UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU

Uloga simetrije u izgradnji objedinjene teorije elektroslabih interakcija

- diplomski rad -

Mentori:
dr Milan Pantić
dr Voja Radovanović

Kandidat:
Srđan Sarikas

Novi Sad, 2008.

U toku izrade ovog rada sam imao svesrdnu podršku mentorâ: dr Milana Pantića (vanredni profesor na PMF-u u Novom Sadu) i dr Voje Radovanovića (vanredni profesor na Fizičkom fakultetu u Beogradu).

Profesoru Radovanoviću sam posebno zahvalan što me je uveo u oblast teorije elementarnih čestica dozvolivši mi da prisustvujem njegovim predavanjima na Fizičkom fakultetu u Beogradu, kao i na mnogim dodatnim objašnjenjima koje mi je pružio na privatnim konsultacijama.

Profesoru Pantiću se posebno zahvaljujem što mi je sve vreme izrade rada ukazivao na propuste i greške, kao i na diskretnim sugestijama u vezi sa tehničkim detaljima rada.

U Novom Sadu, septembra 2008. godine

Srđan Sarikas

Sadržaj

Uvod

Jedan od centralnih pojmova, koji leži u osnovi fizike mikrosveta, jeste pojam međučestične interakcije. Najprostiji oblik je njihovo privlačenje ili odbijanje, no time nisu ni izdaleka iscrpljene interakcije u koje stupaju elementarne čestice. Govoreći o silama koje postoje u prirodi, obično se izdvajaju takozvane fundamentalne sile ili interakcije, tj. one koje nije moguće objasniti, izvesti, iz postojanja drugih tipova interakcija. Shvatanje toga je prilično relativno i u izvesnom smislu odražava dubinu našeg sadašnjeg znanja o procesima koji se dešavaju na elementarnom nivou. Tako se još do početka 1970-ih smatralo da nuklearna sila predstavlja fundamentalnu interakciju. Danas je postalo jasno da je ona rezultat interakcija kvarkova. Zbog toga je samo jaka interakcija kvarkova fundamentalna. Tim pre, ni sile trenja, elastičnosti, viskoznosti, Van-der-Valsove sile ili sile razmene u feromagneticima, nisu fundamentalne, već su sve one samo manifestacija elektromagnetne interakcije atoma, od kojih se sastoje makroskopska tela. Međutim, samu elektromagnetnu interakciju - Kulonove i magnetne sile, koje deluju među naelektrisanim česticama, treba danas da svrstavamo u grupu fundamentalnih, prvobitnih sila. Očigledno je da fundamentalne interakcije moraju da se javljaju na nivou najelementarnijih objekata koji postoje u prirodi.

Standardni model

Istinski elementarnima danas se smatraju kvarkovi i leptoni. U tom smislu se često o njima govori kao o *fundamentalnim* konstituentima materije. Interakcije između njih se ostvaruju pomoću četiri tipa sila, koje se takođe danas smatraju fundamentalnim. To su: elektromagnetna, slaba, jaka i gravitaciona interakcija. Teorijski okvir koji pokriva tri od četiri fundamentalne interakcije naziva se Standardnim modelom elementarnih čestica.

Konstituenti materije

Problem elementarnog konstituenta materije jedan je od osnovnih problema fizike kao prirodne nauke. Tokom istorije mišljenja postojalo je mnogo kandidata za taj naziv: od Platonovog "geometrijskog" i Demokritovog "čestičnog", preko atoma Daltonova i Mendeljejeva, sve do tzv. elementarnih čestica – elektrona, protona, neutrona itd. Elektroni, mioni i odgovarajući im neutrini se zajednički označavaju kao leptoni, a proton, neutron, pion, hiperoni su hadroni. Hadroni interaguju svim poznatim interakcijama, dok leptoni ne interaguju jakom silom.

Krajem šezdesetih godina prošlog veka ispostavilo se da je moguća nova sistematizacija osobina tih "elementarnih" čestica (čiji se broj tada popeo do preko 200) i to na bazi pretpostavke o postojanju složene strukture hadrona. Ti hipotetički konstituenti hadrona su nazvani *kvarkovima*. Narednih godina je kvarkovska hipoteza doživela brojne potvrde, no jedan od osnovnih indikatora da bi teorija mogla biti dobra bila je njena jednostavnost. Danas su fundamentalne čestice materije grupisane u tri generacije čestica sličnih po svemu osim po svojim masama. U tom smislu se često govori o tome da se priroda ponavlja u tri kopije na različitim energijama. One su date na sledećoj shemi:

generacija	prva	druga	treća
leptoni	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}$
kvarkovi	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}$

Fundamentalne interakcije

Pored elementarnih konstituenata materije, u fundamentalne čestice spadaju i prenosnici pomenute četiri interakcije – jake, elektromagnetne, slabe i gravitacione.

Jaka interakcija javlja se između kvarkova i zaslužna je za izgradnju hadrona, a posredno za okupljanje protona i neutrona u atomsko jezgro. Domet joj je reda veličine atomskog jezgra $\sim 10^{-15}m$, a karakteristična energija veze $\sim 10\,\mathrm{MeV} = 10^{-2}\mathrm{GeV}$. Naboj odgovoran za jaku interakciju je boja, a prenosnici masivni gluoni. Upravo zbog mase gluona, njen domet je toliko mali.

Elektromagnetna interakcija se javlja između svih naelektrisanih čestica. Neposredno je odgovorna je za izgradnju atoma, a posredno za sve ostale makroskopske fenomene (kondenzacija, magnetizam, formiranje DNK, nervni impuls...). Naboj karakterističan za elektromagnetnu interakciju je, naravno, naelektrisanje. S obzirom da je prenosnik bezmaseni foton, njen domet je neograničen. Karakteristična energija veze je $\sim 10\,\mathrm{eV} = 10^{-8}\mathrm{GeV}$.

Slaba interakcija se javlja između svih čestica. Odgovorna je za nuklearne β-raspade i slične fenomene. Zbog masivnih prenosnika – intermedijarnih vektorskih bozona $W^{\pm}$ i Z^0 – njen domet je manji čak i od jake interakcije. Karakterističan naboj za slabu interakciju je slabi izospin.

Gravitaciona interakcija deluje između svih čestica. Izvor joj je tenzor energije-impulsa. Zbog svoje tenzorske prirode, prenosnik ove interakcije – još uvek eksperimentalno neopaženi graviton – jedni od svih bi imao spin 2. Ova sila je toliko mala da su njeni efekti vidljivi samo na kosmološkim skalama. Ona je jedina sila koja uređuje dinamiku kosmoloških objekata. Prema teorijskim predviđanjima, kvantni efekti gravitacije bi se morali uzeti u obzir tek na energijama $\sim 10^{19}$ GeV. Gravitacija je, takođe, jedina interakcija koja se nalazi izvan okvira Standardnog modela.

Pregled osnovnih karakteristika
fundamentalnih interakcija

interakcija	prenosnici	relativna jačina	karakteristični domet [m]
jaka	gluoni	10^{38}	10^{-15}
elektromagnetna	foton	10^{36}	∞
slaba	W i Z bozoni	10^{25}	10^{-18}
gravitaciona	graviton	1	∞

Istorija ideje objedinjavanja u fizici

Galileo Galilej se prema mnogim autorima smatra prvim modernim fizičarem. I već on je tvrdio da fizički zakoni, otkriveni ovde na Zemlji, važe i za pojave koje se dešavaju bilo gde u Svemiru. Galilej, na primer, učinio je tu koncepciju određenijom svojim posmatranjima planina na površini Meseca. Danas je ta vera u jedinstvo prirode u osnovi čitave nauke.

Njutn, rođen iste godine kada je Galilej umro, dao je njegovim idejama kvantitativnu interpretaciju, pošto je pre oko tri veka formulisao zakon gravitacije. On je, između ostalog, kvantitativno prikazao da je sila Zemljine teže, koja upravlja telima dok padaju na Zemlju, identična sa nebeskom gravitacijom, silom koja zadržava planete u orbitama oko Sunca.

150 godina posle Njutna, Faradej i Amper su dokazali da električni naboji koji se kreću stvaraju magnetne sile. To je bio početak ujedinjavanja dve prirodne pojave koje su do tad izgledale potpuno različito: elektriciteta i magnetizma. Faradejevo delo je sjajno dovršio Maksvel. On je otkrio da posledica jedinstva elektriciteta i magnetizma mora biti elektromagnetno zračenje električnih naboja koji se ubrzano kreću. To dovodi do zaključka da kvalitativno veoma različite prirodne pojave – toplotno zračenje, svetlost, radio i X-zraci – imaju isti uzrok u elektromagnetnoj interakciji. Posle 50 godina je, zahvaljujući istraživanjima Hajzenberga, Šredingera i Diraka, postalo jasno da su hemijske sile, a među njima sile koje upravljaju životom uopšte, takođe naredna manifestacija elektromagnetizma, ali već na kvantnom nivou.

Godine 1905. je Ajnštajn ujedinio pojmove prostora i vremena. Pokušavajući da na toj osnovi još dalje razvije ideje unifikacije, otkrio je da je Njutnova gravitacija manifestacija krivine prostor-vremenskog kontinuuma. Ta smela predstava o prostor-vremenu sa dinamičnim svojstvima dovela je do značajnih uspeha u kosmologiji. Najzad, Ajnštajn se nadao da će delo svog života krunisati ujedinjavanjem gravitacije i elektromagnetizma, posle čega bi oni izgledali kao različite strane jedne interakcije. Govoreći savremenim jezikom, on je hteo da ujedini električni naboj i gravitacioni naboj (masu) u nešto jedinstveno. Štaviše, pokazavši da je masa povezana sa iskrivljenim prostor-vremenom, on se nadao da će se i električni naboj moći analogno da poveže sa nekim geometrijskim svojstvom prostorno-vremenske strukture.

Ajnštajnovi pokušaji ujedinjenja interakcija nisu bili plodotvorni. Činjenica je da on nije verovao kvantnu mehaniku Hajzenberga, Bora i drugih, te je nije uzimao u obzir. Naredno značajno ujedinjenje učinili su Dirak i dr, inkorporirajući upravo kvantne ideje u Maksvelovu elektrodinamiku, stvorivši prvu kvantnu teoriju polja - kvantnu elektrodinamiku (KED). Ona je do dan-danas najtačnija teorija koju nauka poznaje i kao takva postala je smernica svim narednim pokušajima kvantovanja drugih interakcija.

Simetrijski princip u objedinjenim teorijama

Kasnije se pokazalo da se kvantna elektrodinamika može dobiti kao posledica lokalizacije $U(1)$ *simetrije* početnog lagranžijana koji je podrazumevao postojanje samo konstituenata materije. Na taj način princip lokalne simetrije (tzv. gejdž princip) postaje dominantan u konstrukciji teorije. Na tom principu je bazirana i kvantna hromodinamika, teorija interakcije kvarkova unutar hadrona. Ona podrazumeva $SU(3)$ simetriju kvarkova u prostoru boje.

Najveći uspeh gejdž princip doživljava ujedinjenjem elektromagnetne i slabe interakcije, posredstvom narušene $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ simetrije. Sama idea o ujedinjenju baš ova dva tipa interakcije potiče od činjenice da su to jedine koje sile u stanju da eluju na apsolutno sve čestice (sa izuzetkom gravitacije, naravno). Za rad na toj teoriji su Glašou, Vajnberg i Salam dobili Nobelovu nagradu 1979. godine[1]. Upravo je ova teorija u centru interesa ovog rada, a posebno simetrijski princip u noj.

Grupa simetrija Standardnog modela je direktan proizvod kvarkovske $SU(3)$ simetrije i $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ iz elektroslabe teorije. Gravitacija nije obuhvaćena ovim opisom. Naredni korak je potraga za prvom višom simetrijom koja bi pomenutu $SU(3)_C \otimes [SU(2)_L \otimes U(1)_Y]$ sadržala kao podgrupu. Takve teorije nazivaju se Teorijama Velikog ujedinjenja (eng. GUT - *Grand Unified Theories*). Postoje i pokušaji da se obuhvati i gravitacija; takve teorije se ambiciozno nazivaju Teorijama svega (eng. TOE - *Theory of Everything*). Najperspektivniji radovi iz TOE baziraju na hipotetičnoj simetriji fermiona i bozona, tzv. supersimetriji – $SUSY$.

Potrebno je, međutim, objasniti šta se podrazumeva pod ujedinjenjem u okviru simetrije. Primera radi, kaže se da je teorija elektroslabe interakcije ujedinila elektromagnetnu i slabu interakciju, ali se one i dalje manifestuju različito. To je zato što je simetrija na kojoj počiva teorija *narušena*: elektromagnetna i slaba interakcija se ponašaju različito na niskim energijama jer W i Z bozoni imaju veliku masu, dok je foton bez mase. Na energijama reda veličine mase mirovanja W i Z bozona (10^2 GeV), oni se lako kreiraju iz vakuuma i tek se tada jedinstvena priroda elektroslabe sile otkriva. Veliko ujedinjenje se očekuje analogno, ali na energijama reda 10^{17-18} GeV; energijama mnogo većim nego što bi se ikada mogle dobiti u Zemaljskim uslovima[2]. Dalje ujedinjenje sa gravitacijom bi se očekivalo na Plankovoj energiji 10^{19} GeV.

* * *

Rad ima za cilj da predstavi u osnovnim crtama objedinjenu teoriju elektroslabih interakcija. Prve dve glave su pisane kao matematički uvod u ostatak. U prvoj su izložene osnove teorije polja, kao jedinstvenog matematičkog okvira savremene teorije elementarnih čestica, a u drugoj osnovne definicije teorije simetrijskih transformacija.

[1] Zvanično "zbog njihovog doprinosa teoriji objedinjene slabe i elektromagnetne interakcije elementarnih čestica, uključujući, između ostalog, i predviđanje slabe neutralne struje".

[2] Poređenja radi, prema najnovijim proračunima, maksimalna energija LHC-a u CERN-u će biti $1.4 \cdot 10^4$ GeV

U trećoj glavi prikazana je uloga simetrije u formulisanju zakona dinamike između čestica. Pored najjednostavnijeg primera kvantne elektrodinamike, date su i osnovne ideje Jang-Milsovih teorija sa posebnim osvrtom na $SU(2)$ simetrije. U četvrtoj glavi akcenat je na mogućnosti da se simetrija iskoristi za generisanje mase bezmasenim poljima i na taj način Jang-Milsova teorija dovede u korespondenciju sa stvarnošću.

Konačno, peta glava posvećena je pojedinostima teorije elektroslabih interakcija leptona. Date su i napomene o obliku teorije za kvarkove, kao i o eksperimentalnim uspesima i očekivanjima koji iz teorije proizilaze.

Glava 1

Osnovni pojmovi teorije polja

1.1 Hamiltonov formalizam u klasičnoj mehanici

U Hamiltonovom formalizmu klasične mehanike centralno mesto zauzima princip najmanjeg dejstva, ili Hamiltonov princip, koji određuje evoluciju svakog mehaničkog sistema. Sistem sa N stepeni slobode moguće je opisati funkcijom generalisanih koordinata q_i, generalisanih brzina $\dot{q}_i$ i vremena t. Za datu funkciju $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$, koja se naziva Lagranžovom (ili skraćeno lagranžijanom), sistem se u vremenskom intervalu između t_1 i t_2 kreće tako da integral $S = \int_{t_1}^{t_2} L\ dt$ ima najmanju vrednost. Veličina S se naziva Hamiltonovo dejstvo. Činjenicom da lagranžijan ne zavisi od drugih izvoda izražava se deterministička priroda klasične mehanike. Matematički se Hamiltonov princip najmanjeg dejstva svodi na variranje datog funkcionala i zahtevom da data varijacija bude jednaka nuli $\delta S = 0$ $(\delta^2 S > 0)$, što neminovno vodi ka Ojler-Lagranževim jednačinama:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, ..., N \tag{1.1}$$

Za dati lagranžijan sistema Ojler-Lagranževe jednačine jesu jednačine kretanja. Veličina $\partial L / \partial \dot{q}_i = p_i$ naziva se impuls konjugovan datoj generalisanoj koordinati i kao takav ulazi u definiciju Hamiltonove funkcije (tzv. Hamiltonijana):

$$H = \sum_{i=1}^{N} p_i \dot{q}_i - L \tag{1.2}$$

(ovde se L shvata kao funkcija koordinata i impulsa, jer se pretpostavlja da se brzine mogu jednoznačno izraziti iz same definicije konjugovanih impulsa). Kada je kretanje slobodno, a sve sile potencijalne, Hamiltonijan sistema predstavlja jedan od integrala kretanja, tačnije ukupnu energiju sistema. Parcijalni izvodi Hamiltonove funkcije po koordinatama i njima konjugovanim impulsima su, respektivno:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{1.3}$$

Ove jednačine predstavljaju Hamiltonove diferencijalne jednačine kretanja. Koristeći Hamiltonove jednačine moguće je dobiti diferencijalnu jednačinu koja opisuje vremensku evoluciju bilo koje fizičke veličine $F = F(q_i, p_i, t)$. Konačno se dobija:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\}, \tag{1.4}$$

gde je $\{F, H\}$ Poasonova zagrada definisana za veličine F i H kao:

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i} \right) \tag{1.5}$$

Jasno je da data fizička veličina F predstavlja integral kretanja ukoliko je izraz (1.4) jednak nuli. U slučaju da ona ne zavisi eksplicitno od vremena, tj. $\frac{\partial F}{\partial t} = 0$, F je integral kretanja ako je Poasonova zagrada date veličine sa hamiltonijanom jednaka nuli $\{F, H\} = 0$.

Naravno, definicija Poasonovih zagrada nije ograničena samo na proizvoljnu funkciju F i Hamiltonijan. Od posebnog interesa su Poasonove zagrade koordinata i impulsa:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \tag{1.6}$$

1.2 Klasična teorija polja

Za sistem slobodnih čestica u polju potencijalnih sila lagranžijan je definisan kao funkcija generalisanih koordinata i brzina, i dat je razlikom kinetičke i potencijalne energije datog sistema čestica. Njegova zavisnost od vremena tada je implicitna $L = L(q_i(t), \dot{q}_i(t))$, i samo dejstvo S je tada definisano u tom smislu. Prelaz ka razmatranju polja (kao sistema sa beskonačnim brojem stepeni slobode) odgovarao bi limesu ka beskonačnom broju čestica. Dok je za sistem čestica lagranžijan dat kao suma energija pojedinačnih čestica i njihovih međusobnih interakcija, opisan limes intuitivno vodi integraciji po celokupnom prostoru koji čestice zauzmaju.

Dakle, lagranžijan polja moguće je predstaviti kao prostorni integral neke funkcije polja i njegovih prvih izvoda (po analogiji sa sistemom čestica) koja predstavlja gustinu lagranžijana, kako se često i naziva.

$$L = \int \mathcal{L}(\varphi(t,\vec{x}), \partial_\mu \varphi(t,\vec{x}))\; d^3\vec{x} \tag{1.7}$$

Naravno, moguće je da sistem bude opisan skupom polja $\varphi_r(x)$ ($r = 1, ..., N$; $x \equiv (ct, \vec{x})$) i tada je gustina lagranžijana $\mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\mu \varphi_r(x))$. Sama zavisnost gustine lagranžijana od prostornih koordinata se shvata implicitno na isti način kao i zavisnost samog lagranžijana od vremena. Sada se dejstvo može predstaviti kao integral po prostor-vremenu gustine lagranžijana:

$$S = \int \mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\mu \varphi_r(x))\; d^4x \tag{1.8}$$

Gustina lagranžijana $\mathcal{L}$ se često kraće naziva samo lagranžijanom. Tako će biti učinjeno i u ovom tekstu, dok god je svaka dvosmislenost isključena. Sprovodeći varijacioni račun za ovako definisano dejstvo dolazi se do sistema od N Ojler-Lagranževih jednačina za polja $\varphi_r(x)$ koje predstavljaju jednačine datih polja:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_r} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_r)} \right) = 0 \tag{1.9}$$

Za večinu fizički relevantnih polja, znajući njihove jednačine kretanja, moguće je napisati odgovarajući lagranžijan samo tako da reprodukuje date jednačine. Pokazalo se da je za sistematsko proučavanje kvantizacije i simetrija mnogo pogodnije poći od lagranžijana nego od jednačina kretanja jer on predstavlja fizičku veličinu (a ne jednačinu). Osnovna ideja je da se nađe jednoznačni put za dobijanje lagranžijana polazeći od nekih opštih principa, kao što su simetrije, a da su onda jednačine kretanja dobiju kao posledica Hamiltonovog principa primenjenog na dati lagranžijan. Jasno je da glavni kriterijum valjanosti datih izbora, postulata i sl, jeste suočavanje predviđanja koja iz teorije proizilaze sa eksperimentalnim rezultatima.

1.2.1 Primeri slobodnih lagranžijana

Najjednostavniji lagranžijan je onaj koji se pripisuje skalarnom polju $\phi(x)$. To su polja koja se pri Lorencovim transformacijama ponašaju kao skalari ili pseudoskalari, a koriste se za opisivanje čestica mase μ i bez spina. Jadnačina kretanja koju zadovoljavaju ova skalarna polja je poznata Klajn-Gordonova[1]

$$\partial_\mu \partial^\mu \phi + \mu^2 \phi = 0\;, \tag{1.10}$$

[1] U fizici elementarnih čestica uobičajen je tzv. prirodni sistem jedinica u kojem se sve veličine izražavaju preko Plankove konstante $\hbar$ i brzine svetlosti c. Tada se ove konstante ne pojavljuju u jednačinama što se najčešće zapisuje kao $\hbar = c = 1$.

a moguće ju je dobiti iz lagranžijana

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}\mu^2 \phi^2 \tag{1.11}$$

Pri tretiranju kompleksnih skalarnih polja ϕ, samo polje i njemu kompleksno konjugovano $\phi^\dagger$ se mogu izraziti preko dva realna:

$$\phi = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \qquad \phi^\dagger = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}} \tag{1.12}$$

Ponekad je ipak praktičnije koristiti samo kompleksno polje i tada je odgovarajući lagranžijan

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^\dagger \partial^\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi \tag{1.13}$$

Ukoliko se iz ovog lagranžijana izvode jednačine kretanja prema (1.9), polja ϕ i $\phi^\dagger$ se moraju shvatiti kao nezavisna, te se formalno dobijaju dve Klajn-Gordonove jednačine. Kompleksno skalarno polje se koristi za opis naelektrisanih čestica mase μ i spina nula.

Poznato je da se Dirakova jednačina $(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi(x) = 0$ koristi za opisivanje slobodnih fermiona, čestica spina $\frac{1}{2}$. Njene detaljnije osobine date su u Dodatku A. Međutim, vrlo je očigledno da se kao lagranžijan ovog fermionskog polja može uzeti

$$\mathcal{L}_{el} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi \tag{1.14}$$

1.2.2 Kanonska kvantizacija

Prateći analogiju sa Hamiltonovim formalizmom sistema čestica, definiše se impuls konjugovan polju φ_r:

$$\pi_r(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 \varphi_r)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\dot{\varphi}_r)} \tag{1.15}$$

Ova veličina, analogno svom klasičnom parnjaku (1.2), ulazi u izraz za Hamiltonijan datog polja:

$$H = \int \mathcal{H}\, d^3\vec{x} = \int (\pi_r \dot{\varphi}_r - \mathcal{L})\, d^3\vec{x} \tag{1.16}$$

Izložena klasična teorija polja nije od velike koristi za fiziku elementarnih čestica. Nju je potrebno kvantovati. Prelazak na kvantnu teoriju polja se čini po već ustanovljenom pravilu: Fizičke veličine zamenjujemo odgovarajućim operatorima (koji će biti označavani na isti način kao i klasične veličine), dok se Poasonova zagrada zamenjuje komutatorom podeljenim sa $i\hbar$ za bozonska polja, a antikomutatorom za fermionska ($\{\ ,\ \} \to \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]$). Sve do sada definisane klasične veličine će u smislu operatora biti označavane na isti način, dok (anti)komutatori operatora polja i odgovarajućih impulsa sada izgledaju:

$$[\varphi_r(t,\vec{x}),\varphi_s(t,\vec{x}')] = 0, \ [\pi_r(t,\vec{x}),\pi_s(t,\vec{x}')] = 0,$$
$$[\varphi_r(t,\vec{x}),\pi_s(t,\vec{x}')] = i\hbar\delta_{rs}\delta(\vec{x}-\vec{x}') \tag{1.17}$$

Komutatorske (antikomutatorske) relacije za operatore kreacije i anihilacije $a^\dagger(p)$ i $a(p)$, pri ovako nametnutoj kvantizaciji, posledica su upravo ovih (anti)komutatorskih relacija.

Glava 2

Transformacije i simetrije

Iako intuitivno jasan iz svakodnevnog iskustva, pojam simetrije je, za potrebe inkorporacije u matematički formalizam, potrebno posebno definisati. Za svaki objekat ili fenomen, o kojem se govori kao o simetričnom, postoji neka transformacija koja bi ga prevela u oblik za koji je nemoguće utvrditi da li se razlikuje od polaznog. On je *invarijantan na datu transformaciju*, te je pojam simetrije neodvojiv od pojma transformacije, iako se u svakodnevnoj komunikaciji transformacija podrazumeva. U tom smislu su termini simetrija i invarijantnost sinonimi.

Primera radi, kvadrat je simetričan jer ga rotacija za 90^o oko težišta prevodi u identičan oblik. On, međutim, nije simetričan samo na datu transformaciju rotacije, već i na ogledalske refleksije, inverzije i dr. Takođe, bilo koja kompozicija ovih transformacija jeste simetrija. Šta više, lako se pokazuje da simetrijske transformacije zadovoljavaju aksiome grupe u odnosu na binarnu operaciju kompozicije. Stoga se često govori i o invarijantnosti u odnosu na neku *grupu transformacija.*

2.1 Grupe transformacija u teoriji polja

Primetno je da se grupa transformacija simetrije kvadrata iz prethodnog primera bitno razlikuje od iste grupe za loptu. Pored očigledne kvantitativne (lopta je svakako mnogo "simetričnija"), tu je i manje vidljiva kvalitativna: lopta je invarijantna u odnosu na rotacije za proizvoljan ugao, dok je kvadrat simetričan samo pri rotacijama za celobrojni umnožak 90^o. U tom smislu se grupe transformacija mogu podeliti na diskretne i kontinualne. U fizici elementarnih čestica kontinualne transformacije imaju veoma značajnu ulogu. Diskretne simetrije su bitne u kristalografiji i fizici čvrstog stanja uopšte, dok se u fizici elementarnih čestica najčešće sreću: 1) transformacija parnosti (P)

koja vrši inverziju prostornih koordinata ($\vec{r} \to -\vec{r}$), 2) T – inverzija vremena ($t \to -t$) i 3) transformacija konjugacije naboja C.

Za fiziku elementarnih čestica najbitnija je podela grupa transformacija na spoljašnje i unutrašnje. Pod spoljašnjim se podrazumevaju transformacije prostorvremenskih koordinata, dok unutrašnje definišu dinamiku sistema, pa se ponekad nazivaju i dinamičkim. Zbog te osobine, unutrašnjim simetrijama će biti posvećena bitna pažnja u daljem radu. Konjugacija naboja se prema ovome klasifikuje u unutrašnje, a parnost i vremenska inverzija u spoljašnje.

2.1.1 Osnovni pojmovi neprekidnih grupa transformacija

Transformacije vektorskog prostora koje se najčešće sreću u fizici jesu rotacije. Njih je, međutim, moguće posmatrati i u opštijem kontekstu. U bilo kakvom linearnom vektorskom prostoru moguće je definisati linearnu transformaciju $O : V \to V$ sa osobinom da očuvava (simetričan) skalarni proizvod definisan u datom prostoru: $(u, v) = (Ou, Ov)$. Takve transformacije nazivaju se ortogonalnim jer, pored očiglednog očuvanja vektorske norme, ostavljaju invarijantnim i uglove među vektorima. Matrično predstavljanje ovih transformacija vodi ka zahtevu $det(O) = \pm 1$. Transformacije sa dodatnim uslovom $det(O) = 1$ nazivaju se specijalnim ortogonalnim (SO) transformacijama i samo one predstavljaju rotacije datog vektorskog prostora. Primera radi, rotacije u ravni čine SO(2) grupu, a mogu se predstaviti matricama tipa $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Nisu, međutim, *sve* ravanske rotacije opisane ovim matricama. Tako, npr, rotacije xy-ravni (oko z-ose) trodimenzionalnog prostora moraju biti opisane matricom 3×3, četvorodimenzionalnog 4×4 itd. Dakle, broj 2 u nazivu grupe $SO(2)$ ne sugeriše dimenziju vektorskog prostora nad kojim se definiše, već samo na minimalnu dimenziju prostora u kojoj je sama transformacija ostvariva! Reprezentacija date transformacije u tom vektorskom prostoru se naziva fundamentalnom.

U ovome trenutku pogodno je objasniti i pojam parametra grupe. Primetno je, naime, da je svaka pomenuta rotacija, odnosno svaka matrica njene reprezentacije, određena jednim realnim parametrom - uglom rotacije θ. Međutim, ponekad je potreban i niz realnih brojeva $(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$ da bi definisali transformaciju. Oni se nazivaju parametrima grupe. (Npr. tri Ojlerova ugla za proizvoljnu rotaciju u 3D prostoru.) Moguće je konstruisati n-dimenzionalni prostor koji čine tačke n-torke $(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$ od kojih svaka reprezentuje jedan element grupe transformacija. Ukoliko je dati grupni prostor lokalno sličan $\mathbf{R}^n$, tzv. mnogostrukost, tada je moguće definisati izvod elementa grupe po parametru, što je preduslov razvoju elementa u red oko tačke. Grupe sa takvom osobinom nazivaju se Lijevim (*Sophus Lie*).

Neka je $M(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)$ element n-parametarske grupe. Za infitezimalno male parametre $\theta_i \to \epsilon_i \ll 1$, M je moguće razviti u Makloranov red:

$$M(\epsilon_i) = M(0) + \epsilon_i \frac{\partial M(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)}{\partial \theta_i}\bigg|_0 + O(\epsilon^2), \text{ gde je } 0 \equiv (0, 0, ..., 0) \quad (2.1)$$

Definisanjem $\tilde{T}_i = \frac{\partial M(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)}{\partial \theta_i}\big|_0 = const.$, uz zahtev da jedinična transformacija odgovara nultoj vrednosti parametara ($M(0) = \mathbf{1}$) kao i zanemarivanjem ostatka, prethodni izraz se može prepisati kao

$$M(\epsilon_i) = \mathbf{1} + \epsilon_i \tilde{T}_i \quad (2.2)$$

Jasno je da veličinâ $\tilde{T}_i$ mora biti koliko i parametara (šta više, može se pokazati njihova međusobna linearna nezavisnost).

Opšta konačna transformacija koja odgovara elementu mnogostrukosti $(0, 0, ..., \theta_i, ..., 0)$ mora se dobiti sa beskonačno uzastopnih infinitezimalnih transformacija ($\theta_i = N\epsilon_i$, $N \to \infty$)

$$[M(\epsilon_i)]^N = [\mathbf{1} + \epsilon_i \tilde{T}_i]^N = \left[\mathbf{1} + \frac{\theta_i \tilde{T}_i}{N}\right]^N \longrightarrow e^{\theta_i \tilde{T}_i},$$

a to je i opšti element grupe ukoliko se podrazumeva konvencija o sumiranju.

U literaturi iz oblasti fizike uobičajeno je da se ekstrahuje imaginarna jedinica u eksponentu, pa se opšti element grupe zapisuje kao $e^{i\theta_i T_i}$, gde su

$$T_i = -i\tilde{T}_i = -i \frac{\partial M(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_n)}{\partial \theta_i}\bigg|_0 \quad (2.3)$$

Jasno je da je, pored parametara, potrebno poznavati n veličinâ T_i kako bi se konstruisao proizvoljni element grupe. Stoga se one nazivaju generatorima grupe. S obzirom da predstavljaju *konstantne* matrice, lakše je njih proučavati nego same elemente grupe. Za njih se pokazuje da čine Lijevu algebru, što znači da su zatvoreni u odnosu na komutator: $[T_a, T_b] = if^{abc}T_c$. Veličine f^{abc} se nazivaju strukturne konstante i karakteristične su za svaku grupu.

2.1.2 Specijalne unitarne grupe

S obzirom da se funkcije polja najčešće biraju kao kompleksne, najjednostavnija transformacija koju je moguće nad njom izvršiti jeste rotacija faze – fazna transformacija. To se čini množenjem sa $e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$, što definiše (Abelovu) grupu transformacija $U(1)$: $\varphi \to \varphi' = e^{i\alpha}\varphi$. Jasno je da, iako samo polje nije isto, jedina opservabilna veličina samog polja - njen kvadrat modula - jeste $|\varphi'|^2 = \varphi'^\dagger\varphi' = \varphi^\dagger U^\dagger U\varphi = \varphi^\dagger\varphi = |\varphi|^2$, jer je transformacija unitarna $U^\dagger = U^{-1}$. Sa aspekta teorije polja, interesantno je proveravati invarijantnost lagranžijana na transformacije. Npr, lagranžijan Klajn-Gordonovog polja je invarijantan na pomenutu $U(1)$ transformaciju.

$U(1)$ grupa transformacija je Abelova upravo zahvaljujući činjenici da opšti element u eksponentu ima *broj*, a ne *matricu*. Prirodno je pretpostaviti da bi neabelovske morale imati matrice u eksponentu. Prethodno navedena konvencija o zapisu opšte transformacije sada posebno dolazi do izražaja. Naime, za transformaciju $U = e^{i\theta_i T_i}$ poznati uslov za unitarnost: $U^\dagger = U^{-1}$ sada se svodi na: ${T_i}^\dagger = T_i$ – generatori unitarnih transformacija moraju biti ermitske matrice!

I među unitarnim transformacijama se mogu izdvojiti one sa jediničnom determinantom, koje se nazivaju *specijalnim unitarnim* (*SU*). Koristeći jednakost $det[\exp(X)] = \exp[tr(X)]$, ovaj uslov se prenosi na zahtev za generatore $tr(T_i) = 0$. Broj nezavisnih parametara (odn. generatora) za opštu $SU(n)$ grupu je $n^2 - 1$.

$SU(2)$ grupa transformacija

$SO(3)$ transformacije predstavljaju rotacije običnog 3D prostora. Njeni generatori L_i mogu se dobiti direktnim putem – diferenciranjem eksplictno zapisanih matrica rotacije oko x-, y- i z-ose i dati su kao:

$$L_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \; L_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \; L_3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

Oni čine algebru čije su strukturne konstane date Levi-Čivita simbolom, tj. njihove komutacione relacije su:

$$[L_i, L_j] = i\varepsilon_{ijk}L_k \tag{2.5}$$

U potrazi za svim reprezentacijama grupe rotacija čiji bi generatori I_i činili identičnu algebru kao L_i, dolazi se do zaključka da su one reprezentacije $SU(2)$ grupe.

Šta više, pokazuje se da svaku reprezentaciju definiše broj l koji može uzeti bilo koji vrednost iz skupa $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, ...\}$, a bazisne vektore u svakoj od reprezentacija broj m, $m \in \{-l, -l+1, ..., l-1, l\}$. Isti brojevi određuju i svojstvene vrednosti operatora I^2 i I_3

$$I^2 \,|l, m\rangle = l(l+1)\,|l, m\rangle\,, \quad I_3\,|l, m\rangle = m\,|l, m\rangle \tag{2.6}$$

Poznato je da svojstvene jednačine operatora kvadrata momenta impulsa L^2 i njegove projekcije na z-osu L_z imaju identičan oblik. To je upravo zbog činjenice što su operatori momenta impulsa generatori SO(3) grupe koja predstavlja neparne reprezentacije $SU(2)$ – one za koje $l \in \mathbf{Z}$. Konkretno L_i dati na početku odgovaraju generatorima u $l = 1$ reprezentaciji $SU(2)$ grupe. S druge strane i operatori spina elektrona imaju identičnu strukturu, a zbog dva bazisna vektora ($|\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\rangle$ i $|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\rangle$) ta reprezentacija je dvodimenzionalna. Generatori $SU(2)$ transformacije u njoj srazmerni su Paulijavim matricama $S_i = \frac{\sigma_i}{2}$, gde su Paulijeve matrice date sa:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.7}$$

Reprezantacija za $l = 0$ je trivijalna: postoji samo jedno stanje $|0,0\rangle$ za koje je $I_i\,|0,0\rangle = 0$.

Korisno je još pomenuti da su svi prethodno navedeni primeri oni kod kojih parametri nisu funkcije koordinata. To su tzv. globalne transformacije kod kojih se polje (kao element vektorskog prostora nad kojim je transformacija definisana) menja na isti način u svakoj tački prostora. Moguće je, međutim, lokalizovati transformacije dozvolivši parametrima da zavise od koordinata. Ove lokalne transformacije menjaju polja zavisno od tačke u kojoj se definišu.

2.2 Teorema Emi Neter. Zakoni održanja

U klasičnoj mehanici moguće je dokazati tvrđenje prema kome svakoj neprekidnoj simetriji dejstva odgovara jedan zakon održanja. Ovo tvrđenje je 1918. formulisala Emi Neter (*Emmy Noether*), u čiju je čast teorema dobila i ime. Cilj je sada pokazati njeno važenje za dejstvo u teoriji polja (1.8).

Neka je, dakle, dejstvo invarijantno na neprekidnu (bilo spoljašnju, bilo unutrašnju) transformaciju. Uslov neprekidnosti neophodan je kako bi se mogle tretirati samo infinitezimalne transformacije. Neka se pri njima koordinate i polja menjaju prema:

$$x^\mu \;\to\; x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \tag{2.8}$$

$$\varphi_r(x) \;\to\; \varphi'_r(x') = \varphi_r(x) + \delta_T\varphi_r(x) \tag{2.9}$$

Potrebno je praviti razliku između tzv. totalne varijacije polja koja podrazumeva i varijaciju koordinata $\delta_T\varphi_r = \varphi'_r(x') - \varphi_r(x)$ i varijacije forme polja koja bi bila varijacija u užem smislu reči $\delta_0\varphi_r = \varphi'_r(x) - \varphi_r(x)$. Totalnu varijaciju polja moguće je izraziti na pogodniji način:

$$\begin{aligned}
\delta_T\varphi_r &= \varphi_r'(x') - \varphi_r(x) \\
&= \varphi_r'(x') \underbrace{-\varphi_r(x') + \varphi_r(x')}_{=0} - \varphi_r(x) \\
&= \delta_0\varphi_r(x') + \partial_\mu\varphi_r\delta x^\mu \\
&\approx \delta_0\varphi_r(x) + \partial_\mu\varphi_r\delta x^\mu \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Na isti način je, dakle, moguće napisati i totalnu varijaciju lagranžijana

$$\delta_T\mathcal{L} = \delta_0\mathcal{L} + \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu, \qquad (2.11)$$

gde je varijacija forme lagranžijana data sa:

$$\delta_0\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r}\delta_0\varphi_r + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\partial_\mu\delta_0\varphi_r \ , \qquad (2.12)$$

jer je $\delta_0\partial_\mu\varphi_r = \partial_\mu\delta_0\varphi_r$.

Sada je moguće pristupiti variranju dejstva

$$\delta S = \int d^4x'\mathcal{L}(\varphi_r'(x'), \partial_\mu'\varphi_r'(x')) - \int d^4x\mathcal{L}(\varphi_r(x), \partial_\mu\varphi_r(x))$$

U prvom članu može se preći na stare koordinate preko jakobijana $d^4x' = \left|\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}\right| d^4x \approx (1 + \partial_\mu(\delta x^\mu))d^4x$, pa se dobija

$$\begin{aligned}
\delta S &= \int (1 + \partial_\mu\delta x^\mu)d^4x(\mathcal{L} + \delta_T\mathcal{L}) - \int d^4x\mathcal{L} \\
&= \int d^4x(\delta_T\mathcal{L} + \partial_\mu\delta x^\mu\mathcal{L}) \\
&= \int d^4x(\delta_0\mathcal{L} + \underbrace{\partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu + \partial_\mu\delta x^\mu\mathcal{L}}_{\partial_\mu(\mathcal{L}\delta x_\mu)})
\end{aligned}$$

S obzirom da je varijacija forme lagranžijana data u (2.12) i da se drugi član u njoj može parcijalno transformisati, dobija se

$$\delta S = \int d^4x\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi_r}\delta_0\varphi_r + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\delta_0\varphi_r\right) - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\delta_0\varphi_r + \partial_\mu(\mathcal{L}\delta x_\mu)\right)$$

Prvi i treći član podintegralne funkcije se, prema Ojler-Lagranževim jednačinama (1.9), anuliraju što omogućuje da se varijacija dejstva dobije kao integral četvorodivergencije kovarijantnog vektora:

$$\delta S = \int d^4x\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\varphi_r)}\delta_0\varphi_r + \mathcal{L}\delta x_\mu\right) = \int d^4x\partial_\mu J^\mu$$

Ovde je J^μ četvorovektor Neterine struje koji se može izraziti i preko totalne varijacije polja, koja je najčešće poznata. Tako je pogodnije pisati

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_r)}\delta_0\varphi_r + \mathcal{L}\delta x_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_r)}\delta_T\varphi_r - T^\mu{}_\nu \delta x^\nu \tag{2.13}$$

Vidi se da u Neterinu struju ulazi i poznati tenzor energije-impulsa polja

$$T^\mu{}_\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_r)}\partial_\nu\varphi_r - \mathcal{L}\delta^\mu{}_\nu$$

Konačno, s obzirom na pretpostavljenu simetriju lagranžijana $\delta S = 0 \Rightarrow \partial_\mu J^\mu = 0$, tj. dobija se jednačina kontinuiteta za Neterinu struju. Integrale kretanja tada predstavljaju veličine

$$Q = \int d^3\vec{x} J^0 = \int d^3\vec{x}[\pi_r \delta_T \varphi_r - T^0{}_\nu \delta x^\nu]\,, \tag{2.14}$$

koje se u opštem slučaju nazivaju Neterinim nabojima.

Konačno, Neterina teorema za teoriju polja glasi:

> Ako je dejstvo S invarijantno na transformacije (2.8-2.9),onda je moguće definisati struju J^μ prema (2.13) tako da je $\partial_\mu J^\mu = 0$, dok su veličine $Q = \int d^3\vec{x} J^0$ konstante kretanja.

Zakoni održanja energije i impulsa

Kao i u klasičnoj mehanici, zakoni održanja energije i impulsa dobijaju se primenom Neterine teoreme na jednostavne transformacije translacije u vremenu odnosno prostoru. To znači da su totalne varijacije polja $\delta_T\varphi_r = 0$, jer se Neterina struja (2.13) svodi samo na $J^\mu = -T^\mu{}_\nu \delta x^\nu$. Takođe, s obzirom da su sve translacije δx^ν međusobno nezavisne, očuvani Neterini naboji (2.14) su $Q_\nu = \int d^3\vec{x} T^0{}_\nu$. Za $\nu = 0$ ova veličina predstavlja hamiltonijan (1.16), a za prostorne indekse ($\nu = 1, 2, 3$) komponenate linearnog impulsa. Primenom teoreme na rotacije dobio bi se zakon održanja momenta impulsa[1].

[1] Šta više, eksplicitnim ispisivanjem Neterinih naboja za rotacije došlo bi se do dodatnog člana za svaku komponentu momenta impulsa koji se neizbežno mora identifikovati sa spinom. Na taj način se pokazuje da je spin Dirakovog polja $\frac{1}{2}$, vektorskog 1, dok bi kod skalarnog polja taj član izostao.

2.2.1 Zakon održanja naelektrisanja

Ilustrativno je pokazati kako se iz teoreme Emi Neter može dobiti zakon održanja naelektrisanja. U tu svrhu dovoljno je posmatrati lagražijan definisan za jedno polje (npr. kompleksno skalarno iz 1.13) i infinitezimalnu globalnu $U(1)$ transformaciju $\phi \rightarrow \phi' = e^{i\alpha}\phi \approx \phi + i\alpha\phi \Rightarrow \delta_T\phi = i\alpha\phi$. S obzirom da je transformacija strogo unutrašnja, tj. nema promene samih koordinata, Neterin naboj je dat samo sa $Q = \int d^3\vec{x}\ \pi_r\delta_T\phi_r = i\alpha\int d^3\vec{x}\ [\pi\phi - \pi^\dagger\phi^\dagger]$. Prelaskom u fomalizam kvantne teorije polja, naboj postaje ***operator*** definisan na analogan način. Korišćenjem postuliranih komutacionih relacija za polja i impulse (1.17) pokazuje se da je komutator (operatora) naboja Q i samog polja

$$[Q, \phi(x)] = \alpha\phi(x). \tag{2.15}$$

Neka je $|Q'\rangle$ svojstveno stanje operatora Q sa svojstvenom vrednošću Q', odnosno $Q\,|Q'\rangle = Q'\,|Q'\rangle$. Tada se relacija (2.15) može iskoristi da se pokaže da je $\phi\,|Q'\rangle$ takođe svojstvena vrednost operatora naboja Q i to sa svojstvenom vrednošću $(Q' + \alpha)$. Naime,

$$Q\phi\,|Q'\rangle = ([Q,\phi] + \phi Q)\,|Q'\rangle = (\alpha\phi + \phi Q')\,|Q'\rangle = (\alpha + Q')\,|Q'\rangle$$

Na sličan način stanju $\phi^\dagger\,|Q'\rangle$ odgovara vrednost $(Q' - \alpha)$. Odavde se α može identifikovati kao elementarno naelektrisanje $-e$ u skladu sa interpretacijom $\phi^\dagger$ kao operatora kreacije čestica naelektrisanja $+e$ (anihilacije $-e$), a ϕ kao operatora anihilacije čestica naelektrisanja $+e$ (kreacije $-e$). Dakle, zakon održanja naelektrisanja je posledica invarijantnosti dejstva na globalne $U(1)$ transformacije[2].

Ne mora se, međutim, data transformacija povezati obavezno sa naelektrisanjem. To može biti i bilo koji drugi hipernaboj koji se javlja u teoriji elementarnih čestica (barionski broj, leptonski broj, čudnost i sl.). Upravo se ova osobina koristi u konstrukciji objedinjene teorije elektro-slabe interakcije.

---

[2] Osim toga, sada je jasno zbog čega se samo kompleksno skalarno polje može koristiti za opisivanje naelektrisanih čestica, ali ne i realno kod koga je nemoguće definisati $U(1)$ transformaciju.

Glava 3

Simetrija kao uzrok dinamike

3.1 Lokalna $U(1)$ simetrija. Kvantna elektrodinamika

Lako je pokazati da je lagranžijan slobodnog elektronsko-pozitronskog polja (1.14) invarijantan na globalnu $U(1)$ simetriju $\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x)$. Razmatranjem lokalne $U(1)$ simetrije, ukoliko se α shvati kao funkcija koordinata, invarijantnost se gubi:

$$\mathcal{L}_{el} \to \mathcal{L}'_{el} = \overline{\psi}'(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi' = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - \overline{\psi}\gamma^\mu\psi\partial_\mu\alpha(x) \tag{3.1}$$

Narušava je prisustvo izvoda. Međutim, može se zahtevati prisustvo tzv. kovarijantnog izvoda polja $D_\mu\psi$ koji bi "ispravio" osobinu "običnog" izvoda i kovarijantno se transformisao: $D'_\mu\psi' = e^{i\alpha(x)}D_\mu\psi$. Jasno je da bi taj izvod morao da bude proporcionalan običnom parcijalnom ∂_μ, a pogodno ga je potražiti u obliku

$$D_\mu = \partial_\mu - iqA_\mu \tag{3.2}$$

Ovakav izbor kovarijantnog izvoda daje zakon transformacije novouvedenog polja $A_\mu(x)$:

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{q}\partial_\mu\alpha \tag{3.3}$$

Dakle, veličina A_μ se menja po kalibracionoj (gejdž) transformaciji.

Iz izloženog sledi da se zamenom $\partial_\mu \to D_\mu$ u slobodni lagranžijan (1.14) postiže njegova invarijantnost na simultane lokalne $U(1)$ transformacije za funkcije stanja ($\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x)$) i kalibracione za gejdž polje (3.3). Sada je njegov oblik:

$$\mathcal{L}_{el} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi - j^\mu A_\mu, \tag{3.4}$$

gde je $j^\mu = -q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi$ četvorovektor gustine struje Dirakovog polja. On je pomnožen sa konstantom $-q$ koja se, očekivano, može sada poistovetiti sa naelektrisanjem fermiona.

Drugi član lagranžijana ima oblik: gustina struje $\times$ gejdž polje i kao takav predstavlja interakciju elektrona sa datim poljem. Logično je pretpostaviti da je u pitanju interakcija sa elektromagnetnim poljem, pa bi A_μ bio četvorovektor elektromagnetnog potencijala[1]. Međutim, napisani lagranžijan nije dovoljan da bi pomoću Ojler-Lagranževih jednačina po A_μ iz njega mogle dobiti Maksvelove jednačine.

U elektrodinamici se uvodi tenzor jačine elektromagnetnog polja

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{3.5}$$

Poznato je da zbog njegove same definicije Bjankijev identitet ($\partial_\rho F_{\mu\nu} +$ *cikl. permutacije* $= 0$) direktno predstavlja bezizvorne Maksvelove jednačine. Maksvelove jednačine sa izvorima mogu dobiti iz lagranžijana elektromagnetnog polja

$$\mathcal{L}_{EMP} = -j^\mu A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \tag{3.6}$$

Sada je jasno da se dodavanjem kinetičkog člana[2] lagranžijanu (3.4) teorija elektrona i elektromagnetnog polja zaokružuje:

$$\mathcal{L}_{E.D.} = \overline{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + q\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{3.7}$$

Lako je proverljivo da je kinetički član sam invarijantan na gejdž transformaciju polja (3.3), te je ceo lagranžijan invarijantan na kalibracionu $U(1)$ transformaciju, što je i bio cilj. On predstavlja lagranžijan i Dirakovog i elektromagnetnog polja, što znači da se jednačine svih polja koje učestvuju u njemu (ψ, $\overline{\psi}$ i A_μ) mogu dobiti iz njega pomoću Hamiltonovog principa najmanjeg dejstva, odnosno iz Ojler-Lagranževih jednačina koje iz njega proizilaze.

Kvantna elektrodinamika (KED) je izuzetno uspešna u reprodukciji eksperimentalnih rezultata. Šta više, to je najpreciznija teorija kojom nauka barata do dan-danas. Zbog toga se teži da se sve druge interakcije formulišu po analogiji sa njom. Prvi (uspešan) korak ka tome načinili su Jang i Mils.

[1]Primetno je da je A_μ inače i u klasičnoj elektrodinamici definisan do na kalibracionu transformaciju.

[2]Član $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ se naziva kinetičkim jer sadrži izvode polja A_μ.

3.2 Jang-Milsova teorija

Već je naglašen komutativni karakter $U(1)$ grupe transformacija. To ih čini relativno jednostavnim za lokalizovanje. Godine 1954. Jang i Mils ([11]) su proširili istu ideju na neabelovske grupe simetrija. To je bilo motivisano pre svega željom da se one primene na izospinsku simetriju pretpostavljenu za neutron i proton, te na taj način reši pitanje nuklearne sile. Iako se kasnije ispostavila kao pogrešna[3], data teorija je našla primenu u konstrukciji drugih lagranžijana Standardnog modela, te je izuzetno ilustrativna kao primer.

3.2.1 Izospin. Globalna $SU(2)$ simetrija

Spin je uveden kao unutrašnji stepen slobode koji se manifestuje postojanjem magnetnog momenta nezavisno od kretanja čestice (usled čega se često pogrešno tumači kao rotacija oko sopstvene ose). Dva elektrona u atomu helijuma, npr, se pri istim ostalim kvantnim brojevima razlikuju samo u vrednosti projekcije spina na (proizvoljno odabranu) z-osu, tj. u svojstvenim vrednostima operatora $S_3 = \frac{\sigma_3}{2}$: $+\frac{1}{2}$ i $-\frac{1}{2}$. Uprkos tome, energije veze ova dva elektrona su (skoro) iste, a njihova razlika dolazi do izražaja u specifičnim spoljašnjim okolnostima (Zemanov efekat).

U jezgru se javlja sličan fenomen: razlika energija veze protona i neutrona u jezgru je vrlo mala, tj. jaka interakcija ne razlikuje proton od neutrona. Konkretno, kada bi postojala mogućnost da se elektromagnetna interakcija potpuno isključi, zamena protona neutronom u jezgru i obrnuto bila bi egzaktna simetrija prirode.

Ovakva razmišljanja navela je Hajzenberga da dopusti dodatni stepen slobode nukleonima nalik spinu, tzv. izospin. Tada bi proton i neutron predstavljali dva stanja jedne iste čestice – nukleona. Po analogiji sa spinom, zamišljen je poseban "unutrašnji" prostor, prostor jakog izospina. Slično spinu, koji se može opaziti u samo dve orjentacije $\pm\frac{1}{2}$ po proizvoljnoj osi, u ovom prostoru nukleon može da se opazi u dva stanja: kada je "usmeren" ka, npr, gore onda je to proton, a ka dole neutron. Ostale orjentacije nisu zabranjene, ali su one superpozicije ova dva. Zato su proton i neutron onda vektori baze u ovom izospinskom prostoru. Simetrija koju je Hajzenberg imao na umu bila bi onda invarijantnost na rotacije u ovom prostoru izospina.

S obzirom na *dva* bazisna vektora, jasno je da bi se moralo raditi o dvodimenzionalnoj reprezentaciji $SU(2)$ grupe. Generatori ovih transformacija su onda operatori izospina. Oni se označavaju sa I_1, I_2 i I_3 i, kao i spinski,

[3]Proton i neutron su, naime, sastavljeni od kvarkova koji interaguju jakom interakcijom. Nuklearna sila je, tada, samo van-der-valsovski ostatak jake.

srazmerni su Paulijavim matricama $I_i = \frac{\sigma_i}{2}$. Potrebno je napomenuti da se izospin pretpostavlja nezavisno od prisustva spina, oni se samo odlikuju zajedničkim oblikom operatora. U tom svetlu se protonu pripisuje pozitivna, a neutronu negativna projekcija izospina na z-osu. Formalnije, proton i neutron predstavljaju dva svojstvena vektora operatora I_3 i to prvo (p) sa svojstvenom vrednošću $+\frac{1}{2}$ i drugo (n^0) sa $-\frac{1}{2}$. U datoj reprezentaciji nukleonima se dodeljuju vektori kolone:

$$p \equiv \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad n^0 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{3.8}$$

Lagranžijan ovog sistema od 2 slobodna fermiona dat je sa

$$\mathcal{L}_0 = \overline{\psi_1}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_1 + \overline{\psi_2}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi_2$$

Međutim, mnogo je pogodnije zapisati ga definisanjem jednog stanja nukleona kao dubleta dva spinora $\Psi \equiv \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$. Sada se slobodni lagranžijan može zapisati u obliku:

$$\mathcal{L}_0 = \overline{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi \tag{3.9}$$

Ovaj oblik je pogodan upravo zbog činjenice da je $SU(2)$ transformacija stanja Ψ data sa: $\Psi \to \Psi' = e^{i\theta_i\frac{\sigma_i}{2}}\Psi$, pa se invarijantnost lagranžijana zahteva upravo u odnosu na ovu transformaciju. Za slučaj globalne $SU(2)$ simetrije ovaj uslov je trivijalno ispunjen, a njegova posledica je, prema teoremi Emi Neter, zakon održanja izospina.

3.2.2 Lokalizacija $SU(2)$ simetrije

Lokalizovanje ove i drugih neabelovskih simetrija zahteva, kao i u KED, uvođenje kovarijantnog izvoda. Neka su generatori date grupe transformacija T_a, tada je potrebno uvesti a kalibracionih polja W_μ^a koji bi ulazili u kovarijantni izvod:

$$D_\mu = \partial_\mu - igW_\mu, \; W_\mu = W_\mu^a T_a \tag{3.10}$$

Kalibraciona (interakciona) konstanta g je uvedena po analogiji sa naelektrisanjem za elektromagnetnu interakciju, te predstavlja naboj karakterističan za datu interakciju.

Iz uslova kovarijantnosti izvoda ($D_\mu\psi \to D'_\mu\psi' = UD_\mu\psi$) dobija se zakon transformacije gejdž polja:

$$W_\mu \to W'_\mu = UW_\mu U^{-1} + \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)U^{-1} \tag{3.11}$$

S obzirom da su transformacije neprekidne, moguće je posmatrati samo infinitezimalnu promenu $U \approx 1 + i\theta^a T_a$ i tada se lako dobija zakon transformacije svakog pojedinačnog gejdž polja:

$$W_\mu^a \to W_\mu'^{\,a} = W_\mu^a + \frac{1}{g}\partial_\mu \theta^a - f^{bca}\theta^b W_\mu^c \tag{3.12}$$

Ukoliko se radi o $SU(2)$ transformacijama $f^{abc} \equiv \varepsilon^{abc}$ i $T_i = \frac{\sigma_i}{2}$.

Kao i u slučaju KED, da bi kalibraciona polja dobila pravi fizički smisao, lagranžijanu se mora dodati njihov kinetički član. Analogno elektrodinamičkom, definiše se tenzor jačine polja

$$F_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}^{\ a} T_a \tag{3.13}$$

i na isti način kinetički član lagranžijana:

$$\mathcal{L}_F = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{\ a} F^{\mu\nu\ a} \tag{3.14}$$

Ovaj član se za slučaj $SU(2)$ simetrije, zbog osobine traga Paulijavih matrica $tr(\sigma_a \sigma_b) = 2\delta_{ab}$, može zapisati i kao $\mathcal{L}_F = -\frac{1}{2} tr(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu})$.

Međutim, izraz za samu jačinu polja nije isti kao i u elektrodinamici (3.5). Ispostavlja se da, ukoliko se jačina polja tako definiše, kinetički član nije invarijantan na gejdž transformaciju polja (3.11). Datom izrazu potrebno je dodati član srazmeran komutatoru polja:

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - ig[W_\mu, W_\nu] \tag{3.15}$$

Ovako definisano polje ispunjava oba zahteva: 1) kovarijantno se transformiše ($F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^{-1}$), te tako čuva simetriju celokupnog lagranžijana i 2) u slučaju $U(1)$ simetrije svodi se na poznat izraz iz elektrodinamike (3.5). Iz njega se takođe mogu dobiti izrazi za pojedine komponente $F_{\mu\nu}^{\ a}$. Ispisujući definiciju polja dobija se:

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu}^{\ a} T_a &= \partial_\mu W_\nu^{\ a} T_a - \partial_\nu W_\mu^{\ a} T_a - ig W_\mu^{\ b} W_\nu^{\ c} [T_b, T_c] \\ &= T_a(\partial_\mu W_\nu^{\ a} - \partial_\nu W_\mu^{\ a}) - ig W_\mu^{\ b} W_\nu^{\ c} (i f^{bca} T_a) \end{aligned}$$

Budući da jednakost važi za svaki T_a, on se može i izostaviti, te se konačno dobija izraz za komponente jačine polja:

$$F_{\mu\nu}^{\ a} = \partial_\mu W_\nu^{\ a} - \partial_\nu W_\mu^{\ a} + g f^{bca} W_\mu^{\ b} W_\nu^{\ c} \tag{3.16}$$

Ostalo je još samo da se pokaže kako jačine polja transformišu pri gejdž transformacijama polja. Ponovo je praktičnije pratiti ponašanje pri infinitezimalnim transformacijama (3.12). Eksplicitnim uvrštanjem novih polja $W_\mu'^{\,a}$ u (3.16) se dobija:

$$F_{\mu\nu}^a \to F_{\mu\nu}'^{\ a} = F_{\mu\nu}^a - f^{bca}\theta^b F_{\mu\nu}^c \tag{3.17}$$

Konačno, lagranžijan Jang-Milsove teorije se sastoji od tri člana:

$$\mathcal{L} = \underbrace{\overline{\Psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\Psi}_{\mathcal{L}_0} + \underbrace{gW_\mu{}^a\overline{\Psi}\gamma^\mu\frac{\sigma_a}{2}\Psi}_{\mathcal{L}_{int}} + \underbrace{-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{\ a}F^{\mu\nu\ a}}_{\mathcal{L}_F} \tag{3.18}$$

Prvi član $\mathcal{L}_0$ predstavlja slobodno Dirakovo polje dva fermiona. Drugi ($\mathcal{L}_{int}$) opisuje interakciju Dirakovih spinora sa gejdž bozonima prenosnicima interakcije $W_\mu{}^a$, dok je treći, zbog simboličkog zapisa koji je uveden, nešto komplikovaniji za analizu. Naime, eksplicitnim ispisivanjem datog člana dolazi se do zaključka da samo jedan njegov deo predstavlja "pravi" kinetički član (član sa izvodima polja), dok ostali predstavljaju njihovu samointerakciju. To se dešava usled prisustva komutatora u njegovoj definiciji (3.15). Ta okolnost donosi neočekivani zaključak: postoje međusobne interakcije samih gejdž bozona već u prvom redu razvoja i to sa učešćem tri ili čak četiri čestice! U elektrodinamici se tako nešto ne dešava – ne postoji foton-foton interakcija u prvom redu.

Rezime

Lagranžijan (3.18) Jang-Mils teorije je dobijen nametanjem zahteva da početni $\mathcal{L}_0$ bude invarijantan na lokalne transformacije. Za slučaj izospinske $SU(2)$ simetrije $\Psi \longrightarrow \Psi' = e^{i\theta_i(x)\frac{\sigma_i}{2}}\Psi$, tri gejdž polja $W_\mu{}^a$, proizašla iz lokalizacije, moraju da trpe gejdž transformaciju simultano sa promenom spinora:

$$W_\mu{}^a \rightarrow W_\mu'{}^a = W_\mu{}^a + \frac{1}{g}\partial_\mu\theta^a - \varepsilon^{abc}\theta^b W_\mu{}^c \tag{3.19}$$

Jačina polja je, prema (3.16), definisana sa

$$F_{\mu\nu}^{\ a} = \partial_\mu W_\nu{}^a - \partial_\nu W_\mu{}^a + g\varepsilon^{abc}W_\mu{}^b W_\nu{}^c \tag{3.20}$$

a njihova promena sa

$$F_{\mu\nu}^{\ a} \rightarrow F_{\mu\nu}'^{\ a} = F_{\mu\nu}^{\ a} - \varepsilon^{abc}\theta^b F_{\mu\nu}^{\ c} \tag{3.21}$$

Lagranžijan je, dakle, simetričan u odnosu na lokalne gejdž transformacije. Primetno je, međutim, da on ne sadrži maseni član za gejdž polja. S obzirom da je maseni član uvek oblika $-\frac{m^2}{2}W_\mu{}^a W^{\mu\ a}$, on bi narušio simetriju lagranžijana, jer ne bi bio invarijantan na (3.19). Empirijski je, sa druge strane, poznato da nisu svi prenosnici interakcije bezmaseni što bi odgovaralo beskonačnom dometu interakcije. Šta više, slaba interakcija, primera radi, je značajna samo na izrazito malim rastojanjima, te njen prenosnik mora biti masena čestica! U takvim situacijama se pribegava Higsovom (*Peter Higgs*) mehanizmu kao načinu da se bezmasenim kalibracionim poljima generiše masa.

Glava 4

Spontano narušenje simetrije

Egzaktne simetrije poput izospinske predstavljaju, sa eksperimentalnog stanovišta, znatnu idealizaciju realnosti. Jasno je da proton i neutron *nisu* iste čestice - imaju čak različite naboje! Narušenje date simetrije potiče, dakle, od elektromagnetne interakcije koja se ne može isključiti. To unosi u lagranžijan dodatni član koji nije invarijantan na izospinsku transformaciju: $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{inv} + \delta\mathcal{L}$. Ako je $\delta\mathcal{L} \ll \mathcal{L}_{inv}$ može se pribeći perturbativnom metodu rešavanja problema i to je principijelno izvodljivo no prilično komplikovano.

Drugi slučaj narušavanja simetrije bazira na sistemima čije osnovno stanje ne ispoljava simetriju istu kao lagrnžijan (hamiltonijan). Takav fenomen se naziva spontano narušenje simetrije (SNS). Takva situacija manifestuje se degeneracijom opservabli u bilo kojem višem stanju (Dodatak B). Ta okolnost može se koristiti za konstrukciju modela u kojem čestice koje čine npr. dublet $SU(2)$ simetrije lagranžijana, nakon SNS, mogu imati različite mase.

4.1 ϕ^4 teorija

4.1.1 Realno samointeragujuće polje

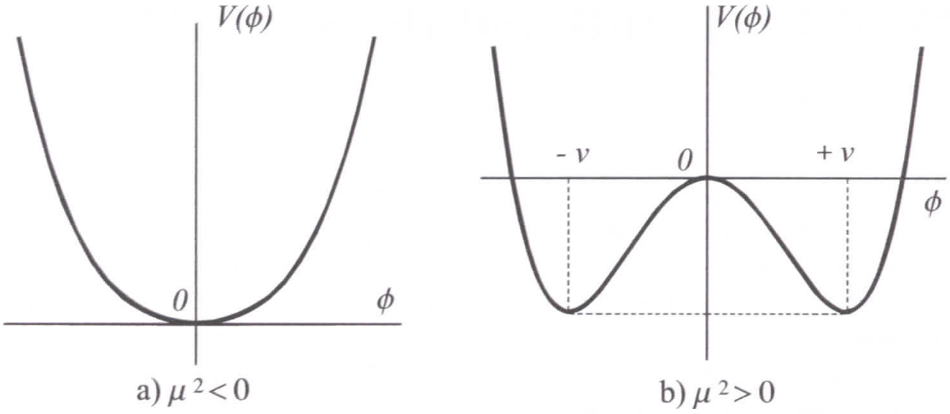
Najjednostavniji primer polja kod kojeg simetrija osnovnog stanja ne ispoljava simetriju hamiltonijana je slučaj saminteragujućeg realnog skalarnog polja ϕ:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - \left(-\frac{\mu^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4\right) = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 - V(\phi) \qquad (4.1)$$

Ovaj je lagranžijan simetričan na refleksiju polja $\phi \to -\phi$. Vakuumsko stanje je određeno minimumom kinetičke i potencijalne energije. S obzirom da je kinetička energija nula za bilo koju konstantnu vrednost polja ϕ, koju u osnovnom stanju polje mora imati, dovoljno je ispitati minimume potencijala $V(\phi)$.

Uslov stabilnosti potencijala u opštem slučaju zahteva da je $\lambda > 0$. Kada je $\mu^2 < 0$ potencijal $V(\phi)$ ima samo jedan minimum $\phi = 0$ (sl. 4.1a). S obzirom da je jedinstveni, on je i simetrični. Pored toga, tada je dozvoljeno kvadratni član identifikovati kao maseni. Sama masa polja ϕ je tada

$$m(\phi) = \sqrt{-\mu^2}$$



Slika 4.1: Potencijal samointeragujućeg skalarnog polja $V(\phi)$

Ako je $\mu^2 > 0$ tada je kvadratni član nemoguće smatrati masenim (pogrešan mu je predznak). Stanje $\phi = 0$ je sada nestabilno, a pojavljuju se nova dva stabilna minimuma: $\phi_0 = \pm v$, $v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$, što se vidi na sl.4.1b. U ovom slučaju pogodno je preći na perturbativni tretman problema. Za to je potrebno izabrati jedan vakuum i oko njega razvijati polje. Neka je izbaran vakuum $\phi_0 = +v$. Tada se ϕ može računati od datog stanja novim poljem $\eta(x)$

$$\phi(x) = v + \eta(x) \tag{4.2}$$

te $\eta(x)$ predstavlja kvantne fluktuacije oko datog minimuma. Korisno je primetiti da je polje ϕ ravnopravno moglo biti razvijano oko drugog vakuuma sa $\phi(x) = -v+\eta(x)$; s obzirom na refleksionu simetriju lagranžijana svi fizički zaključci bi morali biti neosetljivi na ovaj izbor.

Izražavanjem sada lagranžijana preko polja η dobija se:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \eta)^2 - \mu^2\eta^2 - \lambda v \eta^3 - \frac{\lambda}{4}\eta^4 + \frac{\mu^4}{4\lambda} \tag{4.3}$$

Poslednji član je konstantan i kao takvog ga je moguće izostaviti jer se nulti nivo energije uvek može redefinisati. Značajno je da je izbor vakuuma generisao dobro definisanu masu početno bezasenom polju. Naime $\mu^2 > 0$, te se ta veličina može identifikovati sa $\frac{m(\eta)^2}{2}$, odakle je masa uvedenog η polja $m(\eta) = \sqrt{2\mu^2}$.

Jasno je da ove dve slike, jedna preko ϕ i druga preko η, moraju da budu ekvivlentne, jer transformacije tipa (4.2) ne bi smele da promene fizičku interpretaciju. To je, međutim, tako samo ukoliko se lagranžijani (4.1) i (4.3) reše egzaktno. Kako to najčešće nije moguće, perturbativno rešavanje vodi korektnim zaključcima o masi čestice η.

4.1.2 Kompleksno samointeragujuće polje

Stvari se donekle komplikuju za slučaj kompleksnog samointeragujućeg polja skalarnog polja. Analogno realnom, lagranžijan je dat kao

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^\dagger)(\partial^\mu \phi) - V(|\phi|), \quad V(|\phi|) = -\mu^2|\phi|^2 + \lambda|\phi|^4 \tag{4.4}$$

I ovde postoji zahtev da parametar λ mora biti veći od nule ($\lambda > 0$). Ovakav lagranžijan je invarijantan na $U(1)$ transformacije $\phi \to \phi' = e^{i\theta}\phi$. Ponekad je, međutim, lakše prepisati dati lagranžijan preko realnih polja ϕ_1 i ϕ_2 u skladu sa izrazima (1.12). Tada se za lagranžijan dobija:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\big((\partial_\mu\phi_1)^2 + (\partial_\mu\phi_2)^2\big) - V(\phi_1^2 + \phi_2^2)$$

$$V(\phi_1^2 + \phi_2^2) = -\frac{\mu^2}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) + \frac{\lambda}{4}(\phi_1^2 + \phi_2^2)^2 \tag{4.5}$$

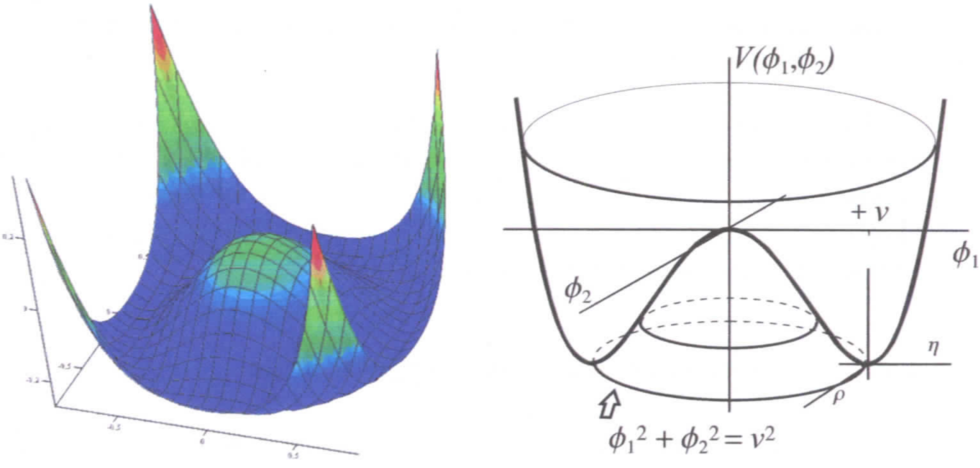
Ovako napisan lagranžijan je sada invarijantan na $SO(2)$ transformaciju[1]

$$\begin{pmatrix} \phi_1{}' \\ \phi_2{}' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

Osnovno stanje je i ovde, kao i u prethodnom primeru, određeno samo minimumom potencijala: $\frac{\partial V}{\partial \phi_i} = 0$, odakle se dobija: $\phi_i\big(-\mu^2 + \lambda(\phi_1^2 + \phi_2^2)\big) = 0$. S obzirom na znak μ^2, mogu se razlikovati dva slučaja: Prvi, ako je $\mu^2 < 0$, reprezentuje situaciju u kojoj ne može doći do spontanog narušenja simetrije jer je osnovno stanje jedinstveno $\langle\phi_1\rangle_0 = \langle\phi_2\rangle_0 = 0$.

Drugi slučaj ($\mu^2 > 0$) je sa stanovišta SNS interesantan. On je dat na slici 4.2. Stanje $\langle\phi_1\rangle_0 = \langle\phi_2\rangle_0 = 0$ postoji i ovde, ali je ono sada nestabilno. Stabilnih stanja, pak, ima kontinuum, a određena su jednačinom kruga u $\phi_1\phi_2$-ravni: $(\phi_1^2 + \phi_2^2) = \frac{\mu^2}{\lambda} \equiv v^2$. Vakuum je, dakle, u ovom slučaju, kontinuirano degenerisan. Izbor jedinstvanog vakuuma je neophodan za dobro

[1] U stvari, dati prelaz sa kompleksnog polja ϕ ka ϕ_1 i ϕ_2 predstavlja homomorfizam $U(1)$ i $SO(2)$ grupe.



Slika 4.2: Potencijal "meksičkog šešira" $V(\phi_1, \phi_2)$

definisanje svih drugih stanja[2]. Taj izbor je proizvoljan, ali se smatra jedinstvenim za celokupni prostor-vreme.

Neka je taj izbor: $\langle\phi_1\rangle_0 = v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}}$, $\langle\phi_2\rangle_0 = 0$, te je razvoj po novim poljima η i ρ dat sa

$$\phi_1(x) = v + \eta(x), \ \phi_2(x) = \rho(x) \tag{4.7}$$

Zamenom u (4.5), za lagranžijan se dobija:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left((\partial_\mu\eta)^2 + (\partial_\mu\rho)^2\right) - \mu^2(\eta)^2 - \mu^2\eta(\eta^2+\rho^2) - \frac{\lambda}{4}(\eta^2+\rho^2)^2 \tag{4.8}$$

Drugi član u lagranžijanu $-\mu^2(\eta)^2$ se sada može interpretirati kao maseni (ima odgovarajući predznak) pa je masa η polja $m(\eta) = \mu\sqrt{2}$. Polje ρ ovim postupkom nije dobilo masu. U tom svetlu se poljima η i ρ može pripisati sledeća interpretacija: Posmatrajući male oscilacije oko izabranog vakuuma, polje η odgovara radijalnim oscilacijama oko tačke O' na krugu minimuma (i ekscitacijama sa nenultom inercijom), dok bi polje ρ odgovaralo infitezimalnim perturbacijama po samom krugu minimuma (te ekscitacijama sa nultim inercijom). Uopšte, ukoliko se viša (globalna, kontinualna) simetrija Hamiltonijana ruši u nižu simetriju osnovnog stanja, broj bezmasenih skalarnih polja (bozona) jednak je razlici broja generatora datih grupa simetrija (Goldstonova teorema). U prethodnom primeru je narušena $U(1)$ (ili SO(2)) simetrija, te postoji samo jedan tzv. Goldstonov (*Jeffrey Goldstone*) bozon ρ.

[2]U kvantnoj teoriji polja se svako stanje kreira delovanjem operatora kreacije na vakuumsko stanje. Zbog ortonormiranosti stanja zahteva se jedinstveni vakuum.

4.2 Spontano narušenje lokalne simetrije. Higsov mehanizam

Do sada je tretiran problem spontanog narušenja *globalne* $U(1)$ simetrije. U prethodnom delu je opisan algoritam lokalizovanja date simetrije, pa nije teško napisati lagražijan samointeragujućeg kompleksnog polja koji bi bio invarijantan na lokalnu $U(1)$ kalibracionu simetriju. On je dat sa ($\mu^2 > 0$):

$$\mathcal{L} = (D_\mu\phi^\dagger)(D^\mu\phi) + \mu^2(\phi^\dagger\phi) - \lambda(\phi^\dagger\phi)^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \tag{4.9}$$

gde je kovarijantan izvod dat kao i u KED (3.2). Prethodno je, takođe, bilo pokazano da bi maseni član za gejdž polje A_μ narušio datu simetriju. Cilj ovog poglavlja je pokaže da se spontanim narušenjem *lokalne* simetrije može *gejdž poljima* generisati masa.

4.2.1 Osnovno stanje. Izbor vakuuma

Korisno je za početak primetiti da se vakuum može birati na identičan način kao i u slučaju globalno invarijantnog lagranžijana. S obzirom da u osnovnom stanju sva polja, odnosno njihove očekivane vrednosti, moraju biti nezavisne od koordinata, svi članovi koji sadrže njihove izvode nemaju uticaj na osnovno stanje. To automatski isključuje kinetički član za kalibraciona polja.

Dakle, neka je vakuum dat kao i pre: $\langle\phi_1\rangle_0 = v$, $v \equiv \frac{\mu^2}{\lambda}$, $\langle\phi_2\rangle_0 = 0$. Smenama (4.7) za lagranžijan se dobija:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\eta^2 - v^2\lambda\eta^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu\rho)^2 + \frac{g^2v^2}{2}(A_\mu)^2 - \\ &- gvA_\mu\partial^\mu\rho - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{int} \end{aligned} \tag{4.10}$$

gde se u $\mathcal{L}_{int}$ sadrže svi netrivijalni interakcioni članovi koji ovde nisu od posebnog interesa. Jasno je uočljiv član sa $(A_\mu)^2$ uz kojeg je konstanta sa odgovarajućim predznakom, koju je stoga moguće poistovetiti sa $\frac{m_A^2}{2}$ odakle je masa gejdž polja $m_A = gv$! Kao i pre, i polje η je dobilo masu $m(\eta) = \mu\sqrt{2}$.

4.2.2 Unitarni gejdž

Ukoliko se podrobnije ispita broj stepeni slobode koji sistem poseduje, dolazi do izvesnog paradoksa: oni se razlikuju pre i posle spontanog narušenja simetrije. Naime, pre narušenja lagranžijan je bio funkcija dva polja materije (ϕ_1 i ϕ_2 ili ϕ i $\phi^\dagger$) i jednog bezmasenog kalibracionog polja A_μ. Međutim, posle narušenja simetrije postoje takođe dva polja materije (η i ϕ_2), ali gejdž polje je sada maseno! Poznato je da je broj stepeni slobode bezmasenog vektorskog polja dva, a masenog tri. Tako izgleda da je ukupan broj stepeni slobode narušenjem simetrije porastao sa četiri na pet! Prisustvo člana sa $A_\mu \partial^\mu \rho$ u lagranžijanu zahteva pažljiviju interpretaciju. Moguće je, naime, drugačije grupisati članove uz ρ i A_μ iz lagranžijana (4.10) :

$$\tfrac{1}{2}(\partial_\mu \rho)^2 + \tfrac{g^2 v^2}{2}(A_\mu)^2 - gvA_\mu \partial^\mu \rho = \tfrac{g^2 v^2}{2}\left(A_\mu - \tfrac{1}{gv}\partial_\mu \rho\right)\left(A^\mu - \tfrac{1}{gv}\partial^\mu \rho\right)$$

U ovom izrazu prepoznaje se kalibraciona transformacija (3.3) koja odgovara lokalnoj $U(1)$ transformaciji polja

$$\psi(x) \to \psi'(x) = \exp\left[-i\frac{\rho(x)}{v}\right]\psi(x) \tag{4.11}$$

Dakle, u skladu sa početnom simetrijom, ukoliko se simultano sa transformacijom $A_\mu \to B_\mu = A_\mu - \frac{1}{gv}\partial_\mu \rho$ načini i (4.11), lagražijan je invarijantan.

Korisno je primetiti sada da kompleksno polje ϕ, nakon SNS-a dato kao $\phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \eta + i\rho)$, može da se zapiše kao

$$\phi = \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\rho(x)}{v}} \tag{4.12}$$

gde je $h(x)$ izabrano tako da se u perturbativnom razvoju (4.12) poklapa sa $\eta(x)$[3]. Ovako definisano polje ϕ, transformacija (4.11) vraća u nultu fazu, ostavljajući samo njen moduo

$$\phi' = e^{-i\frac{\rho(x)}{v}} \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\rho(x)}{v}} = \frac{v + h(x)}{\sqrt{2}} \tag{4.13}$$

Kada se ovako transformisana polja vrate u lagranžijan, dobija se konačno:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu h \partial^\mu h - v^2 \lambda h^2 + \frac{g^2 v^2}{2} B_\mu B^\mu - \\ &\quad - \lambda v h^3 - \frac{1}{4}\lambda h^4 + \frac{1}{2} g^2 h^2 B_\mu B^\mu + v g^2 h B_\mu B^\mu - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \end{aligned} \tag{4.14}$$

[3]Naime, $e^{i\frac{\rho(x)}{v}} \approx 1 + i\frac{\rho(x)}{v}$, pa se uz zanemarivanje viših članova dobija $h(x) = \eta(x)$.

Rezime

Pošavši od lokalno gejdž invarijantne teorije (4.9) nakon algebarskih transformacija (4.7) dobijen je lagranžijan (4.10). Ukoliko se u njemu zahteva prisustvo masenog člana za kalibraciona polja ($m_A = gv$), neophodno je definisanje konkretne nenulte vakuumske očekivane vrednosti polja ($v \neq 0$). Ta okolnost ruši početnu simetriju po kojoj sve tačke kruga (poluprečnika v u $\phi_1\phi_2$-ravni) jednako verovatne. Kasnije se, prelaskom na novi skup polja, lagranžijan čisti od nefizičkih polja, polja koja su lišena fizičkog smisla. Zbog njihove nefizičke interpretacije takva polja se ponekad nazivaju "would-be" Goldstonovi bozoni.

Konačan lagranžijan (4.14) podrazumeva samo "prava" fizička polja. To su: 1) maseni vektorski (gejdž) bozon mase $m_B = gv$ i 2) Higsov bozon h mase $m_h = \sqrt{2\lambda v^2} = \mu\sqrt{2}$. Teorija je sada kozistentna i po pitanju stepena slobode, s obzirom da je polje ρ "otkalibrisano". Njegovo prisustvo je, u stvari, samo izražavalo slobodu da se vrši lokalna gejdž transformacija.

Glava 5

Glašou-Vajnberg-Salamov model elektroslabe interakcije

5.1 Slaba interakcija

Glavnu i odlučujuću ulogu u razumevanju slabe interakcije igralo je istraživanje nuklearnog β-raspada. Nuklearni β-raspad je otkriven kad i sama radioaktivnost – 1896. godine u Bekerelovim eksperimentima. Do 1900. on je identifikovao tri vrste zračenja (α, β i γ) i pokazao da se β-zraci sastoje od elektrona. U istraživanjima Fon Bajera, Hana i Majtnera kasnije (1910 - 1911. god.) primećen je diskretan karakter energetskog spektra elektrona u radioaktivnim serijama radijuma i torijuma. To se poklopilo sa eksperimentalnim dokazima nuklearne strukture atoma koji je predložio Raderford.

Pometnju u naučne krugove unelo je Čedvikovo otkriće kontinualnog spektra β-raspada 1914. godine. Po tome se β-raspad suštinski razlikovao od druga dva tipa raspada kod kojih kontinualni deo spektra nije primećen. Takvi diskretni spektri alpha i gamma zračenja bili su interpretirani kao prelazi jezgra iz jednog stanja u drugo. I β-raspad bi, po analogiji, morao imati istu prirodu te da se sastoji samo od diskretnog spektra. Pokušano je sa pretpostavkama da se takav proces i dešava, ali da elektroni po emitovanju gube deo energije u interakciji sa okolnim atomima emitera usled čega se monoenergetske linije šire i superponiraju. Ovakva predstava je, međutim, morala biti eksperimentalno proverena.

Novi eksperimenti Elisa i Vustera (1927) i Majtnera i Ortmana (1930) uneli su nove sumnje u ispravnost tadašnje slike. Oni su merili ukupnu energiju oslobođenu u β-raspadima Bi-210 i otkrili su da nedostaje deo energije. Izgledalo je kao da se u procesu energija gubi. Pod pritiskom tih eksperimentalnih rezultata mnogi fizičari, na čelu sa Nilsom Borom, bili su spremni da prihvate ideju da se zakon održanja energije narušava. Šta više, tada bi i zakoni održanja impulsa i momenta impulsa bili samo približni.

U pokušaju da "spase" zakone održanja, Pauli iste, 1930. godine, predlaže postojanje još neotkrivene lake neutralne čestice spina $\frac{1}{2}$ koja bi se emitovala uz elektron prilikom β-raspada. Kasnije Čedvikovo otkriće neutrona (1932) nije rešilo enigmu jer je neutron bio po masi skoro jednak protonu. U takvim okolnostima Fermi je iskoristio Paulijevu hipotezu o postojanju treće čestice među produktima β-raspada kao osnovnu ideju teorijskog opisa procesa. Pretpostavio je da se elektron i neutrino kreiraju tokom transformacije neutrona u proton kao što se foton kreira pri elektromagnetnom prelazu između dva energetska nivoa atoma. Ova teorija β-raspada je davala razultate u izvrsnoj saglasnosti sa eksperimentalnim. Međutim, do konačne potvrde postojanja neutrina, kako je nazvana ova čestica na ideju Fermija, čekalo se do 1956. godine – dok nisu počele sa radom nuklearne elektrane u čijoj je okolini fluks neutrina bio značajan.

U pokušaju da zasnuje teoriju β-raspada u okvirima kvantne teorije polja, Fermi je morao da uvede novu silu – slabu nuklearnu. Ovaj proces, naime, nije mogao biti objašnjen pomoću do tada poznatih sila: jake nuklearne, elektromagnetne i gravitacione. Ta nova sila bi, po Fermiju, bila odgovorna za transformaciju neutrona u proton, elektron i (elektronski) antineutrino[1] što se prikazuje reakcijom:

$$n \to p e^- \bar{\nu}_e$$

Kasnije su otkriveni i drugi procesi za koje se ispostavilo da ih uzrokuje slaba interakcija. Najčešće pominjani su raspadi piona ($\pi^+ \to \mu^+ \nu_\mu$ i $\pi^- \to \mu^- \bar{\nu}_\mu$) i β^+-raspad jezgra ($p \to n e^+ \nu_e$). Od posebne važnosti je reakcija zahvata neutrina od strane protona (tzv. inverzni β^+-raspad: $\bar{\nu}_e p \to n e^+$); upravo je ona korišćena u eksperimentima Kovana i Rajnesa iz 1956. kada je postojanje neutrina i definitivno pokazano [21].

Karateristično za sve procese izazvane slabom interakcijom je izuzetno mali efikasni presek i relativno mali domet. To je bilo presudno da se ova interakcija nazove slabom.

5.1.1 Fermijeva teorija β-raspada

Godine 1934. Fermi predlaže lagranžijan slabe interakcije po uzoru na interakcioni lagranžijan u elektrodinamici. Prema njoj raspad neutrona rezultira

[1] Tek daljim razvojem formalizma i celokupne teorije došlo se, u stvari, do ideje da se pri ovoj reakciji stvara *anti*neutrino. Tek tada je ona u skladu sa zakonom održanja leptonskog broja. U slučaju da neutrini imaju masu, razlika između neutrina i antineutrina ne postoji; neutrino je tada po toj osobini sličan fotonu.

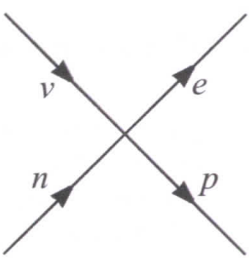
iz interakcije dve struje: hadronske - koja pretvara neutron u proton, i leptonske - koja kreira par elektron-antineutrino.

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}(\bar{\psi}_p \gamma_\mu \psi_n)(\bar{\psi}_e \gamma_\mu \psi_\nu)$$

Raširena je konvencija po kojoj se, na primer, za označavanje spinora neutrina umesto ψ_ν koristi samo ν (analogno je $\bar{\psi}_p \equiv \bar{p}$). Uz dati dogovor Fermijeva interakcija se zapisuje kao:

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{G_F}{\sqrt{2}}(\bar{p}\gamma_\mu n)(\bar{e}\gamma_\mu \nu) \tag{5.1}$$

Činilo se da je ovakva interakcija tačkasta, te se često označava kao četvorofermionska tačkasta interakcija. Fajnmanov (*Richard Feynman*) dijagram takve interakcije dat je na sl. 5.1. Ista interakcija ne opisuje samo raspad neutrona, već i reakciju $\nu_e\, n \rightarrow p\, e^-$, jer je isti operator odgovoran za kreaciju antineutrina i anihilaciju neutrina.



Slika 5.1: Fajnmanov dijagram β-raspada neutrona po Fermiju (smer vremena je od leva ka desnom). U skladu sa Dirakovom interpretacijom antičestica kao čestica koje propagiraju unazad u vremenu, propagator neutrina na dijagramu ima dvojako značenje: 1) uobičajeno – kada je dijagram pridružen reakciji $\nu\, n \rightarrow p\, e^-$, i 2) kada se tumači kao odgovarajuća antičestica nastala u verteksu interakcije $n^0 \rightarrow p\, e^-\, \bar{\nu}$.

Iako uvedena *ad hoc*, Fermijeva konstanta kuplovanja[2] dvaju struja G_F je vrlo brzo određena iz eksperimenata. Ona je u direktnoj vezi sa merljivim opservablama (npr. vreme života neutrona i drugih čestica koje se raspadaju posredstvom slabe interakcije), te se relativno lako određuje. Najnoviji eksperimenti utvrđuju njenu vrednost na

$$G_F = 1.16637(1) \times 10^{-5} GeV^{-2}$$

[2]Pod kuplovanjem ili sprezanjem dva polja podrazumeva se njihovo simultano pojavljivanje u nekom od sabiraka u lagranžijanu. Takav član onda opisuje interakciju datih polja. Primera radi, kuplovanje elektromagnetnog polja i polja interagujućih fermiona dato je interakcionim delom lagranžijana (3.7).

Kasniji eksperimentalni rezultati upućivali su na nove članove u interakcionom lagranžijanu (5.1) odgovorne za β^+-raspad i inverznu reakciju (sl.5.1). Oni su bili tipa $(\bar{n}\gamma_\mu p)(\bar{\nu}\gamma_\mu e)$. Konačno se ustalila ideja da je slaba interakcija opisana kao međudelovanje struje J_μ sa svojom konjugovanom $J_\mu^\dagger$

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu \, J_\mu^\dagger \,, \tag{5.2}$$

pri čemu se J_μ sastoji od hadronskog i leptonskog dela

$$J_\mu = h_\mu + l_\mu \tag{5.3}$$

Sve struje koje ulaze u sastav bilo hadronskog, bilo leptonskog dela, pripadaju klasi tzv. naelektrisanih struja. Taj termin se koristi za označavanje onih struja koje menjaju naelektrisanje čestica koje u njima učestvuju. Primera radi, komponenta hadronske struje $\bar{p}\gamma_\mu n$ pretvara neutralni neutron u pozitivni proton.

5.1.2 Neočuvanje parnosti u slabim interakcijama

Sredinom pedesetih godina postojalo je mnogo eksperimentalnih podataka za koje teorijski opis nije bio dovoljno dobar. U pokušaju da reše jedan od takvih problema vezan za eventualno narušenje zakona održanja parnosti (tzv. θ-τ -problem), Jang i Li (*T. D. Lee*) su izneli radikalno novu misao. Oni su primetili da "postojeći eksperimenti zaista potvrđuju održanje parnosti u jakoj i elektromagnetnoj interakciji ..., ali je za slabe interakcije održanje parnosti do sada samo ekstrapolirana hipoteza nepotkrepljena eksperimentalnim dokazom"[12]. U istom radu oni čak predlažu eksperimente u kojima bi se eventualno neodržanje parnosti moglo meriti.

Jedan od predloženih eksperimentata izvela je gđa Vu (*C. S. Wu*) sa grupom [13]. Narušenje parnosti ustanovljeno je konstatovanjem asimetrije raspada u pravcu spina. Izmerili su da se manje elektrona emituje u "gornju" nego u "donju" hemisferu u odnosu na orijentaciju spina jezgra. Nedugo zatim je i grupa okupljena oko Garvina (*R. L. Garwin*) pokazala neodržanja parnosti i u raspadu piona [14]. Od tada su stizale potvrde iste opservacije i iz drugih laboratorija.

Ovakva situacija vrlo brzo dobija svoj teorijski rasplet. Nekoliko značajnih radova ([15]-[17]) dovodi do jedinstvenog zaključka: Ukoliko u interakcioni deo lagranžijana slabe interakcije ulaze samo "leve" komponente spinora[3], neodržanje parnosti prirodno sledi, a dobija se i bolje slaganje

[3]Interakcija takvog tipa naziva se V-A interakcija i poznatija je pod tim imenom. Dodatna objašnjenja data su u *Dodatku A*.

sa eksperimentom. Ova ideja predstavljala je logičnu reakciju na pritisak eksperimentalnih podataka. Eksperimenti su ukazivali na postojanje samo levih neutrina (desnih antineutrina)[19], kao i potpunu levu (antiparalelnu) polarizaciju elektrona koji učestvuju u slabim reakcijama pri kojima su njihove brzine $v \to c$.

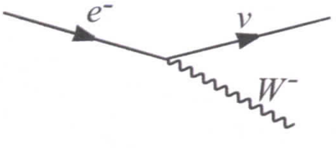
5.1.3 W bozoni

Fermi je svoju teoriju objavio pre Jukavine (*H. Yukawa*) teorije mezona, pa samim tim nije ni razmišljao o mogućnosti da se slabe interakcije prenose izmenom nove čestice po ugledu na foton. Zapravo, Jukava je prvi predložio da se i jake i slabe interakcije mogu razumeti pomoću izmene mezona. Polazeći od ove ideje, a po analogiji sa elektrodinamikom, pretpostavljeno je da se slaba interakcija prenosi izmenom novog kvanta spina 1, koji je nazvan "intermedijarni vektorski bozon", a kasnije "W bozon". Lagranžijan ovakve interakcije za elektron i neutrino lako je napisati po analogiji sa KED:

$$\mathcal{L}_W = G_W \left(l^\mu W^+_\mu + l^{\mu\dagger} W^-_\mu \right), \tag{5.4}$$

gde leptonske struje l^μ umesto uobičajenog oblika $(\bar{\nu}\gamma^\mu e)$ imaju V-A strukturu, u skladu sa zahtevom o neodržanju parnosti:

$$l^\mu = \bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e \tag{5.5}$$



Slika 5.2: Fajnmanov dijagram reakcije $e^- \to W^- \nu$.

Nova konstanta kuplovanja G_W se dovodi u vezu sa Fermijevom konstantom i u niskoenergetskoj aproksimaciji relacija je

$$G_W^2 = \frac{M_W^2 G_F}{\sqrt{2}} \tag{5.6}$$

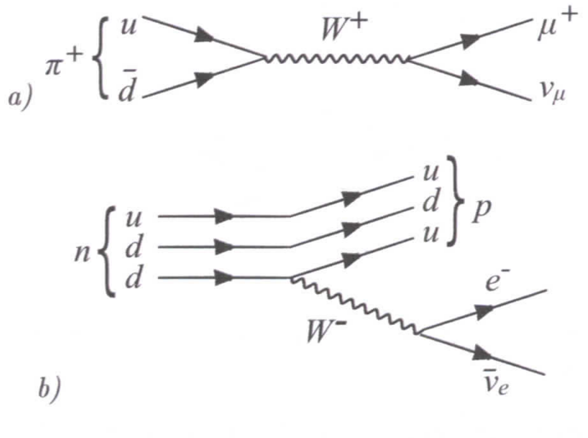
Iako je uvođenje W bozona bilo motivisano postojanjem fotona, iz osobina slabih interakcija proizilaze bitne razlike između ovih čestica. Proučavanjem svih β-raspada uočava se da postoji izmena električnog naboja, pa se s toga W bozon mora pojavljivati bar u dva stanja: W^+ i W^-. Takođe, kako bi se razumeo mali domet ovih interakcija, neophodno je da W bozon ima veoma veliku masu.

Ova privlačna ideja vrlo brzo naišla je na poteškoće. Raspad piona (π-mezona), za koji se ustanovilo da se odvija po reakciji:

$$\pi^+ \longrightarrow \mu^+ \nu_\mu ,$$

nije mogao biti objašnjen. Naime, odmah se vidi da broj čestica koje učestvuju u raspadu nije isti kao pri beta raspadu neutrona, što predstavlja problem u iskazivanju interakcije ovog procesa pomoću W bozona.

Za razumevanje ovog problema bilo je potrebno da se napravi veliki prodor u shvatanju jakih interakcija. Uvođenjem kvark-modela, tj. kvarkova kao elementarnih konstituenata hadrona, otvoren je put za jedinstven tretman leptona i hadrona u slabim interakcijama. U lagranžijan ulaze samo kvarkovi i leptoni (tzv. fundamentalne čestice), tj. leve komponente njihovih spinora, u skladu sa V-A teorijom. Uspeh ovog modela potpuno je promenio interpretaciju slabe teorije, i uspešno rešio problem raspada π-mezona. Kako π-mezon sadrži kvark i antikvark, raspad se može razumeti kao anhilacija u- i $\bar{d}$-kvarka u virtuelni W bozon koji se zatim raspada na mion i neutrino (sl. 5.3a).



Slika 5.3: Fajnmanov dijagram reakcijâ *a)* $\pi^+ \longrightarrow \mu^+ \nu$; *b)* $d \longrightarrow u\, e^- \, \bar{\nu}_e$.

U svetlu kvarkovskog modela može se mnogo bolje sagledati simetrija koja leži u osnovi slabe interakcije. Tako posmatrano, β-raspad – transformacija neutrona (udd) u proton (uud) – predstavlja proces kvark-raspada (sl. 5.3b).

Prelaz d-kvarka u u-kvark podrazumeva i promenu izospina iz $+\frac{1}{2}$ u $-\frac{1}{2}$.

[4] Da bi se objasnila ova promena, neophodno je pretpostaviti da su i elektron i njegov neutrino svojstvena stanja izospina $\frac{1}{2}$ kao i u- i d-kvarkovi:

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

U tom slučaju W bozon predstavlja operator dizanja i spuštanja na izospinskim stanjima leptona i kvarkova. Izospin, koji je izgubljen u odnosu na početni kvark, prenet je W bozonom na leptone. Konzervacija izospina se ogleda u činjenici da je elektron uvek praćen pojavom odgovarajućeg neutrina. Na taj način kvark-model dovodi do nove slike slabih interakcija, a W bozon je shvaćen kao generator grupe slabe izospinske simetrije, baš kao što se zahteva u Jang-Milsovoj teoriji.

Pored, na prvi pogled, uspešne formulacije slabih interakcija javljale su se izvesne teorijske teškoće u zasnivanju konzistentne teorije.

Problem bezmasenih Jang-Milsovih gejdž potencijala je ostao nerešen. No, možda još i značajnije od ovoga, procedura renormalizacije[5] doživela je potpun neuspeh kod slabih interakcija.

Uprkos ogromnom uspehu V-A teorije i kvark modela u objašnjenju mnogih fenomena slabih i jakih interakcija, izgledalo je da se nikada neće ponoviti situacija iz KED, u pogledu preciznosti računa i njegovim slaganjem sa eksperimentom.

5.2 Standardni model elektroslabih interakcija

Tokom godina rada na teorijskim problemima elementarnih čestica, iskristalisao put koji je korisno pratiti. Mnogi autori (npr. *Novaes* [5]) to navode čak u obliku jednostavnog algoritma:

- Izabrati grupu G gejdž simetrija lagranžijana sa N_G generatora;
- Dodati N_G vektorskih polja (gejdž bozona) za datu reprezentaciju grupe;
- Izabrati reprezentaciju grupe transformacija za polja materije (elementarne čestice);

[4] Neophodno je naglasiti da ovde nije reč o izospinu koji je Hajzenberg pretpostavio za objašnjenje nuklearne sile, već o takozvanom *slabom* izospinu, karakterističnom za sve fundamentalne čestice.

[5] Renormalizacija je postupak uklanjanja beskonačnosti koje se javljaju prilikom izračunavanja opservabli u pojedinim teorijama. U KED se pokazala kao uspešan matematički trik, koji je svoje formalno zasnivanje dobio tek radovima Thofta (*G. 't Hooft*).

- Dodati skalarna polja kako bi se (nekim) vektorskim bozonima generisala masa;
- Definisati kovarijantni izvod i zapisati najopštiji renormalizabilni lagranžijan, invarijantan u odnosu na G, u kome se sva navedena polja međusobno kupluju;
- Higsovim mehanizmom narušiti simetriju osnovnog stanja tako da je minimum potencijala u nuli;
- Uobičajenim tehnikama kvantne teorije polja dokazati da je teoriju moguće renormaliziovati i predvideti rezultate;
- Proveriti da li model dovoljno dobro opisuje realnost;
- Ukoliko to nije slučaj, početi od početka!

Elektromagnetna i slaba interakcija su jedine interakcije karakteristične za leptone. Stoga i ne čudi ideja o njihovom ujedinjenju formiranjem jedne jedinstvene teorije. Prvi pokušaji nazreli su se 1957. godine, sa idejama o intermedijarnim vektorskim bozonima kao kvantima slabe interakcije. Švinger (*Julian Schwinger*) je pokušao sa $O(3)$ grupom simetrija kojoj bi bila pridružena tri gejdž bozona (V^+, V^-, V^0). Naelektrisani bozoni bi bili analogni W bozonima, dok bi neutralni odgovarao fotonu kao kvantu elektromagnetnog polja.

Kasniji model Bludmana (*S. A. Bludman*, 1958) bio je baziran na $SU(2)$ grupi simetrija slabog izospina i kao takav imao je manje ambiciozan cilj – opis samo slabe interakcije. S obzirom da je $SU(2)$ grupa troparametarska, i on je morao uvesti tri bozona – dva naelektrisana i jedan neutralan. Logično da bi i po njemu naelektrisani bozoni bili odgovorni za interakcije sa pomenutim naelektrisanim strujama, ali bi neutralni onda morao biti spregnut sa tzv. neutralnim strujama. Takvo kuplovanje bi opisivalo "obične" interakcije rasejanja bez razmene naelektrisanja (npr. $e\,\nu \rightarrow e\,\nu$), analogne rasejanjima uzrokovanim elektromagnetnom interakcijom. Takve interakcije do tada nisu opažene, ali je tu činjenicu bilo lako pravdati relativno malom preciznošću eksperimenata. Verovanje u postojanje neutralnih struja bilo je podstaknuto samo verovanjem u izospinsku simetriju leptona. One su konačno opažene tek 1973. u CERN-u.

Godine 1961. Glašou (*S. L. Glashow*) je primetio da je, za objedinjeni opis elektromagnetne i slabe interakcije, potrebno izaći iz okvira $SU(2)$ grupe. Predložio je konstrukciju teorije simultano invarijantne na grupe $SU(2)$ i $U(1)$, gde bi $SU(2)$ grupa bila pridružena kao ranije slabom izospinu $\vec{T}$, a $U(1)$ hipernaboju Y (što se najčešće zapisuje kao $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$). Kasnije su se tom idejom bavili Vajnberg (*S. Weinberg*) i Salam (*A. Salam*) stvorivši ono što se danas naziva *Standardnim modelom elektroslabe interakcije*, odražavajući njegov impresivan uspeh.

5.2.1 Izbor grupe simetrije

Svaka Jang-Milsova teorija počinje izborom lagranžijana invarijantnog na željenu globalnu grupu simetrija. U ovom je slučaju ta grupa $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. Već je naznačeno da se leptoni (e i ν)[6] pridružuju $SU(2)$ dubletu leve kiralnosti

$$L \equiv \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e_L \end{pmatrix},$$

gde je vrednost treće komponente izospina za neutrino $I_3(\nu) = +\frac{1}{2}$, a za levu komponentu elektrona $I_3(e_L) = -\frac{1}{2}$. Elektronsko stanje desne kiralnosti e_R se onda javlja kao $SU(2)$ singlet $I_3(e_R) = 0$, tj. simetrijske transformacije $SU(2)$ grupe ga ne menjaju. Na taj način on nije povezan sa elektroslabim prelazima. Zbog ove asimetrije između levih i desnih komponenata prilikom transformacije, najčešće se ovakva grupa označava kao $SU(2)_L$.

Sve spinore karakteriše invarijantnost na $U(1)$ grupu transformacija. U polavlju 2.2.1 pokazano je kako se ova invarijantnost može, u opštem slučaju, dovesti u vezu sa zakonom održanja hipernaboja Y. Budući da se hipernaboj *a priori* ne poistovećuje sa elektromagnetnim nabojem Q, veza između njih mora biti ustanovljena nekim fizičkim argumentima. Gelman (*Murray Gell-Mann*) i Nišidžima (*K. Nishijima*) su tu vezu dali relacijom

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}Y \tag{5.8}$$

Iz Gelman-Nišidžimina relacija jedinstveno utvrđuje hipernaboje levog dubleta i desnog singleta

$$Y_L = -1, \qquad Y_R = -2 \tag{5.9}$$

5.2.2 Jang-Milsov simetrični lagranžijan

Za dalju izgradnju Jang-Milsove teorije potrebno je uvesti gejdž bozone za svaki generator simetrije: tri za $SU(2)_L \to (W^1_\mu, W^2_\mu, W^3_\mu)$, i jedan za $U(1)_Y \to B_\mu$, te obične izvode zameniti kovarijantnim. Lagranžijan teorije je dat kao zbir leptonskog člana i kinetičkog člana za gejdž polja:

$$\mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}_{lepton} + \mathcal{L}_{gauge}\,, \tag{5.10}$$

gde je

$$\mathcal{L}_{gauge} = -\frac{1}{2}tr(W_{\mu\nu}W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu} \tag{5.11}$$

[6]U radu neće biti tretirani modeli za sve tri generacije leptona. One se grade analogno.

Tenzori jačine polja pišu se po analogiji sa definicijama (3.15) i (3.5) i dati su sa:

$$\begin{aligned} W_{\mu\nu} &= \partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu - ig[W_\mu, W_\nu], \quad W_\mu = W_\mu^a \tfrac{\sigma_a}{2}, \\ B_{\mu\nu} &= \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu \end{aligned} \tag{5.12}$$

Leptonski član lagranžijana se, nakon zamene odgovarajućih kovarijantnih izvoda, može zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{lepton} &= i\bar{e}_R\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_1 B_\mu \frac{1}{2} Y_R\right) e_R + \\ &+ i\bar{L}\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_1 B_\mu \frac{1}{2} Y_L - ig_2 \frac{\vec{\sigma}}{2} \vec{W}_\mu\right) L \end{aligned} \tag{5.13}$$

U cilju boljeg sagledavanja fizičkog smisla ovog izraza, pogodno ga je razdvojiti na slobodni član (bez kalibracionih polja)

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{e}\gamma^\mu\partial_\mu e + i\bar{\nu}\gamma^\mu\partial_\mu\nu\,, \tag{5.14}$$

i interakcioni član

$$\mathcal{L}_{int} = \frac{1}{2} g_1 B_\mu \bar{e}_R \gamma^\mu Y_R e_R + \frac{1}{2}\bar{L}\gamma^\mu(g_1 B_\mu Y_L + g_2\vec{\sigma}\vec{W}_\mu)L \tag{5.15}$$

Uvrštavajući u izraz (5.15) sve poznate konstante (Paulijeve matrice i hipernaboj) dobija se

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int} &= -\frac{g_1}{2}\left(\bar{e}_L\gamma^\mu e_L + \bar{\nu}\gamma^\mu\nu\right) B_\mu - g_1\,\bar{e}_R\gamma^\mu e_R\, B_\mu \\ &+ \frac{g_2}{2}\left(\bar{\nu}\ \bar{e}_L\right)\gamma^\mu \begin{pmatrix} W_\mu^3 & W_\mu^1 - iW_\mu^2 \\ W_\mu^1 + iW_\mu^2 & W_\mu^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu \\ e_L \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{5.16}$$

Naelektrisane struje

Matricu koja se pojavljuje u poslednjem članu je potrebno detaljnije proučiti. Množenje sa njenim dijagonalnim članovima ne meša leptone, dok prisustvo elemenata van dijagonale u krajnjoj liniji doprinosi kuplovanju sa strujama koje mešaju leptone – sa naelektrisanim strujama! Ukoliko se intermedijarni vektorski bozoni $W^\pm$ uvedu kao linerane kombinacije W^1 i W^2:

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(W^1 \mp iW^2\right) \tag{5.17}$$

dobije se kuplovanje koje reprodukuje tačno V-A strukturu slabih naelektrisanih struja iz izraza (5.4) i (5.5):

$$\mathcal{L}_{int}^{W^\pm} = \frac{g_2}{2\sqrt{2}}\left(\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)e\,W_\mu^+ + \bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu\,W_\mu^-\right) \tag{5.18}$$

Upoređivanjem sa pomenutim izrazima interakciona konstanta $SU(2)$ grupe g_2 lako se dovodi u vezu sa konstantom kuplovanja naelektrisanih struja i W bozona $\frac{g_2}{2\sqrt{2}} = G_W$, pa samim tim i sa masom W bozona

$$\frac{g_2}{2\sqrt{2}} = \left(\frac{M_W^2 G_F}{\sqrt{2}}\right)^{1/2} \tag{5.19}$$

Neutralne struje i elektromagnetna interakcija

Član interakcionog lagranžijana koji preostaje sadrži polja W_μ^3 i B_μ i može se zapisati u obliku

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^{W^3 B} = & \ \tfrac{1}{2}\left(\bar{e}_L \gamma^\mu e_L\right)\left(-g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3\right) - g_1 \left(\bar{e}_R \gamma^\mu e_R\right) B_\mu + \\ + & \ \tfrac{1}{2}\left(\bar{\nu}\gamma^\mu \nu\right)\left(-g_1 B_\mu + g_2 W_\mu^3\right) \end{aligned} \tag{5.20}$$

Njegov fizički smisao još uvek nije očigledan. Očekuje se, konačno, konstrukcija tipa

$$q\, \bar{e}\gamma^\mu e\, A_\mu \equiv q\left(\bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{e}_R \gamma^\mu e_R\right) A_\mu\,, \tag{5.21}$$

koja bi mogla da se poistoveti sa elektromagnetnom interakcijom i neka slična koja bi opisivala interakciju neutralnih struja sa neutralnim bozonom.

U cilju dobijanja takvih rezultata, potrebno je preći na novi par polja A_μ i Z_μ^0:

$$B_\mu = \frac{g_2 A_\mu - g_1 Z_\mu}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad \text{i} \quad W_\mu^3 = \frac{g_1 A_\mu + g_1 Z_\mu}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \tag{5.22}$$

Primetno je da se ovakav odabir linearne kombinacije može predstaviti rotacijom u ravni koju određuju B_μ i W_μ^3

$$\begin{pmatrix} A_\mu \\ Z_\mu^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_W & \sin\theta_W \\ -\sin\theta_W & \cos\theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_\mu \\ W_\mu^3 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

Ugao θ_W za koji se ta rotacija vrši označava se kao Vajnbergov ugao mešanja. S obzirom da je inverzna transformacija data sa

$$\begin{aligned} B_\mu &= A_\mu \cos\theta_W - Z_\mu \sin\theta_W\,, \\ W_\mu^3 &= A_\mu \sin\theta_W + Z_\mu \cos\theta_W\,, \end{aligned}$$

pri upoređivanju sa originalnom smenom (5.22) lako se vidi da je ugao θ_W jednoznačno određen sa

$$\sin\theta_W = \frac{g_1}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \quad \text{i} \quad \cos\theta_W = \frac{g_2}{\sqrt{g_1^2 + g_2^2}} \tag{5.24}$$

U funkciji ovih novih polja, lagranžijan (5.20) ima oblik

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{int}^{W^3 B} = & -\frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}\left(\bar{e}\gamma^\mu e\right) A_\mu & a) \\
& +\frac{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}{2}\left(\bar{\nu}\gamma^\mu \nu\right) Z_\mu^0 & b) \\
& +\frac{g_1^2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}\left(\bar{e}_R\gamma^\mu e_R\right) Z_\mu^0 & c) \\
& +\frac{g_1^2-g_2^2}{2\sqrt{g_1^2+g_2^2}}\left(\bar{e}_L\gamma^\mu e_L\right) Z_\mu^0 & d)
\end{aligned} \tag{5.25}$$

Dobija se, dakle, očekivano kuplovanje struje Dirakovog polja sa elektromagnetnim A_μ poljem u prvom članu (5.25a), dok ostali članovi (5.25b-d) predstavljaju kuplovanje neutralnih struja sa neutralnim bozonom Z_μ^0. Interakcija neutralnih struja je ovako prirodno proistekla iz teorije, no u to doba još uvek nije bila opažena. Prvi efekte neutralnih struja opaženi su 1973. godine u CERN-u i Fermilabu.

Kako bi se prvi član u lagranžijanu (5.25) mogao zaista identifikovati kao elektromagnetna interakcija, jednostavnim poređenjem sa izrazom (5.21), dolazi se do sledeće jednakosti

$$e=\frac{g_1 g_2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}=g_1\cos\theta_W=g_2\sin\theta_W \tag{5.26}$$

Ugao θ_W moguće je eksperimentalno meriti i njegova vrednost je $\sin^2\theta_W \simeq 0.22$. Na taj način su fiksirane i vrednosti kalibracionih konstanti g_1 i g_2.

Iznenađujuće je, međutim, da teorija predviđa različite intenzitete interakcije Z^0 bozona sa neutrinima i elektronima, a razlika postoji čak i između levo i desno kiralnih elektrona! Kao u prethodnom primeru, koeficijenti koji se javljaju uz neutralne struje mogu se smatrati "elektroslabim nabojem". Tako Z^0 bozon interaguje sa neutrinom (leve kiralnosti) čiji je elektroslabi naboj jednak $\frac{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}{2}$, dok je elektroslabi naboj elektrona leve kiralnosti jednak $\frac{g_1^2-g_2^2}{2\sqrt{g_1^2+g_2^2}}$, a elektrona desne kiralnosti $\frac{g_1^2}{\sqrt{g_1^2+g_2^2}}$. S obzirom da se gejdž konstante g_1 i g_2 mogu izraziti preko ugla θ_W pogodno je i ove elektroslabe naboje izraziti preko iste veličine. Koristeći definicije (5.24) i (5.26) dolazi se do jedinstvenog izraza za sva tri elektroslaba naboja i on je dat sa

$$\frac{e}{\sin\theta_W\,\cos\theta_W}\left(I_3-Q\sin^2\theta_W\right) \tag{5.27}$$

Veličina Q je naelektrisanje fermiona ($Q_e=-1$, $Q_\nu=0$), a I_3 je svojstvena vrednost operatora izospina (tačnije njegove projekcije na treću osu).

U skladu sa prethodnim konvencijama, ako je fermion gornji član dubleta izospin mu je $I_3 = +\frac{1}{2}$, za donje članove je $I_3 = -\frac{1}{2}$, dok je za singlete $I_3 = 0$. Na taj način izraz (5.27) predstavlja meru interakcije bilo kog fermiona sa česticom Z^0.

Rezime

Konačno, Jang-Milsov lagranžijan sa početka simetričan na $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ transformacije može se napisati u obliku koji eksplicitno otkriva osobine teorije:

$$\mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int}^{W^\pm} + \mathcal{L}_{int}^{W^3 B} + \mathcal{L}_{gauge} \tag{5.28}$$

Prvi član $\mathcal{L}_0$ predstavlja kinetičke energije leptona, a drugi i treći član daju interakcije (naelektrisanih i neutralnih struja i elektromagnetnu). Poslednji član je do sada izražen samo preko starih polja ($\vec{W}_\mu$ i B_μ) u obliku (5.11). Ukoliko se izrazi preko novih polja ($W_\mu^\pm$, Z_μ^0 i A_μ), pored običnih kinetičkih članova, dobiju se i članovi koji opisuju njihovu međusobnu interakciju.

Strogo formalno, međutim, osnove za identifikaciju svih opisanih interakcija (bilo elektromagnetnih, bilo slabih) nema. Ova Jang-Milsova teorija još uvek *ne opisuje* elektromagnetne i slabe interakcije. Već je pomenuto da ona ne može da opiše kratkodometne interakcije kakva je slaba, jer bi prisustvo masenih članova za gejdž polja narušilo simetriju. Pored toga, simetriju bi narušili maseni članovi za sama polja materije

$$m_e \bar{e} e = m_e(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R)\,,$$

Budući da e_L pripada izospinskom dubletu, a e_R je singlet, onda kombinacije tipa $\bar{e}_R e_L$ manifestno narušavaju gejdž invarijantnost. Ovi problemi rešavaju se pravilnim izborom Higsovog polja.

5.2.3 Spontano narušenje simetrije

Izbor Higsovog polja

Cilj narušenja simetrije Higsovim mehanizmom je dodela mase kalibracionim bozonima i fermionima, pri čemu polja A_μ i ν ne bi smela dobiti masene članove, kako bi se njihovi kvanti pobuđenja mogli interpretirati kao foton i neutrino respektivno.

Naravno, Higsova polja takođe moraju biti invarijantna na traženu grupu simetrija pre narušenja, te Vajnberg predlaže uvođenje četiri skalarna polja

ϕ_i u takvoj kombinaciji da se transformišu kao $SU(2)_L$ dublet:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \qquad \text{gde su} \qquad \begin{aligned} \phi^+ &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \\ \phi^0 &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_3 + i\phi_4) \end{aligned} \tag{5.29}$$

Gornji indeks uz ova polja predstavlja naelektrisanje koje je na dati način izabrano kako bi definicija bila u skladu sa Gelman-Nišidžiminom relacijom (5.8), po kojoj sada ispada da je slabi hipernaboj $Y_\phi = 1$. Naravno, osnovnom lagranžijanu proisteklom iz Jang-Milsove teorije (5.28) potrebno je dodati lagranžijan novog skalarnog polja, ali tako da bude invarijantan u odnosu na lokalne transformacije grupe $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$

$$\mathcal{L}_{scal} = (D_\mu\Phi)^\dagger(D^\mu\Phi) - V(\Phi^\dagger\Phi), \tag{5.30}$$

gde je potencijal kao i ranije

$$V(\Phi^\dagger\Phi) = -\mu^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2, \tag{5.31}$$

a kovarijantni izvod

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_1 B_\mu \frac{1}{2} Y_\phi - ig_2 \frac{\vec{\sigma}}{2}\vec{W}_\mu \tag{5.32}$$

Spontano narušenje simetrije moguće je ukoliko je $\mu^2 > 0$. Pogodan izbor za vakuumsku očekivanu vrednost skalarnog polja $\Phi(x)$ je

$$\langle\Phi\rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \qquad v = \sqrt{\frac{\mu^2}{\lambda}} \tag{5.33}$$

Postavlja se, međutim, pitanje zašto je ovaj izbor zgodan za formulaciju teorije. Kao prvo, nužno je odrediti na koju simetriju je potrebno rušiti prvobitnu $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$. S obzirom da je, prema svim dosadašnjim saznanjima, naelektrisanje egzaktno očuvano, nameće se kao nedvosmislen zaključak da je simetriju potrebno rušiti do $U(1)$ simetrije. Ali, ne do grupe $U(1)_Y$ hipernaboja, već do fazne invarijantnosti elektromagnetnog naboja (naelektrisanja), što se zapisuje kao

$$SU(2)_L \otimes U(1)_Y \to U(1)_{em}$$

Posle narušenja simetrije, dakle, grupa $U(1)_{em}$ ostaje kao jedina egzaktna simetrija vakuuma. To znači da generator ove grupe $Q = I_3 + \frac{Y}{2}$ anihilira vakuum. I zaista

$$(I_3 + \tfrac{Y}{2})\langle\Phi\rangle_0 = \tfrac{1}{2}(\sigma_3 + 1)\begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ v/\sqrt{2} \end{pmatrix} = 0$$

Bitno je primetiti da ostali generatori prvobitne grupe ne anihiliraju vakuum, te se simetrija slomila upravo na njima:

$$
\begin{aligned}
I_1\langle\Phi\rangle_0 &= \tfrac{1}{2}\sigma_1\begin{pmatrix}0\\ v/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ v/\sqrt{2}\end{pmatrix} \neq 0\\
I_2\langle\Phi\rangle_0 &= \tfrac{1}{2}\sigma_2\begin{pmatrix}0\\ v/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ v/\sqrt{2}\end{pmatrix} \neq 0\\
(I_3 - \tfrac{Y}{2})\langle\Phi\rangle_0 &= \tfrac{1}{2}(\sigma_3 - 1)\begin{pmatrix}0\\ v/\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ v/\sqrt{2}\end{pmatrix} \neq 0
\end{aligned}
$$

Gejdž bozon koji odgovara održanoj simetriji trebalo bi da ostane bezmasen (foton), a ostala tri bi trebalo da dobiju masu.

Naredni korak jeste razvoj polja $\Phi(x)$ oko vakuuma. Dati razvoj odgovara prvobitno definisanom obliku polja (5.29) sa $\phi_3(x) = v + h(x)$. Pokazuje se da je moguće takav razvoj parametrizovati u obliku pogodnom za kasniji inverzni unitarni gejdž:

$$
\Phi(x) = \exp\left(i\frac{\sigma_a}{2}\frac{\xi^a(x)}{v}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v + h(x)\end{pmatrix} \tag{5.34}
$$

Ovaj način zapisa je neabelovski analogon izraza (4.12) za $U(1)$ simetriju.[7]

Kao i u slučaju komutativne transformacije, sada je potrebno još samo preći na novo polje

$$
\Phi(x) \to \Phi'(x) = \exp\left(-i\frac{\sigma_a}{2}\frac{\xi^a(x)}{v}\right)\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\ v + h(x)\end{pmatrix} \tag{5.35}
$$

Istu transformaciju

$$
U = \exp\left(-i\frac{\sigma_a}{2}\frac{\xi^a(x)}{v}\right)
$$

neophodno je primeniti i na sva ostala polja u Jang-Milsovom (simetričnom) delu lagranžijana koja imaju veze sa $SU(2)$ simetrijama (kalibraciona polja W^a_μ i dubleti)

$$
\begin{aligned}
W_\mu \to W'_\mu &= UW_\mu U^{-1} + \frac{1}{ig}(\partial_\mu U)U^{-1}\\
W_{\mu\nu} \to W'_{\mu\nu} &= UW_{\mu\nu}U^{-1}\\
L \to L' &= UL
\end{aligned} \tag{5.36}
$$

Ostale veličine ne trpe promenu ($B'_\mu = B_\mu$, $B'_{\mu\nu} = B_{\mu\nu}$, $e'_R = e_R$). Ovim unitarnim gejdžom su polja $\xi^a(x)$ otkalibrisana. Ona su samo označavala slobodu vršenja lokalne $SU(2)$ gejdž transformacije.

[7] Potrebno je primetiti da je oblik (5.34) dobro definisan jer se već u prvom redu razvoja dobija

$$
\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}\xi_2(x) + i\xi_1(x)\\ v + h(x) - i\xi_3(x)\end{pmatrix}
$$

Dobija se, dakle, oblik koji se može uporediti sa početnom definicijom polja $\Phi(x)$.

Mase kalibracionih polja

Kompletan lagranžijan teorije, nakon spontanog narušenja simetrije, sastoji se od Jang-Milsovog dela (u kojem su odgovarajuća polja zamenjena prema unitarnoj transformaciji (5.36)) i skalarnog dela[8]. Sam skalarni lagranžijan sada ima oblik

$$\mathcal{L}_{scal} = \left| D_\mu \left(\frac{v+h}{\sqrt{2}} \right) \right|^2 + \mu^2 \frac{(v+h)^2}{2} - \lambda \frac{(v+h)^4}{4} \tag{5.37}$$

Upravo u prvom članu ovog izraza pojavljuju se članovi koji doprinose masi gejdž bozona. Oni su dati sa

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \left| \begin{pmatrix} \overbrace{g_1 B_\mu + g_2 W_\mu^3}^{A_\mu \sqrt{g_1^2+g_2^2}} & \overbrace{g_2(W_\mu^1 - iW_\mu^2)}^{W_\mu^+ \sqrt{2}} \\ \underbrace{g_2(W_\mu^1 + iW_\mu^2)}_{W_\mu^- \sqrt{2}} & \underbrace{g_1 B_\mu - g_2 W_\mu^3}_{-Z_\mu^0 \sqrt{g_1^2+g_2^2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \right|^2 &= \\ = \frac{v^2 g_2^2}{4} W_\mu^+ W^{-\mu} + \frac{1}{8} v^2 (g_1^2 + g_2^2) Z_\mu^0 Z^{0\mu} & \end{aligned} \tag{5.38}$$

Upoređivanjem sa standardnim oblikom masenih članova za vektorska polja ($M_W^2 W_\mu^+ W^{-\mu}$ za naelektrisana i $\frac{1}{2} M_Z^2 Z_\mu^0 Z^{0\mu}$ za neutralna), dolazi se do zaključka da su mase gejdž bozona

$$M_W = \frac{g_2 v}{2}, \qquad M_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g_1^2 + g_2^2} = \frac{M_W}{\cos\theta_W}, \tag{5.39}$$

Kvadratna forma polja A_μ se ne pojavljuje, te foton ostaje bezmasen, što je u skladu sa očekivanjima s obzirom da $U(1)_{em}$ preostaje kao jedina simetrija teorije.

Uzevši u obzir jednakost (5.19), dobija se brojna vrednost za vakuumsku očekivanu vrednost skalarnog polja:

$$v = \sqrt{G_F \sqrt{2}} \simeq 246 \text{ GeV}, \tag{5.40}$$

što mase gejdž bozona fiksira na

$$M_W \simeq 80 \text{ GeV}, \qquad M_Z \simeq 90 \text{ GeV} \tag{5.41}$$

[8]U dalje tekstu će, zbog pojednostavljenja zapisa, nova polja (primovana) biti označavana kao stara (neprimovana).

Mase leptona

Jang-Milsov lagranžijan nije mogao da obuhvati maseni član za leptone jer bi on manifestno narušio njegovu invarijantnost. Nakon spontanog narušenja simetrije, moguće je uvesti maseni član na kalibraciono invarijantan način pomoću Jukavinog kuplovanja leptona sa Higsovim poljem (5.35)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{yuk} &= -g_e\left[\bar{e}_R(\Phi^\dagger L) + (\bar{L}\Phi)e_R\right] \\
&= -g_e\frac{v+h}{\sqrt{2}}\left[\bar{e}_R(0 \quad 1)\begin{pmatrix}\nu \\ e_L\end{pmatrix} + (\bar{\nu} \quad \bar{e}_L)\begin{pmatrix}0 \\ 1\end{pmatrix}e_R\right] \\
&= -\frac{g_e v}{\sqrt{2}}\bar{e}e - \frac{g_e}{\sqrt{2}}\bar{e}e\,h \qquad (5.42)
\end{aligned}$$

Konstanta g_e je proizvoljna. Određena je samo zahtevom da prvi član bude maseni za elektrone. Odavde se može identifikovati masa elektrona

$$m_e = \frac{g_e v}{\sqrt{2}}, \qquad (5.43)$$

pa je konstanta kuplovanja Higsovog polja h i elektrona $c_{\bar{e}eh} = \frac{m_e}{v}$. Jukavin lagranžijan je konačno

$$\mathcal{L}_{yuk} = -m\,\bar{e}e - \frac{m_e}{v}\,\bar{e}e\,h \qquad (5.44)$$

U ovom izvođenju maseni član za neutrine nije dobijen, te je $m_\nu = 0$. Formalno, to je zbog toga što je teorija od početka građena na pretpostavci da ne postoji desni neutrino ν_R, što je analogno tvrdnji da je neutrino bezmasen, te i na ovaj način teorija ispoljava koherentnost. Iz istog razloga teorija ne predviđa interakciju neutrina sa Higsovim bozonom.

Interakcija elektrona (uopšte masenih fermiona) sa Higsovim bozonom još uvek nije opažena. To se objašnjava pretpostavljenom velikom masom Higsovog bozona i srazmerno malim dometim interakcije, koja je teorijski neodređena. Naime, kvadratni član po h u skalarnom lagranžijanu (5.37) ima oblik $-\mu^2 h^2$ odakle se masa Higsovog bozona čita

$$m_h = v\sqrt{2\lambda} \qquad (5.45)$$

Iako je v poznato, λ ostaje slobodan parametar što predstavlja ozbiljan nedostatak teorije.

5.2.4 Komplentan lagranžijan

Jukavinim kuplovanjem je zaokružena Glašou-Vajnberg-Salamov model elektroslabih interakcija. Kompetan lagranžijan teorije dat je u tabelarnom prikazu:

opis člana	$\mathcal{L} =$
kinetičke energije leptona i njihove interakcije sa $W^\pm, Z, \gamma$	$+ i\, \bar{e}_R \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_1\, B_\mu \frac{1}{2} Y_R\right) e_R$ $+ i\, \bar{L} \gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_1\, B_\mu \frac{1}{2} Y_L - ig_2\, \frac{\vec{\sigma}}{2} \vec{W}_\mu\right) L$
kinetičke energije $W^\pm, Z, \gamma$ bozona i njihove samointerakcije	$- \frac{1}{2} tr(W_{\mu\nu} W^{\mu\nu}) - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$
mase $W^\pm, Z, \gamma$ bozona i njihove interakcije Higsovom česticom	$+ \lvert(\partial_\mu - ig_1\, B_\mu \frac{1}{2} Y_\phi - ig_2\, \frac{\vec{\sigma}}{2} \vec{W}_\mu)\Phi\rvert^2 - V(\Phi^\dagger \Phi)$
mase leptona i njihove interakcije sa Higsovom česticom	$- g_e \left[\bar{e}_R (\Phi^\dagger L) + (\bar{L}\Phi) e_R\right]$

Već je napomenuto da se Glašou-Vajnberg-Salamov model za sve tri generacije gradi analogno izloženom. Potrebno je samo dodati lagranžijane za preostale dve generacije koji se od ovog razlikuju samo u tome što, npr. kod drugog, umesto elektronskog spinora stoji mionski, a umesto elektronskog neutrina – takođe mionski. Suma svih tih lagranžijana daje zaokruženu teoriju za leptone.

5.3 Elektroslabe interakcije kvarkova

Do sada nisu pominjane elektroslabe interakcije kvarkova. To je učinjeno samo da bi se izbegli nepotrebni detalji, a nikako zbog eventualnog drugog načina izgradnje teorije. Elektroslaba teorija kvarkova se od iste za leptone razlikuje samo po tome što u leptonskoj nema mešanja generacija (što je omogućilo izlaganje celog postupka samo za jednu generaciju), dok je u kvarkovskoj ima.

Koncept mešanja generacija veoma je ilustrativno prikazati pod pretpostavkom da postoje samo dve generacije[9]. Ukoliko bi se za potrebe izgradnje teorije koristili "čisti" u-, d-, c- i s-kvarkovi, nemoguće je dobiti Jukavino kuplovanje koje bi konačno rezultiralo masama datih kvarkova. Stoga se oni se moraju "zarotirati" u prostoru generacija pre unošenja u

[9] To je i bila realna slika sveta u jednom trenutku, kada je, početkom 1975. godine, c-kvark već bio otkriven, a τ-lepton i b-kvark još uvek nisu.

Jang-Milsov lagranžijan (što praktično odgovara dijagonalizaciji članova u Jukavinom kuplovanju). Potrebno je, dakle, kao $SU(2)_L$ dublete posmatrati ne $\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$ i $\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$, već analogne konstrukcije sa zarotiranim donjim komponentama:

$$L_U \equiv \begin{pmatrix} u \\ d' \end{pmatrix}_L \quad \text{i} \quad L_C \equiv \begin{pmatrix} c \\ s' \end{pmatrix}_L , \tag{5.46}$$

gde su d'- i s'-kvark dati sa

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_C & \sin\theta_C \\ -\sin\theta_C & \cos\theta_C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ s \end{pmatrix} \tag{5.47}$$

Rotacija u ds-ravni vrši se za Kabibov[10] ugao θ_C, a dati model naziva se Glašou-Iliopulos-Majanijev mehanizam (*J. Iliopoulos, L. Maiani*). Eksperimentalna vrednost Kabibovog ugla je blizu 13° ($\sin\theta_C \approx 0.22$). U eksperimentima se ova veličina manifestuje relativno dugim vremenom života čestica sa s-kvarkom. Naime, za raspade stranih čestica je odgovorna struja $\bar{u}\gamma_\mu(1-\gamma_5)s$ koja ulazi u interakcioni lagranžijan sa srazmerno $\sin\theta_C$.

Formalno izvođenje teorije se nadalje ne razlikuje od opisanog postupka za leptone. Zbog činjenice da GIM mehanizam poznaje i singlete za svaku komponentu dubleta (5.46):

$$u_R,\ d'_R,\ c_R,\ \text{i}\ s'_R , \tag{5.48}$$

ova teorija reprodukuje masene članove za svaki kvark.

Prirodna ekstrapolacija GIM mehanizma na tri generacije jeste uvođenje još jednog dubleta

$$L_T \equiv \begin{pmatrix} t \\ b' \end{pmatrix}_L ,$$

kao i dva odgovarajuća singleta. Matrica mešanja je sada 3×3 i poznata je pod imenom CKM matrica (*Cabibbo-Kobayashi-Maskawa*).

$$\begin{pmatrix} d' \\ s' \\ b' \end{pmatrix} = M_{CKM} \begin{pmatrix} d \\ s \\ b \end{pmatrix} \tag{5.49}$$

U originalnoj parametrizaciji, pomoću tri ugla $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ i parametra narušenja CP-invarijantnosti δ, ona je data sa

$$M_{CKM} = \begin{pmatrix} c_1 & -s_1c_3 & -s_1s_3 \\ s_1c_2 & c_1c_2c_3 - s_2s_3e^{i\delta} & c_1c_2s_3 + s_2c_3e^{i\delta} \\ s_1s_2 & c_1s_2c_3 + c_2s_3e^{i\delta} & c_1s_2s_3 - c_2c_3e^{i\delta} \end{pmatrix} , \tag{5.50}$$

[10]Naziv potiče od italijanskog fičara Kabiba (*N. Cabibbo*) koji je prvi primetio da je za potrebe dobijanja dobro definisanih masa kvarkova potrebno uvesti linearne kombinacije koje mešaju generacije.

gde su $c_i = \cos\theta_i$ i $s_i = \sin\theta_i$. Brojne vrednosti svih komponenata (parametara) nisu poznate još uvek dovoljno precizno. Činjenica je, međutim da su dijagonalni elementi dominatni, što znači da d-kvark dominira u donjoj komponenti dubleta prve generacije, a analogno s i b u drugoj i trećoj. Preciznije, mešanje generacija ogleda se u činjenici da se svojstvena stanja masene matrice ("pravi" kvarkovi) ne poklapaju sa slabim svojstvenim stanjima – stanjima koje poznaje slaba interakcija.

Naelektrisane struje u ovoj teoriji sadrže prelaze između kvarkova različitih generacija, jer slabi izospinski fermionski dubleti sadrže "primovane" ("rotirane") kvarkove. Upravo se to ima na umu kada se govori o "mešanju generacija". Ovo nije slučaj sa neutralnim strujama; elektroslaba teorija ne poznaje neutralne struje koje menjaju aromat kvarkova. Razlog tome je što je matrica mešanja unitarna, te je

$$\bar{d}'d' + \bar{s}'s' + \bar{b}'b' = \bar{d}d + \bar{s}s + \bar{b}b$$

5.4 Eksperimentalne potvrde elektroslabe teorije

Interakcija neutralnih struja je prirodno proistekla iz teorije, no u to doba još uvek nije bila opažena. Prvi efekti neutralnih struja opaženi su 1973. godine u CERN-u i Fermilabu u reakcijama

$$\nu_\mu + N \to \nu_\mu + X \text{ i } \bar{\nu}_\mu + e^- \to \bar{\nu}_\mu + e^-$$

To je bilo dramatično predviđanje Standardnog modela i njihovo otkriće bilo je veliki uspeh teorije. Grupa u CERN-u je uspela čak da oceni vrednost Vajnbergovog ugla mešanja na $0.3 < \sin^2\theta_W < 0.4$.

W- i Z-bozoni opaženi su seriji eksperimenata u CERN-u u periodu od 1982-83. godine. Za rad na tim projektima, Rubija (*C. Rubbia*) i Van der Mer (*S. van der Meer*) nagrađeni su Nobelovom nagradom. Nađene mase bile su izuzetno dobroj saglasnosti sa teorijskim predviđanjima ($M_W = 81 \pm 2$ GeV, $M_Z = 93 \pm 2$ GeV). To je bila konačna potvrda Glašou-Vajnberg-Salamovog modela. Od tada su mnoge pojedinosti teorije podrobnije ispitane na raznim akceleratorima; niti jedan rezultat nije odstupao od teorijskih predviđanja.

Otvoreno je, doduše, i dalje pitanje Higsovog bozona. Iako većina fizičara veruje u njegovo postojanje, još uvek nema direktne potvrde opravdanosti njegovog uvođenja, ali ni eksperimentalnog rezultata koji bi ga diskreditovao. Činjenica je da je Higsov mehanizam jedini valjan da teoriju dovede u korespodenciju sa stvarnošću. Optimistične procene su da bi LHC (*Large Hadron Collider*) u CERN-u mogao da da odgovor da to pitanje kada dostigne maksimalnu projektovanu energiju od oko 14 TeV.

Prilozi

Prilog A

Dirakovo polje

Dirakova jednačina

U pokušaju da linearizuje Klajn-Gordonov hamiltonijan, Dirak je dobio jednačinu čija se rešenja mogu koristiti za opis čestica mase m i spina $\frac{1}{2}$. Dirakova jednačina u kovarijatnom obliku se zapisuje kao

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi(x) = 0\,, \tag{A.1}$$

Veličine γ^{μ} zadovoljavaju antikomutacione relacije:

$$[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]_{+} = 2g^{\mu\nu} \tag{A.2}$$

usled čega moraju biti matrice. Tenzor $g^{\mu\nu}$ je metrički tenzor pseudoekulidskog prostora, za koji se često uzima:

$$g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Spuštanje i podizanje indeksa se vrši njime na uobičajen način $\gamma_{\nu} = g_{\mu\nu}\gamma^{\mu}$.

Pored antikomutacionih relacija, γ-matrice imaju i sledeće osobine

$$(\gamma^0)^{\dagger} = \gamma^0 \text{ i } (\gamma^i)^{\dagger} = -\gamma^i\,,$$

koje se konciznije mogu pisati u obliku

$$(\gamma^{\mu})^{\dagger} = \gamma^0\gamma^{\mu}\gamma^0 \tag{A.3}$$

Vrlo je korisno uvesti i veličinu srazmernu proizvodu svih γ-matrica:

$$\gamma^5 \equiv \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \tag{A.4}$$

Koristeći njenu definiciju i osobine γ-matrica (A.2) i (A.3) može se pokazati da za γ^5 važi:

$$(\gamma^5)^2 = 1\,,\ (\gamma^5)^{\dagger} = \gamma^5\,,\ [\gamma^5, \gamma^{\mu}]_{+} = 0 \tag{A.5}$$

Gustina struje Dirakovog polja

Osobine γ-matrica koriste se za definisanje adjungovanog polja $\overline{\psi}(x)$ na sledeći način. Konjugovanjem Dirakove jednačine (A.1) dobija se

$$\psi^\dagger(i\,\gamma^{\mu\dagger}\partial_\mu + m) = 0\ ,$$

gde se podrazumeva da diferencijalni operator deluje na levo. Množenjem ove jednačine s desna sa γ^0 i umetanjem $(\gamma^0)^2 = 1$ u nju neposredno posle $\psi^\dagger$ dobija se

$$\psi^\dagger\gamma^0\ (i\,\gamma^0\gamma^{\mu\dagger}\gamma^0\partial_\mu + m) = 0$$

Korišćenjem sada definicije za konjugovane γ-matrice (A.3) može se napisati jednačina za adjungovano polje:

$$\overline{\psi}(x)(\ \gamma^\mu\partial_\mu + m) = 0\,, \tag{A.6}$$

gde je definisano polje adjungovano Dirakovom polju $\psi(x)$ kao

$$\overline{\psi}(x) = \psi^\dagger(x)\gamma^0 \tag{A.7}$$

Adjungovano polje se koristi za definiciju struje Dirakovog polja. Množenjem jednačine (A.1) s leva sa $\overline{\psi}$ i (A.7) s desna sa ψ, i posle sabiranja dobija se:

$$\partial_\mu(\overline{\psi}\gamma^\mu\psi) = 0$$

To je relativistička jednačina kontinuiteta za četvorovektor u zagradi, koji se (do na konstantu) može identifikovati kao struja polja.

$$j^\mu(x) = \overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{A.8}$$

Rešenje Dirakove jednačine za slobodnu česticu četvoroimpulsa p_μ je uvek pogodno potražiti u obliku ravnog talasa. Tada se Dirakova jednačina svodi na:

$$(\gamma^\mu p_\mu - m)\psi = 0 \tag{A.9}$$

Sprovodeći i ovde račun za izvođenje j^μ dobilo bi se da je $j^\mu(x) = p^\mu\overline{\psi}(x)\psi(x)$. Struja je, dakle, srazmerna impulsu čestice, što potvrđuje opravdanost njene definicije (A.8).

Reprezentacije γ-matrica

Za izvođenje svih relacija do napisanih sada nije bilo potrebno izabrati određenu reprezentaciju γ-matrica. Svaki skup veličina za koje važe definicije

(A.2) i (A.3) se mogu ravnopravno koristiti. Od matrica jedne reprezentacije druge se mogu dobiti transformacijom

$$\gamma'^{\mu} = S^{-1}\gamma^{\mu}S$$

Svaka proizvoljnost pri odabiru reprezentacije je navedenog tipa. Šta više, Pauli je dokazao teoremu po kojoj izbor reprezentacije γ-matrica ne menja fizički smisao Dirakove jednačine. Svi fizički zaključci izvedeni u jednoj reprezentaciji važe i u svakoj drugoj. Jedna od najčešće korišćenih je Dirak-Paulijeva reprezentacija u kojoj su γ-matrice definisane preko Paulijevih matrica σ_i kao:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}$$

Kovarijantnost Dirakovog polja. Spin

Konstrukcijom generatora Lorencovih rotacija za Dirakove spinore dolazi se do zaključka da on, pored očekivanog generatora momenta impulsa $\vec{L}$, sadrži i dodatni član $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}$. Taj dodatni član se mora identifikovati sa spinom i dat je uređenom trojkom

$$\vec{\Sigma} \equiv (\sigma^{23}, \sigma^{31}, \sigma^{12}) \;, \tag{A.10}$$

gde su tzv. spinske matrice $\sigma^{\mu\nu}$ definisane kao

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}] \tag{A.11}$$

Fizički smisao operatora spina $\frac{1}{2}\vec{\Sigma}$ se vrlo jasno vidi u Dirak-Paulijevoj reprezentaciji. U njoj su operatori komponenata spina dati 2×2 dijagonalnim matricama

$$\Sigma_k = \begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & \sigma_k \end{pmatrix}$$

Pokazuje se, takođe, da spinska matrica može zapisati pomoću γ^5-matrice kao

$$\Sigma_k = \gamma_5\gamma^0\gamma^k \tag{A.12}$$

Karakter neke bilinearne forme tipa $\overline{\psi}(x)X\psi(x)$ (gde je X operator ili neka druga veličina) ispoljava se prilikom Lorencovih transformacija $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}x^{\nu}$. Iz načina transformacije izvodi se zaključak o njenom karakteru. Tako se može pokazati karakter sledećih veličina:

$\overline{\psi}\psi$	– skalar jer je	$\overline{\psi}'\psi' = \overline{\psi}\psi$
$\overline{\psi}\gamma^5\psi$	– pseudoskalar jer je	$\overline{\psi}'\gamma^5\psi' = det(\Lambda)\overline{\psi}\gamma^5\psi$
$\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi$	– vektor jer je	$\overline{\psi}'\gamma^{\mu}\psi' = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\overline{\psi}\gamma^{\nu}\psi$
$\overline{\psi}\gamma^{\mu}\gamma^5\psi$	– aksijalni vektor jer je	$\overline{\psi}'\gamma^{\mu}\gamma^5\psi' = det(\Lambda)\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\overline{\psi}\gamma^{\nu}\gamma^5\psi$

Jasno je uočljivo da je matrica γ^5 ona čije prisustvo u bilinearnoj formi uzrokuje promenu predznaka veličine pri prostornim refleksijama ($det(\Lambda) = -1$) i tako doprinosi njihovom pseudo-karakteru.

Kiralnost i helicitet

Poznata je činjenica da je nemoguće poznavati više od jedne komponente spina istovremeno. Dok se u atomskoj fizici kao pravac na koji se vrši projekcija spina bira z-osa, u fizici elementarnih čestica je uobičajeno da se za taj pravac uzme pravac impulsa čestice. Projekcija spina na impuls čestice označava se kao njen helicitet.

$$\Sigma_p = \frac{\vec{\Sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|} \tag{A.13}$$

Po dogovoru, ukoliko je ona pozitivna, za česticu se kaže da je "desna", a ukoliko je negativna - "leva". Primetno je, međutim, da za masene čestice helicitet zavisi od izbora referentnog sistema, dok za bezmasene to nije slučaj. Mesene se čestice, naime, nikada ne mogu kretati brzinom svetlosti, te je uvek moguće posmatrati isti fenomen iz sistema koji će ići brže od čestice iz kojeg će čestica izgledati promenjenog heliciteta. Čestice bez mase se uvek kreću brzinom svetlosti, pa je nemoguće preći u sistem koji bi se kretao brže od nje.

Kiralnost je, sa druge strane, apstraktniji pojam. Operator kiralnost Dirakovog fermiona jeste matrica γ^5 koje ima svojstvene vrednosti ± 1. Tako se svojstveno stanje koje odgovara vrednosti -1 naziva levo kiralno, a za $+1$ – desno kiralno. Opšti Dirakov spinor ima obe komponente - i desnu i levu. Tada je moguće definisati projektore koji bi iz njega birali pojedinačnu komponentu kao:

$$\Pi_{\pm} = \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \tag{A.14}$$

Primetno je da ovi operatori ispoljavaju osobine idempotentnosti $\Pi_{\pm}^2 = \Pi_{\pm}$, kompletnosti $\Pi_+\Pi_- = 1$ i ortogonalnosti $\Pi_{\pm}\Pi_{\mp} = 0$ te moraju biti projektori. Moguće je, takođe, pokazati komutacione relacije:

$$\Pi_{\pm}\gamma^{\mu} = \gamma^{\mu}\Pi_{\mp} \tag{A.15}$$

Za slučaj bezmasenih čestica kiralnost i helicitet predstavljaju istu stvar. To se vidi i ukoliko se u jednačinu (A.8) stavi da je $m = 0$ i pomnoži s desna sa $\gamma^5\gamma^0$. Koristeći osobine (A.2) i izraz za spin (A.12), dobija se

$$(\gamma^5 p_0 - \Sigma_k p_k)\psi = 0 \;\Rightarrow\; \gamma^5 = \Sigma_p$$

Kiralna (Vajlova, *H. Weyl*) reprezentacija nudi jasniji sliku o fizičkom smislu levo i desno kiralnih komponenata spinora. U njoj su γ-matrice date sa

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \; \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \gamma^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (A.16)$$

Polje ψ je pogodno predstaviti tada kao dvokomponentni vektor kolone

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix}$$

Sada je Dirakova jednačina data kao sistem

$$\begin{aligned} -m\psi_R + (p_0 + \vec{\sigma}\vec{p})\psi_L &= 0 \\ (p_0 - \vec{\sigma}\vec{p})\psi_R - m\psi_L &= 0 \end{aligned}$$

Ovaj sistem se za $m = 0$ razdvaja na dve nezavisne *Vajlove jednačine*. Spinori $\psi_{L,R}$ su tada *Vajlovi spinori*. S obzirom da je za bezmasene čestice $p_0 = |\vec{p}|$, Vajlove jednačine jednoznačno određuju helicitet (pa i kiralnost) Vajlovih spinora:

$$\begin{aligned} (p_0 + \vec{\sigma}\vec{p})\psi_L = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi_L = -\psi_L \\ (p_0 - \vec{\sigma}\vec{p})\psi_R = 0 \quad &\Rightarrow \quad \frac{\vec{\sigma}\vec{p}}{|\vec{p}|}\psi_R = +\psi_R \end{aligned}$$

U okvirima kvantne teorije polja se gornje komponente spinora interpretiraju kao čestice, a donje, kao *anti*čestice. Po tome, dakle, sve (bezmasene) čestice su leve kiralnosti (heliciteta), a sve antičestice desne kiralnosti.

U ovoj reprezentaciji i uloga kiralnih projektora je jasna: $\Pi_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bira gornju (desnu) komponentu spinora, a $\Pi_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ donju (levu) komponentu. Korisno je Dirakovu struju izraziti preko pojedinih komponenata spinora:

$$j^\mu = \overline{\psi}\gamma^\mu\psi = \overline{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L + \overline{\psi}_R\gamma^\mu\psi_R$$

Doprinos oba člana je jednak i zato ukupna fermionska struja održava helicitet. Teorija u kojoj bi samo leve komponente doprinosile nazivaju se V-A teorije jer se struja levih komponenata može napisati u obliku razlike vektora i pseudovektora (aksijalnog vektora):

$$j^\mu = \overline{\psi}_L\gamma^\mu\psi_L = \frac{1}{2}\overline{\psi}\gamma^\mu(1-\gamma^5)\psi \qquad (A.18)$$

Pri ovom izvođenju korišćene su komutacione relacije između projektora spina $\Pi_\pm$ i γ-matrica (A.15) i osobine γ_5-matrice (A.5).

Eksperimentalno je otkriveno da u slabim reakcijama učestvuju samo čestice levog *heliciteta* (masene i bezmasene). Dok god se, međutim, sve čestice approksimiraju nultom masom (ultrarelativistička aproksimacija), moguće ih je posmatrati kao levo *kiralne* čestice. Upravo je to osnov od kojeg polazi moderna teorija slabih interakcija.

Prilog B

Simetrija vakuuma

Sva dosadašnja razmatranja o lagranžijanima i stanjima su vršena ne smatrajući polja operatorima, tj. u okvirima klasične teorije polja. Ovde je pogodnije date veličine razmatrati u okvirima kvantne teorije polja. To, praktično, znači da se polja shvataju kao operatori koji deluju na stanja, a da se stanja dobijaju delovanjem operatora na tzv. vakuumsko stanje (vakuum). Ovde bi trebalo jasnije definisati vakuum kao stanje sa najnižom energijom koje, u opštem slučaju, ne mora odgovarati (diskutabilnom) fizičkom vakuumu. Tako se, npr. stanje $|A\rangle$ dobija delovanjem polja (koje je sâmo po sebi linearna kombinacija kreacionih i anihilacionih operatora) na vakuum: $|A\rangle = \phi_A |0\rangle$. To je analogno kreiranju elementarne oscilacije LHO-a $|1\rangle = a^\dagger |0\rangle$). S obzirom da je polje operator, njegov zakon transformacije ne može ostati isti, već se polje sada pri unitarnim transformacijama ponaša na sledeći način: $\phi \to \phi' = U\phi U^\dagger$.

Teorema: Simetrija hamiltonijana u odnosu na transformaciju U se manifestuje degeneracijom energetskih nivoa sistema ako data transformacija ostavlja vakuum invarijantnim (ako se posle transformacije takođe dobije vakuumsko stanje). Tada se kaže da je "vakuum simetričan".

Dokaz: Neka je hamiltonijan simetričan na U: $H \to H' = UHU^\dagger = H$ i neka se stanje $|A\rangle$ pri datoj transformaciji preslikava u $|B\rangle$: $|B\rangle = U|A\rangle$, što zahteva da se polje transformiše: $\phi_B = U\phi_A U^\dagger$.
Energija stanja $|B\rangle$

$$\begin{aligned} E_B &= \langle B| H |B\rangle = \langle 0| {\phi_B}^\dagger H \phi_B |0\rangle = \\ &= \langle 0| U^\dagger {\phi_A}^\dagger U U^\dagger H U U^\dagger \phi_A U |0\rangle = \\ &= \langle 0| U^\dagger {\phi_A}^\dagger H \phi_A U |0\rangle \end{aligned}$$

i stanja $|A\rangle$

$$E_A = \langle A| H |A\rangle = \langle 0| \phi_A{}^\dagger H \phi_A |0\rangle$$

su tada jednake akko $U|0\rangle = |0\rangle$ i $\langle 0| U^\dagger = \langle 0|$.

Znajući ovu teoremu, postaje jasno zašto narušenje simetrije vakuuma proizvodi različite mase početno bezmasenim gejdž poljima u Standardnom moelu. Suština je u tome da simetrija vakuumskog stanja više ne postoji, što ima za posledicu da se prethodno degenerisan energetski (odn. maseni) spektar čestica razbija. To je analogno cepanju energetskih nivoa u atomu narušenjem početne simetrije prostora izborom privilegovanog pravca nakon unošenja u bilo magnetno, bilo elektrostatičko polje.

Literatura

[1] D. S. Popović: *Teorija elektroslabih interakcija*, SFIN VIII, 2, Beograd (1995)

[2] L. B. Okunj: *Fizika elementarnih čestica*, Fond ing. Petra i Sonje Subotić, Beograd (1995)

[3] F. Mandl and G. Shaw, *Quantum Field Theory*, John Wiley and Sons (1984)

[4] M. J. G. Veltman, B. Q. P. J. de Wit, and G. 't Hooft, *Lie groups in Physics*, [Eng. ver. G. 't Hooft] (2007)
url: `http://www.phys.uu.nl/~thooft/lectures/lieg07.pdf`

[5] S. F. Novaes, *Standard Model: An Introduction*, (2000)
`arXiv:hep-ph/0001283v1`

[6] N. Zovko, *Osnove relativističke kvantne mehanike*, Školska knjiga, Zagreb (1987)

[7] C. Itzykson and J. B. Zuber, *Quantum Field Theory*, McGraw Hill, New York (2006)

[8] B. R. Martin, *Nuclear and Particle Physics*, John Wiley and Sons (2006)

[9] S. Weinberg, *Conceptual Fondations of the Unified Theory of Weak and Electromagnetic Interactions*, Rev. Mod. Rhys. Vol. 52, No. 3 (1980)

[10] S. Weinberg, *Model of Leptons*,Rhys. Rev. Lett. Vol. 15, No. 21, 1264 (1967)

[11] C. N. Yang and R. L. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Rhys. Rev. 96, 191 (1954)

[12] T. D. Lee and C. N. Yang, *Question of Parity Conservation in Weak Interactions*, Phys. Rev. 104, 254 - 258 (1956)

[13] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, and R. P. Hudson, *Experimental Test of Parity Conservation in Beta Decay*, Phys. Rev. 105, 1413 - 1415 (1957)

[14] R. L. Garwin, L. M. Lederman, and M. Weinrich, *Observations of the Failure of Conservation of Parity and Charge Conjugation in Meson Decays the Magnetic Moment of the Free Muon*, Phys. Rev. 105, 1415 - 1417 (1957)

[15] T. D. Lee and C. N. Yang, *Parity Nonconservation and a Two-Component Theory of the Neutrino*, Rhys. Rev. Vol. 105, No. 5, 1671 (1957)

[16] E. C. G. Sudarshan and R. E. Marshak, *Chirality Invariance and the Universal Fermi Interaction* (1958)

[17] R. P. Feynman and M. Gell-Mann, *Theory of Fermi Interaction*, Rhys. Rev. 109, 193 (1958)

[18] S. L. Glashow and S. Weinberg, *Breaking of Chiral Symmetry*, Rhys. Rev. Lett. Vol.20 No.5, 224 (1968)

[19] M. Goldhaber, L. Grodzins, and A. W. Sunyar, *Helicity od Neutrinos* (1957)

[20] T. D. Lee and C. N. Yang, *Possible Nonlocal Effects in μ Decay*, Phys. Rev. Vol. 108, No. 6, 1611 (1957)

[21] F. Reines and C. L. Cowan, Jr., *A Proposed Experiment to Detect Free Neutrino*, Phys. Rev. Vol. 90, 492 (1953)

Kratka biografija

Rođen sam 29. IX 1983. godine u Novom Sadu. Osnovnu školu "Svetozar Marković Toza" završio sam 1998, a prirodno-matematički smer gimnazije "Isidora Sekulić" u Novom Sadu 2002. godine. Iste godine sam upisao studije fizike, smer diplomirani fizičar, na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Novom Sadu. U okviru programa studentske razmene "Campus Europae", školsku 2004/5. sam proveo na Univerzitetu u Trentu, Italija.

Srđan Sarikas

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: **RBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: **TZ**	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	Diplomski rad
Autor: **AU**	Srđan Sarikas, broj dosijea: 401/02
Mentori: **MN**	dr Milan Pantić, vanredni prof. PMF-a Univerziteta u Novom Sadu dr Voja Radovanović, vanredni prof. Fizičkog fakulteta Univerziteta u Beogradu
Naslov rada: **NR**	Uloga simetrije u izgradnji objedinjene teorije elektroslabih interakcija
Jezik publikacije: **JP**	srpski (latinica)
Jezik izvoda: **JI**	srpski/engleski
Zemlja publikovanja: **ZP**	Srbija
Uže geografsko područje: **UGP**	Vojvodina
Godina: **GO**	2008
Izdavač: **IZ**	Autorski reprint
Mesto i adresa: **MA**	Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Fizički opis rada: **FO**	
Naučna oblast: **NO**	fizika
Naučna disciplina: **ND**	teorijska fizika, teorija elementarnih čestica
Predmetna odrednica/ ključne reči: **PO** **UDK**	simetrija, narušenje simetrije, teorija polja, gejdž teorije, Jang-Milsove teorije, Standardni model, elektroslabe interakcije, Glašou-Vajnberg-Salamov model
Čuva se: **ČU**	Biblioteka Departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu
Važna napomena: **VN**	nema
Izvod: **IZ**	Rad ima za cilj da detaljno predstavi Glašou-Vajnberg-Salamov model elektroslabih interakcija leptona, ako i osnove GIM mehanizma za kvarkove. Objašnjeni su i elementarni pojmovi iz teorije polja, grupa simetrija, Jang-Milsove teorije, kao i Higsov mehanizam.
Datum prihvatanja teme od NN veća: **DP**	26.2.2008.
Datum odbrane: **DO**	25.9.2008.
Članovi komisije: **KO**	

Predsednik:	dr Miodrag Krmar, vanredni prof. PMF-a Univerziteta u Novom Sadu
član:	dr Milan Pantić, vanredni prof. PMF-a Univerziteta u Novom Sadu
član:	dr Milica Pavkov-Hrvojević, vanredni prof. PMF-a Univerziteta u Novom Sadu

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: **ANO**	
Identification number: **INO**	
Document type: **DT**	Monograph publication
Type of record: **TR**	Textual printed material
Content code: **CC**	Final paper
Author: **AU**	Srđan Sarikas, 401/02
Mentor/comentor: **MN**	Milan Pantić, Ph.D., Associate Prof., Faculty of Sciences, University of Novi Sad Voja Radovanović, Ph.D., Associate Prof., Faculty of Physics, University of Belgrade
Title: **TI**	The Role of Symmetry in the Construction of the Unified Theory of Electroweak Interactions
Language of text: **LT**	Serbian (Latin)
Language of abstract: **LA**	English
Country of publication: **CP**	Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2008
Publisher: **PU**	Author's reprint
Publication place: **PP**	Faculty of Science and Mathematics, 4 Dositej Obradović Square, Novi Sad
Physical description: ***PD***	
Scientific field: **SF**	Physics
Scientific discipline: **SD**	Theoretical Physics, Elementary particles theory
Subject/ Key words: **SKW** **UC**	symmetry, broken symmetry, field theory, gauge theories, Yang-Mills theories, Standard model, electroweak interactions, Glashow-Weinberg-Salam model
Holding data: **HD**	Library of Department of Physics, 4 Dositej Obradović Square, Novi Sad
Note: **N**	none
Abstract: **AB**	The main aim of the paper is to present the Glashow-Weinberg-Salam model of electroweak interactions of leptons in detail, as well as basic ideas of Glashow-Iliopoulos-Maiani mechanism for quarks. Basic definitions and concepts in field theory, symmetry groups, Yang-Mills theories and the Higgs mechanism are also explained.
Accepted by the Scientific Board: **ASB**	26th Feb 2008
Defended on: **DE**	25th Sept 2008
Thesis defend board: **DB**	
President:	Miodrag Krmar, Ph.D., Associate Prof., Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Milan Pantić, Ph.D., Associate Prof., Faculty of Sciences, University of Novi Sad
Member:	Milica Pavkov-Hrvojević, Ph.D., Associate Prof. , Faculty of Sciences, University of Novi Sad