

UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET  
OUR INSTITUT ZA FIZIKU

Stevan M. Vaderna

DIFRAKCIJA ELEKTRONA  
- DIPLOMSKI RAD -

Novi Sad, februar 1981.

Ovim putem se zahvaljujem  
Dr Ivanu Janiću na svesrdnoj  
pomoći pri izboru ove teme i  
korisnim savetima prilikom  
samog eksperimenta

Stevan Vaderna

## S A D R Ž A J

UVOD	2
1. NAJZNAČAJNIJE ETAPE U RAZVOJU OPTIČKIH TEORIJA	3
2. KORPUSKULARNO-TALASNI DUALIZAM KOD ELEKTROMAGNETNOG ZRAČENJA	9
3. OPTIČKO-MEHANIČKA ANALOGIJA I DE BROGLIEJEVA HIPOTEZA	11
3.1. Prelaz sa talasne na geometrijsku optiku: osnovna jednačina geometrijske optike	11
3.2. Fermatov princip	13
3.3. Hamiltonov i Maupertuisov princip	15
3.4. De Brogliejeva hipoteza i brzina materijalnih talasa	18
4. EKSPERIMENTALNE POTVRDE DE BROGLIEJEVE HIPOTEZE	21
4.1. Difrakcija x-zraka	21
4.2. Laueovi uslovi difrakcije	22
4.3. "Refleksija" x-zraka	25
4.4. Difrakcija elektrona; Davisson-Germerov ogled	28
4.5. Debye-Scherrerova metoda za proučavanje difrakcije elektrona	32
5. PRINCIPIJELAN OPIS UREDJAJA I NAČIN MERENJA	35
6. KRISTALNA REŠETKA GRAFITA	36
7. OPIS EKSPERIMENTA I REZULTATI MERENJA	38
7.1. Osnovni podaci o difrakcionoj cevi	38
7.2. Izvodjenje formula vezanih za eksperiment	39
7.3. Rezultati merenja	41
ZAKLJUČAK	45
LITERATURA	47

## U V O D

Difrakcija elektrona je karakteristična pojava koja je u saglnosti sa hipotezom Louisa de Brogliea o dualističkoj prirodi materijalnih čestica (talasno-korpuskularni dualizam).

Ovaj rad sadrži: istorijski pregled najznačajnijih etapa u razvoju optičkih teorija, korpuskularno-talasni dualizam koed elektromagnetskog zračenja zaključno sa Einsteinovom relacijom o vezi izmedju impulsa i talasne dužine svetlosnog kvanta, optičko-mehaničku analogiju na bazi koje je i De Broglie dao svoju fenomenalnu hipotezu, kao i naravno samu hipotezu dualizma talas-korpuskula. Na osnovu ove hipoteze date su i neke osobine materijalnih talasa. Pošto materijalne čestice pokazuju interferentne pojave slične svetlosti ili x-zracima, dati su i osnovni pojmovi difrakcije x-zraka, da bi se direktno na njih nadovezali i eksperimenti sa difrakcijom elektrona koji su služili kao neposredan dokaz De Broglieve hipoteze. Opisani su Davisson-Germerov i Debye-Scherrerov eksperiment kao dve najkarakterističnije metode za proučavanje difrakcije elektrona. Zatim, opisan je eksperiment po Debye-Scherrerovoj metodi sa difrakcijom elektrona, koji je izvršen u Laboratoriji za atomsku fiziku Instituta za fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, sa ciljem da se izgradi pogodan ogled za vežbe studenata III godine fizike, u kome će studenti moći dobiti kvantitativni dokaz o talasnoj prirodi elektrona i važenja De Broglieve hipoteze kod njihovog ponašanja. Detaljno je opisana aparatura, način merenja, dobijeni rezultati, data su neophodna upozorenja za rukovanje sa visokonaponskim izvorom, opisan je kristal grafita na kome se vrši difrakcija elektrona i na kraju je dato nekoliko predloga šta bi se od studenata moglo zahtevati pri izvodjenju ove vežbe.

## 1. NAJZNAČAJNIJE ETAPE U RAZVOJU OPTIČKIH TEORIJA

Istorija savremene optike se u znatnoj meri može poistovetiti sa istorijom borbe izmedju dve teorije o prirodi svetlosti: korpuskularne i talasne teorije, koja se može podeliti na nekoliko etapa:

### a) Period do početka XIX veka - Newton; Huygens

Godine 1672. Newton prikazuje svetlost kao fluks korpuskula - čestica i pomoću ovakve teorije objašnjava optičke pojave, ali samo one koje čine geometrijsku optiku. On tvrdi da svetlosne čestice lete pravolinijski i pokoravaju se zakonima mehanike. Odbijanje svetlosti shvaćeno je analogno odbijanju elastične kuglice pri udaru o ravan, a prelamanje kao privlačenje čestica svetlosti od strane sredine u kojoj se ono vrši, zbog čega se menja brzina čestica svetlosti pri prelazu iz prve u drugu sredinu.

Newtonov savremenik Huygens daje 1678. godine drugu teoriju o svetlosti (u delu "Traktat o svetlosti"). On je pošao od analogije izmedju mnogih optičkih i akustičkih pojava i predpostavio je da svetlosnu perturbaciju treba shvatiti kao elastične impulse koji se prostiru u jednoj specijalnoj sredini - eteru, koji ispunjava ceo protor kako unutar materijalnih tela, tako i izmedju njih. Zakone geometrijske optike Huygens je objasnio pomoću svog opštег principa koji se može formulisati na sledeći način: *Svaka tačka do koje dospe svetlosna perturbacija postaje centar sekundarnih talasa. Površina koja u nekom momen-tu obuhvata ove sekundarne talase, pokazuje u tom momentu polo-žaj fronta stvarnog talasa.*

U ovoj formi Huygensov princip govori samo o pravcu prostiranja talasnog fronta koji se formalno identificuje sa geometrijskom površinom koja obuhvata sekundarne talase. Prema tome reč je upravo o prostiranju ove površine, a ne o prostiranju talasa. Na taj način se ne može razmatrati ni difrakcija svetlosti, ni fenomen Newtonovih prstenova, a ne figuriše ni pojam talasne dužine. Nekompletност ove teorije objašnjava činje-



nici da je u roku celog XVIII veka u optici vladala korpuskularna teorija svetlosti.

Najbolje izloženu talasnu predstavu o svetlosti u XVIII veku dao je Euler. Prema njemu, svetlost se sastoji iz longitudinalnih oscilacija etera, isto tako kao što je zvuk oscilovanje vazduha, pri čemu različitim bojama odgovaraju različite frekvencije. Uporedjenje brzine svetlosti sa brzinom zvuka omogućilo je Euleru da konstatuje da je eter mnogo "finija i elastičnija supstanca od vazduha".

Kao što se vidi u ovom periodu suprotnost shvatanja o talasnoj i korpuskularnoj prirodi svetlosti imala je karakter uzajamne isključivosti, a naučni progres sastojao se u traženju takve teorije koja bi omogućila da se udubljivanjem u te protivurečnosti jasnije shvati njihova priroda, kao i u traganju za eksperimentalnom bazom.

b) Period od Fresnela i Younga do početka XX veka tj. do postanka teorije svetlosnog kvanta

U prvoj polovini XIX veka počeo je postupno da se оформljuje sistem talasne optike. Glavnu ulogu pri tome odigrali su radovi Younga i Fresnела. 1801. godine Young je naneo prvi udarac korpuskularnoj teoriji postavivši princip o interferenciji svetlosti, objasnivši na osnovu ovog principa Newtonove prstenove i pomoću njih ukazujući na način određivanja dužine svetlosnih talasa. 1809. godine Malus otkriva polarizaciju svetlosti, a to navodi Younga na ideju o transverzalnosti svetlosnih oscilacija (1817. godine) koja je dobila dalji oslonac na eksperimentima Fresnела i Aragoa, (1819. godine). Oni su pokazali da zraci polarizovani u uzajamno normalnim pravcima ne interferiraju. Međutim, pošto su transverzalni talasi mogući samo u čvrstim telima, eteru su pripisana svojstva elastičnog čvrstog tela sa specifičnim osobinama da bi se potpuno objasnilo odsustvo longitudinalnih oscilacija u svetlosnim talasima. Uporedjenje svih specifičnosti elastičnog čvrstog etera pokazuje bitne teškoće elastične teorije svetlosti koja pak nije ukazivala ni na

kakve veze optike sa drugim fizičkim pojavama.

U potvrđivanju talasne teorije svetlosti veliku ulogu je odigrala teorija difrakcije koju je razvio Fresnel 1818. godine na osnovu Huygensovog principa i predstavi o interferencijski svetlosnih talasa.

Godine 1846. Faraday otkriva pojavu obrtanja ravnih polarizacija u magnetnom polju, što je ukazivalo na to da optičke pojave ne predstavljaju izolovanu klasu procesa i da, specijalno, postoji veza između optičkih i magnetnih pojava. Najzad, teorijska ispitivanja Maxwella pokazala su da promene elektromagnetnog polja ne ostaju lokalizovane u prostoru, već se proširuju u vakuumu brzinom koja je jednaka odnosu elektromagnetne i elektrostaticke jedinice struje tj. brzinom svetlosti. Ova Maxwellova elektromagnetna teorija svetlosti dobila je sveopšte priznanje zahvaljujući Hertzovim ogledima 1888. godine sa elektromagnetnim talasima. Usled uspeha talasne teorije svetlosti, početkom XX veka korpuskularna teorija bila je praktično napuštena.

### c) Period od početka XX veka do danas

Početkom XX veka obnovljena je korpuskularna teorija svetlosti na osnovu novih otkrića u fizici, u koja pre svega spada fotoelektrični efekt i kvant svetlosne energije u Planckovojoj teoriji kvanta. Naime, eksperimentalno utvrđene zakonitosti fotoefekta nisu mogle da se objasne talasnom teorijom, te su dobine iscrpno tumačenje tek 1905. godine Einsteinovom teorijom fotona. Ta teorija je 1923. godine dala sjajno tumačenje Comptonovog efekta. Teorija fotona se nije ograničila na prihvatanje Planckovog postulata o kvantnom karakteru procesa apsorpcije i emisije svetlosti, već u njoj svetlosni kvanti, odnosno fotoni poseduju korpuskularne osobine: njima se pripisuje određena energija ( $h\nu$ ), određena brzina ( $\vec{c}$ ), određena masa ( $h\nu/c^2$ ) i određeni impuls ( $h\nu/c$ ).

Teorija fotona ili korpuskularna teorija svetlosti, koja je opisala takve pojave kao što su fotoelektrični efekt i

Comptonov efekt, inače neobjasnjive na osnovu talasne teorije svetlosti, pokazala se sa svoje strane nesposobnom da objavi veliki niz optičkih pojava, pre svega interferenciju i difrakciju svetlosti koje se pak mogu shvatiti sa tačke gledišta talasne koncepcije. Baš zbog toga iz uspeha ove teorije ne sme ni u kom slučaju da proizilazi da je potrebno odbaciti predstave talasne teorije. Celokupno poznavanje osobina svetlosti kazuje da svetlost poseduje istovremeno i talasne i korpuskularne osobine, pri čemu se u nekim fenomenima (fotoefekt, Comptonov efekt) ispoljavaju više korpuskularne, dok u drugim (difrakcija, interferencija) više talasne osobine. Šta više, ispoljavanje jednih ili drugih osobina često zavisi od uslova u kojima se odvija data optička pojava. Na primer, talasne osobine svetlosti se najviše ispoljavaju kada se talasi prostiru u ograničenom prostoru čije su dimenzije uporedljive sa talasnom dužinom svetlosti. Jedna od manifestacija korpuskulano-talasnog dualizma leži u samoj prirodi svetlosti i predstavlja postojanje direktne veze između korpuskularnih i talasnih karakteristika svetlosti. Ta veza pokazuje da je impuls fotona ( $p_f$ ) vezan sa talasnom dužinom svetlosti relacijom  $\lambda = h/p_f$ , gde je  $h = 6,625 \cdot 10^{-34} \text{ J s}$  (Planckova konstanta).

Godine 1924. Louis Victor Pierre Raymond de Broglie u časopisu "Comptes rendus" pod nazivom "Recherches sur la théorie des quanta" daje proširenje korpuskularno-talasnog dualizma optike na elektrone, atome, molekule i čestice uopšte, postulirajući da kretanju svake čestice odgovara izvestan talas koji karakteriše njene talasne osobine. On je uspostavio relaciju između talasne dužine ( $\lambda$ ) tog talasa koji karakteriše česticu i brzine kretanja ( $v$ ) same čestice, koja se danas po njemu naziva de Brogliejeva relacija:  $\lambda = h/mv$ , gde je  $m$  - masa date čestice, a  $h$  - Planckova konstanta. Na ovoj ideji je 1924. godine doktorirao, a 1929. godine za nju dobio Nobelovu nagradu.

Na osnovu de Brogliejeve hipoteze Elsasser je 1925. godine zaključio da prilikom prolaska kroz kristal elektroni moraju ispoljavati fenomene interferencije i difrakcije slično

x-zracima. Izračunao je da su elektroni koji poseduju energiju od 150 eV okarakterisani talasnom dužinom 0,1 nm i prema tome moraju ispoljavati osobine analogne osobinama svetlosnih zraka sa talasnom dužinom od 0,1 nm.

Difrakcija elektrona je prvi put otkrivena u eksperimentima Davissona i Germera 1927. godine, kao i u kasnijim eksperimentima Thomsona, Wierlea, Šaljnikova i drugih.

Stern 1929. godine i Johnson 1931. godine su takođe utvrdili difrakciju atoma helijuma i vodonika kao i molekula vodonika.

Posle otkrića de Brogliejevih talasa, pojavio se niz pokušaja njihovog tumačenja i tako je nastala borba raznih shvatanja prirode mikročestica. Prvu interpretaciju povezanosti između korpuskule i talasa izneo je Schrödinger svojom hipotezom prema kojoj se smatra da je čestica sastavljena od talasa, nai-me ona se shvata kao centar grupe talasa odnosno, centar talasnog paketa sa kojim se zajedno kreće. Ovo shvatanje se nije moglo održati iako je u početku bilo dosta privlačno. Glavna teškoća u tom shvatanju bila je nepostojanost takvog paketa talasa koja se ogleda u rasplinjavanju grupe talasa u vakuumu. De Brogliejevi talasi u grupi bili bi različitih brzina, pa u vakuumu nastaje disperzija, te se dimenzije talasnog paketa povećavaju, a sam paket se rasplinjava. Onda bi se dimenzije čestice povećavale (naročito u nehomogenim sredinama) do ma koje veličine, pa i do beskonačnosti. Prema takvom shvatanju moglo bi se doći do zaključka da se pomoću raznih eksperimentalnih uredjaja primaju samo delovi čestica (elektrona) jer je to sa gledišta prostiranja talasa sasvim moguće posle izvršene difrakcije. Iskustvo pokazuje da se čestica konstatuje u celini, pa otuda takvo shvatanje čestice kao talasnog paketa nije opravdano.

Borba raznih shvatanja prirode čestice stišala se 1926. godine kada je Born dao statističko objašnjenje de Brogliejevih talasa. On zadržava korpuskularno-talasni dualizam i pribegava definiciji prema kojoj je intenzitet de Brogliejevih talasa u

ma kom mestu u prostoru proporcionalan verovatnoći nalaženja čestica na tom mestu. Dakle, takvim shvatanjem zadržava se i realnost čestice i realnost talasa. Intenzitet se pokazuje u relativnom, a ne u apsolutnom smislu, naime kvantitativno se izračunava koliko je puta verovatnije da se čestica nalazi na jednom mestu u prostoru nego na drugom mestu, što je i danas vodeće shvatanje u fizici.

## 2. KORPUSKULARNO-TALASNI DUALIZAM KOD ELEKTROMAGNETNOG ZRAČENJA

Max Planck je 1900. godine dao svoju teoriju kvanta postulirajući kvantni karakter emisije i apsorpcije. Međutim Planck je tu "naročito svojstvenost" pripisivao zagrejanom telu koje zrači, a ne emitovanom elektromagnetnom zračenju. Pet godina kasnije Einstein uvodi hipotezu o svetlosnim kvantima: *Oscilatori mogu emitovati ili apsorbovati elektromagnetnu energiju zahvaljujući tome što se samo elektromagnetsko zračenje sastoji od posebnih korpuskula - fotona, koji svaki nosi energiju  $h\nu$ .* Einstein, dakle smatra da Planckova formula pre svega ukazuje na korpuskularni karakter svetlosti. Elementarna teorija fotona se može izvesti koristeći obrazce za energiju i impuls elektromagnetnog polja uopšte:

$$W = \frac{1}{2} \int_V (\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2) dV \quad (1)$$

$$\vec{p} = \epsilon_0 \mu_0 \int_V (\vec{E} \times \vec{H}) dV \quad (2)$$

gde je  $\vec{E}$  - vektor električnog polja,  $\vec{H}$  - vektor magnetnog polja  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  - vektor magnetne indukcije.

Iz teorije elektromagnetnih talasa sledi:

$$\vec{B} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} (\vec{k} \times \vec{E}) \quad (3)$$

$\vec{K}$  - vektor pravca prostiranja elektromagnetsnih talasa (talasni vektor)

$$B^2 = \epsilon_0 \mu_0 E^2 \Rightarrow \frac{1}{\mu_0} B^2 = \epsilon_0 E^2$$

zamenjujući ove veličine u (1) dobija se energija svetlosnog talasa

$$W = \int_V \epsilon_0 E^2 dV \quad (4)$$

Stavlјajući  $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B}$  u obrazac (2) dobija se impuls svetlosti

$$\vec{p} = \epsilon_0 \int_V (\vec{E} \times \vec{B}) dV \quad (5)$$

Uzimajući  $\vec{B}$  iz obrazca (3) može se pisati

$\vec{E} \times \vec{B} = \vec{E} \times \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} (\vec{K} \times \vec{E}) = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} [\vec{K}_0 E^2 - \vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{K}_0)]$  gde član  $\vec{E}(\vec{E} \cdot \vec{K}_0)$  teži nuli jer je  $\vec{E} \perp \vec{K}_0$ , tako da ostaje

$$\vec{E} \times \vec{B} = \vec{K}_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E^2, \text{ te je } \vec{p} = \vec{K}_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \int_V \epsilon_0 E^2 dV \quad (6)$$

što predstavlja impuls elektromagnetskog zračenja odnosno svetlosnog talasa.

Zamenjujući (4) u (6) uz uslov da je  $\frac{1}{c} = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  može se pisati:

$$\vec{p} = \vec{K}_0 \cdot \frac{W}{c} \quad (7)$$

Sa druge strane ako se podje od izraza za vezu između impulsa i energije relativistički slobodne čestice

$$H = W = c \sqrt{p^2 + m_0^2 c^2} \Rightarrow p = \sqrt{\frac{W^2}{c^2} + m_0^2 c^2} \quad (8)$$

uz pretpostavku da se ta čestica kreće brzinom jednakom brzini svetlosti  $c$ , a to je moguće samo tada ako je njena masa mirovanja  $m_0=0$ , da bi masa ( $m$ ) kretanja ostala konačna, jer je

$$m = \lim_{\substack{m_0 \rightarrow 0 \\ \beta \rightarrow 1}} \frac{m_0}{1 - \beta^2}$$

te se dobija iz (8)

$$p = \frac{W}{c} \quad (9)$$

Polazeći od tih rezonovanja tj. od identičnosti obraćaca (7) i (9), Einstein je došao do zaključka da se elektromagnetsko polje može smatrati kao mnoštvo čestica - fotona sa masom mirovanja  $m_0=0$ , energijom  $W=h\nu$  i masom kretanja  $m$ , koja se može izračunati na sledeći način:

$$W = mc^2 \text{ iz realitivističke mehanike}$$

$$W = h\nu \text{ iz teorije kvanta}$$

$$mc^2 = h\nu \Rightarrow m = \frac{h\nu}{c^2}$$

Impuls fotona se može dobiti na osnovu relacije (7) odnosno (9) i energije fotona po kvantnoj teoriji  $W = h\nu$

$$\vec{p} = \vec{k}_0 \frac{W}{c} = \vec{k}_0 \frac{h\nu}{c} \Rightarrow p = \frac{h\nu}{c}$$

Ako se stavi  $\lambda = \frac{c}{\nu}$  u gornji izraz dobijamo Einsteinovu jednacinu

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (10)$$

odnosno vezu izmedju impulsa i talasne dužine svetlosnog kvanta.

### 3. OPTIČKO-MEHANIČKA ANALOGIJA I DE BROGLIEJEVA HIPOTEZA

#### 3.1. Prelaz sa talasne na geometrijsku optiku: osnovna jednina geometrijske optike

U slučaju kada je talasna dužina svetlosti mala u odnosu na dužine na kojima se ispoljavaju promene makrofizičkih osobina sredine, u vrlo malim oblastima može se sredini pripisati odredjeni indeks prelamanja, a prostiranje svetlosti prikazati ravnim talasom. To je utoliko tačnije ukoliko je manja talasna dužina svetlosti, a oblast optike koja odgovara graničnom slučaju kada je talasna dužina približno jednaka nuli, naziva se geometrijska optika.

Talasna jednačina ravnog talasa u homogenoj, izotropnoj sredini

$$\Delta \Psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (11)$$

uvođenjem indeksa prelamanja  $n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$  = const. prelazi u jednačinu

$$\Delta \Psi - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (12)$$

Rešenje talasne jednačine u homogenoj sredini je ravan talas

$$\Psi = a \cdot e^{i(\omega t - \vec{k}\vec{r})} \quad (13)$$

gde je

$$u = a \cdot e^{-i\vec{k}\vec{r}} = a \cdot e^{-iF}$$

(a - konstantna amplituda,  $F = \vec{k}\vec{r}$  - linearna funkcija koordinata).

Kada se svetlost kreće kroz nehomogenu sredinu, za rešavanje problema se mogu primeniti samo aproksimativne metode. U nehomogenoj sredini se indeks prelamanja menja,  $n=n(x,y,z)$ , pa se menja i brzina svetlosti. Međutim, frekvencija ne zavisi od sredine, te je  $\omega = \text{const.}$  Talasna jednačina i u nehomogenoj sredini ima isti oblik kao i u homogenoj (12). Rešenje talasne jednačine u nehomogenoj sredini sa konstantnom frekvencijom nalazi se u obliku

$$\Psi = u(x,y,z) \cdot e^{i\omega t} \quad (14)$$

gde je

$$u = a(x,y,z) \cdot e^{-iF(x,y,z)}$$

Za amplitudu se stavlja  $a = a(x,y,z)$  da je sporo promenljiva funkcija koordinata, a faza  $F = F(x,y,z)$  skoro linearна funkcija koordinata. Ako se partikularni integral (14) uvrsti u pojavnu jednačinu (12), dobija se

$$e^{i\omega t} \Delta u + \frac{n^2}{c^2} \omega^2 e^{i\omega t} u = 0$$

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{gde je} \quad k = \frac{n\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (15)$$

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} e^{-iF} - ia e^{-iF} \frac{\partial F}{\partial x} \approx -ai \frac{\partial F}{\partial x} e^{-iF}$$

jer je  $\frac{\partial a}{\partial x} = 0$  zbog spore promenljivosti funkcije  $a=a(x,y,z) \approx \text{const.}$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -ai \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} e^{-iF} + ai \frac{\partial F}{\partial x} ie^{-iF} \frac{\partial F}{\partial x} \approx -a \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 e^{-iF}$$

jer je  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$  zbog približne linearnosti funkcije  $F=F(x,y,z)$ .

$$\Delta u = -ae^{-iF} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (16)$$

$$u = ae^{-iF} \quad (17)$$

Zamene li se obrazci (16) i (17) u jednačini (15) dobija se

$$\begin{aligned} -ae^{-iF} \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] + k^2 ae^{-iF} &= 0 \\ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 &= k^2 \end{aligned} \quad (18)$$

ili kraće

$$|\nabla F| = k \quad (19)$$

što predstavlja diferencijalnu jednačinu koja određuje fazu  $F$  kao funkciju položaja  $F = F(x,y,z)$  i zove se osnovna jednačina geometrijske optike. Na ovaj način dobija se familija ekvifaznih površina. Pošto je pravac prostiranja svetlosti u svakoj tački normalan na faznu površinu, normalne trajektorije ekvifaznih površina predstavljajuće svetlosne zrake, što znači da je problem prostiranja svetlosti u nehomogenim sredinama u slučaju vrlo malih talasnih dužina sveden na nalaženje ekvifaznih površina.

### 3.2. Fermatov princip

Iz osnovne jednačine geometrijske optike u vektorskom poliku može se izvesti jedan veoma važan princip geometrijske optike.

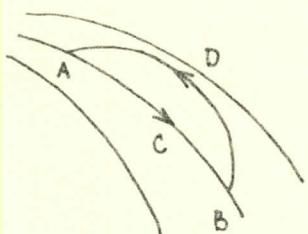
$$\nabla F = \vec{k} \quad (20)$$

$$\vec{k} = k \vec{k}_0 = \frac{n\omega}{c} \vec{k}_0 = \frac{\omega}{c} n \vec{k}_0 = \frac{\omega}{c} \vec{n}$$

gde je  $\vec{k}_0$  ort svetlosnog zraka u posmatranoj tački, a  $\vec{n}$  vektor indeksa prelamanja

$$\nabla F = \frac{\omega}{c} \vec{n} \quad (21)$$

Neka se posmatra izvesna zatvorena kontura L koja se na jednom svom delu ACB poklapa sa svetlosnim zrakom (sl.1), a na preostalom delu BDA ima proizvoljan oblik i neka se formira integral izraza (21) po toj konturi



$$\oint_L \text{grad } F \cdot d\vec{l} = \oint_L dF = 0 = \frac{\omega}{c} \oint_L \vec{n} \cdot d\vec{l}$$

$$\oint_L \vec{n} \cdot d\vec{l} = \int_{ACB} \vec{n} \cdot d\vec{l} + \int_{BDA} \vec{n} \cdot d\vec{l} = 0$$

Ako se sa  $\alpha$  označi ugao izmedju vektora  $\vec{k}_0$  i  $d\vec{l}$ , i ako se ima u vidu da su duž svetlosnog zraka svi vektori kolinearni biće

$$\int_{ACB} \vec{n} \cdot d\vec{l} - \int_{ADB} \vec{n} \cdot d\vec{l} \cdot \cos\alpha = 0$$

$$\int_{ACB} \vec{n} \cdot d\vec{l} = \int_{ADB} \vec{n} \cdot d\vec{l} \cdot \cos\alpha$$

pošto je  $\cos\alpha \leq 1$ , može se pisati

$$\int_{ACB} \vec{n} \cdot d\vec{l} < \int_{ADB} \vec{n} \cdot d\vec{l} \quad (22)$$

što kazuje da optički put ima najmanju vrednost duž svetlosnog zraka. U obliku varjacionog principa

$$\delta \int_A^B \vec{n} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (23)$$

Prema tome optički put je minimalan duž svetlosnog zraka, a ovaj stav je poznat pod imenom Fermatov princip.

### 3.3. Hamiltonov i Maupertuisov princip

Svako stvarno kretanje sistema čestica vrši se tako da je ukupan rad svih aktivnih sila i fiktivnih sila inercije na ma kakvim virtuelnim pomeranjima sietma jednak nuli

$$\sum_{i=1}^N (\vec{F}_i - m_i \vec{a}_i) \delta \vec{r}_i = 0 \quad (24)$$

gde su  $\vec{F}_i$  - aktivne sile,  $(-m_i \vec{a}_i)$  - fiktivne sile inercije.

Ovaj zakon se naziva D'Alembert-Lagrangeov princip i predstavlja postulat kretanja. On se može transformisati na sledeći način:

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i = 0 \quad (25)$$

$$\sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i d\vec{r}_i - \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \delta \vec{r}_i = -dU' + dU = -\delta U$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i - \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \delta \vec{r}_i$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i &= \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \frac{\partial \vec{v}_i}{\partial q_j} \right) \delta q_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \frac{d}{dt} \delta \vec{r}_j = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \delta \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \delta \vec{v}_i = \delta T$$

$$\sum_{i=1}^N m_i \vec{v}_i \delta \vec{r}_i = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j - \delta T$$



gde su  $N$  - ukupan broj čestica sistema,  $n$  - broj stepeni slobode,  $U$  - potencijalna energija sistema,  $T$  - kinetička energija sistema. Znači obrazac (25) prelazi u

$$-\delta U - \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j + \delta T = 0$$

$$-\delta U + \delta T = \delta(T-U) = \delta L$$

gde je  $L$  - Lagrangeova funkcija. Konačno dobijamo

$$\frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \cdot \delta q_j = \delta L \quad (26)$$

Ovaj oblik D'Alambert-Lagrangeovog principa naziva se centralna Lagrangeova jednačina. Ako se integrale obe njene strane od  $t_0$  do  $t_1$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \cdot \delta q_j dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L \cdot dt$$

Pošto se na levoj strani uzajamno poništavaju operacije integralenja i diferencijaljenja po vremenu, a na desnoj strani može se izmeniti red operacije variranja i integraljenja, pretvodna jednačina se može napisati u obliku

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_0}^{t_1} = \delta \int_{t_0}^{t_1} L \cdot dt$$

Član sa leve strane je u datim granicama jednak nuli, tako da je

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} L \cdot dt = 0 \quad (27)$$

gde je  $W = \int_{t_0}^{t_1} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt$  - Hamiltonovo dejstvo.

Obrazac (27) predstavlja Hamiltonov princip koji kaže da se stvarno kretanje sistema čestica sa idealnim holonomnim vezama i potencijalnim silama vrši tako da Hamiltonovo dejstvo duž pravog puta ima stacionarnu vrednost u odnosu na dejstvo duž svih ostalih puteva:  $\delta W = 0$ . Ako se ovaj princip primeni na jednu česticu u polju konzervativnih sila odgovara-juća Lagrangeova funkcija će biti

$$L = \frac{1}{2} mv^2 - U(x, y, z)$$

pri čemu je energija ove čestice

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + U(x, y, z) = \text{const.}$$

$$L = \frac{1}{2} mv^2 - (E - \frac{1}{2} mv^2) = mv^2 - E$$

$$mv^2 dt = mvv dt = p \cdot dl$$

Hamiltonovo dejstvo dobija oblik

$$\text{ili } W = \int_{t_0}^{t_1} L \cdot dt = \int_{t_0}^{t_1} mv^2 dt - E \int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{M_0}^{M_1} p \cdot dl - E(t_1 - t_0)$$

$$W = W_1 - E(t_1 - t_0) \quad \text{gde je} \quad W_1 = \int_{M_0}^{M_1} p \cdot dl$$

$$\delta W = \delta \int_{M_0}^{M_1} p \cdot dl - \delta E(t_1 - t_0) = 0$$

$$\delta \int_{M_0}^{M_1} p \cdot dl = 0 \tag{28}$$

što predstavlja tzv. Mapertuis-Lagrangeov princip.

Ako se uporedi Fermatov princip (23) i Mapertuis-Lagrangeov princip (28), uočava se karakteristična analogija izmedju mehanike i geometrijske optike, pri čemu impulsu u mehanici odgovara indeks prelamanja u optici, a Lagrangeovom dejstvu u mehanici - optički put u optici. Imajući u vidu da su svetlosni zraci ortogonalne trajektorije ekvifaznih povr-

šina, može se zaključiti da su putanja čestica u konzervativnom polju ortogonalne trajektorije površina konstantnog Lagrangeovog dejstva. Ova formalna analogija izmedju mehanike i geometrijske optike nije našla nikakav dublji smisao u klasičnoj fizici, ali iz nje je nikla kvantna mehanika.

### 3.4. De Brogliejeva hipoteza i brzina materijalnih talasa

Analogija izmedju mehanike i geometrijske optike kaže nam da, umesto da se posmatra kretanje korpuskule u polju sa potencijalom  $U(x,y,z)$  može se posmatrati kretanje svetlosnih zraka u optički nehomogenoj sredini sa podesno izabranim indeksom prelamanja  $n(x,y,z)$  i obrnuto. Međutim, geometrijska optika ne može da objasni sve osobine svetlosti, kao što su interferencija, difrakcija, itd. Za objašnjenje ovih pojava neophodno je koristiti talasnu optiku koja ima šire značenje. Sa druge strane Newtonova mehanika ima ograničenu primenljivost, npr. ona ne može da objasni postojanje diskretnih energetskih nivoa u atomima. De Brogliejeva ideja se sastojala u tome da je neophodno proširiti analogiju izmedju geometrijske optike i mehanike i da se analogno talasnoj optici izgradi talasna mehanika, koja će biti opštija od klasične mehanike i primenjiva na pojave i u atomima. Kod optičkih pojava koristila se relacija (10) da bi se definisao impuls fotona - korpuskule čija je masa mirovanja jednaka nuli, a koja se kreće brzinom svetlosti  $c$ . Prema De Broglieu ista relacija daje za "obične čestice" talasnu dužinu ravnih monohromatskih talasa, koji se mogu pripisati ovim česticama.

$$\lambda = \frac{h}{mv} \quad (29)$$

gde je  $m$  - masa čestice, različita od nule,  $v$  - brzina kretanja čestice.

Veličina  $1/\lambda$  naziva se talasni broj ili broj talasa po jedinici dužine monohromatskog talasa i u talasnoj optici se obeležava sa  $k$ . Prema tome, na osnovu relacije (29) sledi

$$p = hk \quad (30)$$

Kako je impuls vektor ( $\vec{p}$ ),  $h$  - skalarna veličina, može se smatrati da je  $k$  moduo vektora  $\vec{k}$  ( $|k\vec{k}| = 1/\lambda$ ) čiji je pravac isti sa pravcem prostiranja talasa talasne dužine  $\lambda$ , te je

$$\vec{p} = h\vec{k} \quad (31)$$

Gornja relacija važi za čestice gde je  $\vec{p} = mv$ , impuls, a  $\vec{k}$  - vektor talasnog broja pripisanog materijalnog talasa. Ako se relacija (31) zameni u relaciji (13), tj. u rešenje talasne jednačine u homogenoj, izotropnoj sredini, dobija se

$$\psi = a e^{i(2\pi vt - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

odnosno, ako se stavi da je  $E = hv$

$$\psi = a e^{i(\frac{2\pi i}{h}Et - \vec{p} \cdot \vec{r})} \quad (32)$$

što predstavlja formulu ravnog monohromatskog talasa koji opisuje kretanje slobodne korpuskule.

Fazna brzina ovog (De Brogliejevog) talasa izračunava se kao

$$c' = \frac{v}{k} = \frac{hv}{hk} = \frac{E}{p} = \frac{mc^2}{mv} = \frac{c^2}{v} \quad (33)$$

$$c' > c$$

što znači da je fazna brzina De Brogliejevog talasa veća od brzine svetlosti u vakuumu. To je sasvim očekivani rezultat, jer fazna brzina ne karakteriše ni brzinu "signala" ni brzinu prenošenja energije, pa zbog toga može biti i manja i veća od brzine svetlosti.

Grupna brzina De Brogliejevog talasa jednaka je

$$g = \frac{dv}{dk} = \frac{d(hv)}{d(hk)} = \frac{dE}{dp} = \frac{v \cdot dp}{dp} = v$$

jer je

$$dE = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{s} = d\vec{p} \cdot \frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{v} \cdot d\vec{p} = v \cdot dp$$

pa je prema tome

$$g = v \quad (34)$$

što znači da je grupna brzina De Brogliejevih talasa jednaka brzini korpuskula.

Pregled relacija izmedju poznatih korpuskularnih i talasnih veličina dat je u tablici I.

TABLICA I

FIZČKA VELIČINA	FOTON U VAKUUMU	SLOBODNA (OD SPOLJNIH SILA) MATERIJALNIH ČESTICA
masa mirovanja	$m_0 = 0$	$m_0 > 0$
masa	$m = \frac{hv}{c^2} = \frac{h}{c\lambda}$	$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$
brzina	$c$	$v$
impuls	$mc = \frac{hv}{c} = \frac{h}{\lambda} = hk$	$mv = \beta mc$
frekvencija	$\nu$	$\nu = \frac{mc^2}{h}$
talasna dužina	$\lambda = \frac{c}{\nu}$	$\lambda = \frac{h}{mv}$
fazna brzina	$c$	$c' = \frac{c^2}{\nu} > c$
grupna brzina	$c$	$g = \frac{dv}{dk} = v$

Red veličine talasne dužine De Brogliejevih talasa kod nekih korpuskula dat je u sledećim primerima:

ELEKTRON:  $m = 9,107 \cdot 10^{-28} \text{ g}$ ,  $v = 2,13 \cdot 10^8 \text{ cm/s}$  (na prvoj putanji vodonikovog atoma),  $h = 6,624 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$   
 $\lambda = \frac{h}{mv} = 0,3336 \text{ nm}$

ATOM KISEONIKA:

$$m = 53 \cdot 10^{-24} \text{ g na temperaturi } t = 25^\circ \text{C}, v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$$

$$\lambda = \frac{h}{m \sqrt{\frac{3kT}{m}}} = \frac{h}{\sqrt{3mkT}} = 0,0258 \text{ nm}$$

PUŠČANO ZRNO:

$$m = 8 \text{ g}, v = 9 \cdot 10^4 \text{ cm/s}$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 0,92 \cdot 10^{-25} \text{ nm}$$

TELO:  $m = 1 \text{ kg}$ ,  $v = 1 \text{ km/s}$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = 0,6624 \cdot 10^{-27} \text{ nm}$$

Iz dobijenih rezultata u navedenim primerima vidi se da za elektron i atom kiseonika talasna dužina De Brogliejevog talasa ima vrednost koja odgovara talasnoj dužini x-zraka. Prema tome, dužine ovih talasa mogu se meriti tehnikama kao kod x-zračenja, kao što ćemo videti u daljem izlaganju. Međutim, talasna dužina De Brogliejevog talasa koji odgovara puščanom metku i većim masama u kretanju, neizmerljivo je mala, ne može se eksperimentalno utvrditi i meriti, što znači da talasi materije dolaze do izražaja samo kod mikroskopskih čestica, dok kod makroskopskih tela izvansu mogućnosti opažaja.

#### 4. EKSPERIMENTALNE POTVRDE DE BROGLIEJEVE HIPOTEZE

De Brogliejeva hipoteza je u veoma kratkom roku sjajno potvrđena eksperimentima. Upravo, bilo je pokazano da mlazevi elektrona, protona i celih atoma pokazuju interferentne pojave slične svetlosti ili x-zracima.

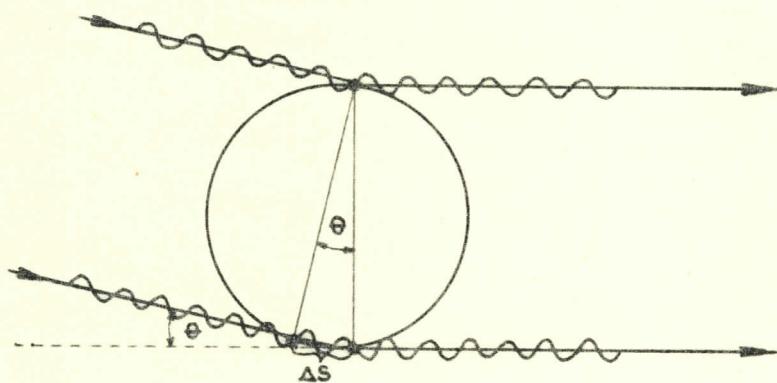
##### 4.1. Difrakcija x-zraka

Opšte je poznata činjenica da se sa x-zracima mogu ostvariti iste difrakcione pojave kao sa svetlošću. Najjednostavniji i praktično najvažniji postupak za ostvarivanje difrakcije x-zraka zasniva se na primeni kristala kao difrakcione rešetke. Uzrok lakog ostvarenja difrakcije x-zraka pomoću kristala leži u tome što je red veličine medjuatomskih rastojanja u kristalu isti kao i red veličine talasne dužine x-zraka (oko  $0,1 \text{ nm}$ ). Po red x-zračenja, na kristalnoj rešetki se može izazvati i difrakcija elektronskog i neutronskog zračenja jer ova dva zračenja još zadovoljavaju dva osnovna uslova za mogućnost difrakcije: imaju talasnu dužinu reda veličine perioda translacije kristalne rešetke i pri toj talasnoj dužini imaju dovoljnu prodornu moć.

Prvi je, da se za difrakcionu rešetku upotrebi prirodna trodimenzionalna rešetka - kristal, dao ideju Max von Laue 1912.

godine. Ovu hipotezu su 1913. godine eksperimentalno proverili Friedrich i Knipping, propuštajući snop koliminisanog x-zračenja kroz kristal bakrosulfata  $\text{CuSO}_4$ . Oko centralnog snopa, koji je nepromjenjen prošao kroz kristal, dobijene su na filmu difrakcione tačke po obimu koncentričnih krugova, koje su jasno pokazivale da je Laueova ideja bila ispravna. Mehanizam ovog procesa može se objasniti na sledeći način:

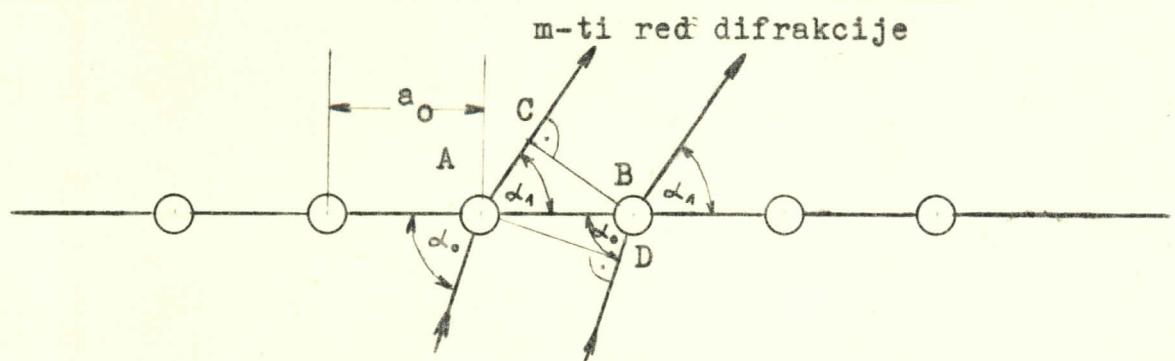
x-zrak je elektromagnetni talas i kao takav jednim delom se sastoji iz promenljivog električnog polja odredjene frekvencije. Ako se jedan elektron nadje na putu takvog talasa, on će biti nateran silom polja da prinudno osciluje istom frekvencijom. Elektron koji vrši prinudne oscilacije iste frekvencije sa inicijalnim zračenjem (oscilacije čija amplituda zavisi od jačine veze elektrona) i sam postaje izvor istih takvih talasa (analogno Huygensovoj teoriji). Talas koji nastaje od ovih vibracija je, razumljivo, sferan. Druga je činjenica da se atom sa mnoštvom elektrona ne može ponašati kao tačka, jer u odnosu na talasnu dužinu x-zraka on ima konačne dimenzije, prema tome dobiće se faktor interferencije u zavisnosti od ugla rasejanja, te će difraktovani zrak slabiti manje ili više u zavisnosti od ugla rasejanja  $\theta$ , ili putne razlike  $\Delta s$ . (slika 2).



slika 2.

#### 4.2. Laueovi uslovi difrakcije

Neka je dat niz atoma sa određenim translacionim periodom  $a_0$  i neka na njega padne snop monohromatskih x-zraka talasne dužine  $\lambda$  (slika 3.)



slika 3.

$$\Delta s = \overline{AC} - \overline{DB}$$

$$\overline{AC} = a_0 \cdot \cos \alpha_1$$

$$\overline{DB} = a_0 \cdot \cos \alpha_0$$

$$\Delta s = a_0 (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_0) = m \lambda$$

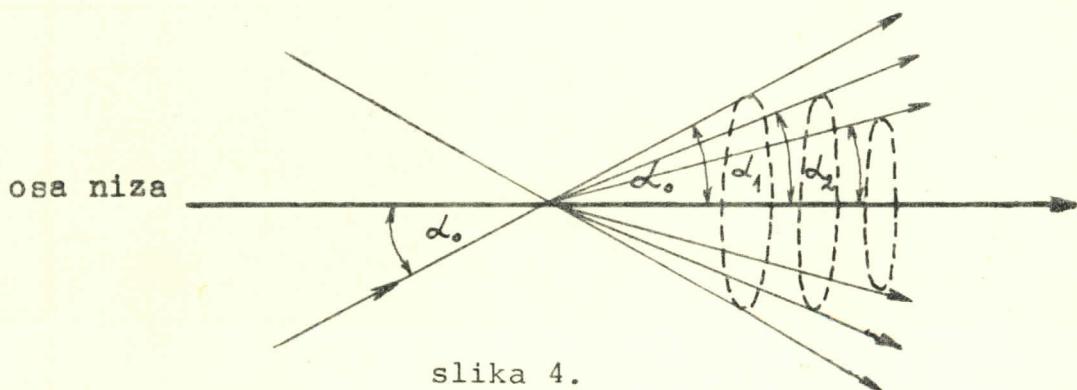
$$a_0 (\cos \alpha_1 - \cos \alpha_0) = m \lambda \quad (35)$$

Ako je intefrenecija pozitivna, tj. ako se superponirani talasi maksimalno pojačavaju, tada je  $m$  ceo broj. Znači, za datu konstantu  $a_0$ , za datu talasnu dužinu  $\lambda$ , pojačanje se javlja za

$$\cos \alpha_i = \cos \alpha_0 + \frac{m \lambda}{a_0} \quad i = (0, 1, 2, \dots)$$

$$m = (0, 1, 2, \dots)$$

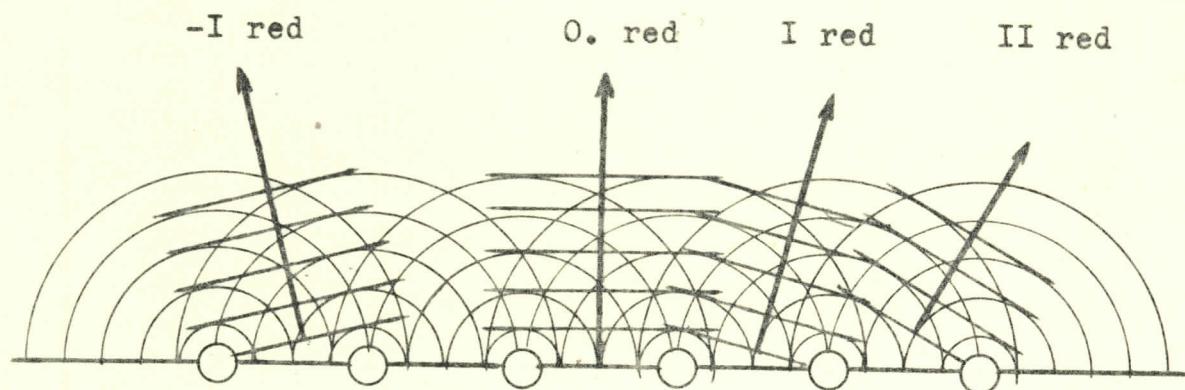
Ako rasejanje oko ose niza nije favorizovano u nekom određenom pravcu, tada će se iz jedne ishodišne tačke na nizu oko ose niza javiti konusi maksimalnog pojačanja u prostornom ugлу  $\alpha_i$ . (slika 4.).



slika 4.

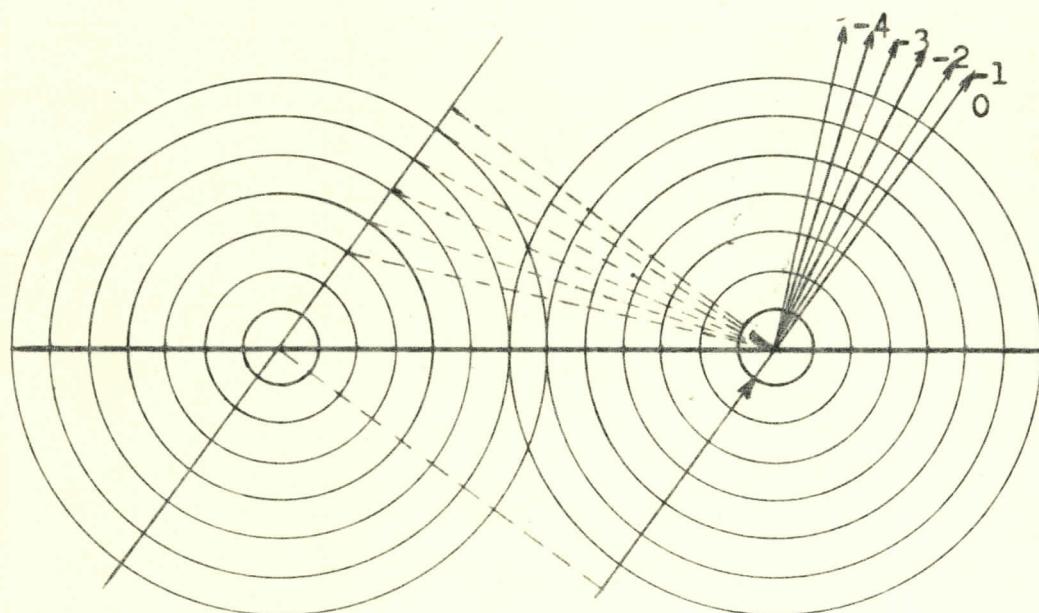
Konusi na slici 4. su pozitivni. Kada bi ih bilo i na drugoj strani, ti bi bili negativni.

Cela slika se može posmatrati sa čisto talasnog stanovišta, uzimajući u obzir da je talasni front tangenta na čela sfernih talasa koji su u fazi. Tada se lako može uočiti kako se obrazuju difrakcioni frontovi (slika 5.).



slika 5.

Ceo crtež se može zнатно упростити, сводећи га на случај све тачке (slika 6.):

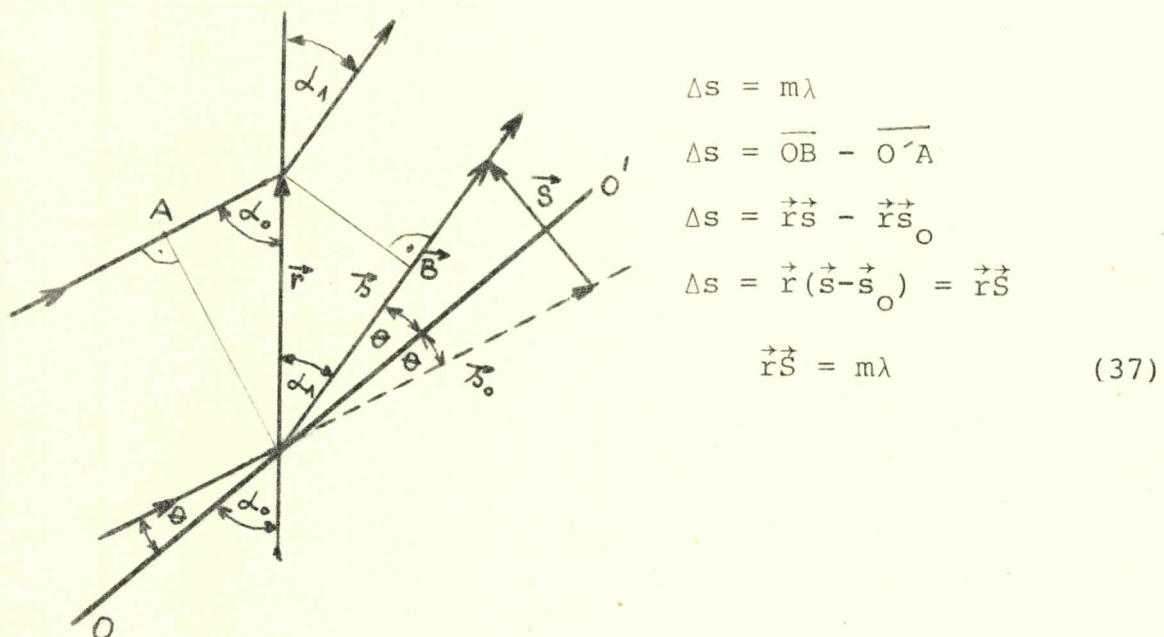


slika 6.

Ako se ista rezonovanja primene na mrežu i na kraju na kristalnu rešetku, dobijaju se tzv. Laueovi uslovi difrakcije.

$$\begin{aligned} a_0(\cos \alpha_1 - \cos \alpha_0) &= m\lambda \\ b_0(\cos \beta_1 - \cos \beta_0) &= n\lambda \\ c_0(\cos \gamma_1 - \cos \gamma_0) &= p\lambda \end{aligned} \quad (36)$$

Ovi uslovi se mogu izvesti i pronalazeći ravan koja se ponaša kao reflektujuća. To je tzv. vektorsko izvodjenje Laueovih uslova. (slika 7.).



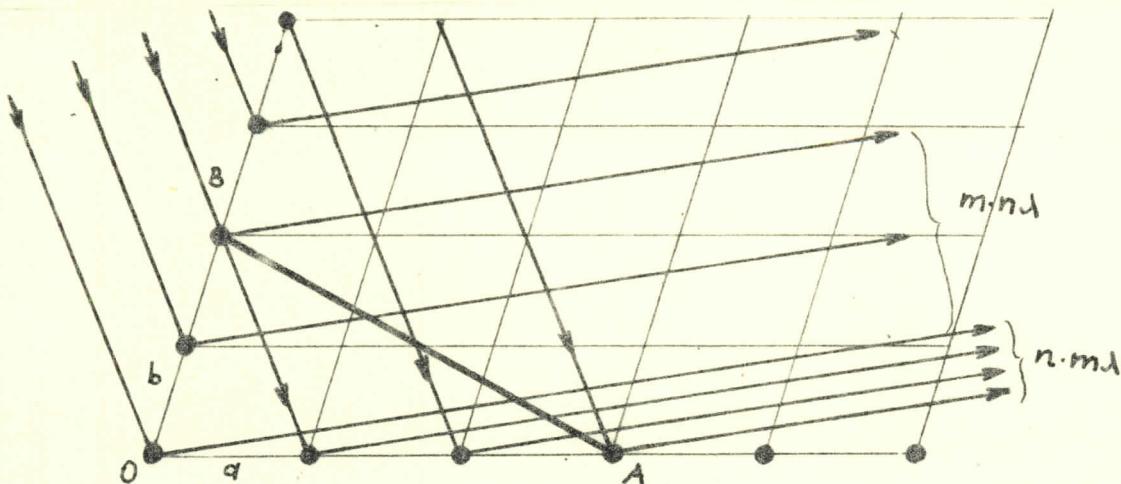
slika 7.

Ravan ( $OO'$ ) normalna na  $\vec{S}$  ponaša se kao reflektujuća ravan.  
 $\vec{s}_0$  - ort neskrenutog zraka,  $\vec{s}$  - ort skrenutog zraka

$$|\vec{S}| = 2 \sin \theta \quad \text{pošto je } |\vec{s}| = |\vec{s}_0| = 1$$

#### 4.3. "Refleksija" x-zraka

Da bi se utvrdila reflektujuća ravan, treba da se pronadju prelomna mesta dva difraktovana zraka u istom pravcu koji su u fazi. Ravan povučena kroz te dve tačke ponašaće se kao reflektujuća. Neka je difraktovani zrak odredjen presekom konusa m-tog reda sa niza a i konusa n-tog reda sa niza b. Putna razlika izmedju zraka sa susednih čvorova niza a iznosi  $m\lambda$ , a sa niza b -  $n\lambda$  (prikazano na slici 8.):



slika 8.

Zrak sa A žuri u odnosu na O za n m

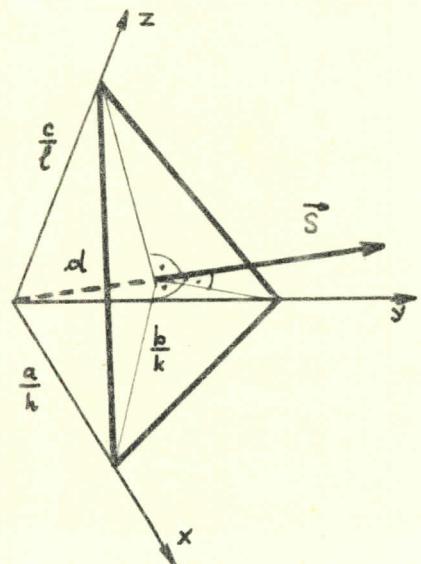
Zrak sa B žuri u odnosu na O za m n)

Znači, sa A i B su zraci u fazi i ravan AB se može smatrati kao ravan refleksije. Ovo se isto može izvesti i u slučaju trodimenzionalne rešetke:

$$\frac{x}{mp} + \frac{y}{np} + \frac{z}{mn} = 1$$

$$\frac{x}{h} + \frac{y}{k} + \frac{z}{l} = 1$$

Ova "refleksija" x-zraka se vrši prema Bragg-Wulfovom zakonu, koji je dat 1913. godine (slika 9.)



$$\vec{r}\vec{s} = m\lambda$$

$$a \cdot 2\sin\theta\cos(\vec{a}\vec{s}) = m\lambda$$

$$b \cdot 2\sin\theta\cos(\vec{b}\vec{s}) = n\lambda$$

$$c \sin\theta \cos(\vec{c}\vec{s}) = p\lambda$$

$$\cos(\vec{a}\vec{s}) = \frac{n\lambda}{2a\sin\theta} = \frac{d}{a/h}$$

$$\cos(\vec{b}\vec{s}) = \frac{n\lambda}{2bs\sin\theta} = \frac{d}{b/k}$$

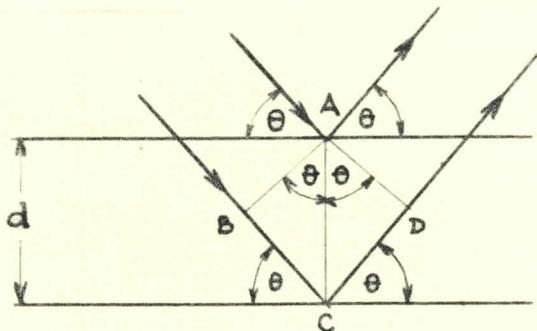
$$\cos(\vec{c}\vec{s}) = \frac{n\lambda}{2cs\sin\theta} = \frac{d}{c/l}$$

slika 9.

$$d = \frac{m}{h} \frac{\lambda}{2\sin\theta} = \frac{n}{k} \frac{\lambda}{2\sin\theta} = \frac{p}{l} \frac{\lambda}{2\sin\theta} = n \frac{\lambda}{2\sin\theta}$$

$$2ds\sin\theta = n\lambda, \quad (n - \text{ceo broj}) \quad (38)$$

Interpretacija Bragg-Wulfovog zakona (slika 10.):



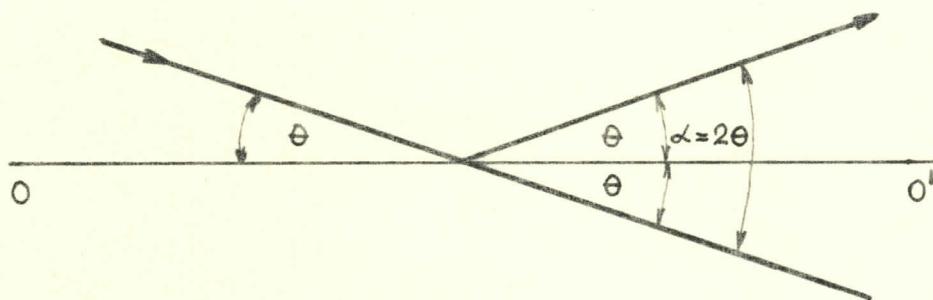
$$\Delta s = \overline{BC} + \overline{CD} = 2\overline{BC}$$

$$\Delta s = 2ds\sin\theta = n\lambda$$

$$2ds\sin\theta = n\lambda$$

slika 10.

tj. ako postoje dve podjednake ravni (hkl) na rastojanju  $d$  i na njih padaju x-zraci pod Braggovim uglom  $\theta$ , tada će izmedju zraka koji se "reflektovao" na drugoj ravni, postojati putna razlika  $\Delta s$  koja daje pozitivnu interferenciju ukoliko je jednaka celobrojnom umnošku talasne dužine. Kod merenja Braggovih uglova treba imati u vidu da je ukupan ugao skretanja difrakovanog zraka  $\alpha = 2\theta$  (slika 11.)



slika 11.

Za datu talasnu dužinu mogu da se jave samo oni refleksioni maksimumi koji zadovoljavaju uslov

$$2\sin\theta = \frac{n\lambda}{d} \quad \text{odnosno} \quad \frac{n\lambda}{d} \leq 2 \quad (39)$$

#### 4.4. Difrakcija elektrona; Davissone-Germerov ogled

Već je Elsasser 1925. godine na osnovu De Broglie-jeve hipoteze došao do zaključka da bi pri prolasku elektrona kroz kristal morala nastupiti pojava difrakcije, slično kao kod x-zraka. Da bi se znalo kakve eksperimentalne metode treba primeniti u datom slučaju da bi se zapazila interferencija, treba razmotriti red veličine De Brogliejeve talasne dužine za elektrone. Neka se predpostavi da je u pitanju mlaz elektrona koji se ubrzava potencijalnom razlikom  $U$ , koja je dovoljno mala da se mogu primenjivati formule klasične mehanike. Brzina elektrona određena je relacijom

$$\frac{mv^2}{2} = eU \quad (40)$$

$$v = \sqrt{\frac{2eU}{m}} = \frac{\sqrt{2meU}}{m}$$

$$mv = \sqrt{2meU}$$

a De Brogliejeva talasna dužina

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2meU}} \quad (41)$$

Zamene li se brojne vrednosti za  $m$ ,  $v$  i  $h$  u gornji obrazac dobija se

$$\lambda = \sqrt{\frac{150}{U}} 10^{-10} [\text{m}]$$

odnosno

$$\lambda = \sqrt{\frac{1,5}{U}} = \frac{1,225}{\sqrt{U}} [\text{nm}] \quad (42)$$

ako je  $U$  dato u Voltima.

Ako je brzina elektrona velika, neophodno je uvesti relativističku korekciju za zavisnost mase od brzine

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (43)$$

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{m_0 v} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (44)$$

Prema teoriji relativiteta

$$E_k = m_0 c^2 \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right) = eU$$

odavde sledi da je

$$v = c \sqrt{1 + \frac{1}{\left( 1 + \frac{eU}{m_0 c^2} \right)^2}} \quad (45)$$

što zamenjujući u jednačinu (44) daje

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{\frac{m_0 e}{1,5} U \left( 1 + \frac{eU}{2m_0 c^2} \right)}}$$

odnosno

$$\lambda = \sqrt{\frac{h^2}{m_0 e}} \sqrt{\frac{1,5}{U}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{eU}{2m_0 c^2}}} \quad (46)$$

Smenjivanjem poznatih konstanti dobija se približno:

$$\lambda = \sqrt{\frac{1,5}{U}} (1 - 0,489 \cdot 10^{-6} U) \quad [\text{nm}] \quad (47)$$

Pri istoj brzini elektrona i protona, De Brogliejeva talasna dužina za protone manja je  $\sqrt{1836}$  puta. U tablici II navedene su izračunate vrednosti za elektrone i protone

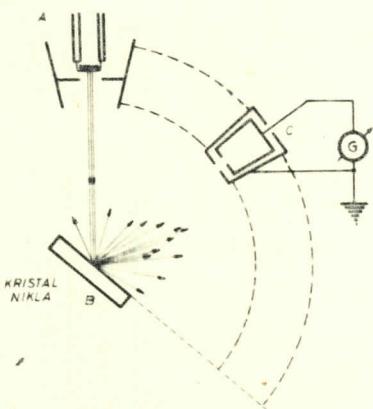
TABLICA II

ubrzavajući napon (u voltima)	talasna dužina u nm	
	elektroni	protoni
$10^9$	$0,12 \cdot 10^{-5}$	$0,73 \cdot 10^{-6}$
$10^8$	$0,12 \cdot 10^{-4}$	$0,27 \cdot 10^{-5}$
$10^7$	$0,12 \cdot 10^{-3}$	$0,09 \cdot 10^{-4}$
$10^6$	$0,087 \cdot 10^{-3}$	$0,29 \cdot 10^{-4}$
$10^5$	$0,37 \cdot 10^{-2}$	$0,90 \cdot 10^{-3}$
$10^4$	$0,012$	$0,29 \cdot 10^{-3}$
$10^3$	$0,039$	$0,90 \cdot 10^{-3}$
400	$0,061$	$0,14 \cdot 10^{-2}$
200	$0,086$	$0,20 \cdot 10^{-2}$
50	$0,17$	$0,40 \cdot 10^{-2}$
10	$0,39$	$0,09 \cdot 10^{-1}$

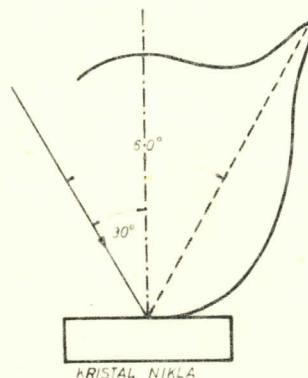
Još pre pojave De Brogliejeve hipoteze bila je zapožena interferencija elektronskih mlazeva sa kristala. Od 1921. do 1923. godine Davisson i Kensmann su pronašli da se pri rassturanju elektrona u tankim metalnim listićima posmatra na odredjeni način izražena zavisnost intenzivnosti od ugla rasturanja. Pri tome položaj i veličina maksimuma bitno su zavisili od brzine elektrona. Objašnjenje ove pojave bilo je vrlo teško, dok se nije shvatilo da je u pitanju primer za interferenciju nastalu refleksijom. Sledeći eksperimenti Davisona i Germera potvrdili su ispravnost ovog objašnjenja. Eksperimentalni uređaj kojim su se oni koristili dat je na slici 12.

Paralelan mlaz elektrona odredjene brzine dobija se pomoću elektronskog topa (A), sa kojeg se upravlja na kristal (B). Odbijene elektrone hvata kolektor (C), vezan za galvanometar. Kolektor može biti postavljen pod bilo kojim uglom u odnosu na upadne elektrone, a da sve vreme ostane u istoj ravni. Mereći jačinu struje u kolu sa različitim položajima kolektora, moglo se suditi o intenzivnosti refleksija u različitim pravcima. Dobijen je rezultat koji je prikazan u obliku polarnog dijagrama (slika 13.). Vidi se da se elektroni odbijaju prema optičkom zakonu koji govori o jednakosti upadnog i odbojnog ugla. Ovaj eksperiment predstavlja tačnu analogiju Braggove metode interferentnog odbijanja x-zraka sa kristala. Poznato je već da se x-zraci odbijaju sa kristala samo u slučaju kada njihova ta-

lasna dužina i ugao sjaja  $\theta$  zadovoljavaju relaciju  $n\lambda = 2ds\sin\theta$ .



slika 12.



slika 13.

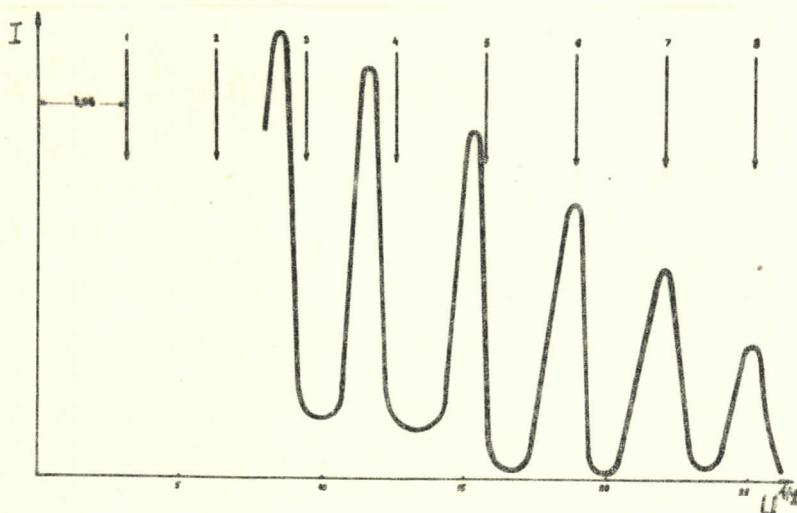
Prema ovoj formuli na kristal se mogu upraviti zraci odredjene talasne dužine  $\lambda$  i okretanjem kristala može se utvrditi da odbijanje nastaje samo pri odredjenim uglovima  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$  koji odgovaraju vrednostima  $n = 1, 2, 3, \dots$  u Bragg-Wulfovomu formuli. Tako se dobijaju spektri prvog, drugog, itd. reda. Međutim, u slučaju elektronske interferencije jednostavnije je zadržati isti ugao sjaja  $\theta$ , a da se neprekidno menja talasna dužina, pošto je prostije menjati brzinu elektrona u mlazu od koje zavisi talasna dužina, nego okretati kristal. Pri tome, odbijanje treba posmatrati samo u slučaju kada je  $\lambda_n = \frac{1}{n} 2ds\sin\theta$ , tj. za talasne dužine  $\lambda_1, \lambda_2 = \lambda_1/2, \lambda_3 = \lambda_1/3, \dots$  itd. Kombinujući ovaj obrazac sa obrazcem (42) dobija se

$$\frac{1,225}{\sqrt{U}} = \frac{1}{n} \cdot 2ds\sin\theta$$

odnosno

$$U^{1/2} = n \cdot \frac{1,225}{2ds\sin\theta} \quad (48)$$

Ako se predstavi grafička zavisnost intenzivnosti odbijanja od ubrzavajućeg napona, tj. kvadratnog korena iz napona ( $I, U^{1/2}$ ), može se konstruisati kriva koja ima niz podjednako razmaknutih oštrenih maksimuma na razmacima  $\frac{1,225}{2ds\sin\theta}$ . Ova kriva je prikazana na slici 14. za monokristal nikla uz uslov da su  $\theta = 80^\circ$  i  $d = 0,203 \text{ nm}$ .



slika 14.

Strelicama su prikazani maksimumi izračunati na osnovu Bragg-Wulfove jednačine koji su, kao što se vidi na slici 14., za manje vrednosti  $n$  pomerene udesno od eksperimentalno dobijenih maksimuma. To neslaganje za velike talasne dužine se javlja zato što nije uzet u obzir indeks prelamanja De Brogliejevih talasa. Za veće talasne dužine kako u oblasti x-zraka tako i u oblasti elektrona mora biti primenjena korigovana Bragg-Wulfova jednačina

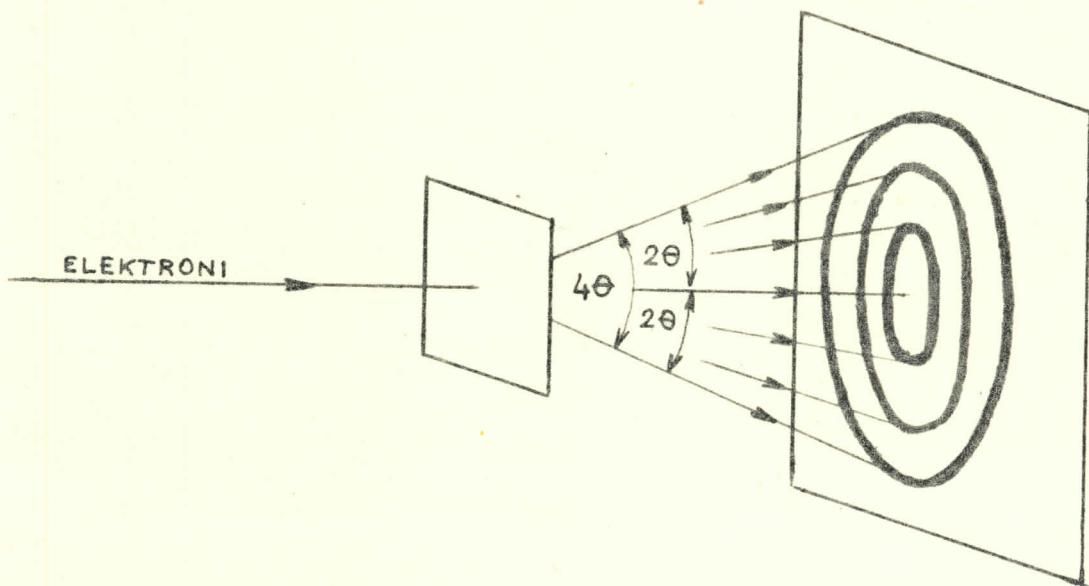
$$2d \sqrt{\mu^2 - \cos^2 \theta} = n\lambda \quad (49)$$

gde je  $\mu$  indeks prelamanja, koji je različit od jedinice.

#### 4.5. Debye-Scherrerova metoda za proučavanje difrakcije elektrona

Veliki broj materijala, kao što su metali, grafit, kuhinjska so i sl. imaju mikrokristalnu strukturu, tj. sačinjeni su iz velikog broja malih kristala proizvoljno orjentisanih u prostoru. Ovo stanje u kristalografskoj se naziva kristalni prah. Ako uzan snop elektrona prolazi kroz takav kristalni prah, medju tim kristalićima će uvek biti i onih koji su u odnosu na upadni mlaz elektrona orjentisani pod uglom koji zadovoljava Bragg-Wulfovu jednačinu (38). Ovi elek-

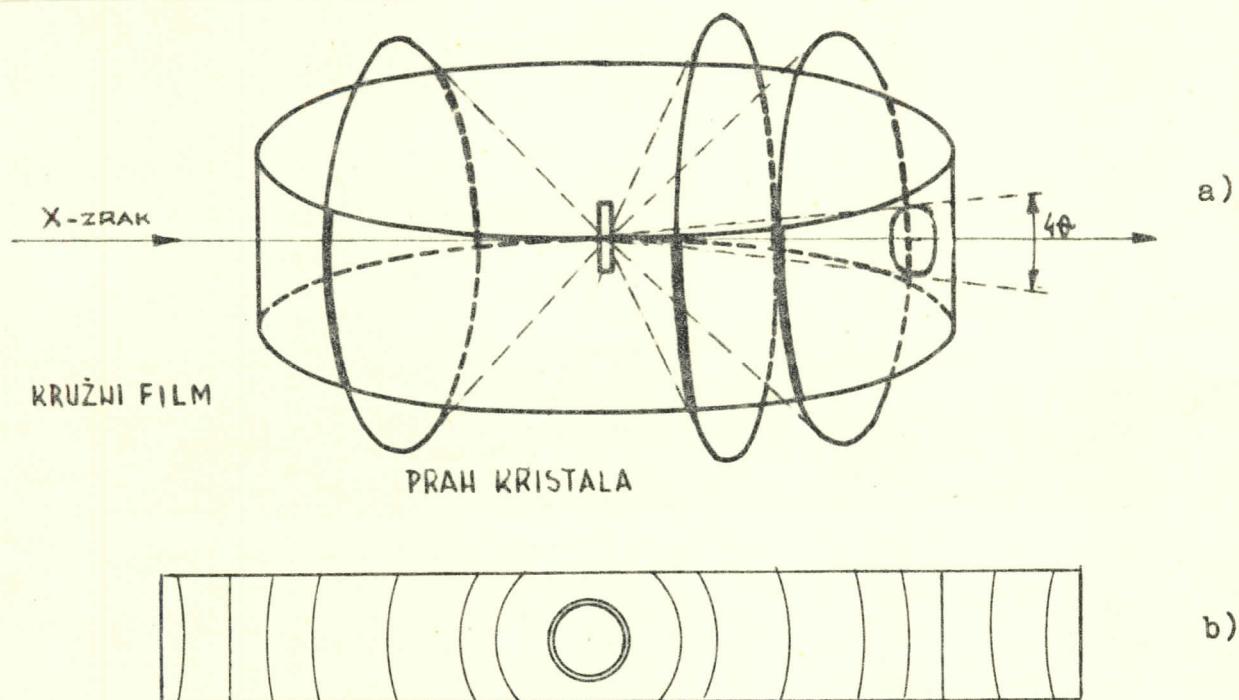
troni će se ponašati kao što bi se ponašali i x-zraci, tj. skrenuće za  $2\theta$  u odnosu na svoj prvobitni pravac. Prema tome reflektovani zraci idu duž obvojnica konusa čiji je ugao otvora  $4\theta$  (slika 15.). Ako se na put ovakvih elektrona stavi ravan fotografiski film kao na slici 15., zraci koji pripadaju jednom konusu ostavljuju na filmu tragove u obliku kružnog prstena tako da svaki prsten odgovara određenom nivou atomskih ravni (d) i određenom redu refleksije (n). Ako se žele registrovati svi konusi tada se preparat (K) okruži fotografskim filmom (F) analogno Debye-Scherrerovoj metodi sa x-zracima, koja je prikazana na slici 16.



slika 15.

Elektronogramme Debye-Scherrerovog tipa uspeo je prvi put da dobije G.P. Thomson sa brzim elektronima (17500 - 56500 eV), a zatim Taratovski sa relativno sporim elektronima (do 1700 eV). Da se radilo o elektronima, a ne o x-zracima dokazalo se na taj način što se uključivalo magnetno polje koje je deformisalo samo elektronogram, dok na rentgenogram nije imalo uticaja.

Iz snimka dobijenih sa elektronskim zracima Debye-Scherrerovom metodom mogu se izračunati konstante rešetke za



slika 16.

različite kristale, pa se može izvršiti poredjenje sa rezultatima koje za iste kristale daju x-zraci. Dobijaju se vrednosti koje se medju sobom veoma dobro slažu kao što je to prikazano tablicom III.

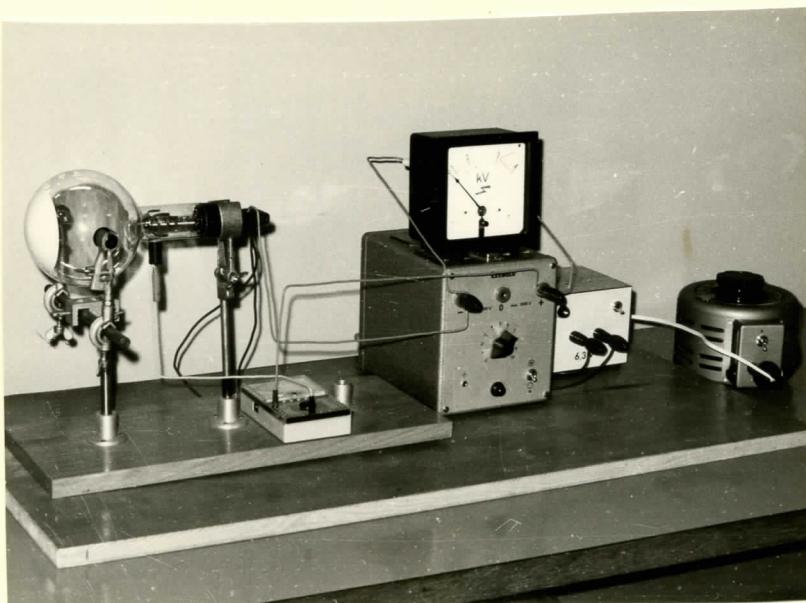
TABLICA III

KRISTAL	KONSTANTA REŠETKE ( u nm ) na osnovu interferencije	
	elektrona	x - zraka
Al	0,4035	0,4036
Au	0,399-0,420	0,406
Pt	0,389	0,391
Pb	0,499	0,492
Fe	0,285	0,286

Rezultati ovih eksperimenata potvrđuju De Brogliejevu hipotezu da elektroni koji se kreću ispoljavaju osobine karakteristične za talasno kretanje.

## 5. PRINCIJELAN OPIS UREDJAJA I NAČIN MERENJA

Uredjaj za izvodjenje eksperimenta sa difrakcijom elektrona na slici 17., sastoji se iz elektronske difrakcione cevi "TEL 555" (a) proizvodnje Telford Way London, England, visokonaponskog ispravljača (b) - "Leybold's Nachfolger Köln - Mayental", instrumenta za grejanje katode (c) (transformator, pravljen), kilovoltmetra (d) i jednog promenljivog transformatora (e) za regulisanje napona grejanja.



slika 17.

Difrakciona cev sadrži elektronski top, koji emituje konvergentan, uzan snop elektrona (katodnih zraka) unutar evakuisanog, providnog, staklenog balona, na površinu na kojoj se nalazi luminescentni ekran (1). Katodni zraci prolaze kroz tanak sloj grafitnog ugljenika, nanetog na finu mrežicu na izlaznoj blendi topa (2) i difraktuju se. Kao rezultat te

milimetarskim priključkom na kapi vrata cevi.

Da bi se postigli optimalni uslovi eksperimenta bilo je potrebno uključiti instrumente po sledećem redosledu: prvo se uključi instrument za grejanje katode, preko promenljivog transformatora i pričeka se jedan minut da katoda postigne svoju radnu temperaturu. Pri tome treba kontrolisati da je anodni napon nula. Indirektno grejana katoda upotrebljena u ovoj cevi predviđena je za normalan rad pri anodnoj struji ne većoj od  $500 \mu\text{A}$ . Prilikom merenja kontrolisana anodna struja uvek je bila  $400 \mu\text{A}$  i prema njoj je podešavan napon grejanja od  $3 - 6 \text{ V}$  (pomoću promenljivog transformatora). Ukoliko se anodna struja ne bi kontrolisala i držala ispod  $500 \mu\text{A}$ , moglo bi doći do razaranja fluorescentnog ekrana ili sloja grafita (mete), jer elektronska emisija može postepeno da raste sa vremenom rada cevi uprkos konstantnom naponu grejanja, što dovodi do širenja prstenova i do pojačavanja njihove intenzivnosti.

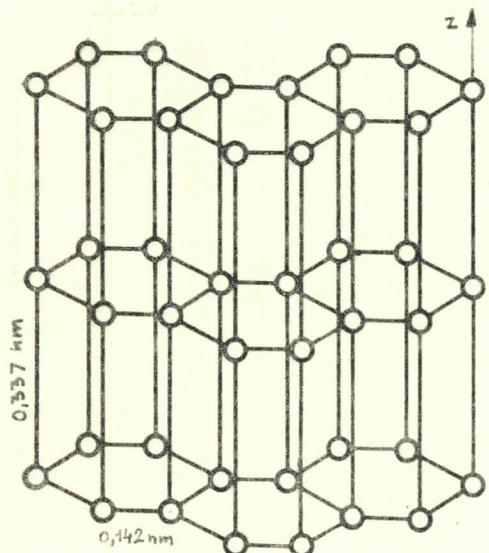
Visoki napon se dobija iz visokonaponskog ispravljača (b), reguliše se dugmetom (K), meri se kolovoltmetrom (d) i kreće se od  $1 - 4 \text{ KV}$ . Varjacija anodnog napona prouzrokuje promenu prečnika prstenova, naime smanjenje anodnog napona rezultira povećanje prečnika i obrnuto. U dovoljno zamračenoj prostoriji mogu se videti prstenovi sve do anodnog napona od  $1 \text{ KV}$ . Pri malom naponu se čak zapaža i treći difrakcioni prsten koji odgovara ravni (002).

Prečnici prstenova mere se pomoću šestara ili pomoću milimetarske hartije.

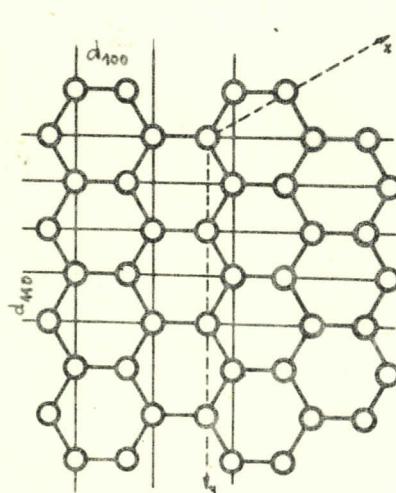
## 6. KRISTALNA REŠETKA GRAFITA

Grafit je alotropska modifikacija ugljenika. Kristališe u heksagonalnom sistemu, što znači da je osnovni poliedar heksagonalna prizma, ograničena sa šest pravougaonih prizmatičnih pljosni i sa dve paralelne pljosni oblika pravilnog heksagona (slike 18a. i 18b.) Kristalografske ose sistema su tri ivice ovog poliedra koje se sekut u istom roglju i međusobno zaklapaju uglove  $\alpha = \beta = 90^\circ$  i  $\gamma = 120^\circ$  tj.  $a = b \neq c$ . Atomi u-

gljenika se rasporedjuju u slojeve tako, da je svaki atom okružen sa tri druga atoma; njihovo rastojanje je 0,142 nm. Ovakvi slojevi međusobno su udaljeni 0,337 nm i vezani su slabim Van der Waalovim silama zbog čega grafit ima gotovo savršenu cepljivost po pljosni paralelnoj pravcu prostiranja ovih slojeva.



slika 18a.



slika 18b.

Rastojanje izmedju atomskih ravni kod grafita, dobijene pomoći difrakcije x-zraka date su u tablici IV.

TABLICA IV

$d_{(hkl)}$ (nm)	Intenzitet	$hkl$
0,325	100	002
0,213	50	100
0,204	50	101
0,1804	30	102
0,1675	80	004
0,1541	60	103
0,1230	90	110
0,1154	90	112
0,1117	60	006
0,1014	30	202
0,0991	80	114
0,0988	60	106

Atomske ravni koje su podvučene u tablici IV prikazane su na slici 18b., predstavljaju ravni sa kojih difraktuju elektroni u ovom eksperimentu. Difrakcija x-zraka talasne dužine  $\lambda_{\text{Cu}} = 0,154 \text{ nm}$ , na listiću polikristalnog grafita (Debye-Scherrer-ova metoda), snimljena prema slici 16. prikazana je na slici 19.



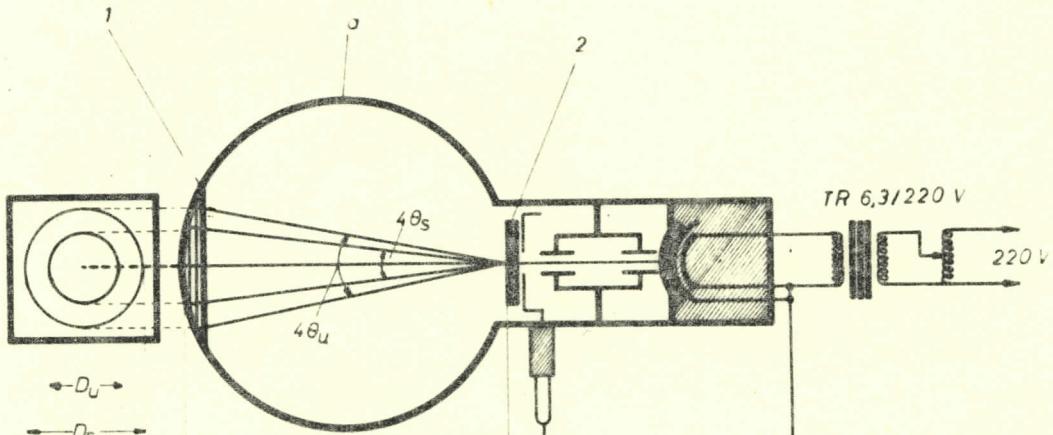
slika 19.

## 7. OPIS EKSPERIMENTA I REZULTATI MERENJA

### 7.1. Osnovni podaci o difrakcionoj cevi

Ako se sa uredjajem prikazanim na slici 17. izvrše merenja na način opisan u poglavlju 5., tada će se za svaki anodni napon dobiti na ekrantu dva kruga, koja prema deklaraciji u prospektu, treba da odgovaraju rastojanjima atomskih planparallelnih ravni od 0,213 nm i 0,123 nm.

Šematski prikaz cevi za difrakciju elektrona sa geometrijom difrakcije i osnovnim vrednostima korišćenih napona i struja data je na slici 20.



Anodni napon se menja od 1000 do 5000 V, dok se anodna struja drži konstantnom ( $400 \mu\text{A}$ ), pomoću promenljivog transformatora, smanjujući napon grejanja na odgovarajuću vrednost. Neophodnost ovakvog regulisanja anodne struje data je u poglavljiju 5.

U tablici V dati su odgovarajući naponi grejanja i anodni naponi pri konstantnoj anodnoj struji od  $400 \mu\text{A}$ .

TABLICA V

anodni napon (V)	anodna struja ( $\mu\text{A}$ )	napon grejanja (V)	položaj varjaka
1000	400	3,4	110
2000	400	3,2	105
3000	400	3,0	100
4000	400	2,8	95
5000	400	2,6	90

#### 7.2. Izvodjenje formula vezanih za eksperiment

Rastojanje koje elektroni predju od difrakcione rešetke do fluorescentnog ekrana, prema originalnom uputstvu za elektronsku difrakcionu cev iznosi  $L = 13,5 \text{ cm}$ .

Ako elektroni predju rastojanje  $L$  posle difrakcije tada je, prema slici 20, prečnik rezultujućeg prstena koji se meri na fluorescentnom ekranu

$$D = 2L \cdot \sin 2\theta \quad (50)$$

Za dovoljno male uglove  $\sin 2\theta = 2\theta$ , tako da je

$$D = 4L\theta \quad (51)$$

Eliminacijom  $\theta$  pomoću ove jednačine i jednačine (38), ako je  $n = 1$  i  $\sin \theta = \theta$ , dobija se talasna dužina  $\lambda$  u funkciji prečnika  $D$  difrakcionog prstena.

$$\lambda = \frac{Dd}{2L} \quad (52)$$

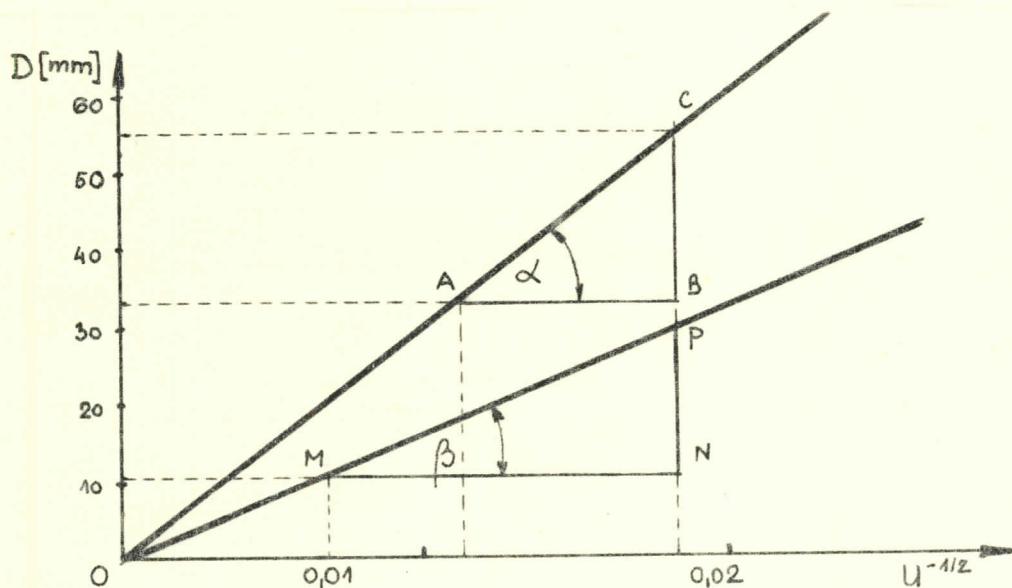
Konačno, izjednačavajući jednačine (52) i (42), dobija se

$$\sqrt{\frac{1,5}{U}} = \frac{Dd}{2L}$$

odnosno

$$D = \frac{2L}{d} \sqrt{\frac{1,5}{U}} \quad (53)$$

Ukoliko se dobijena jednačina  $D=D(U^{-1/2})$  grafički predstavi dobijaju se prave linije za svaki od prstenova odredjenog prečnika  $D$  (slika 21.),



slika 21.

Iz nagiba dobijenih pravih linija može se odrediti medjuravansko rastojanje izmedju ravni sa kojih se dobijaju difrakcioni prstenovi, i to na sledeći način:

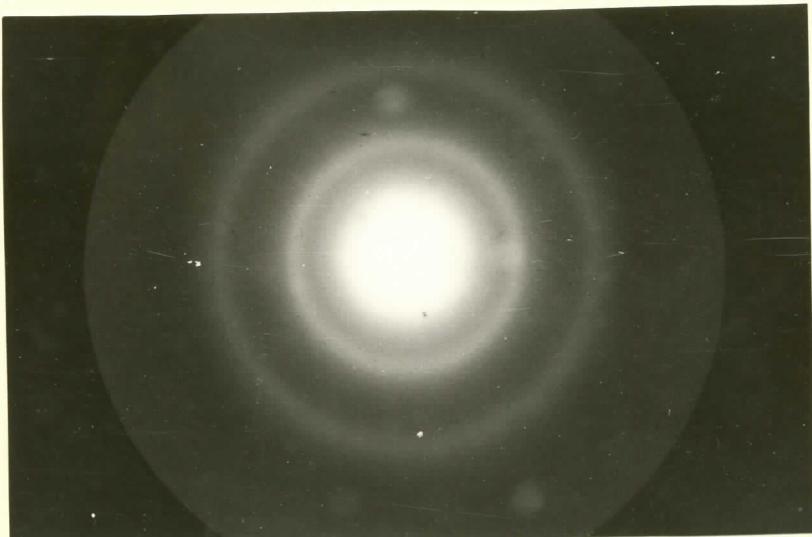
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{CB}{AB} = \frac{2L}{d} \sqrt{1,5}$$

$$d = 2L \sqrt{1,5} \frac{AB}{CB} \quad (54)$$

Za drugu pravu se istim postupkom može odrediti nagib, a iz nagiba izračunati medjuravansko rastojanje.

### 7.3. Rezultati merenja

Ako se radilo kao što je bilo opisano u poglavlju 5. tj. uključio napon grejanja katode, a posle jednog minuta ubrzavajući napon U, na ekranu se dobijaju dva kruga koji odgovaraju difrakciji elektrona sa dve familije kristalografskih ravni. Na slici 22. prikazan je snimak fluorescentnog ekrana sa difrakcionim prstenovima pri naponu grejanja 3,2 V, anodnoj struji  $400\mu\text{A}$  i anodnom naponu 3000 V.



slika 22.

Sa slike se može izmeriti da je prečnik spoljašnjeg prstena 50 mm, a unutrašnjeg 29 mm. Talasna dužina izračunata na osnovu formule (42) iznosi  $\lambda = 0,0224 \text{ nm}$  (za napon 3000 V). Ako se ova vrednost uporedi sa vrednošću talasne dužine dobijene pomoću obrazca (52) dobija se

Relativna greška je

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{0,0004}{0,0224} = 0,02 = 2\%$$

Na ovaj način uporedjivane talasne dužine za razne ubrzavajuće napone date u tablici VI.

TABLICA VI

U(V)	$\lambda = \sqrt{\frac{1,5}{U}} \text{ (nm)}$	D (mm)		$\lambda = dD/2L \text{ (nm)}$		$\Delta\lambda/\lambda \text{ (%)}$	
		$d_{110}$	$d_{100}$	$d_{110}$	$d_{100}$	$d_{110}$	$d_{100}$
1500	0,0317	70	40	0,0319	0,0316	0,70	0,60
1600	0,0306	69	40	0,0314	0,0316	2,60	3,27
1700	0,0297	65	38	0,0296	0,0300	0,33	1,01
1800	0,0289	64	36	0,0291	0,0284	0,70	1,73
1900	0,0281	62	35	0,0283	0,0276	0,71	1,78
2000	0,0274	60	34	0,0273	0,0269	0,36	1,85
2100	0,0267	60	34	0,0273	0,0269	2,25	0,75
2200	0,0261	58	33	0,0264	0,0260	1,15	0,38
2300	0,0255	56	33	0,0255	0,0260	0,00	1,96
2400	0,0250	55	32	0,0250	0,0252	0,00	0,80
2500	0,0245	54	31	0,0246	0,0244	0,41	0,41
2600	0,0240	53	31	0,0241	0,0244	0,42	0,67
2700	0,0236	53	30	0,0241	0,0237	2,12	0,43
2800	0,0232	52	30	0,0237	0,0237	2,16	2,16
2900	0,0227	51	30	0,0232	0,0237	2,20	4,31
3000	0,0224	50	29	0,0228	0,0229	1,79	2,23
3200	0,0216	48	28	0,0219	0,0221	1,39	2,31
3400	0,0210	47	27	0,0214	0,0213	1,91	1,43
3600	0,0204	45	26	0,0205	0,0205	0,49	0,49
3800	0,0196	43	25	0,0196	0,0197	0,00	0,51
4000	0,0194	44	26	0,0200	0,0205	3,10	5,70

Kao što se iz tablice VI vidi, slaganje talasnih dužina dobijenih pomoću De Brogliejeve relacije i talasnih dužina dobijenih eksperimentalnim putem je savršeno zadovoljavajuće, naime relativna greška nigde ne prelazi 6%, što pokazuje ispravnost hipoteze o talasnom ponašanju elektrona.

Sa druge strane, primenjujući obrazac (53), može se pomoću izmerenih prečnika krugova, poznavajući ubrzavajući napon, nacrtati grafik zavisnosti prečnika D od napona  $U^{-1/2}$ , što predstavlja jednu pravu liniju. Kao što je napred pokazano iz nagiba te prave linije može se odrediti medjuravansko rastojanje kod grafita.

U tablici VII date su izračunate vrednosti ubrzavajućeg napona tj.  $U^{-1/2}$  i izmerene vrednosti prečnika krugova dobijenih na ekranu cevi, za različite ubrzavajuće napone.

TABLICA VII

$U(V)$	$U^{-1/2} (V^{-1/2})$	$D_{spolj.} (mm)$	$D_{unut.} (mm)$
1500	0,02580	70	40
1600	0,02500	69	40
1700	0,02430	65	38
1800	0,02360	64	36
1900	0,02300	62	35
2000	0,02240	60	34
2100	0,02180	60	34
2200	0,02130	58	33
2300	0,02080	56	33
2400	0,02040	55	32
2500	0,02000	54	31
2600	0,01960	53	31
2700	0,01925	53	30
2800	0,01890	52	30
2900	0,01860	51	30
3000	0,01830	50	29
3200	0,01770	48	28
3400	0,01715	47	27
3600	0,01670	45	26
3800	0,01620	43	25
4000	0,01580	44	26

Ova zavisnost grafički je prikazana na slici 23.

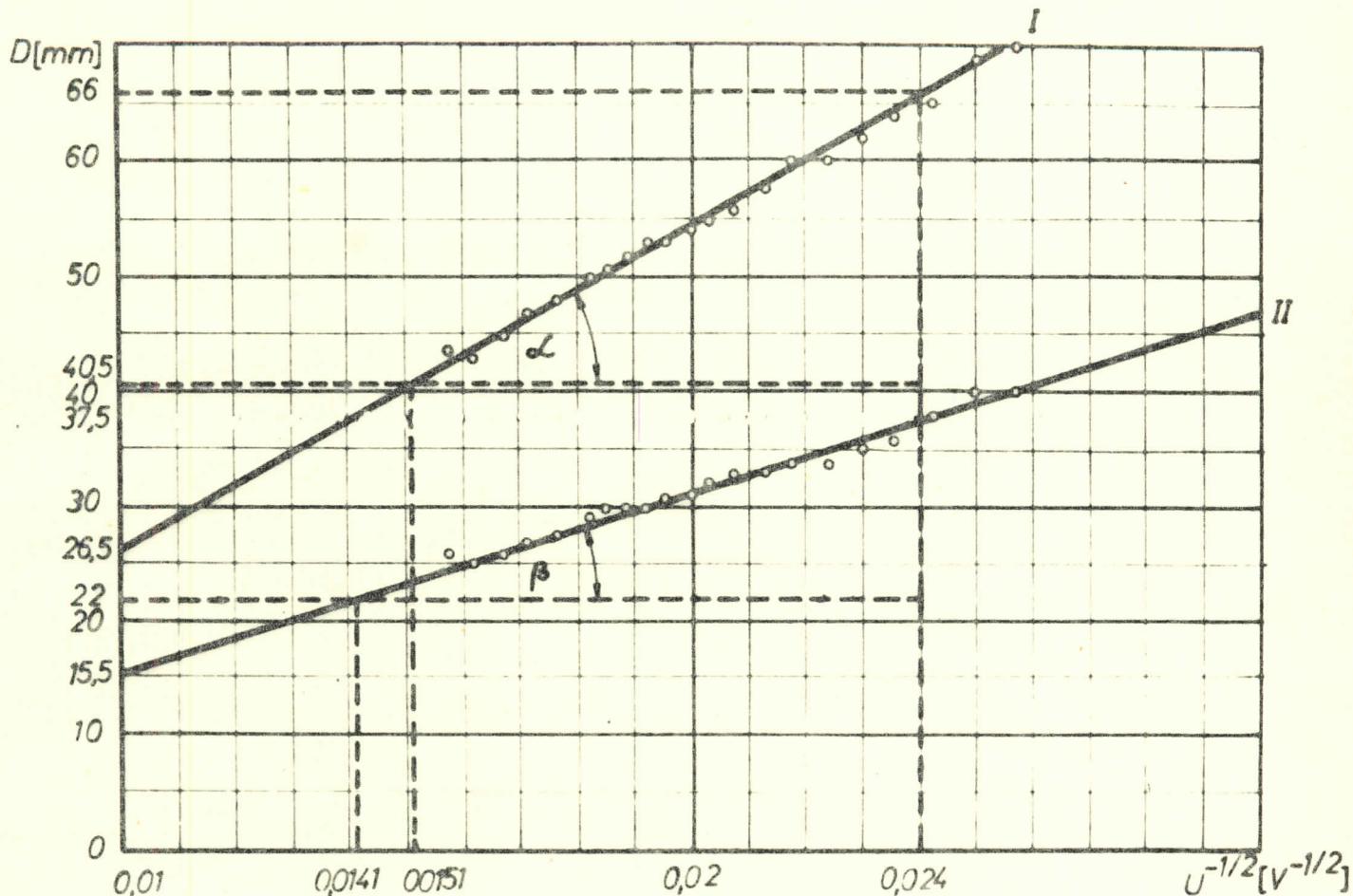
Sa pravih linija (na slici 23.) se može odrediti medjuravansko rastojanje, kao što je to opisano u poglavljju 7.2. (slika 21.).

Za spoljašnji prsten (prava I)

$$d_{110} = 2L\sqrt{1,5} \operatorname{ctg}\alpha = 270\sqrt{1,5} \frac{0,0092}{25} = 0,123 \text{ nm}$$

Za unutrašnji prsten (prava II)

$$d_{100} = 2L\sqrt{1,5} \operatorname{ctg}\beta = 270\sqrt{1,5} \frac{0,0099}{15,5} = 0,211 \text{ nm}$$



slika 23.

Ako se ove vrednosti uporede sa vrednostima u tablici IV, vidi se da je slaganje izvanredno, što potvrđuje ispravnost eksperimenta izvedenog na ovakav način.

Pri naponima nižim od 1500 V, pri povećanom naponu grejanja, na ekranu se može primetiti i treći, najmanji krug. Njegov prečnik pri ubrzavajućem naponu od 1000 V iznosi  $D=30$  mm, što odgovara medjuravanskom rastojanju  $d_{002}=0,325$  nm izmedju slojeva grafita, odnosno veoma je bliska toj vrednosti.

$$d_{002(\text{exp})} = \frac{2L}{D} \sqrt{\frac{1,5}{U}} = \frac{270}{30} \cdot 0,0387 = 0,348 \text{ nm}$$

Pri većim ubrzavajućim naponima ovaj krug se ne može zapaziti jer se stapa sa svetlom mrljom u sredini ekrana koja nastaje od nedifraktovanih elektrona (pošto se povećanjem ubrzavajućeg napona krugovi smanjuju).

## Z A K L J U Č A K

Cev za difrakciju elektrona "TEL 555 - TELFORD - London" kupljena je da bi se na predmetu "Atomska fizika" za studente III godine fizike Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, u okviru vežbi moglo prikazati talasno ponašanje mlaža elektrona, što je u saglasnosti sa De Brogliejevom hipotezom o dualističkoj prirodi materije. Prilikom postavljanja uredjaja držao sam se uputstva priloženog uz cev u kome piše da pri naponu grejanja od 6,3 V, anodni napon može doći i do 5000 V, dok se anodna struja ne povećava preko 500  $\mu$ A. Međutim, anodna struja je već pri naponu od 1500 - 1600 V rasla preko 500  $\mu$ A, što je moglo dovesti do razaranja fluorescentnog ekrana ili sloja grafita - mete. Zbog toga sam smanjio napon grejanja, tako da je anodna struja bila 400  $\mu$ A i to na svim vrednostima anodnog napona, kao što je prikazano u tablici V. Pri ovako podešenom grejanju katode na ekranu su se uvek dobila dva kruga, sasvim jasna, lako merljivih prečnika. Ovi kružnici za napon od 3000 V prikazani su na slici 22.

Menjajući ubrzavajući napon od 1500 do 4000 V i primenjujući obrazac (53) dobio sam grafičku zavisnost prečnika prstenova i ubrzavajućeg napona, tj. dve prave linije. Iz nagibatih pravih linija odredio sam medjuravansko rastojanje  $d$  za dve familije atomskih ravni kod grafita i na osnovu tablice IV zaključio, da se radi o ravnima (110) i (100).

Pored toga uporedio sam talasne dužine elektrona izračunate na osnovu De Brogliejeve relacije i eksperimentalno odredjene (tablica VI) za niz ubrzavajućih napona (od 1500 do 4000 V), što je dalo sasvim dobro slaganje. Relativna greška nigde ne prelazi 6%, što je, obzirom na mogućnost merenja prečnika i stabilnost ubrzavajućeg napona kao i napona grejanja sasvim zadovoljavajuće.

Kao vežba, difrakcija elektrona je vrlo pogodna, jer daje veoma očigledne rezultate, a i nije komplikovana za rukovanje. Zadaci ove vežbe mogli bi se formulisati u nekoliko tačaka:

1. Uveriti se, prinošenjem magneta cevi, da difrakcija potiče od elektrona tj. nanelektrisanih čestica.
2. Meriti prečnike krugova na fluorescentnom ekranu za nekoliko karakterističnih ubrzavajućih napona (npr. u razmaku od 500 V).
3. Izračunati talasnu dužinu elektrona koristeći izmerene prečnike i uporediti je sa talasnom dužinom izračunatom pomoću ubrzavajućeg napona i De Brogliejeve relacije. Relativna greška ne bi smela da prelazi 10%.
4. Nacrtati zavisnost  $D = f(U^{-1/2})$  za oba prstena, te iz nagiba pravih odrediti medjuravanska rastojanja grafita.

## L I T E R A T U R A

1. *Louis de Broglie*: VÁLOGATOTT TANULMÁNYOK (Odabrani naučni radovi), Gondolat, Budapest, 1960.
2. *E.V. Špoljskij*: ATOMSKA FIZIKA I, Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd, 1963.
3. *Louis de Broglie*: THE REVOLUTION IN PHYSICS, The Noonday Press, New York.
4. *Grimsehl*: LEHRBUCH DER PHYSICS, VIERTER BAND, STRUKTUR DER MATERIE, B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1968.
5. *Ivan Supek*: MODERNA FIZIKA I STRUKTURA MATERIJE, NIP Tehnička knjiga, Beograd, 1967.
6. *Eyvind H. Wichmann*: QUANTUM PHYSICS, BERKELEY PHYSICS COURSE - VOLUME 4, McGraw-Hill Book Company, New York, 1967-1971.
7. *Dr. Inž. D.M. Ivanović, Inž. V. Vučić*: ATOMSKA I NUKLEARNA FIZIKA (FIZIKA III), Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd, 1963.
8. *B. Djurić, Ž. Čulum*: FIZIKA, V DEO, TEORIJA RELATIVITETA, ATOMSKA I NUKLEARNA FIZIKA, Naučna knjiga, Beograd, 1969.
9. *Wolfgang Finkelnburg*: BEVEZETÉS AZ ATOMFIZIKÁBA (Uvod u atomsku fiziku), Müszaki könyvkiadó, Budapest, 1958.
10. *V.N. Kondratjev*: STRUKTURA ATOMA I MOLEKULA, Naučna knjiga, Beograd, 1966.
11. *Dr Djordje Mušicki*: UVOD U TEORIJSKU FIZIKU, I i II DEO, Zavod za izdavanje udžbenika SRS, Beograd, 1964 (I deo) i 1965 (II deo).
12. *G.S. Landsberg*: OPTIKA, Naučna knjiga, Beograd, 1967.
13. *Charles Kittel*: BEVEZETÉS A SZILÁRDTESTFIZIKÁBA (Uvod u fiziku čvrstog stanja), Müszaki könyvkiadó, Budapest, 1966.
14. *Dr Ivan Janić*: EKSPERIMENTALNE VEŽBE IZ ATOMSKE FIZIKE, Novi Sad, 1976.
15. *Dr Slobodan Carić*: UVOD U FIZIKU ČVRSTOG STANJA, autorizovana skripta, Novi Sad, 1969.
16. UPUTSTVO ZA UPOTREBU ELEKTRONSKE DIFRAKCIJONE CEVI "TELTRON", Teltron limitid 32/36 Telford Way London W3 England, 1972.

