DIMITRIJEVIĆ SVETOMIR

DIPLOMSKI RAD

TEMA: ELEMENTI TEORIJE RASEJANJA NA ATOMIMA I MOLEKULIMA

NOVI SAD - 1972

Ovaj rad je ostvaren pod rukovodstvom profesora Radojević Dr. Vojislava.

Zahvaljujem se profesoru Radojević Dr. Vojislavu na savetima i podršci pri izradi ovog rada.

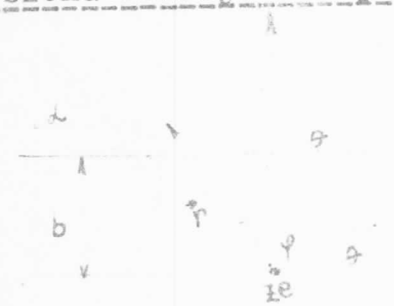
O P Š T A   T E O R I J A   R A S E J A N J A

Uvod

klasičnoj mehanici sudari dveju čestica se upotpunosti određuju pomoću jihovih brzina" i "nišanskog rastojanja",tj.rastojanja na kome bi se imoišli kad nebi bilo interakcije.U kvantnoj mehanici se menja samo ostavljanje pitanja,jer pri kretanju sa određenim brzinama gubi smisao rajektorija,a sa njom i "nišansko rastojanje".Cilj kvantnomehaničke teo- ije rasejanja sastoji se u izučavanju verovatnoće skretanja(rasejanja) estica za ovaj ili onaj ugao.

Rutherfordovi eksperimenti- Još je Rutherford započeo ispitivati atome rasejavajući na njima α čestice i takva su se ispitivanja pokazala kasnije kao osnovna za razumevanje interakcije između čestica.Rutherfordovi ekspe- rimenti se ukratko sastoje u sledećem: paralelan snop α delića koje daje radioktivan izvor upravljen je na tanak listić metala.U nizu eksperimenata Rutherford je koristio listiće od različitih metala:platine,srebra,zlata, bakra i dr.Na putu α čestica postavljen je fluoroscentni zaklon,pa udarom α čestica o zaklon javljaju se fluoroscentni impulsi koje posmatramo mikroskopom.Da bi bilo izbegnuto dopunsko rasejanje α čestica na moleku- lima vazduha,ceo sistem je smešten u vakumsku komoru.Rutherfordovi ekspe- rimenti su pokazali da se većina α čestica rasejava pod vrlo malim uglo- vima,u proseku dva- tri stepena(2-3).Na osnovu ovih eksperimenata trebalo je pretpostaviti da u atomima metalnog listića postoje centri rasejavanja koji bi morali da budu izvori jakog električnog polja u atomu.Ti centri bi trebalo da budu pozitivno naelektrisane čestice koje raspolažu velikom masom skoncentrisanom u vrlo maloj zapremini.Iz ove hipoteze proizašao je Rutherfordov model atoma,tz. n u k l e a r n i   m o d e l   a t o m a.

Klasična teorija rasejanja- Na osnovu gore izloženog,Rutherford je razvio klasičnu teoriju rasejanja α čestica.



U tački O nalazi se jezgro naelektrisanja (Ze).Masa jezgra je mnogo veća od mase α čestice,pa možemo uzeti da pri međusobnom dejstvu jezgra i α čestica jezgro ostaje nepokretno.Sila koja dejstvuje između je- zgra i α čestice(Kulonova sila)obrnuto je proporcionalna kvadratu njihovog rastojanja.Kada α čestica ne bi inte- ragovala sa jezgrom ona bi prošla na rastojanju b od jezgra.Ali na osnovu gore navedene dve pretpostavke,a po zakonima klasične mehanike, α česti- ca će opisati u odnosu na jezgro hiperbolu.

ada ćemo prema Rutherfordu naći trajektoriju α čestice koja se kreće polju beskonačno teškog tačkastog jezgra naelektrisanja(Ze).

Proučavanje vršimo u koordinatnom sistemu, koji se poklapa sa jezgrom. Pretpostavljajući da je polje jezgra centralno simetrično, za određivanje trajektorije α čestice, osim zakona održanja energije, koristićemo još i zakon održanja momenta količine kretanja. Dakle:

$$E = \text{const.} \quad i \quad \vec{L} = m_\alpha(\vec{r} \times \vec{v}) = \text{const.} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

$$E = T + V(r) = \frac{1}{2} m_\alpha v^2 + V(r) \quad ; \quad v^2 = v_\perp^2 + v_\parallel^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2$$

$$E = \frac{1}{2} m_\alpha (\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{2Ze^2}{r} = \text{const.} \qquad V(r) = \frac{2Ze^2}{r}$$

$$L_z = m_\alpha(\vec{r} \times \vec{v})_z = m_\alpha r^2 \dot{\varphi} = \text{const.}$$

očetna energija E_0 povezana je sa početnom brzinom V_0 relacijom:

$$E_0 = \frac{m_\alpha v_0^2}{2}$$

$$2) \dots E_0 = \frac{m_\alpha}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) + \frac{2Ze^2}{r} \quad ; \quad |m_\alpha r^2 \dot{\varphi}| = m_\alpha b v_0 \Rightarrow$$

$$|\dot{r}| = \left|\frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt}\right| = \left|\frac{dr}{d\varphi} \cdot \dot{\varphi}\right| = |v_0 b u'| \qquad \Rightarrow |\dot{\varphi}| = \frac{v_0 b}{r^2} = v_0 b u^2$$

$$u = \frac{1}{r} \; ; \quad u' = \frac{du}{d\varphi}$$

ve ovo uvrstimo u (2) pa dobijamo:

$$u'^2 + u^2 + \frac{4Ze^2}{m_\alpha v_0^2 b^2} u - \frac{1}{b^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

iferenciranjem jednačine (3) još jedanput po φ dobijamo:

$$u'' + u + \frac{2Ze^2}{m_\alpha v_0^2 b^2} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

ešavanjem gornje diferencijalne jednačine nalazimo da je:

$$u = A\cos\varphi + B\sin\varphi - \frac{2Ze^2}{m_\alpha v_0^2 b^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

onstante A i B određujemo iz početnih uslova:

$$\lim_{\varphi \to \pi} r = \lim_{\varphi \to \pi} \frac{1}{u} = \infty \quad i$$

$$\lim_{\varphi\to\pi} r\sin\varphi = \lim_{\varphi\to\pi}\frac{\sin\varphi}{u} = b$$

Stavljajući u(5) $\varphi=\pi$ i $u=0$ dobijamo:

$$A=-\frac{2Ze^2}{m_\alpha v_0^2 b^2}\ ;\quad B=\frac{1}{b}\quad \ldots\ldots (6)$$

pa definitivno dobijamo:

$$u=\frac{1}{b}\sin\varphi-\frac{2Ze^2}{m_\alpha v_0^2 b^2}(1+\cos\varphi)\quad \ldots\ldots (7)$$

Relacija(7) uspostavlja vezu između apsolutne vrednosti vektora polo-žaja $\vec r$ i polarnim uglom φ i prema tome prikazuje trajektoriju α čest-ice u polju jezgra. Ona pretstavlja jednačinu hiperbolične trajektori-je u polarnim koordinatama.
Uzimajući u obzir da je ugao rasejanja θ prema definiciji jednak uglu $\varphi_1(\varphi=\varphi_0=\pi)$ za koji dužina vektora položaja $\vec r$ postaje beskonačno velika $u=\frac{1}{r}=\frac{1}{\infty}=0$, to iz relacije (7) sledi da je:

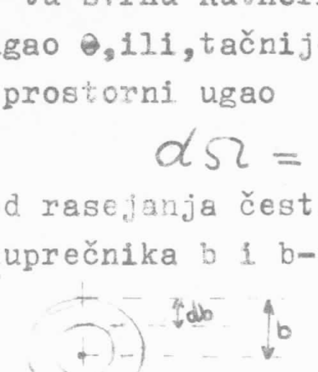
$$\frac{1}{b}\sin\varphi-\frac{2Ze^2}{m_\alpha v_0^2 b^2}(1+\cos\varphi)=0 \Rightarrow \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{m_\alpha b v_0^2}{2Ze^2}=\frac{bE_0}{Ze^2}$$

$$\frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi}=\frac{1+\cos\theta}{\sin\theta}=ctg\frac{\theta}{2}=\frac{m_\alpha b v_0^2}{2Ze^2}=\frac{bE_0}{Ze^2}\quad\ldots(8)$$

Ipak, zakon uzajamnog dejstva α čestice i jezgra preciznije je ustano-vljen na osnovu proučavanja efektivnog preseka rasejanja α-čestica na jezgrima. U tu svrhu Ruthefrord je našao relativan broj α čestica rase-janih za ugao θ, ili, tačnije rečeno, broj čestica koje posle rasejanja upadaju u prostorni ugao

$$d\Omega=2\pi\sin\theta\, d\theta\quad\ldots\ldots(9)$$

Da bi usled rasejanja čestica skrenula za ugao θ, ona mora uleteti u prsten poluprečnika b i b-db. Površina takvog prstena iznosi 2Π bdb.



Prema tome broj α čestica koje u jedinici vremena padaju na tu površinu, a zatim usled rasejanja upadnu u prostorni ugao iznosi,

$$dN=N\cdot 2\pi\rho\, d\rho\ ;\quad \rho=b$$

$$d\sigma=\frac{dN}{N}=2\pi\rho\, d\rho\quad\ldots\ldots(10)$$

$$ctg\frac{\theta}{2}=\frac{m_\alpha v_0^2\rho}{2Ze^2}\ /^2 \Rightarrow \rho^2=\left(\frac{2Ze^2}{m_\alpha v_0^2}\right)^2 ctg^2\frac{\theta}{2}\Rightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \rho\, d\rho = -\frac{1}{2}\left(\frac{2Ze^2}{m_\alpha v_0^2}\right)\frac{\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2}}{\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta \quad \ldots \quad (11)$$

Uvrštenjem(9) u (lo) dobijamo:

$$d\sigma = \left(\frac{Ze^2}{m_\alpha v_0^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}} = \left(\frac{Ze^2}{2E_0}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4\frac{\theta}{2}} \quad \ldots (12)$$

I

UDARNI PRESEK RASEJANJA

Uopšte, ako razmotrimo eksperiment rasejanja koji se sastoji u sledećem:

Snop monoenergetskih čestica poznatog intenziteta puštamo da pada na neku metu i da se na njoj rasejava na sve strane. Merenje koje vršimo sastoji se u određivanju intenziteta čestica, rasejanih pod različitim uglovima prema smeru upadnih čestica.

Veličina, kojom se naše merenje karakteriše, naziva se **u d a r n i m p r e s e k o m**, a definišemo ga ovako. Sa j ćemo označiti gustinu struje upadnih čestica. Pretpostavićemo da je ta struja dovoljno slaba, tako da možemo zanemariti interakciju (međudelovanje) upadnih čestica u snopu. Ako je tako, onda se upadne čestice rasejavaju nezavisno jedna od druge pa će broj čestica dN rasejanih u jedinici vremena u prostorni ugao biti proporcionalan gustini struje j. Zatim ćemo pretpostaviti da se rasejanje na jednom centru dešava nezavisno od prisutnosti ostalih centara, kao i da se svaka čestica rasejava samo jednom.

Sada kada su sve ove naše pretpostavke ispunjene možemo pisati,

$$dN = j\, n\, \sigma(\theta,\varphi)\, d\Omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

gde je n-broj (istovrsnih) centara rasejanja u meti, a $\sigma(\theta,\varphi)$ ima dimenziju površine i naziva se **d i f e r e n c i j a l n i, u d a r n i p r e s e k**. To je dakle broj čestica rasejanih u jedinici vremena po jednom centru rasejanja u jedinični prostorni ugao u smeru (θ,φ), kad je gustina struje upadnog snopa jednaka jedinici.

$$\sigma = \int \sigma(\theta,\varphi)\, d\Omega = \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi\, \sigma(\theta,\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Jednačina (2) nam pretstavlja **t o t a l n i u d a r n i p r e s e k**. Glavni zadatak teorije rasejanja sastoji se u izračunavanju diferencijalnog udarnog preseka iz određene pretpostavke o prirodi međudelovanja čestica u upadnom snopu i čestica u meti. U svim našim razmatranjima mi ćemo pretpostaviti da se ~~xxto~~ međudelovanje (interakcija) može opisati potencijalnom energijom, koja iščezava dovoljno brzo pri udaljavanju čestica i koja ulazi u Šredingerovu jednačinu.

Rasejanje čestice na fiksnom potencijalu.
(Potencijalno rasejanje)

Za početak, uzmimo da se radi o rasejanju čestica mase m na fiksnom potencijalu $V(x)$. Ovo bi odgovaralo slučaju rasejanja na centru sa beskonačno velikom masom, tako da se oscilovanje tog centra ne mora uzeti u obzir. Tada imamo da je Šredingerova jednačina za talasnu funkciju određene energije E oblika

$$\Delta\psi + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(r)\right)\psi = 0 \quad \ldots \ldots (3)$$

Nas će interesovati takva rešenja koja možemo upotrebiti za opisivanje procesa rasejanja. Usled rasejanja dolazi do deformacije upadnog talasa. Talasna funkcija ψ koja opisuje to rasejanje biće suma upadnog talasa i rasejanog talasa. Na vrlo velikoj udaljenosti od centra rasejanja, rasejani talas će se ponašati kao izlazni sferni talas $f(\vartheta\varphi)\frac{e^{ikr}}{r}$ sa amplitudom rasejanja $f(\vartheta,\varphi)$. Znači da se talasna funkcija u velikoj udaljenosti mora ponašati kao

$$(4) \ldots \quad \psi \underset{r\to\infty}{\simeq} e^{ikx} + f(\vartheta,\varphi)\frac{e^{ikr}}{r}$$

a ovo i jeste rešenje Šredingerove jednačine(3) za slučaj kada je $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}k^2$ i kada $V(r)$ isčezava u beskonačnosti(r)). Uvrštavanjem ovog izraza za energiju u Šredingerovu jednačinu, dobijamo:

$$(\Delta + k^2)\psi = \lambda\psi \; ; \; \lambda = \frac{2m}{\hbar^2}V \quad \ldots \ldots (5)$$

Rešenje ove jednačine, koje se u beskonačnosti ponaša kao u (4) zvaćemo stanjem rasejanja. Pretpostavimo da smo našli takvo rešenje. Izračunajmo struju rasejanih čestica u prostorni ugao $d\Omega$. Broj rasejanih čestica koje prolaze u jedinici vremena kroz površinu $r^2 d\Omega$ jednak je

$$dN = \frac{1}{r^2}\left|f(\vartheta,\varphi)\right|^2 j\, r^2 d\Omega \; ; \; j = v = \frac{\hbar k}{m}$$

gde je $\frac{1}{r^2}|f(\vartheta,\varphi)|^2$ broj rasejanih čestica u jedinici zapremine. Kad ovaj izraz uporedimo sa formulama

$$dN = j\, n\, \sigma(\vartheta\varphi)\, d\Omega \quad i \quad j = v = \frac{\hbar k}{m}$$

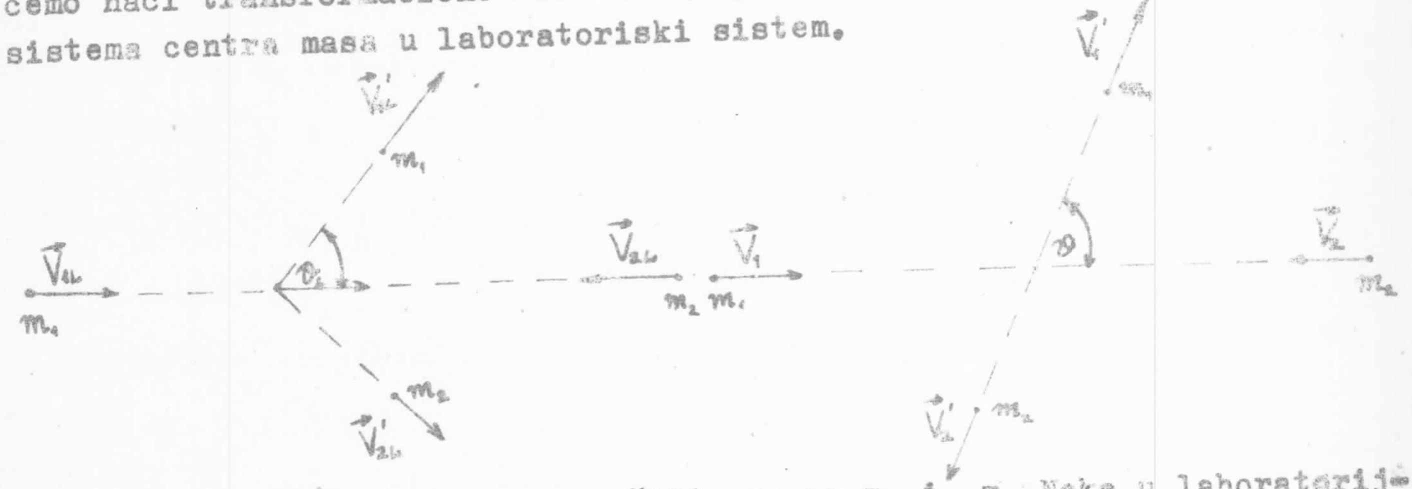
vidimo da je udarni presek jednak kvadratu iznosa a m p l i t u d e r a s e j a nj a, tj.

$$\sigma(\vartheta\varphi) = |f(\vartheta\varphi)|^2 \quad \ldots \ldots (6)$$

Prema tome, naš problem se svodi na izračunavanje amplitude rasejanog talasa.

Prelaz iz laboratoriskog sistema u sistem centra masa

U našem dosadašnjem razmatranju pretpostavili smo da je centar rasejanja toliko težak da se njegovo oscilqvanje može zanemariti.U slučaju da nije tako,onda pre no što bi smo otpočeli sa našim računom,morali bi preći u sistem centra mase .U tom slučaju opet bi smo naišli na diferencijalnu jednačinu(5) u kojoj bi masa m bila zamenjena redukovanom masom $\mu=\frac{m_1 \cdot m_2}{m_1+m_2}$,a k bi u tom slučaju pretstavljao talasni vektor u sistemu centra masa.Potencijalna energija bi u tom slučaju opet zavisila samo od relativnih koordinata,pa je prema tome problem rasejanja čestice na česticu identičan sa problemom rasejanja čestice na fiksnom centru.Dobivene formule važe u sistemu centra masa,tj.u sistemu u kome ukupni impuls isčezava.Pošto se eksperimentalno uvek radi u laboratoriskom sistemu u kome jedna čestica miruje,a druga se kreće,to ćemo naći transformacione formule za preračunavanje udarnog preseka iz sistema centra masa u laboratoriski sistem.



Mase jedne i druge čestice označili smo sa m_1 i m_2.Neka u laboratorijskom sistemu čestica mase m_2 pre sudara miruje,a čestica mase m_1 neka ima brzinu V_{1L}.Tada je brzina centra masa

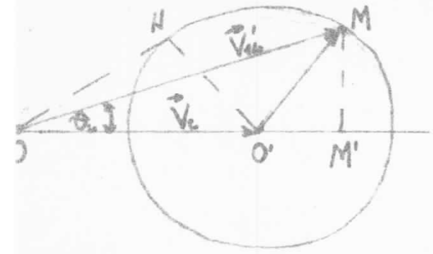
$$\vec{V}_c = \frac{m_1 \vec{V}_{1L}}{m_1+m_2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (7)$$

Posle sudara brzina prve čestice neka je $\vec{V}_{1L}'$ a ugao rasejanja ϑ_L . U sistemu centra masa odgovarajuće brzine pre i posle sudara označili smo sa $\vec{V}_1$,$\vec{V}_2$ i $\vec{V}_1'$,$\vec{V}_2'$ .S obzirom na to da je sudar elastičan,imamo da je $\vec{V}_1'=\vec{V}_1$ i $\vec{V}_2'=\vec{V}_2$ .Kako u ovom sistemu težište miruje to je Vc brzina kojom se centar masa kreće u laboratoriskom sistemu.Prema tome imamo da je

$$(8) \; . \; . \; . \; . \; \vec{V}_1 = \vec{V}_{1L} - \vec{V}_c = \frac{m_2 \vec{V}_{1L}}{m_1+m_2} \; ; \; \vec{V}_2 = -\vec{V}_c = -\frac{m_1 \vec{V}_{1L}}{m_1+m_2}$$

$$\vec{V}_{1L}' = \vec{V}_1' + \vec{V}_c$$

Da odredimo sada uglove skretanja u oba sistema.



ϑ_L -ugao skretanja u laboratoriskom sistemu.
ϑ -ugao skretanja u sistemu centra masa
Sa slike vidimo da je

$$tg\,\vartheta_L = \frac{MM'}{OM'} = \frac{MM'}{OO'+O'M'} \quad ; \; tj:$$

$$tg\,\vartheta_L = \frac{V_1'\sin\vartheta}{V_c + V_1'\cos\vartheta}$$

Kako je $\vec{V}_1' = \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{V}_{1L}$; $\vec{V}_c = \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{V}_{1L}$

to imamo da je $\frac{\vec{V}_c}{\vec{V}_1'} = \frac{m_1}{m_2}$ pa prethodni obrazac posle deobe broioca i imenioca sa $\vec{V}_1'$ možemo napisati um sledećem obliku:

$$tg\,\vartheta_L = \frac{\sin\vartheta}{\frac{m_1}{m_2} + \cos\vartheta} \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Ovim obrascem možemo za svaki ugao rasejanja u sistemu težišta izračunati odgovarajući ugao rasejanja u laboratoriskom sistemu.
Iz definicije (1)koja glasi $dN = j\,n\,\sigma(\vartheta,\varphi)\,d\Omega$ a koja vredi za svaki sistem lako možemo naći transformaciona svojstva udarnog preseka.

$$\sigma_L(\vartheta_L,\varphi_L)\,d\Omega_L = \sigma(\vartheta,\varphi)\,d\Omega$$

Na osnovu obrasca(9) lako nalazimo da je

$$d\Omega_L = \frac{1+\frac{m_1}{m_2}\cos\vartheta}{\left[1+2\frac{m_1}{m_2}\cos\vartheta+\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^2\right]^{3/2}}$$

Prema ovim formulama imamo da je

$$\sigma_L(\vartheta_L,\varphi_L) = \frac{1+2\alpha\cos\vartheta+\alpha^2}{|1+\alpha\cos\vartheta|}\,\sigma(\vartheta,\varphi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10) \qquad \alpha = \frac{m_1}{m_2}$$

Time smo dobili traženu transformacionu formulu za diferencijalni udarni presek.Pri izvođenju ove formule treba pamtiti da su gustina struje(j) kao i dN invarijante.Ako imamo ~~u~~ slučaju jednakih masa tada je na osnovu formule (9) $\vartheta_L = \frac{\vartheta}{2}$ pa je prema(lo)

$$\sigma_L(\vartheta_L,\varphi_L) = 4\sigma(2\vartheta_L,\varphi_L)\cos\vartheta_L \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

II

Određivanje preseka rasejanja metodom parcijalnih talasa

Sada ćemo rešiti problem elastičnog rasejanja pomoću metode parcijalnih talasa. Rezultat ove metode biće nam od velike koristi za uspešno rešavanje postavljenog problema. Poći ćemo od diferencijalne jednačine(5) koja glasi $(\Delta+\kappa^2)\psi = \lambda\psi$; $\lambda=\frac{2m}{\hbar^2}$; $\kappa^2=\frac{2mE}{\hbar^2}$

Predpostavićemo da je potencijal sferno simetričan, pa u tom slučaju odmah prelazimo na sferne koordinate. Gornju jednačinu ćemo napisati u nešto izmenjenom obliku

$$\Delta\psi+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-V(r)\right)\psi=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

Ovo je poznati oblik Šredingerove jednačine za kretanje čestica u polju sa centralnom simetrijom.

$$\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (15)$$

Rešenje jednačine (15) tražimo u obliku

$$\psi=R_{l(r)}Y_{lm}(\theta,\varphi)$$

Kad ovo rešenje uvrstimo u gornju jednačinu onda za radijalnu funkciju R(r) dobijamo sledeću jednačinu

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}R+\frac{2m}{\hbar^2}\left(E-V(r)\right)R_l=0 \qquad \text{ili}$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_l}{dr}\right)+\left[\kappa^2-\frac{2m}{\hbar^2}V(r)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R_l=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (16)$$

Za nas su interasantna samo regularna rešenja jednačine(16). To su rešenja koja možemo normirati na δ-funkciju i koja i u samom koordinatnom početku zadovoljavaju Šredingerovu jednačinu.

Za uglovni deo funkcije dobijamo sledeću jednačinu

$$\Lambda Y+\lambda Y=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

$$\Lambda=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0 \ ; \ \lambda=l(l+1)$$

Rešenje ove jednačine tražimo u obliku

$$Y(\vartheta,\varphi) = \Theta(\vartheta)\,\Phi(\varphi)$$

$$\Phi(\varphi) = e^{\pm im\varphi} \;;\; \Theta(\vartheta) = \mathrm{const}\, P_l(\cos\vartheta)$$

Prema tome, najuopštenije rešenje Šredingerove jednačine za određenu energiju E (za određeno k), dobijamo kao linearnu kombinaciju funkcija oblika

$$R_l(r)\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi) \;;\; m = 0,\pm 1,\pm\cdots\pm l \;;\; l = 0,1,2,\ldots$$

Ali, problem koji mi razmatramo je rotaciono simetričan oko smera upadnih čestica, pa ako taj smer uzmemo za polarnu osu onda talasna funkcija ne može zavisiti od promenljive φ. Prema tome, u razvoju talasne funkcije po sfernim funkcijama pojaviće se samo članovi koji ne zavise od φ a to su članovi $Y(\vartheta,\varphi) = \mathrm{const}\cdot P_l(\cos\vartheta)$ gde su $P_l(\cos\vartheta)$ Ležandrovi polinomi. Prema tome rešenje Šredingerove jednačine za centralno simetrični potencijal je

$$\Psi(r,\vartheta) = N_l\, R_l(r)\, P_l(\cos\vartheta) \quad \ldots\ldots \quad (18)$$

Sada još moramo izabrati normiranje radijalne funkcije. Ako pogledamo diferencijalnu jednačinu (16) videćemo da za $r \to \infty$ ima asimptotsku formu

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d^2R_l(r)}{dr^2}\right) + \kappa^2 = 0 \;;\; \kappa^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

Odavde dobijamo najuopštenije rešenje

$$\frac{A}{r}\cos\kappa r + \frac{B}{r}\sin\kappa r$$

a to možemo pisati i u obliku

$$\frac{C}{r}\sin\left(\kappa r - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)$$

Ovde je δ_l -proizvoljna faza. Čvrstu fazu $\frac{l\pi}{2}$ smo uveli jer će nam ona biti kasnije potrebna. Ovim smo našli i asimptotsko ponašanje najuopštenije radijalne funkcije. Radijalnu funkciju ćemo normirati tako da zahtevamo da joj je asimptotska forma

$$R_l(r) \approx \frac{e^{i\delta_l}\sin\left(\kappa r - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)}{\kappa r} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

a to je stojeći talas.

Ako sada uvrstimo (19) u (18) dobijamo asimptotsko ponašanje funkcije dakle, imamo

$$\Psi(r,\vartheta) \approx N_l\, \frac{e^{i\delta_l}\sin\left(\kappa r - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right)}{\kappa r}\cdot P_l(\cos\vartheta) \quad \ldots\ldots \quad (20)$$

ao što vidimo, sada treba da odredimo konstante N_ℓ. Da bi to uradili oramo prethodno znati kako izgleda razvoj ravnog talasa po Ležandrovim olinomima. Ravni talas zadovoljava Šredingerovu jednačinu za $V(r)=0$ pa a njega imamo sličan razvoj kao i za funkciju ψ. Jedina razlika je u ome što je radijalna funkcija ovde sferna Besselova funkcija oblika

$$j_\ell(kr) = (-1)^\ell \left(\frac{1}{kr} - \frac{d}{d(kr)} \right)^\ell \left(\frac{\sin kr}{kr} \right) \quad i\ell$$

ko stavimo da je $kr = \rho$ možemo pisati

$$j_\ell(\rho) = (-1)^\ell \left(\frac{1}{\rho} - \frac{d}{d\rho} \right)^\ell \left(\frac{\sin \rho}{\rho} \right) \quad \ldots\ldots\ldots (21)$$

a asimptotskim ponašanjem

$$j_\ell(\rho) \simeq \frac{\sin\left(\rho - \frac{\ell\pi}{2}\right)}{\rho} \quad \ldots\ldots\ldots (22)$$

'rema tome ravni talas razvijen po Ležandrovim polinomima izgleda

$$e^{i\vec{k}x} = \sum_{\ell=0}^{\infty} C_\ell j_\ell(\rho) P_\ell(\cos\theta) \quad \ldots\ldots\ldots (23)$$

$$C_\ell = (2\ell+1) i^\ell \quad ; \quad \rho = kr$$

$$e^{i\vec{k}x} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell j_\ell(\rho) P_\ell(\cos\theta) \quad \ldots\ldots\ldots (23^a)$$

$$e^{i\vec{k}x} = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell P_\ell(\cos\theta) \frac{\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)}{kr}$$

J ovoj poslednjoj jednačini izrazićemo sinuse preko eksponencijalnih 'unkcija

$$e^{i\vec{k}x} \approx \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell P_\ell(\cos\theta) \frac{1}{2kr} \left\{ \exp\left[-i\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)\right] - \right.$$
$$\left. - \exp\left[i\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)\right] \right\} \quad \ldots\ldots (23^b)$$

'ratimo se sada na našu jednačinu(2o)

$$\psi \approx C_\ell \frac{e^{i\delta_\ell} \sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2} + \delta_\ell\right)}{kr} P_\ell(\cos\theta) = \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1) i^\ell \frac{\sin\left(kr - \frac{\ell\pi}{2}\right)}{kr} P_\ell(\cos\theta) + f(\theta) \frac{e^{ikr}}{r}$$

S obzirom na ortogonalnost Ležandronih polinoma

$$\int_0^{\pi} P_l(\cos\vartheta) P_{l'}(\cos\vartheta) \sin\vartheta \, d\vartheta = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}$$

možemo izjednačiti koeficijente uz P(cosθ) pa dobijamo

$$A_l = C_l = (2l+1) i^l$$

i zatim uzimajući da je $i^l = e^{\frac{il\pi}{2}}$, amplituda rasejanja će biti

$$f(\vartheta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\left(e^{2i\delta_l} - 1\right) P_l(\cos\vartheta) =$$

$$= \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin\delta_l \, P_l(\cos\vartheta) \quad \ldots \ldots \quad (23)$$

U jednačini (6) imali smo da je $\sigma(\theta) = |f(\vartheta)|^2$,pa analogno tome možemo pisati

$$\sigma(\vartheta) = \frac{1}{k^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) e^{i\delta_l} \sin\delta_l \, P_l(\cos\vartheta) \right|^2 \quad \ldots \ldots \quad (24)$$

Ovo je diferencijalni udarni presek.Totalni udarni presek dobijamo integracijom po svim uglovima rasejanja kao što smo to pokazali u jednačini (2).U diferencijalnom udarnom preseku imamo interferenciju pojedinih momenata l.Zbog ortogonalnosti Ležandrovih polinoma,zaključujemo da u totalnom udarnom preseku nemamo interferenciju ~~xxxxx~~ različitih momenata impulsa.To nam u mnogome olakšava da integralimo gornji izraz.Nakon integralenja dobijamo osnovnu formulu za totalni udarni presek

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2\delta_l \quad \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

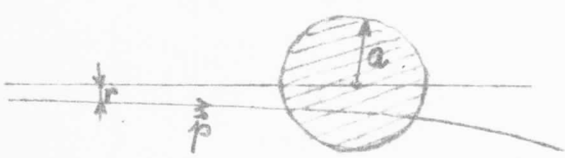
Ako sa σ_l označimo parcijalni udarni presek koji nastaje od rasejanja komponente sa momentom impulsa l ,onda možemo pisati da je

$$\sigma = \sum_{l=0}^{\infty} \sigma_l \; ; \quad \sigma_l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \sin^2\delta_l \leq \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \quad \ldots \quad (26)$$

Iz dosadašnjih izraza za udarne preseke i za amplitudu rasejanja vidimo karakterizaciju rasejanja pomoću faznih pomaka δ_l za svaki parcijalni talas.Ti fazni pomaci zavise od potencijala i u principu možemo ih naći samo tako da rešimo Šredingerovu jednačinu(16) i da onda potražimo asimptotsko ponašanje tog rešenja.Time se problem rešava samo u principu,a konkretni slučajevi zahtevaju mučan posao oko numeričkog odredivanja faznih pomaka. Prema tome, vidimo, da će ceo ovaj naš metod biti koristan samo ako se pokaže, da je u izvesnim primenama dovoljno poznavati fazne pomake δ_l samo za nekoliko vrednosti momenta impulsa.

Diskusija faznih pomaka

Videli smo da udarni presek možemo izraziti preko faznih pomaka δ_l kojih ima beskonačno mnogo, jer moment impulsa l može imati vrednosti l=0,1,2,... Zato, pri rešavanju problema moramo najpre odrediti broj potrebnih faznih pomaka. To ćemo učiniti na osnovu poluklasičnih razmatranja.



Ovde je dato rasejanje čestice impulsa $\vec{p}$ na potencijalu dosega a. Neka potencijal deluje samo unutar područja radiusa a. Klasični moment impulsa čestice je M=pr. Udaljenost r je najmanja udaljenost između čestice i centra rasejanja i to za slučaj kada potencijal opada sa udaljenošću. Sa slike vidimo da će do rasejanja doći samo kada je $r < a$, a to znači da se rasejavaju samo čestice sa momentom impulsa $M < pa$.

$$M<pa\ ;\ M=\sqrt{l(l+1)}\,\hbar \approx l\hbar \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (27)$$

Kad ove kvantne rezultate uvrstimo u nejednačinu (27) dobijamo

$$l\hbar \leq \hbar k a \Rightarrow l \leq ka \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (28)$$

Kao što vidimo, ne moramo računati fazne pomake δ_l za $l > ka$. Prema tome merodavna veličina je ka, a ona raste sa povećanjem energije i sa dosegom potencijala. Kod niskih energija i potencijala kratkog dosega, kao što su to recimo nuklearni potencijali, biće nam dovoljno da uzmemo svega nekoliko prvih faznih pomaka. Ako bi smo imali slučaj veoma niskih energija, tako da je $ka \ll 1$, onda bi smo mogli da se ograničimo samo na prvu fazu δ_0. To bi dakle bio ekstremni slučaj. Prema tome, diferencijalni udarni presek (24)

$$\sigma(\vartheta)=\frac{1}{k^2}\left|\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)e^{i\delta_l}P_l(\cos\vartheta)\right|^2$$

biće izotropan. To znači da rasejanje neće zavisiti od ugla pa možemo pisati

$$\sigma(\vartheta)=\frac{1}{k^2}\sin^2\delta_0\ ;\ \sigma=\frac{4\pi}{k^2}\sin^2\delta_0 \quad . \ . \ . \ . \ . \ (29)$$

Rasejanje talasa sa momentom l=o naziva se S-rasejanje,sa l=1 P-rasejanje itd. Iz izraza (19) se vidi da fazni pomaci nisu jednoznačno odredeni iz asimptotskog ponašanja,nego samo do na $\pm 2n\pi$. No,kako fazni pomaki u amplitudu ulazi samo preko faznog faktora $e^{2i\delta_l}$ to nejednoznačnost nema nikakvih fizičkih posledica,jer za amplitudu rasejanja fazni pomaci koji se razlikuju za $\pm n\pi$ su ekvivalentni. Odavde proizilazi da vrednosti faznih pomaka možemo ograničiti na jedan interval dužine π. Da bi u tom slučaju $\hat{\imath}$ bila kontinuirana funkcija energije ,zahtevamo da je

$$\lim_{k\to\infty} \delta_l(k) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

Ovaj uslov je uvek ispunjen jer što je energija viša to je uticaj potencijala na fazni pomak manji. Ako je energija konačna,onda uticaj potencijala na fazni pomak je takode konačan. Privlačni potencijal će nastojati da uvuče talasnu funkciju u područje potencijala. Odbojni potencijal će pak težiti da istisne talasnu funkciju s područja potencijala. U prvom slučaju dolazi do pozitivnog faznog pomaka,a u drugom slučaju do negativnog faznog pomaka.

III

Presek rasejanja kod niskih energija. Teorija efektivnog dosega.

Pošto se radi o niskim energijama i o potencijalu sa malim dosegom, to se slobodno možemo ograničiti na rasejanje talasa sa orbitnim momentom l=o. Najpre uvodimo novu radijalnu funkciju za moment l=o

$$\chi_{k(r)} = \frac{e^{-i\delta_o(k)}}{\sin\delta_{(k)}}\, kr\, R_o(r) \qquad (31)$$

Ova funkcija zadovoljava sledeću diferencijalnu jednačinu

$$\frac{d^2\chi_{k(r)}}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V_{(r)}\right)\chi_{k(r)} = 0 \qquad (32)$$

Regularnost funkcije R(r) u koordinatnom početku zahteva da X(r) tamo iščezava, dakle

$$\chi_{k(0)} = 0 \qquad (33)$$

Asimptotski uslov normiranja (19) vodi nas na asimptotsko ponašanje funkcije $\chi_{k(r)}$

$$\chi_{k(r)} \approx ctg\,\delta_{o(k)} \sin kr + \cos kr \qquad (34)$$

Formule (33) i (34) pretstavljaju nam granične uslove uz jednačinu (32) i njime je rešenje jednačine jednoznačno odredeno. Ako jednačinu (32) pomnožimo sa $\chi_{k'(r)}$ i isti takav izraz oduzmemo od te jednačine, ali tako da su k i k' međusobno zamenili mesta, onda dobijamo sledeću relaciju

$$\chi_{k'(r)}\frac{d^2}{dr^2}\chi_{k(r)} - \chi_{k(r)}\frac{d^2}{dr^2}\chi_{k'(r)} = (k'^2 - k^2)\chi_{k'(r)}\chi_{k(r)}$$

$$= \frac{d}{dr}\left[\chi_{k'(r)}\frac{d}{dr}\chi_{k(r)} - \chi_{k(r)}\frac{d}{dr}\chi_{k'(r)}\right] = (k'^2 - k^2)\chi_{k'(r)}\chi_{k(r)} \qquad (35)$$

Uvodimo sada funkciju $\varphi_{k(r)}$ koja zadovoljava diferencijalnu jednačinu (32) za V(r)=o (r≫ a)

$$\frac{d^2\varphi_{k(r)}}{dr^2} + \frac{2mE}{\hbar^2}\varphi_{k(r)} = 0 \qquad (36)$$

Ta funkcija ima isto asimptotsko ponašanje kao i funkcija $\chi_{k(r)}$ tj.

$$\varphi_{k(r)} \approx ctg\,\delta_{o(k)} \sin kr + \cos kr \qquad (37)$$

Analognim postupkom kao što je prethodni dobijamo

$$\frac{d}{dr}\left[\varphi_{k'(r)}\frac{d}{dr}\varphi_{k(r)}-\varphi_{k(r)}\frac{d}{dr}\varphi_{k'(r)}\right]=\left(k'^2-k^2\right)\varphi_{k'(r)}\varphi_{k(r)} \quad . \quad . \quad . \quad (38)$$

ko izjednačimo izraze (35) i (38) pa dobiveni izraz integralimo u granicama od r=o do r=R dobijamo

$$\left|\left[\chi_{k'(r)}\frac{d}{dr}\chi_{k(r)}-\chi_{k(r)}\frac{d}{dr}\chi_{k'(r)}\right]-\left[\varphi_{k'(r)}\frac{d}{dr}\varphi_{k(r)}-\varphi_{k(r)}\frac{d}{dr}\varphi_{k'(r)}\right]\right|_{r=o}^{r=R}=$$

$$=\left(k^2-k'^2\right)\int_{r=o}^{r=R}\left[\varphi_{k'(r)}\varphi_{k(r)}-\chi_{k'(r)}\chi_{k(r)}\right]dr$$

Leva strana ove jednakosti isčezava za r=R, jer su $\chi_{k(r)}$ i $\varphi_{k(r)}$ asimptotski iste funkcije. Ako uzmemo u obzir još i to da $\chi_{k(r)}$ isčezava u koordinatnom početku $(\chi_{k(o)}=o)$, onda možemo dalje pisati

$$\left[\varphi_{k'(r)}\frac{d}{dr}\varphi_{k(r)}-\varphi_{k(r)}\frac{d}{dr}\varphi_{k'(r)}\right]_{r=o}^{r=R=\infty}=\left(k^2-k'^2\right)\int_{o}^{\infty}\left[\varphi_{k'(r)}\varphi_{k(r)}-\chi_{k'(r)}\chi_{k(r)}\right]dr \quad . \quad (39)$$

Uvrštenjem izraza (37) u levu stranu poslednje jednakosti dobijamo

$$k\,ctg\,\delta_{o(k)}-k'\,ctg\,\delta_{o(k')}=\left(k^2-k'^2\right)\int_{o}^{\infty}\left[\varphi_{k'(r)}\varphi_{k(r)}-\chi_{k'(r)}\chi_{k(r)}\right]dr \quad . \quad . \quad . \quad (40)$$

Pošto nas zanima rasejanje kod niskih energija, stavimo da $k\to o$ i predpostavimo da je

$$k\,ctg\,\delta_{o(k)}=-\frac{1}{a} \quad za \quad k=o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (41)$$

konačna veličina. Izraz (4o) sada možemo pisati u sledećem obliku

$$k\,ctg\,\delta_{o(k)}=-\frac{1}{a}+k^2\int_{o}^{\infty}\left[\varphi_{o(r)}\varphi_{k(r)}-\chi_{o(r)}\chi_{k(r)}\right]dr \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (42)$$

Formula(42) je osnovna formula iz koje lako dobijamo razvoj po energiji u okolini E=o. Za koeficijente razvoja funkcije $k\,ctg\,\delta_{o(k)}$ postoje uobičajene oznake

$$k\,ctg\,\delta_{o(k)}=-\frac{1}{a}+\frac{1}{2}r_o k^2-P r_o^3 k^4+ \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (43)$$

U ovom izrazu a ima dimenziju dužine i naziva se dužinom rasejanja, a r se naziva efektivnim dosegom, jer je kao što ćemo kasnije videti reda veličine dosega potencijala. Kad izraz(43) uvrstimo u (37) i razvijemo sin kr i cos kr, dobijamo razvoj za $\varphi_{k(r)}$

$$\varphi_{\kappa(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{n(r)} \kappa^{2n} \quad \text{gde je}$$

$$\varphi_{0(r)} = 1 - \frac{r}{a} \; ; \quad \varphi_{1(r)} = \frac{1}{2} r(r_0 - r) + \frac{1}{6a} r^3 \qquad (44)$$

Analogno gornjem izrazu za $\varphi_{\kappa(r)}$, možemo pisati odgovarajući razvoj za $\chi_{\kappa(r)}$

$$\chi_{\kappa(r)} = \sum_{n=0}^{\infty} \chi_{n(r)} \kappa^{2n}$$

$$\chi_{n(0)} = 0 \; ; \quad \chi_{1(r)} \simeq \varphi_{n(r)}$$

Ako uvrstimo ovako dobivene redove za $\varphi_{n(r)}$ i $\chi_{\kappa(r)}$ u (42), onda možemo odgovarajuće koeficijente u (43) izraziti pomoću $\varphi_{n(r)}$ i $\chi_{n(r)}$. Na taj način dobijamo sledeći izraz za efektivni doseg

$$r_0 = 2\int_0^{\infty} \left[\varphi_{0(r)}^2 - \chi_{0(r)}^2 \right] dr = 2\int_0^{\infty} \left[\left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 - \chi_{0(r)}^2 \right] dr \qquad (45)$$

U ovom izrazu za efektivni doseg podintegralni izraz se bitno razlikuje od nule samo u području potencijala. Zbog toga efektivni doseg r_0 je reda veličine dosega potencijala. Koeficijent P je

$$P = -\frac{1}{r_0^3} \int_0^{\infty} \left[\varphi_{0(r)} \varphi_{1(r)} - \chi_{0(r)} \chi_{1(r)} \right] dr$$

Za potencijale sa kratkim i dobro definisanim dosegom, koeficijenti P, kao i viši koeficijenti su mali, pa za takve potencijale i niske energije možemo koristiti aproksimativnu formulu

$$\kappa \operatorname{ctg} \delta_{0(\kappa)} = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0 \kappa^2 \qquad (47)$$

Koeficijente P, kao i više koeficijente smo zanemarili.

Na osnovu izloženog zaključujemo da iz eksperimenata rasejanja kod niskih energija dobijamo samo dve konstante, a i r_0, a iz njih se ne može rekon- -struisati sam potencijal, jer vrlo različiti potencijali kratkog dosega mogu voditi na iste konstante a i r_0. Prema tome zaključak je sledeći: rasejanje kod niskih energija ne zavisi od oblika potencijala. Detaljni oblik potencijala dolazi do izražaja tek pri višim energijama.

Totalni udarni presek za rasejanje kod niskih energija dobijamo iz formu- -le (29) i (47) i to na sledeći način

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{\kappa^2} \sin^2 \delta_l \; ; \quad \sigma = \frac{1}{\kappa^2} \int \sin^2 \delta_l \, d\Omega$$

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2}\,\frac{1}{1+ctg^2\delta_0} = \frac{4\pi}{k^2+\left(-\frac{1}{a}+\frac{1}{2}r_0 k^2\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (48)$$

Za iščezavanjuće energije,tj.ako k→o imamo

$$\lim_{k\to 0}\sigma = 4\pi a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (49)$$

Iz (49) možemo naći vrednost za doseg potencijala a ,ako poznajemo udarni presek za k→o.Kada je doseg potencijala a vrlo velik,onda za totalni udarni presek imamo približnu formulu

$$\sigma \approx \frac{4\pi}{k^2+\left(\frac{1}{a}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (50)$$

Napominjem,da se čitavo ovo razmatranje može poopštiti i na orbitne momente l>o.U tom slučaju kao rezultat dobijamo razvoj za veličinu $k^{2l+1}\,ctg\,\delta_{l(k)}$ u obliku sličnom razvoju (43).

Rasejanje na Kulonovom polju

Naša dosadašnja razmatranja nisu direktno primenljiva na problem rasejanja za Kulonovo polje. Ovo je zbog toga što se rešenje Šredingerove jednačine asimptotski ne ponaša kao u formuli (4) ili (13). To je posledica suviše sporog opadanja Kulonovog polja s udaljenošću ($\sim \frac{1}{r}$). Potencijalna energija Kulonovog polja je $V(r) = \frac{e_1 \cdot e_2}{r}$. Posmatramo dakle rasejanje čestice naelektrisanja e_1 na električnom potencijalu koji proizvodi naelektrisanje e_2. Šredingerova jednačina glasi

$$\Delta \psi_c + \frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V_{c(r)}\right)\psi_c = 0 \quad ; \quad \kappa^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \; ; \; m\frac{e_1 e_2}{\hbar^2} = \gamma$$

$$\Delta \psi_c + \left[\kappa^2 - \frac{2\gamma}{r}\right]\psi_c = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

Rešenje tražimo u obliku

$$\psi_c(r,\theta,\varphi) = R^c_{l(r)} \cdot Y_{lm(\theta,\varphi)}$$

Kad ovo rešenje uvrstimo u jednačinu (51) nakon izvesnih operacija dobijamo radijalnu jednačinu koja glasi

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d^2R_l}{dR^2}\right) + \left[\kappa^2 - \frac{2m}{\hbar^2}\frac{e_1 \cdot e_2}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R_l = 0 \; , \; tj.$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d^2R_l}{dr^2}\right) + \left[\kappa^2 - \frac{2\gamma}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right]R_l = 0 \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

Asimptotski oblik rešenja radijalne jednačine, odnosno asimptotski oblik radijalne funkcije glasi

$$R^l_{l(r)} \approx \frac{e^{i\eta_l} \sin\left(\kappa r - \gamma \ln 2\kappa r - \frac{l\pi}{2} + \eta_l\right)}{\kappa r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

Gde vidimo kako Kulonovo polje deformiše talasnu funkciju i u beskonačnoj udaljenosti, jer fazni pomak zavisi od udaljenosti (logaritamski). Takav fazni pomak je neupotrebljiv, pa zato kao fazni pomak kod Kulonovog rasejanja definišemo veličinom η_l. Odmah da napomenemo da η_l ima istu ulogu kao δ_l u normalnim slučajevima.

$$\psi_c = \sum_{l=0}^{\infty} C_l R^c_{l(r)} P_{l(\cos\theta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

$$C_l = (2l+1)\beta_l^c;\quad \psi_l^c = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l R_{l(r)} P_{l(\cos\theta)}$$

ko u ovu formulu uvrstimo asimptotski izraz(53) za $R_l^c(r)$,dobijemo

$$\psi_l = (2l+1) i^l \frac{e^{i\eta_l} \sin(kr - \gamma \ln 2kr - \frac{l\pi}{2} + \eta_l)}{kr} P_{l(\cos\theta)} + \\ + f_{l(\theta)} \frac{e^{i(kr - \gamma \ln 2kr)}}{r} \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

rema tome,vidimo da prvi član ovog izraza odgovara deformisanom ravnom alasu,a iz drugog člana dobijamo razvoj amplitude rasejanja po Ležandrovim polimomima.

$$f_{l(\theta)} = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{2i\eta_l} - 1) P_{l(\cos\theta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

ormule(54) i (56) istog su oblika kao i formule (18) i (23) za normalne lučajeve,tj.kada potencijal opada brže od Kulonovog za velike udaljenosti.Zato veličine η_l spunim pravom nazivamo faznim pomacima.

asejanje na dva potencijala

ada ćemo razmotriti problem rasejanja na potencijalu koji je jednak umi Kulonovog i nekog sfenno simetričnog potencijala kratkog dosega.

$$V_{(r)} = V_{(r)}^c + V_{(r)}^n$$

vakav problem je od velike praktične vrednosti,jer on odgovara rasejanju naelektrisanih čestica,između kojih pored Kulonovih sila deluju i nuklearne sile kratkog dosega.$V^n(r)$ isčezava za $r > r_o$.Otstupanje od Kulonovog polja imamo samo unutar područja $r < r_o$.Prema prethodnm izlaganju rasejanju na Kulonovom polju,možemo zaključiti da se efekat dodatnog otencijala svodi na pojavu dodatne faze δ_l .Možemo pisati da je rešenje radijalne jednačine jednako

$$R_{l(r)} = e^{i\delta_l} \left[\cos\delta_l R_{l(r)} + \sin\delta_l \gamma_{l(r)}^c \right] \quad za \quad r > r_o \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

gde je $R_l^c(r)$ regularno rešenje,a γ_l^c singularno rešenje s asimptotskim ponašanjima:

$$R^{c}_{l(r)} \approx \frac{e^{i\eta_l} \sin(\varkappa r - \gamma \ln 2\varkappa r - \frac{l\pi}{2} + \eta_l}{\varkappa r}$$

$$Y^{c}_{l(r)} \approx \frac{e^{i\eta_l} \cos(\varkappa r - \gamma \ln 2\varkappa r - \frac{l\pi}{2} + \eta_l}{\varkappa r} \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

$$R^{c}_{l(r)} \approx \frac{e^{i(\eta_l + \delta_l)} \sin(\varkappa r - \gamma \ln 2\varkappa r - \frac{l\pi}{2} + \eta_l + \delta_l}{\varkappa r} \quad . \quad . \quad (59)$$

vo asimptotsko ponašanje (59) važi i za širu klasu potencijala V(r), koji ne isčezavaju za $r > r_0$, ali ipak dovoljno brzo opadaju s udaljenošću, tako da je za velike udaljenosti ipak dominantno Kulonovo polje. Na osnovu do sada izloženog, zaključujemo da je talasna funkcija za rasejanje na modificiranom Kulonovom polju data razvojem

$$\Psi = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l R_{l(r)} P_{l(\cos\theta)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

mplituda rasejanja data je izrazom

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(e^{2i(\eta_l + \delta_l)} - 1) P_{l(\cos\theta)} \quad . \quad . \quad . \quad (61)$$

diferencijalni udarni presek

$$\sigma_{(\theta)} = \left| f(\theta) \right|^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (62)$$

IV

RASEJANJE NA ATOMIMA I MOLEKULIMA

Bornova aproksimacija

Specijalno tretiranje zaslužuje slučaj kada se kao perturbacija može smatrati ukupna potencijalna energija čestice u spoljašnjem polju. Onda neperturbovana Šredingerova jednačina pretstavlja jednačinu slobo--dnog kretanja čestice

$$\Delta\psi^{(0)} + \kappa^2\psi^{(0)} = 0 \quad ; \quad \kappa = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{p}{\hbar}$$

i kao rešenje ima ravne talase. Energijski spektar slobodnog kretanja je kontinualan, pa prema tome imamo posla sa naročitim slučajem teorije perturbacija u kontinualnom spektru. Jednačina popravke $\psi^{(1)}$ prve aproksi--macije za talasnu funkciju glasi

$$\Delta\psi^{(1)} + \kappa^2\psi^{(1)} = \frac{2mU}{\hbar^2}\cdot\psi^{(0)}$$

Rešenje ove jednačine je

$$\psi^{(1)}_{(x,y,z)} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int\psi^{(0)}U_{(x',y',z')}e^{i\kappa r}\frac{dV'}{r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

$$dV' = dx'dy'dz' \; ; \; r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2$$

Rešenje smo napisali u obliku zakasnelih (retardovanih) potencijala. Efikasni presek rasipanja možemo izračunati u opštem obliku i za slučaj kada se rasipajuće polje može posmatrati kao perturbacija, ali samo u slučaju kada je ispunjen makar jedan od uslova:

$$|U| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2} \quad ili \quad |U| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}\kappa a = \frac{\hbar v}{a}$$

$$(\kappa a \leq 1) \quad ili \quad (\kappa a \gg 1)$$

$v = \frac{\kappa\hbar}{m}$ -brzina čestice

a-radius dejstva polja U(r)

Ako je ispunjen prvi uslov onda se posmatrana aproksimacija može prime--niti na sve brzine, a ako je ispunjen drgi uslov onda je ta aproksimaci--ja primenljiva samo za dovoljno velike brzine.

skladu sa formulom (5o)tražićemo talasnu funkciju u obliku $\psi = \psi^{(0)} + \psi^{(1)}$
e $\psi^{(0)} = e^{i\kappa r}$ odgovara upadnoj čestici sa talasnim vektorom $\kappa = \frac{p}{\hbar}$

$$\psi^{(1)}_{(x,y,z)} = -\frac{2m}{2\pi\hbar^2}\int U_{(x',y',z')}\, e^{i(\kappa r' + \kappa R)} \frac{dV'}{R} \quad . \quad . \quad . \quad (51)$$

e je R=Ro - r'
vektor položaja zapreminskog elementa dv'
-vektor položaja za tačku posmatranja $\psi^{(1)}$
sipni centar smo uzeli kao koordinatni početak.Konačno dobijamo za

$$\psi^{(1)} \approx -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\,\frac{e^{i\kappa R_0}}{R_0}\int U_{(r')}\, e^{i(\kappa-\kappa')r'}\, dV' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (52)$$

-talasni vektor čestice posle rasipanja
ad izraz (52)uporedimo sa izrazom

$$\psi \approx e^{i\kappa z} + \frac{f(\theta)}{r}\, e^{i\kappa r}$$

obijamo

$$f = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U e^{-i\vec{q}\vec{r}}\, dV \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (53)$$

$$\vec{q} = \vec{\kappa}' - \vec{\kappa} \; ; \quad q = |\vec{\kappa}' - \vec{\kappa}| = 2\kappa \sin\frac{\theta}{2}$$

$$d\sigma = |f|^2 = \frac{m}{4\pi\hbar^2}\left|\int U e^{-i\kappa\vec{r}}\, dV\right|^2 d\Omega \quad . \quad . \quad . \quad (54)$$

vu formulu prvi je dobio Born.
ormulu za elastično rasejanje možemo dobiti i na drugi način.Poći ćemo d opšte formule teorije perturbacija koja nam daje verovatnoću prelaza zmeđu stanja kontinualnog spektra.Formula glasi

$$dW_{\kappa\nu} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|U_{\nu\kappa}\right|^2 \delta(E_\nu - E_\kappa)\, d\nu \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (55)$$

atu formulu ćemo primeniti na prelaz iz stanja upadne čestice sa datim očetnim impulsom p u stanje čestice sa impulsom p',rasejane u element rostornog ugla $d\Omega'$ .Ako ~~između~~ između $E_\nu - E_0$ uzmemo $\frac{p'^2 - p^2}{2m}$,a za interval tanja $d\nu'$ uzmemo zapreminski element impulsnog prostora $dp_x' dp_y' dp_z'$, onda načina(55) dobija oblik

$$dW_{pp'} = \frac{4\pi m}{\hbar}\left|U_{pp'}\right|^2 \delta(p'^2 - p^2)\, dp_x' dp_y' dp_z' \quad . \quad . \quad . \quad (56)$$

lasne funkcije upadne i rasejane čestice pretstavljaju funkcije slobodnog kretanja, odnosno ravne talase

$$\psi_p = const \cdot e^{\frac{i}{\hbar} pr} \; ; \quad \psi_{p'} = const\; e^{\frac{i}{\hbar} p'r}$$

što smo za $d\nu'$ uzeli $d\nu' = dp_x' dp_y' dp_z'$ -element impulsnog prostora, onda lasna funkcija ψ' mora biti normirana na δ -funkciju u impulsnom prostoru

$$\psi_{p'} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{\frac{i}{\hbar} p'r} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (57)$$

nkcija ψ_p normiraćemo na gustinu fluksa jednaku jedinici

$$\psi_p = \sqrt{\frac{m}{p}}\; e^{\frac{i}{\hbar} pr} \quad . \quad . \quad . \quad (58)$$

tom slučaju verovatnoća(56) imaće dimenziju površine i pretstavljaće ferencijalni efikasni presek rasejanja.

stojanje δ -funkcije u izrazu (56) ukazuje na to da je $p = p'$ ($E = E'$), r je samo u tom slučaju izraz (56) različit od nule. Prema tome, formula 6) nam daje diferencijalni presek elastičnog rasejanja.

<u>sejanje na atomima</u>

zmotričemo sada rasejanje brzih elektrona na atomima.

elastično rasejanje je praćeno promenom unutrašnjeg stanja atoma, pri mu atom može preći iz normalnog stanja u eksitovano stanje diskretnog li kontinualnog spektra. Ako je atom prešao u eksitovano stanje kontinualnog spektra, onda je došlo do jonizacije atoma. Pri izvodenju opštih ormula ova dva slučaja se mogu posmatrati zajedno.

pštu formulu za verovatnoću prelaza medu stanjima kontinualnog spektra rimenićemo na sistem koji se sastoji od upadnog elekrtona i atoma.

obro je poznato da jednu od najvažnijih primena teorije perturbacija retstavlja izračunavanje verovatnoće prelaza u kontinualnom spektru, od uticajem konstantne perturbacije- perturbacije koja ne zavisi od remena. Takode je poznato da sva stanja kontinualnog spektra praktično u degenerisana.

etpostavićemo da imamo određen skup neperturbovanih talasnih funkcija
je odgovaraju nekom datom nivou energije.U početnom trenutku sistem se r
lazio u jednom od tih stanja.Potrebno je sada odrediti verovatnoću pre-
aza u drugo stanje te iste energije.Obeležimo početno stanje sa ν_0 ,
da za prelaze u stanja u intervalu među ν i $\nu+d\nu$ imamo sledeći
raz

$$dW_{\nu_0\nu} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|V_{\nu\nu_0}\right|^2\delta(E_\nu - E_{\nu_0})d\nu$$

aj izraz različit je od nule samo kad je $E_\nu = E_{\nu_0}$.
atimo se sada na postavljeni problem.Neka su p i p' impulsi nailazećeg
ektrona a E_0 i E_n energije elektrona pre i posle sudara.Za verovatnoću
elaza imamo izraz

$$dW_n = \frac{2\pi}{\hbar}\left|U^{E_0,p}_{E_n,p'}\right|^2\delta\left(\frac{p'^2-p^2}{2m}+E_n-E_0\right)dp'_x dp'_y dp'_z \quad . \quad . \quad . \quad (59)$$

$U^{E_0,p}_{E_n,p'}$ - matrični element energije interakcije nailazećeg elektrona
atomom

$$U = \frac{Ze^2}{r} - \sum_{i=1}^{Z}\frac{e^2}{|r-r_i|} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (60)$$

-vektor položaja nailazećeg elektrona
-vektor položaja atomskih elektrona
-masa elektrona
nkcije stanja ψ_p i $\psi_{p'}$,elektrona određujemo prema formulama koje
o već napred naveli

$$\psi_{p'} = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}e^{\frac{i}{\hbar}p'r} \quad ; \quad \psi_p = \sqrt{\frac{m}{p}}\,e^{\frac{i}{\hbar}pr}$$

tom slučaju verovatnoća dW_n je efikasni presek sudara $d\sigma$.
lasne funkcije koje određuju početno i krajnje stanje atoma obeleži-
mo respektivno sa ψ_0 i ψ_n.Ako krajnje stanje atoma pripada diskretnom
ektru onda ψ_0 i ψ_n normiramo običnim postupkom na jedinicu.Međutim,
o atom prelazi u stanje kontinualnog spektra,onda se talasna funkcija
rmira na δ-funkciju od parametra ν ,pomoću kojih se ta stanja defini-
u.Takvi parametri mogu biti npr. energija atoma,ili pak komponente
pulsa elektrona koji je pri jonizaciji izleteo iz atoma.Efektivni pre-
eci koje pri tom dobijamo definišu verovatnoću sudara sa prelaskom
oma u stanja kontinualnog spektra koja se nalaze u intervalu vrednosti
rametara između ν i $\nu+d\nu$.-

ntegriranjem izraza (59) po apsolutnoj veličini p′dobijamo

$$d\sigma_n = \frac{2\pi m p'}{\hbar}\left|U'_{n p'}\right| d\Omega' \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (61)$$

′odredujemo iz zakona održanja energije

$$\frac{p'^2 - p^2}{2m} = E_n - E_0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (62)$$

ko u matičnom elementu zamenimo talasne funkcije elektrona ψ_0 i $\psi_{p'}$ obićemo

$$d\sigma_n = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4}\,\frac{p'}{p}\left|\iint U e^{-i\kappa r}\psi_n^*\psi_0\, d\tau\, dV\right|^2 d\Omega \quad . \quad . \quad . \qquad (63)$$

$d\tau = dV_1\, dV_2\, dV_3 \ldots dV_Z$ -element konfiguracionog prostora od Z elek-
-trona atoma.

ornja formula (63) nam pretstavlja opštu formulu teorije perturbacija oja se može primeniti na bilo koji slučaj ne-elastičnog rasejanja . a n = o i p = p′gornja formula prelazi u formulu za efikasni presek lastičnog rasejanja.

ao primer rešićemo rasejanje elektrona na atomu vodonika.
a sam vodonikov atom imamo

$$H_{(r_1)}\psi_{0(r_1)} = E_0\psi_{0(r_1)} \; ; \; E_0 = -\frac{me^2}{2\hbar^2}$$

ada se elektron raseje na atom vodonika imamo

$$\left[H_{(r_1)} - \frac{\hbar^2}{2m}\Delta_2 + U_{(r_1 r_2)} - E\right]\Phi_{(r_1,r_2)} = 0 \; ; \; \psi_{0(r_1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi r_0^3}} e^{-\frac{r_1}{r_0}}$$

$$U_{(r_1,r_2)} = -\frac{e^2}{r_2} + \frac{e^2}{|r_2 - r_1|} \; ; \; E = E_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

azvijemo sada $\Phi_{(r_1 r_2)}$ po vodonikovim funkcijama $\psi_{n(r_1)}$

$$\Phi_{(r_1,r_2)} = \sum_n f_{n(r_2)}\psi_{n(r_1)}$$

ada ovo uvrstimo u Šredingerovu jednačinu dobijamo

$$\sum_n \psi_{n(r_1)}\left(\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_2 + E - E_n\right) f_{n(r_2)} = U_{(r_1,r_2)}\Phi_{(r_1,r_2)}$$

omnožimo sada ovu jednačinu sa $\psi_{0(r_1)}$ i integralimo je po koordinatama odonikovog elektrona

$$\left(\Delta_2 + k^2\right) f_{0(r_2)} = \frac{2m}{\hbar^2}\int \psi_{0(r_1)} U_{(r_1 r_2)}\Phi_{(r_1 r_2)}\, d\tau_1 = F_{(r_2)}$$

ahtevamo da u velikim udaljenostima bude

$$\Phi_{(r_1 r_2)} = e^{i\vec{k}\vec{r}_2}\psi_{0(r_1)}$$

ada dobijamo

$$F_{(r_2)} = \frac{2me^2}{\hbar^2 \pi r_0^3} e^{i\vec{k}\vec{r}_2}\int e^{-2\frac{r_1}{r_0}}\left(-\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_2 - r_1}\right) d\tau$$

ošto je $r_2 \neq r_1$ pri integralenju po r_1 razdvajamo područje na dva dela.
prvom je $r_1 < r_2$,a u drugom $r_1 > r_2$ .To nas vodi do rezultata:

$$F_{(r_2)} = -\frac{2me^2}{\hbar^2} e^{-2\frac{r_2}{r_0} + i\vec{k}\vec{r}_2}\left(\frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_0}\right)$$

-2

$(\Delta_2 + K^2)\psi_0(r_2) = F(r_2)$ za amplitudu rasejanja dobijamo

$$f = -\frac{1}{4\pi}\int e^{-i\vec{K}\vec{r}_2} F_{(\vec{r}_2)}\, d\tilde{r}_2 =$$

$$= \frac{me}{4\pi\hbar^2}\int_0^\infty\int_0^\pi\int_0^{2\pi} e^{-2\frac{r_2}{r_0}+iKr_2\cos\theta}\left(\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_0}\right) r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr_2\, d\varphi =$$

$$= 2r_0\,\frac{8+K^2r_0^2}{(4+K^2r_0^2)^2}$$ gde je $K = \vec{k} - \vec{k}'$

$$f = 2r_0\,\frac{8+K^2r_0^2}{(4+K^2r_0^2)^2}$$

$$\sigma = |f|^2 = 4r_0^2\,\frac{(8+K^2r_0^2)^2}{(4+K^2r_0^2)^4}$$

RASEJANJE NA MOLEKULIMA

, Rasejanje elektrona na molekulima

a kraju razmotrićemo rasejanje brzih elektrona na molekulima, a takođe rasejanje neutrona na molekulima. Pretpostavimo da je U energija nterakcije upadnog elektrona sa molekulom. U je prema tome funkcija od oordinata upadne čestice i jezgra molekula. Pretpostavimo zatim da su ψ_0 i ψ_n početna i krajnja talasna funkcija nuklearnog (oscilatornog i otacionog) kretanja. Po analogiji sa formulom (63) imaćemo

$$d\sigma_n = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4}\left|\iint U e^{-iqr}\psi_n^*\psi_0\, d\tau\, dV\right|^2 d\Omega \qquad (64)$$

τ - element konfiguracionog prostora jezgra
m - masa elektrona.

ornja formula važi kako za neelastično, tako i za elastično (n = o) asejanje. Pri ovom razmatranju uzimamo da se apsolutna veličina impulsa e menja, zbog male veličine energije eksitacije nuklearnih nivoa (nivoa otacije i nivoa oscilovanja).

ko su svi atomi u molekulu dovoljno teški, onda rasipno polje U možemo apisati kao $U = \sum U_i$ .... (65)

U_i - energija interakcije upadne čestice sa i-tim atomom i ona je f-ja elativnih koordinata čestice i i-tog jezgra molekula.

amenom u formuli (64)

$$U = \sum U_i \equiv \sum_i U_i e^{-iqR_i} e^{iqR_i} \qquad (66)$$

R_i - vektori položaja molekulskih jezgara,

fikasni presek možemo napisati u sledećem obliku:

$$d\sigma_n = \sum_i \left| f_{i(q)} \left(e^{-iqR_i}\right)_{on} \right|^2 d\Omega \qquad (67)$$

Matrični momenat izraza koji se nalazi u zagradama uzimamo pomoću nuklearnih talasnih funkcija ψ_0 i ψ_n. Amplitude $f_{i(q)}$ definišu se pomoću formule:

$$f_{i(q)} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U_i e^{-iq(r-R_i)} dV \qquad (68)$$

Fizički smisao veličina $f_{i(q)}$ je u tome, što one pbetstavljaju amplitudu rasipanja na pojedinim atomima,pa će prema tome presek elastičnog rasejanja biti

$$d\sigma = \left| f_i(\vartheta) \right|^2 d\Omega \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (69)$$

on pretstavlja presek elastičnog rasejanja na pojedinim slobodnim tomom.Ovim je postavljeno pitanje u primeru rešeno.

rasejanje neutrona na molekulima

a vidimo sada kako izgleda rasejanje neutrona na molekulima.Odmah na očetku napomenućemo da se rasejanje vrši na jezgrima molekula.Elektroni raktično ne rasipaju neutrone.Ako bi pretpostavili da je amplituda alasa rasutog na jednom od jezgara molekula mala u tačkama gde se nalaze druga jezgra molekula,tj da amplitude rasejanja na svakom pojedinačnom jezgru budu male upoređujući ih sa međuatomskim rasejanjima ada amplitudu rasejanja na molekulu možemo odrediti pomoću zbira amplituda na pojedinim jezgrima.

ri sudaru neutrona sa jezgrom,radijus dejstva nuklearnih sila je mali. granicama tog radijusa sile su vrlo velike pa zbog toga teoriju perturbacija,uopšte uzevši,ne možemo primeniti na rasejanje neutrona na olekulima .Ali,u slučaju rasejanja sporih neutrona na molekulu (sistemu ezgra)može se primeniti naročita formula teorija perturbacija kojom naš zadatak svodi na amplitudu rasejanja neutrona na slobodnim jezgrima (E.Fermi,1936.)

apomena: Do ove formule nisam mogao da dođem.Možda je o tome nešto dato u nekom udžbeniku od Fermija!

izičko zasnivanje toga metoda sastoji se u tome,što je amplituda rasejanja sporog neutrona na slobodnom jezgru neka konstantna veličina oja ne zavisi od brzine.(talasna dužina neutrona je velika u odnosu dimenzije jezgra)

o je f_i amplituda rasipanja na i-tom jezgru,onda je $(f_i)^2 d\Omega$ diferencialni presek elastičnog rasejanja na slobodnom jezgru.Konstantnu amplitudu možemo formalno dobiti iz teorije perturbacija,ako se interakcija utrona sa jezgrom opisuje pomoću potencijalne energije:

$$U_{(r)} = -\frac{2\pi\hbar^2}{\mu} f\,\delta_{(r)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \qquad (70)$$

$= \frac{A}{A+1}$ -redukovana masa neutrona i jezgra atomske težine A .

a mogućnost uvodenja kvazipotencijala povezana je sa konstantnošću plitude. Kada gornji izraz zamenimo u Bornovoj formuli

$$f = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int U e^{-i\vec{q}\vec{r}}\,dV$$ onda

-fja transformiše integral u konstantnu veličinu koja ~~koja~~ ne zavisi

$$q = \kappa - \kappa' = \frac{p}{\hbar} - \frac{p'}{\hbar}$$

opštem slučaju proizvoljne energije neutrona, amplituda rasejanja zavi- od svakog impulsa p i p′ posebno, a ne samo od njihove razlike q. i, ako amplitudu računamo u Bornovoj aproksimaciji, onda ona može zavisiti samo od q. Ukoliko rasipno jezgro molekula vrši neko kretanje oscilovanje u molekulu), onda se pri usrednjenju po tome kretanju interakcija $U_{(r)} = -\frac{2\pi\hbar^2}{m} f\delta_{(r)}$ rasplinjava po oblasti sa dimenzijama koje u velike u odnosu na amplitudu rasipanja f, pa je za tako rasplinutu interakciju ispunjen uslov $|U| \ll \frac{\hbar^2}{ma^2}$ primenljivosti Bornove aproksimacije. Zato ćemo interakciju neutrona sa molekulom prikazati pomoću potencijalne energije.

$$U_{(r)} = -2\pi\hbar^2 \sum_i \frac{1}{m_i} f_i \delta(r - R_i) \quad . \quad . \quad . \quad (71)$$

umiranje se vrši po svim jezgrima u molekulu

i -vektori položaja jezgara

-vektor položaja neutrona

ad izraz $U_{(r)}$ zamenimo u formuli (63) dobićemo sledeću formulu za diferencijalni presek rasejanja neutrona na molekulu.

$$d\sigma_n = \mu_{11}^2 \frac{p'}{p} \left| \sum_i \frac{1}{m_i} f_i \left(e^{-iqR_i}\right)_{on} \right|^2 d\Omega \quad . \quad . \quad (72)$$

μ_1 -redukovana masa neutrona i molekula.

atrične elemente u zagradi smo uzeli po talasnim funkcijama kretanja ezgara. Impulsi p′ i p su medusobno povezani zakonom održanja energije

$$E_n - E_o = \frac{p^2 - p'^2}{2\mu_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (73)$$

Literatura:

1. Landau-Lifšic: Kvantna mehanika
Beograd 1965

2. Sokolov-Loskotov-Ternov: Kvantna mehanika
Beograd 1965

3. Ivan Supek: Teorijska fizika i struktura materije II-deo
Zagreb 1964

4. Dr. Đ. Mušicki: Uvod u teorijsku fiziku I
Beograd 1964

5. A. Messiah: Quantum Mechanics I, II
Amsterdam 1961, 1962

6. A.S. Davydov: Kvantovaja mehanika
Moskva 1963