U N I V E R Z I T E T   U   N O V O M   S A D U
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MAGNETNI SOLITONI U KOMPRESIBILNOM HEISENBERG-ovom IZOTROPNOM LANCU

- diplomski rad -

Bajat Slavica

Novi Sad, 1986.

Zahvaljujem se mentoru profesoru dr Mariu Škrinjaru i profesorima dr Darku Kaporu i dr Stanoju Stojanoviću na beskrajnom strpljenju i nesebičnoj pomoći koju su mi pružili u toku studija i pri izradi diplomskog rada.

S A D R Ž A J

U V O D

Solitone je prvi opisao John Scott Russel posmatrajući prostiranje talasa na vodi u kanalu. Sam termin "soliton" uveden je tek 1965. godine, dok je ranije korišćen termin "usamljeni talas", koji i odgovara samoj pojavi. Voda nije jedina sredina kroz koju se prostiru solitoni. Mnoge pojave u poluprovodnicima, biološkim strukturama, plazmi, feromagneticima itd., mogu se objasniti uz pretpostavku da su u tim sredinama prisutni solitoni.

Solitoni su talasni paketi koji su trajno prostorno lokalizovani, ne rasejavaju se i imaju praktično beskonačan život. Ove osobine su posledica suprotnog dejstva disperzije i nelinearnosti sredine kroz koju se prostiru, jer promena oblika nastala usled disperzije u potpunosti se kompenzuje promenom oblika usled nelinearnosti.

Postojanje solitona dokazano je i u dvo- i trodimenzionalnim sredinama ali su uglavnom zbog jednostavnosti, najbolje proučeni za jednodimenzionalne sisteme.

Jednodimenzionalna analiza predstavlja opravdanu aproksimaciju kod materijala koji pokazuju izražena svojstva u jednom pravcu, mada apsolutno jednodimenzionalni slučaj ne postoji.

Matematičku obradu Russel-ovih zapažanja izvršili su J.D. Korteweg i G. de Vries krajem XIX veka. Rešavajući jednačinu talasnog kretanja u pravougaonom kanalu sa vodom, oni su primetili da se između ostalih rešenja dobija takvo rešenje (tzv. solitonsko rešenje), koje opisuje talase koji pri prostiranju kroz nelinearnu sredinu sa disperzijom ne menjaju oblik, tj. solitone. Za slučaj male dubine kanala, jednačina talasnog kretanja ima oblik:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial z} + \beta\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = 0 \qquad (1.1)$$

gde je $\beta = \sqrt{gh^3/6}$ parametar koji karakteriše disperziju, a u je srednja brzina tečnosti u datom preseku. Jednačina (1.1) poznata je kao Korteweg - de Vries-ova ili skraćeno KdV jednačina. Nelinearnost sredine izražena je nelinearnošću diferencijalnih jednačina koje opisuju kretanje talasa kroz tu sredinu. Solitoni mogu nastati u raznim sredinama, međutim, jednačine koje opisuju prostiranje solitona kroz ove sredine su slične pa i identične. Ono što je različito su parametri koji ulaze u ove jednačine. Za svaki poseban slučaj imaju posebni fizički smisao. Primeri za ovo su:

a) Nelinearna jednačina Schrödinger-a koja opisuje samofokusiranje u nelinearnoj optici za jednodimenzionalni slučaj

$$\left(i\hbar \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m^*} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + G|\Psi|^2 \right)\Psi = 0 \qquad (1.2)$$

gde parametar G karakteriše nelinearnost, a $\hbar/2m^*$ disperziju.

b) Sine-Gordon-ova jednačina koja se koristi u teoriji feromagnetizma i superprovodnosti za jednodimenzionalni slučaj

$$c_o^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \omega_o^2 \sin\Psi \qquad (1.3)$$

gde parametar c_o^2 karakteriše disperziju a ω_o nelinearnost. Sine-Gordon-ova jednačina je specijalan slučaj Klein-Gordon-ove jednačine koja glasi:

$$c_o^2 \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2} = \omega_o^2 \frac{dV}{d\Psi} \qquad (1.4)$$

gde je $V = V(\Psi)$ jednočestični potencijal. Za Sine-Gordon-ovu jednačinu je $V = 1 - \cos\Psi$. (Opširnije o odgovarajućim fizičkim problemima i rešenjima jednačina videti u /1/ i /2/ i tamo navedenim referencama.)

2. HAMILTONIJAN JEDNODIMENZIONALNOG FEROMAGNETIKA SA SPIN-FONON INTERAKCIJOM

Jak magnetizam: feri, antiferi i feromagnetizam objasnila je kvantna mehanika pomoću interakcije izmene. Feromagnetik je sistem uređenih spinova. Spinovi obrazuju magnetnu kristalnu rešetku i povezani su međusobno silama izmene.

Heisenberg-ov model opisuje dielektrične feromagnetike uzimajući u obzir samo interakciju izmene. Opšti oblik ovog modela je anizotropni Heisenberg-ov feromagnetik,

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\,\vec{m}} \left(I^{x}_{\vec{n}\vec{m}}\, \hat{S}^{x}_{\vec{n}}\, \hat{S}^{x}_{\vec{m}} + I^{y}_{\vec{n}\vec{m}}\, \hat{S}^{y}_{\vec{n}}\, \hat{S}^{y}_{\vec{m}} + I^{z}_{\vec{n}\vec{m}}\, \hat{S}^{z}_{\vec{n}}\, \hat{S}^{z}_{\vec{m}} \right)$$

gde su $S^{x_i}_{\vec{n}}$ komponente operatora spina a $I_{\vec{n}\vec{m}}$ integrali izmene. Za Heisenberg-ov izotropni model je

$$I^{x}_{\vec{n}\vec{m}} = I^{y}_{\vec{n}\vec{m}} = I^{z}_{\vec{n}\vec{m}} = I_{\vec{n}\vec{m}}$$

pa gore navedeni Hamiltonijan dobija oblik

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}}\, \vec{S}_{\vec{n}}\, \vec{S}_{\vec{m}}$$

gde su $\vec{S}_{\vec{n}}$ i $\vec{S}_{\vec{m}}$ spinovi u čvorovima $\vec{n}$ i $\vec{m}$. Feromagnetik se može postaviti u spoljašnje magnetno polje (obično u pravcu z-ose) i tada Hamiltonijanu treba dodati član $-\mu \mathcal{H} \sum_{\vec{n}} \hat{S}^{z}_{\vec{n}}$. Spinovi se orijentišu duž polja. Kod mnogih realnih feromagnetika potrebno je u Hamiltonijan uključiti i članove koji uzimaju u obzir i neke druge interakcije, koje se javljaju kod realnih kristala. Na primer spin-spin interakciju, spin-orbitalnu i druge.

Jednodimenzionalni model kristala je jednodimenzionalni niz atoma iste mase m, na jednakim međusobnim rastojanjima a, koji vrše male oscilacije oko svojih ravnotežnih položaja duž linije po kojoj su raspoređeni. Mada ovakvih kristala u prirodi nema, razmatranje ovog modela omogućava da shvatimo prirodu kretanja i u realnim kristalima. Označićemo atome u ovom nizu rednim brojevima od n = 0 do n = N - 1, gde je N vrlo veliki broj. Neka se n-ti atom koji se pomerio iz ravnotežnog položaja nalazi na rastojanju u_n od njega. Pošto sile uzajamnog dejstva brzo opadaju sa rastojanjem uzećemo u obzir samo uzajamno dejstvo uočenog n-tog atoma sa susednim tj. (n - 1) i (n + 1) -vim to je tzv. aproksimacija najbližih suseda. U realnosti se istovremeno pomeraju i ostali atomi, tako da se (n + 1) atom pomerio za u_{n+1} a (n - 1) za u_{n-1} pa je rastojanje između susednih atoma

$(u_{n+1} - u_n)$. Ovi atomi će sa svoje strane izazvati oscilovanje i ostalih, tako da će ceo ovaj niz atoma početi da vrši oscilatorno kretanje.

Kristal se može predstaviti kao sistem povezanih oscilatora. Svaki kvant oscilovanja u kristalu nosi pečat celokupnog kolektiva atoma i sila koje između njih deluju. Kvant pobuđenja linearnog oscilatora naziva se fonon. U kristalima ne možemo govoriti o fononima kao pobuđenjima individualnih atoma već o fononima koji predstavljaju kvante oscilovanja celog kristala i oni su jedan tip kolektivnih ekscitacija.

Ako u aproksimaciji najbližih suseda posmatramo spin-fonon interakciju, onda će Hamiltonijan interakcije za anizotropni model glasiti:

$$H_{int} = -\chi \sum_i (u_{i+1} - u_i)\left[\frac{\delta}{2}(S_i^+ S_{i+1}^- + S_{i+1}^+ S_i^-) + \varepsilon S_i^z S_{i+1}^z\right]$$

Za izotropni model je $\delta = \varepsilon = 1$ pa se dobija da je

$$H_{int} = -\chi \sum_i (u_{i+1} - u_i)\, \vec{S}_i \vec{S}_{i+1}$$

Uticaj fonona je dat prvim redom razvoja integrala izmene po fononskom pomeranju.

$$I(i+u_i-j-u_j) = I(i-j) + \frac{\partial I(i-j)}{\partial(i-j)}(u_i-u_j) + \ldots = I(i-j) + \chi(u_i-u_j)$$

gde je $\chi = \frac{\partial I(i-j)}{\partial R}$; $R = |i - j|$

Mi ćemo proučavati klasični kompresibilni izotropni Heisenberg-ov lanac sa spinom S koji je opisan Hamiltonijanom

$$H=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m} + \frac{\varkappa}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(u_{i+1}-u_i)^2 - I\sum_{i=1}^{N-1}\vec{S}_i\vec{S}_{i+1} - \chi\sum_{i=1}^{N-1}(u_{i+1}-u_i)\vec{S}_i\vec{S}_{i+1} \tag{2.1}$$

gde je u_i pomak magnetnog jona iz ravnotežnog položaja, $\varkappa$ -konstanta elastičnosti, χ konstanta spin-fonon interakcije i m-masa jona.

3. HAMILTONOVA I LAGRANŽEVA FUNKCIJA STACIONARNOG STANJA

Početni Hamiltonijan izabrali smo u obliku koji je opisan formulom (2.1)

$$H=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m} + \frac{\varkappa}{2}\sum_{i=1}^{N-1}(u_{i+1}-u_i)^2 - I\sum_{i=1}^{N-1}\vec{S}_i\vec{S}_{i+1} - \chi\sum_{i=1}^{N-1}(u_{i+1}-u_i)\vec{S}_i\vec{S}_{i+1}$$

U lancu ćemo posmatrati ekscitacije sa talasnim dužinama mnogo većim od konstante rešetke, tako da ćemo Hamiltonijan (2.1) izraziti u kontinualnoj aproksimaciji

$$H = \frac{1}{a}\int \mathcal{H}\, dx + H_0$$

gde je H_0 konstantni član $H_0 = - N I S^2$, a prelaz je izvršen na sledeći način:

$$\frac{1}{a}\sum_{n} a\,\Delta n \underset{a\to 0}{\Rightarrow} \frac{1}{a}\int dx$$

Koristeći razvoj $g(i\pm 1) \Rightarrow g(x) \pm a\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}a^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dots$ i granične uslove

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(\pm\infty) = 0\ , \quad \frac{\partial^n S^{\alpha}}{\partial x^n}(\pm\infty) = 0,\ \alpha = x,y,z$$

za gustinu Hamiltonove funkcije dobija se

$$\mathcal{H}(u,\vec{S}) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\varkappa a^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{Ia^2}{2}\left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^2 - \chi\, aS^2\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\chi a^3}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^2 + O(a^4) \qquad (3.1)$$

Član $\chi aS^2\frac{\partial u}{\partial x}$ ne utiče na jednačine kretanja za $u(x,t)$ ali daje doprinos energiji sistema u slučaju kada je $u(-\infty) \neq u(+\infty)$, (kao na primer kod kinka) i utiče na jednačine kretanja za spinske varijable, kao što ćemo kasnije videti. Usled sporih promena S_n i u duž lanca smatraćemo da je $a\frac{\partial f}{\partial x}$ mala veličina, gde je $f = f(S,u)$. U gornjem Hamiltonijanu smo zadržali sve članove do $\sim a^3$, da bi u najnižoj aproksimaciji izračunali efekte spin-fonon interakcije.

Da bi lakše rešili jednačine kretanja, uvodimo sferne koordinate θ i ϕ za spinove:

$S^x = S \sin\Theta \cos\phi$, $S^y = S \sin\Theta \sin\phi$, $S^z = S \cos\Theta$,

u tom slučaju imamo:

$$\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 = S^2\left[\Theta_x^2 + \sin^2\Theta\,\phi_x^2\right] \qquad (3.2)$$

Polazeći od gustine Hamiltonijana (3.1) možemo na - ći gustinu ukupnog Lagranžijana*:

$$\mathcal{L} = S(\cos\Theta - 1)\dot{\phi} + \frac{1}{2}mu_t^2 - \frac{\varkappa a^2}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{Ia^2}{2}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+ \chi a S^2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\chi a^3}{2}\frac{\partial u}{\partial x}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 \qquad (3.3)$$

Lagranževa jednačina kretanja za $u(x,t)$ glasi

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x}\right) = 0$$

$$-mu_{tt} + \varkappa a^2 u_{xx} + \frac{1}{2}\chi a^3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 = 0$$

$$u_{tt} - v_o^2 u_{xx} = \frac{\chi a^3}{2m}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 \qquad (3.4)$$

Jednačinu (3.4) rešavamo pod predpostavkom da se sistem nalazi u stacionarnom stanju, odnosno da je $u(x,t) = u(x-vt)$ i $\frac{\partial\vec{S}}{\partial x} = \frac{\partial\vec{S}}{\partial x}(x-vt)$, tj. da je došlo do formiranja solitona. (Uslovi pod kojima dolazi do formiranja stacionarnog stanja biće analizirani kasnije.)

Tada je

---

* $\mathcal{L} = \sum \Pi_i \dot{u}_i - \mathcal{H}$

$$u_{xx}(v^2 - v_o^2) = \frac{\chi a^3}{2m} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2$$

Ovu jednačinu ćemo integraliti uz granične uslove $u_x = 0$, $(\partial \vec{S}/\partial x) = 0$ i $x = \pm\infty$, što daje:

$$u_x = - \frac{\chi a^3}{2mv_o^2(1-s^2)} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2$$

Koristeći relaciju: $mv_o^2 = \mathcal{H} a^2$ i $s = \frac{v}{v_o}$ dobija se:

$$u_x = - \frac{\chi a}{2\mathcal{H}(1-s^2)} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2, \qquad (3.5)$$

$$u = - \int_{-\infty}^{x} \frac{\chi a}{2\mathcal{H}(1-s^2)} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 \quad \text{i}$$

$$u_t = \frac{\chi a v}{2\mathcal{H}(1-s^2)} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 \qquad (3.6)$$

Zamenom (3.5) i (3.6) u (3.3) dobijamo Lagranžijan koji zavisi samo od S^z i ϕ, a koji glasi:

$$\mathcal{L}_{ef} = S(\cos\theta - 1)\dot{\phi} - \frac{\chi^2 a^4}{8\mathcal{H}(1-s^2)} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^4 - \frac{Ia^2}{2} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^2 -$$

$$- \frac{\chi^2 a^4 S^2}{2\mathcal{H} a^2 (1-s^2)} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^2 + \frac{\chi^2 a^4}{4\mathcal{H}(1-s^2)} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^4$$

$$\mathcal{L}_{ef} = S(\cos\theta - 1)\dot{\phi} - \frac{Ia^2}{2}\left[1 + \frac{\chi^2 S^2}{I\varkappa(1-s^2)}\right]\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 + $$

$$+ \frac{\chi^2 a^4}{8\varkappa(1-s^2)}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^4$$

Član proporcionalan a^4 odbacujemo u skladu sa polaznom aproksimacijom, tako da za gustinu efektivnog Lagranžijana konačno dobijamo:

$$\mathcal{L}_{ef} = S(\cos\theta - 1)\dot{\phi} - \frac{Ia^2}{2}\left[1 + \frac{\chi^2 S^2}{I\varkappa(1-s^2)}\right]\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 \qquad (3.7)$$

Jednačine kretanja za $S^z = S\cos\theta$ i ϕ možemo naći iz gustine efektivnog Lagranžijana, ili efektivnog Hamiltonijana koji sledi iz (3.7):

$$\mathcal{H}_{ef} = \frac{Ia^2}{2}\left[1 + \frac{\chi^2 S^2}{I\varkappa(1-s^2)}\right]\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 \qquad (3.8)$$

Može se pokazati, da do efektivnog Hamiltonijana (3.8) možemo doći polazeći od Hamiltonijana (3.1), pomoću adekvatne kanonske transformacije $\{u,p\} \Rightarrow \{y,\tilde{p}\}$ gde su $\{y,\tilde{p}\}$ nove kanonske promenljive. U tom cilju koristićemo funkciju generatrise kanonske transformacije (videti /3/) sa gustinom

$$\mathcal{F}(p,y,t) = -p\left[y - \frac{\chi a}{2\varkappa(1-s^2)}\int_{-\infty}^{x}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 dx\right] \qquad (3.9)$$

što daje

$$u = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p} = y - \frac{\chi a}{2\varkappa(1-s^2)} \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^2 dx \qquad (3.10)$$

i $\tilde{p} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = p$ - tako da je transformacijom impuls ostao nepromenjen.

Gustina novog Hamiltonijana je:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H} + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \qquad (3.11)$$

U stacionarnom stanju je $(\partial \vec{S}/\partial x)^2 = f\,(x - vt)$ i u tom slučaju

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} = -\frac{\chi a v p}{2\varkappa(1-s^2)} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^2 \qquad (3.12)$$

i

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\chi a}{2\varkappa(1-s^2)} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^2, \qquad (3.13)$$

tako da je gustina novog Hamiltonijana

$$\tilde{\mathcal{H}} = \left[\frac{Ia^2}{2} - \frac{\chi a v}{2\varkappa(1-s^2)}\, p + \frac{\chi^2 a^2 S^2}{2\varkappa(1-s^2)}\right] \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^2 + \frac{p^2}{2m} +$$

$$+ \frac{\varkappa a^2}{2}\, y_x^2 - \chi a S^2 \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\chi a^3 s^2}{2(1-s^2)} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial y}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\chi^2 a^4}{4\varkappa(1-s^2)} \left[\frac{1}{2(1-s^2)} - 1\right] \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^4 \qquad (3.14)$$

Jednačine kretanja za y i p glase:

$$y_t = \frac{p}{m} - \frac{\chi av}{2\varkappa(1-s^2)} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 \qquad (3.15)$$

$$p_t = \varkappa a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\chi a^3 s^2}{2(1-s^2)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 \qquad (3.16)$$

Iz (3.15) sledi:

$$p = my_t + \frac{\chi amv}{2\varkappa(1-s^2)} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 \qquad (3.17)$$

$$p_t = my_{tt} + \frac{\chi amv^2}{2\varkappa(1-s^2)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 \qquad (3.18)$$

Zamenom (3.18) u (3.16) dobijamo

$$my_{tt} - \varkappa a^2 y_{xx} = \left(\frac{\chi amv^2}{2\varkappa(1-s^2)} - \frac{\chi a^3 s^2}{2(1-s^2)} \right) \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2$$

Kako se članovi u zagradi potiru sledi da je

$y_{tt} - v_o^2 y_{xx} = 0.$

Sada možemo detaljnije analizirati uslove pri kojima dolazi do formiranja stacionarnog stanja, tj. kada možemo staviti da je $u = u_s (x - vt)$. Iz gornjeg izvođenja jasno je da u stacionarnom stanju mora biti $y = 0$.

U opštem slučaju rešenje jednačine za y je oblika:

$$y = y_1(x - v_o t) + y_2(x+v_o t), \text{ odnosno}$$

$$u = y_1(x-v_o t) + y_2(x+v_o t) + u_s(x - vt),$$

tako da u lancu pored solitona koji se kreću brzinom v postoje još dve ekscitacije koje se kreću brzinom $+ v_o$ odnosno $- v_o$. Ako je $v_o \gg v$, posle dovoljno kratkog vremena (u poređenju sa vremenom života spinske ekscitacije) te dve ekscitacije će se dovoljno udaljiti od solitona, tako da možemo smatrati da sistem prelazi u stacionarno stanje, i u tom smislu ćemo i tretirati ovo stanje.

S druge strane posebnim izborom početnih uslova možemo dobiti $y = 0$ i tada se sistem od početnog trenutka nalazi u stacionarnom stanju, što daje:

$$u(x,t) = - \frac{\chi a}{2\varkappa(1-s^2)} \int_{-\infty}^{x} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 dx \qquad (3.19)$$

i

$$p(x,t) = \frac{\chi amv}{2\varkappa(1-s^2)} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 \qquad (3.20)$$

i novi Hamiltonijan dobija oblik (za y = 0)

$$\tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}_S = \frac{Ia^2}{2}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 + \frac{\chi a^2 S^2}{2\varkappa(1-s^2)}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 - \frac{\chi^2 a^2 m\, v^2}{4\varkappa^2(1-s^2)^2}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^4 +$$

$$+ \frac{\chi^2 a^4}{8\varkappa(1-s^2)^2}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^4 - \frac{\chi^2 a^4}{4\varkappa(1-s^2)}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^4 + \frac{\chi^2 a^2 m^2 v^2}{8m\varkappa^2(1-s^2)^2}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^4$$

odnosno

$$\mathcal{H}_S = \frac{Ia^2}{2}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 + \frac{\chi^2 a^2 S^2}{2\varkappa(1-s^2)}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 - \frac{\chi^2 a^4}{8\varkappa(1-s^2)}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^4$$

i ako zadržimo tačnost do $\sim a^2\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2$ dobijamo:

$$\mathcal{H}_S = \frac{Ia^2}{2}\left[1 + \frac{\chi^2 S^2}{I\varkappa(1-s^2)}\right]\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 + O(a^4) \qquad (3.21)$$

što je identično sa (3.8). Na ovaj način zaključujemo da privlačna spin-fonon interakcija za $v \ll v_0$ dovodi do renormalizacije efektivne spin-spin interakcije

$$\tilde{I} \cong I\left(1 + \frac{\chi^2 S^2}{I\varkappa}\right) + O\left(\frac{v^2}{v_0^2}\right) \qquad (3.22)$$

Ako se lanac nalazi u magnetnom polju $\vec{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\vec{e}_z$ dobijamo:

$$\mathcal{H}_S = \frac{\tilde{I}a^2}{2}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 - \mu\mathcal{H}(S_z - S) \qquad (3.23)$$

Hamiltonijan (3.23) koristimo u sledećem paragrafu za dobijanje jednačina kretanja i solitonskog rešenja.

4. JEDNAČINE KRETANJA I SOLITONSKO REŠENJE

Pomoću gustine Hamiltonijana (3.23) dobijaju se sledeće jednačine za θ i ϕ:

$$(\cos \theta)_t = \tilde{I} S a^2 \frac{\partial}{\partial x} (\sin^2 \theta \, \phi_x) \tag{4.1}$$

$$\sin \theta \, \phi_t = \tilde{I} S a^2 (\theta_{xx} - \sin \theta \cos \theta \, \phi_x^2) - \mu \mathcal{H} \sin \theta \tag{4.2}$$

Rešenja tražimo u obliku:

$$\phi = \Omega_0 t + \phi (x - vt)$$

$$\cos \theta = \cos \theta (x - vt)$$

što daje:

$$\phi_t = \Omega_0 - v \, \phi_x$$

$$(\cos \theta)_t = - v (\cos \theta)_x$$

Smenom $u = \cos \theta$ i $u_t = -vu_x$ u (4.1) sledi:

$$- vu_x = \tilde{I} S a^2 \frac{\partial}{\partial x} \left[(1 - u^2) \phi_x \right]$$

i nakon integracije dobijamo

$$- vu = \tilde{I} S a^2 (1 - u^2) \phi_x + C$$

Konstantu određujemo iz graničnih uslova, $u(\pm\infty) = 1$, što daje : $c = - v$ i

$$\phi_x = \frac{v}{\tilde{I}Sa^2}\,\frac{1-u}{1-u^2} = \frac{V}{1+\cos\theta} \qquad (4.3)$$

gde je $V = \dfrac{v}{\tilde{I}Sa^2}$.

Zamenivši ϕ_t i ϕ_x u jednačinu (4.2) dobijamo

$$\sin\theta\left(\Omega_o - v\,\frac{V}{1+\cos\theta}\right) = -\mu\mathcal{H}\sin\theta + \tilde{I}Sa^2\left[\theta_{xx} - \frac{V^2\sin\theta\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2}\right]$$

$$\frac{\Omega_o+\mu\mathcal{H}}{\tilde{I}Sa^2}\sin\theta + \frac{V^2\sin\theta\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2} - \frac{V^2\sin\theta}{1+\cos\theta} = \theta_{xx}\,, \quad \text{odnosno}$$

$$\Omega\sin\theta - \frac{V^2\sin\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \theta_{xx}\,, \quad \text{gde je } \Omega = \frac{\Omega_o+\mu\mathcal{H}}{\tilde{I}Sa^2}$$

Prva integracija daje

$$\frac{1}{2}\,\theta_x^2 = -\Omega\cos\theta - \frac{V^2}{1+\cos\theta} + C$$

Iz uslova $\cos\theta(\pm\infty)=1$ i $\theta_x(\pm\infty)=0$, određujemo C - $C = \Omega + \dfrac{V^2}{2}$, i ako imamo u vidu da je $\xi = x - vt$ dobijamo:

$$\frac{1}{2}\,\theta_\xi^2 = \Omega\,(1-\cos\theta) + \frac{V^2}{2}\,\frac{\cos\theta-1}{\cos\theta+1}\,, \quad \text{odnosno}$$

$$\theta_{\xi}^{2} = 4\Omega\,\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}\left[\frac{1+\cos\theta}{2} - \frac{V^{2}}{4\Omega}\right] \tag{4.4}$$

Ako uvedemo novu promenjivu β :

$$\theta = 2\beta \qquad\qquad \cos\theta = \cos^{2}\beta - \sin^{2}\beta$$

$$\theta_{\xi} = 2\beta_{\xi} \qquad\qquad \sin\theta = 2\sin\beta\cos\beta \quad ,$$

i uz uslov $\theta_{\xi}(\xi = \xi_{o}) = 0$ dobijamo za amplitudu:

$$\text{a)}\quad 1+\cos\theta_{o} = \frac{V^{2}}{2\Omega}\ ,\quad \text{odnosno}$$

$$\text{b)}\quad \cos^{2}\beta_{o} = \frac{V^{2}}{4\Omega}\ ,\quad \text{ili} \tag{4.5}$$

$$\text{c)}\quad \sin^{2}\beta_{o} = 1 - \frac{V^{2}}{4\Omega}$$

Integracijom (4.4) uz date početne uslove dobijamo:

$$\sin\beta = \frac{\sin\beta_{o}}{\mathrm{ch}\left[\sqrt{\Omega}\,\sin\beta_{o}(\xi - \xi_{o})\right]} \tag{4.6}$$

ili

$$\cos\theta = 1 - \frac{2\sin^{2}\beta_{o}}{\mathrm{ch}^{2}\left[\sqrt{\Omega}\,\sin\beta_{o}(\xi - \xi_{o})\right]} \tag{4.7}$$

Koristeći gornje rešenje i relaciju (4.3) za $\phi(x,t)$ dobijamo:

$$\phi = \Omega_{o}t + \frac{1}{2}V(\xi - \xi_{o}) + \mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}\beta_{o}\,\mathrm{th}\sqrt{\Omega}\,\sin\beta_{o}(\xi - \xi_{o})\right] \tag{4.8}$$

Koristeći ova rešenja u sledećem paragrafu odredićemo energiju, impuls i magnetizaciju lanca u prisustvu solitona.

5. ENERGIJA, MAGNETIZACIJA I IMPULS SISTEMA

Magnetizacija i impuls sistema definisani su:

$$M = M_z = S \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos \Theta) \frac{dx}{a} \tag{5.1}$$

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \phi_x \frac{dx}{a} = S \int_{-\infty}^{+\infty} (1 - \cos \Theta) \phi_x \frac{dx}{a} \tag{5.2}$$

dok je energija E data preko Hamiltonove funkcije (videti /4/).

Smenom $\cos \Theta$ iz (4.7) u (5.1) za magnetizaciju sistema dobijamo

$$M_z = \frac{2S}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi_0^2}{\mathrm{ch}^2 \frac{2}{\Gamma} (\xi - \xi_0)} dx \quad , \text{ gde je}$$

$$\Gamma = \frac{2}{\varphi_0 \sqrt{\Omega}} \quad , \text{ dimenzija solitona, a } \varphi_0 = \sin \beta_0 .$$

Integracijom dobijamo

$$M_z = \frac{2S}{a} \varphi_0^2 \Gamma = \frac{4S}{a\sqrt{\Omega}} \varphi_0 \qquad \text{ili}$$

$$\frac{M_z}{2S} = \frac{2}{a\sqrt{\Omega}}\varphi_o = \frac{2}{a\sqrt{\Omega}}\sqrt{1 - \frac{V^2}{4\Omega}} \tag{5.3}$$

Smenom (4.3) u (5.2) za impuls dobijamo

$$P = \frac{S}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\varphi_o^2}{ch^2\frac{2}{\Gamma}(\xi - \xi_o)} \frac{V}{1+\cos\theta}dx, \text{ odnosno}$$

$$P = \frac{2S\varphi_o^2 V}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(1+\cos\theta)ch^2\frac{2}{\Gamma}(\xi - \xi_o)} \quad \text{pa sledi da je}$$

$$\frac{Pa}{2S} = 2 \text{ arc sin}\sqrt{1 - \frac{V^2}{4\Omega}} = 2 \text{ arc sin } \varphi_o, \tag{5.4}$$

što daje vezu između amplitude i impulsa solitona:

$$\varphi_o = \sin\frac{Pa}{4S} \tag{5.5}$$

Da bi izračunali energiju sistema, koristićemo jednačinu (3.23) koju ćemo malo transformisati:

$$\theta_x^2 + \sin^2\theta\phi_x^2 = 2\Omega(1-\cos\theta) - V^2\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta} + V^2\frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2} =$$

$$= 2\Omega(1-\cos\theta) - V^2\frac{1-\cos^2\theta}{(1+\cos\theta)^2} + V^2\frac{\sin^2\theta}{(1+\cos\theta)^2}, \quad \text{tako da}$$

dobijamo $\quad \theta_x^2 + \sin^2\theta\,\phi_x^2 = 2\Omega(1-\cos\theta)$

Zamenivši ovaj izraz u (3.23) za energiju sistema dobijamo:

$$E = \mu\mathcal{H}\frac{S}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}(1-\cos\Theta)dx + \frac{\tilde{I}a^2S^2}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty}2\Omega(1-\cos\Theta)dx$$

odnosno

$$E = \mu\mathcal{H}M_z + \tilde{I}Sa^2\Omega M_z \tag{5.6}$$

Kako je $\Omega = \dfrac{\Omega_o + \mu\mathcal{H}}{\tilde{I}\,S\,a^2}$ energiju možemo napisati na sledeći način

$$E = \mu\mathcal{H}M_z + (\Omega_o + \mu\mathcal{H})\,M_z \quad \text{ili}$$

$$E = (\,2\mu\mathcal{H} + \Omega_o\,)\,M_z \tag{5.7}$$

U slučaju kada je $\mathcal{H} = 0$ dobijamo jednostavnu relaciju za ugaonu brzinu rotacije vektora magnetizacije : $\Omega_o = E\,/\,M_z$ (oko z - ose).

Sada možemo sve veličine koje karakterišu soliton izraziti u funkciji magnetizacije (M_z) i impulsa (P) solitona, koji se mogu eksperimentalno odrediti.

$$M_z = \frac{4\,S}{a\sqrt{\Omega}}\sin\frac{Pa}{4S}$$

Iz ove relacije vidimo da je:

$$\sqrt{\Omega} = \frac{4S\sin\frac{Pa}{4S}}{M_z a} \qquad \text{odnosno} \qquad \Omega = \frac{16S^2 \sin^2\frac{Pa}{4S}}{M_z^2 a^2}$$

Zamenom u (5.6) za energiju ćemo dobiti

$$\text{a)} \quad E = \mu\mathcal{H} M_z + \frac{16\tilde{I}S^3}{M_z} \sin^2 \frac{Pa}{4S}$$

odnosno (5.8)

$$\text{b)} \quad E = \mu\mathcal{H} M_z + \frac{8\tilde{I}S^3}{M_z}\left(1 - \cos\frac{Pa}{2S}\right)$$

Iz relacije (3.22), koju smo uzeli u aproksimativnom obliku, tj. za $v \ll v_o$, i iz relacije (5.8) za energiju sistema konačno dobijamo:

$$E = \mu\mathcal{H} M_z + \frac{16S^3 I}{M_z}\left(1 + \frac{\chi^2 S^2}{I\varkappa}\right) \sin^2\frac{Pa}{4S} \tag{5.9}$$

Ovaj izraz za energiju sistema je takođe usaglašen sa predpostavkom postojanja stacionarnog stanja za $v \ll v_o$.

Da bi dobili izraz za brzinu solitona koristićemo relacije (4.5) i (5.5) što daje

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{4\Omega}} = \sin\frac{Pa}{4S} \qquad \text{odnosno}$$

$$v^2 = 4\Omega\cos^2\frac{Pa}{4S} = \frac{64S^2}{M_z^2 a^2}\sin^2\frac{Pa}{4S}\cos^2\frac{Pa}{4S}$$

Korenovanjem gornje relacije dobijamo:

$$V = \frac{8S}{M_z a} \sin \frac{Pa}{4S} \cos \frac{Pa}{4S} = \frac{4S}{M_z a} \sin \frac{Pa}{2S} \qquad \text{ili}$$

$$v = \frac{4\tilde{I}S^2 a}{M_z} \sin \frac{Pa}{2S}$$

U okviru date aproksimacije brzina je:

$$v = \frac{4IS^2 a}{M_z} \left(1 + \frac{\chi^2 S^2}{I \varkappa}\right) \sin \frac{Pa}{2S} \qquad (5.10)$$

Ovaj izraz za v je jednak grupnoj brzini $\partial E / \partial P$, što potvrđuje valjanost naše aproksimacije.

Koristeći relacije (4.7) i (5.5) za dimenziju solitona dobijamo:

$$\Gamma = \frac{2}{\varphi_o \sqrt{\Omega}} = \frac{M_z a}{2S} \frac{1}{\sin^2 \frac{Pa}{4S}}$$, a amplituda je

$$\varphi_o = \sin \frac{Pa}{4S}$$

Sada kada smo izračunali sve veličine, koje karakterišu soliton i kada smo ih izrazili preko eksperimentalno merljivih veličina P i M_z, možemo zaključiti sledeće:

Za datu magnetizaciju i impuls solitonska amplituda i dimenzija su nepromenjene u prisustvu spin-fonon interakcije. Energija sistema se menja i (za $\mu\mathcal{H} = 0$)

$$\frac{E_{sf}}{E_{iz}} = \frac{\tilde{I}}{I} \approx 1 + \frac{\chi^2 S^2}{I \varkappa} > 1$$

kao i brzina koja je data relacijom:

$$v = \frac{4IaS^2}{M_z} \left(1 + \frac{\chi^2 S^2}{I \varkappa} \right) \sin \frac{Pa}{2S}$$

Povećanje energije solitona u prisustvu spin-fonon interakcije možemo objasniti na sledeći način: pri malim brzinama ($v \ll v_0$) spin-fonon interakcija dovodi do privlačne efektivne spin-spin interakcije (renormalizuje integral izmene: $\tilde{I} > I$), što dovodi do povećanja energije ekscitacije (solitona) u stacionarnom stanju, pošto je ona proporcionalna integralu izmene.

6. ZAKLJUČAK

U radu je razmatran izotropni Heinsenberg-ov lanac u prisustvu spin-fonon interakcije. Za taj sistem definisano je stacionarno stanje u kojem dolazi do formiranja solitona. Pokazano je da je takvo stanje, u prisustvu spin-fonon interakcije, moguće za $v \ll v_0$, jer samo pri tim uslovima brzina solitona se poklapa sa grupnom brzinom ekscitacija. Sve veličine koje karakterišu soliton (E, φ_0, Γ) su izražene preko M_z i P koje se mogu eksperimentalno meriti.

Sam soliton možemo tumačiti kao vezano stanje spinskih pobuđenja (magnona) u sistemu čija se energija povećala u prisustvu spin-fonon interakcije, koja renormalizuje integral izmene. Ova tvrdnja se lako može dokazati klasičnim kvantovanjem solitona (Bohr-Somerfeldovo). Ako stavimo da je $M_z = m \cdot \hbar$ $(m=1, 2, \ldots)$ onda je lako videti da za slučaj $s=1/2$ solitonsko stanje ima energiju koja je jednaka energiji m - magnonskog vezanog stanja.

Na kraju spomenimo da se ova teorija ne može primeniti za veće brzine magnetnog solitona, jer u tom slučaju interakcija sa fononima dovodi do mnogo složenijeg stanja nego što je stacionarno stanje definisano u ovom radu, no taj slučaj mi nećemo razmatrati.

L I T E R A T U R A

/1/ A. S. Davydov: Usp. Fiz. Nauk 138(4), 67, (1982)

/2/ A. R. Bishop, J. A. Krumhansl, S. E. Trulinger: Physica D 1, 1 (1980)

/3/ H. Goldstein: Classical Mechanics, Addison-Wesley Press, inc Cambridge (1950)

/4/ G. Goldśtein: Klasičeskaja mehanika, "Nauka", Moskva (1975)

/5/ J. Tjon, Wright, Phys. Rev. B. 15, 3470 (1977)

/6/ B. Tošić: Statistička fizika, Institut za fiziku PMF, Novi Sad (1978)