene sa $q_1, q_2, \ldots, q_N$,a ostali l + p koordinata, preko $q_{N+1}, q_{N+2}, \ldots, q_n$. Formula za dx_j tada glasi:

$$129.\quad dx_j = \sum_{b=1}^{N} \alpha_{jb} \cdot dq_b + \alpha_j \cdot dt \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

a 127. pišemo u obliku:

$$130.\quad dq_j = \sum_{b=1}^{N} \beta_{jb} \, dq_b + \beta_j \, dt \; ; \; j = N+1, N+2, \ldots, n.$$

Formule 128. i 129. su osnovne za razvijanje ovdje prikazane teorije. Izvode $\dot{x}_j$ je moguće predstaviti preko N brzina $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N$. Analogno, preko njih možemo izraziti i $\dot{q}_j$ ($j >$ od N). No u svakom slučaju koeficijenti $\alpha_{jb}, \alpha_j, \beta_{jb}, \beta_j$ sadrže koordinate q, različite od N razdvojenih koordinata . U opštem slučaju ti koeficijenti sadrže sve Lagranžove koordinate i vrijeme t . Komponente brzina $\dot{x}_j$, (za svih n Dekartovih koordinata čestica), i $\dot{q}_j$ (za ne razdvojene koordinate q), izražavamo preko sistema komponenata brzina po broju stepeni slobode sistema. Brzine $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_N$ mogu imati proizvoljne vrijednosti ,no ako su te vrijednosti zadane, samim tim su odredjene brzine svih tačaka, eijelog sistema.

Virtuelna pomjeranja se izražavaju preko proizvoljnih priraštaja $\delta q_1, \delta q_2, \ldots, \delta q_N$, slijedećim obrascima:

$$131.\quad \delta x_j = \sum_{b=1}^{N} \alpha_{jb} \, \delta q_b \, , \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$132.\quad \delta q_j = \sum_{b=1}^{N} \beta_{jb} \, \delta q_b \, , \quad j = N+1, N+2, \ldots, n.$$

Primjer 1 . Čestica se kreću po površi:

$$133.\quad dq = x\,dy - y\,dx$$

xy su Dekartove koordinate. Ovdje q predstavlja dvostruku površinu, koju prebriše radijus vektor od trenutka t, i predstavlja kvazikoordinatu.

Primjer 2. U praksi se često susrećemo sa slučajem, kad je kvazikoordinata, "pun obrt" oko zadane ose, pokretne ili nepokretne. Takav slučaj imamo kod čigre, gdje pun obrt predstavlja kvazikoordinatu q.

3.2. Definicija ubrzanja

Uvedimo funkciju Džipsa G oblika

134. $G=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j a_j^2,$

ili, u Dekartovim koordinatama

135. $G=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j(\ddot{x}_j^2+\ddot{y}_j^2+\ddot{z}_j^2),$

koju ćemo izraziti preko generalisanih ubrzanja $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_N$. Funkcija Džipsa predstavlja, upravo, polinom od $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_N$, oblika

136. $G=G_2+G_1+G_0,$

gdje je G_2 homogena kvadratna funkcija od $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_N$; G_1 - homogena linearna funkcija od $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_N$, a G_0 ne zavisi od $\ddot{q}$.

Koeficijenti funkcije G, u opštem slučaju, zavise od svih promjenljivih $q, \dot{q}$, a ne samo od prvih N. Ukoliko se ukaže potreba, $\ddot{q}_{N+1}, \ddot{q}_{N+2}, \ldots, \ddot{q}_{n}$ možemo isključiti pomoću jednačina

137. $\ddot{q}_j=\sum_{b=1}^{N}\beta_{jb}\ddot{q}_b+\beta_j \quad ; \quad j=N+1, N+2, \ldots n.$

Neka su nam za sistem dati položaj i brzina u trenutku vremena t. Nama su potrebne jednačine, koje odredjuju ubrzanja sistema čestica. To ćemo lako postići primjenom proste i važne teoreme:

"Ubrzanje sistema je takvo, da izraz

138. $G-\sum_{j=1}^{N} Q_j\ddot{q}_j$

shvaćen kao funkcija od $\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ldots, \ddot{q}_N$, ima minimum". Pri primjeni ove teoreme koordinate i komponente brzine smatramo konstantnim, faktički, mi imamo posla sa kvadratnim funkcijama sa konstantnim koeficijentima. Sa ovom teoremom smo se sreli kad smo govorili o Gausovom principu, mada u nešto drugačijoj formi. U stvari, lako nalazimo da je Gaus-ova prinuda

139. $Z=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j\left(\vec{a}_j-\frac{\vec{F}_j}{m_j}\right)^2,$

s tačnošću do članova koji ne sadrže ubrzanje, istovjetna sa :

$$140.\quad C = G - \sum_{j=1} \vec{F}_j \cdot \vec{a}_j .$$

Izraz $\sum_{j=1}^{n} \vec{F}_j \cdot \vec{a}_j$ se razlikuje od $\sum_{s=1}^{n} Q_s \cdot \ddot{q}_s$ samo po članovima koji ne sadrže ubrzanje. To znači da se gore navedena teorema može dobiti i iz Gausovog principa najmanje prinude.

3.3. Džips - Apelova jednačina

Ove jednačine mogu se dobiti iz prethodno uvedene teoreme. Rekli smo da je prinuda Z sistema ekvivalentna sa funkcijom generalisanih ubrazanja

$$141.\quad C = G - \sum_{j=1}^{N} Q_j \ddot{q}_j ,$$

i da ove funkcije imaju minimum po ovim ubrzanjima pod istim uslovima. Iz $\frac{\partial C}{\partial \ddot{q}_j} = 0$, imamo :

$$142.\quad \frac{\partial C}{\partial \ddot{q}_j} = \frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_j} - Q_j = 0 ,$$

jer Q_j ne zavisi od generalisanih ubrzanja , to jest pri diferenciranju će se ponašati kao konstanta. Konačno dobijamo jednačine :

$$143.\quad Q_j = \frac{\partial G}{\partial \ddot{q}_j} , \qquad j = 1, 2, \ldots, N ,$$

koje se nazivaju jednačine Džips-Apela . Njih je prvo dobio Džips 1879. godine, i podrobno ih istražio Apel, 20 godina kasnije. Jasno je, da je pri sastavljanju jednačina kretanja, članove u izrazu za G koji ne sadrže $\ddot{q}$, moguće zanemariti.

Džips-Apelove jednačine 143. predstavljaju najprostiju, i u isto vrijeme najopštiju formu jednačina kretanja. Izuzetno proste po formi, one u isto vrijeme mogu biti primjenjene i kod holonomnih i kod neholonomnih sistema, i omogućuju lako uvodjenje kvazi koordinata.

Pri korišćenju tih jednačina, najprije se odredjuje broj stepeni slobode sistema N, i sastavlja "kinetička energija ubrzanja" $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} m_j a_j^2$ izraženu preko N ubrzanja $\ddot{q}_N$; u ove jednačine ulazi svih n koordinata q i brzina $\dot{q}$; no osnovno je to, što u njih ulazi samo N izdvojenih ubrzanja $\ddot{q}$. Izdvojenih N koordinata q mogu biti, kako Lagranževe, tako i kvazikordinate, kako je već zgodno.

Dalje se razmatra rad zadanih sila na viruelnim po mjeranjima, i izraz za taj rad predstavlja se u obliku $\sum_{j=1}^{N} Q_j \delta q_j$. Jednačine kretanja imaju oblik 143. Njima se pridaje n - N geometrijskih jednačina :

$$144. \quad \dot{q}_j = \sum_{b=1}^{N} \beta_{jb} \cdot \dot{q}_b + \beta_j , \qquad j = N+1, N+2, \ldots, n,$$

i iz tog sistema diferencijalnih jednačina odredjuje se n promjenljivih, kao funkcije od t.

3.4. P r i m j e r i

1. Dvije teške materijalne tačke M_1 i M_2, jednakih masa m=1, spojene su štapom nepromjenljive dužine l, i zanemarljivo male mase. Sistem može da se kreće samo u vertikalnoj ravni, i samo tako, da jebrzina središta štapa upravljena duž štapa. Odrediti kretanje tačaka M_1 i M_2 metodom monžitelja veza.

Neka su x_1 i y_1 i x_2 i y_2 koordinate tačaka M_1 i M_2. Napišimo jednačine veza:

$$145. \quad \begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\left[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+l^2\right]=0, \\ &(x_2-x_1)(\dot{y}_2-\dot{y}_1)-(\dot{x}_2-\dot{x}_1)(y_2-y_1)=0 . \end{aligned}$$

Lagranževe jednačine s neodredjenim množiteljima λ i μ imaju oblik:

$$146. \quad \begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\lambda(x_2-x_1) - \mu(y_2-y_1), \\ \ddot{y}_1 &= -g - \lambda(y_2-y_1) + \mu(x_2-x_1), \end{aligned}$$

$$147. \quad \begin{aligned} \ddot{x}_2 &= \lambda(x_2-x_1) - \mu(y_2-y_1), \\ \ddot{y}_2 &= -g + \lambda(y_2-y_1) + \mu(x_2-x_1). \end{aligned}$$

Iz jednačine 146. pomoću prve iz jednačina 145. odredjujemo λ i μ :

$$148. \quad \begin{aligned} \lambda &= \frac{g}{l^2}(y_2-y_1) - \frac{1}{l^2}\left[(x_2-x_1)\ddot{x}_1 + (y_2-y_1)\ddot{y}_1\right], \\ \mu &= \frac{g}{l^2}(x_2-x_1) - \frac{1}{l^2}\left[(y_2-y_1)\ddot{x}_1 - (x_2-x_1)\ddot{y}_2\right]. \end{aligned}$$

Primjetimo da se jednačine 147. dobiju iz 146. ako se u poslijednjima zamijene λ sa $-\lambda$ i $\ddot{x}_1$, $\ddot{y}_1$ sa $\ddot{x}_2$, $\ddot{y}_2$. Zato, odredjujući λ

i μ iz jednačina 147.nalazimo:

$$\lambda=\frac{g}{l^2}(y_2-y_1)+\frac{1}{l^2}[(x_2-x_1)\ddot{x}_2+(y_2-y_1)\ddot{y}_2],$$

149. $$\mu=\frac{g}{l^2}(x_2-x_1)-\frac{1}{l^2}[(y_2-y_1)\ddot{x}_2-(x_2-x_1)\ddot{y}_2].$$

Izjednačavajući medjusobom odgovarajuće izraze za λ i μ u formulama 148. i 149. dobićemo poslije kraće transformacije:

$$(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1)(y_2-y_1)-(\ddot{y}_2-\ddot{y}_1)(x_2-x_1)=0,$$

150. $$(\ddot{x}_2+\ddot{x}_1)(x_2-x_1)+(\ddot{y}_2+\ddot{y}_1)(y_2-y_1)+2g(y_2-y_1)=0.$$

Uvodimo oznake

151. $u=x_2-x_1,\quad v=y_2-y_1,\quad P=\dot{x}_1+\dot{x}_2,\quad Q=\dot{y}_1+\dot{y}_2.$

Tada jednačine 145. i 15o. izgledaju ovako:

$$u^2+v^2=l^2,$$

152. $\ddot{u}\cdot v-u\ddot{v}=0,$

153. $Pv-Qu=0,$

154. $\dot{P}u+\dot{Q}v+2gv=0.$

Jednačine 152.pokazuju da se tačka sa koordinatama (u,v)kreće po krugu poluprečnika 1,s centrom u koordinatnom početku,pri čemu je njeno ubrzanje svo vrijeme upereno ka centru.Tada će kretanje te tačke biti ravnomjerno.Zato je

155. $u=l\cos\varphi,\quad v=l\sin\varphi,\quad \dot{\varphi}=\alpha=\text{const},\ \varphi=\alpha t+\beta.$

Saglasno jednakosti 153. možemo staviti:

156. $P=\frac{f}{l}u,\quad Q=\frac{f}{l}v.$

Zamjenjujući te izraze u jednakost 154. i uzimajući u obzir 152. i 155. nalazimo:

157. $\dot{f}+\frac{2g}{l}\cdot v=0,\quad f=-2g\sin\varphi.$

Tada je

158. $\frac{df}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\dot{f}=-\frac{2g}{\alpha}\cdot\sin\varphi,\quad f=\frac{2g}{\alpha}\cos\varphi+2\delta^{u}.$

Prema tome, u smislu jednakosti 155. i 156. imamo:

159. $P=2(\delta^{u}+\frac{g}{\alpha}\cdot\cos\varphi)\cos\varphi;\quad Q=2(\delta^{u}+\frac{g}{\alpha}\cos\varphi)\sin\varphi.$

Integracijom nalazimo:

$$x_1 + x_2 = \int P\,dt = \frac{1}{\alpha}\int P\,d\varphi = \frac{2\delta'}{\alpha}\cdot \sin\varphi + \frac{g}{\alpha^2}\sin\varphi\cos\varphi + \frac{g}{\alpha^2}\varphi + 2$$

160. $$y_1 + y_2 = -\frac{2\delta'}{\alpha}\cos\varphi - \frac{g}{\alpha^2}\cos^2\varphi + 2\varepsilon .$$

Iz jednakosti 151. 155. i 160. dobijamo:

$$x_1 = \delta'/\alpha \sin\varphi + g/2\alpha^2 \sin\varphi\cos\varphi + g/2\alpha^2\cdot\varphi - l/2\cos\varphi + \delta,$$

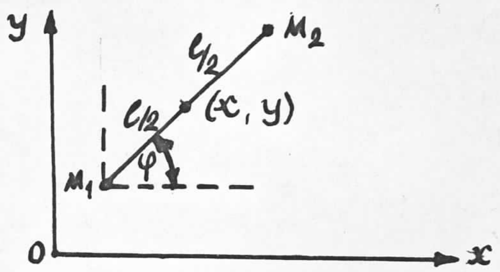
$$y_1 = -\delta'/\alpha \sin\varphi - g/2\alpha^2\cos^2\varphi - l/2\sin\varphi + \varepsilon,$$

161. $$x_2 = \delta'/\alpha \sin\varphi + g/2\alpha^2 \sin\varphi\cos\varphi + g/2\alpha^2\cdot\varphi + l/2\cos\varphi + \delta,$$

$$y_2 = -\delta'/\alpha\cos\varphi - g/2\alpha^2\cos^2\varphi + l/2\sin\varphi + \varepsilon, \quad \varphi = \alpha t + \beta,$$

gdje su $\alpha, \beta, \delta', \delta, \varepsilon$ proizvoljne konstante.

2. Pomoću Apleovih jednačina odrediti kretanje sistema opisanog u prvom primjeru. To omogućava da se uporede dvije metode odredjivanja kretanja neholonomnog sistema, pomoću Lagranževih množitelja i pomoću Apelovih jednačina, i da se uvjerimo u preimućstvo drugog.



Za nezavisne koordinate uzimamo koordinate težišta xy i ugao φ koji obrazuje duž $M_1 M_2$ sa horizontalnom osom x. Tada je

$$x_1 = x - \frac{l}{2}\cos\varphi, \quad x_2 = x + l/2\cos\varphi,$$

162. $$y_1 = y - l/2\sin\varphi, \quad y_2 = y + l/2\sin\varphi.$$

Jednačina neholonomne veze, u novim koordinatama, dobija oblik:

163. $$\frac{\dot{x}}{\cos\varphi} = \frac{\dot{y}}{\sin\varphi}.$$

Energija ubrzanja U izražava se na slijedeći način:

164. $$U = \frac{1}{2}(\ddot{x}_1 + \ddot{y}_1 + \ddot{x}_2 + \ddot{y}_2) = \ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \frac{1}{4}l^2(\dot{\varphi}^4 + \ddot{\varphi}^2).$$

Uvodimo pseudobrzinu $\dot{q}$ predstavljajući:

165. $\dot{x}=\dot{q}\cos\varphi, \quad \dot{y}=\dot{q}\sin\varphi.$

Tada je

166. $U=\ddot{q}^2+\frac{1}{4}l^2\ddot{\varphi}^2+\ldots$

gdje neispisani članovi ne sadrže ubrzanje .Odredimo generalisane sile:

167. $\delta A = Q\delta q + \Phi\delta\varphi = -2g\delta y = -2g\sin\varphi\,\delta q,$

168. $Q=-2g\sin\varphi, \quad \Phi=0.$

Sastavimo Apelove jednačine:

169. $\frac{\partial U}{\partial \ddot{q}}=Q, \quad \frac{\partial U}{\partial \ddot{\varphi}}=\Phi.$

U datom slučaju te jednačine ne sadrže koordinate x i y i imaju oblik:

170. $\ddot{q}=-g\sin\varphi, \quad \ddot{\varphi}=0, \quad \varphi=\alpha t+\beta,$

171. $\frac{d\dot{q}}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\ddot{q}=-\frac{g}{\alpha}\sin\varphi, \quad \dot{q}=\frac{g}{\alpha}\cos\varphi+\delta''.$

Nadjimo x i y

172. $$\frac{dx}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\dot{x}=\frac{1}{\alpha}\dot{q}\cos\varphi=\frac{g}{\alpha^2}\cos^2\varphi+\frac{\delta''}{\alpha}\cos\varphi,$$
$$\frac{dy}{d\varphi}=\frac{1}{\alpha}\dot{y}=\frac{1}{\alpha}\dot{q}\sin\varphi=\frac{g}{\alpha^2}\cos\varphi\sin\varphi+\frac{\delta''}{\alpha}\sin\varphi.$$

Odatle je :

$$x=\frac{g}{2\alpha^2}\cdot\varphi+\left(\frac{\delta''}{\alpha}+\frac{g}{2\alpha^2}\cos\varphi\right)\sin\varphi+\delta,$$

173. $$y=-\left(\frac{\delta''}{\alpha}-\frac{g}{2\alpha^3}\cdot\cos\varphi\right)\cos\varphi+\varepsilon.$$

Zamjenjujući $\alpha t+\beta$ umjesto φ ,dobijamo konačne jednačine kretanja,koje sadrže pet proizvoljnih konstanata $\alpha,\beta,\delta'',\delta,\varepsilon$

$$x=\frac{g}{2\alpha^2}(\alpha t+\beta)+\left[\delta''/\alpha+g/2\alpha^2\cos(\alpha t+\beta)\right]\sin(\alpha t+\beta)+\delta,$$

174. $$y=-\left[\frac{\delta''}{\alpha}+\frac{g}{2\alpha^2}\cos(\alpha t+\beta)\right]\cos(\alpha t+\beta)+\varepsilon, \quad \varphi=\alpha t+\beta.$$

2.Pokažimo kako se iz Apelovih jednačina mogu dobiti Ojlerove dinamičke jednačine obrtanja krutog tijela oko nepomične tačke O .Neka su $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ projekcije ugaone brzine ω na glavne ose inercije OX_1, OX_2, OX_3.One ,kao što je poznato,predstavljaju linearne kombinacije generalisanih brzina $\dot{\psi},\dot{\theta},\dot{\varphi}$,gdje su ψ,θ,φ

Ojlerovi uglovi. Zato možemo uzeti $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ za tri pseudokoordinate.

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\varphi \; , \; \omega_\psi = \dot{\psi} \; , \; \omega_\theta = \dot{\theta} \; , \; \omega_\varphi = \dot{\varphi}$$

175. $$\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) + \vec{\omega} \times (\vec{v} \times \vec{r}) + \vec{v} \times (\vec{r} \times \vec{\omega}) = 0$$

Izračunajmo energiju ubrzanja :

176. $$2U = \int w^2 dm = \int (\vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{v})^2 dm =$$
$$= \int (\vec{\varepsilon} \times \vec{r})^2 dm + 2 \int (\vec{\varepsilon} \times \vec{r})(\vec{\omega} \times \vec{v}) dm + \dots =$$
$$= \int (\vec{\varepsilon} \times \vec{r})^2 dm + 2\vec{\varepsilon} \int [\vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{v})] dm + \dots =$$
$$= \int (\vec{\varepsilon} \times \vec{r})^2 dm + 2\vec{\varepsilon} [\vec{\omega} \times \int r \times v \, dm] + \dots ,$$

$\vec{\varepsilon}$ - uglovno ubrzanje. Neispisani članovi u ovoj formuli ne sadrže uglovno ubrzanje .

Primjetimo da je : $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\delta \omega}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\omega} = \frac{\delta \vec{\omega}}{dt}$.

Ovdje $\frac{d}{dt}$ i $\frac{\delta}{dt}$ označavaju odgovarajuće diferenciranje u nepokretnom koordinatnom sistemu i u sistemu koordinata. Zato su $\dot{\omega}_1, \dot{\omega}_2, \dot{\omega}_3$, projekcije ugaonog ubrzanja $\vec{\varepsilon}$ na ose OX_1, OX_2, OX_3. Tada, analogno izrazu za kinetičku energiju :

177. $$2T = \int (\vec{\omega} \times \vec{r})^2 dm = I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2 ,$$

(gdje su I_1, I_2, I_3 momenti inercije u odnosu na glavne ose OX_1, OX_2, OX_3) možemo pisati:

178. $$\int (\vec{\varepsilon} \times \vec{r})^2 dm = I_1 \dot{\omega}_1^2 + I_2 \dot{\omega}_2^2 + I_3 \dot{\omega}_3^2 .$$

S druge strane kinetički moment $\vec{G} = \int (\vec{r} \times \vec{v}) dm$ ima komponente $I_1\omega_1$, $I_2\omega_2$, $I_3\omega_3$ zato konačno dobijamo slijedeći izraz za 2U :

179. $$2U = I_1 \dot{\omega}_1^2 + I_2 \dot{\omega}_2^2 + I_3 \dot{\omega}_3^2 + 2[(I_3 - I_2)\omega_2 \omega_3 \dot{\omega}_1 + (I_1 - I_3)\omega_3 \omega_1 \dot{\omega}_2 + (I_2 - I_1)\omega_1 \omega_2 \dot{\omega}_3] + \dots$$

S druge strane, za elementarni rad spoljašnih sila, imamo

180. $$\delta A = L_0 \omega dt = L_1 \omega_1 dt + L_2 \omega_2 dt + L_3 \omega_3 dt .$$

Zato Apelove jednačine daju neposredno Ojlerove jednačine :

181. $$I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\omega_2 \omega_3 = L_1 ,$$
$$I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\omega_3 \omega_1 = L_2 ,$$

181. $I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\,\omega_1 \omega_2 = L_3$.

4. Kretanje čestice po ravni

Primjenimo Džips -Apelove jednačine na ispitivanje kretanja čestice po površini. Kao koordinate čestice uzmimo r i q.

182. $r^2 = x^2 + y^2 , \quad dq = x dy - y dx ,$

r-je Lagranževa koordinata, a q kvazikoordinata. Imamo :

183. $r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y} , \quad \dot{q} = x\dot{y} - y\dot{x}$.

Slijedi:

184. $r^2 \dot{r}^2 + \dot{q}^2 = r^2 (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$.

Dalje,

185. $r\ddot{r} + \dot{r}^2 = x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2$.

Uzevši u obzir 184. dobijamo:

186. $x\ddot{x} + y\ddot{y} = r\ddot{r} - \frac{\dot{q}^2}{r^2}$.

S druge strane:

187. $x\ddot{y} - y\ddot{x} = \ddot{q}$.

Tako iz 186. i 187. slijedi da je:

188. $r^2(\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) = \ddot{q}^2 + (r\ddot{r} - \dot{q}^2/r^2)^2$.

Na taj način konačno dobijamo:

189. $G = \frac{1}{2} m (\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2) = \frac{1}{2} m \left\{ \left(\ddot{r} - \frac{\dot{q}^2}{r^3}\right)^2 + \ddot{q}^2/r^2 \right\}$.

Ukoliko članovi ne zavise od ubrzanja, možemo ih izostaviti, i umjesto 189. napisati:

190. $G = \frac{1}{2} m \left(\ddot{r}^2 - \frac{2}{r^3} \dot{q}^2 \cdot \ddot{r} + \frac{1}{2} \ddot{q}^2\right)$.

Izraz za G možemo izvesti i neposredno, ako zapazimo da je radijalna komponenta jednaka:

191. $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \ddot{r} - \dot{q}^2/r^3$,

i kružna komponenta jednaka $\ddot{q}/r$.

Ako radijalnu i tangencijalnu komponentu sile označimo na odgovarajući način sa R i S , onda će rad izvršen na virtuelnim pomjeranjima biti jednak

192. $R\delta r + \frac{S}{r}\delta q$,

i Džips-Apelove jednačine dobijaju oblik :

193. $m(\ddot{r} - \frac{\dot{q}^2}{r^3}) = R$, $m\ddot{q} = rS$.

U zadatku o kretanju po centralnim orbitama sila polja je radijalna (S = o)i mi imamo prvi integral $\dot{q}$ jednak α .Prva jednačina dobija sada oblik :

194. $m(\ddot{r} - \frac{\alpha^2}{r^3}) = R$,

i ako je $R = -m\frac{dv}{dr}$ to odmah dobijamo prvi integral :

195. $\dot{r}^2 + 2v + \frac{\alpha^2}{r^2} = 2h$.

L I T E R A T U R A:

1. A. Bilimović : Racionalna mehanika II
   (Mehanika sistema)

2. Парс : Аналитическая механика

3. Лурье : Аналитическая механика

4. Appel : Racionalna mehanika

5. Dj. Mušički : Uvod u teorijsku mehaniku I

S A D R Ž A J: