UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU

Kvantna zamršenost i kvantna koherentnost XY spinskog lanca sa Đalošinski-Morija interakcijom i kvantni fazni prelaz u modelu

-master rad-

Kandidat:
Sonja Gombar

Mentor:
dr Petar Mali

Novi Sad, 2017.

Čudesno putešestvije

Probudi se, Luna. Otvori svoje blistave oči i ustremi pogled ka nebu. Prodrmaj svoje nožice i šeći već utabanim stazama svojih prethodnika. Opipaj tlo i udahni vazduh koji te okružuje. Ne osećaš li lepotu ovog sveta u svakoj čestici oko sebe? Nije li već sama pomisao na put kojim ćeš poći vredna osmeha?

Ne, Luna, nema razloga za strah. Neka te ne uplaši pohabano tlo puno staračkih bora. To je put kojim svi moraju poći. Ipak, postoji pregršt različitih staza kojima se može doći do konačnog odredišta. Kakav će tvoj odabir biti zavisi samo od jednog faktora - tebe. Stoga ne očajavaj. Ovladaj strujama koje pokušavaju upravljati tobom i pođi ka svetu kakav želiš videti.

Da, Luna, put koji si odabrala pun je prepreka, ali takav je svaki. Neka te ne plaše mračni oblaci koje vidiš ispred sebe, budući ožiljci koje ćeš imati nakon što kroz njih prođeš. Hrabro koračaj stazom misleći na sva divna iskustva koja ćeš steći usput, sve ljude koje ćeš dotaći, misli koje ćeš čuti. Loše stvari su samo balans u svetu, igra vode i vatre, svetlosti i tame. Uči iz njih, ali ne dopusti da te obuzmu. Brazde koje budeš imala na licu neka budu i u tvome srcu kao večiti podsetnik na prolaznost stvari.

Zanimljiv je put koji si odabrala, Luna. To nisu prethodno dobro istražene prečice, već još uvek nedovoljno dotaknuti koridori. Ne boj se nepoznatog. Dok hodaš neznanim stazama, dotakni svaki njihov segment. Ne zastajkuj, ne osluškuj, već nezasito kreni u opipavanje svega što te okružuje. I nemoj odustati, nikako nemoj odustati dok ne dotakneš samu srž svog postojanja. To se možda i neće dogoditi, ali nemoj se razočarati. Suština tvog bića je u samoj potrazi. Ona je ta koja hrani tvoj duh, oplemenjuje tvoje telo, bogati tvoj svet. Zato nikad ne odustaj od pitanja, traženja.

A sad zbogom, Luna. Polako kreni svojim putem i znaj da će neko uvek budno motriti na tebe, strepeti u lošim momentima, radovati se u dobrim. Stoga se hitro upusti u taj nepoznati svet i uživaj u svakom trenutku njegovog razotkrivanja.

Sadržaj

1 Uvod

Ljudska misao oduvek je bila ustremljena ka napretku. Nazad je gledala samo da bi bila u mogućnosti da što bolje predvidi ono što je čeka. Doduše, uvek je suštinu svog bivstvovanja posvećivala samim potrebama, te se najpre okrenula velikim prostorima, pokušavajući da otkrije uzrok svog postojanja. Međutim, u jednom trenutku to više nije bilo dovoljno i čovek se okreće najsitnijem delu prirode u pokušaju da odgonetne sopstvenu svrhu.

Ovde na scenu stupa Maks Plank sa načinjanjem danas veoma bogate vizije kvantne mehanike [1]. Bila ona prihvaćena ili ne, veoma brzo je postalo očigledno da funkcioniše. Stoga ne treba da začudi činjenica da se od samih njenih korena radilo na primeni njenih blagodeti u svetu tehnologije, pa i kvantne informatike.

Od samog Murovog predviđanja o dupliranju moći računara na svake dve godine [2], što i predstavlja glavni motiv za traženje sredstava za poboljšanje u okvirima kvantne mehanike, prošlo je dosta vremena, a kvantna informatika se razvijala neprestano, danas postavši jedna od najintrigantnijih veza između kvantne mehanike i tehnologije. Zapravo, skorašnji napredak je baš ono u čemu i treba tražiti inspiraciju samog rada. Dvadeset prvi vek predstavlja bogatstvo otkrića na području kvantne informatike, a samo nekoliko poslednjih godina predstavlja doba pravog uspona kvantne tehnologije. Godine 2013. formirana je koherentna superpozicija nekoliko milijardi kubita, gde je vreme trajanja same koherentnosti na sobnoj temperaturi prevazišlo 39 minuta [3]. Sledeće godine obavljena je i teleportacija proizvoljnih kvantnih stanja između dijamantskih spinskih kubita razdvojenih dužinom od $3\,m$ [4]. U januaru 2017. godine kompanija $D-Wave\ Systems\ Inc.$ najavila je prodaju $D-Wave$ $2000Q$ kvantnog računara, koji se sastoji od 2000 kubita [5].

Osim same kontrole kubita, poslednjih nekoliko godina bilo je aktuelno i u pogledu razvoja teorijskog razmatranja samih višekubitnih sistema sačinjenih od spinova, koji su predstavljeni Paulijevim matricama. Posvećena je pažnja uočavanju kvantnih faznih prelaza u ovim sistemima [6, 7, 8, 9], ali i izučavanju mera kvantne zamršenosti (kvantna spletenost, *quantum entanglement*) kao što su konkurentnost (*concurrence*) i maksimalno narušenje Belove nejednakosti [6, 8]. Naime, kvantna zamršenost predstavlja spektakularno otkriće u području kvantne informatike i budući izvor veće brzine i širih mogućnosti kvantnih računara u odnosu na klasične. Takođe, danas je od velikog značaja i ispitivanje veze između kvantne zamršenosti i koherentnosti [10], te se važnost pridaje i poređenju mera zamršenosti i koherentnosti u istim sistemima [8]. Zbog poteškoća vezanih za uzimanje u obzir sistema više spinova, najčešće se razmatraju dvokubitni i trokubitni sistemi sa odabranim XY ili XYZ modelom uz neki vid frustracije. Nakon toga se višekubitni udeo ispituje pomoću sredstva od iznimnog značaja u problemima ove vrste - posredstvom metode renormalizacione grupe (RG metod) [6, 7, 8, 9].

Sam praktični deo rada baziran je na ispitivanju kvantne zamršenosti i kvantne koherentnosti u XY sistemima trokubitnog tipa sa Đalošinski-Morija interakcijom (DM interakcija). Razmatrana je i implementacija modela većeg broja kubita posredstvom RG metoda, kao i mogućnosti javljanja kvantnih faznih prelaza. Shodno [6] i [8], kao validne mere kvantne zamršenosti u obzir su uzete konkurentnost i maksimalno narušenje Belove nejednakosti, dok je kao mera kvantne koherentnosti razmatrana relativna entropija koherentnosti (*relative* *entropy of coherence*).

Međutim, pre samog zalaženja u proceduru rada, neophodno je načiniti, iako na prvi pogled poduži, ipak veoma elementaran uvod kojim bi se čitalac mogao uvesti u svet kvantne informatike i spoznao svojstva veličina koje su ovom prilikom razmatrane. Celoj priči prethodiće kratak istorijski osvrt na razvoj kvantne mehanike i kvantne informatike, nakon čega samo preostaje uplesti se u mrežu tajni ove dve neraskidivo vezane oblasti. Osim toga, biće reči i o pojmu kvantnih faznih prelaza, koji su opisani drugačijim svojstvima od uobičajeno razmatranih klasičnih. Na samoj završnici rada biće predstavljeno istraživanje obavljeno na trokubitnom sistemu u saglasnosti sa oruđem predstavljenim u prvim poglavljima rada. Sami rezultati nisu ništa drugo do fizički aspekt tehnološkog problema i stoga se možda mogu i pokazati sredstvom za razvoj u tehnološkom smislu u budućnosti.

2 Kratak osvrt na istorijski razvoj teorije kvantne informatike

Kao što to obično biva, priče o poreklu velikih ličnosti, skupina, pa čak i ideja prolaze kroz tri osnovne etape: revolucionarni preokret, neprihvatanje i konačan razvoj. U slučaju kvantne informatike, razvojni put je svakako bio buran. Njegov najeksplozivniji deo nije ništa drugo no jedan složeni, a danas i izuzetno neizbežan koncept - kvantna mehanika.

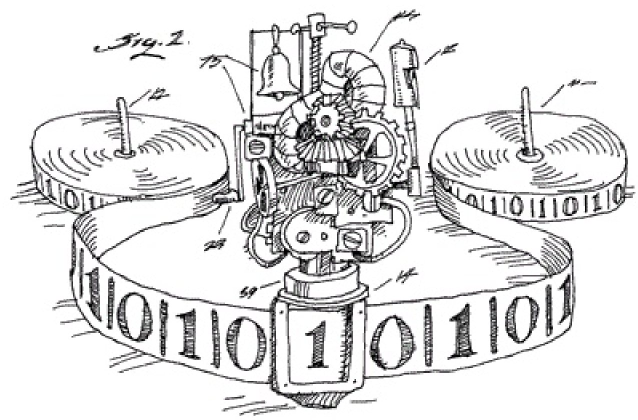
Naime, svaka nova ideja u fizici počinje kao seme neke revolucionarne misli, pa je tako bilo i u ovom slučaju. Godine 1900. Maks Plank začinje temelje buduće teorije predlažući kvantizaciju frekvencije kao moguće sredstvo za opis frekventne zavisnosti energije emitovane od strane apsolutnog crnog tela [1]. I zaista, iako teoriji najpre nije pruženo preveliko poverenje, njeni rezultati dali su dovoljno razloga i onima bez iole vere u nju da prihvate nove mogućnosti koje im se ovim putem pružaju. Albert Ajnštajn, kao jedan od pobornika teorije, prihvata Plankovu hipotezu i objašnjava pojavu fotoefekta 1905. godine uvodeći kvante svetlosti - fotone [1].

Nakon ovih radova teorija počinje užurbano da cveta. Godine 1913. javlja se prvi atomski model baziran na kvantnim idejama u radovima Nilsa Bora [1]. Dvadesete godine dvadesetog veka obeležila su brojna značajna imena poput Artura Komptona, koji istražuje kvantnu prirodu X-zračenja, Luja de Brolja, koji predlaže ideju o talasnoj prirodi materije, Volfganga Paulija, koji formuliše principe isključenja za elektrone u atomu, Ervina Šredingera, koji danas predstavlja jedno od vodećih imena u oblasti talasne mehanike, Maksa Borna i njegove probabilističke interpretacije kvantne mehanike, te Vernera Hajzenberga i njegovog principa neodređenosti, ali i brojnih drugih, koji nažalost nisu nabrojani na ovim stranicama [1].

Naravno, suvoparne teorije ne dobijaju na preteranom značaju ukoliko se ne nađu sistemi koji bi omogućili njihovo eksperimentalno ispitivanje i manipulisanje istima. Međutim, do sedamdesetih godina dvadesetog veka, iako je postojala mogućnost manipulisanja sistemima sa velikim brojem kvantnih podsistema, njihova separacija i ispitivanje svakog pojedinačnog kvantnog sistema nije bilo moguće. Tek sedamdesetih godina prethodnog veka pojavljuju se tehnike koje omogućavaju istraživanje izolovanih kvantnih sistema. Recimo, jedna od njih je metoda skenirajućeg tunelskog mikroskopa, koja omogućava posmatranja na atomskom nivou sa mogućnošću manipulacije [11].

Kvantna informatika se uklapa u ovu viziju. Naime, mogućnost kontrole izolovanih kvantnih sistema leži u srži primene kvantne mehanike u kvantnoj informatici. Međutim, dosadašnji napredak na ovom polju je i dalje veoma skroman, ali i daleko iznad nivoa na kom se nalazio pre svega 20 godina, kao što je i predočeno u uvodu.

Ako se pogleda istorija informacionih nauka, matematički model univerzalnog kompjutera definisan je pre njihovog nastanka, 1936. godine u radu Alana Tjuringa i nosi naziv Tjuringova mašina njemu u čast [2]. Mašina se sastoji od trake, instrukcijske table i glave koja može da čita i piše po traci i može da zauzme beskonačan broj mogućih stanja [12]. Prikaz Tjuringove mašine nalazi se na slici 1.



Slika 1. Šematski prikaz Tjuringove mašine. Slika je preuzeta sa [13].

Tabla Tjuringove mašine, shodno zadatom početnom stanju glave i očitanoj vrednosti sa trake u tom stanju, određuje simbol koji će glava ispisati na traci, stanje koje će zauzeti i poziciju glave na traci [12]. Tjuring je pokazao da postoji univerzalna Tjuringova mašina, koja može simulirati ma koju drugu Tjuringovu mašinu [2]. Osnova njegovog rada je Čarč-Tjuringova teza, koja kaže da ukoliko postoji mogućnost sprovođenja algoritma na ma kom hardveru, onda postoji ekvivalentan algoritam za univerzalnu Tjuringovu mašinu, koji sprovodi isti zadatak kao algoritam na tom računaru [2].

Nedugo nakon Tjuringovog rada konstruisani su i prvi elektronski kompjuteri. Džon fon Nojman našao je teorijski model pomoću kog bi bilo moguće sastaviti računar koji bi imao svojstvo univerzalne Tjuringove mašine, ali razvoj hardvera postaje realan tek nakon razvoja tranzistora 1947. godine [2]. Snaga hardvera je počela toliko ubrzano da raste u narednim godinama da je Gordon Mur 1965. godine napravio predviđanje u okviru takozvanog Murovog zakona, na osnovu kog snaga kompjutera duplira svoju vrednost na, okvirno, svake dve godine, što i jeste bio slučaj od šezdesetih godina prošlog veka [2].

Međutim, ova predviđanja, ako se u obzir uzme trenutno dostupna tehnologija, više nisu održiva. Konvencionalni pristupi proizvodnje kompjutera takmiče se sa današnjim problemom veličine i kvantni efekti počinju da se uključuju u funkcionisanje računara kako im se veličina smanjuje. Ispostavlja se da klasični računari mogu biti iskorišćeni da simuliraju kvantne, ali to ne rade efikasno. U ovom kontekstu, pojam efikasnog označava vreme vršenja akcije koje je izraženo u funkciji polinoma veličine problema od značaja, dok je za neefikasnost obično umesto polinoma vezana eksponencijalna funkcija [2].

Dakle, prelaženje sa klasične fizike na kvantnu prilikom sprovođenja računarskih procesa dovelo bi do porasta brzine rada. I ova ideja iznići će spontano prilikom razmatanja mogućih poboljšanja Čarč-Tjuringove teoreme. Naime, Čarč-Tjuringova teorema je kroz godine naišla na sve strože i strože definicije, a kad se Dejvid Dajč zapitao o postojanju računara koji simulira ma koji fizički sistem efikasno, došao je do ideje da bi odgovor trebalo tražiti pod okriljem kvantne mehanike [2]. U približno isto doba, Ričard Fajnman spomenuo je problem simulacije kvantno-mehaničkih sistema na klasičnim kompjuterima i predložio kreiranje računara baziranih na zakonima kvantne mehanike [14]. Na taj način, 1982. godine otvara se prozor novim mogućnostima - kvantnim računarima.

Nakon toga slede nova otkrića u ovom polju. Recimo, 1944. godine Piter Šor demonstrira kako je pomoću kvantnih računara moguće rešiti problem nalaženja delilaca celog broja, što najverovatnije nije moguće pomoću klasičnih računara [2]. Takođe, Lov Grover je 1995. godine pokazao da bi kvantni računar ubrzao proces sprovođenja pretrage u nestruktuiranom prostoru, prostoru u kom baza pretrage nije sortirana [2].

Sa druge strane, na razvoj kvantne informatike značajno je uticao razvoj teorije informacija. Dve teorije paralelno su se razvijale, konstantno se dotičući i preplićući. Moderna teorija informacija, doduše, doživela je veliki prevrat nešto ranije od druge grane, 1948. godine u radu Kloda Šenona [2].

Osnova Šenonovog doprinosa zasniva se na matematičkom definisanju koncepta informacije. Naime, Šenonova informacija za set verovatnoća $\{p_i\}$ ima oblik:

$$\mathcal{H} = -\sum_i p_i \log p_i \tag{2.1}$$

što predstavlja Bolcmanovu formulu za entropiju i Šenonov odabir kvantitativne mere informacije [15]. U zavisnosti od prirode problema bira se i logaritamska baza. Recimo, najčešće se za bazu logaritma uzima 2, te se u tom slučaju radi o bitima, a ukoliko se za bazu uzme e, meri se u natima [16]. Dakle, srž njegovog razmatranja sastoji se u tome da je informacija tačno definisana funkcija verovatnoće. Godine 1995. obezbeđen je i kvantni analogon Šenonovog rada od strane Bena Šumahera i tom prilikom je definisan kvantni bit, odnosno kubit, pojam koji će kasnije biti podrobnije istražen [2].

Danas se velika pažnja posvećuje i kvantnoj kriptografiji. Kriptografija predstavlja oblast koja se bavi mogućnošću komunikacije između dve stranke koje ne veruju jedna drugoj [2]. Verovatno najintrigantniji problem koji ona obuhvata tiče se tajnog komuniciranja. U daljim poglavljima biće više reči o ovom problemu.

Naravno, kvantna informatika je od svog nastanka rasla iznimnom brzinom, a danas je možda i najpopularnija njena oblast kvantna zamršenost, koja predstavlja samu srž rada. Međutim, bazičan cilj svake od oblasti predstavlja svojstvo fizičkog razmišljanja o računarskim problemima, što je otvorilo vrata novim mogućnostima u oblasti informatike.

3 Kvantno-mehanička baza kvantne informatike

Na osnovu kratkog osvrta na istorijske činjenice postaje prilično jasno da je za bilo kakvo uplitanje u grane kvantne informatike najpre neophodno izgraditi kvantno-mehanički aparat, koji u ovom slučaju predstavlja sredstvo od presudnog značaja. Stoga će ovaj segment biti posvećen neophodnom aparatu koji kvantna mehanika nudi.

3.1 Dirakova notacija. Hilbertov prostor

Dirakova notacija predstavlja pogodan zapis vektora u kvantnoj mehanici i stoga je i korišćena u radu. Njeni glavni "sastojci" su bra $\langle .|$ i ket $|.\rangle$ vektori, koji u formi skalarnog proizvoda daju braket $\langle .|.\rangle$ [17]. Recimo, kvantno-mehaničko stanje može biti zapisano u formi:

$$\Psi = (\alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

ili u Dirakovoj formi:

$$|\Psi\rangle = \alpha|x\rangle + \beta|y\rangle \tag{3.2}$$

gde su α i β kompleksni brojevi u opštem slučaju, a vektori $|x\rangle$ i $|y\rangle$ su u matričnoj formi:

$$|x\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \;\; |y\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Bra vektor predstavlja adjungovani oblik ket vektora. Ukoliko se upotrebi matrična forma u kojoj je ket vektor predstavljen kao vektor kolone:

$$|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

onda je odgovarajući bra vektor:

$$\langle\Psi| = \big(|\Psi\rangle\big)^\dagger = \begin{bmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

i u Dirakovoj notaciji može biti zapisan u obliku:

$$\langle\Psi| = \alpha^*\langle x| + \beta^*\langle y| \tag{3.6}$$

Dakle, ovim relacijama su definisani dirakovski vektori. Ova notacija posebno je pogodna ukoliko se razmatra unutrašnji proizvod oblika $\langle\Psi|\Phi\rangle$. Ukoliko se za ket vektor uzme već navedeni oblik (3.4), forma:

$$\langle\Psi|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha^* & \beta^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \tag{3.7}$$

naziva se normom vektora $|\Psi\rangle$ [17] i najčešće se radi o jediničnoj normi, te se na taj način i uvodi pojam normiranih stanja, koji obuhvata stanja normirana na jedinicu. Naravno, isti rezultat mora se dobiti i ako se razmatra dirakovska forma. Najpre, na osnovu relacija (3.3) jasno je da su $|x\rangle$ i $|y\rangle$ ortogonalna i normirana stanja:

$$\langle x|y\rangle = \langle y|x\rangle = 0 \tag{3.8}$$

$$\langle x|x\rangle = \langle y|y\rangle = 1 \tag{3.9}$$

Na osnovu ovih relacija, u Dirakovoj notaciji norma je oblika:

$$\langle \Psi|\Psi\rangle = \big(\alpha^*\langle x| + \beta^*\langle y|\big)\big(\alpha|x\rangle + \beta|y\rangle\big) = |\alpha|^2 + |\beta|^2 \tag{3.10}$$

što se poklapa sa relacijom (3.7).

Sada je pogodno uvesti i definiciju ortonormiranog bazisa. Naime, ukoliko je relacija (3.7) jednaka jedinici:

$$\langle \Psi|\Psi\rangle = 1 \tag{3.11}$$

i ako je skalarni proizvod stanja $|\Psi\rangle$ sa drugim stanjima iz pripadnog bazisa, pa i nekim stanjem $|\Phi\rangle$ iz tog bazisa:

$$\langle \Psi|\Phi\rangle = 0 \tag{3.12}$$

onda se radi o ortonormiranom bazisu [18].

Međutim, šta zapravo predstavlja spominjani pojam bazisa? Bazis nekog vektorskog prostora je set vektora $\{|\Psi_i\rangle\}$ takav da se ma koji vektor $|\Upsilon\rangle$ iz tog prostora može predstaviti kao njihova linearna kombinacija $|\Upsilon\rangle = \sum_i a_i|\Psi_i\rangle$, pri čemu su oni sami linearno nezavisni [18]. Broj bazisnih vektora govori i o dimenziji prostora, te ako se indeks i kreće od 1 do n, reč je o n-dimenzionom vektorskom prostoru [18]. Za ovako definisan prostor linearna nezavisnost je prisutna ukoliko je relacija:

$$\alpha_1\Psi_1 + \alpha_2\Psi_2 + ... + \alpha_n\Psi_n = 0 \tag{3.13}$$

ispunjena samo ako su svi koeficijenti α_i jednaki nuli [18]. Naravno, ukoliko je relacija (3.13) ispunjena za bar jedan koeficijent koji je različit od nule, onda je reč o linearno zavisnim vektorima i u tom slučaju se bar jedan od njih može zapisati kao linearna kombinacija ostalih [18]. Ovde treba naglasiti još jednu činjenicu. Kada je reč o bazisu nekog prostora, onda se ne govori o jednom privilegovanom bazisu, ali je bitno da svaki od datih bazisa, vezanih za isti prostor, pošto odgovara prostoru istih dimenzija, ima i isti broj elemenata [2].

Posebno pogodno svojstvo Dirakove notacije je to što se i operatori, odnosno matrice, mogu definisati pomoću bra i ket vektora. Recimo, matrica:

$$A = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} \\ a_{yx} & a_{yy} \end{bmatrix} \tag{3.14}$$

u Dirakovoj notaciji zapisuje se u obliku:

$$A = a_{xx}|x\rangle\langle x| + a_{xy}|x\rangle\langle y| + a_{yx}|y\rangle\langle x| + a_{yy}|y\rangle\langle y| \tag{3.15}$$

koji će i predstavljati pogodan oblik prilikom traženja matrice gustine ρ.

Ovim putem uvedene su Dirakove forme zapisa vektora i operatora, te definisana svojstva bazisa i dimenzije vektorskog prostora, ali nije bilo reči o samom prostoru. Naime, sve dosadašnje, ali i buduće s obzirom na to da će u ovom prostoru biti skoncentrisano celokupno područje rada, definicije tiču se Hilbertovih prostora. Jedan Hilbertov prostor predstavlja kompletan kompleksni vektorski prostor sa definisanim unutrašnjim proizvodom [2].

Kompleksan vektorski prostor V predstavlja set koji sadrži nulti element i za sve vektore $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle, |\chi\rangle \in V$ i sve kompleksne brojeve α i β važe sledeći zakoni [2]:

$$|\Psi\rangle + |\Phi\rangle = |\Phi\rangle + |\Psi\rangle \tag{3.16}$$

$$\big(|\Psi\rangle + |\Phi\rangle\big) + |\chi\rangle = |\Psi\rangle + \big(|\Phi\rangle + |\chi\rangle\big) \tag{3.17}$$

$$0 + |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \tag{3.18}$$

$$|\Psi\rangle - |\Psi\rangle = 0 \tag{3.19}$$

$$\alpha\big(\beta|\Psi\rangle\big) = \big(\alpha\beta\big)|\Psi\rangle \tag{3.20}$$

$$\big(\alpha + \beta\big)|\Psi\rangle = \alpha|\Psi\rangle + \beta|\Psi\rangle \tag{3.21}$$

$$\alpha\big(|\Psi\rangle + |\Phi\rangle\big) = \alpha|\Psi\rangle + \alpha|\Phi\rangle \tag{3.22}$$

$$1|\Psi\rangle = |\Psi\rangle \tag{3.23}$$

Unutrašnji proizvod $\langle .|.\rangle$ zadovoljava sledeće relacije [2]:

$$\big(\alpha\langle\Psi| + \beta\langle\Psi|\big)|\Phi\rangle = \alpha\langle\Psi|\Phi\rangle + \beta\langle\Psi|\Phi\rangle \tag{3.24}$$

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \langle\Phi|\Psi\rangle^* \tag{3.25}$$

$$\langle\Psi|\lambda\Phi\rangle = \lambda\langle\Psi|\Phi\rangle, \;\; \langle\lambda\Psi|\Phi\rangle = \lambda^*\langle\Psi|\Phi\rangle \tag{3.26}$$

$$\langle\Psi|\Psi\rangle \geq 0 \tag{3.27}$$

pri čemu u poslednjoj relaciji znak jednakosti važi samo u slučaju kada je $|\Psi\rangle = 0$.

Na osnovu prethodnih definicija vektorskog prostora i unutrašnjeg proizvoda definisan je i Hilbertov prostor, u kom će biti sproveden ostatak razmatranja.

3.2 Svojstveni problem. Adjungovani operatori. Ermitski operatori. Projektori. Unitarni operatori

Baza praktičnog dela rada biće pronalaženje svojstvenih vrednosti i svojstvenih vektora hamiltonijana, te je neophodno prethodno ih definisati. Svojstveni vektor operatora O je koji god vektor koji zadovoljava relaciju:

$$O|\Psi\rangle = \lambda|\Psi\rangle \tag{3.28}$$

gde je λ svojstvena vrednost vezana za svojstveni vektor $|\Psi\rangle$ [17]. Skup različitih svojstvenih vrednosti naziva se spektrom operatora i, ako je on prebrojiv, spektar je diskretan, a ako je neprebrojiv, reč je o kontinualnom spektru [18]. Takođe, treba uočiti da je u ovom slučaju izostavljena uobičajena oznaka "kapice" iznad operatora i ova notacija koristiće se i u preostalom delu rada.

Ako je reč o linearnom operatoru, koji zadovoljava relaciju [18]:

$$O\big(\alpha|\Psi\rangle + \beta|\Phi\rangle\big) = \alpha O|\Psi\rangle + \beta O|\Phi\rangle \tag{3.29}$$

i svojstveni vektor $|\Psi\rangle$ odgovara svojstvenoj vrednosti λ, onda je i vektor $\alpha|\Psi\rangle$ svojstveni vektor koji odgovara istoj svojstvenoj vrednosti.

$$O|\Psi\rangle = \lambda|\Psi\rangle / \cdot \alpha \tag{3.30}$$

$$\alpha O|\Psi\rangle = \alpha\lambda|\Psi\rangle \tag{3.31}$$

$$O\big(\alpha|\Psi\rangle\big) = \lambda\big(\alpha|\Psi\rangle\big) \tag{3.32}$$

Dakle, umesto svojstvenih vektora, zapravo su relevantni svojstveni pravci i svi vektori duž istog pravca su ekvivalentni [18].

Takođe, ukoliko istoj svojstvenoj vrednosti odgovara više linearno nezavisnih svojstvenih vektora, svojstvena vrednost je degenerisana, a broj linearno nezavisnih svojstvenih vektora koji joj odgovara definiše stepen degeneracije [18]. Ako su $|\Psi_1\rangle$ i $|\Psi_2\rangle$ dva svojstvena vektora koji odgovaraju istoj svojstvenoj vrednosti λ, onda se može pisati:

$$\begin{aligned} O\big(\alpha|\Psi_1\rangle + \beta|\Psi_2\rangle\big) &= \alpha O|\Psi_1\rangle + \beta O|\Psi_2\rangle = \\ &= \alpha\lambda|\Psi_1\rangle + \beta\lambda|\Psi_2\rangle = \\ &= \lambda\big(\alpha|\Psi_1\rangle + \beta|\Psi_2\rangle\big) \end{aligned} \tag{3.33}$$

te je i svaka linearna kombinacija linearno nezavisnih svojstvenih vektora iste svojstvene vrednosti takođe svojstveni vektor kom odgovara jednaka svojstvena vredsnost.

Osnovni proces koji omogućava traženje svojstvenih vrednosti jeste proces rešavanja karakteristične jednačine. Karakteristična funkcija definiše se kao:

$$C(\lambda) = \det|O - \lambda I| \tag{3.34}$$

gde je det oznaka za determinantu, a I jedinična matrica, čija dimenzija odražava dimenziju matričnog operatora O [2]. U tom slučaju, karakteristična jednačina je oblika [2]:

$$C(\lambda) = 0 \tag{3.35}$$

Ovde treba uočiti da je u problemu korišćena matrična reprezentacija svojstvenog problema, koja će i nadalje biti korišćena usled toga što će se operacije vršiti u konačnodimenzionom prostoru, te nema problema u tom pogledu. Stoga će prilikom rešavanja jednačine (3.35) iznići sve svojstvene vrednosti operatora O. Doduše, ovaj proces biće sproveden jednostavnije u okviru programskog paketa $Wolfram\ Mathematica$.

U radu će od značaja biti ermitski hamiltonijan, te je stoga neophodno prethodno definisati pojam ermitskog operatora. Naime, u literaturi se obično polazi od definicije adjungovanog operatora. Ako je O ma kakav linearni operator u Hilbertovom prostoru, postoji jedinstven linearni operator $O^\dagger$ u istom prostoru takav da za sve vektore vektore $|\Psi\rangle$ i $|\Phi\rangle$ iz Hilbertovog prostora zadovoljava relaciju:

$$\big(\Psi, O\Phi\big) = \big(O^\dagger\Psi, \Phi\big) \tag{3.36}$$

i nosi naziv adjungovani operator operatora O [2]. Matrica koja se pripisuje adjungovanom operatoru $O^\dagger$ transponovana je i kompleksno konjugovana u odnosu na matricu pripisanu operatoru O. Dakle, u pitanju je kompleksno konjugovana matrica u kojoj su vrste i kolone zamenile uloge.

Adjungovan operator adjungovanog operatora jednak je, shodno definiciji (3.36):

$$\big(\Psi, O^\dagger\Phi\big) = \big((O^\dagger)^\dagger, \Phi\big) \tag{3.37}$$

$$\big(\Psi, O^\dagger\Phi\big) = \big(O^\dagger\Phi, \Psi\big)^* = \big(\Phi, O\Psi\big)^* = \big(O\Psi, \Phi\big) \tag{3.38}$$

te je očito da je, poredeći (3.37) i (3.38), adjungovan operator adjungovanog operatora jednak polaznom operatoru $\big(O^\dagger\big)^\dagger = O$. Takođe, ukoliko se operator izražava kao proizvod dva operatora, njegov adjungovani operator dobija se u formi:

$$\begin{aligned}\big(\Psi, (AB)\Phi\big) = \big(A^\dagger\Psi, B\Phi\big) = \big(B^\dagger A^\dagger\Psi, \Phi\big) = \\ = \big((AB)^\dagger\Psi, \Phi\big)\end{aligned} \tag{3.39}$$

te je očito:

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger \tag{3.40}$$

Takođe, ako je $|\Psi\rangle$ vektor sa svojim adjungom $(|\Psi\rangle)^\dagger = \langle\Psi|$, onda je korisna i sledeća relacija [2]:

$$(O|\Psi\rangle)^\dagger = \langle\Psi|O^\dagger \tag{3.41}$$

U specijalnom slučaju, operator može biti jednak svome adjungu:

$$O^\dagger = O \tag{3.42}$$

i takvi operatori nazivaju se ermitskim [2]. Takvi operatori imaju nekoliko važnih karakteristika, a najznačajnija je da su njihove svojstvene vrednosti:

$$O|\Psi\rangle = \lambda|\Psi\rangle \tag{3.43}$$

$$\big(\Psi, O\Psi\big) = \big(\Psi, \lambda\Psi\big) = \lambda \tag{3.44}$$

$$\big(\Psi, O\Psi\big) = \big(O^\dagger\Psi, \Psi\big) = \big(O\Psi, \Psi\big) = \big(\lambda\Psi, \Psi\big) = \lambda^* \tag{3.45}$$

$$\lambda = \lambda^* \tag{3.46}$$

očito realne.

Posebna klasa ermitskih operatora su projektori. Neka je prostor W k-dimenzioni potprostor d-dimenzionog prostora V. Ako je ortonormirani bazis V označen sa $|1\rangle ... |d\rangle$, a potprostora W sa $|1\rangle ... |k\rangle$, gde je $k < d$, onda je projektor na prostor W [2]:

$$P = \sum_{i=1}^{k} |i\rangle\langle i| = \sum_{i=1}^{k} P_i \tag{3.47}$$

gde je $P_i = |i\rangle\langle i|$. Ovakva definicija projektora ne zavisi od izbora bazisa W. Takođe, značajno je dejstvo projektora na vektor iz bazisnog skupa:

$$P|m\rangle = \sum_i |i\rangle\langle i|m\rangle = \sum_i \delta_{im}|i\rangle = |m\rangle \tag{3.48}$$

gde je $\delta_{im} = \begin{cases} 0, & i \neq m \\ 1, & i = m \end{cases}$. Dakle, projektor projektuje u datom pravcu, što mu i samo ime kaže. Osim toga, za projektor važi i osobina $P^2 = P$ [2].

Svaki projektor ima i svog komplementa. Ortogonalni komplement projektora je operator oblika $Q = I - P$ [2]. Očito je da Q predstavlja projektor na potprostor izgrađen vektorima $|k+1\rangle ... |d\rangle$.

Od specijalnih vrsta operatora posebno je značajan i unitarni operator, koji zadovoljava svojstvo [17]:

$$U^\dagger U = UU^\dagger = I \tag{3.49}$$

Ovi operatori posebno su značajni jer očuvavaju unutašnji proizvod:

$$\big(U\Psi, U\Phi\big) = \big(U^\dagger U\Psi, \Phi\big) = \big(I\Psi, \Phi\big) = \big(\Psi, \Phi\big) \tag{3.50}$$

Osim toga, shodno definiciji (3.49), determinanta unitarnog operatora jednaka je jedinici $|\det U| = 1$.

Na ovaj način uvedeni su osnovni pojmovi i operatori koji će se nadalje koristiti kako u samom praktičnom radu, tako i u ostatku segmenta.

3.3 Kubit. Adamarova stanja i operacije. Paulijeve matrice

U teoriji kvantnih informacija signal se transmituje posredstvom kvantnog sistema za razliku od klasičnog analoga. U slučaju klasične informacije kvantitativna jedinica mere su biti i fizički sistem ima dva razlučiva stanja. Obično se jedno stanje označava kao logička nula (niska mera signala), a drugo kao logička jedinica (visoka mera signala) [15].

U kvantnoj informatici, iako je situacija malo drugačija u kvantnom svetu, baza razmatranja je veoma slična. Analog bita u kvantnim merama je, kako je već naglašeno, kvantni bit ili kubit. Za kubit se bira ma koji kvantni sistem sa dva ortogonalna stanja, koja se najčešće obeležavaju sa $|0\rangle$ i $|1\rangle$ [15]. Takođe, stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$ su normirana. Proizvoljni vektor stanja se u ovom prostoru onda može zapisati u obliku:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{3.51}$$

Ovaj zapis je posebno pogodan usled toga što omogućava da se u više od dve dimenzije proizvoljno n-dimenziono stanje zapiše u obliku [17]:

$$|\Psi\rangle = \alpha_0|0\rangle + \alpha_1|1\rangle + ... + \alpha_{n-1}|n-1\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i|i\rangle \tag{3.52}$$

Stanja $|i\rangle$ su ortogonalna i normirana, odnosno, važi sledeće:

$$\langle i|j\rangle = 0, \;\; i \neq j \tag{3.53}$$

$$\langle i|j\rangle = 1, \;\; i = j \tag{3.54}$$

kao što važi i u slučaju kubita.

U slučaju kubita, kada je $\alpha = 1$, a $\beta = 0$, onda je $|\Psi\rangle = |0\rangle$, a za $\beta = 1$ i $\alpha = 0$, očito je $|\Psi\rangle = |1\rangle$, kao što je to slučaj kod klasičnog bita, te se ovde može videti analogija. Međutim, α i β ne moraju biti 1 i 0, te $|\Psi\rangle$ u opštem slučaju može biti superpozicija stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$, što ne nalazi analoga u klasičnoj problematici [17]. Kubit u stanju $|\Psi\rangle$ može se meriti i u tom slučaju stanje $|0\rangle$ biće izmereno sa verovatnoćom $|\alpha|^2$, a stanje $|1\rangle$ sa verovatnoćom $|\beta|^2$ i shodno Bornovoj probabilističkoj interpretaciji talasne funkcije, prema kojoj je kvadrat modula talasne funkcije gustina verovatnoće da se čestica u nekom trenutku nađe u nekoj zapremini [18], te činjenici da je verovatnoća da se izmeri ma koje od dva stanja jednako jedinici, mora važiti već spomenut uslov:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{3.55}$$

što je jedino ograničenje u pogledu koeficijenata α i β.

U kvantnoj informatici se često koristi Adamarov bazis kubitnih stanja [17]:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big) \tag{3.56}$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big) \tag{3.57}$$

Ova stanja u literaturi često nose naziv kvantni novčići usled toga što merenja daju stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$ sa verovatnoćom $50 : 50$. Osim toga, Adamarova stanja su ortogonalna pored toga što su normirana.

Pored Adamarovih stanja poznate su i Adamarove operacije, odnosno unitarne operacije forme [17]:

$$\begin{aligned}\mathbb{H} &= |+\rangle\langle 0| + |-\rangle\langle 1| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + |1\rangle\big)\langle 0| + \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle - |1\rangle\big)\langle 1| = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|\big)\end{aligned} \tag{3.58}$$

što, ako se uzmu vektori:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{3.59}$$

koji predstavljaju uobičajena ortogonalna stanja kubita, daje:

$$\mathbb{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{bmatrix} \tag{3.60}$$

Dejstvo ovakvog vida operatora na stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$ daje:

$$\mathbb{H}|0\rangle = |+\rangle \tag{3.61}$$

$$\mathbb{H}|1\rangle = |-\rangle \tag{3.62}$$

a na stanja $|+\rangle$ i $|-\rangle$:

$$\mathbb{H}|+\rangle = |0\rangle \tag{3.63}$$

$$\mathbb{H}|-\rangle = |1\rangle \tag{3.64}$$

Dakle, ukoliko se Adamarova operacija sprovede na Adamarova stanja pre merenja, merenjem se dobija tačno određeno stanje $|0\rangle$ ili $|1\rangle$ bez obzira na to što bi bez primene Adamarove operacije šanse za registrovanje ma kog od dva stanja bile $50 : 50$ [17]. Ovo je, dakle, veoma pogodno svojstvo, pošto omogućava razlikovanje prvobitnih Adamarovih stanja na osnovu relacija (3.63) i (3.64).

Međutim, dosad je jedina definisanost stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$ bila oblika (3.59). Bez obzira na to što je rečeno da su stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$ proizvoljna ortogonalna i normirana stanja, obično se u obzir uzimaju tačno određena stanja. Nekad su to dva spinska stanja jednog elektrona $|\uparrow\rangle$ i $|\downarrow\rangle$, nekad horizontalna i vertikalna polarizacija fotona $|H\rangle$ i $|V\rangle$ [17], ali najčešće baš prva opcija, koja će i biti korišćena u praktičnom delu rada. Ovaj bazis često se naziva komputacionim bazisom i predstavlja se pomoću svojstvenih funkcija Paulijeve matrice σ^z [15]:

$$\sigma^z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.65}$$

$$\sigma^z|0\rangle = |0\rangle \tag{3.66}$$

$$\sigma^z|1\rangle = -|1\rangle \tag{3.67}$$

gde su:

$$|\uparrow\rangle = |0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ |\downarrow\rangle = |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3.68}$$

Dakle, ako se *up* i *down* stanja uzmu za referentna kubitna ortogonalna stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$, posebna pogodnost je što se može raditi sa Paulijevim matricama i jediničnom matricom za opisivanje svojstava kubita. Ostale navedene matrice su oblika [17]:

$$\sigma^x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \ \sigma^y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \ I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.69}$$

i poznato je njihovo dejstvo na kubitna stanja (3.68) [15]:

$$\sigma^x|0\rangle = |1\rangle, \ \sigma^x|1\rangle = |0\rangle \tag{3.70}$$

$$\sigma^y|0\rangle = i|1\rangle, \ \sigma^y|1\rangle = -i|0\rangle \tag{3.71}$$

$$I|0\rangle = |0\rangle, \ I|1\rangle = |1\rangle \tag{3.72}$$

Kao jedno od najintrigantnijih oruđa u kvantnoj mehanici, Paulijeve matrice i u ovom slučaju biće neophodno sredstvo za rešenje problema, o čemu će više reči biti u praktičnom delu.

3.4 Tenzorski proizvod

Rad će biti baziran na razmatranju trokubitnog sistema i stoga je najpogodnije raditi u složenom vektorskom prostoru kreiranom grupisanjem pojedinačnih prostora pripisanih svakom izolovanom čvoru (spinu), odnosno kuplovati Paulijeve matrice za svaki čvor. Takav prostor predstavlja tročestični sistem kreiran kao osmodimenzioni entitet nastao svojevrsnim spajanjem dvodimenzionih segmenata. Ispostavlja se da je rad u ovakvom prostoru prilično jednostavniji, u šta se čitalac može uveriti u praktičnom delu rada. Međutim, da bi se moglo posvetiti samom procesu formiranja ovakvog prostora, najpre je neophodno uvesti pojam tenzorskog proizvoda.

Kao što je već rečeno, tenzorski proizvod predstavlja alat pomoću kog je moguće manje vektorske prostore grupisati tako da formiraju krupnije tvorevine. Neka su prostori V i W Hilbertovi prostori dimenzija m i n. Onda je prostor $V \otimes W$, gde je sa $\otimes$ označen tenzorski proizvod, mn-dimenzioni Hilbertov prostor [2]. Elementi novog Hilbertovog prostora su linearne kombinacije tenzorskog proizvoda $|v\rangle \otimes |w\rangle$ elemenata $|v\rangle$ prostora V i $|w\rangle$ prostora W [2]. Dakle, ako je $\{|i\rangle\}$ ortonormirani bazis vektorskog prostora V, a $\{|j\rangle\}$ prostora W, onda je $\{|i\rangle \otimes |j\rangle\}$ bazis prostora tenzorskog proizvoda $V \otimes W$ [2].

Po definiciji, tenzorski proizvod zadovoljava sledeće stavke [2]:

1. za proizvoljni skalar α i vektore $|v\rangle$ i $|w\rangle$ iz prostora V i W, respektivno, važi:

$$\alpha\big(|v\rangle \otimes |w\rangle\big) = \big(\alpha|v\rangle\big) \otimes |w\rangle = |v\rangle \otimes \big(\alpha|w\rangle\big) \tag{3.73}$$

2. za proizvoljne $|v_1\rangle$ i $|v_2\rangle$ iz V i $|w\rangle$ iz W važi:

$$\big(|v_1\rangle + |v_2\rangle\big) \otimes |w\rangle = |v_1\rangle \otimes |w\rangle + |v_2\rangle \otimes |w\rangle \tag{3.74}$$

3. za proizvoljne $|v\rangle$ iz V i $|w_1\rangle$ i $|w_2\rangle$ iz W važi:

$$|v\rangle \otimes \big(|w_1\rangle + |w_2\rangle\big) = |v\rangle \otimes |w_1\rangle + |v\rangle \otimes |w_2\rangle \tag{3.75}$$

Ostaje još značajno pitanje prirode linearnih operatora koji deluju na prostor $V \otimes W$. Ako su $|v\rangle$ i $|w\rangle$ vektori u V i W, respektivno, a A i B linearni operatori koji deluju na prostore V i W, respektivno, može se definisati tenzorski proizvod operatora $A \otimes B$ koji deluje na prostor $V \otimes W$ kao [2]:

$$\big(A \otimes B\big)\big(|v\rangle \otimes |w\rangle\big) = A|v\rangle \otimes B|w\rangle \tag{3.76}$$

Unutrašnji proizvod u prostorima V i W može se iskoristiti za definisanje unutrašnjeg proizvoda u prostoru $V \otimes W$. Recimo, za neke proizvoljne vektore $\sum_i a_i|v_i\rangle \otimes |w_i\rangle$ i $\sum_j b_j|v_j\rangle \otimes |w_j\rangle$ iz $V \otimes W$, unutrašnji prozivod definiše se [2]:

$$\Big(\sum_i a_i|v_i\rangle \otimes |w_i\rangle, \sum_j b_j|v_j\rangle \otimes |w_j\rangle\Big) = \sum_{i,j} a_i^* b_j \langle v_i|v_j\rangle\langle w_i|w_j\rangle \tag{3.77}$$

Doduše, celokupno razmatranje je apstraktno bez uvođenja Kronekerovog proizvoda. On omogućava da se sa uopštenog tenzorskog proizvoda pređe na razmatranje matrične forme i

Kronekerovog proizvoda. Ako je A matrica dimenzija $m \times n$, a matrica B matrica dimenzija $p \times q$, njihov Kronekerov proizvod je [2]:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} A_{11}B & A_{12}B & \dots & A_{1n}B \\ A_{21}B & A_{22}B & \dots & A_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1}B & A_{m2}B & \dots & A_{mn}B \end{bmatrix} \tag{3.78}$$

matrica dimenzija $mp \times nq$.

Shodno ovoj definiciji tenzorskog proizvoda, u praktičnom delu biće nađeni tenzorski proizvodi Paulijevih matrica i vektora (3.68) za potrebe razmatranja trokubitnog sistema u matričnoj reprezentaciji.

3.5 Čista i mešana stanja. Matrica gustine

Dosad su pojmovi čistog i mešanog stanja samo sporedno ušli u srž rada, ali će sada biti i zvanično načinjeno razgraničenje između dva pojma. Naime, za sistem se kaže da je u čistom stanju ako se poseduje potpuno znanje o sistemu, odnosno, zna se u kom je tačno stanju [19]. Ukoliko se radi o mešanim stanjima, postoji samo parcijalno znanje o sistemu [19]. Međutim, ove deskripcije i dalje zvuče isuviše apstraktno. Da bi se dobila prava ideja o čistim i mešanim stanjima, najefikasnije je uvesti termin matrice gustine.

Jedan od osnovnih postulata kvantne mehanike jeste postulat merenja, koji definiše vrednosti koje se mogu izmeriti u sistemu. Neka je cilj izmeriti veličinu povezanu sa operatorom F (još jedan postulat u kom se svakoj opservabli pripisuje ermitski operator - postulat o opservablama [20]). Svojstveni problem operatora je:

$$F|\Psi\rangle = f|\Psi\rangle \tag{3.79}$$

i neka se radi o operatoru diskretnog spektra, jer će samo takvi i biti od interesa u daljem radu. Superpozicija svih diskretnih svojstvenih stanja može se zapisati u obliku [20]:

$$|\Upsilon\rangle = \sum_i a_i|\Psi_i\rangle \tag{3.80}$$

gde su $|\Psi_i\rangle$ svojstvena stanja, a a_i koeficijenti razvoja:

$$a_i = \langle\Psi_i|\Upsilon\rangle \tag{3.81}$$

Rezultat merenja će u ovom slučaju biti svojstvene vrednosti operatora F, f_i, merene sa verovatnoćom $|a_i|^2$, kako je ranije i bilo naznačeno.

Distribucija verovatnoće u kojoj se stanje $|\Psi_i\rangle$ javlja sa verovatnoćom $|a_i|^2$ kao stanje u kom se sistem nalazi posle merenja (vezano za izmerenu svojstvenu vrednost) može se predstaviti matricom gustine [17]:

$$\rho = \sum_i |a_i|^2|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| \tag{3.82}$$

Stanje $|\Upsilon\rangle$, u kom se sistem nalazi pre merenja, ima verovatnoću 1 i stoga se njegova matrica gustine zapisuje u obliku:

$$\rho = 1|\Upsilon\rangle\langle\Upsilon| \tag{3.83}$$

te je u pitanju čisto stanje [17]. Nakon merenja sistem prelazi u stanje koje odgovara izmerenoj svojstvenoj vrednosti [18].

Treba dodati da kvadrat matrice gustine (3.83) ima oblik same matrice gustine, što je jedna od odlika matrice gustine čistih stanja.

$$\begin{aligned}\rho^2 &= \big(|\Upsilon\rangle\langle\Upsilon|\big)^*|\Upsilon\rangle\langle\Upsilon| = \\ &= |\Upsilon\rangle\langle\Upsilon|\Upsilon\rangle\langle\Upsilon| = \\ &= |\Upsilon\rangle\langle\Upsilon| = \rho \end{aligned} \tag{3.84}$$

Osim toga, ermitovost matrice je uočljiva u priloženom dokazu (3.84).

Osnovna odlika čistog stanja jeste i činjenica da, ukoliko se rešava svojstveni problem matrice gustine, rezultat će biti samo jedno svojstveno stanje sa svojstvenom vrednošću 1 [19].

$$\rho|\Upsilon\rangle = |\Upsilon\rangle\langle\Upsilon|\Upsilon\rangle = 1|\Upsilon\rangle \tag{3.85}$$

Dejstvo iste matrice gustine na stanje $|\Omega\rangle$ ortogonalno na stanje $|\Upsilon\rangle$ daje samo jednu svojstvenu vrednost - nulu [19].

$$\rho|\Omega\rangle = |\Upsilon\rangle\langle\Upsilon|\Omega\rangle = 0|\Upsilon\rangle \tag{3.86}$$

Stavke (3.85) i (3.86) krucijalne su odlike čistog stanja s obzirom na to da za mešana stanja one nisu validne i matrica gustine ima više od jedne svojstvene vrednosti različite od nule [19]. Mešana stanja predstavljaju određenu mešavinu čistih stanja Υ^i sa pridruženim verovatnoćama p_i i odgovarajuća matrica gustine sistema u mešanom stanju zapisuje se u obliku [17]:

$$\rho = \sum_i p_i|\Upsilon^i\rangle\langle\Upsilon^i| \tag{3.87}$$

Matrica gustine je, inače, pogodno sredstvo za rešavanje brojnih problema ekvivalentno pristupu vektora stanja, ali često podesnije [2]. Takođe, poznata forma matrice gustine omogućava predviđanje budućeg ponašanja sistema [2].

Matrica gustine ima sledeća poznata svojstva [2]:

1. ermitovost,
2. $\mathrm{Tr}(\rho) = 1$,
3. pozitivna definisanost $\langle\Psi|\rho|\Psi\rangle \geqslant 0$ i
4. $\mathrm{Tr}(\rho^2) \leqslant 1$, pri čemu znak jednakosti važi samo u slučaju čistih stanja.

Prva osobina već je dokazana, a sada će isto biti učinjeno i za preostala tri svojstva.

$$\mathrm{Tr}(\rho) = \sum_{i,j} p_i\langle\Upsilon^j|\Upsilon^i\rangle\langle\Upsilon^i|\Upsilon^j\rangle = \sum_i p_i = 1 \tag{3.88}$$

$$\langle\Psi|\rho|\Psi\rangle = \sum_i p_i \langle\Psi|\Upsilon^i\rangle\langle\Upsilon^i|\Psi\rangle = \sum_i p_i |\langle\Upsilon^i|\Psi\rangle|^2 \geqslant 0 \tag{3.89}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(\rho^2) &= \sum_j \langle\Upsilon^j|\rho^2|\Upsilon^j\rangle = \sum_{i,j} \langle\Upsilon^j|\rho|\Upsilon^i\rangle\langle\Upsilon^i|\rho|\Upsilon^j\rangle = \\ &= \sum_{i,j} |\langle\Upsilon^i|\rho|\Upsilon^j\rangle|^2 = \sum_{i,j,k} |\langle\Upsilon^i|\Upsilon^k\rangle\langle\Upsilon^k|\Upsilon^j\rangle|^2 |p_k|^2 = \sum_k |p_k|^2 \leqslant 1\end{aligned} \tag{3.90}$$

Prilikom izvođenja poslednje relacije iskorišćen je uslov kompletnosti skupa $\sum_i |\Upsilon^i\rangle\langle\Upsilon^i| = 1$ [18].

Takođe, ne bi bilo loše ovde spomenuti još jednu činjenicu vezanu za matricu gustine. Recimo, za datu matricu gustine u obliku:

$$\rho = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| \tag{3.91}$$

može se na prvu loptu pretpostaviti da je ona pripisana sistemu koji je u stanju $|0\rangle$ sa verovatnoćom $\frac{3}{4}$ i $|1\rangle$ sa verovatnoćom $\frac{1}{4}$. Međutim, ne mora biti tako. Ako se definišu stanja:

$$|a\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}}|0\rangle + \sqrt{\frac{1}{4}}|1\rangle \tag{3.92}$$

$$|b\rangle = \sqrt{\frac{3}{4}}|0\rangle - \sqrt{\frac{1}{4}}|1\rangle \tag{3.93}$$

i sistem se nalazi u stanju $|a\rangle$ sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$ i stanju $|b\rangle$ sa istom verovatnoćom, odgovarajuća matrica gustine je:

$$\rho = \frac{1}{2}|a\rangle\langle a| + \frac{1}{2}|b\rangle\langle b| = \frac{3}{4}|0\rangle\langle 0| + \frac{1}{4}|1\rangle\langle 1| \tag{3.94}$$

Dakle, dva različita ansambla stanja mogu dati istu matricu gustine. Stoga se iz oblika matrice gustine ne može doneti zaključak o nekom privilegovanom ansamblu stanja [2].

Prilikom razmatranja termodinamičkih problema sistema u termodinamičkoj ravnoteži, doduše, pogodnije je koristiti malo drugačiji oblik matrice gustine. Matrica gustine sistema u stanju termodinamičke ravnoteže karakteriše se termalnom distribucijom u populaciji kvantnih stanja [21]:

$$p_n = \frac{e^{-\beta E_n}}{Z} \tag{3.95}$$

gde je Z particiona funkcija oblika:

$$Z = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H}) \tag{3.96}$$

H hamiltonijan problema, E_n njegove svojstvene energije, a $\beta = \frac{1}{k_B T}$. Tako je matrica gustine u ovom slučaju [21]:

$$\rho_{eq} = \frac{e^{-\beta H}}{Z} \tag{3.97}$$

Na ovaj način je u problem uneto i razmatranje termalnih svojstava posredstvom temperature T. Ova ideja posebno će biti značajna prilikom razmatranja kako temperatura utiče na određene kvantno-informatičke veličine.

3.6 Redukovana matrica gustine

Ispostavlja se da matrica gustine nije sredstvo od iznimne važnosti samo za određivanje sistema i njegove evolucije, već i koristan alat u razlučivanju njegovih kompozitnih delova. U tom svojstvu koristi se takozvana redukovana matrica gustine.

Neka su prisutna dva fizička podsistema A i B u sistemu opisanom matricom gustine ρ^{AB}. Redukovana matrica gustine podsistema A je u tom slučaju [2]:

$$\rho^A = \mathrm{Tr}_B(\rho^{AB}) \tag{3.98}$$

gde je Tr_B parcijalni trag po podsistemu B, koji se definiše u obliku:

$$\mathrm{Tr}_B\big(|a_1\rangle\langle a_2| \otimes |b_1\rangle\langle b_2|\big) = |a_1\rangle\langle a_2|\,\mathrm{Tr}(|b_1\rangle\langle b_2|) \tag{3.99}$$

gde su $|a_1\rangle$ i $|a_2\rangle$ dva vektora iz podsistema A, a $|b_1\rangle$ i $|b_2\rangle$ dva vektora iz podsistema B. Naravno, analogne relacije važe i za redukovanu matricu gustine podsistema B uz zamenu $A \rightleftarrows B$ i $|a_1\rangle, |a_2\rangle \rightleftarrows |b_1\rangle, |b_2\rangle$.

Pošto je u samom praktičnom delu rađeno sa konkretnim matricama, i ovde će biti pogodno formulisati određene matrice proizvoljne forme i razmatrati šta traženje parcijalnog traga po jednom podsistemu znači zapravo. Naime, neka su date matrice $\mathcal{A}$ podsistema A i $\mathcal{B}$ podsistema B u formi 2×2:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \tag{3.100}$$

Od interesa je naći trag matrice $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ u prostoru $A \otimes B$. Na osnovu prethodno uvedenog Kronekerovog proizvoda matrica (3.78), dobija se sledeće:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Tr}\big(\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}\big) = \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} a_{11}\mathcal{B} & a_{12}\mathcal{B} \\ a_{21}\mathcal{B} & a_{22}\mathcal{B} \end{bmatrix} = \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} = \\
= a_{11}b_{11} + a_{11}b_{22} + a_{22}b_{11} + a_{22}b_{22} = a_{11}\big(b_{11} + b_{22}\big) + a_{22}\big(b_{11} + b_{22}\big) = \\
= \big(a_{11} + a_{22}\big)\big(b_{11} + b_{22}\big) = \mathrm{Tr}\,\mathcal{A}\,\mathrm{Tr}\,\mathcal{B}
\end{aligned} \tag{3.101}$$

Dakle, ukoliko se relacija (3.101) uporedi sa relacijom (3.99) postaje jasno da parcijalni trag može predstavljati dobro matematičko sredstvo za eliminaciju stepeni slobode po određenom podsistemu. Ono što se uočava poređenjem relacija jeste činjenica da traženje parcijalnog traga po prostoru koji se sastoji od dva potprostora zapravo podrazumeva prosto izolovanje matrice prostora od interesa i njeno množenje tragom matrice u preostalom potprostoru. Kako je prethodno rasuđivanje važilo za proizvoljne dve matrice iz dva prostora A i B, važi i za redukovane matrice gustine dva podsistema. Doduše, u pitanju je još uvek matematički pristup, što ne treba izgubiti iz vida.

Međutim, ne postoji nijedan očiti razlog zašto baš parcijalni trag opisuje segment jednog složenog sistema. Tek podrobnije istraživanje može dati objašnjenje. Neka je M opservabla u podsistemu A i postoji uređaj kojim je moguće meriti M. Neka je $\tilde{M}$ odgovarajuća opservabla koja odgovara istom merenju u sistemu AB. Ako je sistem AB u stanju $|m\rangle \otimes |\Psi\rangle$, gde je $|m\rangle$ svojstveno stanje opservable M sa svojstvenom vednošću m, a $|\Psi\rangle$ proizvoljno stanje u podsistemu B, uređaj mora izmeriti m sa verovatnoćom 1 [2]. Stoga, ako je P_m projektor na prostor svojstvenih stanja opservable M, projektor za opservablu $\tilde{M}$ je $P_m \otimes I_B$, gde je I_B jedinični operator u podsistemu B [2]. Dakle:

$$\tilde{M} = \sum_m m P_m \otimes I_B = M \otimes I_B \tag{3.102}$$

Neka se sad merenje vrši u podsistemu A. Uslov konzistentnosti zahteva da usrednjene (merne) vrednosti budu iste bez obzira na to da li se računaju pomoću ρ^A ili ρ^{AB} [2]:

$$\mathrm{Tr}(M\rho^A) = \mathrm{Tr}(\tilde{M}\rho^{AB}) = \mathrm{Tr}\left((M \otimes I_B)\rho^{AB}\right) \tag{3.103}$$

Ispostavlja se da je baš $\rho^A = \mathrm{Tr}_B\, \rho^{AB}$ funkcija koja zadovoljava relaciju (3.103), što objašnjava zašto se baš parcijalni trag koristi prilikom opisivanja podsistema složene strukture [2]. Doduše, ovo razmatranje je uzelo u obzir dvokubitne sisteme sa dva podsistema, ali analogna priča važi i u slučaju trokubitnih sistema, o kojima će biti reči u praktičnom delu rada.

Kako se u praksi uglavnom radi u matričnom formalizmu, u cilju kreiranja pogodnog alata za rešavanje problema drugog dela rada, treba objasniti i praktični problem traženja parcijalnog traga u matričnoj formi. Recimo, za dvokubitni sistem, kako se sastoji od dva podsistema, postoje dve mogućnosti traženja parcijalnog traga [22].

$$\begin{aligned}\rho^A = \mathrm{Tr}_B \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{bmatrix} & \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{23} & \rho_{24} \end{bmatrix} \\ \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} \rho_{31} & \rho_{32} \\ \rho_{41} & \rho_{42} \end{bmatrix} & \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{43} & \rho_{44} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \rho_{11} + \rho_{22} & \rho_{13} + \rho_{24} \\ \rho_{31} + \rho_{42} & \rho_{33} + \rho_{44} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.104}$$

$$\begin{aligned}\rho^B = \mathrm{Tr}_A \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{13} \\ \rho_{31} & \rho_{33} \end{bmatrix} & \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} \rho_{12} & \rho_{14} \\ \rho_{32} & \rho_{34} \end{bmatrix} \\ \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} \rho_{21} & \rho_{23} \\ \rho_{41} & \rho_{43} \end{bmatrix} & \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} \rho_{22} & \rho_{24} \\ \rho_{42} & \rho_{44} \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \rho_{11} + \rho_{33} & \rho_{12} + \rho_{34} \\ \rho_{21} + \rho_{43} & \rho_{22} + \rho_{44} \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{3.105}$$

Međutim, zašto baš ovakav pristup traženju parcijalnog traga? U svrhu nalaženja dokaza da je baš ovaj račun korektan posmatraće se opet matrica $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ (od kompozitnih matrica (3.100)) iz prostora $A \otimes B$. Naime, na osnovu relacije (3.99), parcijalni trag po podsistemu B traži se na sledeći način:

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}_B\left(A \otimes B\right) = A\,\mathrm{Tr}_B\, B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\left(b_{11} + b_{22}\right) &= \\ = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{11}b_{22} & a_{12}b_{11} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{21}b_{22} & a_{22}b_{11} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}&\end{aligned} \tag{3.106}$$

što je, ukoliko se u obzir uzme da se parcijalni trag tražio po matrici:

$$\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & a_{12}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} & a_{22}b_{11} & a_{22}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{21}b_{22} & a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{bmatrix} \tag{3.107}$$

analogno dobijenoj relaciji (3.104). Analogno se traži i dokaz za validnost dobijene relacije (3.105).

$$\begin{aligned} \mathrm{Tr}_A \left(A \otimes B\right) = B \,\mathrm{Tr}_A A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \left(a_{11} + a_{22}\right) = \\ = \begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{11}a_{22} & b_{12}a_{11} + b_{12}a_{22} \\ b_{21}a_{11} + b_{21}a_{22} & b_{22}a_{11} + b_{22}a_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{3.108}$$

Relacija (3.108) analogna je relaciji (3.105).

Ovime je i zvanično uveden neophodan aparat kvantne mehanike u kvantnoj informatici. Sada može da se napravi kratak uvod u probleme kvantne informatike s obzirom na to da je neophodno tlo već postavljeno.

4 Baza kvantno-informatičkog razmatranja

Kratki istorijski osvrt na razvoj kvantne informatike dao je dobru ideju o mestima kojih se treba dotaći, činjenicama koje treba obrazložiti, veličinama kojima se treba baviti. Shodno tome, u drugom poglavlju predstavljeni su temelji, predočeni osnovni aspekti kvantne mehanike, koji su duboko zamršeni sa samim temeljima kvantne informatike. Zapravo, igra reči nije slučajna s obzirom na to da će ovo poglavlje u najvećoj meri biti posvećeno pojmu kvantne zamršenosti, ali i brojnim zakonitostima i prednostima kojima kvantna informatika prednjači u odnosu na klasičnu.

4.1 Zamršena stanja. Belov bazis

Kvantna zamršenost predstavlja svojstvo dva ili više kvantnih sistema da poseduju korelacije koje nije moguće objasniti klasičnom fizikom [17]. Danas predstavlja jednu od najintrigantnijih i najispitivanijih oblasti kvantne informatike. Najpogodniji način definisanja pojma zamršenih stanja jeste posredstvom Šmitove dekompozicije.

Neka su data dva proizvoljna bazisa $\{|v_i\rangle\}$ Hilbertovog prostora V i $\{|w_i\rangle\}$ Hilbertovog prostora W. Tada ma koje čisto stanje iz Hilbertovog prostora $V \otimes W$ može biti predstavljeno pomoću tenzorskog proizvoda oblika [23]:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j} d_{ij} |v_i\rangle \otimes |w_j\rangle \tag{4.1}$$

Koeficijenti razvoja d_{ij} dati su kao preklapanja stanja $|\Psi\rangle$ sa bazisnim vektorima, odnosno [23]:

$$d_{ij} = \langle v_i| \otimes \langle w_j|\Psi\rangle \tag{4.2}$$

Ako se sada izvrše promene bazisa pomoću lokalnih unitarnih transformacija U i Y:

$$|\tilde{v}_i\rangle = U|v_i\rangle, \;\; |\tilde{w_i}\rangle = Y|w_i\rangle, \;\; \forall i \tag{4.3}$$

koeficijenti se menjaju prema obrascu:

$$\begin{aligned}\tilde{d}_{ij} &= \langle\tilde{v}_i| \otimes \langle\tilde{w}_j|\Psi\rangle = \langle v_i|U^\dagger \otimes \langle w_j|Y^\dagger|\Psi\rangle = \\ &= \sum_{p,q}\langle v_i|U^\dagger|v_p\rangle\langle w_j|Y^\dagger|w_q\rangle\langle v_p| \otimes \langle w_q|\Psi\rangle = \\ &= (udy)_{ij}\end{aligned} \tag{4.4}$$

gde je iskorišćena relacija kompletnosti $\sum_i |v_i\rangle\langle v_i| = \sum_i |w_i\rangle\langle w_i| = 1$ i uzete oznake:

$$u_{ip} = \langle v_i|U^\dagger|v_p\rangle, \;\; y_{qj} = \langle w_j|Y^\dagger|w_q\rangle \tag{4.5}$$

U novom bazisu stanje (4.1) predstavljeno je relacijom:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i,j}(udy)_{ij}|\tilde{v}_i\rangle \otimes |\tilde{w}_j\rangle \tag{4.6}$$

Kako za svaku kompleksnu matricu D postoje unitarne transformacije U i Y koje je prevode u dijagonalnu formu, polazno stanje (4.1) može se zapisati u obliku [23]:

$$|\Psi\rangle = \sum_i \sqrt{\lambda_i}|v_i^S\rangle \otimes |w_i^S\rangle \tag{4.7}$$

gde su $\lambda_i = S_i^2$ Šmitovi koeficijenti. Za svako stanje $|\Psi\rangle$ ovi koeficijenti su jedinstveni [23]. Oni takođe nose informaciju o prirodi stanja. Ukoliko postoji samo jedan Šmitov koeficijent različit od nule, u pitanju je separabilno stanje [23]. U svim drugim slučajevima stanje je zamršeno.

Možda i najpoznatija zamršena stanja jesu Belova stanja, koja su često u upotrebi u kvantnoj informatici. Naime, ukoliko se posmatraju dva kubita, analogno klasičnom slučaju, postoje četiri kombinacije dobijene tenzorskim proizvodom stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$ [2]. U pitanju su stanja:

$$|0\rangle \otimes |0\rangle = |00\rangle \tag{4.8}$$

$$|0\rangle \otimes |1\rangle = |01\rangle \tag{4.9}$$

$$|1\rangle \otimes |0\rangle = |10\rangle \tag{4.10}$$

$$|1\rangle \otimes |1\rangle = |11\rangle \tag{4.11}$$

gde su stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$ data u već poznatoj formi:

$$|0\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}, \;\; |1\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \tag{4.12}$$

U kvantnoj mehanici, kako je već i nagovešteno, dozvoljene su kombinacije ovih stanja. U slučaju Belovog bazisa u pitanju su sledeća ortonormirana stanja u četvorodimenzionom Hilbertovom prostoru [24]:

$$|\Phi^\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle \pm |11\rangle\big) \tag{4.13}$$

$$|\Psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|01\rangle \pm |10\rangle\big) \tag{4.14}$$

Ono što je karakteristično za Belova stanja jeste to što se dejstvom Paulijevih matrica mogu prevesti u drugo stanje bazisa [23]. Recimo, stanje $|\Phi^+\rangle$ je u matričnoj formi:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{4.15}$$

Ukoliko na njega deluje matrica oblika:

$$\sigma^x \otimes I = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{4.16}$$

dobija se stanje $|\Psi^+\rangle$ [24]:

$$\begin{aligned}\big(\sigma^x \otimes I\big)|\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\1\\0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle \otimes |1\rangle + |1\rangle \otimes |0\rangle\big) = |\Psi^+\rangle\end{aligned} \tag{4.17}$$

Na sličan način se i ostala stanja mogu dobiti [25]:

$$\big(\sigma^z\sigma^x \otimes I\big)|\Phi^+\rangle = |\Psi^-\rangle,\ \ \big(\sigma^z \otimes I\big)|\Phi^+\rangle = |\Phi^-\rangle \tag{4.18}$$

Od interesa je i naći dokaz zamršenosti stanja Belovog bazisa. Najpre se može pretpostaviti suprotno - da su stanja separabilna. U tom slučaju bi se stanje $|\Phi^+\rangle$ moglo predstaviti u obliku tenzorskog proizvoda dva stanja u formi $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ [17].

$$\begin{aligned}|\Phi^+\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|00\rangle + |11\rangle\big) = \big(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\big) \otimes \big(\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle\big) = \\ &= \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle\end{aligned} \tag{4.19}$$

Dakle, da bi stanje $|\Phi^+\rangle$ definisano relacijom (4.13) zadovoljavalo uslov separabilnosti, u proizvodima $\alpha\delta$ i $\beta\gamma$ bar po jedan član mora biti jednak nuli, što nije moguće jer se ne uklapa u uslov $\alpha\gamma = \beta\delta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ [17]. Stoga Belova stanja nisu separabilna, no zamršena.

Na ovaj način uveden je najčešće korišćeni bazis u dvokubitnim sistemima kvantne informatike. U nastavku poglavlja biće prikazane i neke od mogućnosti koje korišćenje ovog bazisa pruža u oblasti kvantne zamršenosti.

4.2 Nemogućnost kloniranja

Osnovna ideja bavljenja teorijom kvantne informatike jeste činjenica da sama primena kvantne mehanike otvara vrata novim opcijama, nepostojećim u klasičnim razmatranjima. Recimo, bilo je već reči o mogućnosti registrovanja zamršenih stanja, nepostojećih u klasičnom svetu, ali i principu formiranja matrice gustine, koji uveliko olakšava brojne probleme u kvantnoj informatici. Jedna od pojava koje svog analoga ne mogu pronaći u klasičnom svetu jeste teorema o nemogućnosti kloniranja.

Naime, teorema kaže da je u kvantnoj mehanici nemoguće klonirati takozvana nepoznata stanja [17]. To praktično znači da, ukoliko je dato kvantno stanje $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, sa nepoznatim koeficijentima α i β, onda je nemoguće stvoriti dve kopije $|\Psi\rangle \otimes |\Psi\rangle$ stanja $|\Psi\rangle$ [17]. Naravno, u istinitost ove teoreme može se uveriti, i to na osnovu dva jednostavna dokaza.

Naime, pretpostavka je da postoji univerzalna operacija koja vrši kloniranje stanja predstavljena unitarnim operatorom U [17]. U tom slučaju U vrši kloniranja sledećih stanja:

$$U|0\rangle = |00\rangle \tag{4.20}$$

$$U|1\rangle = |11\rangle \tag{4.21}$$

Ako se ista operacija primeni na proizvoljno stanje $|\Psi\rangle$, uzimajući u obzir linearnost unitarne operacije u matričnoj formi, dobija se sledeći izraz [17]:

$$U|\Psi\rangle = \alpha U|0\rangle + \beta U|1\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \tag{4.22}$$

Sa druge strane, s obzirom na univerzalnost unitarnog operatora, njegovo dejstvo na stanje $|\Psi\rangle$ trebalo bi biti istog oblika kao u jednačinama (4.20) i (4.21) [17]. Dakle, rezultat bi trebalo da bude:

$$\begin{aligned} U|\Psi\rangle &= \big(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\big) \otimes \big(\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle\big) = \\ &= \alpha^2|00\rangle + \alpha\beta|01\rangle + \alpha\beta|10\rangle + \beta^2|11\rangle \end{aligned} \tag{4.23}$$

što se očito ne poklapa sa relacijom (4.22) za proizvoljne koeficijente α i β. Sa druge strane, operacija U bi proizvela traženo dejstvo za tačno određene vrednosti koeficijenta - $\alpha = 1$ i $\beta = 0$ ili $\beta = 1$ i $\alpha = 0$, tako da očito postoje neki uslovi koji moraju biti ispunjeni da bi kloniranje bilo moguće.

Međutim, pristup potreban za nalaženje ovih uslova malo je drugačiji od prethodnog razmatranja. Naime, sada se posmatraju dva stanja proizvoljne prirode na koja deluje ista operacija kopiranja. Neka je početno stanje uređaja $|0\rangle$ i cilj je prekopirati stanja $|\Psi\rangle$ i $|\Phi\rangle$ na poziciju polaznog stanja:

$$|\Psi\rangle \otimes |0\rangle \xrightarrow{U} |\Psi\rangle \otimes |\Psi\rangle \tag{4.24}$$

$$|\Phi\rangle \otimes |0\rangle \xrightarrow{U} |\Phi\rangle \otimes |\Phi\rangle \tag{4.25}$$

Kako unitarna operacija očuvava unutrašnji proizvod s obzirom na osobinu (3.50), uslov postaje:

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \langle\Psi|\Phi\rangle\langle\Psi|\Phi\rangle \tag{4.26}$$

uzevši u obzir (3.77), što znači da postoje ograničavajuće okolnosti pri kojima je kopiranje moguće. Shodno relaciji (4.26), uslov je ispunjen samo ako su u pitanju ortogonalna ili identična stanja, kada relacija (4.26) poprima oblik $0 = 0$ ili $1 = 1$ [24]. Međutim, u tom slučaju nije reč o nepoznatim stanjima, na koja se teorema o kloniranju i odnosi [24].

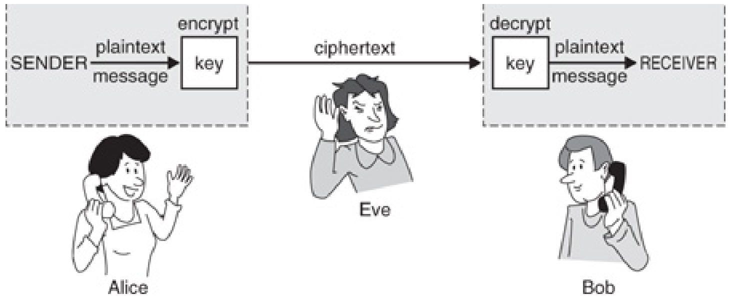
Teorema je, inače, nastala 1982. godine i razvili su je zasebno Diks i Vuters i Zurek [24]. Naravno, iz nje su izopštena poznata stanja, kao što je i objašnjeno, pošto je tada samo potrebno uređaj postaviti u ciljano stanje [24]. Dakle, sa jedne strane, teorema se može predstaviti kao nemogućnost reprodukovanja stanja prvog sistema u okviru drugog sistema, izuzev u slučaju kada se ograničava na ortogonalna polazna stanja prvog sistema. Ovo je svakako u suprotnosti sa klasičnom teorijom informacija, gde mašine, poput fotokopir mašine, bez ograničenja kopiraju željeni primerak [24].

Treba uočiti još nekoliko zanimljivih detalja. Činjenica da set čistih stanja može biti kopiran samo ako su ona uzajamno ortogonalna ekvivalentna je činjenici da su čista stanja razlučiva samo ako su ortogonalna [25]. Dakle, ako se dva stanja mogu razlikovati, mogu se i kopirati. U tom slučaju bilo bi moguće načiniti bezgranično mnogo kopija stanja i eksperimentalno ga u potpunosti odrediti [25]. Za stanja na koja se teorema odnosi to znači da postoji samo ograničen broj informacija koje se mogu dobiti o njima. Naravno, ove činjenice posledica su kvantne mehanike i narušenja stanja mernog sistema interakcijom sa mernim uređajem [17]. Međutim, ispostavlja se da ova teorema nema samo nepovoljna dejstva. Zapravo, predstavlja bazu za oblast kvantne kriptografije.

4.3 Kvantna kriptografija

Već je rečeno da je kriptografija sredstvo koje omogućava tajno komuniciranje između dve stranke. U prethodnoj sekciji uvedena je i detaljnije objašnjena teorema o nemogućnosti kloniranja, koja čini i srž kvantne kriptografije. Zapravo, kako se kvantna kriptografija zasniva na stvaranju tajnog ključa baziranog na nulama i jedinicama, te na osnovu pređašnjeg spomena o zabrani kloniranja, postaje očigledno da će ključ za rešenje problema biti izbor bazisa u kojima se odvijaju merenja [17].

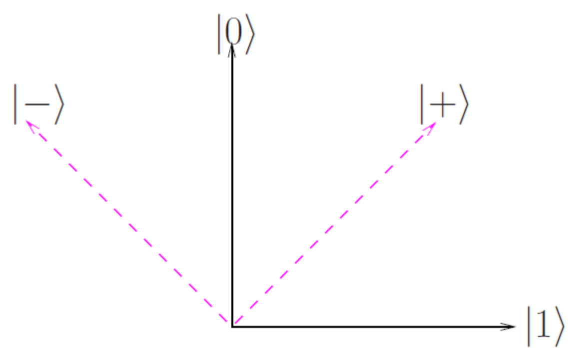
Ideja je, zapravo, prilično jednostavna. Alisa i Bob su veoma udaljeni jedno od drugog, ali u mogućnosti da šalju poruke putem kvantnih kanala. Doduše, iako žele da komuniciraju međusobno, istovremeno žele da to bude privatan razgovor, te je neophodno naći način da jedine osobe koje razumeju poruku budu oni. I Alisa je pronašla način. Poslaće Bobu poruku putem kvantnog kanala u vidu kubitnih stanja nasumično pripremljenih u dva bazisa [26]. Bob će potom primiti Alisinu poruku i u ista dva bazisa, opet nasumično birana, vršiće merenja [26]. Potom će Alisa i Bob javno razmeniti informacije o bazisima korišćenim da spreme ili izmere svaki razmenjeni kubit informacije [26]. To će se desiti u otprilike 50% situacija i ti rezultati biće zadržani [26]. Međutim, ako se u priču ubaci i treće lice, nadalje nazvano Eva, čiji je cilj da presretne Alisinu poruku Bobu i dešifruje je pre njega, situacija se komplikuje. Doduše, Eva ne računa da će joj kvantna mehanika pokvariti planove, što se ispostavlja kao velika greška. Zakoni kvantne mehanike omogućavaju Alisi i Bobu da prepoznaju prisluškivača i prekinu komunikaciju putem kanala koji očito nije bezbedan.



Slika 2. Skica tajne komunikacije između Boba i Alise. Eva pokušava da prisluškuje njihov razgovor, ali je zakonitosti kvantne mehanike odaju. Slika je preuzeta sa [27].

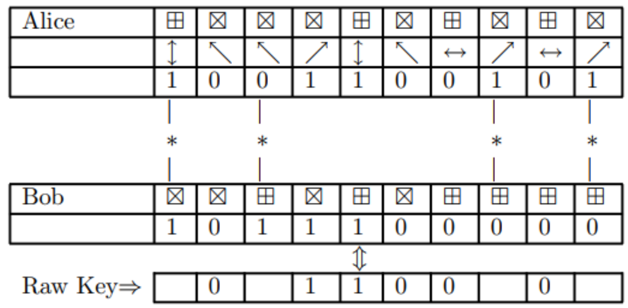
Međutim, ovo je samo pozadina priče. Kakva fizika leži iza Bobovog i Alisinog sporazumevanja? Za početak, Alisa koristi dva bazisa u kojima šalje podatke. Zapravo, u pitanju je slanje fotona u jednoj od četiri polarizacije po kubitu, kojima su pripisana stanja nula i jedinica [17]. Dva bazisa govore i o izboru neortogonalnih stanja ovim putem, te ova stanja nisu razlučiva ni od strane Eve, ni od strane Boba, ali je baš ova osobina ta koja omogućava prepoznavanje treće stranke u sistemu [17].

Naveden princip komunikacije naziva se BB84 protokol u čast naučnika Benea i Brasarda, koji su i došli do ove ideje 1984. godine [17]. Kao primer se obično uzima da se kubiti pripremaju u dve vrste bazisa - bazisu $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ i Adamarovom bazisu stanja $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ [17]. Skica biranih bazisa (i sa time četiri polarizacije) nalazi se na slici 3.



Slika 3. Odabrani bazisi u kojima Alisa i Bob spremaju i mere stanja. Slika je preuzeta iz [17].

Na slici 4 nalazi se primer razmenjenih kubita između Boba i Alise, odnosno primer komuniciranja kakav se zaista može odviti putem mešavine kvantnih i klasičnih kanala. Bazis $\boxtimes$ predstavlja bazis Adamarovih stanja, a bazis $\boxplus$ bazis $\{|0\rangle, |1\rangle\}$, kao što i odgovara prikazu sa slike 3. Prvi korak je da Alisa i Bob nasumično izaberu bazise za različita merenja [28]. Takođe, po dogovoru, stanjima $|0\rangle$ i $|-\rangle$ pripojen je bit 0, a stanju $|1\rangle$ i $|+\rangle$ pripisan je bit 1 [28]. Pri tome treba napomenuti da se merenjem stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$ u bazisu $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ sa jednakom verovatnoćom kao rezultat dobijaju stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$, a merenjem $|+\rangle$ i $|-\rangle$ u bazisu $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ sa jednakom verovatnoćom izniču $|0\rangle$ i $|1\rangle$, što je u skladu sa relacijama (3.56) i (3.57) [17]. Ovo je praktično i razlog zašto Bob i Alisa veruju samo rezultatima merenim u istom bazisu, a ostale odbacuju. Informacije o bazisima u kojima su vršena merenja Bob i Alisa razmenjuju putem javnog, klasičnog kanala [17].



Slika 4. Primer razmene informacija između Boba i Alise. Slika je preuzeta iz [28].

Rezultat javne razmene putem klasičnog kanala jeste dobijanje konačnog ključa. On nastaje prostim upoređivanjem Alisinog i Bobovog ključa. Najpre Bob obavesti Alisu o bazisima u kojima je merio, i potom mu Alisa saopšti koji bazisi im se poklapaju [28]. Krajnji korak je nasumično poređenje Alisinih i Bobovih zadržanih stanja nakon eliminacije usled razlike u bazisima [28]. Ukoliko u konačnom ključu ne dolazi do razmimoilaženja u rešenjima, Alisa i Bob su zaista uspešno tajno komunicirali. Međutim, ukoliko su greške prisutne, neko se očito ubacio u Alisinu i Bobovu tajnu mrežu. Ukoliko poruku upućenu Bobu presretne Eva, njena merenja perturbuju Alisine poslate poruke i Alisa i Bob mogu registrovati izvesna nepoklapanja u konačnom ključu [28]. Naime, Evine šanse da pogodi koji je bazis Alisa koristila su, kao i Bobove, 50 : 50 (ukoliko Eva zna koja dva bazisa Alisa i Bob koriste, a to zna jer su njih dvoje pre odabira bazisa ovu informaciju morali razmeniti klasičnim putem) [17]. Ovo potom dovodi do statistike da se, s obzirom na to da su i Bobove šanse da odabere bazise kao Alisa 50 : 50, verovatnoća poklapanja Alisinog i Bobovog konačnog ključa smanji na 25% [17]. Na ovaj način Bob i Alisa mogu biti obavešteni o mogućem narušenju privatnosti njihove komunikacije i ovaj opis, iako elementaran, praktično predstavlja skelet kvantne kriptografije.

4.4 Kvantna teleportacija

Osnovni cilj teoreme o zabrani kloniranja jeste da u oblasti kvantne informatike opiše koja je stanja moguće kopirati i razmeniti sa drugim sistemom, a koja ne. Neka su opet prisutne dve stranke iz prethodne sekcije - Alisa i Bob. Alisa sada želi da prosledi Bobu kubit u stanju $|\Psi\rangle$. Ako Alisa poznaje svoje stanje, odnosno u njegovoj formulaciji nema nepoznatih faktora, onda veoma jednostavno može sa Bobom razmeniti klasičnu informaciju o stanju koje poseduje, te preostaje samo da i on pripremi sistem u istom stanju [26]. Međutim, ukoliko je samoj Alisi nepoznato stanje u kom se njen sistem nalazi, teorema o nemogućnosti kloniranja kaže da nije moguće napraviti kopije tog stanja i na njima izvršiti merenja kako bi ih u potpunosti utvrdila. Naravno, isto važi i za Boba. Međutim, da li ipak postoji neka procedura koja bi omogućila razmenu nepoznatog stanja kubita između dve stranke?

Ispostavlja se da postoji. Bene je 1993. godine izneo ideju o kvantnoj teleportaciji, koja predstavlja donekle zaobilazni put u rešavanju ovog problema [26]. U ovom slučaju, zamršena stanja su ta koja obavljaju posao.

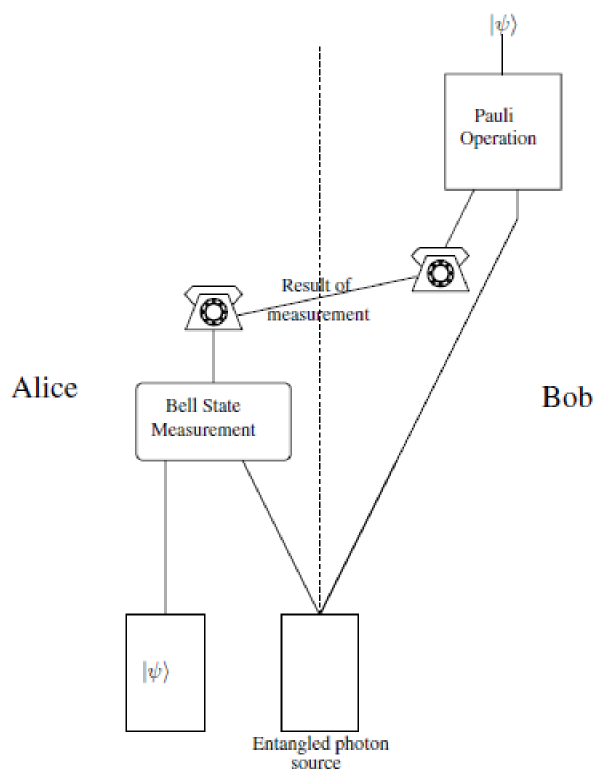
Naime, neka Alisa poseduje kubit u stanju:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{4.27}$$

sa nepoznatim koeficijentima α i β. Ovo je stanje koje Alisa želi proslediti Bobu, ali joj zakoni kvantne mehanike zabranjuju da to učini putem kloniranja. Ni Alisa ni Bob nemaju pristupa kubitima onog drugog, ali im je dozvoljeno komuniciranje putem klasičnog kanala [25]. Takođe, što je i ključna stvar u celokupnoj problematici, Bob poseduje jedan kubit, a Alisa još jedan pored onog koji želi poslati, a Bobov kubit i Alisin drugi kubit ispreplitani su i dele dvokubitno zamršeno stanje [25]. Neka je to stanje baš Belovo stanje:

$$|\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle\big) \tag{4.28}$$

Ispostavlja se da Alisa i Bob klasičnom komunikacijom mogu da pripišu nepoznato stanje $|\Psi\rangle$ Bobovom udelu u zamršenom stanju [25]. Ovim procesom se svakako ne narušava validnost spomenute teoreme stoga što se bilo koji sadržaj stanja $|\Psi\rangle$ u bilo kom od Alisina dva kubita ovim putem gubi, te ne postoje dve kopije stanja [25]. Kvantna teleportacija stanja iz Alisinog sistema u Bobov sistem eliminiše i tragove zamršenosti iz deljenog dvokubitnog stanja [25]. Šema procesa kvantne teleportacije prikazana je na slici 5.



Slika 5. Šematski prikaz kvantne teleportacije stanja između Alise i Boba. Slika je preuzeta iz [17].

Prvi korak je naći trokubitno stanje Alisinog i Bobovog sistema. A će ubuduće biti oznaka za Alisin, a B za Bobov sistem.

$$
\begin{aligned}
|\Psi\rangle_A \otimes |\Phi^+\rangle_{AB} &= \big(\alpha|0\rangle_A + \beta|1\rangle_A\big) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle_A \otimes |0\rangle_B + |1\rangle_A \otimes |1\rangle_B\big) = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\alpha|0_A 0_A 0_B\rangle + \alpha|0_A 1_A 1_B\rangle + \beta|1_A 0_A 0_B\rangle + \beta|1_A 1_A 1_B\rangle\big) = \\
&= \frac{1}{2}\big(|\Phi^+\rangle_{AA} \otimes (\alpha|0\rangle_B + \beta|1\rangle_B) + |\Phi^-\rangle_{AA} \otimes (\alpha|0\rangle_B - \beta|1\rangle_B) \\
&+ |\Psi^+\rangle_{AA} \otimes (\alpha|1\rangle_B + \beta|0\rangle_B) + |\Psi^-\rangle_{AA} \otimes (\alpha|1\rangle_B - \beta|0\rangle_B)\big)
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

Može se uočiti da su Alisini kubiti zamršeni, dok se zamršenost između Bobovih i Alisinih kubita u potpunosti rasplela [17]. Zapravo, Bobova stanja se jednostavnim transformacijama, pomoću Paulijevih matrica, mogu prevesti u nepoznato stanje $|\Psi\rangle$. Te transformacije prikazane su na slici 6.

Alice's measurement	Bob's state	Bob's operation
$\|\Phi^+\rangle$	$\alpha\|0\rangle + \beta\|1\rangle$	I
$\|\Phi^-\rangle$	$\alpha\|0\rangle - \beta\|1\rangle$	σ_3
$\|\Psi^+\rangle$	$\alpha\|1\rangle + \beta\|0\rangle$	σ_1
$\|\Psi^-\rangle$	$\alpha\|1\rangle - \beta\|0\rangle$	$\sigma_1\sigma_3$

Slika 6. Operacije koje prevode Bobovo stanje iz seta stanja u relaciji (4.29) u stanje (4.27). I je jedinična matrica, a Paulijeve matrice su: $\sigma_1 = \sigma^x, \sigma_2 = \sigma^y, \sigma_3 = \sigma^z$. Slika je preuzeta iz [17].

Sada je još neophodno da Alisa izvrši merenja svojih zamršenih stanja u Belovom bazisu i ako dobije rezultat $|\Phi^+\rangle$, Bobov kubit zaista poseduje teleportovano stanje $|\Psi\rangle$ [17]. Za ostale rezultate Alisinog merenja - $|\Phi^-\rangle$, $|\Psi^+\rangle$ i $|\Psi^-\rangle$, Bob najpre mora izvršiti predstavljene transformacije da bi došao do željenog stanja. Informacije o izmerenim stanjima Alisa dostavlja Bobu klasičnim putem [17].

Dakle, iako kopiranje nepoznatih stanja u kvantnoj mehanici nije moguće, njihova teleportacija jeste. Jedini i ključni uslov je da dve stranke imaju zamršeno stanje i bar 3 kubita [25].

4.5 "Gusto" kodiranje

Ispostavlja se da kvantna zamršenost nema ključnu ulogu samo u procesu teleportacije. Zapravo, kvantna zamršenost predstavlja ključan izvor informacije i ima udeo u takozvanom "gustom" kodiranju. Naime, ako Alisa poseduje jedan kubit sa udelom u zamršenom stanju koje deli sa Bobom i njegovim kubitom, onda je moguće da mu ona, nakon spremanja svog kubita, pošalje dva bita informacije slanjem samo jednog kubita [17]. Ideju je izneo Visner 1992. godine i nazvao je "gustim" kodiranjem usled načina slanja informacije [26].

Neka Bob i Alisa dele sledeće Belovo stanje:

$$
|\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle\big) \tag{4.30}
$$

Od četiri međusobno ortogonalna stanja, sva četiri mogu se dobiti pogodnim dejstvom Pauli-jevih matrica i jedinične matrice na dato zamršeno stanje, o čemu je već bilo reči.

$$I_A \otimes I_B|\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle\big) = |\Phi^+\rangle_{AB} \tag{4.31}$$

$$\sigma_A^x \otimes I_B|\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0_A 1_B\rangle + |1_A 0_B\rangle\big) = |\Psi^+\rangle_{AB} \tag{4.32}$$

$$\sigma_A^z \otimes I_B|\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0_A 0_B\rangle - |1_A 1_B\rangle\big) = |\Phi^-\rangle_{AB} \tag{4.33}$$

$$\big(\sigma^z\sigma^x\big)_A \otimes I_B|\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0_A 1_B\rangle - |1_A 0_B\rangle\big) = |\Psi^-\rangle_{AB} \tag{4.34}$$

Dakle, Alisa pogodnim odabirom matrice deluje na kubit, te ovakvim principom ona šalje Bobu samo jedan kubit, ali taj kubit sadrži dva bita informacije. Bob nakon primljenog kubita od Alise vrši merenja oba njihova kubita u Belovom bazisu stanja [17]. S obzirom na to da su u piitanju ortogonalna stanja, Bob je u mogućnosti da razlikuje stanja i identifikuje operacije koje je Alisa izvršila [17].

Ovu metodu je praktično veoma teško implementirati i stoga njen značaj u komunikacijama nije veliki [26]. Međutim, nudi vezu između kvantne i klasične informacije pomoću kvantne zamršenosti, te ima ulogu u razumevanju samih pojava.

4.6 EPR paradoks

Kao što je već rečeno, kvantna mehanika prolazila je kroz burne svetle i mračne tačke prilikom svog razvoja. Oduvek su se u njenom slučaju javljale dve struje naučnika - oni puni vere u mogućnosti i obašnjenja koja pruža, ali i oni koji su je dovodili u pitanje. Naravno, i jedna i druga strana su preko potrebne, jer nijedna teorija ne dostiže svoj maksimum dok ne bude dovedena u pitanje i proverena.

Dosada su prikazane vode ljudi koji su iskoristili kvantnu mehaniku da stvore jednu još uvek mladu, ali i iznimno zamršenu oblast kakva je kvantna informatika. Međutim, iako su dosad prikazana uspešna poglavlja kvantne mehanike, ranije godine njenog razvoja bile su pune sumnje u njenu delatnost. Godine 1935. tri naučnika - Albert Ajnštajn, Boris Podolski i Nejtan Rozen, osmislili su mali misaoni eksperiment, koji je kasnije dobio naziv na osnovu njihovih imena, u cilju da dokažu nekompletnost kvantne mehanike [17, 29]. Dakle, oni su praktično izrazili sumnju u to da kvantna mehanika može da opiše baš svaku pojavu u realnom svetu [17].

Sama suština EPR paradoksa sastoji se u tome da se formira dovoljan uslov da neka veličina bude element realnosti kako bi bilo moguće predvideti njenu vrednost pre merenja [2]. Neka se, za početak, razmatra zamršen par kubita, koji pripadaju Alisi i Bobu. Neka je u pitanju Belovo stanje:

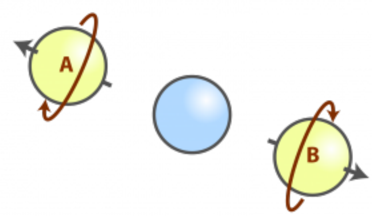
$$|\Psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0_A 1_B\rangle - |1_A 0_B\rangle\big) \tag{4.35}$$

Neka su Alisa i Bob veoma udaljeni jedno od drugog i neka Alisa meri spin duž proizvoljne $\mathbf{l}$ ose, to jest meri opservablu $\mathbf{l} \cdot \sigma$ i dobija rezultat $+1$ i -1 za svaki kubit [2]. Ispostavlja se da će rezultati mereni na dva kubita biti suprotni ako i Bob meri u istom pravcu [2]. To bi praktično značilo da drugi kubit već zna koji će biti rezultat merenja prvog bez obzira na to kako se prvi meri stoga što ova informacija prosto nije imala kad doći do drugog kubita. Naravno, analogna razmatranja važe i za druga Belova stanja. Recimo, ako se uzme stanje:

$$|\Phi^+\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0_A 0_B\rangle + |1_A 1_B\rangle\big) \tag{4.36}$$

postaje očito da merenjem Alisinog spina (kubita) u datom pravcu i dobijanjem kao rezultata $+1$ rezultat Bobovog merenja daje takođe $+1$, a isto važi i za dobijanje rezultata -1 od strane oba lica ukoliko je Alisa ostvarila rezultat -1 u svom sistemu [17].

Međutim, treba uočiti da u slučajevima nije bilo spomena o razdaljini između Bobovog i Alisinog kubita, sem da ona može biti veoma velika, pa i nekoliko svetlosnih godina. Ajnštajnova teorija relativnosti je do tada već bila razvijena, a kao jedna stavka, iznikla je činjenica da ništa ne putuje brže od svetlosti [2]. To je upravo ono što je tri naučnika i bunilo. Ako se ne napusti princip relativnosti, očito se javlja velika rupa u teoriji. Kako bi inače bilo moguće objasniti da Bobov spin (kubit) zna u kom smeru da se postavi odmah pri vršenju merenja na Alisinom spinu? Ajnštajn je smatrao da je ovo očito narušenje relativnosti [2].



Slika 7. Osnovni problem EPR paradoksa - da li je moguće merenjem jednog spina automatski znati stanje drugog, udaljenog. Slika je preuzeta sa [30].

Drugačije rečeno, s obzirom na Hajzenbergov princip neodređenosti, nemoguće je istovremeno znati poziciju i impuls čestice u istom stanju [31]. Međutim, u smislu EPR paradoksa uveden je pojam lokalnosti, koji kaže da je nemoguće da jedna čestica utiče na neku drugu, udaljenu [31]. Zaključak tri naučnika bio je da je druga čestica morala imati determinisane vrednosti i pozicije i spina pre merenja [31]. Međutim, ovaj zaključak nije u skladu sa kvantnom mehanikom.

Konačan zaključak Ajnštajna, Podolskog i Rozena bio je da kvantna teorija nije kompletna pošto joj je, prema njihovom mišljenju, nedostajao takozvani element realnosti [2]. Naime, ovaj pojam zasnovali su na tome da ako se, bez delovanja na sistem, može predvideti sa sigurnošću vrednost nekog fizičkog parametra, onda postoji određeni element fizičke realnosti koji odgovara datoj veličini [29]. Na neki način, predlog tri naučnika bio je povratak na klasičnu verziju zakona, gde se sistemu pripisuju veličine bez obzira na merenja koja se vrše [2]. Međutim, većina naučnika ne prihvata njihovo podasve klasično viđenje kvantne mehanike i Džon Stjuart Bel uspeva da dobije niz nejednakosti koje bi važile u slučaju nepostojanja kvantne zamršenosti i važenja osnovnih EPR postavki [2]. Ove nejednakosti u eksperimentima su se pokazale narušenim i time potvrdile postojanje kvantne zamršenosti i važenje kvantno-mehaničkih zakona [17]. Stoga se radilo na redefinisanju Ajnštajnovog "avetinjskog dejstva na daljinu" (kako je on nazvao nelokalnu prirodu kvantne zamršenosti) [17], odnosno, lokalnost je u kvantnoj mehanici vezana za činjenicu da u različitim poljima ona ima različitu definiciju, pa se tako u kvantnoj teoriji polja odnosi na to da kvanti polja u različitim tačkama prostora ne interaguju [32]. Dakle, shvatanja su redefinisana, te je moguće izmeriti svojstva čestice merenjem njenog zamršenog para i održati kvantno-mehaničke zakone.

4.7 Belova nejednakost

Osnovni cilj razmatranja EPR paradoksa jeste isticanje moguće nekompletnosti teorije kvantne mehanike. Kako su se mnogi naučnici pozabavili ovom idejom u cilju da je pokažu tačnom ili netačnom, i Džon Stjuart Bel se 1964. godine upustio u ovaj poduhvat [26]. Njegovi rezultati bazirani su na činjenici da su razvijani u skladu sa pretpostavkama EPR paradoksa o fizičkoj realnosti i lokalnosti zajedno poznatim kao postavkom lokalnog realizma [2]. Dakle, kao prva je uzeta činjenica da svako merenje otkriva objektivno fizičko svojstvo sistema, koje postoji bez obzira na merenje, a kao drugo činjenica da merenja jednog sistema nemaju uticaja na drugi sistem, kao posledica konačnosti brzine svetlosti [17]. Zadatak je bio dobiti uslov koji mora važiti u slučaju validnosti ovih postavki i potom taj uslov proveriti eksperimentalno.

Ideja se zasniva na sledećem. Neka treća stranka pripremi dve čestice i prosledi ih Bobu i Alisi. Za razmatranje Belovih rezultata nije bitno na koji su način one pripremljene [2]. Kada Alisa primi svoju česticu, na njoj vrši merenja pomoću dva uređaja. Neka jednim uređajem meri veličinu označenu sa P_Q, a drugim P_R [2]. Takođe, pretpostavlja se da merenja mogu dati samo dva ishoda, $+1$ i -1 [2]. Vrednost Alisinog merenja P_Q je Q i, shodno polaznim postavkama, ne zavisi od merenja i objektivno je svojstvo čestice. Analogno razmatranje važi i za merenje vrednosti R merenjem svojstva P_R.

Slično Alisi, Bob meri svojstva P_S i P_T i registruje vrednosti S i T, koje mogu biti samo $+1$ i -1 [2]. I Bob i Alisa nasumično biraju koja će merenja vršiti [2]. Njihova merenja odvijaju se u isto vreme i stoga, prema pretpostavci razmatranja, rezultati jednog ne mogu uticati na merenja drugog. Posmatra se relacija [2]:

$$QS + RS + RT - QT = (Q + R)S + (R - Q)T \tag{4.37}$$

Kako vrednosti R i Q mogu biti samo $+1$ i -1, ili je $(Q + R)S = 0$, ili je $(R - Q)T = 0$. S obzirom na ovu činjenicu, relacija (4.37) mora biti jednaka ili $+2$ ili -2. Neka je $p(q, r, s, t)$ verovatnoća da pre merenja sistem bude u stanju $Q = q$, $R = r$, $S = s$ i $T = t$, što zavisi od pripreme čestica [2]. Srednja vrednost veličine (4.37) računa se kao [2]:

$$\begin{aligned} E(QS + RS + RT - QT) &= \sum_{q,r,s,t} p(q, r, s, t)\big(qs + rs + rt - qt\big) \\ &\leq \sum_{q,r,s,t} p(q, r, s, t) \cdot 2 = 2 \end{aligned} \tag{4.38}$$

usled činjenice da je $(Q+R)S+(R-Q)T=\pm 2$ i činjenice da je suma verovatnoća svih ishoda jednaka jedinici. Sa druge strane:

$$\begin{aligned} E(QS+RS+RT-QT) &= \sum_{q,r,s,t} p(q,r,s,t)qs + \sum_{q,r,s,t} p(q,r,s,t)rs \\ &+ \sum_{q,r,s,t} p(q,r,s,t)rt - \sum_{q,r,s,t} p(q,r,s,t)qt = \\ &= E(QS)+E(RS)+E(RT)-E(QT) \end{aligned} \tag{4.39}$$

Poređenjem relacija (4.38) i (4.39), može se uočiti Belova nejednakost:

$$E(QS)+E(RS)+E(RT)-E(QT) \leq 2 \tag{4.40}$$

Nejednakost (4.40) je, zapravo, jedna u nizu Belovih nejednakosti i, u ovom slučaju, radi se o CHSH nejednakosti nazvanoj prema njenim tvorcima - Džonu Klauzeru, Majklu Hornu, Abneru Šimoniju i Ričardu Holtu, koji su do njenog otkrića došli 1969. godine [33].

Ponavljanjem eksperimenta veliki broj puta, Alisa i Bob dobijaju vrednost leve strane relacije (4.40) [2]. Nakon sređivanja rezultata oni utvrđuju da li njihov eksperiment održava ili narušava Belovu nejednakost.

Šta to konkretno znači za misaoni eksperiment iz prethodne sekcije? Neka je pripremljeno stanje bilo zamršeno stanje:

$$|\Psi^-\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0_A 1_B\rangle - |1_A 0_B\rangle\big) \tag{4.41}$$

gde je A Alisin pripadni kubit, a B Bobov. Neka se mere sledeće opservable [2]:

$$\begin{aligned} Q &= \sigma_A^z \qquad S = \frac{-\sigma_B^z - \sigma_B^x}{\sqrt{2}} \\ R &= \sigma_A^x \qquad S = \frac{\sigma_B^z - \sigma_B^x}{\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{4.42}$$

Kalkulacijom srednjih vrednosti ovih varijabli dobijaju se sledeće relacije [2]:

$$E(QS) = E(RS) = E(RT) = -E(QT) = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{4.43}$$

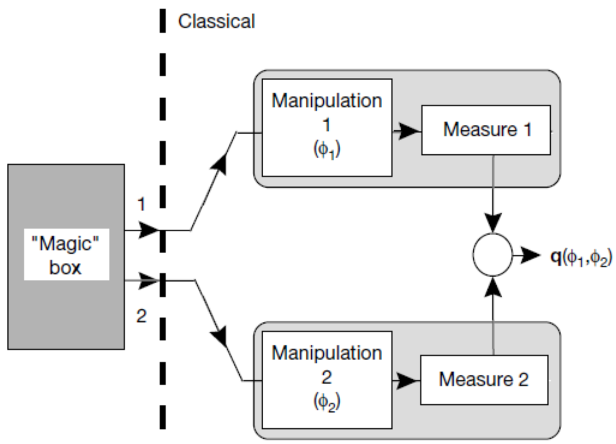
te je izraz sa leve strane nejednakosti (4.40) jednak:

$$E(QS)+E(RS)+E(RT)-E(QT) = 2\sqrt{2} \tag{4.44}$$

što očito nije ≤ 2. Kako nije uočena greška prilikom izvođenja nejednakosti, njene postavke su te koje bivaju dovedene u pitanje, a to su iste one postavke koje predstavljaju i okrilje EPR paradoksa i razlog zašto je kvantna mehanika deklarisana kao nekompletna teorija. Dakle, svet nije lokalno realan, bar ne u smislu u kom je opisan u radu EPR. Osim toga, kvantna zamršenost predstavljena je kao nov fundamentalan izvor u svetu kvantne informatike, fenomen koji dopušta pojave neshvatljive klasičnom svetu.

4.8 Eksperimentalne provere Belove nejednakosti

Nakon iznicanja tako pogodnog sredstva za proveru važenja zakona kvantne mehanike, naučnici su radili ne samo na implementaciji bazične ideje u veći broj sistema, kako su i nastali raznoliki oblici Belove nejednakosti, nego i na različitim mogućnostima eksperimentalnih metoda koje bi dokazale, odnosno ukazale na nevaženje Belove nejednakosti. U ovom segmentu biće prikazana dva takva eksperimentalna sistema i rezultati koje su dobijeni od strane radnih grupa.



Slika 8. Eksperimentalna šema za proveru CHSH nejednakosti. Slika je preuzeta iz [34].

Na slici 8 nalazi se prikaz uobičajenog metoda predloženog od strane grupe Klauzer-Horn-Šimoni-Holt [33], koji se sastoji od tri segmenta. Najpre se vrši pripremanje para čestica u takozvanoj magičnoj kutiji. Potom se nezavisno vrši neki vid manipulacija na obe čestice, na slici označeno sa Φ_1 i Φ_2. Poslednja faza je detektorska i obuhvata merenje izvesnog svojstva sa dva moguća ishoda za obe čestice. Merenje se obavlja više puta, a veličina od značaja je korelacija ishoda [34]:

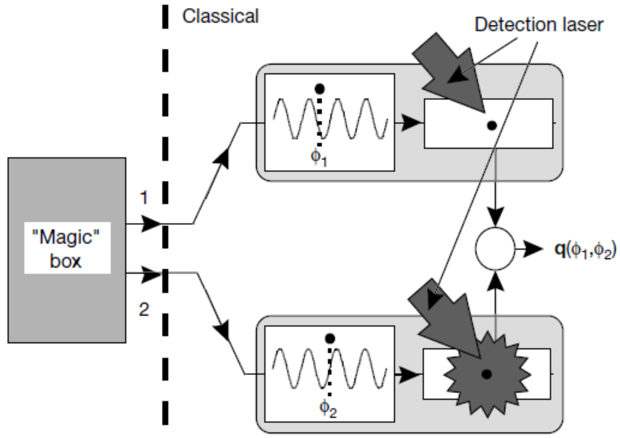
$$q(\Phi_1, \Phi_2) = \frac{N_I(\Phi_1, \Phi_2) - N_R(\Phi_1, \Phi_2)}{N_I(\Phi_1, \Phi_2) + N_R(\Phi_1, \Phi_2)} \tag{4.45}$$

gde je sa N_I označen broj merenja u kojima su dve merene vrednosti iste, a sa N_R broj merenja gde su različite. CHSH forma Belove nejednakosti ovakvog eksperimentalnog sistema je oblika [34]:

$$B(\alpha_1, \delta_1, \beta_2, \gamma_2) = \Bigg(q(\delta_1, \gamma_2) - q(\alpha_1, \gamma_2) + q(\delta_1, \beta_2) + q(\alpha_1, \beta_2) \Bigg) \leq 2 \tag{4.46}$$

gde su α_1 i δ_1 specifične vrednosti Φ_1, a β_2 i γ_2 specifične vrednosti Φ_2.

U eksperimentalnoj postavci opisanoj u [34] kao izvor kubita iskorišćeni su atomski joni sa dva nivoa, na kojima je izvršena manipulacija i potom detekcija broja rasejanih fotona, čime se efektivno meri stanje jona. Na slici 9 nalazi se prikaz eksperimentalne postavke.



Slika 9. Eksperimentalna postavka grupe M. A. Rowe et al. Slika je preuzeta iz [34].

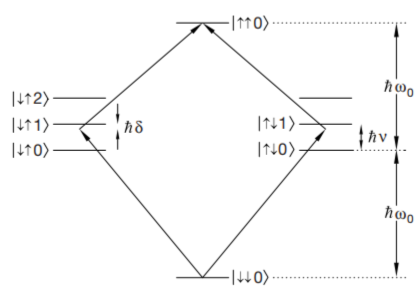
Najpre je neophodno formirati jonske kubite. Za potrebu eksperimenta iskorišćena su dva $^{9}\mathrm{Be}^{+}$ jona implementirana duž ose linearne Polove klopke frekvencije 5 MHz. Polova klopka koristi vremenski zavisna električna polja da zarobi naelektrisanu česticu [35].

Takođe, za posmatranje se u obzir uzimaju dva nivoa osnovnog stanja, $|\downarrow\rangle = |2,-2\rangle$ i $|\uparrow\rangle = |1,-1\rangle$, gde je prvi broj vrednost kvantnog broja ukupnog momenta impulsa, a drugi njegova projekcija duž ose kvantizacije. Ova dva stanja kuplovana su u zamršeno stanje pomoću stimulisanih Ramanovih prelaza. U tu svrhu korišćena su dva laserska snopa talasne dužine od 313 nm i frekventne razlike veličine približno hiperfinog cepanja $\omega_0 \approx 2\pi \cdot 1.25$ GHz, koja su postavljena normalno, a razlika njihovih talasnih vektora leži duž ose klopke.

Ova tehnika je nastala na osnovu Molmerovih i Sorensenovih istraživanja [36]. Naime, tehnikama laserskog hlađenja i optičkog pumpanja obezbedi se stanje spina $|\downarrow\rangle$, te je stanje dvokubitnog sistema na početku bilo separabilno stanje $|\Psi\rangle = |\downarrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle$ [36]. Dejstvom optičkih polja frekvencija $\omega_0 + \nu - \delta$ i $\omega_0 - \nu + \delta$ (slika 10) moguće je postići prelaz iz $|\downarrow\downarrow\rangle$ stanja u stanje $|\uparrow\uparrow\rangle$ [36]. Za dovoljno velike δ, srednja stanja $|\uparrow\downarrow 1\rangle$ i $|\downarrow\uparrow 1\rangle$ zanemarljivo su okupirana [36]. Rezultat je zamršeno stanje:

$$|\Psi^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\rangle\big) \tag{4.47}$$

Svaki od prelaza u eksperimentu podstaknut je spomenutim parom Ramanovih lasera [36].



Slika 10. Princip formiranja zamršenih stanja za dva jona $^{9}Be^{+}$. Slika je preuzeta iz [36].

Sada se na pripremljeno zamršeno stanje opet deluje Ramanovim laserom na oko 400 ns, kako bi se izvšila transformacija stanja pojedinačnih jona [35]. Veličina od značaja je faza polja koje izaziva Ramanove prelaze na poziciji jona - Φ_1 i Φ_2. Ona se menja podešavanjem fazne razlike duž ose klopke, koja se pokorava zavisnosti $\Delta\mathbf{k}\Delta\mathbf{x}_j$ ($\mathbf{x}_j$ predstavlja poziciju jona duž ose klopke) i podešavanjem razlike frekvencija na samom uređaju (Φ_s). Ukupna faza jona je stoga:

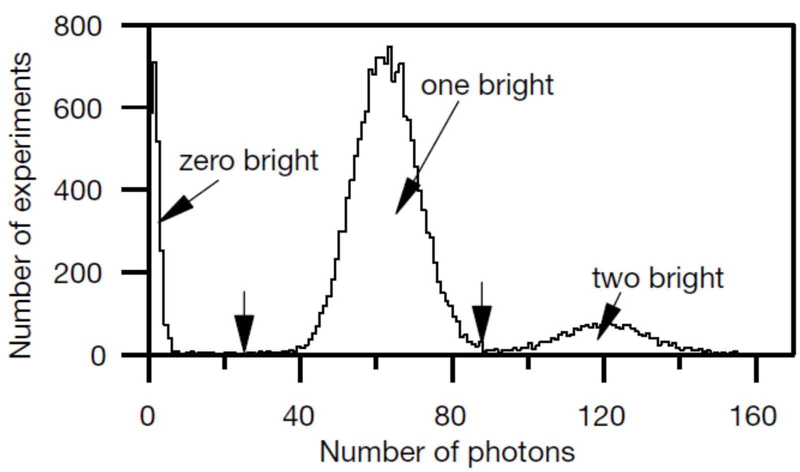
$$\Phi_j = \Phi_s + \Delta\mathbf{k}\Delta\mathbf{x}_j \tag{4.48}$$

Na slici 11 prikazana je konfiguracija faza korišćenih u eksperimentu. Veličina $\Delta\Phi$ jednaka je razlici faza, a Φ_{tot} njihovom zbiru.

Experiment input	ϕ_1	ϕ_2	$\Delta\phi$	ϕ_{tot}
$\alpha_1\beta_2$	$-\pi/8$	$-\pi/8$	0	$-\pi/4$
$\alpha_1\gamma_2$	$-\pi/8$	$3\pi/8$	$-\pi/2$	$+\pi/4$
$\delta_1\beta_2$	$3\pi/8$	$-\pi/8$	$+\pi/2$	$+\pi/4$
$\delta_1\gamma_2$	$3\pi/8$	$3\pi/8$	0	$+3\pi/4$

Slika 11. Konfiguracija faza korišćenih u eksperimentu grupe M. A. Rowe et al. Slika je preuzeta iz [35].

Detekcija se vrši pomoću interakcije jona sa cirkularno polarizovanom svetlošću detekcionog laserskog sistema [36]. U ovom slučaju, za $|\downarrow\rangle$ stanje detektuje se veliki broj fotona (prosečno 64), a za $|\uparrow\rangle$ mali (svetlo i tamno stanje). Za Belovu nejednakost bitan je samo broj istoimenih i raznoimenih stanja, te je ova informacija dovoljna. Na slici 12 prikazana je statistika merenja za $\Phi_1 = \frac{3\pi}{8}$ i $\Phi_2 = -\frac{\pi}{8}$.



Slika 12. Rezultati ostvareni odabirom faza $\Phi_1 = \frac{3\pi}{8}$ i $\Phi_2 = -\frac{\pi}{8}$. Slika je preuzeta iz [35].

CHSH nejednakost doživljava maksimalno narušenje za izbor parametara $\alpha_1 = -\frac{\pi}{8}$, $\delta_1 = \frac{3\pi}{8}$, $\beta_2 = -\frac{\pi}{8}$ i $\gamma_2 = \frac{3\pi}{8}$ i, prema predviđanju, dobijen rezultat treba biti [35]:

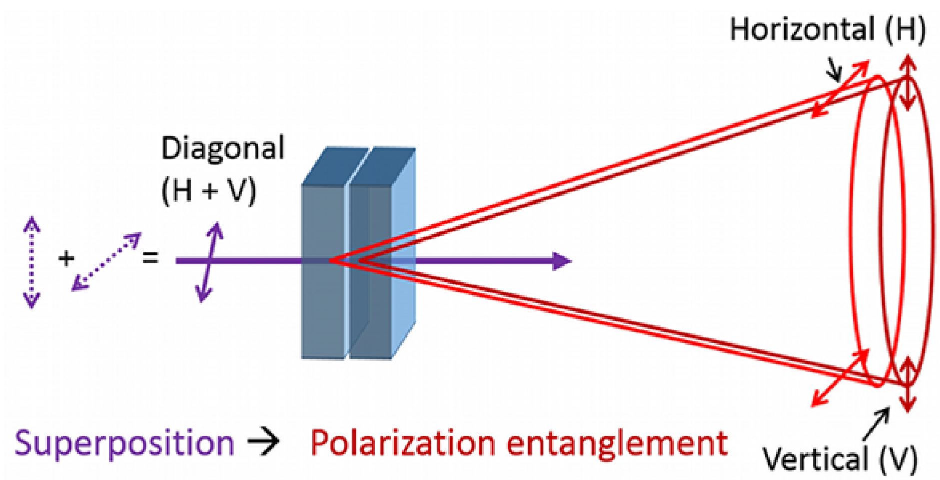
$$B(-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}) = 2\sqrt{2} \tag{4.49}$$

Rezultat eksperimenta je, doduše, malo drugačiji. U eksperimentu faza mernog uređaja nije dovoljno stabilna i unosi promene u vrednosti faza pre završetka seta merenja [35]. Stoga je dobijeni rezultat [35]:

$$B(-\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}, -\frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}) = 2.25(3) \tag{4.50}$$

u kom se i dalje ogleda nepostojanje paradoksa i validnost zakona kvantne mehanike.

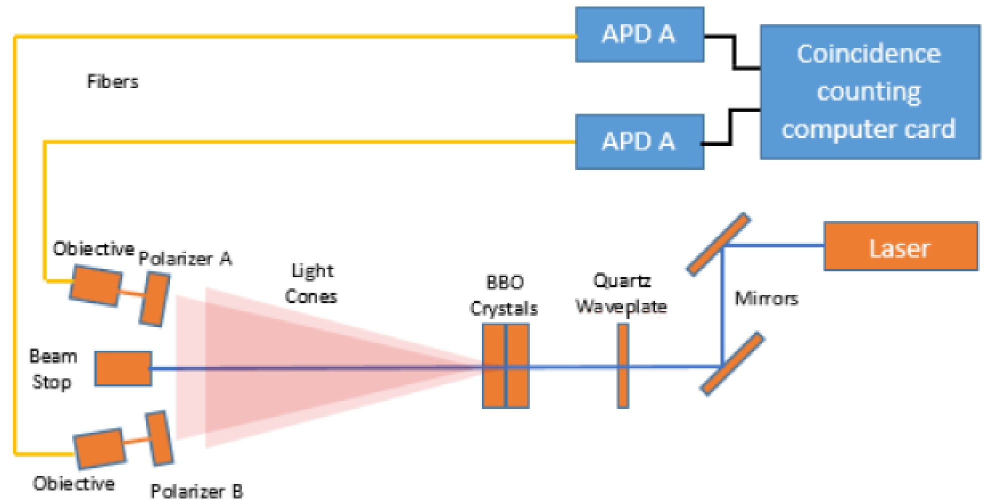
Jedna od opcija za ispitivanje Belove nejednakosti je i eksperimentalna postavka opisana u [37]. Laserski snop talasne dužine 405.5 nm ustremljen je ka ostatku optičkog sistema pomoću dva ogledala. Snop potom prolazi kroz kvarcno staklo, kome je cilj eliminacija fazne razlike koja se javlja između dve polarizacije fotona usled različitog pređenog puta nakon separacije sprovedene u beta-barijum-borat (BBO) kristalima tipa I. Nakon prolaska kroz kvarcno staklo, snop prolazi kroz dva BBO kristala postavljena tako da im optičke ose stoje pod uglom od 90° jedna u odnosu na drugu. Naime, BBO kristali tipa I su nelinearni kristali sa sposobnošću dvostrukog prelamanja [38]. Za njih je karakteristično da izazivaju takozvano "konusno" prelamanje upadnog zraka. Ako, na primer, horizontalno (vertikalno) polarizovan foton talasne dužine λ prolazi kroz kristal, iz njega izlaze dva vertikalno (horizontalno) polarizovana fotona talasne dužine 2λ u konusu kao na slici 13 [38].



Slika 13. Prikaz kvantnog zamršenja nakon konusnog prelamanja zraka u kristalu BBO tipa I. Slika je preuzeta sa [39].

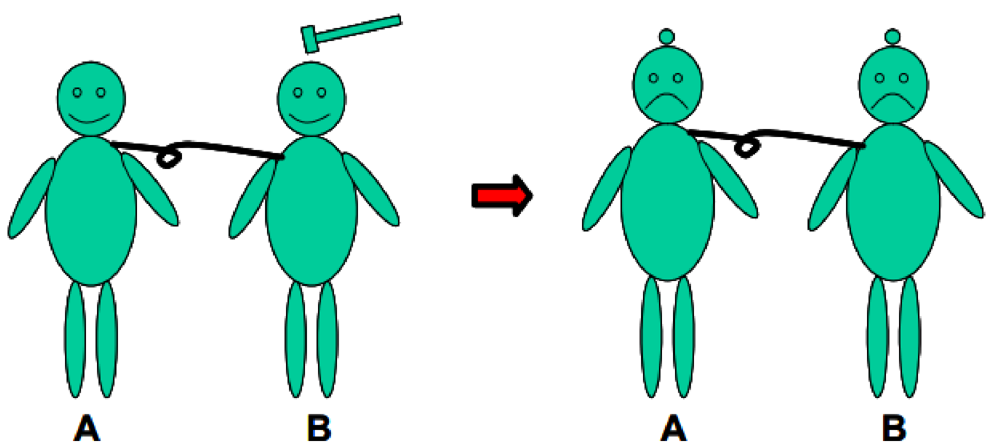
Nakon izlaska iz BBO kristala, dva konusa skupljaju se u polarizatorima A i B, koji određuju stanja fotona. Preuzetu svetlost iz polarizatora objektivi šalju kroz optička vlakna do računara, gde se podaci obrađuju [37]. Eksperimentalna aparatura procesa prikazana je na slici 14.

Za merne uglove polarizatora A od -45°, 0°, 45° i 90° i polarizatora B od $-22.5°$, 22.5°, 67.5° i 112.5° mereni su odbroji i računato narušenje Belove nejednakosti. Dobijeno je narušenje Belove nejednakosti $2.69(11) > 2$.



Slika 14. Eksperimentalna procedura za utvrđivanje narušenja Belove nejednakosti shodno [37]. Slika je preuzeta iz [37].

Dakle, zajednički zaključak oba eksperimenta je da zamršena stanja narušavaju Belovu nejednakost baziranu na postavkama EPR paradoksa. Zapravo, ovo su najpopularnije postavke prilikom dokazivanja narušenja Belove nejednakosti, a danas je popularno i posmatranje zamršenosti jona i fotona [40]. U svakom slučaju, svi ovi dokazi nevaženja Belove nejednakosti u slučaju zamršenih stanja svedoče o neupitnom razmatranju zamršenog stanja kao jedinstvenog entiteta, a nikako kao dva zasebna stanja [38]. Takođe, objašnjeno zamršeno stanje ne postoji u klasičnom svetu i treba ga tražiti isključivo u svetu kvantne mehanike.



Slika 15. Kvantna zamršenost kao jedinstveni entitet. Slika je preuzeta iz [38].

5 Mere kvantne zamršenosti i kvantne koherentnosti

Kvantna zamršenost dosad je razmatrana u strogo teorijskom režimu njenog postojanja. Osim toga, ukazana je i pažnja metodima eksperimentalnog uočavanja i formiranja kvantne zamršenosti stanja. Cilj ovog poglavlja biće da opiše osnovne veličine vezane za kvantnu zamršenost i kvantnu koherentnost kao validne mere u fizičkim sistemima. Čitalac se može upustiti u priču o osnovnim merama i veličinama čiji će opis biti bitan i za praktični račun obavljen u drugom segmentu rada.

Međutim, kao i obično, treba postaviti same temelje za izučavanje kvantno-informatičkih veličina. Termin matrice gustine i redukovane matrice gustine već je detaljno obrađen u prethodnim poglavljima, ali se ispostavlja da dalje razmatranje nije održivo bez uvođenja dodatnog detalja - informacije i njene svojstvene mere u vidu entropije. Stoga će samo poglavlje biti začeto osnovnom merom Šenonove informacije, odnosno, u kvantno-mehaničkom svetu, veličinom poznatom kao Fon Nojmanova entropija.

5.1 Šenonova mera informacije. Fon Nojmanova entropija

Već je spomenuto da je moderna teorija informacije doživela veliki preokret u radu Kloda Šenona iz 1948. godine, baziranom na postavljanju matematičke formulacije informacije. Međutim, šta je zapravo pod tim terminom podrazumevano? Što se tiče kompjuterskog konteksta informacije, s jedne strane informacija je entitet koji se mora kompjuterizovati i skladištiti na efikasan način, a sa druge, shodno Šenonovom formalizmu, samo svojstvo koje treba preneti između dve tačke u cilju komunikacije [41]. I sam Šenon u svom radu kaže da je semantički aspekt informacije apsolutno nebitan, već je bitna samo izabrana poruka iz seta svih mogućih poruka [41].

Šenon je svoju formulaciju bazirao na sledećem razmatranju. Svaka poruka predstavlja neku kompoziciju slova, a svako slovo izabrano je iz seta od mogućih k slova [42]. Neka izvor informacije bira slova sa određenom distribucijom verovatnoće [42]:

$$X = \{x, p(x)\} \tag{5.1}$$

gde je $x \in \{0, 1...k-1\}$, a verovatnoća je obeležena sa $p(x)$. Ako izvor emituje poruku od n slova, verovatnoća pojavljivanja sekvence $x_1x_2...x_n$ je [42]:

$$p(x_1x_2...x_n) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i) \tag{5.2}$$

Smatra se da su slova nezavisno i jednako distribuirana [42].

Ako se posmatra binaran alfabet, svako slovo će biti 0 ili 1 sa verovatnoćom $1-p$ i p, gde je $0 \leq p \leq 1$. Za velike brojeve n, shodno zakonu velikih brojeva, tipična sekvenca će sadržati oko $n(1-p)$ nula i np jedinica [42]. Broj različitih sekvenci ove forme reda je $\binom{n}{np}$ i može se definisati funkcija [42]:

$$\log \binom{n}{np} = \log \left(\frac{n!}{(np)!\big(n(1-p)\big)!} \right) \tag{5.3}$$

koja, nakon Stirlingove aproksimacije za veliko n [42]:

$$\log n! = n \log n - n + O(\log n) \tag{5.4}$$

postaje:

$$\log \binom{n}{np} \approx n\mathcal{H}(p), \quad \mathcal{H}(p) = -p \log p - (1-p)\log(1-p) \tag{5.5}$$

gde je $\mathcal{H}(p)$ takozvana entropija [42]. Doduše, u svetu gde je informacija prisutna u obliku bitova, lakše je raditi sa logaritamskom bazom 2 i stoga se ona pretežno koristi u klasičnoj, pa i kvantnoj informatici [42]. Tako je tipičan broj mogućih sekvenci $2^{n\mathcal{H}(p)}$. Naravno, slično važi i za x koje uzima vrednosti iz alfabeta od k slova. Broj tipičnih sekvenci je tada [42]:

$$\frac{n!}{\prod_x \big(np(x)\big)!} \approx 2^{n\mathcal{H}(x)} \tag{5.6}$$

gde je:

$$\mathcal{H}(x) = -\sum_x p(x) \log_2 p(x) \tag{5.7}$$

Šenonova entropija [42]. Prvobitni Šenonov naziv za veličinu $\mathcal{H}(x)$ zapravo i jeste bio informacija [43]. Međutim, Džon fon Nojman, koji je i sam, nešto ranije, za veličinu koju je uveo iskoristio pojam entropije, predložio mu je da taj naziv promeni [43]. Prema Šenonovim spisima, Fon Nojman je naziv entropija predložio iz dva razloga: prvo jer je naziv koji je Šenon uveo umesto informacije, nesigurnost, već imao svoje značenje, a drugo jer tada pojam entropije nije bio preterano shvaćen, pa protiv Šenonove entropije ne bi bilo kontraargumenata [43].

Sam Fon Nojman je u svojoj knjizi *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* iz 1932. godine uveo pojam entropije u kvantno-mehaničkim sistemima na jedan novi način [44]. Sada opet treba zamisliti izvor koji piše poruku od n slova, samo se u ovom slučaju stanja biraju iz nekog ansambla kvantnih stanja. Neka se alfabet sastoji od seta kvantnih stanja $\{\rho(x)\}$, gde se svako od njih javlja sa verovatnoćom $p(x)$ i $\rho(x)$ mu je pripadna matrica gustine [42]. U ovom sučaju, verovatnoća da se dobije ma koji rezultat merenja slova opisana je matricom gustine [42]:

$$\rho = \sum_x p(x)\rho(x) \tag{5.8}$$

Stoga je Fon Nojmanova entropija definisana u obliku [42]:

$$S(\rho) = -\operatorname{Tr}\big(\rho \log_2 \rho\big) \tag{5.9}$$

gde je logaritamska baza uzeta iz istog razloga kao i u klasičnom slučaju. Treba uočiti da u slučaju kada je matrica gustine predstavljena u ortonormiranom bazisu $\{|\Psi_i\rangle\}$, odnosno u dijagonalnoj formi, Fon Nojmanova entropija poprima oblik [45]:

$$\begin{aligned}
S(\rho) &= -\operatorname{Tr}\left(\rho\log_2\rho\right) = -\operatorname{Tr}\left(\rho\sum_i \log_2\left(p_i|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|\right)\right) = \\
&= -\operatorname{Tr}\left(\sum_j p_j|\Psi_j\rangle\langle\Psi_j|\sum_i \log_2\left(p_i|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|\right)\right) = \\
&= -\sum_k\langle\Psi_k|\sum_j p_j|\Psi_j\rangle\langle\Psi_j|\sum_i \log_2 p_i|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|\Psi_k\rangle = \\
&= -\sum_i p_i\log_2 p_i
\end{aligned} \tag{5.10}$$

usled cikličnosti traga i ortonormiranosti razmatranih stanja. Uočava se da oblik (5.10) odgovara obliku (5.7), odnosno, Fon Nojmanova entropija jednaka je Šenonovoj. U drugim slučajevima važi da je [45]:

$$S(\rho) \leq \mathcal{H}(\rho) \tag{5.11}$$

Takođe, značajno je uočiti da je Fon Nojmanova entropija jednaka nuli za ma koje čisto stanje i za maksimalno mešano stanje $\rho_{mm} = \frac{I}{d}$, gde je d dimenzija sistema, jednaka je $\log_2 d$ [8]. Ovo je prilično očekivano s obzirom na to da je rečeno da čisto stanje sadrži sve informacije o datom sistemu. Dakle, Fon Nojmanova entropija mogla bi se deklarisati kao pokazatelj odstupanja sistema od čistog stanja.

Na ovom mestu zgodno je uvesti još jednu veličinu bitnu u kvantnoj informatici, a u pitanju je kvantna relativna entropija (*quantum relative entropy*). Neka je Fon Nojmanova entropija definisana relacijom (5.9). Relativna entropija dva stanja definiše se kao [46]:

$$S(\rho\|\sigma) = \operatorname{Tr}\left(\rho\log_2\rho\right) - \operatorname{Tr}\left(\rho\log_2\sigma\right) \tag{5.12}$$

i ima brojna korisna svojstva [46]:

1. $S(\rho\|\sigma) \geq 0$ i jednakost važi samo u slučaju kada je $\rho = \sigma$,
2. $S(\rho\|\sigma)$ je kontinualna gde nije beskonačna i
3. $S(\rho\|\sigma) \leq p_1 S(\rho_1\|\sigma_1) + p_2 S(\rho_2\|\sigma_2)$, gde je $\rho = p_1\rho_1 + p_2\rho_2$ i $\sigma = p_1\sigma_1 + p_2\sigma_2$.

Ispostaviće se da je pojam kvantne relativne entropije prilično koristan za kasnije definisanje kvantne koherentnosti, koja predstavlja jednu od ključnih tačaka u praktičnom delu rada.

5.2 Svedoci kvantne zamršenosti

Kao što je i rečeno, ovo poglavlje biće posvećeno merama kvantne zamršenosti u realnim sistemima i stoga je potrebno utvrditi koje veličine zadovoljavaju to svojstvo da mogu potvrditi da li je neko stanje zamršeno ili nije. Svedok zamršenosti (*entanglement witness*) je ermitski operator W, koji je u mogućnosti da detektuje zamršenost nekog stanja [47]. Osnovna ideja je da svedok W doživljava neko ograničenje samo kada je stanje zamršeno [47].

W može se definiše kao operator koji daje nenegativne očekivane vrednosti za sva separabilna čista stanja $|\Psi_s\rangle$ [23]:

$$\langle\Psi_s|W|\Psi_s\rangle \geq 0 \tag{5.13}$$

Pošto se separabilna mešana stanja mogu predstaviti u vidu [23]:

$$\rho_s = \sum_i p_i |\Psi_s^i\rangle\langle\Psi_s^i| \tag{5.14}$$

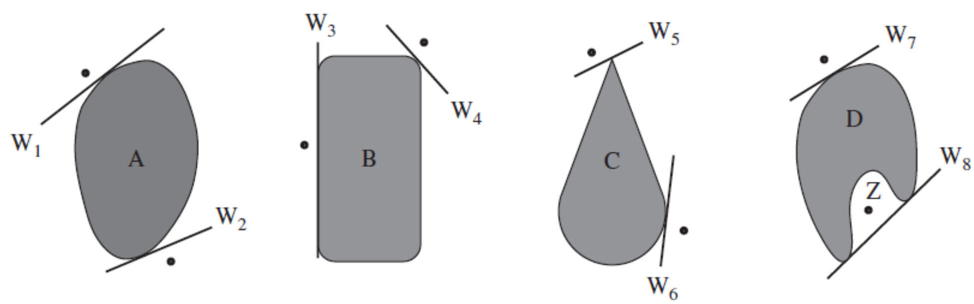
za $p_i > 0$ i $\sum_i p_i = 1$, što implicira da je i očekivana vrednost W vezana za separabilna mešana stanja takođe nenegativna:

$$\mathrm{Tr}\left(\rho_s W\right) = \sum_i p_i \langle\Psi_s^i|W|\Psi_s^i\rangle \geq 0 \tag{5.15}$$

U tom slučaju, ako data matrica gustine vodi do negativne očekivane vrednosti, stanje je zamršeno [23]:

$$\mathrm{Tr}\left(\rho W\right) < 0 \tag{5.16}$$

Takođe, u skladu sa [23] za svako zamršeno stanje postoji svedok njegove zamršenosti. Geometrijsko objašnjenje svedoka zamršenosti nalazi se na slici 16.

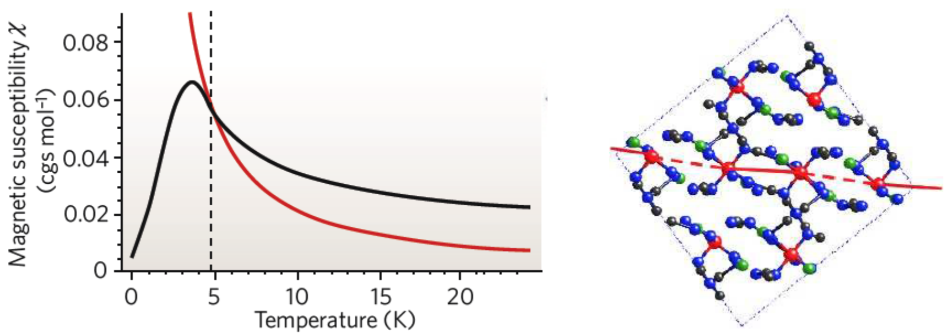


Slika 16. Geometrijski prikaz svedoka zamršenosti. Oblici A, B i C su konveksni, a D nije konveksno. Za ma koju tačku van konveksnih oblika postoji linija W_i ($i = 1...6$) koja razdvaja tačku od odgovarajućeg konveksnog oblika. Za oblik D i tačku Z takva linija ne postoji. Ako su konveksni oblici separabilna stanja, onda postoji linija koja reprezentuje svedoka i razdvaja ga od zamršenog stanja (tačka). Slika je preuzeta iz [23].

Naravno, postoje i svedoci sa drugim uslovima u odnosu na (5.16). Bitno je samo da svedok omogućava razgraničavanje između separabilnih i zamršenih stanja.

Na primer, kao svedok zamršenosti može se navesti hamiltonijan sistema dva spina sa Hajzenbergovom interakcijom $H = -J\sigma\cdot\sigma$ [48], gde su σ Paulijeve matrice spina, a J konstanta kuplovanja. Može se pokazati da za separabilna stanja važi uslov $\langle H\rangle = |\,\mathrm{Tr}\left(\rho_{sep}H\right)| = J\langle\sigma\rangle\langle\sigma\rangle \leq J$ [48]. Za osnovno stanje hamiltonijana, međutim, važi $|\,\mathrm{Tr}\left(\rho_{sin}H\right)| = 3J$, gde je ρ_{sin} matrica gustine osnovnog (singletnog) stanja hamiltonijana, te je očito u pitanju zamršeno stanje [48].

Na slici 17 prikazana je i magnetna susceptibilnost u ulozi svedoka zamršenosti. U pitanju je materijal Cu($NO_3 2.5 D_2 O$) prikazan na istoj slici.



Slika 17. Magnetna susceptibilnost kao svedok zamršenosti u $Cu(NO_3 2.5 D_2 O)$. Iznad crvene linije vrednosti susceptibilnosti su separabilne, a ispod zamršene. Isprekidana linija ukazuje na granicu između separabilnosti i zamršenosti. Slika je preuzeta iz [48].

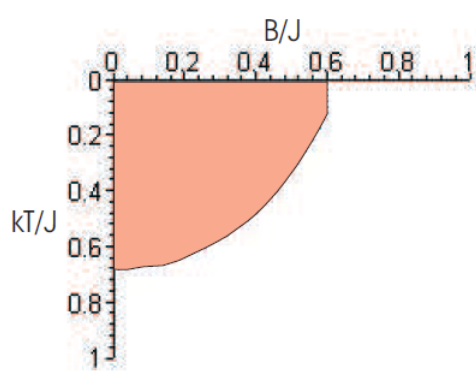
Takođe, pokazuje se da još neke makroskopske termodinamičke veličine poput magnetizacije i unutrašnje energije isto mogu biti svedoci zamršenosti u termodinamičkom limesu [49]. Naime, u izotropnom XX ili XXX Hajzenbergovom modelu uslov za pojavu zamršenog stanja je $\frac{|U+BM|}{N|J|} > 1$, gde je U unutrašnja energija, B spoljašnje magnetno polje, J konstanta kuplovanja između najbližih suseda i N broj spinova [49]. Naime, izotropni XX Hajzenbergov model sa aproksimacijom najbližih suseda zasniva se na hamiltonijanu oblika:

$$H = J \sum_{i,j} \left(\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y \right) \tag{5.17}$$

odnosno, u pitanju je razmatranje dvodimenzione izotropne Hajzenbergove rešetke u kojoj su σ_i^α i σ_j^α komponente spina na različitim čvorovima [50]. Analogno je XXX Hajzenbergov model uopštenje XX modela na tri dimenzije, gde anizotropija u interakciji nije prisutna ni u trećoj dimenziji, te su sve dimenzije ekvivalentne [50]:

$$H = J \sum_{i,j} \left(\sigma_i^x \sigma_j^x + \sigma_i^y \sigma_j^y + \sigma_i^z \sigma_j^z \right) \tag{5.18}$$

Na slici 18 nalazi se prikaz uslova zamršenosti u XX Hajzenbergovom modelu.



Slika 18. Prikaz uslova zamršenosti u XX Hajzenbergovom modelu. Osenčen segment predstavlja interval polja i temperature u kom je prisutno zamršeno stanje. Slika je preuzeta iz [49].

5.3 Zamršenost formacije. Konkurentnost kao mera zamršenosti

Kvantna zamršenost već je definisana kao pojava od presudnog značaja u kvantnoj informatici. Kako je u pitanju pojava, a ne veličina, ona se ne može neposredno meriti i kvantifikovati, te je neophodno naći veličine koje zadovoljavaju sve uslove da bi se nazvale verodostojnim merama zamršenosti. Ti uslovi su sledeći [51]:

1. $E(\rho) = 0$ samo ako je ρ separabilno stanje,
2. lokalne unitarne operacije ostavljaju $E(\rho)$ invarijantnim: $E(\rho) = E(U_A \otimes U_B \rho U_A^\dagger \otimes U_B^\dagger)$,
3. $\sum_i \mathrm{Tr}(\rho_i) E\left(\frac{\rho_i}{\mathrm{Tr}(\rho_i)}\right) \leq E(\rho)$, gde je $\rho_i = V_i \rho V_i^\dagger$ sa uslovom $\sum_i V_i^\dagger V_i = I$.

Prvi uslov osigurava da samo separabilna stanja imaju izostanak mere zamršenosti, što je i očekivano, dok drugi svedoči o tome da lokalna promena bazisa ne može uticati na meru zamršenosti, a treći otklanja mogućnost da lokalna merenja sprovedena klasičnim putem utiču na povećanje mere zamršenosti [51]. Shodno ovim uslovima, postoji više mera zamršenosti, od kojih se najčešće koriste sledeće: zamršenost formacije (*entanglement of formation*), zamršenost destilacije (*entanglement of distillation*), cena zamršenosti (*entanglement cost*) i relativna entropija zamršenosti (*relative entropy of entanglement*) [52]. Najčešća veličina koja se u literaturi koristi jeste zamršenost formacije. Ako se definiše čisto dvočestično stanje $\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi|$, zamršenost formacije definiše se pomoću Fon Nojmanove entropije redukovane matrice gustine [53]:

$$E_f(\rho) = S\big(\mathrm{Tr}_B\, \rho\big) = S\big(\mathrm{Tr}_A\, \rho\big) = -\,\mathrm{Tr}\left(\rho_A \log_2 \rho_A\right) = -\,\mathrm{Tr}\left(\rho_B \log_2 \rho_B\right) \tag{5.19}$$

gde je $\rho_A = \mathrm{Tr}_B\, \rho$, $\rho_B = \mathrm{Tr}_A\, \rho$, a S Fon Nojmanova entropija.

Naravno, zamršenost formacije može se definisati i za mešana stanja. Naime, mešana stanja mogu se raspisati pomoću čistih stanja:

$$\rho = \sum_i p_i \rho_i, \;\; \rho_i = |\Psi^i\rangle\langle\Psi^i| \tag{5.20}$$

Za ovakva stanja zamršenost formacije definiše se u obliku [52]:

$$E_f(\rho) = \inf \sum_i p_i E_f(\rho_i) \tag{5.21}$$

Traženje minimuma zamršenosti vrši se po svim mogućim dekompozicijama mešanog stanja na čista [52]. Veoma je mali broj sistema u kojima je ovo moguće, a jedan od njih je i dvokubitni kvantni sistem [52]. Vuters et al. našli su izraz za zamršenost formacije u slučaju proizvoljnog stanja ρ [52]:

$$E_f(\rho) = E\big(C(\rho)\big) = h\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2(\rho)}}{2}\right) \tag{5.22}$$

gde je $h(x) = -x \log x - (1-x)\log(1-x)$ binarna funkcija entropije, a $C(\rho)$ konkurentnost. Izraz (5.22) predstavlja monotono rastuću funkciju sa porastom konkurentnosti [52]. Tako ne čudi činjenica da konkurentnost može biti korišćena kao verodostojna mera zamršenosti [52].

Konkurentnost $C(\rho)$ definiše se na sledeći način [52]:

$$C(\rho) = \max\{0, \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4\} \tag{5.23}$$

gde su λ_i $(i = 1...4)$ kvadratni koreni svojstvenih vrednosti ermitske matrice $R = \rho\tilde{\rho}$ u opadajućem poretku, a matrica $\tilde{\rho}$:

$$\tilde{\rho} = \big(\sigma^y \otimes \sigma^y\big)\rho^*\big(\sigma^y \otimes \sigma^y\big) \tag{5.24}$$

i ρ^* je kompleksno konjugovana matrica u odnosu na matricu ρ.

Neka je $|\Psi\rangle$ proizvoljno dvokubitno stanje u standardnom bazisu prikazano u obliku:

$$|\Psi\rangle = \alpha_{00}|00\rangle + \alpha_{01}|01\rangle + \alpha_{10}|10\rangle + \alpha_{11}|11\rangle \tag{5.25}$$

gde je $|\alpha_{00}|^2 + |\alpha_{01}|^2 + |\alpha_{10}|^2 + |\alpha_{11}|^2 = 1$. Može se pokazati da je $|\Psi\rangle$ separabilno u slučaju $\alpha_{00}\alpha_{11} = \alpha_{01}\alpha_{10}$ [53]. Konkurentnost za stanje $|\Psi\rangle$ dobija se u formi [53]:

$$C\big(|\Psi\rangle\langle\Psi|\big) = 2|\alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10}| \tag{5.26}$$

Stoga se može reći da minimalna konkurentost (5.26) govori o separabilnom stanju, a povećanje konkurentnosti posledica je povećanja zamršenosti, te je jasno da je $C(\rho)$ validna mera zamršenosti.

5.4 Karakteristike kvantne koherentnosti

Kao još jedna pojava, suštinski različita od definicije same zamršenosti, a opet veoma bliska, kako će se pokazati, na ovom mestu biće opisana kvantna koherentnost. Iako je pojam obično vezan za polje kvantne optike, gde se duboko utkao u samu srž oblasti, razvoj kvantne informatike doveo je i do razmatranja njene važnosti u okvirima ove, još uvek mlade, naučne oblasti.

Sama pojava potiče od kvantne superpozicije i od esencijalne je važnosti u oblasti kvantne mehanike i kvantne informatike [54]. Danas je od interesa njena veza sa kvantnom zamršenošću, ali i kvantnim diskordom, tipom kvantnih korelacija koje se javljaju i u separabilnim stanjima [54]. Sama teorija koherentnosti je još uvek u procesu razvoja. Može se reći da se veći broj naučnika posvetio razmatranju ovog problema nakon značajnog Oberovog rada na kvantifikovanju superpozicije ortogonalnih kvantnih stanja [55]. Tada se i javlja potreba za kvantifikovanjem mere koherentnosti. Ispostavlja se da, kao i u slučaju zamršenosti, postoji više kriterijuma koje neka veličina mora zadovoljavati da bi bila validna mera koherentnosti.

Međutim, da bi ovi uslovi bili definisani, najpre se moraju definisati pojmovi nekoherentnih stanja i nekoherentnih operacija. Neka je dat konačni d-dimenzioni Hilbertov prostor sa ortonormiranim bazisom $\{|i\rangle\}_{i=0...d-1}$. Matrice gustine dijagonalne u datom bazisu nazivaju se nekoherentnim, te su njihove forme [55]:

$$\delta = \sum_{i=0}^{d-1} p_i|i\rangle\langle i| \tag{5.27}$$

sa verovatnoćom p_i, a set ovakvih matrica označavaće se ubuduće sa $\mathcal{I}$.

Nekoherentne operacije su one kvantne operacije koje predstavljaju set Krausovih operatora $\{K_n\}$ sa osobinom $\sum_n K_n^\dagger K_n = I$, koji zadovoljavaju uslov $K_n \mathcal{I} K_n^\dagger \subset \mathcal{I}$ za sve n, što garantuje da u ukupnoj operaciji $\rho \longrightarrow \sum_n K_n \rho K_n^\dagger$, čak i ako se nema uvida u pojedinačne n-te doprinose, nijedan posmatrač ne bi zaključio da je u pitanju iznicanje koherentnosti iz nekoherentnih stanja [56]. Postoje dve klase ovih operacija [56]:

1. nekoherentne potpuno pozitivne kvantne operacije sa održivim tragom Φ_{ICPTP}, koje se ponašaju kao:
$$\Phi_{ICPTP}(\rho) = \sum_n K_n \rho K_n^\dagger \tag{5.28}$$
gde su Krausovi operatori istih dimenzija $d_{out} \times d_{in}$, te se ovakvom formulacijom ostavlja mogućnost gubitka informacije o ishodima merenja i

2. kvantne operacije u kojima je dozvoljena podselekcija shodno ishodima merenja i nazivaju se mernim, selektivnim ili stohastičkim. Definišu se pomoću Krausovih operatora različitih izlaznih dimenzija n ($d_n \times d_{in}$) [56]. Stanje koje odgovara n-tom ishodu je [56]:
$$\rho_n = \frac{K_n \rho K_n^\dagger}{p_n} \tag{5.29}$$
gde je:
$$p_n = \mathrm{Tr}\left(K_n \rho K_n^\dagger\right) \tag{5.30}$$

Takođe, značajno je spomenuti i pojam d-dimenzionog maksimalno koherentnog stanja, koje predstavlja stanje koje dozvoljava determinističko kreiranje svih drugih d-dimenzionih kvantnih stanja posredstvom nekoherentnih operacija [56]. Ona su data relacijom [56]:

$$|\Psi_d\rangle = \frac{1}{\sqrt{d}} \sum_{i=0}^{d-1} |i\rangle \tag{5.31}$$

jer posredstvom nekoherentnih operacija ma koje $d \times d$ stanje može se napraviti pomoću njih.

Sada se može preći na definisanje uslova koje mora zadovoljavati validna mera koherentnosti. U pitanju su sledeće stavke [56]:

1. $C(\rho) \geq 0$ za sva kvantna stanja sa važenjem jednakosti samo u slučaju kada je $\rho \in \mathcal{I}$,

2. monotonost pod Φ_{ICPTP} mapiranjima: $C(\rho) \geq C\big(\Phi_{ICPTP}(\rho)\big)$,

3. monotonost srednje koherentnosti pod podselekcijom baziranom na rezultatima merenja: $C(\rho) \geq \sum_n p_n C(\rho_n)$, gde su ρ_n i p_n definisani relacijama (5.29) i (5.30) i

4. osobina nerastuće funkcije pod mešanjem kvantnih stanja: $\sum_i p_i C(\rho_i) \geq C\big(\sum_i p_i \rho_i\big)$ za ma koji set stanja $\{\rho_i\}$ i $p_i \geq 0$ sa uslovom $\sum_i p_i = 1$.

Prvi uslov je i očekivan. Koherentnost je jednaka nuli u slučaju nekoherentnih stanja, kao što i sam naziv implicira. Što se tiče druga dva uslova, oni se praktično mogu podvesti pod jedan u slučaju različitih vrsta nekoherentnih operacija. U idealnim uslovima bilo bi dobro proveriti oba uslova, ali je često provera trećeg uslova praktično veoma teška [56]. Ukoliko se pogledaju uslovi, može se ustanoviti da postoji neka veza između mera zamršenosti u svetu zamršenosti i mera koherentnosti u svetu koherentnosti, te i nije čudno što se nauka kreće u pravcu nalaženja analogije između dve pojave.

Takođe, može se pokazati da ispunjavanje uslova 3) i 4) sa sobom povlači i uslov 2) [56]:

$$C\big(\Phi_{ICPTP}(\rho)\big) = C\Big(\sum_i p_i\rho_i\Big) \leq \sum_i p_i C(\rho_i) \leq C(\rho) \tag{5.32}$$

Postoji nekoliko veličina koje se uklapaju u date uslove i u literaturi se navode kao mere koherentnosti. Biće navedene neke od njih.

Rad [57] navodi da je l_1 norma koherentnosti (l_1 *norm*) jedna od verodostojnih mera koherentnosti:

$$C_{l_1}(\rho) = \inf_{\delta\in\mathcal{I}} \|\rho - \delta\|_{l_1} = \sum_{i\neq j} |\langle i|\rho|j\rangle| \tag{5.33}$$

koja je jednaka sumi apsolutnih vrednosti nedijagonalnih elemenata matrice gustine. Pored nje, trag-norma (*trace norm*) koherentnosti takođe predstavlja verodostojnu meru koherentnosti [57]:

$$C_{\mathrm{Tr}}(\rho) = \inf_{\delta\in\mathcal{I}} \|\rho - \delta\|_1 \tag{5.34}$$

Međutim, u radu će biti korišćena treća, najčešća mera - relativna entropija koherentnosti (*relative entropy of coherence*), definisana u formi [57]:

$$C_{re}(\rho) = \inf_{\delta\in\mathcal{I}} S\big(\rho\|\delta\big) \tag{5.35}$$

gde je $S\big(\rho\|\delta\big)$ prethodno definisana kvantna relativna entropija. Korist ove metode je u tome što ima veliki potencijal s obzirom na to da i klasična relativna entropija ima velikog udela u klasičnoj informacionoj teoriji [8]. Tako se kao mera koherentnosti uvodi veličina (5.35). S obzirom na to da je $\log_2 1 = 0$, prvi uslov je očito ispunjen. Veličina (5.35) zadovoljava i preostala tri uslova, što je pokazano u radovima [58, 59, 60].

Neka je sada dato nekoherentno stanje $\delta = \sum_i p_i |i\rangle\langle i| \in \mathcal{I}$ i neka za datu matricu gustine $\rho = \sum_{i,j} \rho_{ij}|i\rangle\langle j|$ dijagonalna matrica $\rho_{diag} = \sum_i \rho_{ii}|i\rangle\langle i|$ predstavlja matricu gustine ρ u kojoj su anulirani svi nedijagonalni elementi [56]. Onda je:

$$\begin{aligned} S\big(\rho\|\delta\big) &= S(\rho_{diag}) - S(\rho) + S\big(\rho_{diag}\|\delta\big) = \\ &= \cancel{-\operatorname{Tr}\big(\rho_{diag}\log_2\rho_{diag}\big)} + \operatorname{Tr}\big(\rho\log_2\rho\big) + \cancel{\operatorname{Tr}\big(\rho_{diag}\log_2\rho_{diag}\big)} - \operatorname{Tr}\big(\rho_{diag}\log_2\delta\big) = \\ &= \operatorname{Tr}\big(\rho\log_2\rho\big) - \operatorname{Tr}\big(\rho\log_2\delta\big) = S\big(\rho\|\delta\big) \end{aligned} \tag{5.36}$$

usled osobine $\operatorname{Tr}\rho = \operatorname{Tr}\rho_{diag}$. S obzirom na zatvorenost rešenja, i bez minimiziranja dobija se reltivna entropija koherentnosti kao [56]:

$$C_{re}(\rho) = S(\rho_{diag}) - S(\rho) \tag{5.37}$$

Odavde se nalazi i stanje maksimalne koherentnosti i ispostavlja se da važi uslov:

$$C_{re}(\rho) \leqslant S(\rho_{diag}) \leqslant \log_2 d \tag{5.38}$$

gde je d dimenzija Hilbertovog prostora. Dakle, koherentnost je definisana kao pozitivna veličina prvim uslovom, ali se sada vidi da je i ograničena pride.

5.5 Veza kvantne zamršenosti i kvantne koherentnosti

Dosad je bilo naznake da je moguće povezati dve ključne pojave u kvantnoj informatici - kvantnu zamršenost i kvantnu koherentnost, što bi uvelo nove mogućnosti u svet kvantne informatike. S obzirom na to da je kvantna koherentnost još uvek mlada, gde najznačajniji izvor o njenim merama datira iz 2014. godine, bilo koja analogija svakako predstavlja moćno oruđe za dalji razvoj ideje o kvantnoj koherentnosti [56].

Naime, ova veza je donekle intuitivno očita. Obe pojave vuku korene iz principa superpozicije, različit je samo način interpretacije. Iz kvantne mehanike je poznato da je koherentnost vezana za talasno svojstvo tvari. Ako se talas pridružen čestici podeli na dva, oni mogu koherentno interferirati jedan sa drugim i tako formirati jedinstveno stanje, koje će predstavljati superpoziciju dva talasna stanja [61]. Naravno, analogna situacija prisutna je i u kvantnoj informatici, gde se kubit nalazi u superpoziciji dva stanja.

Sa druge strane, kvantna zamršenost je fenomen koji obuhvata superpoziciju deljenog kvantnog stanja dve različite čestice [61]. Ono što je posebno svojstvo zamršenosti jeste činjenica iznikla prilikom razmatranja narušenja Belove nejednakosti, a to je da efekat merenja jedne čestice automatski utiče na drugu, ma koliko ona bila udaljena. Znači, dve čestice povezane su neraskidivim vezama zamršenosti i mogu se razmatrati isključivo kao jedinstveni entitet, nikako pojedinačno.

Međutim, kako se uspostavlja veza između ove dve veličine? Za početak, na osnovu relacija (5.37) i (5.38) može se dobiti relacija neodređenosti za relativnu entropiju koherentnosti i entropiju u obliku [54]:

$$C_{re}(\rho) + S(\rho) \leqslant \log_2 d \tag{5.39}$$

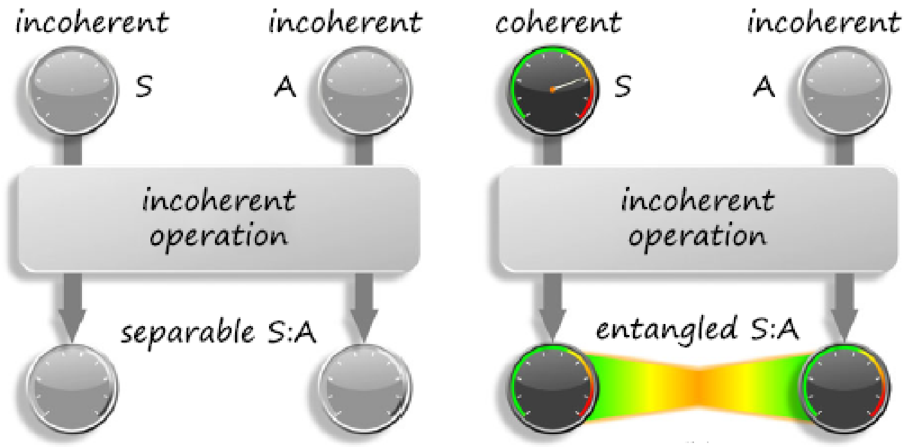
Ovo praktično može da znači da što je veća entropija, koherentnost je manja. Specifično, za maksimalno mešano stanje kvantni sistem ne poseduje koherentnost. Može se reći da, ako je sistem u zamršenoj vezi sa spoljašnjim sistemom, koherentnost sistema opada [54]. Naravno, u obzir treba uzeti da u relaciji (5.39) nema znaka jednakosti nego nejednakosti, te ovi zaključci ne moraju uvek važiti, ali je bitno da postoji određena granica koja se ne može preći.

Takođe, shodno [54] postoji teorema koja za dato dvokubitno stanje ρ_{AB} kaže da važi:

$$E_f(\rho_{AB}) + C_{re}(\rho_A) \leqslant \log_2 d_A \tag{5.40}$$

što ukazuje na to da, uslovno rečeno, povećanje koherentnosti u podsistemu A može dovesti do smanjenja zamršenosti između dva podsistema. Dakle, što su više dva podsistema zamršena, više koherentnost plaća cenu. Znači da bi za postizanje maksimalne koherentnosti sistem morao biti potpuno izolovan, što nije povoljno za korišćenje moći kvantne zamršenosti u kvantno-informatičkim sistemima [54].

Osim toga, [10] ukazuje na to da ma koja nenulta količina koherentnosti u sistemu S može biti prevedena u zamršenost između S i prvobitno nekoherentnog sistema posredstvom nekoherentnih operacija (slika 19). Dakle, u ovom slučaju veza između dve pojave data je pomoću operacije koju je potrebno izvršiti, što bi značilo da bi se koherentnost mogla meriti indirektno, merenjem zamršenosti.



Slika 19. Nekoherentne operacije ne mogu generisati zamršenost iz nekoherentnih ulaznih stanja, ali iz koherentnih mogu. Slika je preuzeta iz [10].

Dakle, veza između kvantne zamršenosti i kvantne koherentnosti još nije u potpunosti razrađena, ali je evidentna. U praktičnom delu rada biće reči o konkurentnosti kao meri zamršenosti i relativnoj entropiji koherentnosti kao meri koherentnosti, te će u specifičnom primeru (sistemu i veličinama) biti rasuđeno kakva je korelacija između ove dve pojave i da li ona uopšte postoji.

6 Osnove metode renormalizacione grupe. Kvantni fazni prelazi

Ovaj segment biće posvećen osvrtu na osnovne ideje procedure renormalizacione grupe (nadalje RG), koja će predstavljati i središnje sredstvo celokupne kompozicije praktičnog dela rada. Stoga je neophodno otići korak unazad i podsetiti se nekih istorijskih momenata same metode.

Naime, ideja o invarijantnosti skale leži u srži ideje o primeni renormalizacione grupe, ali osnovni koncept ove ideje seže u daleku prošlost, svoje korene vukući iz vremena velikih pitagorejaca, konačno kulminirajući u Euklidovim razmatranjima [62]. Međutim, proći će još mnogo vremena pre no što ova osnova nađe način da uplovi u okvire korisnog oruđa kao što je renormalizaciona grupa. U nekom prvom, još nerazrađenom obliku ova metoda iznikla je u radu E. C. G. Štukelberga i A. Pitermana 1953. godine i u narednim godinama doživela svoj razvitak u cilju eliminacije beskonačnosti u kvantnoj teoriji polja shodno renormalizaciji fizičkih parametara sistema [63].

Međutim, prava teorija počinje da se razvija tek 1967. godine u radu Lea Kadanova [63]. Naime, on predlaže metod transformacije spinskih problema u probleme blok-spinova za modele Izingovog tipa i dobija izvesne empirijske relacije između skalirajućih eksponenata, o čemu će takođe biti reči. Doduše, iako je seme ideje zasejano u Kadanovljevom pristupu, klijanje počinje tek u radovima Keneta Vilsona, koji je za svoje doprinose u oblasti faznih prelaza nagrađen i Nobelovom nagradom 1982. godine [62]. Osnovna ideja njegovog istraživanja predstavlja jednostavno, a izuzetno svrsishodno sredstvo, kome je smisao pojednostavljenje prvobitnog problema. Osnovni cilj jeste redukovanje velikog broja stepeni slobode kako bi se uslovio što kompaktniji princip rešavanja problema.

6.1 Vilsonova RG procedura

Osnovni koncepti RG procedure iznikli su u brojnim radovima Keneta Vilsona [65, 66, 67, 68, 69, 70, 71]. U opštem slučaju, RG metod sastoji se iz dva koraka. Prvi korak podrazumeva eliminaciju moda odnosno desetkovanje. Neka polje Φ predstavlja relevantne stepene slobode u sistemu. Desetkovanje u tom slučaju predstavlja proces u kom, ako se radi u pogodnom, impulsnom prostoru, dolazi do eliminacije polja koja su svojstvena visokim vrednostima impulsa. Recimo, ukoliko je za rešavanje ciljanog problema neophodno naći particionu funkciju [64]:

$$Z(\mathbf{g}) = \int D(\Phi) e^{-S(\Phi;\mathbf{g})} \tag{6.1}$$

gde je $S(\Phi;\mathbf{g})$ efektivno dejstvo zavisno od seta konstanti kuplovanja $\mathbf{g} = (g_1, g_2 ...)$, onda eliminacija moda podrazumeva selektivnu integraciju [64]:

$$\begin{aligned} Z &= \int D(\Phi^<) \int D(\Phi^>) e^{-S(\Phi^< + \Phi^>;\mathbf{g})} = \\ &= \int D(\Phi^<) e^{-S_\Lambda^<(\Phi^<;\mathbf{g}^<)} \end{aligned} \tag{6.2}$$

gde je $e^{-S_\Lambda^<(\Phi^<;\mathbf{g}^<)} = \int D(\Phi^>) e^{-S(\Phi^< + \Phi^>;\mathbf{g})}$. U opštem slučaju, konstante kuplovanja $\mathbf{g}^< = (g_1^<, g_2^< ...)$ različite su od polaznih $\mathbf{g} = (g_1, g_2 ...)$ i predstavljaju neku funkciju polaznih konstanti.

Dakle, najpre je neophodno izvršiti separaciju polja Φ u dva potpolja $\Phi^<$ i $\Phi^>$, gde se deo $\Phi^<$ odnosi na fluktuacije talasnih vektora manjih od izabrane granice skale Λ, a $\Phi^>$ predstavlja brže mode, koje uključuju talasne vektore veće od Λ. Naravno, izbor skale je proizvoljan i zavisi od prirode problema. Jednostavan način da se ova separacije implementira u problem jeste korišćenje Hevisajdove step funkcije Θ [64]:

$$\Phi(\mathbf{k}) = \Theta(\Lambda - |\mathbf{k}|)\Phi(\mathbf{k}) + \Theta(|\mathbf{k}| - \Lambda)\Phi(\mathbf{k}), \ \ 1 = \Theta(\Lambda - |\mathbf{k}|) + \Theta(|\mathbf{k}| - \Lambda) \tag{6.3}$$

gde je:

$$\Phi^<(\mathbf{k}) = \Theta(\Lambda - |\mathbf{k}|)\Phi(\mathbf{k}), \quad \Phi^>(\mathbf{k}) = \Theta(|\mathbf{k}| - \Lambda)\Phi(\mathbf{k}) \tag{6.4}$$

Drugi, ali ne i manje važan korak predstavlja promena skale parametara. Cilj je dobiti identičan oblik jednačina obliku prisutnom pre eliminacije moda, samo što on više u sebi ne sadrži iste, već reskalirane parametre. Novi talasni vektori povezani su sa prethodnim na osnovu relacije [64]:

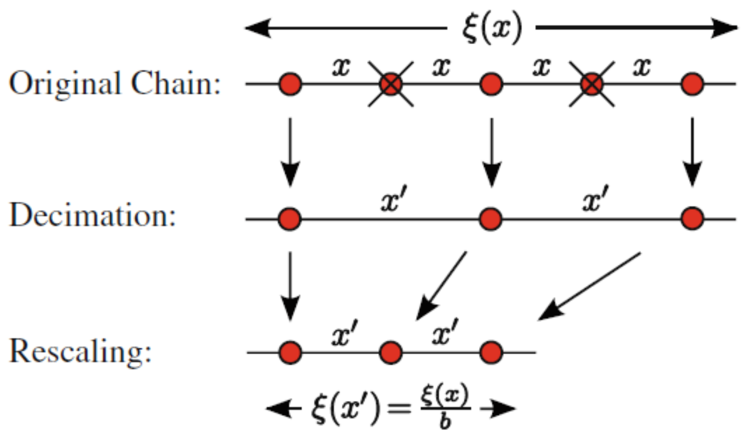
$$\mathbf{k}^{'} = b\mathbf{k} \tag{6.5}$$

gde je b veličina koraka RG transformacije. Reskalirano polje definisano je relacijom [64]:

$$\Phi^{'}(\mathbf{k}^{'}) = \xi_b^{-1}\Phi^{<} \tag{6.6}$$

gde je parametar reskaliranja polja $\xi_b = b^{D_\Phi}\sqrt{Z_b}$. Faktor b^{D_Φ} određuje tzv. kanonska dimenzija D_Φ polja $\Phi(\mathbf{k})$, koja određuje stepen inverzne dužine neophodan da načini $\Phi(\mathbf{k})$ bezdimenzionalnim [64]. Drugi faktor, Z_b usko je povezan sa kritičnim korelacionim eksponentom η [64], o kome će biti reči kasnije.

Najjednostavniji skelet RG procedure pruža Migdal-Kadanovljeva RG procedura u realnom prostoru, o kojoj će biti više reči kasnije. Naime, ukoliko se posmatra rešetka, pređašnji integrali prelaze u sume, a korak b zapravo predstavlja umnožak koji povećava konstantu rešetke u prvom koraku. Drugi korak potom se lako implementira u model vraćanjem konstante rešetke na prvobitnu vrednost. Situacija nakon primenjena oba koraka prikazana je na slici 20. Naravno, slika prikazuje korektan opis dva osnovna koraka date RG procedure.



Slika 20. Prikaz dva osnovna koraka RG procedure. Nakon desetkovanja konstanta rešetke postaje b puta veća od prvobitne, dok korelaciona dužina ostaje ista. Međutim, reskaliranje smanjuje korelacionu dužinu b puta. Slika je preuzeta iz [64].

Kombinacija dva koraka dovodi do ultimativnog prelaska sa prostora kuplovanja $\mathbf{g} = (g_1, g_2...)$ modela sistema sa dejstvom $S(\Phi;\mathbf{g})$ na prostor modifikovanog seta kuplovanja $\mathbf{g}^{'} = (g_1^{'}, g_2^{'}...)$ renormiranog modela sa dejstvom $S^{'}(\Phi^{'};\mathbf{g}^{'})$. Navedeno mapiranje predstavlja srž RG transformacije i generalno se može zapisati u obliku:

$$\mathbf{g}^{'} = \mathbf{R}(b;\mathbf{g}) \tag{6.7}$$

$\mathbf{R}(b;\mathbf{g})$ generalno deluje na beskonačno dimenzioni prostor kuplovanja i može predstavljati komplikovanu nelinearnu funkciju prvobitnih kuplovanja $\mathbf{g}$. Set ovakvih transformacija predstavlja semigrupu, koju karakteriše isti kompozicioni zakon kao grupu, ali se ne očekuje da ovakva transformacije obavezno poseduje i sebi inverznu [64]. Dve sukcesivne transformacije okarakterisane faktorima b i $b^{'}$ ekvivalentne su jednoj transformaciji sa faktorom $b^{"} = b^{'}b$, što potvrđuje navedenu osobinu. Dakle, ako je:

$$\mathbf{g}^{'} = \mathbf{R}(b; \mathbf{g}), \quad \mathbf{g}^{"} = \mathbf{R}(b^{'}; \mathbf{g}^{'}) \tag{6.8}$$

onda je:

$$\mathbf{g}^{"} = \mathbf{R}(b^{'}; \mathbf{R}(b; \mathbf{g})) = \mathbf{R}(b^{'}b; \mathbf{g}) \tag{6.9}$$

Kompletna RG procedura zasniva se na ponavljanju koraka počevši od parametra $\mathbf{g}^0 = g$ pomoću veze:

$$\mathbf{g}^n = \mathbf{R}(b; \mathbf{g}^{(n-1)}) = \mathbf{R}(b^n; \mathbf{g}) \tag{6.10}$$

Za $n \to \infty$ konačni parametar reskaliranja divergira, što znači da su sad obuhvaćeni svi stepeni slobode. U praksi postoji veliki broj mogućnosti za sprovođenje RG procesa. Recimo, prvi korak može se odvijati u realnom prostoru, prostoru talasnih vektora, pa čak i u prostoru frekvencija [64]. Postoji i veliki broj opcija za izbor veličine koraka b, pa i granice Λ. Jedna od mogućnosti, o kojoj će biti više reči u nastavku segmenta, jeste Migdal-Kadanovljeva renormalizaciona grupa u realnom prostoru [72, 73]. Takođe, česta je i opcija primene RG u impulsnom prostoru [70], metod funkcionalne RG [74], metod kontinualnih unitarnih transformacija [75] i drugi.

6.2 Krucijalna svojstva RG procedure

Ukoliko je poznata RG transformacija oblika $\mathbf{R}(b; \mathbf{g})$, koja deluje na set kuplovanja $\mathbf{g} = (g_1, g_2 ...)$, fiksna tačka RG procedure je posebna tačka $\mathbf{g}^* = (g_1^*, g_2^* ...)$ u prostoru kuplovanja koja je invarijantna na transformacije tipa $\mathbf{R}(b; \mathbf{g})$ [64]:

$$\mathbf{g}^* = \mathbf{R}(b; \mathbf{g}^*) \tag{6.11}$$

Fiksne tačke predstavljaju osnovno svojstvo RG procedure, koje i omogućava primenu iste u razmatranju kritičnog ponašanja sistema. Naime, bilo koja RG fiksna tačka opisuje ili kritični sistem sa beskonačnom korelacionom dužinom ili dekuplovan sistem nulte korelacione dužine [64]. Korelaciona dužina se nakon prve RG iteracije, kao što je uočljivo na slici 20, transformiše u:

$$\xi(\mathbf{g}^{'}) = \frac{\xi(\mathbf{g})}{b} \tag{6.12}$$

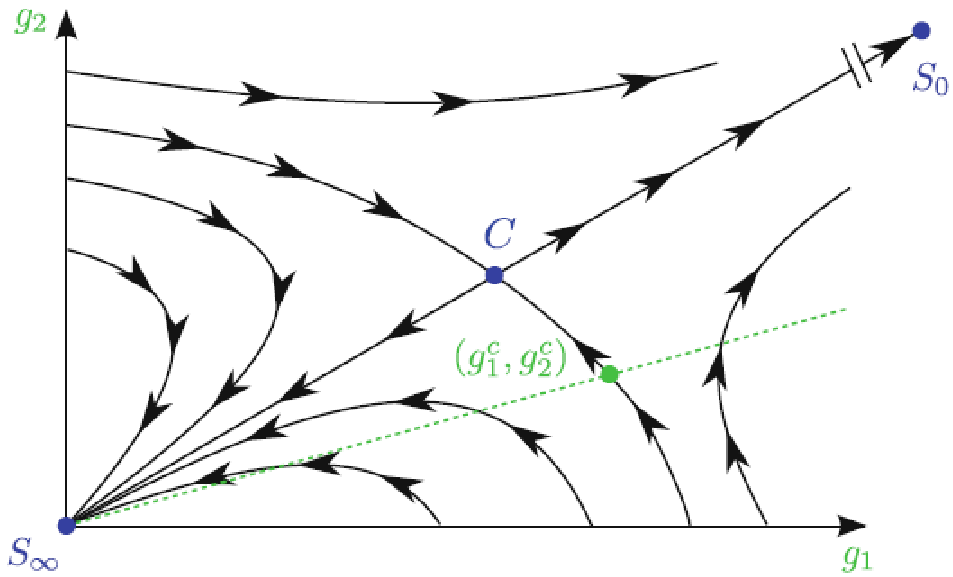
sa proizvoljnim $b > 1$. Ukoliko se sad iskoristi svojstvo $\mathbf{g} = \mathbf{g}^* = \mathbf{g}^{'}$, za fiksnu tačku očito važi:

$$\xi(\mathbf{g}^*) = \frac{\xi(\mathbf{g}^*)}{b} \tag{6.13}$$

što važi samo za $\xi(\mathbf{g}^*) = \infty$ ili $\xi(\mathbf{g}^*) = 0$. Fiksne tačke sa beskonačnom korelacionom dužinom, što je i glavno svojstvo kritične tačke, nazivaju se kritičnim, odnosno nestabilnim fiksnim tačkama, a fiksne tačke sa nultom korelacionom dužinom su trivijalne, odnosno stabilne fiksne tačke [76]. U opštem slučaju sistem ima više fiksnih tačaka, pa i čitav kontinuum fiksnih tačaka koje formiraju složene strukture u prostoru kuplovanja. Svaka fiksna tačka ima mrežu atrakcije, koja obuhvata sve tačke u prostoru kuplovanja koje u procesu RG iteracija uviru u fiksnu tačku. Mreža atrakcije kritične fiksne tačke naziva se kritična površina

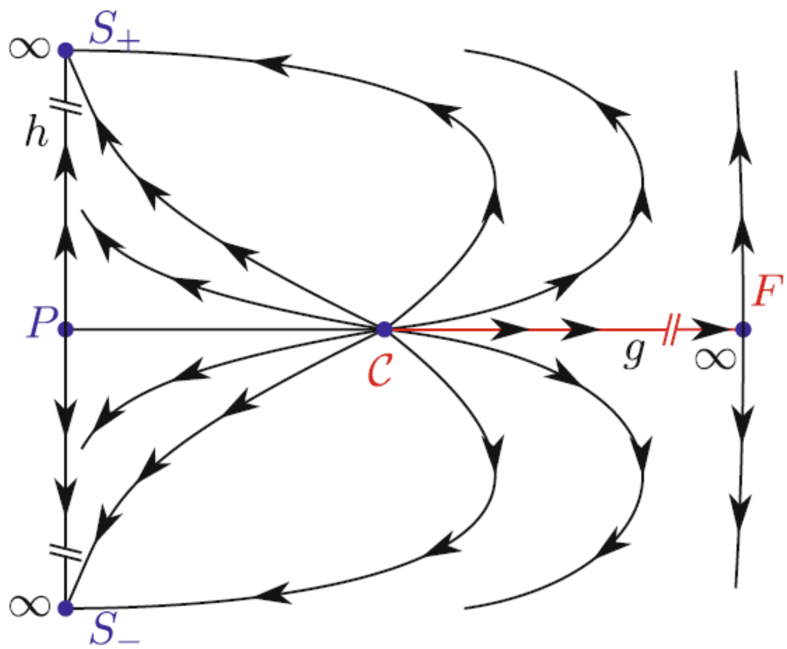
[64]. Ispostavlja se da kritična dužina nije beskonačna samo u kritičnoj fiksnoj tački, već duž čitave kritične površine koja se mapira u spomenutu kritičnu tačku kako teče RG procedura. Dakle, sva kuplovanja na kritičnim površinama opisuju sistem u kritičnoj tački [64].

Na slici 21 nalazi se prikaz RG toka za kvadratnu rešetku Izingovog modela opisanu bezdimenzionim kuplovanjima $g_1 = \beta J$ i $g_2 = \beta J^{'}$ sa interakcijom najbližih suseda (J) i drugih najbližih suseda ($J^{'}$).

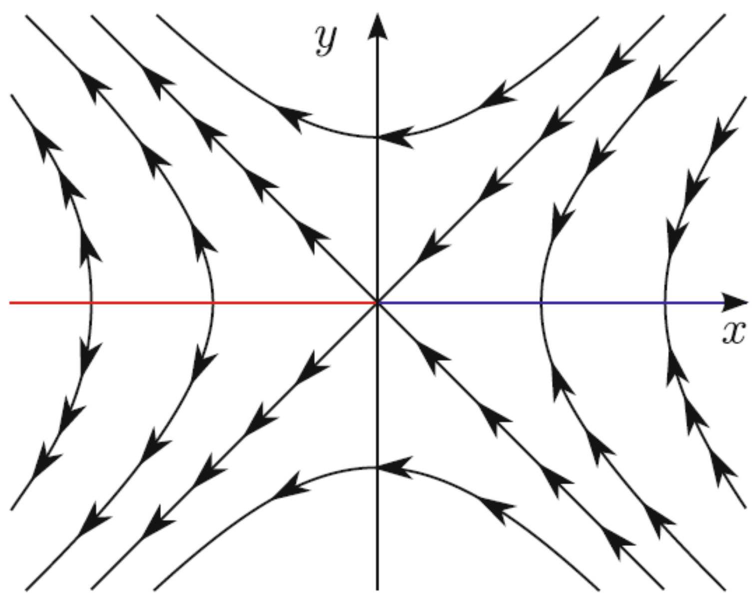


Slika 21. Prikaz RG toka u slučaju kvadratne rešetke Izingovog modela sa interakcijom između najbližih i drugih najbližih suseda. Uočljive su dve stabilne (S_0 i S_∞) i jedna nestabilna (C) fiksna tačka. Slika je preuzeta iz [64].

Pogodno je sve fiksne tačke nekako grupisati u zavisnosti od broja nezavisnih relevantnih kuplovanja (kuplovanja koja odvlače RG tok od fiksnih tačaka), vrednosti korelacione dužine i oblika mreža atrakcije. Stoga postoje već opisane kritične tačke sa beskonačnom korelacionom dužinom i različitim brojem relevantnih kuplovanja (recimo, za tri kuplovanja kritične tačke se nazivaju trikritičnim i slično), slivovi, fiksne tačke sa jednim relevantnim kuplovanjem, fiksne linije, pa i neki egzotični oblici poput kružnih tokova, pa i potpunog izostanka fiksnih tačaka [64]. Na slici 22 prikazani su neki oblici fiksnih tačaka, a na slici 23 nalazi se prikaz fiksne linije.



Slika 22. Prikaz nekih vrsta fiksnih tačaka. Uočljiva je kritična fiksna tačka C, a S^+ i S^- su slivovi, koji imaju samo irelevantna kuplovanja, odnosno nema izlivajućeg kuplovanja. P i F su fiksne tačke sa jednim relevantnim kuplovanjem h, pri čemu je P kontinualna fiksna tačka sa $\xi = 0$, koja je nestabilna za nenulto polje, a F je diskontinualna fiksna tačka sa $\xi = 0$ i magnetizacijom koja doživljava diskontinualan skok nakon dostizanja ove tačke. Slika je preuzeta iz [64].

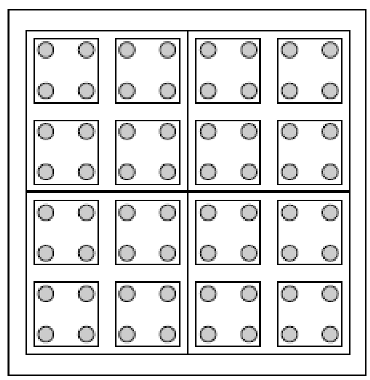


Slika 23. Prikaz fiksne linije. Slika je preuzeta iz [64].

6.3 Kadanovljevi blok-spinovi

Skalirajuća forma slobodne energije formulisana je kao hipoteza i pre formulisanja RG procedure u radu Lea Kadanova iz 1967. godine, u kom se definišu i blok-spinovi. Za spinske sisteme sa spinovima lokalizovanim u čvorovima može se primeniti proces eliminacije moda kroz nalaženje parcijalnog traga po Hilbertovim prostorima vezanim za određene blokove spinova [64]. Nakon eliminacije moda, proizvod ostaje efektivni hamiltonijan, gde blokove spinova zamenjuju efektivni spinovi u konfiguraciji nešto razređenije rešetke. U drugom koraku su dužinske skale vraćene na originalnu veličinu. Za više od jedne dimenzije, doduše, Migdal-Kadanovljeva procedura (predložena 1975. godine od strane Migdala i 1976. od strane Kadanova) zahteva aproksimacije i nije egzaktno rešiva [64].

Srž procedure zasniva se na prvoj ideji Kadanova o blok-spinovima. Šematski se situacija može predstaviti kao na slici 24. Osnovna postavka zasniva se na već predočenoj činjenici da se blok-spin u određenom smislu predstavlja kao izolovan spin. Jedina neophodna promena tiče se konstanti kuplovanja.



Slika 24. Prikaz formiranja blok-spinova u matrici prvobitno izolovanih spinova. Slika je preuzeta iz [77].

Prvi model na koji je primenjena Kadanovljeva metoda blok-spinova bio je Izingov model. Čitava d-dimenziona hiperkubna rešetka ovom prilikom izdeljena je na blokove i za njih je uzet poseban, kolektivni operator spina [63]. Ukoliko su parametri temperature $t = \frac{T-T_C}{T_C}$ i polja h, gde je T_C kritična temperatura na kojoj dolazi do faznog prelaza, opisivali polazni model, renormalizovani model opisivaće faktori $\tilde{t} = tb^y$ i $\tilde{h} = hb^x$, gde je b dimenzija bloka, a x i y su pozitivni parametri usled toga što se na taj način sistem udaljava od kritične tačke.

Singularan deo slobodne energije je, prema glavnoj postavci Kadanova, u slučaju blok-spina ista funkcija $\tilde{t}$ i $\tilde{h}$ kao što je prvobitno bila za parametre t i h, te se za b^d čvorova po bloku za singularan deo ove funkcije, dominantan u okolini kritične tačke, može pisati [77]:

$$G_{sing}(t,h) = b^{-d} G_{sing}(b^y t, b^x h) \tag{6.14}$$

gde je data generalna forma skalirajuće relacije slobodne energije sa još uvek nedefinisanim parametrima x i y. Kako je rastojanje između blok-spinova b (odnosno konstanta rešetke pomnožena parametrom b u dužinskim jedinicama), očekuje se redukcija korelacione dužine za isti parametar [77]:

$$\xi(t,h) = b\xi(b^y t, b^x h) \tag{6.15}$$

Međutim, kakvo fizičko značenje ima korelaciona dužina? Naime, u blizini kritične temperature kontinualnog faznog prelaza (faznog prelaza II reda) sve veći broj mikroskopskih stepeni slobode se kupluje i ponaša kao jedinstveni entitet. Korelaciona dužina predstavlja tipičnu skalu dužine reona u kojima su ova kuplovanja jaka [64]. Takođe, u skladu sa [77] u blizini kritične tačke korelaciona dužina divergira pokoravajući se zakonu skaliranja:

$$\xi(t,0) \sim |t|^{-\nu} \tag{6.16}$$

gde je razmatran slučaj nultog polja. Na ovaj način, očito se eksponent y može povezati sa kritičnim eksponentom korelacione dužine ν. Ako jednačine (6.14) i (6.15) važe za ma koje b, važe i za $b = |t|^{-1/y}$, te ako se uzme $h = 0$, dobijaju se izrazi:

$$G_{sing}(t,0) = |t|^{d/y} G_{sing}(\pm 1, 0) \tag{6.17}$$

$$\xi(t,0) = |t|^{-1/y} \xi(\pm 1, 0) \tag{6.18}$$

Shodno kritičnom ponašanju specifične toplote pri nultom polju [64], piše se sledeće:

$$C \approx T_C^{-1} \frac{\partial^2 G_{sing}}{\partial t^2}|_{h=0} \sim |t|^{\frac{d}{y}-2} = |t|^{-\alpha} \tag{6.19}$$

te je očito:

$$2 - \alpha = \frac{d}{y} \tag{6.20}$$

Kako relacija (6.18) navodi na zaključak da je $\nu = \frac{1}{y}$, prva hiperskalirajuća relacija dobijena u Kadanovljevom radu postaje:

$$2 - \alpha = d\nu \tag{6.21}$$

Takođe, Kadanovljeva hipoteza uključuje i singularni oblik korelacione funkcije, koji postaje dominantan u okolini kritične tačke. Na osnovu [77] singularni deo zadovoljava relaciju:

$$\Gamma_{sing}(|\mathbf{r}|; t, h) = b^{-2(d-x)} \Gamma_{sing}(\frac{|\mathbf{r}|}{b}; b^y t, b^x h) \tag{6.22}$$

Ukoliko se razmatra kritična tačka, Γ_{sing} ima asimptotsko ponašanje oblika [77]:

$$\Gamma_{sing}(|\mathbf{r}|; 0, 0) \sim |\mathbf{r}|^{-d+2-\eta} \tag{6.23}$$

Relacija (6.22) važi za proizvoljno b, pa i za $b = |\mathbf{r}|$, te je veza:

$$2x - d = 2 - \eta \tag{6.24}$$

Veza sa eksponentom γ postiže se na osnovu kritičnog ponašanja susceptibilnosti pri nultom polju [64]:

$$\chi \approx \frac{\partial^2 G_{sing}}{\partial h^2}|_{h=0} \sim |t|^{\frac{d-2x}{y}} = |t|^{-\gamma} \tag{6.25}$$

te je očito druga hiperskalirajuća relacija:

$$\gamma = (2-\eta)\nu \tag{6.26}$$

Preostale dve hiperskalirajuće relacije dobijene su na osnovu kritičnog ponašanja magnetizacije. U blizini kritične tačke, pri nultom polju, spontana magnetizacija ima sledeće ponašanje [64]:

$$m \approx -\frac{\partial G_{sing}}{\partial h}|_{h=0} \sim (-t)^{\frac{d-x}{y}} = (-t)^{\beta} \tag{6.27}$$

Odavde je treća hiperskalirajuća relacija oblika:

$$\beta = \frac{\nu}{2}(d-2+\eta) \tag{6.28}$$

Za konačna polja, kako se temperatura približava kritičnoj, pri konačnim vrednostima polja, ponašanje magnetizacije je oblika [64]:

$$m(t,h) \approx -\frac{\partial G_{sing}}{\partial h} = |t|^{\frac{d-x}{y}} \Sigma'_{\pm}\Big(\frac{h}{|t|^{x/y}}\Big) \tag{6.29}$$

gde je $\Sigma'_{\pm}(z) = \frac{d\Sigma_{\pm}(z)}{dz}$. Da bi se dobila konačna vrednost magnetizacije u slučaju približavanja kritičnoj tački ($t \to 0$, $z \to \infty$), funkcija $\Sigma'_{\pm}(z)$ mora biti oblika $z^{d/x-1}$, te je kritična izoterma:

$$m(h) \sim h^{\frac{d}{x}-1} = h^{\frac{1}{\delta}} \tag{6.30}$$

Na taj način, četvrta Kadanovljeva hiperskalirajuća relacija za kritične eksponente poprima oblik:

$$\delta = \frac{d+2-\eta}{d-2+\eta} \tag{6.31}$$

Naravno, dobijene hiperskalirajuće relacije i skalirajuća ponašanja opisana su u svojstvu termalnih fluktuacija. Ispostavlja se da je kritično ponašanje i pojava faznog prelaza moguća i u slučaju razmatranja neklasičnih fluktuacija, o čemu će biti reči u narednom odeljku.

6.4 Kvantni fazni prelazi

Na konačnim temperaturama, shodno već opisanoj mašineriji, u obzir se, kao dominantan faktor, uzimaju klasične termalne fluktuacije i celokupno kritično ponašanje pripisuje se njima. Zaista, na konačnim temperaturama ne može se ni očekivati da do izražaja dođu fluktuacije kvantne prirode. Međutim, može li do njihovog ispoljavanja doći u slučaju nulte temperature? I kako bi njihovo registrovanje uopšte izgledalo?

Za početak, sama pojava faznih prelaza kroz istoriju je naišla na brojne definicije i objašnjenja, od kojih je i danas najčešće korišćena Erenfestova klasifikacija faznih prelaza. Naime, za neki sistem se kaže da prolazi kroz fazni prelaz n-tog reda ($n = 1, 2...$) za one vrednosti parametara sistema za koje odgovarajući termodinamički potencijal ima ($n-1$) neprekidan izvod, dok n-ti ima skok, a ($n+1$)-vi divergira [78]. U savremenoj teoriji, doduše, dopušta se i mogućnost da su svi izvodi do n-tog neprekidni, a da n-ti divergira. Takođe, danas su uglavnom svi fazni prelazi svrstani u dve velike grupe: među fazne prelaze I ili II reda [78]. Međutim, Erenfest je govorio o klasičnim faznim prelazima, koje opisuju termalne fluktuacije, a ovaj rad biće baziran na pojavi kvantnih faznih prelaza.

Naime, tipična energijska skala vezana za vremenske fluktuacije nestaje u blizini faznog prelaza u skladu sa zakonom [64]:

$$E_C = \frac{\hbar}{\tau_C} \sim |t|^{\nu z} \sim |T - T_C|^{\nu z} \tag{6.32}$$

gde je z tzv. dinamički eksponent, a τ_C tipično vreme raspada vremenskih fluktuacija. U blizini kritične tačke τ_C divergira i dolazi do kritičnog usporenja sistema [64].

U skladu sa Hercovim nalazima, u kvantnim sistemima statičke i dinamičke fluktuacije nisu nezavisne, jer hamiltonijan pored opisa particione funkcije predstavlja i sredstvo za opisivanje vremenske evolucije opservabli u skladu sa Hajzenbergovim jednačinama kretanja [64]. Stoga je u kvantnim sistemima energija E_C ujedno i tipična fluktuaciona energija statičkih fluktuacija. Dakle, za $E_C \ll T$ kvantni efekti su zanemarljivi i termalne fluktuacije pružaju dobar opis sistema.

Međutim, na nultoj temperaturi ispostavlja se da ostaje mogućnost pojave faznih prelaza definisanih parametrom r. Ovi prelazi predstavljaju široku grupu kvantnih faznih prelaza i ispoljavaju se kroz neanalitičnost svojstava osnovnog stanja na $r = r_C$. Tačka $r = r_C$ naziva se kvantna kritična tačka [64].

Postoje razne opcije prilikom biranja parametra r. Recimo, elektroni u neuređenim sistemima prolaze kroz prelaz tipa metal-izolator u funkciji jačine razuređenja [64]. Kvantni fazni prelaz u okviru kvantnog opisa Holovog efekta bazira se na podešavanju spoljašnjeg polja kao parametra r [64]. Za Mot-Habardov prelaz zadužena je jačina interakcije kao netermalni parametar [64].

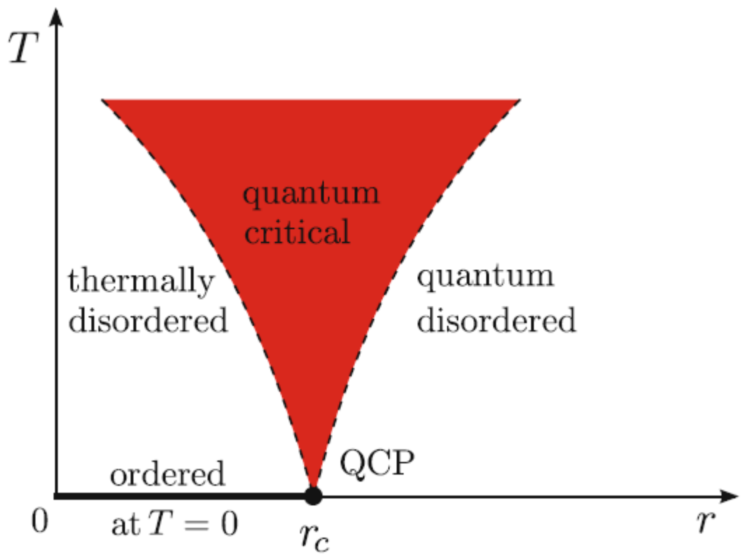
U slučaju kvantnih faznih prelaza, vreme deluje kroz dodatnu dimenziju koja efektivno povećava dimenzionalnost sistema. Na osnovu ove činjenice, kada temperatura sistema teži nuli, skalirajuća svojstva kvantnih sistema analogna su svojstvima efektivnog klasičnog sistema sa $d+z$ dimenzija, te se kvantna skalirajuća relacija za singularni deo slobodne energije može zapisati u obliku [64]:

$$G_{sing}(g,h) = b^{-(d+z)} G_{sing}(b^w g, b^x h) \tag{6.33}$$

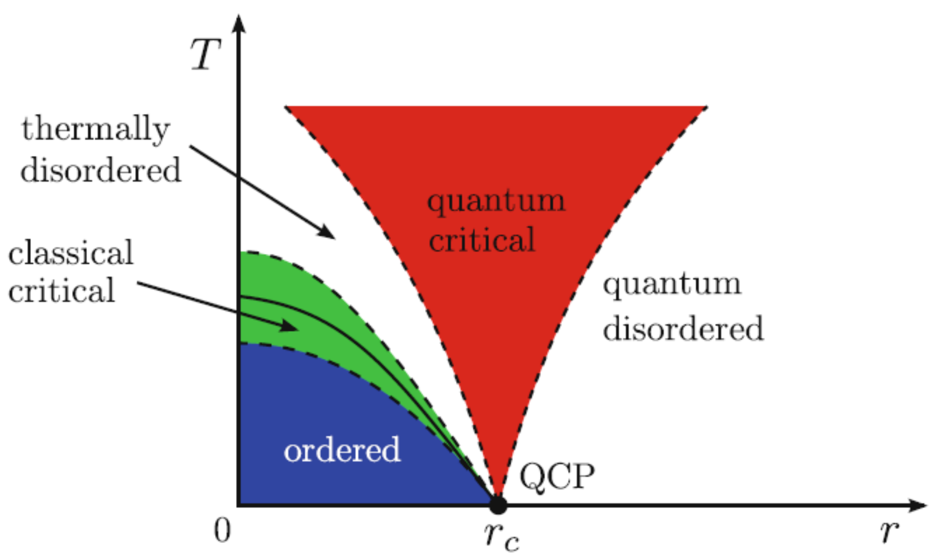
gde je $g = \frac{|r-r_C|}{r_C}$, a $1/w = \nu$. Za konačne temperature relacija poprima oblik [64]:

$$G_{sing}(g,h,T) = b^{-(d+z)} G_{sing}(b^w g, b^x h, b^z T) \tag{6.34}$$

Usklađenost klasičnih i kvantnih fluktuacija u blizini kvantne kritične tačke prikazana je u oba navedena slučaja na slikama 25 i 26. Uočljiv je kvantni kritični region u kom su od presudnog značaja kvantne fluktuacije, dok se oko njega nalaze termalno razuređen region i kvantno razuređen region. Ako sistem ima konačnu kritičnu temperaturu, postoji dodatni segment u kom se ispoljava klasično kritično ponašanje.



Slika 25. Regioni u blizini kvantne kritične tačke u sistemu u kom je $T_C = 0$. Slika je preuzeta iz [64].



Slika 26. Regioni u blizini kvantne kritične tačke u sistemu u kom je $T_C \neq 0$. Slika je preuzeta iz [64].

7 Praktični proračuni u XY modelu sa Đalošinski-Morija interakcijom

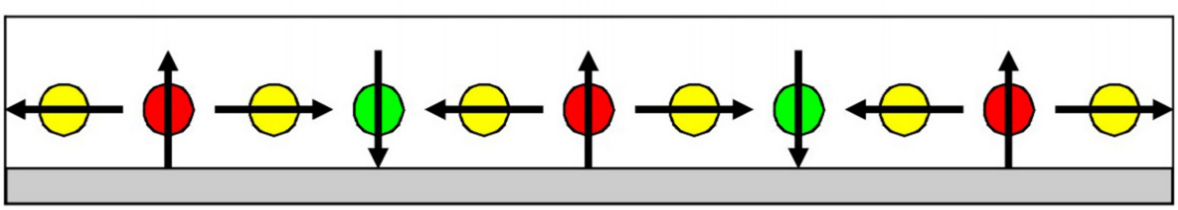
Kao što je već rečeno u teorijskom segmentu rada, problem kvantne zamršenosti i kvantne koherentnosti u realnim kvantno-mehaničkim sistemima od velikog je značaja za razvijanje teorije kvantne informatike i razmatranje pojava koje one mogu omogućiti u datom sistemu. Ispostavlja se da je koherentnost dosta opštija pojava od zamršenosti [8], ali je i dalje prilično mlada i od iznimne je važnosti naći odgovarajuću vezu između dva vodeća kvantno-mehanička entiteta u cilju boljeg razumevanja same koherentnosti.

Takođe, kao što je u uvodu i navedeno, kvantni fazni prelazi su u prethodnih nekoliko godina podrobno izučavani u oblasti kvantne informatike. Ovaj konkretan pristup posredstvom sredstava kvantne informatike, što će u ovom slučaju biti na osnovu razmatranja koherentnosti i zamršenosti, omogućava detekciju kvantnog faznog prelaza bez posedovanja prethodnog znanja o samoj prirodi parametra netermalnog faznog prelaza [8]. U ovom konkretnom slučaju biće reči o tome koji parametri su validni parametri prelaza, a koji ne prilikom uzimanja u obzir XY anizotropnog modela frustriranog Đalošinski-Morija (DM) interakcijom.

Naime, izučavanje uticaja DM interakcije danas može biti veoma značajno, pošto su uočeni realni fizički sistemi u kojima ona ne može biti zanemarena. Recimo, jedan od takvih sistema je i $CsCuCl_3$ [79]. Sama interakcija uvedena je od strane Đalošinskog 1958. godine [80] i potom uobličena od strane Morije 1960. godine [81]. Polazni fenomenološki model interakcije Đalošinskog je u Morijinom radu teorijski iznikao u vidu realnog efekta do kog dolazi u materijalima usled spin-orbitalnog kuplovanja [81]. Antisimetrična razmena, ili DM interakcija, potiče od antisimetričnog dela interakcione matrice oblika [82]:

$$H_{DM} = \mathbf{D}_{ij} \cdot (\mathbf{S}_i \times \mathbf{S}_j) = (\mathbf{D}_{ij} \cdot \mathbf{n}) \sin \varphi_{ij} \tag{7.1}$$

gde je vektor $\mathbf{D}_{ij}$ vektor Đalošinskog, a $\mathbf{S}_i$ i $\mathbf{S}_j$ operatori spina na čvorovima i i j. Može se videti da je ovaj vid razmene maksimalan za $\varphi_{ij} = \frac{\pi}{2}$ i stoga favorizuje težnju spinova da se postave međusobno normalno [82]. Usled relacije $H_{DM}(\varphi) = -H_{DM}(-\varphi)$ ukida se degeneracija između spiralnih vektora suprotnog smera i preferentan je određeni rotacioni pravac, koji zavisi od znaka $\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}$, te se ove strukture nazivaju hiralnim [82].



Slika 27. DM interakcija favorizuje normalno postavljanje spinova. Slika je preuzeta sa [83].

Ukoliko se razmatraju dva spina na pozicijama $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$, gde je sredina njihove razdaljine locirana na $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2}$, vektor DM interakcije postavlja se u skladu sa sledećim pravilima baziranim na simetrijskim proračunima [82]:

1. ako je centar inverzije lociran na $\mathbf{r}$, $\mathbf{D} = 0$,
2. ako ogledalska ravan normalna na $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ uključuje $\mathbf{r}$, $\mathbf{D}$ je normalan na $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$,
3. ako ogledalska ravan uključuje $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{D}$ je normalan na nju,
4. ako osa rotacije drugog reda normalna na $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ obuhvata $\mathbf{r}$, $\mathbf{D}$ je normalan na nju i
5. ako osa rotacije n-tog reda obuhvata $\mathbf{r}_1$ i $\mathbf{r}_2$, onda je $\mathbf{D}$ paralelan $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

U radu će biti razmatran XY anizotropni model sa DM interakcijom, a specifičan slučaj biće baziran na trokubitnom sistemu. Sam XY anizotropni model predstavlja Hajzenbergov dvodimenzioni model u kom je prisutan određeni vid anizotropije, te ako se razmatra aproksimacija najbližih suseda, on je predstavljen hamiltonijanom:

$$H = J \sum_{i=1}^{N} \big((1+\gamma)S_i^x S_{i+1}^x - \big(1-\gamma\big)S_i^y S_{i+1}^y\big) \tag{7.2}$$

gde je γ parametar anizotropije, a S^α matrice ($\alpha = x, y, z$) predstavljaju već spomenute spinske operatore, čija je veza sa Paulijevim matricama korišćenim u daljem radu:

$$S^\alpha = \frac{\hbar}{2}\sigma^\alpha \tag{7.3}$$

za čestice spina $s = \frac{1}{2}$, a nadalje će se uzimati i $\hbar = 1$.

Cilj praktičnog dela rada biće opisati ponašanje kvantne zamršenosti i kvantne koherentnosti u okviru spomenutog modela pomoću konkurentnosti i relativne entropije koherentnosti, te videti na koji način iz njihovog računa može iznići mogućnost kvantnih faznih prelaza. Međutim, pre svega je neophodno uvesti matricu gustine problema s obzirom na to da sve naredne veličine zavise upravo od nje.

7.1 Matrica gustine XY modela sa Đalošinski-Morija interakcijom

Značaj matrice gustine u problemima kvantne mehanike već je detaljno istražen u prethodnim segmentima. Stoga ne čudi činjenica da i u konkretnim fizičkim problemima ona predstavlja polaznu tačku prilikom bavljenja bilo kakvim kvantno-informatičkim veličinama. Međutim, kako se matrica gustine (3.85) izračunava na osnovu nekog bazisa Hilbertovog prostora, u ovom slučaju biće razmatran specifičan modelni hamiltonijan, čiji će svojstveni bazis biti iskorišćen prilikom izračunavanja konkretne matrice gustine. U ovom slučaju, najpre će se razmatrati model jednodimenzionog anizotropnog hamiltonijana XY spinskog sistema sa DM interakcijom koji se sastoji od tri čvora [8]:

$$H = \frac{J}{4}\sum_{i=1}^{2}\Big(\big(1+\gamma\big)\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x - \big(1-\gamma\big)\sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + D\big(\sigma_i^x\sigma_{i+1}^y + \sigma_i^y\sigma_{i+1}^x\big)\Big) \tag{7.4}$$

gde je J konstanta izmene između najbližih suseda, γ parametar anizotropije, D jačina DM interakcije u z-pravcu, a σ_i^α ($\alpha = x, y$) Paulijeve matrice za i-ti čvor.

Svojstvene vrednosti i svojstveni vektori dobijaju se egzaktnim rešavanjem svojstvenog problema hamiltonijana H. Najpre treba raspisati ovaj hamiltonijan u matričnoj formi. Za to je potrebno u vidu imati oblike jedinične matrice i Paulijevih matrica:

$$I=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\ \sigma^x=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\ \sigma^y=\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix},\ \sigma^z=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix} \tag{7.5}$$

Sada se može preći na raspisivanje hamiltonijana H. Koristi se definicija Kronekerovog proizvoda u matričnoj formi (3.78) i računaju tenzorski proizvodi pojedinačnih Paulijevih matrica i jediničnih matrica vezanih za svaki čvor:

$$\begin{aligned}
H=\frac{J}{4}\Bigg(&(1+\gamma)\big(\sigma_1^x\otimes\sigma_2^x\otimes I_3+I_1\otimes\sigma_2^x\otimes\sigma_3^x\big)\\
&-(1-\gamma)\big(\sigma_1^y\otimes\sigma_2^y\otimes I_3+I_1\otimes\sigma_2^y\otimes\sigma_3^y\big)\\
&+D\big(\sigma_1^x\otimes\sigma_2^y\otimes I_3+I_1\otimes\sigma_2^x\otimes\sigma_3^y+\sigma_1^y\otimes\sigma_2^x\otimes I_3+I_1\otimes\sigma_2^y\otimes\sigma_3^x\big)\Bigg)=\\
=\frac{J}{4}\Bigg(&(1+\gamma)\Big(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\Big)\\
&-(1-\gamma)\Big(\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix}\Big)\\
&+D\Big(\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix}\\
&+\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\Big)\Bigg)=\\
=\frac{J}{4}\Bigg(&(1+\gamma)\Big(\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\Big)\\
&-(1-\gamma)\Big(\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}&0&0\\\mathrm{i}&0&0&0\\0&0&0&-\mathrm{i}\\0&0&\mathrm{i}&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix}\Big)\\
&+D\Big(\begin{bmatrix}0&0&0&-\mathrm{i}\\0&0&\mathrm{i}&0\\0&-\mathrm{i}&0&0\\\mathrm{i}&0&0&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}\\\mathrm{i}&0\end{bmatrix}\\
&+\begin{bmatrix}0&0&0&-\mathrm{i}\\0&0&-\mathrm{i}&0\\0&\mathrm{i}&0&0\\\mathrm{i}&0&0&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&-\mathrm{i}&0&0\\\mathrm{i}&0&0&0\\0&0&0&-\mathrm{i}\\0&0&\mathrm{i}&0\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\Big)\Bigg)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
H = \frac{J}{4}\Bigg(& (1+\gamma)\Big(\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&1&0&0&0 \end{bmatrix}\Big) \\
& -(1-\gamma)\Big(\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&-1&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&1&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-1&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&0&0&-1&0&0&0&0\\ 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-1\\ 0&0&0&0&0&0&1&0\\ 0&0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&-1&0&0&0 \end{bmatrix}\Big) \\
& +D\Big(\begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&-\mathrm{i}&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-\mathrm{i}\\ 0&0&0&0&\mathrm{i}&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\mathrm{i}&0&0\\ 0&0&-\mathrm{i}&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-\mathrm{i}&0&0&0&0\\ \mathrm{i}&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&\mathrm{i}&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&0&0&-\mathrm{i}&0&0&0&0\\ 0&0&\mathrm{i}&0&0&0&0&0\\ 0&-\mathrm{i}&0&0&0&0&0&0\\ \mathrm{i}&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-\mathrm{i}\\ 0&0&0&0&0&0&\mathrm{i}&0\\ 0&0&0&0&0&-\mathrm{i}&0&0\\ 0&0&0&0&\mathrm{i}&0&0&0 \end{bmatrix} \\
& + \begin{bmatrix} 0&0&0&0&0&0&-\mathrm{i}&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-\mathrm{i}\\ 0&0&0&0&-\mathrm{i}&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-\mathrm{i}&0&0\\ 0&0&\mathrm{i}&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&\mathrm{i}&0&0&0&0\\ \mathrm{i}&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&\mathrm{i}&0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0&0&0&-\mathrm{i}&0&0&0&0\\ 0&0&-\mathrm{i}&0&0&0&0&0\\ 0&\mathrm{i}&0&0&0&0&0&0\\ \mathrm{i}&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-\mathrm{i}\\ 0&0&0&0&0&0&-\mathrm{i}&0\\ 0&0&0&0&0&\mathrm{i}&0&0\\ 0&0&0&0&\mathrm{i}&0&0&0 \end{bmatrix}\Big)\Bigg)
\end{aligned} \tag{7.6}
$$

$$
H=\frac{J}{4}\Bigg(\left(1+\gamma\right)\begin{bmatrix}0&0&0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&1&0&0&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&0&0&1&0\\1&0&0&0&0&1&0&0\\0&1&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}-\left(1-\gamma\right)\begin{bmatrix}0&0&0&-1&0&0&-1&0\\0&0&1&0&0&0&0&-1\\0&1&0&0&1&0&0&0\\-1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&-1\\0&0&0&1&0&0&1&0\\-1&0&0&0&0&1&0&0\\0&-1&0&0&-1&0&0&0\end{bmatrix}
$$

$$
+D\begin{bmatrix}0&0&0&-2\mathrm{i}&0&0&-2\mathrm{i}&0\\0&0&0&0&0&0&0&-2\mathrm{i}\\0&0&0&0&0&0&0&0\\2\mathrm{i}&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&-2\mathrm{i}\\0&0&0&0&0&0&0&0\\2\mathrm{i}&0&0&0&0&0&0&0\\0&2\mathrm{i}&0&0&2\mathrm{i}&0&0&0\end{bmatrix}\Bigg)=\frac{J}{4}\Bigg(\begin{bmatrix}0&0&0&2&0&0&2&0\\0&0&2\gamma&0&0&0&0&2\\0&2\gamma&0&0&2\gamma&0&0&0\\2&0&0&0&0&2\gamma&0&0\\0&0&2\gamma&0&0&0&0&2\\0&0&0&2\gamma&0&0&2\gamma&0\\2&0&0&0&0&2\gamma&0&0\\0&2&0&0&2&0&0&0\end{bmatrix}
$$

$$
+\begin{bmatrix}0&0&0&-2\mathrm{i}D&0&0&-2\mathrm{i}D&0\\0&0&0&0&0&0&0&-2\mathrm{i}D\\0&0&0&0&0&0&0&0\\2\mathrm{i}D&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&-2\mathrm{i}D\\0&0&0&0&0&0&0&0\\2\mathrm{i}D&0&0&0&0&0&0&0\\0&2\mathrm{i}D&0&0&2\mathrm{i}D&0&0&0\end{bmatrix}\Bigg) \tag{7.7}
$$

Konačno je matrični oblik hamiltonijana:

$$
H=\begin{bmatrix}0&0&0&\frac{J}{2}(1-\mathrm{i}D)&0&0&\frac{J}{2}(1-\mathrm{i}D)&0\\0&0&\frac{J\gamma}{2}&0&0&0&0&\frac{J}{2}(1-\mathrm{i}D)\\0&\frac{J\gamma}{2}&0&0&\frac{J\gamma}{2}&0&0&0\\\frac{J}{2}(1+\mathrm{i}D)&0&0&0&0&\frac{J\gamma}{2}&0&0\\0&0&\frac{J\gamma}{2}&0&0&0&0&\frac{J}{2}(1-\mathrm{i}D)\\0&0&0&\frac{J\gamma}{2}&0&0&\frac{J\gamma}{2}&0\\\frac{J}{2}(1+\mathrm{i}D)&0&0&0&0&\frac{J\gamma}{2}&0&0\\0&\frac{J}{2}(1+\mathrm{i}D)&0&0&\frac{J}{2}(1+\mathrm{i}D)&0&0&0\end{bmatrix} \tag{7.8}
$$

Svojstvene vrednosti i svojstvene funkcije hamiltonijana H biće nađene u okviru programskog paketa $Wolfram\ Mathematica$. Rešenje svojstvenog problema je dato u okviru Priloga I. Može se uočiti da je, od skupa dobijenih stanja, dobijeno i dvostruko degenerisano osnovno stanje energije:

$$
E_0=-\frac{J}{\sqrt{2}}q \tag{7.9}
$$

gde je $q = \sqrt{1 + D^2 + \gamma^2}$, kojem odgovaraju svojstvene funkcije:

$$|\Psi\rangle = a \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mathrm{i}q}{\sqrt{2}(-\mathrm{i}+D)} \\ -\frac{\mathrm{i}\gamma}{-\mathrm{i}+D} \\ 0 \\ \frac{\mathrm{i}q}{\sqrt{2}(-\mathrm{i}+D)} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.10}$$

$$|\Psi'\rangle = b \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}{q} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\gamma}{q} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.11}$$

Ove funkcije još treba normirati, a kako će biti predstavljene u standardnom bazisu, najpre je neophodno napisati kako izgledaju funkcije ovog bazisa u slučaju tri spina. Kako je već rečeno, opet se očekuje tenzorski proizvod pojedinačnih stanja svakog kubita, koja su predstavljena relacijom (3.68).

$$|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.12}$$

$$|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.13}$$

$$|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{7.14}$$

$$|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{7.15}$$

$$|\uparrow\downarrow\downarrow\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} \tag{7.16}$$

$$|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} \tag{7.17}$$

$$|\downarrow\downarrow\uparrow\rangle = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix} \tag{7.18}$$

$$| \downarrow\downarrow\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.19}$$

gde je $| \uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ i $| \downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Prvo treba normirati dobijene svojstvene funkcije. Pošto je:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \langle \Psi' | \Psi' \rangle = 1 \tag{7.20}$$

u slučaju prve svojstvene funkcije:

$$|\Psi\rangle = a \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mathrm{i}q}{\sqrt{2}(-\mathrm{i}+D)} \\ -\frac{\mathrm{i}\gamma}{-\mathrm{i}+D} \\ 0 \\ \frac{\mathrm{i}q}{\sqrt{2}(-\mathrm{i}+D)} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{q(\mathrm{i}D-1)}{\sqrt{2}(D^2+1)} \\ \frac{\gamma(-\mathrm{i}D+1)}{D^2+1} \\ 0 \\ \frac{q(\mathrm{i}D-1)}{\sqrt{2}(D^2+1)} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{7.21}$$

sa odgovarajućim adjungom:

$$\langle \Psi | = a^* \begin{bmatrix} 0 & \frac{q(-\mathrm{i}D-1)}{\sqrt{2}(D^2+1)} & \frac{\gamma(\mathrm{i}D+1)}{D^2+1} & 0 & \frac{q(-\mathrm{i}D-1)}{\sqrt{2}(D^2+1)} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.22}$$

uslov postaje:

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Psi \rangle = |a^2| \left(2\frac{q^2(1+D^2)}{2(D^2+1)^2} + \frac{\gamma^2(1+D^2)}{(D^2+1)^2} + 1 \right) = |a^2| \frac{(D^2+1)(q^2+\gamma^2+D^2+1)}{(D^2+1)^2} = \\ = |a^2| \frac{q^2+\gamma^2+D^2+1}{D^2+1} = 1 \end{aligned} \tag{7.23}$$

Iz prethodne relacije dobija se konstanta normiranja:

$$|a| = \sqrt{\frac{D^2+1}{2q^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}q} \sqrt{D^2+1} \tag{7.24}$$

Bira se realno rešenje konstante a, te se prva svojstvena funkcija u standardnom bazisu može zapisati kao:

$$
\begin{aligned}
|\Psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}q}\sqrt{D^2+1}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\mathrm{i}q}{\sqrt{2}(-\mathrm{i}+D)} \\ -\frac{\mathrm{i}\gamma}{-\mathrm{i}+D} \\ 0 \\ \frac{\mathrm{i}q}{\sqrt{2}(-\mathrm{i}+D)} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}q}\sqrt{D^2+1}\left(-\frac{q}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \frac{\gamma}{1+\mathrm{i}D}|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - \frac{q}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle \right)
\end{aligned} \tag{7.25}
$$

Sada će se isti postupak primeniti na drugu svojstvenu funkciju:

$$
|\Psi'\rangle = b\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}{q} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\gamma}{q} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.26}
$$

čiji je odgovarajući bra vektor oblika:

$$
\langle\Psi'| = b^*\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}{q} & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}\gamma}{q} & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.27}
$$

te se konačno uslov svodi na:

$$
\begin{aligned}
\langle\Psi'|\Psi'\rangle &= |b|^2\left(\frac{2(D^2+1)}{q^2} + 2 + \frac{2\gamma^2}{q^2}\right) = |b|^2\frac{2(1+D^2+q^2+\gamma^2)}{q^2} = \\
&= |b|^2\frac{2}{q^2}(q^2+q^2) = 4|b|^2 = 1
\end{aligned} \tag{7.28}
$$

Iz prethodne relacije sledi i konačan oblik druge konstante normiranja:

$$
|b| = \frac{1}{2} \tag{7.29}
$$

Opet se bira realno rešenje konstante b i druga svojstvena funkcija u standardnom bazisu ima oblik:

$$|\Psi'\rangle = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}{q} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\gamma}{q} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ = \frac{1}{2}\bigg(-\frac{\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}{q}|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle - \frac{\sqrt{2}\gamma}{q}|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\bigg) \tag{7.30}$$

Ostalo je još samo naći matricu gustine. Najpre će biti posmatran slučaj kada temperatura ne utiče na dati problem, odnosno slučaj nulte temperature. Tada se može uzeti da se sistem nalazi u prvom osnovnom stanju i stoga je njegova matrica gustine:

$$\rho = |\Psi\rangle\langle\Psi| = \frac{D^2+1}{2q^2}\begin{bmatrix} 0 \\ \frac{q(\mathrm{i}D-1)}{\sqrt{2}(D^2+1)} \\ \frac{\gamma(-\mathrm{i}D+1)}{D^2+1} \\ 0 \\ \frac{q(\mathrm{i}D-1)}{\sqrt{2}(D^2+1)} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & \frac{q(-\mathrm{i}D-1)}{\sqrt{2}(D^2+1)} & \frac{\gamma(\mathrm{i}D+1)}{D^2+1} & 0 & \frac{q(-\mathrm{i}D-1)}{\sqrt{2}(D^2+1)} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q^2(1+D^2)}{2(1+D^2)^2} & -\frac{q\gamma(1+D^2)}{\sqrt{2}(1+D^2)^2} & 0 & \frac{q^2(1+D^2)}{2(1+D^2)^2} & 0 & 0 & -\frac{q(1-\mathrm{i}D)}{\sqrt{2}(D^2+1)} \\ 0 & -\frac{q\gamma(1+D^2)}{\sqrt{2}(1+D^2)^2} & \frac{\gamma^2(1+D^2)}{(1+D^2)^2} & 0 & -\frac{q\gamma(1+D^2)}{\sqrt{2}(1+D^2)^2} & 0 & 0 & \frac{\gamma(-\mathrm{i}D+1)}{D^2+1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{q^2(1+D^2)}{2(1+D^2)^2} & -\frac{q\gamma(1+D^2)}{\sqrt{2}(1+D^2)^2} & 0 & \frac{q^2(1+D^2)}{2(1+D^2)^2} & 0 & 0 & -\frac{q(1-\mathrm{i}D)}{\sqrt{2}(1+D^2)} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{q(1+\mathrm{i}D)}{\sqrt{2}(D^2+1)} & \frac{\gamma(1+\mathrm{i}D)}{D^2+1} & 0 & -\frac{q(1+\mathrm{i}D)}{\sqrt{2}(D^2+1)} & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{-1+\mathrm{i}D}{2\sqrt{2}q} \\ 0 & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & \frac{\gamma^2}{2q^2} & 0 & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & 0 & 0 & \frac{\gamma(1-\mathrm{i}D)}{2q^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{-1+\mathrm{i}D}{2\sqrt{2}q} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1+\mathrm{i}D}{2\sqrt{2}q} & \frac{\gamma(1+\mathrm{i}D)}{2q^2} & 0 & -\frac{1+\mathrm{i}D}{2\sqrt{2}q} & 0 & 0 & \frac{1+D^2}{2q^2} \end{bmatrix} = \rho \tag{7.31}$$

Kako je u pitanju čisto stanje, i ρ^2 mora biti jednako ρ shodno uslovima izloženim u segmentu o matrici gustine, što će biti provereno u *Wolfram Mathematici.* gde se vidi da je u pitanju ista matrica kao matrica ρ uz uzimanje u obzir izraza za q. Rezultat je prikazan u Prilogu II.

Za drugu svojstvenu funkciju osnovnog stanja matrica gustine će biti:

$$
\begin{aligned}
\rho' &= |\Psi'\rangle\langle\Psi'| = \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}{q} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}\gamma}{q} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}{q} & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{\sqrt{2}\gamma}{q} & 1 & 0 \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix}
\frac{(D^2+1)}{2q^2} & 0 & 0 & \frac{\mathrm{i}D-1}{2\sqrt{2}q} & 0 & \frac{\gamma(1-\mathrm{i}D)}{2q^2} & \frac{\mathrm{i}D-1}{2\sqrt{2}q} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-\frac{\mathrm{i}D+1}{2\sqrt{2}q} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{\gamma(1+\mathrm{i}D)}{2q^2} & 0 & 0 & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & 0 & \frac{\gamma^2}{2q^2} & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & 0 \\
-\frac{\mathrm{i}D+1}{2\sqrt{2}q} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & \frac{1}{4} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix} = \rho'
\end{aligned} \tag{7.32}
$$

I za ovu matricu gustine ρ'^2 mora biti jednako ρ', što će biti provereno u *Wolfram Mathematici* i prikazano u okviru Priloga III.

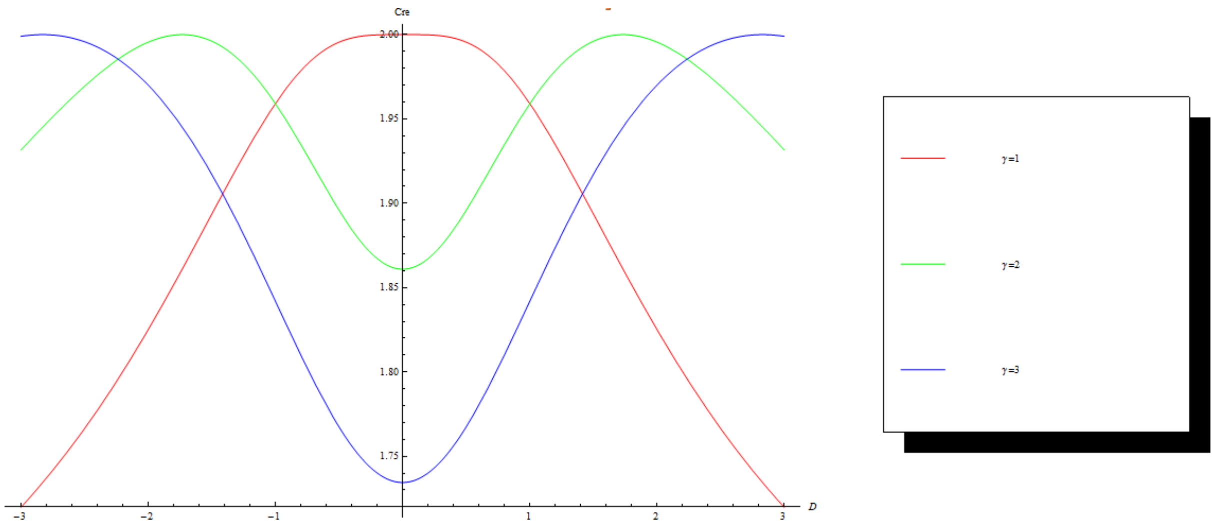
Na ovaj način rešen je problem nalaženja matrice gustine osnovnog stanja hamiltonijana datog relacijom (7.4). Stoga se sada može pristupiti rešavanju problema od interesa, počevši sa problemom koherentnosti u konkretnom sistemu.

7.2 Relativna entropija koherentnosti na $T = 0$ i na proizvoljnoj temperaturi

Kao što je već napomenuto, relativna entropija koherentnosti predstavlja validnu meru kvantne koherentnosti i biće računata prema već navedenoj definiciji (5.37). U ovom slučaju, kako je matrica gustine (7.31) matrica gustine čistog stanja, Fon Nojmanova entropija je $S(\rho) = -Tr(\rho \log_2 \rho) = -\log_2 1 = 0$, te je relativna entropija koherentnosti jednaka:

$$
\begin{aligned}
C_{re} &= -\operatorname{Tr}(\rho_{diag} \log_2 \rho_{diag}) = \\
&= -2\frac{1}{4}\log_2\frac{1}{4} - \frac{\gamma^2}{2q^2}\log_2\left(\frac{\gamma^2}{2q^2}\right) - \frac{1+D^2}{2q^2}\log_2\left(\frac{1+D^2}{2q^2}\right) = \\
&= 1 - \frac{\gamma^2}{2q^2}\log_2\left(\frac{\gamma^2}{2q^2}\right) - \frac{1+D^2}{2q^2}\log_2\left(\frac{1+D^2}{2q^2}\right)
\end{aligned} \tag{7.33}
$$

S obzirom na izgled matrica ρ (7.31) i ρ' (7.32), obe daju iste rezultate za relativnu entropiju koherentnosti, te će se nadalje koristiti notacija sa ρ. Na slici 28 nalazi se prikaz zavisnosti relativne entropije koherentnosti od jačine DM interakcije, gde je γ uzeto kao parametar koji ima tri vrednosti.



Slika 28. Prikaz zavisnosti relativne entropije koherentnosti od parametra DM interakcije.

Može se primetiti da za sve tri vrednosti parametra γ relativna entropija koherentnosti ima istu maksimalnu vrednost na $C_{re} = 2$, samo za različite vrednosti parametra D. Takođe, u slučaju niske anizotropije (parametar γ jednak je jedinici na grafiku) C_{re} opada sa porastom D, što svedoči o većoj važnosti parametra γ u odnosu na jačinu DM interakcije. Međutim, kada je γ veće ($\gamma = 2$ ili $\gamma = 3$ na grafiku), vidi se da relativna entropija koherentnosti raste sa porastom apsolutne vrednosti parametra DM interakcije za njegove male vrednosti. Dakle, u ovom segmentu je uticaj jačine DM interakcije od većeg značaja. Ovakav zaključak implicira da anizotropija teži da poravna spinove, što potiskuje koherentnost i teži da uvede nekoherentno stanje sistema u skladu sa navedenim opisom u prethodnim segmentima, dok na njeno kreiranje utiče DM interakcija putem kvantnih fluktuacija. To je donekle i očekivano s obzirom na to da je već utvrđeno da DM interakcija privileguje hiralna stanja tvari.

Međutim, prethodno razmatran slučaj bio je slučaj kada ne postoji uticaj temperature na sistem koji se nalazi u osnovnom čistom stanju. Sada će se razmatrati i uticaj koherentnosti u okviru razmatranog modela na niskim temperaturama. Dakle, biće ispitan uticaj DM interakcije na kvantnu koherentnost stanja u termodinamičkoj ravnoteži. Matrica gustine za hamiltonijan sistema u termodinamičkoj ravnoteži H nalazi se na osnovu već navedene definicije:

$$\rho(T) = \frac{e^{-\beta H}}{Z} \tag{7.34}$$

gde je $Z = \mathrm{Tr}(e^{-\beta H})$ particiona funkcija, a $\beta = \frac{1}{k_B T}$. Oblik matrice dobijen je u paketu *Wolfram Mathematica* i biće dat u okviru Priloga IV.

Kao što se vidi iz dobijenog finalnog izraza za matricu gustine iz Priloga IV, ona se može zapisati u formi:

$$\rho(T)=\begin{bmatrix}\rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} & 0 & \rho_{16} & \rho_{14} & 0\\ 0 & \rho_{22} & \rho_{23} & 0 & \rho_{25} & 0 & 0 & \rho_{14}\\ 0 & \rho_{23} & \rho_{33} & 0 & \rho_{23} & 0 & 0 & \rho_{16}\\ \rho_{14}^{*} & 0 & 0 & \rho_{22} & 0 & \rho_{23} & \rho_{25} & 0\\ 0 & \rho_{25} & \rho_{23} & 0 & \rho_{22} & 0 & 0 & \rho_{14}\\ \rho_{16}^{*} & 0 & 0 & \rho_{23} & 0 & \rho_{33} & \rho_{23} & 0\\ \rho_{14}^{*} & 0 & 0 & \rho_{25} & 0 & \rho_{23} & \rho_{22} & 0\\ 0 & \rho_{14}^{*} & \rho_{16}^{*} & 0 & \rho_{14}^{*} & 0 & 0 & \rho_{11}\end{bmatrix} \tag{7.35}$$

gde se sami matrični elementi mogu predstaviti na sledeći način:

$$\begin{aligned}\rho_{11}&=\frac{1+e^{\frac{\sqrt{2}\sqrt{q^2}}{T}}+D^2\big(1+e^{\frac{\sqrt{2}\sqrt{q^2}}{T}}\big)+2\gamma^2 e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}}{4q^2\big(1+e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}\big)^2}=\\&=\frac{(1+D^2)\big(e^{\frac{2\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+2e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+1\big)+2\gamma^2 e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}-2e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}-2D^2e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}}{4q^2\big(e^{\frac{2\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+1+2e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}\big)}=\\&=\frac{(1+D^2)\big(e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+e^{-\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+2\big)+2\gamma^2-2-2D^2}{4q^2\big(e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+e^{-\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+2\big)}=\\&=\frac{2(1+D^2)+(\gamma^2-1-D^2)\,\mathrm{sech}^2\big(\frac{\sqrt{q^2}}{2\sqrt{2}T}\big)}{8q^2}\end{aligned} \tag{7.36}$$

$$\begin{aligned}\rho_{14}&=\frac{\mathrm{i}(\mathrm{i}+D)\big(-1+e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}\big)}{4\sqrt{2}\big(1+e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}\big)\sqrt{q^2}}=-\frac{(1-\mathrm{i}D)\big(e^{\frac{\sqrt{q^2}}{2\sqrt{2}T}}-e^{-\frac{\sqrt{q^2}}{2\sqrt{2}T}}\big)}{4\sqrt{2}\sqrt{q^2}\big(e^{\frac{\sqrt{q^2}}{2\sqrt{2}T}}+e^{-\frac{\sqrt{q^2}}{2\sqrt{2}T}}\big)}=\\&=-\frac{(1-\mathrm{i}D)\tanh\big(\frac{\sqrt{q^2}}{2\sqrt{2}T}\big)}{4\sqrt{2}\sqrt{q^2}}\end{aligned} \tag{7.37}$$

$$\begin{aligned}\rho_{16}&=\frac{(1-\mathrm{i}D)\gamma\big(-1+e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}\big)^2}{4q^2\big(1+e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}\big)^2}=\frac{(1-\mathrm{i}D)\gamma\big(e^{\frac{2\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+1-2e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}\big)}{4q^2\big(e^{\frac{2\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+1+2e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}\big)}=\\&=\frac{(1-\mathrm{i}D)\gamma\big(e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+e^{-\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}-2\big)}{4q^2\big(e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+e^{-\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+2\big)}=\frac{(1-\mathrm{i}D)\gamma\tanh^2\big(\frac{\sqrt{q^2}}{2\sqrt{2}T}\big)}{4q^2}\end{aligned} \tag{7.38}$$

$$\rho_{22}=\frac{1}{8} \tag{7.39}$$

$$\rho_{23} = -\frac{\gamma\big(-1+e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}\big)}{4\sqrt{2}\sqrt{q^2}\big(1+e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}\big)} = -\frac{\gamma\big(e^{\frac{\sqrt{q^2}}{2\sqrt{2}T}} - e^{-\frac{\sqrt{q^2}}{2\sqrt{2}T}}\big)}{4\sqrt{2}\sqrt{q^2}\big(e^{\frac{\sqrt{q^2}}{2\sqrt{2}T}} + e^{-\frac{\sqrt{q^2}}{2\sqrt{2}T}}\big)} =$$
$$= -\frac{\gamma\tanh\big(\frac{\sqrt{q^2}}{2\sqrt{2}T}\big)}{4\sqrt{2}\sqrt{q^2}} \tag{7.40}$$

$$\rho_{25} = \frac{1}{8}\frac{\big(-1+e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}\big)^2}{\big(1+e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}\big)^2} = \frac{1}{8}\frac{e^{2\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+1-2e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}}{e^{2\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+1+2e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}} = \frac{1}{8}\frac{e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+e^{-\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}-2}{e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+e^{-\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+2} =$$
$$= \frac{1}{8}\tanh^2\big(\frac{\sqrt{q^2}}{2\sqrt{2}T}\big) \tag{7.41}$$

$$\rho_{33} = \frac{\gamma^2 + e^{\frac{\sqrt{2}\sqrt{q^2}}{T}}\gamma^2 + 2(1+D^2)e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}}{4\big(1+e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}\big)^2 q^2} =$$
$$= \frac{\gamma^2\big(e^{\frac{2\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+1+2e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}\big) - 2e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}(\gamma^2-1-D^2)}{4q^2\big(e^{\frac{2\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+1+2e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}\big)} =$$
$$= \frac{\gamma^2\big(e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+e^{-\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+2\big) - 2(\gamma^2-1-D^2)}{4q^2\big(e^{\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+e^{-\frac{\sqrt{q^2}}{\sqrt{2}T}}+2\big)} =$$
$$= \frac{2\gamma^2 - (\gamma^2-1-D^2)\,\mathrm{sech}^2\big(\frac{\sqrt{q^2}}{2\sqrt{2}T}\big)}{8q^2} \tag{7.42}$$

Naravno, u matrici gustine, kao što će to biti slučaj i u narednim koracima, uzeto je u obzir formalno rasterećivanje izraza pomoću $k_B = 1$ i $J = 1$.

Dobijena matrica gustine sada se može iskoristiti za nalaženje relativne entropije koherentnosti, ali je najpre neophodno drugačije zapisati matricu gustine, kako bi se pojavio oblik: $\rho = \sum_j \eta_j |j\rangle\langle j|$. Na osnovu ovog oblika lako je naći i Fon Nojmanovu entropiju kao: $S = -\sum_j \eta_j \log_2 \eta_j$. Dakle, na neki način se matrica gustine mora izraziti pomoću svojstvenih stanja hamiltonijana, koja su dobijena u Prilogu I. S obzirom na svojstveni problem hamiltonijana [18]:

$$H|\Psi_i\rangle = E_i|\Psi_i\rangle \tag{7.43}$$

i relaciju [2]:

$$f(H)|\Psi_i\rangle = f(E_i)|\Psi_i\rangle \tag{7.44}$$

gde su sa $|\Psi_i\rangle$ označena svojstvena stanja hamiltonijana H, a sa E_i svojstvene vrednosti hamiltonijana, moguće je matricu gustine zapisati u sledećoj formi:

$$\rho(T) = \frac{e^{-\sum_i \beta H|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|}}{Z} = \frac{e^{-\sum_i \beta E_i|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|}}{Z} = e^{-\beta H}\frac{\sum_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i|}{Z} = \frac{1}{Z}\sum_i e^{-\beta E_i}|\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| \tag{7.45}$$

Dobijeni oblik matrice gustine je sada itekako koristan, s obzirom na to da se može iskoristiti relacija za Fon Nojmanovu entropiju, gde je sada $\eta_j = \frac{e^{-\beta E_j}}{Z}$. Ovde se treba prisetiti i dobijenih svojstvenih energija polaznog hamiltonijana (Prilog I):

$$E_1 = E_2 = -\frac{q}{\sqrt{2}}, \;\; E_3 = E_4 = \frac{q}{\sqrt{2}}, \;\; E_5 = E_6 = E_7 = E_8 = 0 \tag{7.46}$$

i izraza za particionu funkciju (Prilog IV):

$$Z = 2e^{-\frac{q}{\sqrt{2}T}}\left(1 + e^{\frac{q}{\sqrt{2}T}}\right)^2 \tag{7.47}$$

na osnovu kojih se Fon Nojmanova entropija datog stanja u termodinamičkoj ravnoteži može zapisati u obliku:

$$S(\rho) = -2\left(\frac{e^{-\frac{E_1}{T}}}{Z}\right)\log_2\left(\frac{e^{-\frac{E_1}{T}}}{Z}\right) - 2\left(\frac{e^{-\frac{E_2}{T}}}{Z}\right)\log_2\left(\frac{e^{-\frac{E_2}{T}}}{Z}\right) - 4\frac{1}{Z}\log_2\left(\frac{1}{Z}\right) \tag{7.48}$$

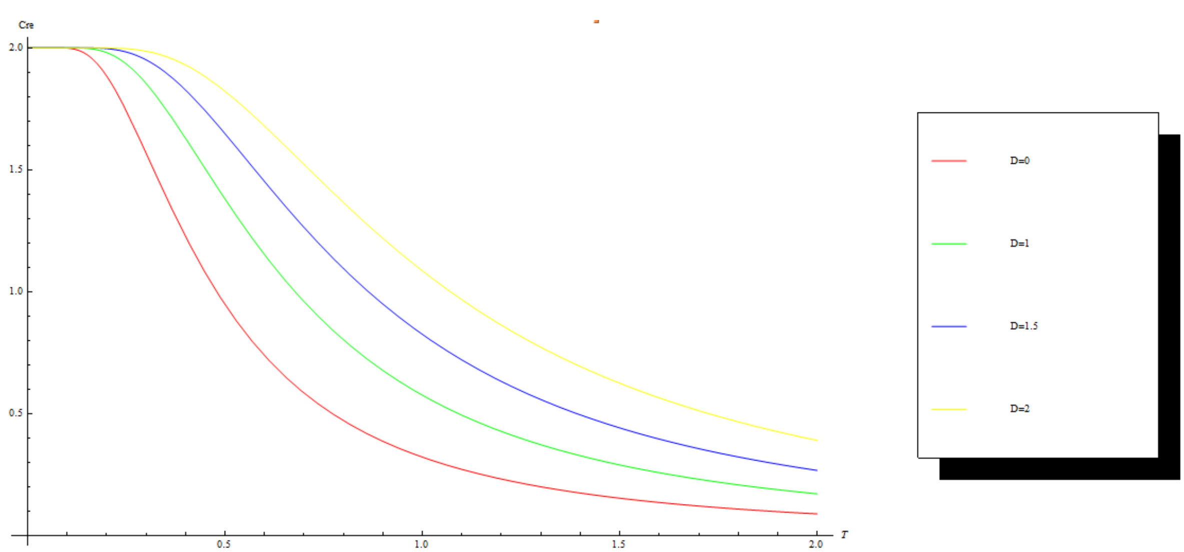
dok je Fon Nojmanova entropija dijagonalne matrice gustine polazne matrice (7.35) forme:

$$S(\rho_{diag}) = -2\rho_{11}\log_2\rho_{11} - 4\rho_{22}\log_2\rho_{22} - 2\rho_{33}\log_2\rho_{33} \tag{7.49}$$

što je neophodno ubaciti u izraz za relativnu entropiju koherentnosti:

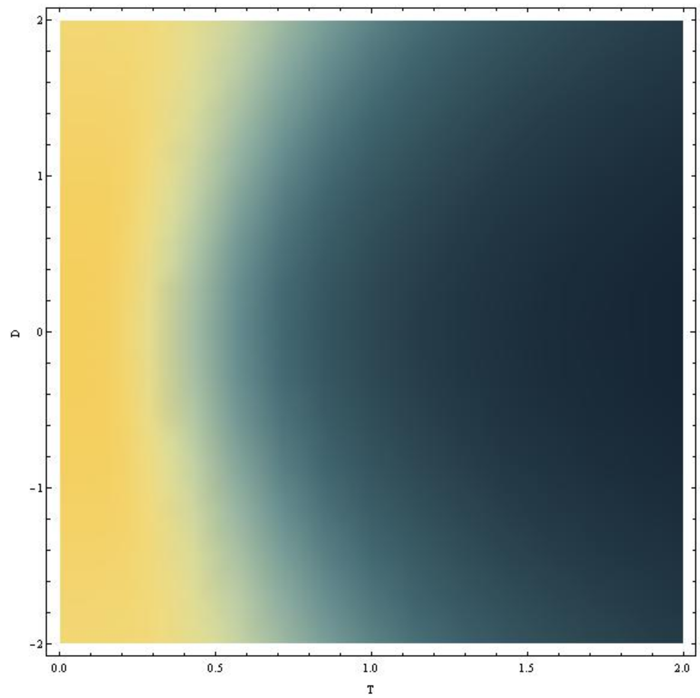
$$C_{re}(\rho) = S(\rho_{diag}) - S(\rho) \tag{7.50}$$

Kako je u pitanju veoma rogobatan izraz, oblik funkcije (7.50) direktno je zapisan u *Wolfram Mathematici* i nacrtan je grafik zavisnosti relativne entropije koherentnosti u funkciji temperature za različite parametre DM interakcije uz uzimanje parametra anizotropije u obliku $\gamma = \sqrt{1 + D^2}$.



Slika 29. Temperaturna zavisnost relativne entropije koherentnosti.

Na slici 29 može se uočiti da povećanje jačine DM interakcije utiče na sporije opadanje relativne entropije koherentnosti sa porastom temperature. Dakle, kada DM interakcija nije prisutna, i relativna entropija koherentnosti ima najnižu vrednost među svim krivama ukoliko se posmatra jednaka temperatura. Upravo ova činjenica navodi na zaključak da je DM interakcija ta koja očuvava relativnu entropiju koherentnosti na konačnim temperaturama. Jasniji prikaz može se videti na slici 30, na kojoj je predstavljena relativna entropija koherentnosti u prostoru parametara (T, D) u slučaju $\gamma = 1$.



Slika 30. Prikaz zavisnosti relativne entropije koherentnosti od parametara T i D.

Slika 30 ukazuje na to da relativna entropija koherentnosti raste sa porastom apsolutne vrednosti parametra D za istu vrednost temperature, kako je i naznačeno prethodnim grafikom. Ovo je, zapravo, u skladu sa prethodnim razmatranjem. Već je rečeno da na povećanje koherentnosti u sistemu utiče DM interakcija putem kvantnih fluktuacija. Stoga je i logično da te kvantne fluktuacije na nižim temperaturama nadvladavaju efekte klasičnih, temperaturnih fluktuacija. Međutim, za više temperature one nisu dovoljne i koherentnost naglo opada. Posebno je značajno uočiti da se očekivani maksimum koherentnosti na nultoj temperaturi na slici 29 poklapa sa maksimalnom vrednošću koherentnosti na slici 28 i ova vrednost iznosi $C_{re} = 2$. Na taj način mogu se uočiti vrednosti ostalih parametara pri kojima na koherentnost najveći uticaj ima baš DM interakcija - specifično, $T = 0$, što je i očekivano, i različite vrednosti parametra D kada γ uzima različite vrednosti na slici 28, kako je već i navedeno.

7.3 Registrovanje kvantnog faznog prelaza

Osnovne odlike metoda renormalizacione grupe već su opisane, a u ovom poglavlju će metod konkretno biti iskorišćen u cilju uočavanja kako kvantni fazni prelazi mogu biti registovani razmatranjem kvantno-informatičkih veličina.

7.3.1 Metod kvantne renormalizacione grupe

Cilj rada jeste proučavanje kvantnog faznog prelaza u slučaju razmatranog modela, a ovom prilikom će se u toj nameri koristiti metoda kvantne renormalizacione grupe u realnom prostoru. Sama metoda predstavlja iznimno moćno sredstvo za spinske lančane sisteme usled toga što je njen osnovni cilj olakšavanje računa prelaskom u kompaktniji prostor i eliminacija manje bitnih stepeni slobode rekurzivnim postupcima dok se ne dobije hamiltonijan koji je moguće egzaktno dijagonalizovati [8].

Shodno Kadanovljevom pristupu blokovskih spinova opisanom u prethodnom segmentu, hamiltonijan spinskog lanca može biti podeljen na blokovski hamiltonijan H^B i međublokovski hamiltonijan H^{BB} [6]. U okviru metoda kvantne renormalizacione grupe svaki blok razmatra se nezavisno da bi se dobila osnovna stanja, koja će predstavljati bazis renormalizovanog Hilbertovog prostora [62]. Ponavljanjem procedure dolazi se do dugačkog lanca efektivno predstavljenog pomoću svega nekoliko čvorova u renormalizovanom Hilbertovom prostoru.

Model od interesa u ovom slučaju je XY spinski lanac sa DM interakcijom na periodičnom lancu N čvorova, čiji je hamiltonijan oblika [8]:

$$H = \frac{J}{4}\sum_{i=1}^{N}\Big((1+\gamma)\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x + (1-\gamma)\sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + (-1)^i D(\sigma_i^x\sigma_{i+1}^y - \sigma_i^y\sigma_{i+1}^x)\Big) \tag{7.51}$$

Za $\gamma = D = 0$ prethodni izraz postaje hamiltonijan izotropnog lanca, a za $\gamma = 1$ i $D = 0$ razmatrani model prelazi u Izingov model [8].

Kako bi se izbeglo kreiranje efektivnog hamiltonijana koji nije sličan polaznom (odnosno, u kom su znaci članova $\sigma_i^y\sigma_{i+1}^y$ i $\sigma_i^y\sigma_{i+1}^x$ promenjeni), najpre se u priču infiltrira π-rotacija oko x-ose za parne čvorove, dok se neparni ne menjaju i hamiltonijan postaje [6]:

$$H = \frac{J}{4}\sum_{i=1}^{N}\Big((1+\gamma)\sigma_i^x\sigma_{i+1}^x - (1-\gamma)\sigma_i^y\sigma_{i+1}^y + D(\sigma_i^x\sigma_{i+1}^y + \sigma_i^y\sigma_{i+1}^x)\Big) \tag{7.52}$$

Sada se prelazi na Kadanovljevo raspisivanje hamiltonijana:

$$H = H^B + H^{BB} \tag{7.53}$$

gde je H^B blokovski hamiltonijan, a H^{BB} međublokovski hamiltonijan. Oni se mogu zapisati na sledeći način [6]:

$$H^B = \sum_{l=1}^{\frac{N}{3}} h_l^B \tag{7.54}$$

$$h_l^B = \frac{J}{4}\bigg(\big(1+\gamma\big)\big(\sigma^x_{l,1}\sigma^x_{l,2} + \sigma^x_{l,2}\sigma^x_{l,3}\big) - \big(1-\gamma\big)\big(\sigma^y_{l,1}\sigma^y_{l,2} + \sigma^y_{l,2}\sigma^y_{l,3}\big)$$
$$+ D\big(\sigma^x_{l,1}\sigma^y_{l,2} + \sigma^x_{l,2}\sigma^y_{l,3} + \sigma^y_{l,1}\sigma^x_{l,2} + \sigma^y_{l,2}\sigma^x_{l,3}\big)\bigg) \tag{7.55}$$

$$H^{BB} = \sum_{l=1}^{N/3} h_l^{BB} \tag{7.56}$$

$$h_l^{BB} = \frac{J}{4}\bigg(\big(1+\gamma\big)\sigma^x_{l,3}\sigma^x_{l+1,1} - \big(1-\gamma\big)\sigma^y_{l,3}\sigma^y_{l+1,1} + D\big(\sigma^x_{l,3}\sigma^y_{l+1,1} + \sigma^y_{l,3}\sigma^x_{l+1,1}\big)\bigg) \tag{7.57}$$

Kako bi se izvršilo mapiranje hamiltonijana na renormalizovan Hilbertov prostor, te dobio efektivni hamiltonijan, koristi se sledeća transformacija [62]:

$$H_{eff} = T^\dagger H^{BB} T \tag{7.58}$$

gde je $T = \sum_l T_l$ sa $T_l = |\Psi\rangle_l\langle\Uparrow| + |\Psi'\rangle_l\langle\Downarrow|$. Ovime se pretpostavlja da su samo najniža stanja zauzeta i jedina moguća [62]. Dvostruko degenerisana osnovna stanja su data relacijama (7.25) i (7.30) i odnose se na hamiltonijan h_l^B, a $|\Uparrow\rangle_l$ i $|\Downarrow\rangle_l$ nisu ništa drugo do preimenovani bazisni ketovi svakog bloka u efektivnom prostoru, koji se mogu predstaviti kao svojstvena stanja z-komponente spina čestice sa $s=\frac{1}{2}$. Cilj metode je da dobijeni efektivni hamiltonijan ima formu sličnu polaznom hamiltonijanu.

Najpre je neophodno konstruisati operatore koji prevode sistem iz Hilbertovog prostora tri spina u prostor jednog spinskog bloka. Praktično to znači da se iz osmodimenzionog prostora prelazi u dvodimenzioni prostor, kao što će i biti pokazano. Definišu se sledeći operatori [62]:

$$T_l^\dagger : \mathbb{C}^8 \to \mathbb{C}^2 \tag{7.59}$$

$$T_l : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^8 \tag{7.60}$$

koji su predstavljeni relacijama:

$$T_l = |\Psi\rangle_l\langle\Uparrow| + |\Psi'\rangle_l\langle\Downarrow| \tag{7.61}$$

$$T_l^\dagger = |\Uparrow\rangle_l\langle\Psi| + |\Downarrow\rangle_l\langle\Psi'| \tag{7.62}$$

Nadalje će se indeks l za stanja blok-spina izostavljati, ali podrazumevati. Prvi operator je tzv. "operator ugrađivanja" s obzirom na to da blok-stanje prebacuje u realni prostor tri spina [62]. Drugi operator projektuje ovaj prostor u prostor blok-spina, te se naziva "operator sažimanja" [62]. Kako su blok-stanja $|\Uparrow\rangle = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ i $|\Downarrow\rangle \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ i s obzirom na ortogonalnost osnovnih stanja $\langle\Psi'|\Psi\rangle = 0$ i njihovu normiranost $\langle\Psi|\Psi\rangle = \langle\Psi'|\Psi'\rangle = 1$, očito je:

$$T_l^\dagger T_l = \big(|\Uparrow\rangle\langle\Psi| + |\Downarrow\rangle\langle\Psi'|\big)\big(|\Psi\rangle\langle\Uparrow| + |\Psi'\rangle\langle\Downarrow|\big) = |\Uparrow\rangle\langle\Uparrow| + |\Downarrow\rangle\langle\Downarrow| =$$
$$= \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} = I \tag{7.63}$$

Međutim, treba uočiti da obrnuto ne važi, tj. $T_l T_l^\dagger \neq I$. Dakle, nije u pitanju unitaran operator, već operator koji projektuje na potprostor zadržanih stepeni slobode i on ne može biti invertovan [62].

Sada još ostaje otkriti kako transformacija tipa $T^\dagger A T$ deluje na članove hamiltonijana H^{BB}. Cilj je naći σ-matrice koje deluju na blok-spinove, te će se utvrditi kako se svaka zasebna σ-matrica menja prilikom ove transformacije [6]. Najpre će biti transformirana prva Paulijeva matrica:

$$\begin{aligned}\left(T_l^\dagger \sigma_{l,1}^x T_l\right)_1 =& \frac{\sqrt{1+D^2}}{2\sqrt{2}q}\left(\frac{-q}{\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}\langle\uparrow\uparrow\downarrow| + \frac{\gamma}{1-\mathrm{i}D}\langle\uparrow\downarrow\uparrow| + \frac{-q}{\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}\langle\downarrow\uparrow\uparrow| + \langle\downarrow\downarrow\downarrow|\right)\\ &\sigma_{l,1}^x\left(\frac{-\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}{q}|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + \frac{-\sqrt{2}\gamma}{q}|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\right)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} =\\ =&\left(\frac{\gamma}{\sqrt{1+D^2}}\frac{1+\mathrm{i}D}{\sqrt{2}q} + \frac{(1+D^2)}{\sqrt{2}q\sqrt{1+D^2}}\right)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.64}$$

$$\begin{aligned}\left(T_l^\dagger \sigma_{l,1}^x T_l\right)_2 =& \frac{\sqrt{1+D^2}}{2\sqrt{2}q}\left(\frac{-\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}{q}\langle\uparrow\uparrow\uparrow| + \langle\uparrow\downarrow\downarrow| + \frac{-\sqrt{2}\gamma}{q}\langle\downarrow\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\downarrow\uparrow|\right)\sigma_{l,1}^x\\ &\left(\frac{-q}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \frac{\gamma}{(1+\mathrm{i}D)}|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \frac{-q}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle\right)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} =\\ =&\left(\frac{\gamma}{\sqrt{1+D^2}}\frac{1-\mathrm{i}D}{\sqrt{2}q} + \frac{(1+D^2)}{\sqrt{2}q\sqrt{1+D^2}}\right)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.65}$$

Očito se prva σ-matrica transformiše na sledeći način:

$$T_l^\dagger \sigma_{l,1}^x T_l = \varepsilon_1 \sigma_l^{'x} + \xi_1 \sigma_l^{'y} \tag{7.66}$$

gde su:

$$\varepsilon_1 = \frac{1+D^2+\gamma}{\sqrt{2(1+D^2)}q},\quad \xi_1 = \frac{-\gamma D}{\sqrt{2(1+D^2)}q} \tag{7.67}$$

Sada se može preći na drugu σ-matricu:

$$\begin{aligned}\left(T_l^\dagger \sigma_{l,2}^x T_l\right)_1 =& \frac{\sqrt{1+D^2}}{2\sqrt{2}q}\left(\frac{-q}{\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}\langle\uparrow\uparrow\downarrow| + \frac{\gamma}{1-\mathrm{i}D}\langle\uparrow\downarrow\uparrow| + \frac{-q}{\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}\langle\downarrow\uparrow\uparrow| + \langle\downarrow\downarrow\downarrow|\right)\\ &\sigma_{l,2}^x\left(\frac{-\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}{q}|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + \frac{-\sqrt{2}\gamma}{q}|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\right)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} =\\ =&\left(-\frac{1+\mathrm{i}D}{2\sqrt{1+D^2}} - \frac{\sqrt{1+D^2}\gamma}{q^2}\right)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.68}$$

$$\begin{aligned}\left(T_l^\dagger \sigma_{l,2}^x T_l\right)_2 =& \frac{\sqrt{1+D^2}}{2\sqrt{2}q}\left(\frac{-\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}{q}\langle\uparrow\uparrow\uparrow| + \langle\uparrow\downarrow\downarrow| + \frac{-\sqrt{2}\gamma}{q}\langle\downarrow\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\downarrow\uparrow|\right)\sigma_{l,2}^x\\ &\left(\frac{-q}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \frac{\gamma}{(1+\mathrm{i}D)}|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \frac{-q}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle\right)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} =\\ =&\left(-\frac{1-\mathrm{i}D}{2\sqrt{1+D^2}} - \frac{\sqrt{1+D^2}\gamma}{q^2}\right)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.69}$$

Dobijen je i oblik druge transformisane σ-matrice:

$$T_l^\dagger \sigma_{l,2}^x T_l = \varepsilon_2 \sigma_l^{'x} + \xi_2 \sigma_l^{'y} \tag{7.70}$$

gde su:

$$\varepsilon_2 = -\frac{1}{2\sqrt{1+D^2}} - \frac{\sqrt{1+D^2}\gamma}{q^2},\ \ \xi_2 = \frac{D}{2\sqrt{1+D^2}} \tag{7.71}$$

Treća matrica transformiše se u skladu sa:

$$\begin{aligned}\left(T_l^\dagger \sigma_{l,3}^x T_l\right)_1 =& \frac{\sqrt{1+D^2}}{2\sqrt{2}q}\left(\frac{-q}{\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}\langle\uparrow\uparrow\downarrow| + \frac{\gamma}{1-\mathrm{i}D}\langle\uparrow\downarrow\uparrow| + \frac{-q}{\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}\langle\downarrow\uparrow\uparrow| + \langle\downarrow\downarrow\downarrow|\right)\\ &\sigma_{l,3}^x\left(\frac{-\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}{q}|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + \frac{-\sqrt{2}\gamma}{q}|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\right)\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} =\\ =&\left(\frac{\gamma}{\sqrt{1+D^2}}\frac{1+\mathrm{i}D}{\sqrt{2}q} + \frac{(1+D^2)}{\sqrt{2}q\sqrt{1+D^2}}\right)\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.72}$$

$$\begin{aligned}\left(T_l^\dagger \sigma_{l,3}^x T_l\right)_2 =& \frac{\sqrt{1+D^2}}{2\sqrt{2}q}\left(\frac{-\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}{q}\langle\uparrow\uparrow\uparrow| + \langle\uparrow\downarrow\downarrow| + \frac{-\sqrt{2}\gamma}{q}\langle\downarrow\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\downarrow\uparrow|\right)\sigma_{l,3}^x\\ &\left(\frac{-q}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \frac{\gamma}{(1+\mathrm{i}D)}|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \frac{-q}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle\right)\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} =\\ =&\left(\frac{\gamma}{\sqrt{1+D^2}}\frac{1-\mathrm{i}D}{\sqrt{2}q} + \frac{(1+D^2)}{\sqrt{2}q\sqrt{1+D^2}}\right)\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.73}$$

Na ovaj način, treća σ-matrica transformiše se kao:

$$T_l^\dagger \sigma_{l,3}^x T_l = \varepsilon_3 \sigma_l^{'x} + \xi_3 \sigma_l^{'y} \tag{7.74}$$

gde su:

$$\varepsilon_3 = \varepsilon_1 = \frac{1+D^2+\gamma}{\sqrt{2(1+D^2)}q},\ \ \xi_3 = \xi_1 = \frac{-\gamma D}{\sqrt{2(1+D^2)}q} \tag{7.75}$$

Za četvrtu σ-matricu važi:

$$\begin{aligned}\left(T_l^\dagger \sigma_{l,1}^y T_l\right)_1 =& \frac{\sqrt{1+D^2}}{2\sqrt{2}q}\left(\frac{-q}{\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}\langle\uparrow\uparrow\downarrow| + \frac{\gamma}{1-\mathrm{i}D}\langle\uparrow\downarrow\uparrow| + \frac{-q}{\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}\langle\downarrow\uparrow\uparrow| + \langle\downarrow\downarrow\downarrow|\right)\\ &\sigma_{l,1}^y\left(\frac{-\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}{q}|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + \frac{-\sqrt{2}\gamma}{q}|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\right)\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix} =\\ =&\left(\frac{(-\mathrm{i}+D)\gamma}{\sqrt{2}q\sqrt{1+D^2}} + \frac{\mathrm{i}(1+D^2)}{\sqrt{2}q\sqrt{1+D^2}}\right)\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.76}$$

$$\begin{aligned}\left(T_l^\dagger \sigma_{l,1}^y T_l\right)_2 =& \frac{\sqrt{1+D^2}}{2\sqrt{2}q}\left(\frac{-\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}{q}\langle\uparrow\uparrow\uparrow| + \langle\uparrow\downarrow\downarrow| + \frac{-\sqrt{2}\gamma}{q}\langle\downarrow\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\downarrow\uparrow|\right)\sigma_{l,1}^y\\ &\left(\frac{-q}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \frac{\gamma}{(1+\mathrm{i}D)}|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \frac{-q}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle\right)\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix} =\\ =&\left(\frac{(\mathrm{i}+D)\gamma}{\sqrt{2}q\sqrt{1+D^2}} + \frac{-\mathrm{i}(1+D^2)}{\sqrt{2}q\sqrt{1+D^2}}\right)\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.77}$$

Četvrta σ-matrica transformiše se na osnovu izraza:

$$T_l^\dagger \sigma_{l,1}^y T_l = \mu_1 \sigma_l^{'x} + \nu_1 \sigma_l^{'y} \tag{7.78}$$

gde su:

$$\mu_1 = \frac{\gamma D}{\sqrt{2}q\sqrt{1+D^2}}, \;\; \nu_1 = \frac{\gamma - 1 - D^2}{\sqrt{2}q\sqrt{1+D^2}} \tag{7.79}$$

Potrebno je transformisati i petu matricu:

$$\begin{aligned}\left(T_l^\dagger \sigma_{l,2}^y T_l\right)_1 =& \frac{\sqrt{1+D^2}}{2\sqrt{2}q}\left(\frac{-q}{\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}\langle\uparrow\uparrow\downarrow| + \frac{\gamma}{1-\mathrm{i}D}\langle\uparrow\downarrow\uparrow| + \frac{-q}{\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}\langle\downarrow\uparrow\uparrow| + \langle\downarrow\downarrow\downarrow|\right)\\ &\sigma_{l,2}^y\left(\frac{-\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}{q}|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + \frac{-\sqrt{2}\gamma}{q}|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\right)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} =\\ =&\left(\frac{\mathrm{i}-D}{2\sqrt{1+D^2}} - \frac{\mathrm{i}\sqrt{1+D^2}\gamma}{q^2}\right)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.80}$$

$$\begin{aligned}\left(T_l^\dagger \sigma_{l,2}^y T_l\right)_2 =& \frac{\sqrt{1+D^2}}{2\sqrt{2}q}\left(\frac{-\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}{q}\langle\uparrow\uparrow\uparrow| + \langle\uparrow\downarrow\downarrow| + \frac{-\sqrt{2}\gamma}{q}\langle\downarrow\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\downarrow\uparrow|\right)\sigma_{l,2}^y\\ &\left(\frac{-q}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \frac{\gamma}{(1+\mathrm{i}D)}|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \frac{-q}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle\right)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} =\\ =&\left(\frac{-\mathrm{i}-D}{2\sqrt{1+D^2}} + \frac{\mathrm{i}\sqrt{1+D^2}\gamma}{q^2}\right)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.81}$$

Dakle, peta σ-matrica transformiše se shodno relaciji:

$$T_l^\dagger \sigma_{l,2}^y T_l = \mu_2 \sigma_l^{'x} + \nu_2 \sigma_l^{'y} \tag{7.82}$$

gde su:

$$\mu_2 = -\frac{D}{2\sqrt{1+D^2}}, \;\; \nu_2 = \frac{\sqrt{1+D^2}\gamma}{q^2} - \frac{1}{2\sqrt{1+D^2}} \tag{7.83}$$

Na samom kraju pristupa se transformaciji šeste σ-matrice:

$$\begin{aligned}\left(T_l^\dagger \sigma_{l,3}^y T_l\right)_1 =& \frac{\sqrt{1+D^2}}{2\sqrt{2}q}\left(\frac{-q}{\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}\langle\uparrow\uparrow\downarrow| + \frac{\gamma}{1-\mathrm{i}D}\langle\uparrow\downarrow\uparrow| + \frac{-q}{\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}\langle\downarrow\uparrow\uparrow| + \langle\downarrow\downarrow\downarrow|\right)\\ &\sigma_{l,3}^y\left(\frac{-\sqrt{2}(1-\mathrm{i}D)}{q}|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\downarrow\rangle + \frac{-\sqrt{2}\gamma}{q}|\downarrow\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\downarrow\uparrow\rangle\right)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} =\\ =&\left(\frac{(-\mathrm{i}+D)\gamma}{\sqrt{2}q\sqrt{1+D^2}} + \frac{\mathrm{i}(1+D^2)}{\sqrt{2}q\sqrt{1+D^2}}\right)\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.84}$$

$$\begin{aligned}\left(T_l^\dagger \sigma_{l,3}^y T_l\right)_2 =& \frac{\sqrt{1+D^2}}{2\sqrt{2}q}\left(\frac{-\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}{q}\langle\uparrow\uparrow\uparrow| + \langle\uparrow\downarrow\downarrow| + \frac{-\sqrt{2}\gamma}{q}\langle\downarrow\uparrow\downarrow| + \langle\downarrow\downarrow\uparrow|\right)\sigma_{l,3}^y\\ &\left(\frac{-q}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle + \frac{\gamma}{(1+\mathrm{i}D)}|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle + \frac{-q}{\sqrt{2}(1+\mathrm{i}D)}|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle\right)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} =\\ =&\left(\frac{(\mathrm{i}+D)\gamma}{\sqrt{2}q\sqrt{1+D^2}} + \frac{-\mathrm{i}(1+D^2)}{\sqrt{2}q\sqrt{1+D^2}}\right)\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7.85}$$

Šesta σ-matrica transformiše se na osnovu izraza:

$$T_l^{\dagger}\sigma_{l,3}^{y}T_l = \mu_3\sigma_l^{'x} + \nu_3\sigma_l^{'y} \tag{7.86}$$

gde su:

$$\mu_3 = \mu_1 = \frac{\gamma D}{\sqrt{2}q\sqrt{1+D^2}}, \quad \nu_3 = \nu_1 = \frac{\gamma - 1 - D^2}{\sqrt{2}q\sqrt{1+D^2}} \tag{7.87}$$

U prethodnim izrazima σ-matrice koje deluju na blok-stanja definisane su kao:

$$\sigma_l^{'x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_l^{'y} = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix} \tag{7.88}$$

Njihovo dejstvo na blok-stanja je oblika:

$$\sigma_x^{'}|\Downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = |\Uparrow\rangle \tag{7.89}$$

$$\sigma_x^{'}|\Uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = |\Downarrow\rangle \tag{7.90}$$

$$\sigma_y^{'}|\Downarrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\mathrm{i}|\Uparrow\rangle \tag{7.91}$$

$$\sigma_y^{'}|\Uparrow\rangle = \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \mathrm{i}|\Downarrow\rangle \tag{7.92}$$

Takođe, iskorišćene su relacije:

$$|\Uparrow\rangle\langle\Uparrow| = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.93}$$

$$|\Downarrow\rangle\langle\Downarrow| = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.94}$$

$$|\Uparrow\rangle\langle\Downarrow| = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.95}$$

$$|\Downarrow\rangle\langle\Uparrow| = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.96}$$

S obzirom na to da je sada poznat način na koji su σ-matrice transformisane u efektivnom prostoru, moguće je izvršiti zamenu renormalizovanih članova u međublokovskom hamiltonijanu:

$$
\begin{aligned}
H_{eff} =& \frac{J}{4}\sum_{l=1}^{N/3}\Bigg((1+\gamma)\big((\frac{1+D^2+\gamma}{\sqrt{2(1+D^2)}q}\sigma_l^{'x} - \frac{\gamma D}{\sqrt{2(1+D^2)}q}\sigma_l^{'y})\\
&\cdot(\frac{1+D^2+\gamma}{\sqrt{2(1+D^2)}q}\sigma_{l+1}^{'x} - \frac{\gamma D}{\sqrt{2(1+D^2)}q}\sigma_{l+1}^{'y})\big)\\
&-(1-\gamma)\big((\frac{\gamma D}{\sqrt{2(1+D^2)}q}\sigma_l^{'x} + \frac{\gamma-1-D^2}{\sqrt{2(1+D^2)}q}\sigma_l^{'y})\\
&\cdot(\frac{\gamma D}{\sqrt{2(1+D^2)}q}\sigma_{l+1}^{'x} + \frac{\gamma-1-D^2}{\sqrt{2(1+D^2)}q}\sigma_{l+1}^{'y})\big)\\
&+D\big((\frac{1+D^2+\gamma}{\sqrt{2(1+D^2)}q}\sigma_l^{'x} - \frac{\gamma D}{\sqrt{2(1+D^2)}q}\sigma_l^{'y})\\
&\cdot(\frac{\gamma D}{\sqrt{2(1+D^2)}q}\sigma_{l+1}^{'x} + \frac{\gamma-1-D^2}{\sqrt{2(1+D^2)}q}\sigma_{l+1}^{'y})\big)\\
&+(\frac{\gamma D}{\sqrt{2(1+D^2)}q}\sigma_l^{'x} + \frac{\gamma-1-D^2}{\sqrt{2(1+D^2)}q}\sigma_l^{'y})\\
&\cdot(\frac{1+D^2+\gamma}{\sqrt{2(1+D^2)}q}\sigma_{l+1}^{'x} - \frac{\gamma D}{\sqrt{2(1+D^2)}q}\sigma_{l+1}^{'y})\big)
\end{aligned} \tag{7.97}
$$

Da bi se našao samosličan oblik hamiltonijana u odnosu na polazni hamiltonijan, neophodno je raspisati članove uz svaki set σ-matrica.

$$
\begin{aligned}
\sigma_l^{'x}\sigma_{l+1}^{'x} :& \frac{J}{4}\Bigg(\frac{(1+D^2+\gamma)^2(1+\gamma)}{2(1+D^2)q^2} - \frac{(1-\gamma)\gamma^2D^2}{2(1+D^2)q^2} + \frac{\gamma D^2(1+D^2+\gamma)}{2(1+D^2)q^2}\\
&+\frac{\gamma D^2(1+D^2+\gamma)}{2(1+D^2)q^2}\Bigg) =\\
&= \frac{J}{4}\Bigg(\frac{1+\gamma+2D^2+2D^2\gamma+2\gamma+2\gamma^2+D^4+\gamma D^4+2\gamma D^2+2\gamma^2D^2}{2(1+D^2)q^2}\\
&+\frac{\gamma^2+\gamma^3-\gamma^2D^2+\gamma^3D^2+2\gamma D^2+2\gamma D^4+2\gamma^2D^2}{2(1+D^2)q^2}\Bigg) =\\
&= \frac{J}{4}\frac{1+3\gamma+2D^2+6\gamma D^2+3\gamma^2+D^4+3\gamma D^4+3\gamma^2D^2+\gamma^3+\gamma^3D^2}{2(1+D^2)q^2} =\\
&= \frac{J}{4}\frac{1+D^2+3\gamma^2}{2q^2}\Bigg(1+\frac{3\gamma+3\gamma D^2+\gamma^3}{1+D^2+3\gamma^2}\Bigg) =\\
&= \frac{J^{'}}{4}(1+\gamma^{'})
\end{aligned} \tag{7.98}
$$

gde su:

$$
J^{'} = \frac{1+D^2+3\gamma^2}{2q^2}J,\ \ \gamma^{'} = \frac{3\gamma+3\gamma D^2+\gamma^3}{1+D^2+3\gamma^2} \tag{7.99}
$$

U slučaju prvog člana samosličnost polaznom članu je očita, ali treba proveriti kako se ona uklapa i sa preostalim članovima.

$$\begin{aligned}
\sigma_l^{'y}\sigma_{l+1}^{'y} :& \frac{J}{4}\left(\frac{\gamma^2 D^2(1+\gamma)}{2(1+D^2)q^2} - \frac{(1-\gamma)(\gamma-1-D^2)^2}{2(1+D^2)q^2} - \frac{2\gamma D^2(\gamma-1-D^2)}{2(1+D^2)q^2}\right) = \\
&= \frac{J}{4}\left(\frac{\gamma^2 D^2 + \gamma^3 D^2 - \gamma^2 + 2\gamma + 2\gamma D^2 - 1 - 2D^2 - D^4 + \gamma^3 - 2\gamma^2}{2(1+D^2)q^2}\right. \\
&+ \left.\frac{-2\gamma^2 D^2 + \gamma + 2\gamma D^2 + \gamma D^4 - 2\gamma^2 D^2 + 2\gamma D^2 + 2\gamma D^4}{2(1+D^2)q^2}\right) = \\
&= -\frac{J}{4}\frac{1+D^2+3\gamma^2}{2q^2}\left(1 - \frac{3\gamma + 3\gamma D^2 + \gamma^3}{1+D^2+3\gamma^2}\right) = \\
&= -\frac{J^{'}}{4}(1-\gamma^{'})
\end{aligned} \tag{7.100}$$

Dakle, isti faktori uklapaju se i u samosličnost drugog člana. Potrebno je pronaći i renormalizovani faktor $D^{'}$ i utvrditi da li se svi faktori uklapaju i razmatranjem preostala dva člana hamiltonijana.

$$\begin{aligned}
\sigma_l^{'x}\sigma_{l+1}^{'y} :& \frac{J}{4}\left(-\frac{(1+\gamma)\gamma D(1+D^2+\gamma)}{2(1+D^2)q^2} - \frac{(1-\gamma)\gamma D(\gamma-1-D^2)}{2(1+D^2)q^2}\right. \\
&+ \left.\frac{D(1+D^2+\gamma)(\gamma-1-D^2)}{2(1+D^2)q^2} - \frac{\gamma^2 D^3}{2(1+D^2)q^2}\right) = \\
&= \frac{J}{4}\left(\frac{-\gamma D - \gamma D^3 - 2\gamma^2 D - \gamma^2 D^3 - \gamma^3 D - \gamma^2 D + \gamma D + \gamma D^3 + \gamma^3 D}{2(1+D^2)q^2}\right. \\
&+ \left.\frac{-\gamma^2 D - \gamma^2 D^3 - D - 2D^3 - D^5 + \gamma^2 D - \gamma^2 D^3}{2(1+D^2)q^2}\right) = \\
&= \frac{J^{'}}{4}D^{'}
\end{aligned} \tag{7.101}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_l^{'y}\sigma_{l+1}^{'x} :& \frac{J}{4}\left(-\frac{(1+\gamma)\gamma D(1+D^2+\gamma)}{2(1+D^2)q^2} - \frac{(1-\gamma)\gamma D(\gamma-1-D^2)}{2(1+D^2)q^2}\right. \\
&- \left.\frac{\gamma^2 D^3}{2(1+D^2)q^2} + \frac{D(1+D^2+\gamma)(\gamma-1-D^2)}{2(1+D^2)q^2}\right) = \\
&= \frac{J^{'}}{4}D^{'}
\end{aligned} \tag{7.102}$$

gde je:

$$D' = -D \tag{7.103}$$

Dakle, ovim putem dobijen je oblik samosličnog efektivnog hamiltonijana:

$$H_{eff} = \frac{J^{'}}{4}\sum_{j=1}^{N/3}\left((1+\gamma^{'})\sigma_j^x\sigma_{j+1}^x - (1-\gamma^{'})\sigma_j^y\sigma_{j+1}^y + D^{'}(\sigma_j^x\sigma_{j+1}^y + \sigma_j^y\sigma_{j+1}^x)\right) \tag{7.104}$$

gde su renormalizovani članovi prikazani relacijama (7.99) i (7.103). Daljim procesom kvantne renormalizacione grupe situacija se proširuje na više blokova (samim tim i više spinova), a veza sa prethodnim RG stepenom je:

$$D^{(i+1)} = -D^{(i)}, \;\; J^{(i+1)} = J^{(i)} \frac{1 + (D^{(i)})^2 + 3(\gamma^{(i)})^2}{2(1 + (D^{(i)})^2 + (\gamma^{(i)})^2)}, \;\; \gamma^{(i+1)} = \frac{3\gamma^{(i)} + 3\gamma^{(i)}(D^{(i)})^2 + (\gamma^{(i)})^3}{1 + (D^{(i)})^2 + 3(\gamma^{(i)})^2} \tag{7.105}$$

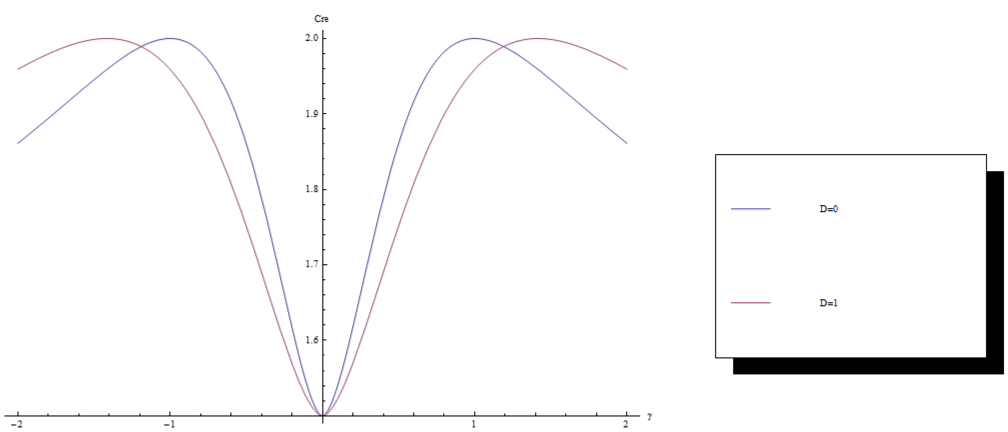
Dejstvo operatora kvantne renormalizacione grupe na hamiltonijan h_l^B daće:

$$\begin{aligned} T_l^\dagger h_l^B T_l &= \Big(|\Uparrow\rangle\langle\Psi| + |\Downarrow\rangle\langle\Psi'| \Big) h_l^B \big(|\Psi\rangle\langle\Uparrow| + |\Psi'\rangle\langle\Downarrow| \Big) = \\ &= \Big(|\Uparrow\rangle\langle\Psi| + |\Downarrow\rangle\langle\Psi'| \Big)\Big(-\frac{Jq}{\sqrt{2}} \Big)\Big(|\Psi\rangle\langle\Uparrow| + |\Psi'\rangle\langle\Downarrow| \Big) = \\ &= \Big(|\Uparrow\rangle\langle\Uparrow| + |\Downarrow\rangle\langle\Downarrow| \Big)\Big(-\frac{Jq}{\sqrt{2}} \Big) = \begin{bmatrix} -\frac{Jq}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & -\frac{Jq}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.106}$$

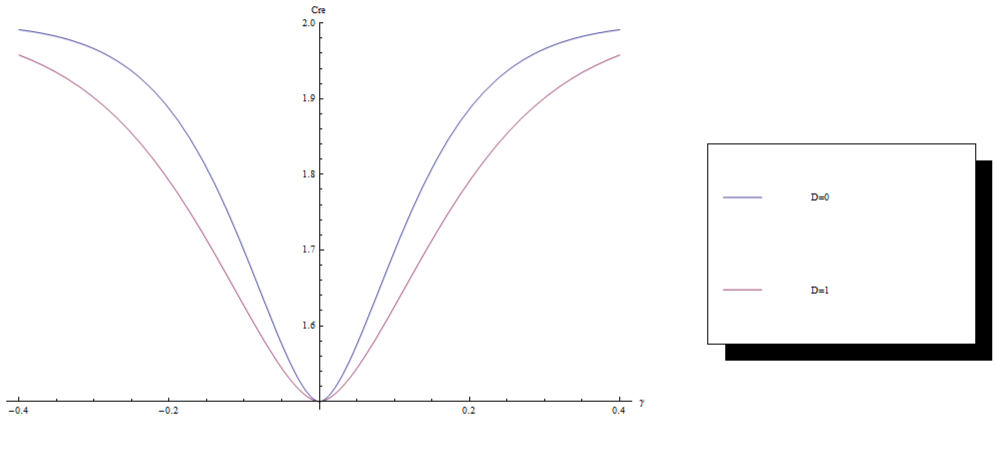
što svedoči o polaznom koraku, u kom su se za srž RG procesa u obzir uzela *up* i *down* stanja razmatranog bloka od 3 spina, gde je energija korišćenih stanja baš $-\frac{Jq}{\sqrt{2}}$, te je i očekivano bilo da dejstvo RG na h_l^B da dijagonalizovani hamiltonijan ispisanog oblika.

7.3.2 Relativna entropija koherentnosti i indikacija kvantnog faznog prelaza

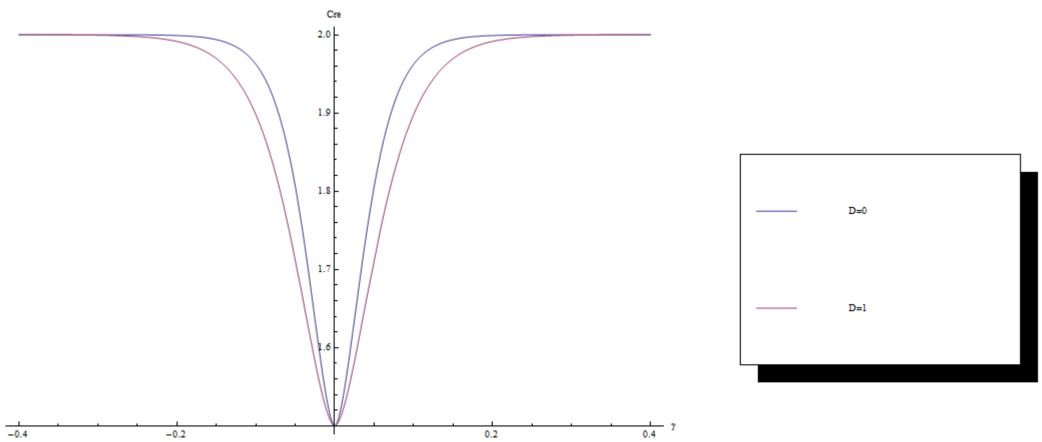
Relativna entropija koherentnosti je u prethodnom segmentu bila računata za sistem od tri spina, a u ovom segmentu će biti pokazano kako povećanje broja čvorova, i kasnije produžetak u okviru termodinamičkog limesa, može da indukuje pojavu kvantnog faznog prelaza i kako se ona manifestuje prilikom posmatranja ponašanja same veličine relativne entropije koherentnosti. Na sledećim slikama nalazi se zavisnost relativne entropije koherentnosti od parametra anizotropije za različit broj čvorova (počevši od 3 čvora, zatim 9, 27 i 81) i dva slučaja u kojima je $D = 0$ i $D = 1$. Prilikom crtanja grafika korišćena je formula (7.33) za relativnu entropiju koherentnosti i relacije (7.99) i (7.103) kao veza između različitih koraka RG transformacije.



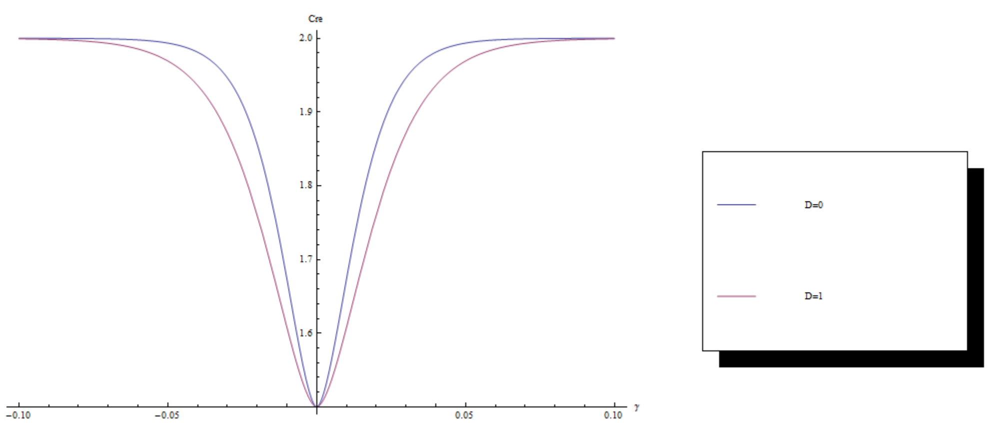
Slika 31. Zavisnost relativne entropije koherentnosti od parametra γ u sistemu od 3 čvora.



Slika 32. Zavisnost relativne entropije koherentnosti od parametra γ u sistemu od 9 *čvorova.*



Slika 33. Zavisnost relativne entropije koherentnosti od parametra γ u sistemu od 27 *čvorova.*



Slika 34. Zavisnost relativne entropije koherentnosti od parametra γ u sistemu od 81 *čvora.*

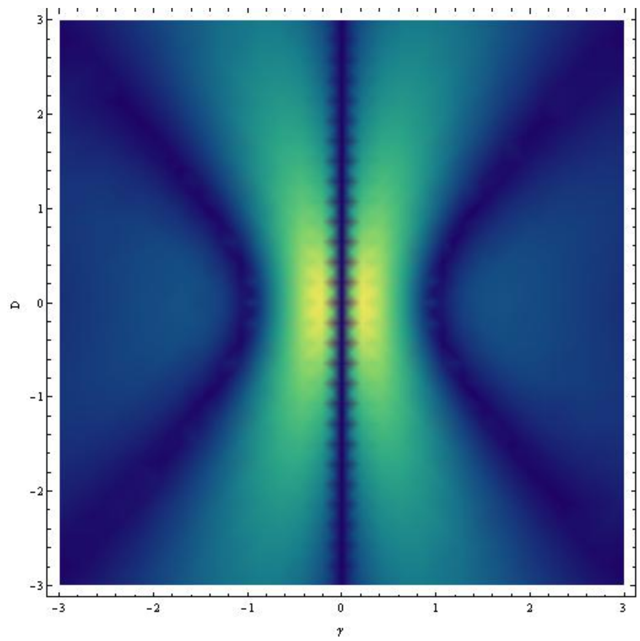
Na slikama se uočava da minimum C_{re} u funkciji od parametra γ ima istu poziciju bez obzira na jačinu DM interakcije, pa čak i na broj razmatranih čvorova, što bi impliciralo da u modelima gde nema anizotropije praktično ne dolazi do kvantnog faznog prelaza [8].

Razmatranje jednačine $\gamma' = \gamma$ daje fiksne tačke RG procedure, kao što je predočeno u prethodnom segmentu:

$$\gamma = \frac{3\gamma + 3\gamma D^2 + \gamma^3}{1 + D^2 + 3\gamma^2} \tag{7.107}$$

te su stabilne fiksne tačke $\gamma = \pm\sqrt{1 + D^2}$, a nestabilna $\gamma = 0$.

Apsolutna vrednost prvog izvoda relativne entropije koherentnosti $|\mathrm{d}C_{re}/\mathrm{d}\gamma|$ u prostoru parametara γ i D prikazana je na slici 35.

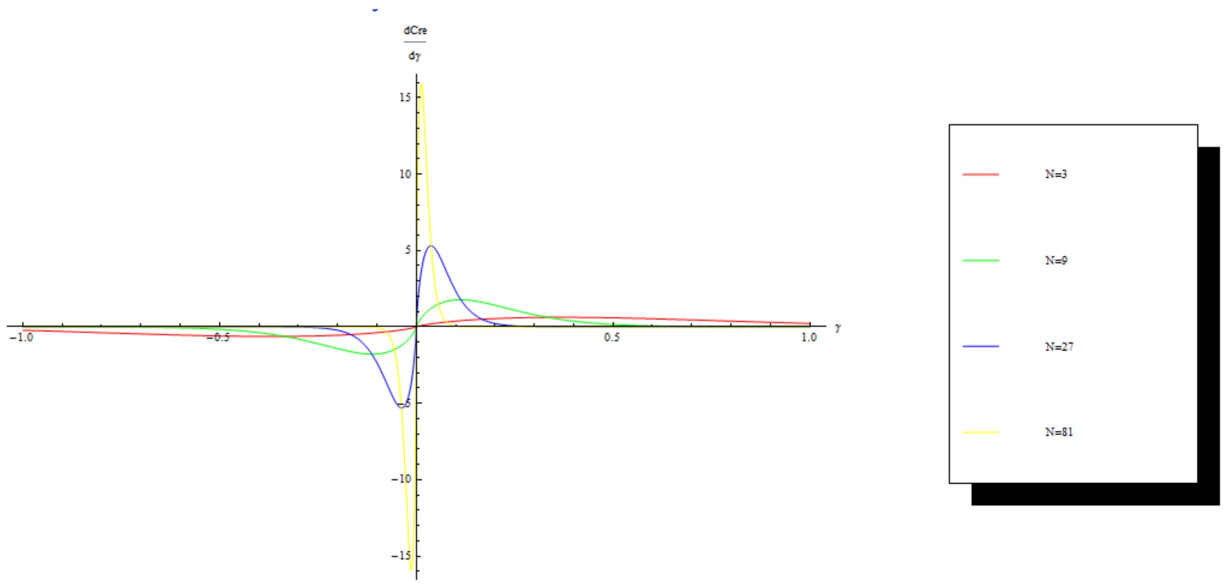


Slika 35. Prikaz apsolutne vrednosti prvog izvoda relativne entropije koherentnosti u prostoru parametara γ i D u slučaju tri čvora.

Središnji segment slike 35 odvojen je od ostatka prostora krivama $\gamma = \pm\sqrt{1 + D^2}$, a ovaj domen jeste domen Nelove faze, dok je za $\gamma = 0$ prisutna faza spinskog fluida [8]. Naime, u pitanju su dva tipa osnovnog stanja ma kog kvantnog magneta: jedno gde postoji dugodometno magnetno uređenje sa osobinom $\langle \mathbf{S} \rangle \neq 0$, gde je $\mathbf{S}$ spinski operator (u ovom slučaju predstavljen Paulijevim matricama), i druga gde je u pitanju razuređeno stanje usled jakih kvantnih fluktuacija, te je $\langle \mathbf{S} \rangle = 0$ (stanje Nelove faze i stanje spinskog fluida respektivno) [84].

Fundamentalno svojstvo kvantnog faznog prelaza jeste divergencija korelacione dužine i konačno skalirajuće ponašanje renormalizovanih fizičkih veličina [8], te će ovde biti navedena veza između ispoljavanja svojstava kvantnog faznog prelaza i relativne entropije koherentnosti. Tom prilikom će se posmatrati skalirajuće ponašanje apsolutne vrednosti minimuma prvog izvoda C_{re} po parametru anizotropije u zavisnosti od veličine sistema, kao i same pozicije minimuma u istoj zavisnosti. Naravno, analogno razmatranje i rezultati dobijaju se posmatranjem pozitivnog dela grafika na slici 36, to jest uzimanjem u obzir maksimuma funkcije umesto minimuma.

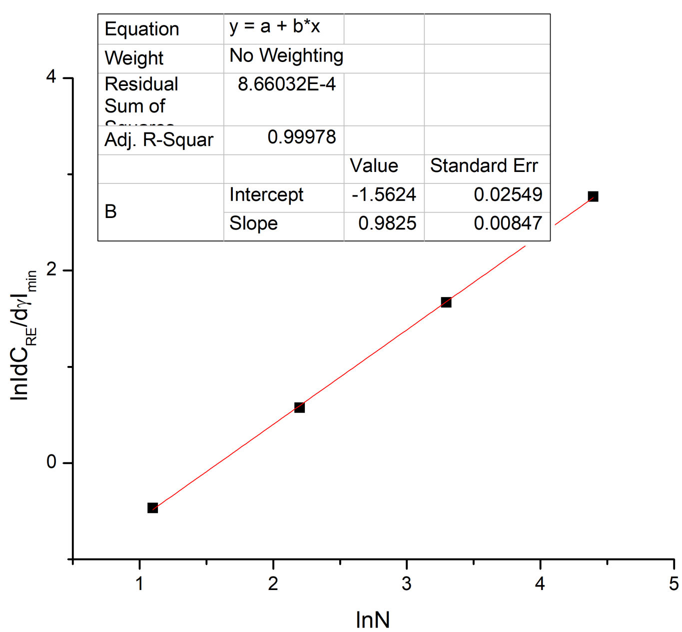
Na slici 36 nalazi se $\mathrm{d}C_{re}/\mathrm{d}\gamma$ u funkciji od parametra anizotropije za različite RG korake i $D = 1$.



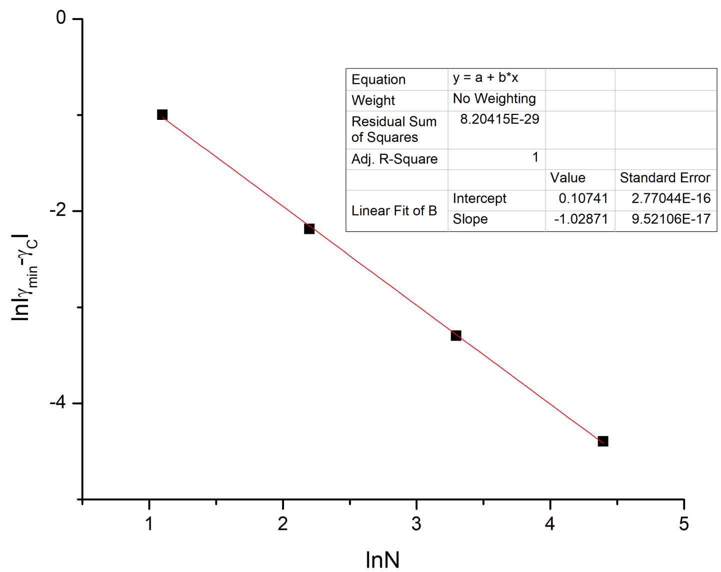
Slika 36. Prikaz prvog izvoda relativne entropije koherentnosti po parametru anizotropije u funkciji parametra anizotropije za fiksni parametar DM interakcije $D = 1$.

Neanalitično ponašanje postaje sve očitije sa povećanjem broja čvorova N, što znači da je prvi izvod singularan u kritičnoj tački $\gamma_C = 0$ kada veličina sistema teži beskonačnosti, te sistem prolazi kroz fazni prelaz II vrste u skladu sa ranije izloženom Erenfestovom definicijom faznih prelaza.

Slike 37 i 38 dokaz su skalirajućeg ponašanja pozicije i veličine minimuma prethodno razmatrane funkcije.



Slika 37. Skalirajuće ponašanje minimuma prvog izvoda relativne entropije koherentnosti.



Slika 38. Skalirajuće ponašanje pozicije minimuma prvog izvoda relativne entropije koherentnosti.

Veličine i pozicije minimuma nađene su u okviru programskog paketa $Wolfram\ Mathematica$ pomoću funkcije $FindMinimum$. Minimalne pozicije, takođe nazivane i pseudokritičnim tačkama, imaju ponašanje oblika $|\gamma_{min} - \gamma_C| \sim N^{-\theta}$ [8], što predstavlja konačno skalirajuće ponašanje, koje je i odlika kvantnog faznog prelaza. Dakle, dešava se da pseudokritična tačka baš na ovaj način teži realnoj kritičnoj tački $\gamma_C = 0$ kako se veličina sistema povećava, te se u termodinamičkom limesu one poklapaju. Sa slike 38 se vidi da je $\theta = 1.02871$. Sličan oblik ponašanja ispoljava i veličina apsolutne vrednosti minimuma relativne entropije koherentnosti, koja se pokorava sledećoj zavisnosti: $|\mathrm{d}C_{re}/\mathrm{d}\gamma|_{min} \sim N^{0.983}$, što se može videti na slici 37.

7.3.3 Konkurentnost kao mera zamršenosti

Jedna od mera tzv. parne zamršenosti (posmatraju se dve čestice) jeste i konkurentnost. U ovom konkretnom primeru, račun će se sprovesti pomoću već nađenog osnovnog stanja i odgovarajuće matrice gustine (7.31), a s obzirom na to da se radi o točvornom sistemu, dvokubitna konkurentnost može se izračunati na dva načina, što se poklapa sa prеđašnjim saznanjem o redukovanoj matrici gustine [6]:

- Račun se sprovodi posmatrajući prvi i treći čvor, dok se sumiranje vrši po stepenima slobode srednjeg čvora, odnosno, traži se $\mathrm{Tr}_2\, \rho$.
- Uzima se sloboda izbora prvog ili trećeg čvora (sumiranje, odnosno trag, vrši se po spomenutom čvoru), dok se konkurentnost računa između drugog i preostalog čvora.

Ovde će bez gubitka na generalnosti biti iskorišćena prva opcija [6], a najpre je potrebno izračunati odgovarajuću matricu gustine ρ^{13}, koja se, kao što je opisano u okviru prve opcije, računa na sledeći način:

$$\rho^{13} = \mathrm{Tr}_2\,\rho = \begin{bmatrix} \mathrm{Tr}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{\gamma^2}{2q^2}\end{bmatrix} & \mathrm{Tr}\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & 0\end{bmatrix} & \mathrm{Tr}\begin{bmatrix}0 & 0\\ -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q} & 0\end{bmatrix} & \mathrm{Tr}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{\gamma(1-\mathrm{i}D)}{2q^2}\end{bmatrix} \\ \mathrm{Tr}\begin{bmatrix}0 & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q}\\ 0 & 0\end{bmatrix} & \mathrm{Tr}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} & \mathrm{Tr}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} & \mathrm{Tr}\begin{bmatrix}0 & \frac{-1+\mathrm{i}D}{2\sqrt{2}q}\\ 0 & 0\end{bmatrix} \\ \mathrm{Tr}\begin{bmatrix}0 & -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}q}\\ 0 & 0\end{bmatrix} & \mathrm{Tr}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} & \mathrm{Tr}\begin{bmatrix}\frac{1}{4} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} & \mathrm{Tr}\begin{bmatrix}0 & \frac{-1+\mathrm{i}D}{2\sqrt{2}q}\\ 0 & 0\end{bmatrix} \\ \mathrm{Tr}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{\gamma(1+\mathrm{i}D)}{2q^2}\end{bmatrix} & \mathrm{Tr}\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{-1-\mathrm{i}D}{2\sqrt{2}q} & 0\end{bmatrix} & \mathrm{Tr}\begin{bmatrix}0 & 0\\ \frac{-1-\mathrm{i}D}{2\sqrt{2}q} & 0\end{bmatrix} & \mathrm{Tr}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \frac{1+D^2}{2q^2}\end{bmatrix} \end{bmatrix} \tag{7.108}$$

$$\rho^{13} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma^2}{2q^2} & 0 & 0 & \frac{\gamma(1-\mathrm{i}D)}{2q^2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{\gamma(1+\mathrm{i}D)}{2q^2} & 0 & 0 & \frac{1+D^2}{2q^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{22} & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{14}^* & 0 & 0 & \rho_{44} \end{bmatrix} \tag{7.109}$$

gde su pojedinačni članovi matrice ρ^{13} označeni simbolima ρ_{ij} zarad kasnijih olakšica u zapisu drugih veličina.

S obzirom na dobijeni oblik matrice ρ^{13}, sada je moguće izračunati konkurentnost između prvog i trećeg čvora. Naime, konkurentnost se označava, u ovom slučaju, simbolom C_{13}, a računa se na osnovu sledeće relacije:

$$C_{13} = \max(\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0) \tag{7.110}$$

gde su λ_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ koreni svojstvenih vrednosti matrice $R = \rho^{13}\tilde{\rho}^{13}$ poređani u opadajućem poretku, a $\tilde{\rho}^{13}$ je tzv. stanje obrnutog spina, koje se definiše na sledeći način:

$$\tilde{\rho}^{13} = (\sigma_1^y \otimes \sigma_3^y)(\rho^{13})^*(\sigma_1^y \otimes \sigma_3^y) \tag{7.111}$$

u skladu sa već izloženim relacijama. Sada preostaje još samo izmnožiti matrice:

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}^{13} &= \left(\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \frac{\gamma^2}{2q^2} & 0 & 0 & \frac{\gamma(1-\mathrm{i}D)}{2q^2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{\gamma(1+\mathrm{i}D)}{2q^2} & 0 & 0 & \frac{1+D^2}{2q^2} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix}0 & -\mathrm{i}\\ \mathrm{i} & 0\end{bmatrix} \right) = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\gamma^2}{2q^2} & 0 & 0 & \frac{\gamma(1-\mathrm{i}D)}{2q^2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{\gamma(1+\mathrm{i}D)}{2q^2} & 0 & 0 & \frac{1+D^2}{2q^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1+D^2}{2q^2} & 0 & 0 & \frac{\gamma(1+\mathrm{i}D)}{2q^2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{\gamma(1-\mathrm{i}D)}{2q^2} & 0 & 0 & \frac{\gamma^2}{2q^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{7.112}$$

Konačno se dobija matrica R (Prilog V):

$$R = \begin{bmatrix} \frac{(1+D^2)\gamma^2}{2q^4} & 0 & 0 & \frac{(1+\mathrm{i}D)\gamma^3}{2q^4} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 \\ -\frac{\mathrm{i}(-\mathrm{i}+D)(\mathrm{i}+D)^2\gamma}{2q^4} & 0 & 0 & \frac{(1+D^2)\gamma^2}{2q^4} \end{bmatrix} \tag{7.113}$$

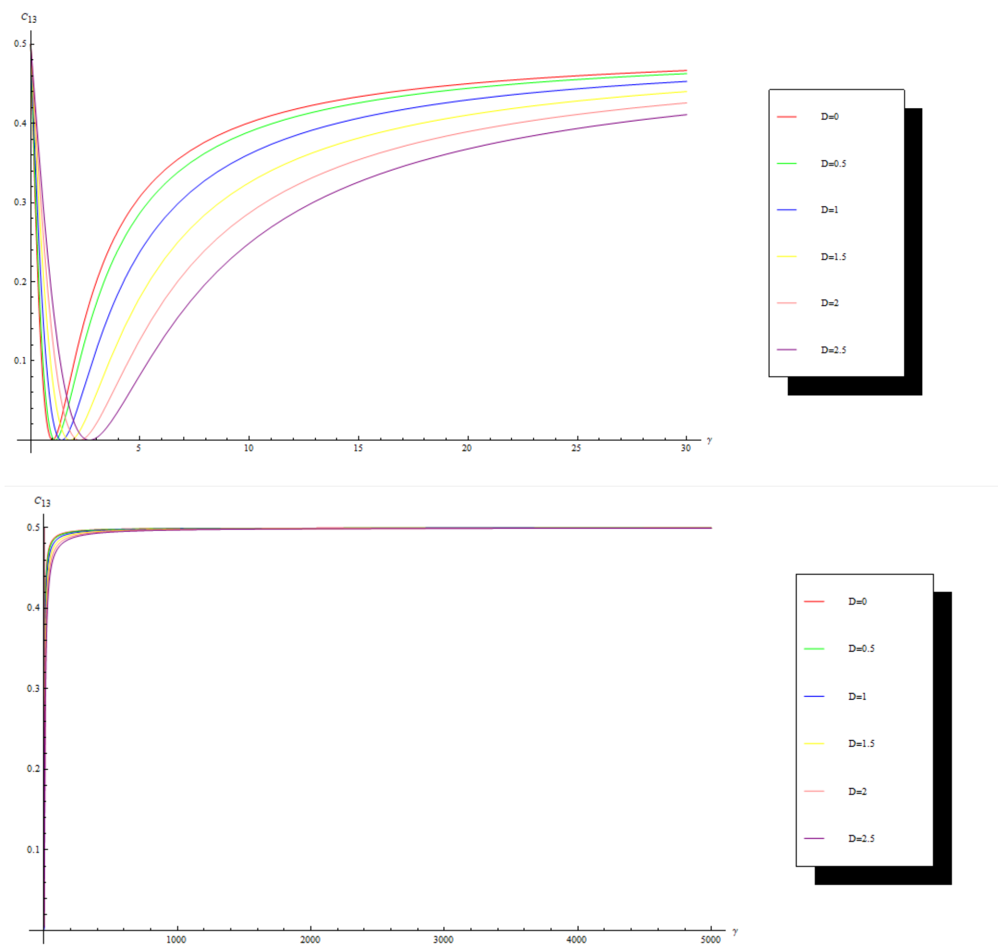
čije su svojstvene vrednosti (Prilog V):

$$\lambda_1 = \frac{1}{4}, \;\; \lambda_2 = \frac{(1+D^2)\gamma^2}{q^4}, \;\; \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \tag{7.114}$$

S obzirom na to da su svojstvene vrednosti zaista poređane u opadajućem poretku, konačni izraz za konkurentnost je:

$$C_{13} = \sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{(1+D^2)\gamma^2}{q^4}} \tag{7.115}$$

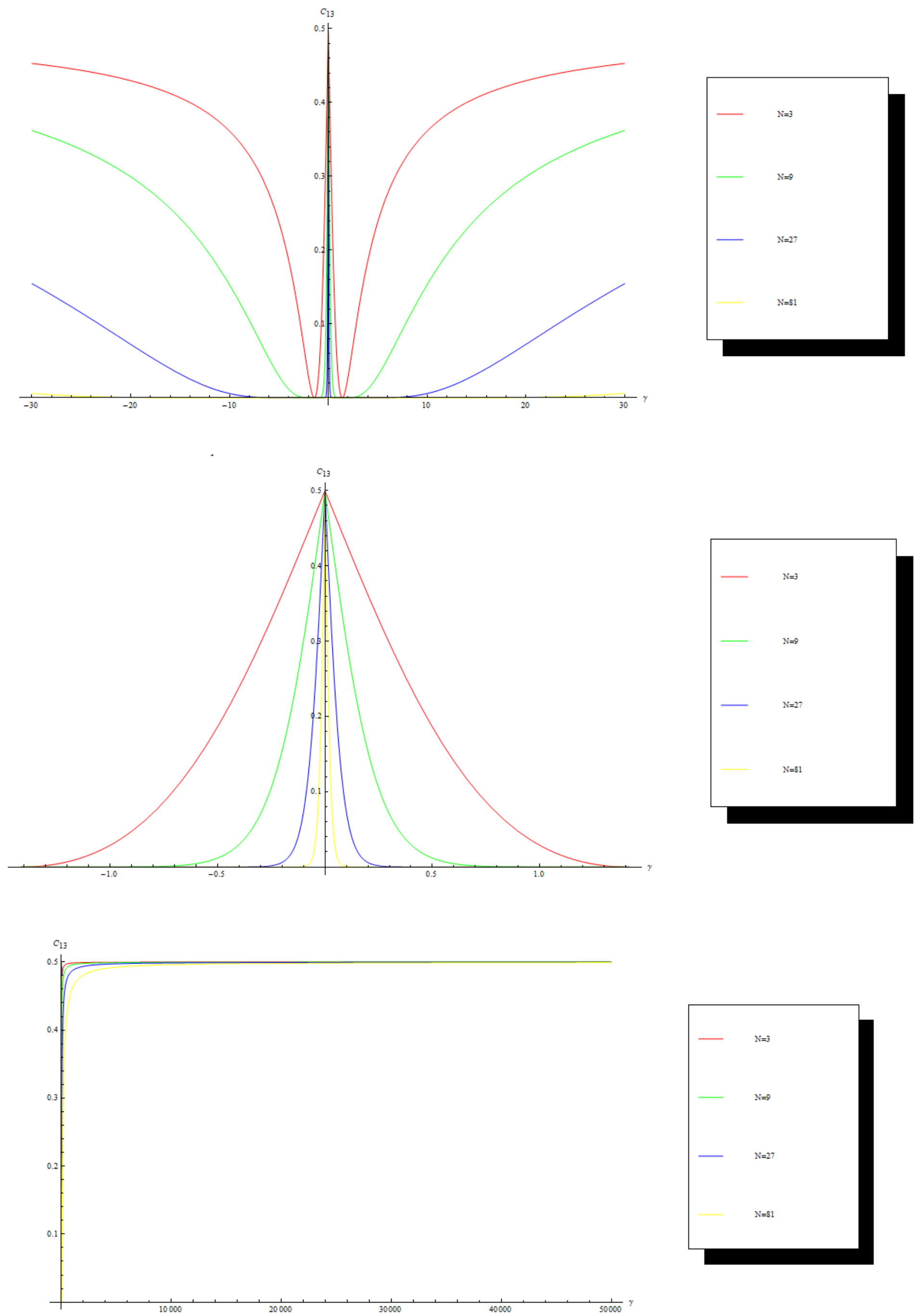
Oblik navedene funkcije u zavisnosti od parametra anizotropije γ uz menjanje kao parametra veličine D prikazan je na slici 39.



Slika 39. Zavisnost konkurentnosti od parametra anizotropije za različite vrednosti parametra DM interakcije i tri čvora.

Kao što se da uočiti, konkurentnost je fiksna vrednost, nezavisna od D, za $\gamma = 0$ i $\gamma \to \infty$. Takođe, DM interakcija ima veći uticaj na zamršenost za veoma male vrednosti γ u odnosu na D, a za velike γ preovlađujuje uticaj anizotropije.

Na slici 40 nalazi se grafik zavisnosti konkurentnosti od parametra anizotropije za $D = 1$ u slučaju različitog broja čvorova (3, 9, 27 i 81). Rezultati su postignuti metodom kvantne renormalizacione grupe na isti način kao što su to bili u prethodnom segmentu.

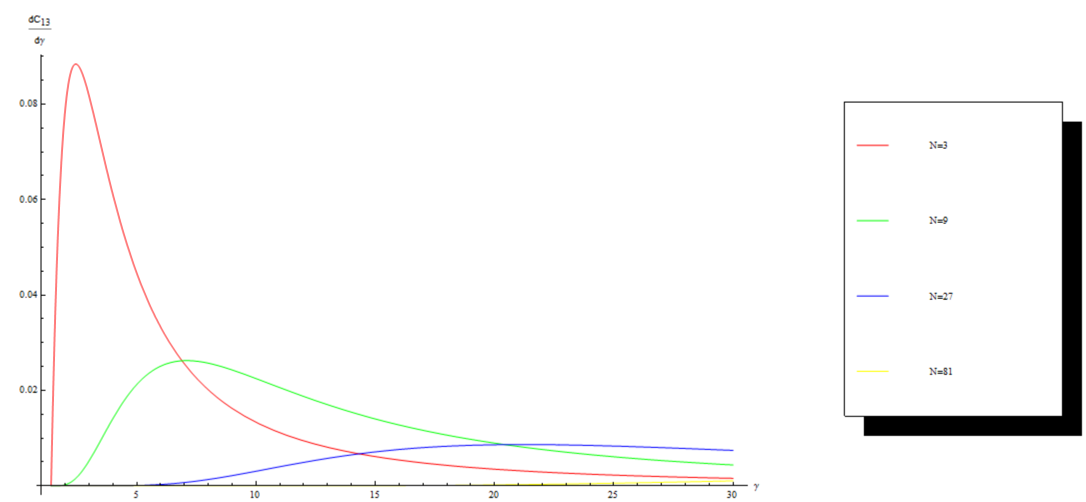


Slika 40. Prikaz zavisnosti konkurentnosti od parametra anizotropije u slučaju $D = 1$ za različit broj koraka.

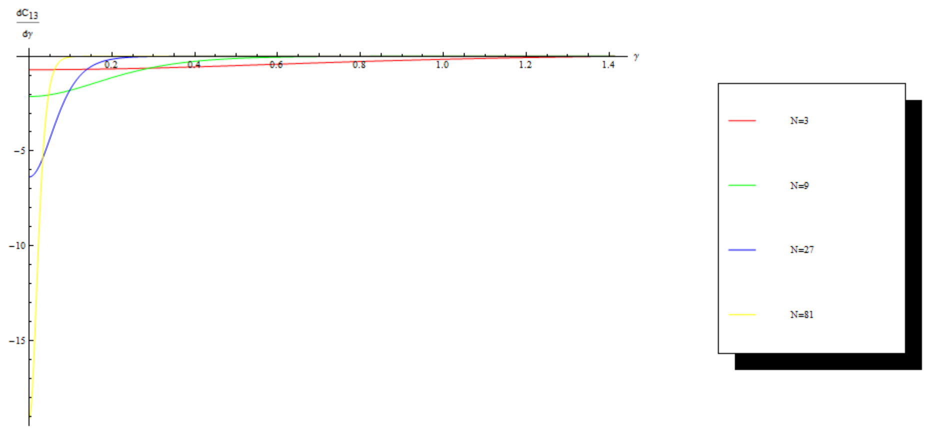
Može se primetiti da je grafik praktično podeljen na 3 segmenta, te iz faze maksimalne konkurentnosti ($\gamma = 0$) ona polako pada do $\gamma = \sqrt{2}$, kada počinje da raste (brže ili sporije) do fiksne vrednosti za $\gamma \to \infty$. Takođe, s obzirom na to da je reč o simetričnom grafiku u odnosu na y-osu, analogni zaključci važe i za negativne vrednosti γ. Posmatrajući uvećan segment, uočljivo je da je za veliki broj koraka, odnosno beskonačno veliki sistem, konkurentnost jednaka nuli, što odgovara Nelovoj fazi, za γ koje se kreće između $-\sqrt{2}$ i $\sqrt{2}$, dok je za $\gamma = 0$ sistem u fazi spinskog fluida, što odgovara maksimalnoj vrednosti konkurentnosti.

Ovde se može izneti još jedan zaključak ukoliko se posmatraju slike 31, 32, 33, 34 i prva dva grafika sa slike 40. Već je rečeno da pitanje postojanja veze između koherentnosti i zamršenosti nije upitno, pitanje je samo kakvog je ona oblika. Posmatranjem spomenutih grafika koherentnosti i konkurentnosti može se uočiti da je ovde veza donekle u skladu sa razmatranjima iznetim u teorijskom delu. Naime, može se uočiti da koherentnost i konkurentnost u ovom konkretnom primeru imaju obrnuto ponašanje, odnosno da interval koji podrazumeva opadanje jedne veličine podrazumeva rast druge i da se minimalne vrednosti jedne poklapaju sa maksimalnim vrednostima druge. Međutim, o prirodi ove veze još uvek se ne može govoriti uopšteno, već je bitno naglasiti da se ovde radi o konkretnom primeru XY modela od tri čvora sa DM interakcijom i razmatranom intervalu parametra γ sa spomenutih grafika.

Konačni cilj je uočavanje kvantnog faznog prelaza, te je neophodno dati prikaz prvog izvoda konkurentnosti u zavisnosti od parametara D i γ. Slike 41 i 42 predstavljaju evoluciju prvog izvoda konkurentnosti po parametru anizotropije u funkciji parametra anizotropije za slučaj $D = 1$.



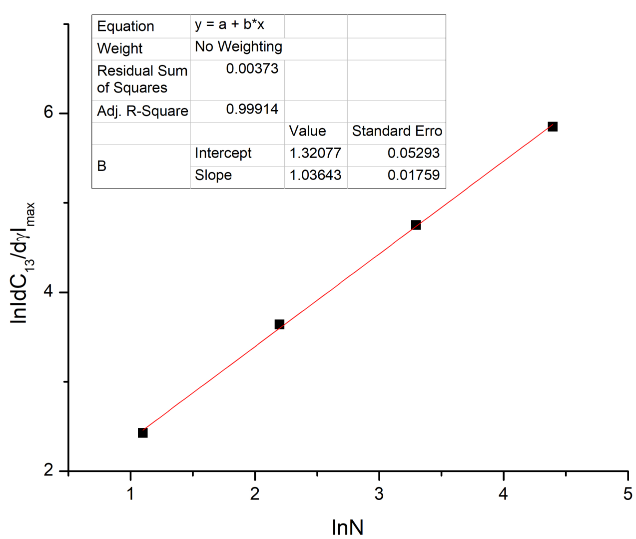
Slika 41. Evolucija prvog izvoda konkurentnosti po parametru anizotropije.



Slika 42. Evolucija prvog izvoda konkurentnosti po parametru anizotropije.

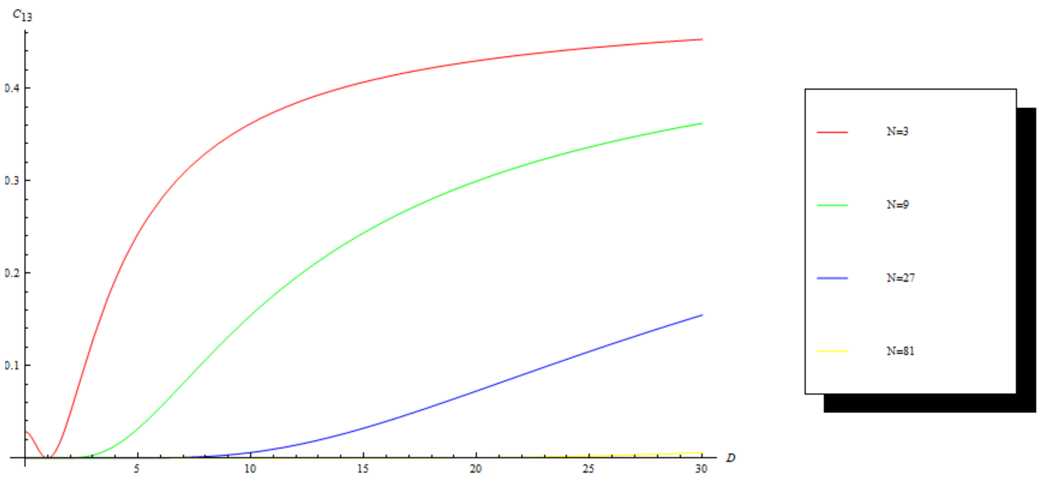
Slike svedoče o neanalitičnom ponašanju prvog izvoda konkurentnosti u odnosu na parametar anizotropije kako broj čvorova raste. Dakle, za beskonačno veliki sistem ($N \to \infty$) očekuje se singularnost u kvantnoj kritičnoj tački $\gamma_C = 0$, te u termodinamičkom limesu sistem prolazi kroz kvantni fazni prelaz II reda.

Na slici 43 nalazi se prikaz skalirajućeg ponašanja apsolutne vrednosti maksimuma prvog izvoda konkurentnosti u odnosu na parametar anizotropije. Kao što se vidi na slici, ponašanje je oblika: $|\mathrm{d}C_{13}/\mathrm{d}\gamma|_{\gamma_{max}} \sim N^{1.036}$. Pozicija maksimuma odabrana je usled lakšeg uočavanja približne pozicije istih na samom grafiku, što omogućava njihovo lakše nalaženje u programu $Wolfram\ Mathematica$ pomoću funkcije $FindMaximum$. Naravno, moguće je posmatrati i minimume prikazane na slici 42.



Slika 43. Skalirajuće ponašanje maksimuma prvog izvoda konkurentnosti po parametru anizotropije.

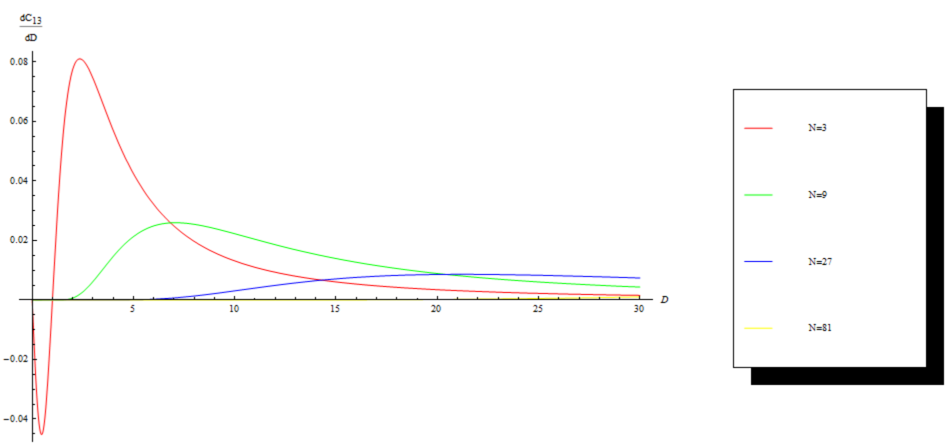
Sada će se posmatrati ponašanje konkurentnosti u odnosu na parametar DM interakcije za različit broj čvorova uz uzimanje $\gamma = \sqrt{2}$.



Slika 44. Zavisnost konkurentnosti od parametra DM interakcije.

Može se uočiti da konkurentnost jako brzo raste sa porastom D, ali i da taj rast postaje sve sporiji kako se veličina sistema povećava.

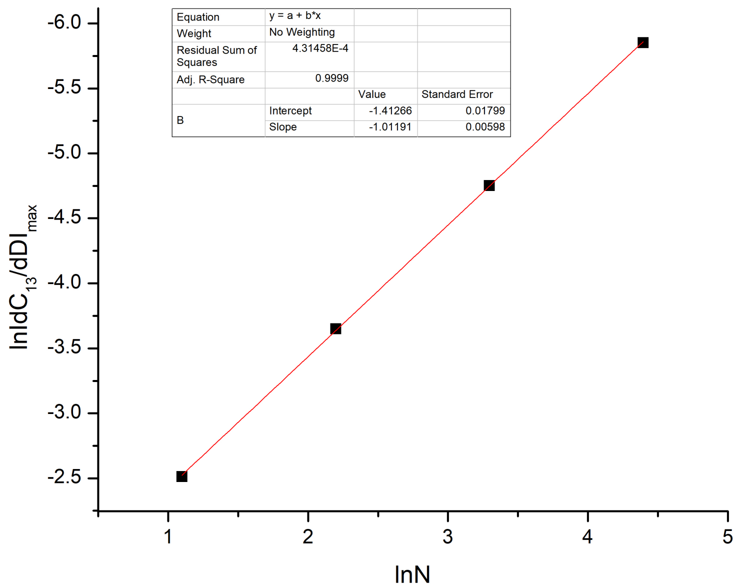
Na slici 45 prikazano je ponašanje prvog izvoda konkurentnosti u odnosu na parametar DM interakcije.



Slika 45. Zavisnost prvog izvoda konkurentnosti po parametru DM interakcije od parametra DM interakcije.

Očito je da prvi izvod teži nuli kako se broj čvorova povećava, te menjanje jačine DM interakcije ne može da uslovi pojavu kvantnog faznog prelaza, što je već izloženo prilikom razmatranja kvantne koherentnosti.

Slika 46 prikazuje opadanje vrednosti maksimuma na prethodnoj slici kako veličina sistema raste.



Slika 46. Ponašanje vrednosti maksimuma prvog izvoda koherentnosti po parametru DM interakcije prilikom povećanja broja čvorova.

Ponašanje je oblika $|\mathrm{d}C_{13}/\mathrm{d}D|_{max} \sim N^{-1.012}$. Pozicija maksimuma teži beskonačnosti kako se veličina sistema povećava, te se dostiže stabilna fiksna tačka $D \to \infty$.

7.3.4 Narušenje Belove nejednakosti i naznake kvantnog faznog prelaza

Još jedna veličina koja će u ovom radu predstavljati validnu naznaku faznog prelaza jeste zapravo vezana za Belovu nejednakost, odnosno njeno narušenje. O Belovoj nejednakosti bilo je već reči u prethodnim segmentima i ispostavlja se da, korišćenjem CHSH oblika Belove nejednakosti, detekcija ispoljavanja faznog prelaza postaje moguća. Sama nejednakost biće korišćena u sledećem obliku [6]:

$$B = |\langle B_{CHSH} \rangle_\rho| = \mathrm{Tr}\left(\rho B_{CHSH}\right) \leq 2 \tag{7.116}$$

gde je $B_{CHSH} = \mathbf{a} \cdot \sigma \otimes (\mathbf{b} + \mathbf{b}^{'}) \cdot \sigma + \mathbf{a}^{'} \cdot \sigma \otimes (\mathbf{b} - \mathbf{b}^{'}) \cdot \sigma$ Belov operator za CHSH nejednakost, a $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}^{'}$, $\mathbf{b}$ i $\mathbf{b}^{'}$ jedinični vektori u $\mathbb{R}^3$ i $\sigma = (\sigma^x, \sigma^y, \sigma^z)$. Shodno kriterijumu Horodeckog, maksimalno narušenje CHSH nejednakosti je [7]:

$$B^{max}_{CHSH} = \max_{\mathbf{a},\mathbf{a}^{'},\mathbf{b},\mathbf{b}^{'}} \mathrm{Tr}\left(\rho B_{CHSH}\right) = 2\sqrt{\max_{i<j}(u_i + u_j)} \tag{7.117}$$

gde su u_i $(i = 1, 2, 3)$ svojstvene vrednosti matrice $U = T^T T$. Matrica T je korelaciona matrica, čije su komponente $T_{ij} = \mathrm{Tr}\left(\sigma^i_A \sigma^j_B \rho\right)$, gde su A i B dva podsistema dvočestičnog sistema [7]. Dakle, pošto je reč o određenoj vrsti korelacione funkcije dva čvora, koristiće se već dobijeni oblik matrice ρ^{13} (7.109) za dvokubitno stanje predstavljen komponentama ρ_{ij}.

Ostaje neophodno pronaći oblik matrice T. U ovu svrhu biće iskorišćeno parcijalno množenje podsistema matrica i svaka komponenta u matrici biće zasebno nađena. Prva komponenta je oblika:

$$T_{11} = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^x \sigma_B^x \rho^{13}\right) = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^x \begin{bmatrix} 0 & \rho_{22} & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ \rho_{14}^* & 0 & 0 & \rho_{44} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{22} & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} \rho_{14}^* & 0 & 0 & \rho_{44} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{22} & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \end{bmatrix} = \rho_{14}^* + 2\rho_{22} + \rho_{14} = \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{q^2} \tag{7.118}$$

Za drugu komponentu dobijeno je:

$$T_{12} = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^x \sigma_B^y \rho^{13}\right) = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^x \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i}\rho_{22} & -\mathrm{i}\rho_{22} & 0 \\ \mathrm{i}\rho_{11} & 0 & 0 & \mathrm{i}\rho_{14} \\ -\mathrm{i}\rho_{14}^* & 0 & 0 & -\mathrm{i}\rho_{44} \\ 0 & \mathrm{i}\rho_{22} & \mathrm{i}\rho_{22} & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} -\mathrm{i}\rho_{14}^* & 0 & 0 & -\mathrm{i}\rho_{44} \\ 0 & -\mathrm{i}\rho_{22} & -\mathrm{i}\rho_{22} & 0 \\ 0 & \mathrm{i}\rho_{22} & \mathrm{i}\rho_{22} & 0 \\ \mathrm{i}\rho_{11} & 0 & 0 & \mathrm{i}\rho_{14} \end{bmatrix} = -\mathrm{i}\rho_{14}^* + \mathrm{i}\rho_{14} = \frac{\gamma D}{q^2} \tag{7.119}$$

dok je treća oblika:

$$T_{13} = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^x \sigma_B^z \rho^{13}\right) = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^x \begin{bmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & -\rho_{22} & -\rho_{22} & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{22} & 0 \\ -\rho_{14}^* & 0 & 0 & -\rho_{44} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} 0 & \rho_{22} & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ -\rho_{14}^* & 0 & 0 & -\rho_{44} \\ 0 & -\rho_{22} & -\rho_{22} & 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{7.120}$$

Četvrta komponenta matrice je:

$$T_{21} = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^y \sigma_B^x \rho^{13}\right) = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^y \begin{bmatrix} 0 & \rho_{22} & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ \rho_{14}^* & 0 & 0 & \rho_{44} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{22} & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} -\mathrm{i}\rho_{14}^* & 0 & 0 & -\mathrm{i}\rho_{44} \\ 0 & \mathrm{i}\rho_{22} & \mathrm{i}\rho_{22} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i}\rho_{22} & -\mathrm{i}\rho_{22} & 0 \\ \mathrm{i}\rho_{11} & 0 & 0 & \mathrm{i}\rho_{14} \end{bmatrix} = -\mathrm{i}\rho_{14}^* + \mathrm{i}\rho_{14} = \frac{\gamma D}{q^2} \tag{7.121}$$

dok je peta:

$$T_{22} = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^y \sigma_B^y \rho^{13}\right) = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^y \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i}\rho_{22} & -\mathrm{i}\rho_{22} & 0 \\ \mathrm{i}\rho_{11} & 0 & 0 & \mathrm{i}\rho_{14} \\ -\mathrm{i}\rho_{14}^* & 0 & 0 & -\mathrm{i}\rho_{44} \\ 0 & \mathrm{i}\rho_{22} & \mathrm{i}\rho_{22} & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} -\rho_{14}^* & 0 & 0 & -\rho_{44} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{22} & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{22} & 0 \\ -\rho_{11} & 0 & 0 & -\rho_{14} \end{bmatrix} = 2\rho_{22} - \rho_{14}^* - \rho_{14} = \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{q^2} \tag{7.122}$$

a šesta:

$$T_{23} = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^y \sigma_B^z \rho^{13}\right) = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^y \begin{bmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & -\rho_{22} & -\rho_{22} & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{22} & 0 \\ -\rho_{14}^* & 0 & 0 & -\rho_{44} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i}\rho_{22} & -\mathrm{i}\rho_{22} & 0 \\ \mathrm{i}\rho_{11} & 0 & 0 & \mathrm{i}\rho_{14} \\ \mathrm{i}\rho_{14}^* & 0 & 0 & \mathrm{i}\rho_{44} \\ 0 & -\mathrm{i}\rho_{22} & -\mathrm{i}\rho_{22} & 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{7.123}$$

Na samom kraju, poslednja kolona se dobija u obliku:

$$T_{31} = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^z \sigma_B^x \rho^{13}\right) = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^z \begin{bmatrix} 0 & \rho_{22} & \rho_{22} & 0 \\ \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ \rho_{14}^* & 0 & 0 & \rho_{44} \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{22} & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} 0 & \rho_{22} & \rho_{22} & 0 \\ -\rho_{14}^* & 0 & 0 & -\rho_{44} \\ \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & -\rho_{22} & -\rho_{22} & 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{7.124}$$

sa:

$$T_{32} = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^z \sigma_B^y \rho^{13}\right) = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^z \begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i}\rho_{22} & -\mathrm{i}\rho_{22} & 0 \\ \mathrm{i}\rho_{11} & 0 & 0 & \mathrm{i}\rho_{14} \\ -\mathrm{i}\rho_{14}^* & 0 & 0 & -\mathrm{i}\rho_{44} \\ 0 & \mathrm{i}\rho_{22} & \mathrm{i}\rho_{22} & 0 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} 0 & -\mathrm{i}\rho_{22} & -\mathrm{i}\rho_{22} & 0 \\ \mathrm{i}\rho_{14}^* & 0 & 0 & \mathrm{i}\rho_{44} \\ \mathrm{i}\rho_{11} & 0 & 0 & \mathrm{i}\rho_{14} \\ 0 & -\mathrm{i}\rho_{22} & -\mathrm{i}\rho_{22} & 0 \end{bmatrix} = 0 \tag{7.125}$$

i:

$$T_{33} = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^z \sigma_B^z \rho^{13}\right) = \mathrm{Tr}\left(\sigma_A^z \begin{bmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & -\rho_{22} & -\rho_{22} & 0 \\ 0 & \rho_{22} & \rho_{22} & 0 \\ -\rho_{14}^* & 0 & 0 & -\rho_{44} \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} \rho_{11} & 0 & 0 & \rho_{14} \\ 0 & -\rho_{22} & -\rho_{22} & 0 \\ 0 & -\rho_{22} & -\rho_{22} & 0 \\ \rho_{14}^* & 0 & 0 & \rho_{44} \end{bmatrix} = \rho_{11} - 2\rho_{22} + \rho_{44} = -\frac{1}{2} + \frac{\gamma^2 + 1 + D^2}{2(1 + D^2 + \gamma^2)} = 0 \quad (7.126)$$

Dakle, potrebne matrice su oblika:

$$T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{q^2} & \frac{\gamma D}{q^2} & 0 \\ \frac{\gamma D}{q^2} & \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{q^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad T^T = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} + \frac{\gamma}{q^2} & \frac{\gamma D}{q^2} & 0 \\ \frac{\gamma D}{q^2} & \frac{1}{2} - \frac{\gamma}{q^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = T \quad (7.127)$$

Na taj način matrica U ima oblik:

$$T^T T = U = \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{q^2}\right)^2 + \frac{\gamma^2 D^2}{q^4} & \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{q^2}\right)\frac{\gamma D}{q^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{q^2}\right)\frac{\gamma D}{q^2} & 0 \\ \left(\frac{1}{2} + \frac{\gamma}{q^2}\right)\frac{\gamma D}{q^2} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{q^2}\right)\frac{\gamma D}{q^2} & \left(\frac{1}{2} - \frac{\gamma}{q^2}\right)^2 + \frac{\gamma^2 D^2}{q^4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7.128)$$

Njene svojstvene vrednosti su (Prilog VI):

$$u_1 = 0, \;\; u_2 = \frac{1}{4} + \frac{-\sqrt{(1+D^2)\gamma^2(1+D^2+\gamma^2)^6} + \gamma^2(1+D^2+\gamma^2)^2(1+D^2)}{q^8},$$

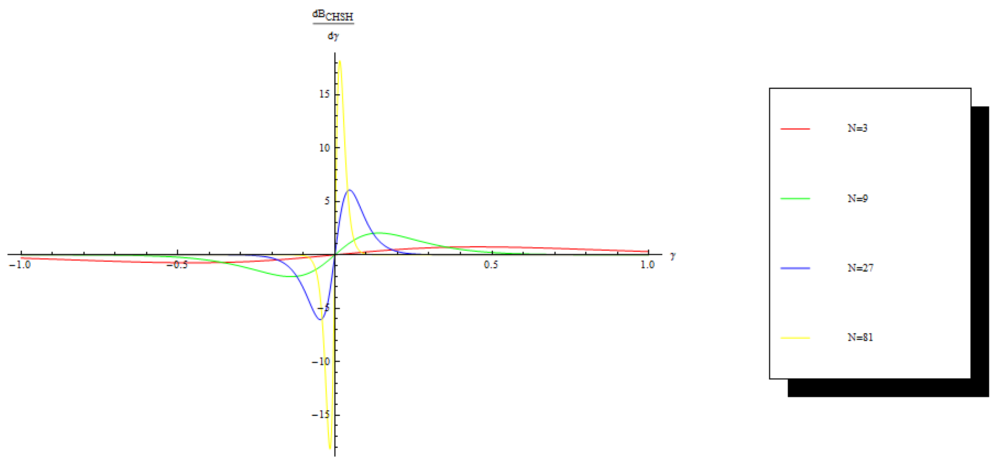
$$u_3 = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{(1+D^2)\gamma^2(1+D^2+\gamma^2)^6} + \gamma^2(1+D^2+\gamma^2)^2(1+D^2)}{q^8} \quad (7.129)$$

Dakle, kako je u_1 najmanja svojstvena vrednost, ona se u izrazu za maksimalno narušenje Belove nejednakosti ne uzima u obzir, te ostaje:

$$B_{CHSH}^{max} = 2\sqrt{u_2 + u_3} = 2\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{2\gamma^2(1+D^2)}{q^4}} \quad (7.130)$$

čime je dobijen izraz koji će se nadalje koristiti.

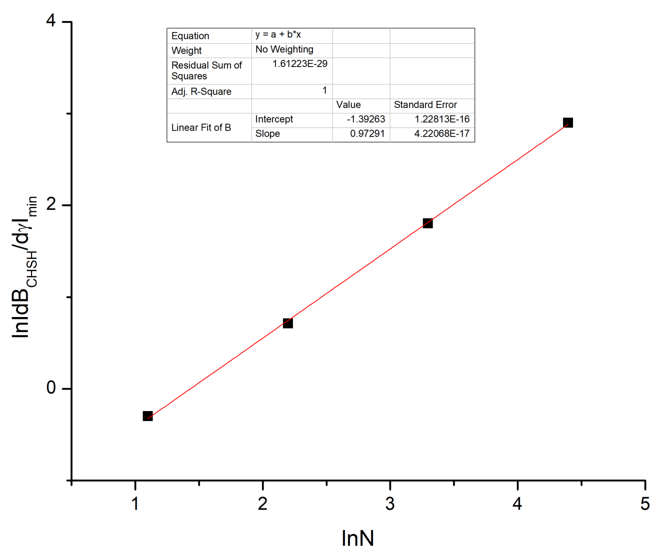
Od interesa je u ovom slučaju prvi izvod date vrednosti u odnosu na parametar anizotropije sa povećanjem veličine sistema. On je kao funkcija parametra anizotropije prikazan na slici 47, gde je za parametar DM interakcije uzeto $D = 1$.



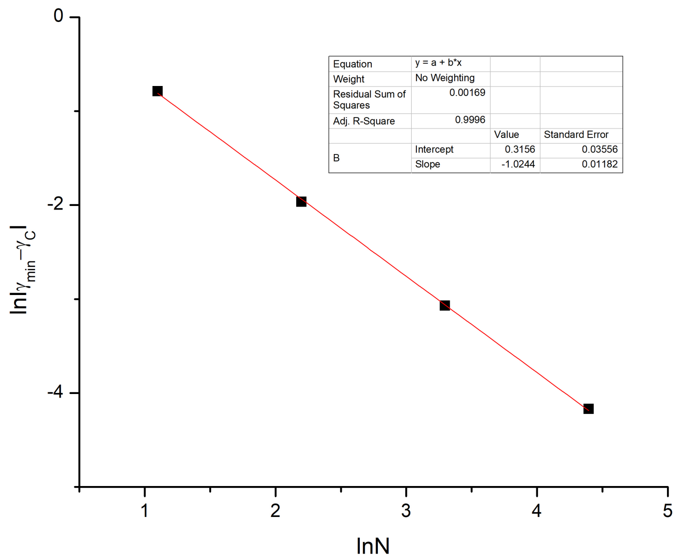
Slika 47. Prvi izvod maksimalnog narušenja Belove nejednakosti po parametru anizotropije u slučaju različitog broja čvorova.

Ono što se može uočiti na slici jeste ispoljavanje kritičnog ponašanja funkcije $\mathrm{d}B_{CHSH}/\mathrm{d}\gamma$ (nadalje će se oznaka max izostavljati prilikom spominjanja ove veličine) u blizini kritične tačke $\gamma_C = 0$, a kako je singularnost prisutna u prvom izvodu funkcije, reč je o faznom prelazu II reda.

Na slikama 48 i 49 prikazana su skalirajuća ponašanja minimuma izvoda $|\mathrm{d}B_{CHSH}/\mathrm{d}\gamma|_{min}$ i pseudokritične tačke $|\gamma_{min} - \gamma_C|$.



Slika 48. Skalirajuće ponašanje minimuma maksimalnog narušenja Belove nejednakosti.



Slika 49. Skalirajuće ponašanje pozicije minimuma maksimalnog narušenja Belove nejednakosti.

Ono što je evidentno sa prethodnih slika jeste da su skalirajuća ponašanja oblika $|\mathrm{d}B_{CHSH}/\mathrm{d}\gamma|_{min} \sim N^{0.97291}$ i $|\gamma_{min} - \gamma_C| \sim N^{-1.024}$. Takođe, nije na odmet napomenuti da su u ovom slučaju posmatrani minimumi i oblast $\gamma < 0$, ali, usled simetričnosti slike, isti zaključci mogli su se dobiti i posmatranjem maksimuma i oblasti $\gamma > 0$.

8 Zaključak

Celokupna problematika kvantne informatike predstavlja jedan još uvek nedovoljno istražen koncept koji prosto mami za ispitivanjem. Oblast je danas izuzetno popularna, ne samo zbog novih odgovora koje nudi, nego i zbog načina njihove implementacije u savremenim tehnologijama, u kojima daje više opcija nego što to čini klasična informatika. Međutim, u pitanju je još uvek relativno mlad plod kvantne mehanike i stoga čak ni ta primena nije kompletno razvijena.

U radu su predstavljene osnovne ideje kvantne informatike. Doduše, to nije moglo biti urađeno na ma koji način. Najpre je neophodno bilo uvesti čitaoca u osnovna sredstva koja kvantna informatika nudi, te je to učinjeno u drugom poglavlju. Pre toga je čitalac kratkim osvrtom na razvoj kvantne informatike imao priliku da se upozna sa osnovnim detaljima i ljudima koji su ostavili neizbrisiv trag u kvantnoj informatici, te je stoga i prelaz na četvrto poglavlje sproveden bez velikih skokova. Cilj je bio što konkretnije i konciznije upoznati čitaoca sa pojedinostima nekih razmatranja u kvantnoj informatici, te je tako bilo reči o danas veoma intrigantnim pojmovima kao što su kloniranje, teleportacija i kriptografija.

Od posebnog značaja bilo je četvrto poglavlje, posvećeno merama iz praktičnog segmenta rada. Sve ove veličine povezane su sa matricom gustine uvedenom u drugom poglavlju, te je tako rad praktično i zaokružen. Pojmovi koherentnosti i zamršenosti bili su centralna tema rada, te je u ovom segmentu napravljen i mali pregled mogućnosti za povezivanje istih u nekoj bliskoj budućnosti. Kao validne mere uvedene su relativna entropija koherentnosti i konkurentnost, koje su dublje istražene u praktičnom delu rada.

Poslednji deo je stoga posvećen istraživanju prethodno uvedenih veličina u konkretnom primeru, na XY anizotropnom modelu sa Đalošinski-Morija interakcijom. Ispitan je i sam uticaj DM interakcije i iznicanje kvantnog faznog prelaza, pojave uvedene u prethodnom segmentu, na osnovu jednostavnog razmatranja kvantno-informatičkih veličina. Za sam kraj pokazano je i kako Belova nejednakost može biti iskorišćena kao još jedna od mera koje mogu dovesti do pokazivanja kvantnog faznog prelaza.

Danas je samo razmatranje DM interakcije u problemima od značaja za zamršenost i kvantnu informatiku veoma učestalo. Pokazalo se da DM interakcija utiče na kreiranje koherentnosti, dok sama anizotropija teži da je smanji. Već su spominjane Paulijeve matrice kao reprezenti kubita u samom uvodu, te su ove interakcije potencijalna buduća oruđa za manipulaciju sistemom. Stoga i ne čudi što je danas rad na ovim modelima veoma popularan. Ko zna, možda jednom postanu i jedna od glavnih stavki u razvoju teorije kvantne informatike.

9 Prilozi

9.1 Prilog I - Rešavanje svojstvenog problema hamiltonijana

In[1]:= $\mathbf{H = \{\{0,\ 0,\ 0,\ \frac{J}{2}\ (1 - i * D),\ 0,\ 0,\ \frac{J}{2}\ (1 - i * D),\ 0\},\ \{0,\ 0,\ \frac{J * \gamma}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{J}{2}\ (1 - i * D)\},}$
$\mathbf{\{0,\ \frac{J * \gamma}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{J * \gamma}{2},\ 0,\ 0,\ 0\},\ \{\frac{J}{2}\ (1 + i * D),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{J * \gamma}{2},\ 0,\ 0\},}$
$\mathbf{\{0,\ 0,\ \frac{J * \gamma}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{J}{2}\ (1 - i * D)\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ \frac{J * \gamma}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{J * \gamma}{2},\ 0\},}$
$\mathbf{\{\frac{J}{2}\ (1 + i * D),\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{J * \gamma}{2},\ 0,\ 0\},\ \{0,\ \frac{J}{2}\ (1 + i * D),\ 0,\ 0,\ \frac{J}{2}\ (1 + i * D),\ 0,\ 0,\ 0\}\}}$

Out[1]= $\{\{0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\ (1 - i\,D)\ J,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\ (1 - i\,D)\ J,\ 0\},\ \{0,\ 0,\ \frac{J\,\gamma}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\ (1 - i\,D)\ J\},$
$\{0,\ \frac{J\,\gamma}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{J\,\gamma}{2},\ 0,\ 0,\ 0\},\ \{\frac{1}{2}\ (1 + i\,D)\ J,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{J\,\gamma}{2},\ 0,\ 0\},$
$\{0,\ 0,\ \frac{J\,\gamma}{2},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\ (1 - i\,D)\ J\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ \frac{J\,\gamma}{2},\ 0,\ 0,\ \frac{J\,\gamma}{2},\ 0\},$
$\{\frac{1}{2}\ (1 + i\,D)\ J,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{J\,\gamma}{2},\ 0,\ 0\},\ \{0,\ \frac{1}{2}\ (1 + i\,D)\ J,\ 0,\ 0,\ \frac{1}{2}\ (1 + i\,D)\ J,\ 0,\ 0,\ 0\}\}$

In[2]:= **Eigenvalues[H]**

Out[2]= $\{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -\frac{J\sqrt{1 + D^2 + \gamma^2}}{\sqrt{2}},\ -\frac{J\sqrt{1 + D^2 + \gamma^2}}{\sqrt{2}},\ \frac{J\sqrt{1 + D^2 + \gamma^2}}{\sqrt{2}},\ \frac{J\sqrt{1 + D^2 + \gamma^2}}{\sqrt{2}}\}$

In[3]:= **Eigenvectors[H]**

Out[3]= $\{\{0,\ 0,\ \frac{i\ (i + D)}{\gamma},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1\},\ \{0,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0\},\ \{\frac{i\,\gamma}{-i + D},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0\},$
$\{0,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0\},\ \{0,\ \frac{i\sqrt{1 + D^2 + \gamma^2}}{\sqrt{2}\ (-i + D)},\ -\frac{i\,\gamma}{-i + D},\ 0,\ \frac{i\sqrt{1 + D^2 + \gamma^2}}{\sqrt{2}\ (-i + D)},\ 0,\ 0,\ 1\},$
$\{-\frac{\sqrt{2}\ (1 - i\,D)}{\sqrt{1 + D^2 + \gamma^2}},\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ -\frac{\sqrt{2}\ \gamma}{\sqrt{1 + D^2 + \gamma^2}},\ 1,\ 0\},$
$\{0,\ -\frac{i\sqrt{1 + D^2 + \gamma^2}}{\sqrt{2}\ (-i + D)},\ -\frac{i\,\gamma}{-i + D},\ 0,\ -\frac{i\sqrt{1 + D^2 + \gamma^2}}{\sqrt{2}\ (-i + D)},\ 0,\ 0,\ 1\},$
$\{-\frac{i\sqrt{2}\ (i + D)}{\sqrt{1 + D^2 + \gamma^2}},\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ \frac{\sqrt{2}\ \gamma}{\sqrt{1 + D^2 + \gamma^2}},\ 1,\ 0\}\}$

9.2 Prilog II - Dokaz čistog stanja za matricu ρ

In[1]:=
$$\rho = \Big\{\{0,0,0,0,0,0,0,0\},\ \Big\{0,\ \frac{1}{4},\ \frac{-\gamma}{2\sqrt{2}\,q},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ \frac{-1+\mathrm{i}*D}{2\sqrt{2}\,q}\Big\},$$
$$\Big\{0,\ \frac{-\gamma}{2\sqrt{2}\,q},\ \frac{\gamma^2}{2q^2},\ 0,\ \frac{-\gamma}{2\sqrt{2}\,q},\ 0,\ 0,\ \frac{\gamma\,(1-\mathrm{i}*D)}{2\,q^{\wedge}2}\Big\},\ \{0,0,0,0,0,0,0,0\},$$
$$\Big\{0,\ \frac{1}{4},\ \frac{-\gamma}{2\sqrt{2}\,q},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ \frac{-1+\mathrm{i}*D}{2\sqrt{2}\,q}\Big\},\ \{0,0,0,0,0,0,0,0\},$$
$$\{0,0,0,0,0,0,0,0\},\ \Big\{0,\ -\frac{1+\mathrm{i}*D}{2\sqrt{2}\,q},\ \frac{\gamma\,(1+\mathrm{i}*D)}{2q^2},\ 0,\ -\frac{1+\mathrm{i}*D}{2\sqrt{2}\,q},\ 0,\ 0,\ \frac{1+D^2}{2q^2}\Big\}\Big\}$$

Out[1]=
$$\Big\{\{0,0,0,0,0,0,0,0\},\ \Big\{0,\ \frac{1}{4},\ -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}\,q},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ \frac{-1+\mathrm{i}D}{2\sqrt{2}\,q}\Big\},$$
$$\Big\{0,\ -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}\,q},\ \frac{\gamma^2}{2q^2},\ 0,\ -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}\,q},\ 0,\ 0,\ \frac{(1-\mathrm{i}D)\,\gamma}{2q^2}\Big\},\ \{0,0,0,0,0,0,0,0\},$$
$$\Big\{0,\ \frac{1}{4},\ -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}\,q},\ 0,\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ \frac{-1+\mathrm{i}D}{2\sqrt{2}\,q}\Big\},\ \{0,0,0,0,0,0,0,0\},$$
$$\{0,0,0,0,0,0,0,0\},\ \Big\{0,\ -\frac{1+\mathrm{i}D}{2\sqrt{2}\,q},\ \frac{(1+\mathrm{i}D)\,\gamma}{2q^2},\ 0,\ -\frac{1+\mathrm{i}D}{2\sqrt{2}\,q},\ 0,\ 0,\ \frac{1+D^2}{2q^2}\Big\}\Big\}$$

In[2]:= $\rho.\rho$

Out[2]=
$$\Big\{\{0,0,0,0,0,0,0,0\},$$
$$\Big\{0,\ \frac{1}{8}-\frac{(-1+\mathrm{i}D)(1+\mathrm{i}D)}{8q^2}+\frac{\gamma^2}{8q^2},\ \frac{(-1+\mathrm{i}D)(1+\mathrm{i}D)\,\gamma}{4\sqrt{2}\,q^3}-\frac{\gamma}{4\sqrt{2}\,q}-\frac{\gamma^3}{4\sqrt{2}\,q^3},\ 0,$$
$$\frac{1}{8}-\frac{(-1+\mathrm{i}D)(1+\mathrm{i}D)}{8q^2}+\frac{\gamma^2}{8q^2},\ 0,\ 0,\ \frac{(-1+\mathrm{i}D)\left(1+D^2\right)}{4\sqrt{2}\,q^3}+\frac{-1+\mathrm{i}D}{4\sqrt{2}\,q}-\frac{(1-\mathrm{i}D)\,\gamma^2}{4\sqrt{2}\,q^3}\Big\},$$
$$\Big\{0,\ -\frac{(1-\mathrm{i}D)(1+\mathrm{i}D)\,\gamma}{4\sqrt{2}\,q^3}-\frac{\gamma}{4\sqrt{2}\,q}-\frac{\gamma^3}{4\sqrt{2}\,q^3},\ \frac{(1-\mathrm{i}D)(1+\mathrm{i}D)\,\gamma^2}{4q^4}+\frac{\gamma^2}{4q^2}+\frac{\gamma^4}{4q^4},\ 0,$$
$$-\frac{(1-\mathrm{i}D)(1+\mathrm{i}D)\,\gamma}{4\sqrt{2}\,q^3}-\frac{\gamma}{4\sqrt{2}\,q}-\frac{\gamma^3}{4\sqrt{2}\,q^3},\ 0,\ 0,\ \frac{(1-\mathrm{i}D)\left(1+D^2\right)\gamma}{4q^4}-\frac{(-1+\mathrm{i}D)\,\gamma}{4q^2}+\frac{(1-\mathrm{i}D)\,\gamma^3}{4q^4}\Big\},$$
$$\{0,0,0,0,0,0,0,0\},\ \Big\{0,\ \frac{1}{8}-\frac{(-1+\mathrm{i}D)(1+\mathrm{i}D)}{8q^2}+\frac{\gamma^2}{8q^2},$$
$$\frac{(-1+\mathrm{i}D)(1+\mathrm{i}D)\,\gamma}{4\sqrt{2}\,q^3}-\frac{\gamma}{4\sqrt{2}\,q}-\frac{\gamma^3}{4\sqrt{2}\,q^3},\ 0,\ \frac{1}{8}-\frac{(-1+\mathrm{i}D)(1+\mathrm{i}D)}{8q^2}+\frac{\gamma^2}{8q^2},$$
$$0,\ 0,\ \frac{(-1+\mathrm{i}D)\left(1+D^2\right)}{4\sqrt{2}\,q^3}+\frac{-1+\mathrm{i}D}{4\sqrt{2}\,q}-\frac{(1-\mathrm{i}D)\,\gamma^2}{4\sqrt{2}\,q^3}\Big\},\ \{0,0,0,0,0,0,0,0\},$$
$$\{0,0,0,0,0,0,0,0\},\ \Big\{0,\ -\frac{(1+\mathrm{i}D)\left(1+D^2\right)}{4\sqrt{2}\,q^3}-\frac{1+\mathrm{i}D}{4\sqrt{2}\,q}-\frac{(1+\mathrm{i}D)\,\gamma^2}{4\sqrt{2}\,q^3},$$
$$\frac{(1+\mathrm{i}D)\left(1+D^2\right)\gamma}{4q^4}+\frac{(1+\mathrm{i}D)\,\gamma}{4q^2}+\frac{(1+\mathrm{i}D)\,\gamma^3}{4q^4},\ 0,\ -\frac{(1+\mathrm{i}D)\left(1+D^2\right)}{4\sqrt{2}\,q^3}-\frac{1+\mathrm{i}D}{4\sqrt{2}\,q}-\frac{(1+\mathrm{i}D)\,\gamma^2}{4\sqrt{2}\,q^3},$$
$$0,\ 0,\ \frac{\left(1+D^2\right)^2}{4q^4}-\frac{(-1+\mathrm{i}D)(1+\mathrm{i}D)}{4q^2}+\frac{(1-\mathrm{i}D)(1+\mathrm{i}D)\,\gamma^2}{4q^4}\Big\}\Big\}$$

```
In[3]:= Simplify[%]
```

$$\text{Out[3]}= \Big\{\{0,0,0,0,0,0,0,0\},\ \Big\{0, \frac{1+D^2+q^2+\gamma^2}{8 q^2}, -\frac{\gamma\left(1+D^2+q^2+\gamma^2\right)}{4\sqrt{2}\,q^3}, 0, \frac{1+D^2+q^2+\gamma^2}{8 q^2}, 0, 0, \frac{i\,(i+D)\left(1+D^2+q^2+\gamma^2\right)}{4\sqrt{2}\,q^3}\Big\},$$
$$\Big\{0, -\frac{\gamma\left(1+D^2+q^2+\gamma^2\right)}{4\sqrt{2}\,q^3}, \frac{\gamma^2\left(1+D^2+q^2+\gamma^2\right)}{4 q^4}, 0, -\frac{\gamma\left(1+D^2+q^2+\gamma^2\right)}{4\sqrt{2}\,q^3}, 0, 0, \frac{(1-i D)\,\gamma\left(1+D^2+q^2+\gamma^2\right)}{4 q^4}\Big\}, \{0,0,0,0,0,0,0,0\},$$
$$\Big\{0, \frac{1+D^2+q^2+\gamma^2}{8 q^2}, -\frac{\gamma\left(1+D^2+q^2+\gamma^2\right)}{4\sqrt{2}\,q^3}, 0, \frac{1+D^2+q^2+\gamma^2}{8 q^2}, 0, 0, \frac{i\,(i+D)\left(1+D^2+q^2+\gamma^2\right)}{4\sqrt{2}\,q^3}\Big\},$$
$$\{0,0,0,0,0,0,0,0\}, \{0,0,0,0,0,0,0,0\}, \Big\{0, -\frac{i\,(-i+D)\left(1+D^2+q^2+\gamma^2\right)}{4\sqrt{2}\,q^3}, \frac{(1+i D)\,\gamma\left(1+D^2+q^2+\gamma^2\right)}{4 q^4}, 0, -\frac{i\,(-i+D)\left(1+D^2+q^2+\gamma^2\right)}{4\sqrt{2}\,q^3}, 0, 0, \frac{\left(1+D^2\right)\left(1+D^2+q^2+\gamma^2\right)}{4 q^4}\Big\}\Big\}$$

9.3 Prilog III - Dokaz čistog stanja za matricu ρ'

$$\text{In[1]}:= \rho' = \Big\{\Big\{\frac{1+D\hat{}2}{2 q\hat{}2}, 0, 0, \frac{i*D-1}{2\sqrt{2}\,q}, 0, \frac{\gamma(1-i*D)}{2 q\hat{}2}, \frac{i*D-1}{2\sqrt{2}\,q}, 0\Big\}, \{0,0,0,0,0,0,0,0\},$$
$$\{0,0,0,0,0,0,0,0\}, \Big\{\frac{-i*D-1}{2\sqrt{2}\,q}, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}\,q}, \frac{1}{4}, 0\Big\},$$
$$\{0,0,0,0,0,0,0,0\}, \Big\{\frac{\gamma(1+i*D)}{2 q\hat{}2}, 0, 0, -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}\,q}, 0, \frac{\gamma\hat{}2}{2 q\hat{}2}, -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}\,q}, 0\Big\},$$
$$\Big\{\frac{-i*D-1}{2\sqrt{2}\,q}, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}\,q}, \frac{1}{4}, 0\Big\}, \{0,0,0,0,0,0,0,0\}\Big\}$$

$$\text{Out[1]}= \Big\{\Big\{\frac{1+D^2}{2 q^2}, 0, 0, \frac{-1+i D}{2\sqrt{2}\,q}, 0, \frac{(1-i D)\,\gamma}{2 q^2}, \frac{-1+i D}{2\sqrt{2}\,q}, 0\Big\}, \{0,0,0,0,0,0,0,0\},$$
$$\{0,0,0,0,0,0,0,0\}, \Big\{\frac{-1-i D}{2\sqrt{2}\,q}, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}\,q}, \frac{1}{4}, 0\Big\},$$
$$\{0,0,0,0,0,0,0,0\}, \Big\{\frac{(1+i D)\,\gamma}{2 q^2}, 0, 0, -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}\,q}, 0, \frac{\gamma^2}{2 q^2}, -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}\,q}, 0\Big\},$$
$$\Big\{\frac{-1-i D}{2\sqrt{2}\,q}, 0, 0, \frac{1}{4}, 0, -\frac{\gamma}{2\sqrt{2}\,q}, \frac{1}{4}, 0\Big\}, \{0,0,0,0,0,0,0,0\}\Big\}$$

In[2]:= `ρ'.ρ'`

Out[2]=
$$
\begin{aligned}
&\Big\{\Big\{\frac{(1+D^2)^2}{4\,q^4}+\frac{(-1-\mathrm{i}\,D)\,(-1+\mathrm{i}\,D)}{4\,q^2}+\frac{(1-\mathrm{i}\,D)\,(1+\mathrm{i}\,D)\,\gamma^2}{4\,q^4},\ 0,\ 0,\\
&\quad \frac{(-1+\mathrm{i}\,D)\,(1+D^2)}{4\,\sqrt{2}\,q^3}+\frac{-1+\mathrm{i}\,D}{4\,\sqrt{2}\,q}-\frac{(1-\mathrm{i}\,D)\,\gamma^2}{4\,\sqrt{2}\,q^3},\ 0,\ \frac{(1-\mathrm{i}\,D)\,(1+D^2)\,\gamma}{4\,q^4}-\frac{(-1+\mathrm{i}\,D)\,\gamma}{4\,q^2}+\frac{(1-\mathrm{i}\,D)\,\gamma^3}{4\,q^4},\\
&\quad \frac{(-1+\mathrm{i}\,D)\,(1+D^2)}{4\,\sqrt{2}\,q^3}+\frac{-1+\mathrm{i}\,D}{4\,\sqrt{2}\,q}-\frac{(1-\mathrm{i}\,D)\,\gamma^2}{4\,\sqrt{2}\,q^3},\ 0\Big\},\ \{0,0,0,0,0,0,0,0\},\\
&\quad \{0,0,0,0,0,0,0,0\},\ \Big\{\frac{(-1-\mathrm{i}\,D)\,(1+D^2)}{4\,\sqrt{2}\,q^3}+\frac{-1-\mathrm{i}\,D}{4\,\sqrt{2}\,q}-\frac{(1+\mathrm{i}\,D)\,\gamma^2}{4\,\sqrt{2}\,q^3},\ 0,\ 0,\\
&\quad \frac{1}{8}+\frac{(-1-\mathrm{i}\,D)\,(-1+\mathrm{i}\,D)}{8\,q^2}+\frac{\gamma^2}{8\,q^2},\ 0,\ \frac{(-1-\mathrm{i}\,D)\,(1-\mathrm{i}\,D)\,\gamma}{4\,\sqrt{2}\,q^3}-\frac{\gamma}{4\,\sqrt{2}\,q}-\frac{\gamma^3}{4\,\sqrt{2}\,q^3},\\
&\quad \frac{1}{8}+\frac{(-1-\mathrm{i}\,D)\,(-1+\mathrm{i}\,D)}{8\,q^2}+\frac{\gamma^2}{8\,q^2},\ 0\Big\},\ \{0,0,0,0,0,0,0,0\},\\
&\quad \Big\{\frac{(1+\mathrm{i}\,D)\,(1+D^2)\,\gamma}{4\,q^4}-\frac{(-1-\mathrm{i}\,D)\,\gamma}{4\,q^2}+\frac{(1+\mathrm{i}\,D)\,\gamma^3}{4\,q^4},\ 0,\ 0,\ \frac{(-1+\mathrm{i}\,D)\,(1+\mathrm{i}\,D)\,\gamma}{4\,\sqrt{2}\,q^3}-\frac{\gamma}{4\,\sqrt{2}\,q}-\frac{\gamma^3}{4\,\sqrt{2}\,q^3},\\
&\quad 0,\ \frac{(1-\mathrm{i}\,D)\,(1+\mathrm{i}\,D)\,\gamma^2}{4\,q^4}+\frac{\gamma^2}{4\,q^2}+\frac{\gamma^4}{4\,q^4},\ \frac{(-1+\mathrm{i}\,D)\,(1+\mathrm{i}\,D)\,\gamma}{4\,\sqrt{2}\,q^3}-\frac{\gamma}{4\,\sqrt{2}\,q}-\frac{\gamma^3}{4\,\sqrt{2}\,q^3},\ 0\Big\},\\
&\quad \Big\{\frac{(-1-\mathrm{i}\,D)\,(1+D^2)}{4\,\sqrt{2}\,q^3}+\frac{-1-\mathrm{i}\,D}{4\,\sqrt{2}\,q}-\frac{(1+\mathrm{i}\,D)\,\gamma^2}{4\,\sqrt{2}\,q^3},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{8}+\frac{(-1-\mathrm{i}\,D)\,(-1+\mathrm{i}\,D)}{8\,q^2}+\frac{\gamma^2}{8\,q^2},\\
&\quad 0,\ \frac{(-1-\mathrm{i}\,D)\,(1-\mathrm{i}\,D)\,\gamma}{4\,\sqrt{2}\,q^3}-\frac{\gamma}{4\,\sqrt{2}\,q}-\frac{\gamma^3}{4\,\sqrt{2}\,q^3},\\
&\quad \frac{1}{8}+\frac{(-1-\mathrm{i}\,D)\,(-1+\mathrm{i}\,D)}{8\,q^2}+\frac{\gamma^2}{8\,q^2},\ 0\Big\},\ \{0,0,0,0,0,0,0,0\}\Big\}
\end{aligned}
$$

In[3]:= `Simplify[%]`

Out[3]=
$$
\begin{aligned}
&\Big\{\Big\{\frac{(1+D^2)\,(1+D^2+q^2+\gamma^2)}{4\,q^4},\ 0,\ 0,\ \frac{\mathrm{i}\,(\mathrm{i}+D)\,(1+D^2+q^2+\gamma^2)}{4\,\sqrt{2}\,q^3},\ 0,\ \frac{(1-\mathrm{i}\,D)\,\gamma\,(1+D^2+q^2+\gamma^2)}{4\,q^4},\\
&\quad \frac{\mathrm{i}\,(\mathrm{i}+D)\,(1+D^2+q^2+\gamma^2)}{4\,\sqrt{2}\,q^3},\ 0\Big\},\ \{0,0,0,0,0,0,0,0\},\ \{0,0,0,0,0,0,0,0\},\\
&\quad \Big\{-\frac{\mathrm{i}\,(-\mathrm{i}+D)\,(1+D^2+q^2+\gamma^2)}{4\,\sqrt{2}\,q^3},\ 0,\ 0,\ \frac{1+D^2+q^2+\gamma^2}{8\,q^2},\ 0,\ -\frac{\gamma\,(1+D^2+q^2+\gamma^2)}{4\,\sqrt{2}\,q^3},\ \frac{1+D^2+q^2+\gamma^2}{8\,q^2},\ 0\Big\},\\
&\quad \{0,0,0,0,0,0,0,0\},\ \Big\{\frac{(1+\mathrm{i}\,D)\,\gamma\,(1+D^2+q^2+\gamma^2)}{4\,q^4},\ 0,\ 0,\\
&\quad -\frac{\gamma\,(1+D^2+q^2+\gamma^2)}{4\,\sqrt{2}\,q^3},\ 0,\ \frac{\gamma^2\,(1+D^2+q^2+\gamma^2)}{4\,q^4},\ -\frac{\gamma\,(1+D^2+q^2+\gamma^2)}{4\,\sqrt{2}\,q^3},\ 0\Big\},\\
&\quad \Big\{-\frac{\mathrm{i}\,(-\mathrm{i}+D)\,(1+D^2+q^2+\gamma^2)}{4\,\sqrt{2}\,q^3},\ 0,\ 0,\ \frac{1+D^2+q^2+\gamma^2}{8\,q^2},\ 0,\ -\frac{\gamma\,(1+D^2+q^2+\gamma^2)}{4\,\sqrt{2}\,q^3},\ \frac{1+D^2+q^2+\gamma^2}{8\,q^2},\ 0\Big\},\\
&\quad \{0,0,0,0,0,0,0,0\}\Big\}
\end{aligned}
$$

9.4 Prilog IV - Dobijanje matrice gustine sistema u termodinamičkoj ravnoteži

In[1]:=
$$H = \left\{\left\{0, 0, 0, \frac{1}{2}(1-\mathrm{i}*D), 0, 0, \frac{1}{2}(1-\mathrm{i}*D), 0\right\}, \left\{0, 0, \frac{\gamma}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}(1-\mathrm{i}*D)\right\}, \left\{0, \frac{\gamma}{2}, 0, 0, \frac{\gamma}{2}, 0, 0, 0\right\}, \left\{\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}*D), 0, 0, 0, 0, \frac{\gamma}{2}, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, \frac{\gamma}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}(1-\mathrm{i}*D)\right\}, \left\{0, 0, 0, \frac{\gamma}{2}, 0, 0, \frac{\gamma}{2}, 0\right\}, \left\{\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}*D), 0, 0, 0, 0, \frac{\gamma}{2}, 0, 0\right\}, \left\{0, \frac{1}{2}(1+\mathrm{i}*D), 0, 0, \frac{1}{2}(1+\mathrm{i}*D), 0, 0, 0\right\}\right\}$$

Out[1]=
$$\left\{\left\{0, 0, 0, \frac{1}{2}(1-\mathrm{i}\,D), 0, 0, \frac{1}{2}(1-\mathrm{i}\,D), 0\right\}, \left\{0, 0, \frac{\gamma}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}(1-\mathrm{i}\,D)\right\}, \left\{0, \frac{\gamma}{2}, 0, 0, \frac{\gamma}{2}, 0, 0, 0\right\}, \left\{\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}\,D), 0, 0, 0, 0, \frac{\gamma}{2}, 0, 0\right\}, \left\{0, 0, \frac{\gamma}{2}, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{2}(1-\mathrm{i}\,D)\right\}, \left\{0, 0, 0, \frac{\gamma}{2}, 0, 0, \frac{\gamma}{2}, 0\right\}, \left\{\frac{1}{2}(1+\mathrm{i}\,D), 0, 0, 0, 0, \frac{\gamma}{2}, 0, 0\right\}, \left\{0, \frac{1}{2}(1+\mathrm{i}\,D), 0, 0, \frac{1}{2}(1+\mathrm{i}\,D), 0, 0, 0\right\}\right\}$$

In[2]:=
$$a = \mathrm{MatrixExp}\left[\frac{-H}{T}\right]$$

In[3]:=
$$Z = \mathrm{Tr}[a]$$

Out[3]=
$$\frac{4}{1+D^2+\gamma^2} + \frac{4D^2}{1+D^2+\gamma^2} + \frac{4\gamma^2}{1+D^2+\gamma^2} + \frac{e^{-\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\gamma^2}{1+D^2+\gamma^2} + \frac{e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\gamma^2}{1+D^2+\gamma^2} + 2e^{-\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\left(\frac{1}{2(1+D^2+\gamma^2)} + \frac{D^2}{2(1+D^2+\gamma^2)}\right) + 2e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\left(\frac{1}{2(1+D^2+\gamma^2)} + \frac{D^2}{2(1+D^2+\gamma^2)}\right) + 4e^{-\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\left(\frac{1}{4(1+D^2+\gamma^2)} + \frac{D^2}{4(1+D^2+\gamma^2)} + \frac{\gamma^2}{4(1+D^2+\gamma^2)}\right) + 4e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\left(\frac{1}{4(1+D^2+\gamma^2)} + \frac{D^2}{4(1+D^2+\gamma^2)} + \frac{\gamma^2}{4(1+D^2+\gamma^2)}\right)$$

In[4]:=
$$\mathrm{Simplify}[\%]$$

Out[4]=
$$2e^{-\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\left(1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)^2$$

In[5]:=
$$a\,/\,Z$$

In[6]:=
$$\mathrm{Simplify}[\%]$$

Out[6]=
$$\left\{\left\{\frac{1+e^{\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{T}} + D^2\left(1+e^{\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{T}}\right) + 2e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\gamma^2}{4\left(1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)^2(1+D^2+\gamma^2)}, 0, 0, \frac{\mathrm{i}\,(\mathrm{i}+D)\left(-1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)}{4\sqrt{2}\left(1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)\sqrt{1+D^2+\gamma^2}},\right.$$

$$0,\ \frac{(1-\mathrm{i}\,D)\left(-1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)^2\gamma}{4\left(1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)^2\left(1+D^2+\gamma^2\right)},\ \frac{\mathrm{i}\,(\mathrm{i}+D)\left(-1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)}{4\sqrt{2}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)\sqrt{1+D^2+\gamma^2}},\ 0\Big\},\ \Big\{0,\ \frac{1}{8},$$

$$-\frac{\left(-1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)\gamma}{4\sqrt{2}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)\sqrt{1+D^2+\gamma^2}},\ 0,\ \frac{\left(-1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)^2}{8\left(1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)^2},\ 0,\ 0,\ \frac{\mathrm{i}\,(\mathrm{i}+D)\left(-1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)}{4\sqrt{2}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}\Big\},$$

$$\Big\{0,\ -\frac{\left(-1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)\gamma}{4\sqrt{2}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)\sqrt{1+D^2+\gamma^2}},\ \frac{2\left(1+D^2\right)\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}+\gamma^2+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{T}}\gamma^2}{4\left(1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)^2\left(1+D^2+\gamma^2\right)},$$

$$0,\ -\frac{\left(-1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)\gamma}{4\sqrt{2}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)\sqrt{1+D^2+\gamma^2}},\ 0,\ 0,\ \frac{(1-\mathrm{i}\,D)\left(-1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)^2\gamma}{4\left(1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)^2\left(1+D^2+\gamma^2\right)}\Big\},$$

$$\Big\{-\frac{\mathrm{i}\,(-\mathrm{i}+D)\left(-1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)}{4\sqrt{2}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)\sqrt{1+D^2+\gamma^2}},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ -\frac{\left(-1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)\gamma}{4\sqrt{2}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)\sqrt{1+D^2+\gamma^2}},$$

$$\frac{\left(-1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)^2}{8\left(1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)^2},\ 0\Big\},\ \Big\{0,\ \frac{\left(-1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)^2}{8\left(1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)^2},\ -\frac{\left(-1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)\gamma}{4\sqrt{2}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,T}}\right)\sqrt{1+D^2+\gamma^2}},$$

$$0,\ \frac{1}{8},\ 0,\ 0,\ \frac{i\,(i+D)\left(-1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)}{4\sqrt{2}\left(1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}\Big\},$$

$$\Big\{\frac{(1+i\,D)\left(-1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)^2\gamma}{4\left(1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)^2\left(1+D^2+\gamma^2\right)},\ 0,\ 0,\ -\frac{\left(-1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)\gamma}{4\sqrt{2}\left(1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)\sqrt{1+D^2+\gamma^2}},\ 0,$$

$$\frac{2\left(1+D^2\right)e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}+\gamma^2+e^{\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\tau}}\gamma^2}{4\left(1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)^2\left(1+D^2+\gamma^2\right)},\ -\frac{\left(-1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)\gamma}{4\sqrt{2}\left(1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)\sqrt{1+D^2+\gamma^2}},\ 0\Big\},$$

$$\Big\{-\frac{i\,(-i+D)\left(-1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)}{4\sqrt{2}\left(1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)\sqrt{1+D^2+\gamma^2}},\ 0,\ 0,\ \frac{\left(-1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)^2}{8\left(1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)^2},\ 0,\ -\frac{\left(-1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)\gamma}{4\sqrt{2}\left(1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)\sqrt{1+D^2+\gamma^2}},$$

$$\frac{1}{8},\ 0\Big\},\ \Big\{0,\ -\frac{i\,(-i+D)\left(-1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)}{4\sqrt{2}\left(1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)\sqrt{1+D^2+\gamma^2}},\ \frac{(1+i\,D)\left(-1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)^2\gamma}{4\left(1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)^2\left(1+D^2+\gamma^2\right)},\ 0,$$

$$-\frac{i\,(-i+D)\left(-1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)}{4\sqrt{2}\left(1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)\sqrt{1+D^2+\gamma^2}},\ 0,\ 0,\ \frac{1+e^{\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\tau}}+D^2\left(1+e^{\frac{\sqrt{2}\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\tau}}\right)+2\,e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\gamma^2}{4\left(1+e^{\frac{\sqrt{1+D^2+\gamma^2}}{\sqrt{2}\,\tau}}\right)^2\left(1+D^2+\gamma^2\right)}\Big\}\Big\}$$

9.5 Prilog V - Problem konkurentnosti

In[1]:= `a = {{0, 0, 0, -1}, {0, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {-1, 0, 0, 0}}`

Out[1]= `{{0, 0, 0, -1}, {0, 0, 1, 0}, {0, 1, 0, 0}, {-1, 0, 0, 0}}`

In[2]:= $$(\rho^{13})^* = \frac{1 + D^2}{2 * (1 + D^2 + \gamma^2)} \{\{\frac{\gamma^2}{1 + D^2}, 0, 0, \frac{\gamma - i * \gamma * D}{D^2 + 1}\}, \{0, \frac{1 + D^2 + \gamma^2}{2 * (1 + D^2)}, \frac{1 + D^2 + \gamma^2}{2 * (1 + D^2)}, 0\}, \{0, \frac{1 + D^2 + \gamma^2}{2 * (1 + D^2)}, \frac{1 + D^2 + \gamma^2}{2 * (1 + D^2)}, 0\}, \{\frac{\gamma + i * \gamma * D}{D^2 + 1}, 0, 0, 1\}\}$$

Out[2]= $$\{\{\frac{\gamma^2}{2 (1 + D^2 + \gamma^2)}, 0, 0, \frac{\gamma - i D \gamma}{2 (1 + D^2 + \gamma^2)}\}, \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\}, \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\}, \{\frac{\gamma + i D \gamma}{2 (1 + D^2 + \gamma^2)}, 0, 0, \frac{1 + D^2}{2 (1 + D^2 + \gamma^2)}\}\}$$

In[3]:= $\tilde{r} = a.(\rho^{13})^*.a$

Out[3]= $$\{\{\frac{1 + D^2}{2 (1 + D^2 + \gamma^2)}, 0, 0, \frac{\gamma + i D \gamma}{2 (1 + D^2 + \gamma^2)}\}, \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\}, \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\}, \{\frac{\gamma - i D \gamma}{2 (1 + D^2 + \gamma^2)}, 0, 0, \frac{\gamma^2}{2 (1 + D^2 + \gamma^2)}\}\}$$

In[4]:= $$p = \frac{1 + D^2}{2 (1 + D^2 + \gamma^2)} \{\{\frac{\gamma^2}{1 + D^2}, 0, 0, \frac{i * \gamma}{D + i}\}, \{0, \frac{1 + D^2 + \gamma^2}{2 * (1 + D^2)}, \frac{1 + D^2 + \gamma^2}{2 * (1 + D^2)}, 0\}, \{0, \frac{1 + D^2 + \gamma^2}{2 * (1 + D^2)}, \frac{1 + D^2 + \gamma^2}{2 * (1 + D^2)}, 0\}, \{\frac{-i * \gamma}{D - i}, 0, 0, 1\}\}$$

Out[4]= $$\{\{\frac{\gamma^2}{2 (1 + D^2 + \gamma^2)}, 0, 0, \frac{i (1 + D^2) \gamma}{2 (i + D) (1 + D^2 + \gamma^2)}\}, \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\}, \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\}, \{-\frac{i (1 + D^2) \gamma}{2 (-i + D) (1 + D^2 + \gamma^2)}, 0, 0, \frac{1 + D^2}{2 (1 + D^2 + \gamma^2)}\}\}$$

In[5]:= $R = p.\tilde{r}$

Out[5]= $$\{\{\frac{(1 + D^2) \gamma^2}{4 (1 + D^2 + \gamma^2)^2} + \frac{i (1 + D^2) \gamma (\gamma - i D \gamma)}{4 (i + D) (1 + D^2 + \gamma^2)^2}, 0, 0, \frac{i (1 + D^2) \gamma^3}{4 (i + D) (1 + D^2 + \gamma^2)^2} + \frac{\gamma^2 (\gamma + i D \gamma)}{4 (1 + D^2 + \gamma^2)^2}\}, \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0\}, \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0\}, \{-\frac{i (1 + D^2)^2 \gamma}{4 (-i + D) (1 + D^2 + \gamma^2)^2} + \frac{(1 + D^2) (\gamma - i D \gamma)}{4 (1 + D^2 + \gamma^2)^2}, 0, 0, \frac{(1 + D^2) \gamma^2}{4 (1 + D^2 + \gamma^2)^2} - \frac{i (1 + D^2) \gamma (\gamma + i D \gamma)}{4 (-i + D) (1 + D^2 + \gamma^2)^2}\}\}$$

In[6]:= `Simplify[%]`

Out[6]= $$\{\{\frac{(1 + D^2) \gamma^2}{2 (1 + D^2 + \gamma^2)^2}, 0, 0, \frac{(1 + i D) \gamma^3}{2 (1 + D^2 + \gamma^2)^2}\}, \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0\}, \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{8}, 0\}, \{-\frac{i (-i + D) (i + D)^2 \gamma}{2 (1 + D^2 + \gamma^2)^2}, 0, 0, \frac{(1 + D^2) \gamma^2}{2 (1 + D^2 + \gamma^2)^2}\}\}$$

In[7]:= **Eigenvalues[R]**

Out[7]=
$$\left\{\frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{4}\left(\frac{2\,\gamma^2}{\left(1+D^2+\gamma^2\right)^2}+\frac{2\,D^2\,\gamma^2}{\left(1+D^2+\gamma^2\right)^2}-\frac{i\,\gamma^2}{(-i+D)\left(1+D^2+\gamma^2\right)^2}+\frac{D\,\gamma^2}{(-i+D)\left(1+D^2+\gamma^2\right)^2}-\frac{i\,D^2\,\gamma^2}{(-i+D)\left(1+D^2+\gamma^2\right)^2}+\frac{D^3\,\gamma^2}{(-i+D)\left(1+D^2+\gamma^2\right)^2}+\frac{i\,\gamma^2}{(i+D)\left(1+D^2+\gamma^2\right)^2}+\frac{D\,\gamma^2}{(i+D)\left(1+D^2+\gamma^2\right)^2}+\frac{i\,D^2\,\gamma^2}{(i+D)\left(1+D^2+\gamma^2\right)^2}+\frac{D^3\,\gamma^2}{(i+D)\left(1+D^2+\gamma^2\right)^2}\right)\right\}$$

In[8]:= **Simplify[%]**

Out[8]=
$$\left\{\frac{1}{4},\ 0,\ 0,\ \frac{\left(1+D^2\right)\gamma^2}{\left(1+D^2+\gamma^2\right)^2}\right\}$$

9.6 Prilog VI - Svojstvene vrednosti matrice U

In[1]:=
$$U=\left\{\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{1+D^2+\gamma^2}\right)^2+\frac{\gamma^2 * D^2}{\left(1+D^2+\gamma^2\right)^2},\ \frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{1+D^2+\gamma^2}\right)*\gamma*D}{1+D^2+\gamma^2}+\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{1+D^2+\gamma^2}\right)*\gamma*D}{1+D^2+\gamma^2},\ 0\right\},\right.$$
$$\left.\left\{\frac{\left(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{1+D^2+\gamma^2}\right)*\gamma*D}{1+D^2+\gamma^2}+\frac{\left(\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{1+D^2+\gamma^2}\right)*\gamma*D}{1+D^2+\gamma^2},\ \left(\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{1+D^2+\gamma^2}\right)^2+\frac{\gamma^2 * D^2}{\left(1+D^2+\gamma^2\right)^2},\ 0\right\},\ \{0,0,0\}\right\}$$

Out[1]=
$$\left\{\left\{\frac{D^2\,\gamma^2}{\left(1+D^2+\gamma^2\right)^2}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{1+D^2+\gamma^2}\right)^2,\ \frac{D\,\gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{1+D^2+\gamma^2}\right)}{1+D^2+\gamma^2}+\frac{D\,\gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{1+D^2+\gamma^2}\right)}{1+D^2+\gamma^2},\ 0\right\},\right.$$
$$\left.\left\{\frac{D\,\gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{1+D^2+\gamma^2}\right)}{1+D^2+\gamma^2}+\frac{D\,\gamma\left(\frac{1}{2}+\frac{\gamma}{1+D^2+\gamma^2}\right)}{1+D^2+\gamma^2},\ \frac{D^2\,\gamma^2}{\left(1+D^2+\gamma^2\right)^2}+\left(\frac{1}{2}-\frac{\gamma}{1+D^2+\gamma^2}\right)^2,\ 0\right\},\ \{0,0,0\}\right\}$$

In[2]:= **Eigenvalues[U]**

Out[2]=
$$\begin{aligned}\{0,\ &\left(8+32 D^2+48 D^4+32 D^6+8 D^8+64 \gamma^2+192 D^2 \gamma^2+192 D^4 \gamma^2+64 D^6 \gamma^2+112 \gamma^4+224 D^2 \gamma^4+112 D^4 \gamma^4+\right.\\
&\quad 64 \gamma^6+64 D^2 \gamma^6+8 \gamma^8-32 \sqrt{}\left(\gamma^2+7 D^2 \gamma^2+21 D^4 \gamma^2+35 D^6 \gamma^2+35 D^8 \gamma^2+21 D^{10} \gamma^2+7 D^{12} \gamma^2+D^{14} \gamma^2+\right.\\
&\qquad 6 \gamma^4+36 D^2 \gamma^4+90 D^4 \gamma^4+120 D^6 \gamma^4+90 D^8 \gamma^4+36 D^{10} \gamma^4+6 D^{12} \gamma^4+15 \gamma^6+75 D^2 \gamma^6+\\
&\qquad 150 D^4 \gamma^6+150 D^6 \gamma^6+75 D^8 \gamma^6+15 D^{10} \gamma^6+20 \gamma^8+80 D^2 \gamma^8+120 D^4 \gamma^8+80 D^6 \gamma^8+20 D^8 \gamma^8+\\
&\qquad \left.\left.15 \gamma^{10}+45 D^2 \gamma^{10}+45 D^4 \gamma^{10}+15 D^6 \gamma^{10}+6 \gamma^{12}+12 D^2 \gamma^{12}+6 D^4 \gamma^{12}+\gamma^{14}+D^2 \gamma^{14}\right)\right) /\\
&\left(2\left(16+64 D^2+96 D^4+64 D^6+16 D^8+64 \gamma^2+192 D^2 \gamma^2+192 D^4 \gamma^2+64 D^6 \gamma^2+\right.\right.\\
&\quad \left.\left.96 \gamma^4+192 D^2 \gamma^4+96 D^4 \gamma^4+64 \gamma^6+64 D^2 \gamma^6+16 \gamma^8\right)\right),\\
&\left(8+32 D^2+48 D^4+32 D^6+8 D^8+64 \gamma^2+192 D^2 \gamma^2+192 D^4 \gamma^2+64 D^6 \gamma^2+112 \gamma^4+\right.\\
&\quad 224 D^2 \gamma^4+112 D^4 \gamma^4+64 \gamma^6+64 D^2 \gamma^6+8 \gamma^8+\\
&\quad 32 \sqrt{}\left(\gamma^2+7 D^2 \gamma^2+21 D^4 \gamma^2+35 D^6 \gamma^2+35 D^8 \gamma^2+21 D^{10} \gamma^2+7 D^{12} \gamma^2+D^{14} \gamma^2+6 \gamma^4+36 D^2 \gamma^4+\right.\\
&\qquad 90 D^4 \gamma^4+120 D^6 \gamma^4+90 D^8 \gamma^4+36 D^{10} \gamma^4+6 D^{12} \gamma^4+15 \gamma^6+75 D^2 \gamma^6+150 D^4 \gamma^6+\\
&\qquad 150 D^6 \gamma^6+75 D^8 \gamma^6+15 D^{10} \gamma^6+20 \gamma^8+80 D^2 \gamma^8+120 D^4 \gamma^8+80 D^6 \gamma^8+20 D^8 \gamma^8+\\
&\qquad \left.\left.15 \gamma^{10}+45 D^2 \gamma^{10}+45 D^4 \gamma^{10}+15 D^6 \gamma^{10}+6 \gamma^{12}+12 D^2 \gamma^{12}+6 D^4 \gamma^{12}+\gamma^{14}+D^2 \gamma^{14}\right)\right) /\\
&\left(2\left(16+64 D^2+96 D^4+64 D^6+16 D^8+64 \gamma^2+192 D^2 \gamma^2+192 D^4 \gamma^2+64 D^6 \gamma^2+\right.\right.\\
&\quad \left.\left.96 \gamma^4+192 D^2 \gamma^4+96 D^4 \gamma^4+64 \gamma^6+64 D^2 \gamma^6+16 \gamma^8\right)\right)\}\end{aligned}$$

In[3]:= **FullSimplify[%]**

Out[3]=
$$\left\{0,\ \frac{1}{4}+\frac{\left(1+D^2\right)\gamma^2\left(1+D^2+\gamma^2\right)^2-\sqrt{\left(1+D^2\right)\gamma^2\left(1+D^2+\gamma^2\right)^6}}{\left(1+D^2+\gamma^2\right)^4},\ \frac{1}{4}+\frac{\left(1+D^2\right)\gamma^2\left(1+D^2+\gamma^2\right)^2+\sqrt{\left(1+D^2\right)\gamma^2\left(1+D^2+\gamma^2\right)^6}}{\left(1+D^2+\gamma^2\right)^4}\right\}$$

Reference

[1] http://www.particleadventure.org/other/history/quantumt.html

[2] Michael A. Nielsen, Isaac L. Chuang, *Quantum Computation and Quantum Information*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[3] Kamyar Saeedi et al, *Room-Temperature Quantum Bit Storage Exceeding 39 Minutes Using Ionized Donors in Silicon-28*, Science, Volume 342, Number 6160, Pages 830-833, 2013.

[4] Kamyar Saeedi et al, *Unconditional quantum teleportation between distant solid-state quantum bits*, Science, Volume 345, Number 6196, Pages 532-535, 2014.

[5] https://www.dwavesys.com/press-releases/d-wave%C2%A0announces%C2%A0d-wave-2000q-quantum-computer-and-first-system-order

[6] Fu-Wu Ma, Sheng-Xin Liu, Xiang-Mu Kong, *Quantum entanglement and quantum phase transition in the XY model with staggered Dzyaloshinskii-Moriya interaction*, Physical Review A, Volume 84, Number 4, Pages 042302, 2011.

[7] Yao Yao et al, *Performance of various correlation measures in quantum phase transitions using the quantum renormalization-group method*, Physical Review A, Volume 86, Number 4, Pages 042102, 2012.

[8] Guo-Qing Zhang, Jing-Bo Xu, *Quantum coherence of an XY spin chain with Dzyaloshinskii-Moriya interaction and quantum phase transition*, Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, Volume 50, Number 26, Pages 265303, 2017.

[9] Jun-Qing Cheng, Wei Wu, Jing-Bo Xu, *Multipartite entanglement in an XXZ spin chain with DzyaloshinskiiMoriya interaction and quantum phase transition*, Quantum Information Processing, Volume 16, Number 9, Pages 231, 2017.

[10] Alexander Streltsov et al, *Measuring Quantum Coherence with Entanglement*, Physical Review Letters, Volume 115, Number 2, Pages 020403, 2015.

[11] http://www.columbia.edu/~jcc2161/documents/ChenJVSTA91.pdf

[12] https://plato.stanford.edu/entries/qt-quantcomp/#BriHisFie

[13] http://www.worldofcomputing.net/wp-content/uploads/2013/01/turingMachine.gif

[14] https://www.doc.ic.ac.uk/~nd/surprise_97/journal/vol4/spb3/

[15] http://www.gla.ac.uk/media/media_344957_en.pdf

[16] http://planetmath.org/shannonsentropy

[17] Vlatko Vedral, *Introduction to Quantum Information Science*, Oxford University Press, Oxford, 2006.

[18] Đorđe Mušicki, Božidar Milić, *Matematičke osnove teorijske fizike*, Naučna knjiga, Beograd, 1975.

[19] http://www.lecture-notes.co.uk/susskind/quantum-entanglements/lecture-8/pure-and-mixed-states/

[20] *arXiv:physics/0602145 [physics.ed-ph]*

[21] https://ocw.mit.edu/courses/chemistry/5-74-introductory-quantum-mechanics-ii-spring-2009/lecture-notes/MIT5_74s09_lec12.pdf

[22] http://www.thphy.uni-duesseldorf.de/~ls3/teaching/1515-QOQI/Additional/partial_trace.pdf

[23] Andreas Buchleitner, Carlos Viviescas, Markus Tiersch, *Entanglement and Decoherence: Foundations and Modern Trends*, Springer, Berlin, 2009.

[24] *arXiv:quant-ph/0512125*

[25] N. David Mermin, *Quantum Computer Science*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[26] *arXiv:quant-ph/9708022*

[27] http://www.informit.com/articles/article.aspx?p=1218422&seqNum=2

[28] http://athena.nitc.ac.in/~kmurali/Quantum/ams/chapter3.2.pdf

[29] Albert Einstein, Boris Podolsky, Nathan Rosen, *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?*, Physical Review, Volume 47, Pages 777-780, 1935.

[30] http://www.quantumdiaries.org/wp-content/uploads/2009/11/epr-300x198.png

[31] Danny Laghi, *EPR Paradox and Bells Theorem*, Diplomski rad, Universita degli Studi di Perugia, 2013.

[32] Dean Rickles, *The Ashgate Companion to Contemporary Philosophy of Physics*, Ashgate, Burlington, 2008.

[33] John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, Richard A. Holt, *Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories* Physical Review Letters, Volume 34, Number 15, Pages 880-884, 1969.

[34] M. A. Rowe et al, *Experimental violation of a Bell's inequality with efficient detection*, Letters to Nature, Volume 409, Number 6822, Pages 791-794, 2001.

[35] https://www.physik.hu-berlin.de/de/nano/lehre/quantenoptik09/chapter13

[36] C. A. Sackett et al, *Experimental entanglement of four particles*, Letters to Nature, Volume 404, Number 6775, Pages 256-259, 2000.

[37] Nicholas Cothard, Peter Heuer, *Observing Entanglement: Violations of Bell Inequalities*, Laboratorijski izveštaj, University of Rochester, 2013.

[38] http://www.optics.rochester.edu/workgroups/lukishova/QuantumOpticsLab/homepage/opt253_08_lab1_entangl_manual.pdf

[39] http://research.physics.illinois.edu/QI/Photonics/img/typeI.png

[40] Carolyn Auchter, Chen-Kuan Chou, Thomas W. Noel, Boris B. Blinov, *Ionphoton entanglement and Bell inequality violation with 138Ba+*, Journal of the Optical Society of America B, Volume 31, Number 7, Pages 1568-1572, 2014.

[41] Olimpia Lombardi, Federico Holik, Leonardo Vanni, *What is quantum information?*, Studies in History and Philosophy of Modern Physics, Volume 56, Pages 17-26, 2016.

[42] *arXiv:1604.07450 [quant-ph]*

[43] Robert C. Qiu, Paul Antonik, *Smart Grid Using Big Data Analytics: A Random Matrix Theory Approach*, John Wiley and Sons Ltd, Chichester, 2017.

[44] *arXiv:math-ph/0102013*

[45] http://rickbradford.co.uk/QM6Entropy.pdf

[46] *arXiv:quant-ph/0004045*

[47] *arXiv:quant-ph/0703044*

[48] Vlatko Vedral, *Quantifying entanglement in macroscopic systems*, Nature, Volume 453, Number 7124, Pages 1004-1007, 2008.

[49] *arXiv:quant-ph/0406040*

[50] Xiaoguang Wang, Hongchen Fu and Allan I. Solomon, *Thermal entanglement in three-qubit Heisenberg models*, Journal of Physics A: Mathematical and General, Volume 34, Number 50, Pages 11307-11320, 2001.

[51] V. Vedral, M. B. Plenio, *Entanglement measures and purification procedures*, Physical Review A, Volume 57, Number 3, Pages 1619-1633, 1998.

[52] *arXiv:quant-ph/0204041*

[53] Lan Zhou, Yu-Bo Sheng, *Concurrence Measurement for the Two-Qubit Optical and Atomic States*, Entropy, Volume 17, Number 6, Pages 4293-4322, 2015.

[54] Zhengjun Xi1, Yongming Li1, Heng Fan, *Quantum coherence and correlations in quantum system*, Scientific Reports, Volume 5, Number 10922, 2015.

[55] *arXiv:1609.02439*

[56] T. Baumgratz, M. Cramer, M. B. Plenio, *Quantifying Coherence*, Physical Review Letters, Volume 113, Number 14, Pages 140401, 2014.

[57] *arXiv:1703.01852*

[58] Goran Lindblad, *Completely Positive Maps and Entropy Inequalities*, Communications in Mathematical Physics, Volume 40, Number 2, Pages 147-151, 1975.

[59] Mary Beth Ruskai, *Inequalities for quantum entropy: A review with conditions for equality*, Journal of Mathematical Physics, Volume 43, Number 9, Pages 4358-4375, 2002.

[60] Goran Lindblad, *Entropy, Information and Quantum Measurements*, Communications in Mathematical Physics, Volume 33, Number 4, Pages 305-322, 1973.

[61] `https://phys.org/news/2015-06-physicists-quantum-coherence-entanglement-sides.html`

[62] *arXiv:cond-mat/0207340v1* [cond-mat.stat-mech]

[63] Leo P. Kadanoff et al, *Static Phenomena Near Critical Points: Theory and Experiment*, Reviews of Modern Physics, Volume 39, Number 2, Pages 395-431, 1967.

[64] P. Kopietz, L. Bartosch, F. Schutz, *Introduction to the Functional Renormalization Group*, Springer, Berlin, 2010.

[65] Kenneth G. Wilson, *Non-Lagrangian Models of Current Algebra*, Physical Review, Volume 179, Number 5, Pages 1499-1512, 1969.

[66] Kenneth G. Wilson, *Renormalization Group and Critical Phenomena. I. Renormalization Group and the Kadanoff Scaling Picture*, Physical Review B, Volume 3, Number 9, Pages 3174-3183, 1971.

[67] Kenneth G. Wilson, *Renormalization Group and Critical Phenomena. II. Phase-Space Cell Analysis of Critical Behavior*, Physical Review B, Volume 4, Number 9, Pages 3184-3205, 1971.

[68] Kenneth G. Wilson, *Feynman-graph expansion for critical exponents*, Physical Review Letters, Volume 28, Number 9, Pages 548-551, 1972.

[69] Kenneth G. Wilson, Michael E. Fisher, *Critical exponents in 3.99 dimensions*, Physical Review Letters, Volume 28, Number 4, Pages 240-243, 1972.

[70] Kenneth G. Wilson, J. Kogut, *The renormalization group and the ϵ expansion*, Physics Reports, Volume 12, Number 2, Pages 75-199, 1974.

[71] Kenneth G. Wilson, *The renormalization group: Critical phenomena and the Kondo problem*, Review of Modern Physics, Volume 47, Number 4, Pages 773-840, 1975.

[72] A. A. Migdal, *Phase transitions in gauge and spin-lattice systems*, Journal of Experimental and Theoretical Physics, Volume 42, Number 4, Pages 743-746, 1975.

[73] L. P. Kadanoff, *Notes on Migdals recursion formulas*, Annals of Physics, Volume 100, Numbers 12, Pages 359-394, 1976.

[74] Franz J. Wegner, Anthony Houghton, *Renormalization group equation for critical phenomena*, Physical Review A, Volume 8, Number 1, Pages 401-412, 1973.

[75] Franz J.Wegner, *Flow equations for hamiltonians*, Physics Reports, Volume 348, Numbers 12, Pages 77-89, 2001.

[76] Eric Bertin, *A Concise Introduction to the Statistical Physics of Complex Systems*, Springer, Berlin, 2012.

[77] Michael Plischke, Birger Bergersen, *Equilibrium Statistical Physics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, 2005.

[78] Sava Milošević, *Osnovi fenomenološke termodinamike*, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1979.

[79] N. Stusser et al, *A neutron diffraction study of the magnetic phases of CsCuCl3 for in-plane fields up to 17 T*, Journal of Physics: Condensed Matter, Volume 14, Number 20, Pages 5161-5172, 2002.

[80] I.Dzyaloshinsky, *A thermodynamic theory of weak ferromagnetism of antiferromagnetics*, Journal of Physics and Chemistry of Solids, Volume 4, Number 4, Pages 241-255, 1958.

[81] T. Moriya, *Anisotropic Superexchange Interaction and Weak Ferromagnetism*, Physical Review, Volume 120, Number 1, Pages 91-98, 1960.

[82] Bernd Zimmermann, *Calculation of the Dzyaloshinskii-Moriya Interaction in ultrathin magnetic Films: Cr/W(110)*, Diplomski rad, Fakultat fur Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der Rheinisch-Westfalischen Technischen Hochschule Aachen, 2010.

[83] `http://www.nanoscience.de/HTML/research/noncollinear_spins.html`

[84] Subir Sachdev, Jinwu Ye, *Gapless Spin-Fluid Ground State in a Random Quantum Heisenberg Magnet*, Physical Review Letters, Volume 70, Number 21, Pages 3339-3342, 1993.

Biografija

Sonja Gombar rođena je 12.3.1993. u Zrenjaninu. Osnovnu školu *Dr Jovan Cvijić* završila je u Zrenjaninu, gde završava i srednju školu. Godine 2012. upisuje studije fizike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer fizičar istraživač, koje završava u roku sa prosečnom ocenom 10.00. Nakon završetka osnovnih studija upisuje master studije pri Katedri za teorijsku fiziku. Polaže sve ispite u roku sa prosečnom ocenom 10.00. Godine 2017. prezentovala je rad sa naslovom *Applications of ac+dc driven Frenkel-Kontorova model* na Internacionalnoj konferenciji studenata fizike ICPS u Torinu.

Ključna dokumentacija

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Master rad
VR
Autor: Sonja Gombar
AU
Mentor: dr Petar Mali
MN
Naslov rada: Kvantna zamršenost i kvantna koherentnost XY spinskog lanca sa Đalošinski-Morija interakcijom i kvantni fazni prelaz u modelu
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2017.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA
Fizički opis rada: 9 poglavlja/122 strane/84 reference/49 slika
FO
Naučna oblast: Fizika
NO
Naučna disciplina: Teorijska fizika kondenzovane materije
ND

Predmetna odrednica/ ključne reči: Kvantna zamršenost, kvantna koherentnost, kvantni fazni prelaz
PO
UDK
Čuva se: Biblioteka departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu
ČU
Važna napomena: nema
VN
Izvod: U radu je opisana kvantna zamršenost i kvantna koherentnost XY spinskog lanca sa Đalošinski-Morija interakcijom. Takođe, razmatrani su uslovi iznicanja kvantnih faznih prelaza, pri čemu su date osnovne postavke RG metode. Osim toga, date su osnovne postavke teorije kvantne informatike kako bi se čitalac uveo u priču. Na samom kraju rada priloženi su *Wolfram Mathematica* fajlovi, koji su korišćeni prilikom dobijanja izvesnih relacija.
IZ
Datum prihvatanja teme od NN veća: Septembar, 2017.
DP
Datum odbrane: 27.9.2017.
DO
Članovi komisije:
KO

Predsednik:	dr Slobodan Radošević
Član:	dr Petar Mali
Član:	dr Nikola Jovančević

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph publication
DT
Type of record: Textual printed material
TR
Content code: Final paper
CC
Author: Sonja Gombar
AU
Mentor: dr Petar Mali
MN
Title: Quantum entanglement and quantum coherence of the XY spin chain with Dzyaloshinskii-Moriya interaction and quantum phase transition of the model
TI
Language of text: Serbian (Latin)
LT
Language of abstract: English
LA
Contry of publication: Serbia
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2017.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publication place: Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP
Physical description: 9 chapters/122 pages/84 references/49 pictures
PD
Scientific field: Physics
SF
Scientific discipline: Theoretical condensed matter physics
SD
Subject/Key words: Quantum entanglement, quantum coherence, quantum phase transition

SKW
UDK
Holding data: Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4
HD
Note: none
N
Abstract: In this paper quantum entanglement and quantum coherence of the XY spin chain with Dzyaloshinskii-Moriya interaction were described. Also, the conditions of the appearance of quantum phase transition were outlined and basic ideas of the RG method were shown. Several ideas of theory of quantum computation were discussed as well, so that a reader could be introduced to the focus of the paper. At the end of the paper several appendices in a form of *Wolfram Mathematica* files were given as a part of the explanation for several formulas.
AB
Accepted by the Scientific Board: September, 2017.
ASB
Defended on: 27.9.2017.
DO
Thesis defend board:
DB

President:	dr Slobodan Radošević
Member:	dr Petar Mali
Member:	dr Nikola Jovančević