U N I V E R Z I T E T   U   N O V O M   S A D U

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

D I P L O M S K I   R A D

UTICAJ ELEKTROMAGNETNOG POLJA NA SUPERPROVODNE OSOBINE KRISTALA

MENTOR
Dr. Bratislav Tošić

KANDIDAT
Dakić Ž. Radivoj

N O V I   S A D   1974

U V O D

Pojava superprovodnosti je podjednako aktuelna danas, kao i u vreme kada je eksperimentalno otkrivena. Za ovo postoje i teorijski i praktični razlozi. Praktične potrebe se zasnivaju na težnji da se iskoriste povoljne osobine superprovodnika/nulta električna otpornost/ i da se poboljšaju uslovi za dobijanje superstruja. Danas postoje uredjaji, koji se koriste mahom za labaratorijske potrebe, i koji daju superstruje velike jačine i dugog trajanja. To se za sada postiže na veoma niskim temperaturama, bliskim apsolutnoj nuli, što zahteva složene uredjaje za hladjenje. Zato bi bilo pogodno naći način da se povisi temperatura prelaza u superprovodno stanje. Sa teorijske strane, problem superprovodnosti je utoliko zanimljiviji, što možda nije rešen na zadovoljavajući način.

Ovde će biti izloženi neki elementi teorije superprovodnosti onako kako su dati u radovima FRELIXA iu teoriji BARDINA, KUPERA i ŠRIFERA. U prvom delu rada biće poklonjena posebna pažnja elektron-fonon interakciji kao uzroku pojave superprovodnosti i BCS modelu. Drugi deo rada predstavlja teorijsko razmatranje nove /elektron-foton/ interakcije u teoriji superprovodnosti. Medjutim, sama teorija superprovodnosti ovim nije pretrpela nikakve izmene. Računski postupci primenjeni u Glavi I potpuno su ekvivalentni sa onima iz Glave II. Pojaviće se jedino razlike koje se odnose na jačinu ove dve pomenute interakcije i energiju veze elektrona u paru.

Svrha ovog rada nije u traženju novih metoda izučavanja superprovodnosti, već u razmatranju nove interakcije u ovoj teoriji, sa ciljem da se nadju povoljniji uslovi za praktično realizovanje fenomena superprovodnosti. Istovremeno, gde god to bude moguće, porediće se ekvivalentni računski izrazi i postupci za elektron-fonon i elektron-foton interakciju.

Na kraju ovog uvoda, izražavam svoju zahvalnost profesoru Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu, Dr. Bratislavu Tošiću, što mi je podstakao interes za nauku i što mi je pružio veliku pomoć prilikom pisanja ovog rada.

I. ELEKTRON-FONON INTERAKCIJA I SUPERPROVODNOST

1. Opšte napomene o superprovodnosti

Interval promene električne otpornosti je toliko širok, da verovatno spada u najveće intervale promena uobičajenih fizičkih osobina čvrstih tela. Pri tome je naročito interesantna pojava superprovodnosti; električna otpornost mnogih metala i legura naglo pada na nulu pri smanjenju temperature do nekoliko Kelvinovih stepeni iznad apsolutne nule. Ovu pojavu je otkrio holandski fizičar Kamerling Ones 1911 godine. Njegova merenja na živi pokazuju da je električni otpor žive na temperaturi 3°K oko $3.10^{-6}\Omega$, što iznosi desetomilioniti deo otpora na 0°C. Eksperimenti su pokazali da je električni otpor u superprovodnom stanju toliko mali, da stalna jednosmerna struja teče bez slabljenja kroz superprovodne prstenove više od godinu dana.

Superprovodnost se javlja kod većeg broja metala i legura, a takodje i kod intermetalnih jedinjenja i poluprovodnika. Do sada poznate temperature prelaza u superprovodno stanje kreću se u granicama od 1-10 °K za metale, a za legure i do 20 °K. Kod poluprovodnika, kritične temperature se nalaze u intervalu od 0,1 - 1 °K. Medjutim, u mnogim metalima superprovodnost nije konstatovana ni na najnižim mogućim temperaturama. Uočena je činjenica da su lošiji provodnici električne struje /na sobnim temperaturama/ bolji superprovodnici nego što je slučaj sa dobrim provodnicima.

Električni otpor se javlja usled sudara elektrona sa elementima gradje kristalne strukture /jonima rešetke/. Provodni elektroni deo svoje kinetičke energije, stečene ubrzanjem u električnom polju izvora, predaju jonima procesom sudara. Pri tome se provodnik zagreva, čime se otpor povećava. Očigledno, ako je električni otpor jednak nuli, ne postoji trenje elektrona sa jonima rešetke. Prema klasičnoj fizici, električni otpor ne bi postojao tek na apsolutnoj nuli. Medjutim, pojava superprovodnosti je konstatovana na temperaturama koje su veće od 0 °K. Ove eksperimentalne činjenice klasična fizika nije mogla objasniti. Sa razvojem kvantne mehanike stvoreni su uslovi za rešavanje ovog problema. Temelje za rešavanje pojave superprovodnosti postavio je Freliks. Opšta kvantna teorija superprovodnosti data je 1957 godine od strane Bardina, Kupera i Šrifera.

Teorija superprovodnosti počela se razvijati tek otkrićem fenomena superfluidnosti kod tečnog helijuma /pojava kretanja tečnosti bez trenja sa zidovima suda/. Prve teorije superprovodnosti zasnivale su se na svodjenju superprovodnosti na problem superfluidnosti elektronskog gasa. Ovakav tretman se prihvatao iz razloga što odsustvo električnog otpora znači da se fluks slobodnih elektrona kreće kroz provodnik bez trenja /sudara/ sa jonima kristalne rešetke. Ideja superfluidnosti primenjena na model superprovodnika se pokazala dobra i donela je nekoliko suštinskih rešenja. Medjutim, svi prateći problemi ovim nisu mogli biti rešeni.

Pokazaćemo sada analogiju izmedju superfluidnosti i superprovodnosti na taj način što ćemo izvesti kriterijum superfluidnosti za jedan superprovodnik.

Posmatrajmo superprovodnik sa kristalnom rešetkom mase M koja sadrži provodne elektrone i fonone. Neka se rešetka kreće relativnom brzinom V_0 u odnosu na elektronski gas. Stalna električna struja ima brzinu $-V_0$ u odnosu na rešetku. Kinetička energija sistema /rešetka, elektronski gas/ je $1/2\, MV_0^2$. Predpostavimo još da ovo relativno kretanje može izazvati elementarne eksitacije u elektronskom gasu. U tom slučaju, brzina V_0 će se smanjiti, tako da je kinetička energija sistema sada jednaka $1/2\, MV^2$. Ako se prilikom sudara elektrona i fonona javlja eksitacija energije ε_K i impulsa $\hbar K$, onda na osnovu zakona o održanju energije i impulsa sledi

$$\frac{1}{2} MV_0^2 = \frac{1}{2} MV^2 + \varepsilon_K \, , \qquad M\vec{V_0} = M\vec{V} + \hbar\vec{K}$$

Kombinovanjem ove dve jednačine dobija se

$$\hbar K \cdot V + \frac{\hbar^2 K^2}{2M} = \varepsilon_K$$

Minimalna vrednost brzine, koja se dobija iz gornjeg izraza ako je

$$\frac{\hbar^2 K^2}{2M} \cong 0$$

/što možemo zanemariti, jer je impuls mali/ jednaka je

$$v_c = \min \frac{\varepsilon_K}{\hbar K} \tag{1.1}$$

Jednačina /1.1/ je potpuno identična sa jednačinom koja izražava kriterijum superfluidnosti tečnog helijuma. Ukoliko je $\varepsilon_K > 0$ tako da je $v_c > 0$ superprovodna struja može da teče brzinom manjom od v_c bez rasipanja energije na prebacivanje elektrona iz superprovodnog stanja u normalno stanje. Ovo je ujedno i objašnjenje za stabilnost struje u superprovodniku.

Analogija izmedju gasa slobodnih elektrona i tečnog helijuma u pogledu kretanja bez trenja donela je jedan novi paradoks. Superfluidnost tečnog helijuma je posledica bozonskih svojstava helijumovih atoma; sposobnost kondenzovanja na najnižim elektronskim nivoima. Elektroni su fermi čestice /podležu Paulijevom principu isključivosti/ te im nedostaje navedena osobina koje omogućuje superfluidnost. O čemu se onda radi?

Predpostavilo se da u elektronskom gasu može pod odredjenim uslovima doći do sparivanja parnog broja elektrona sa suprotno orijentisanim spinovima, u elektronske komplekse sa ukupnim spinom jednakim nuli. Ovi kompleksi, obzirom da poseduju bozonska svojstva, mogu da zadovolje uslov superfluidnosti. Kasnije je ustanovljeno /kvantovanjem magnetnog polja kroz superprovodne prstenove/ da se ovi kompleksi sastoje od parova elektrona čije je efektivno naelektrisanje /2e/. Poznato je da medju elektronima vlada Kulonova odbojna sila. Zato je pitanje prirode i porekla nepoznate interakcije, koja dovodi do sparivanja elektrona u par, dugo ostalo nerazjašnjeno sve do pojave radova Freliksa.

On je pokazao da interakcija izmedju elektrona i fonona kristalne rešetke /sudari elektrona sa jonima rešetke/ može izazvati medju elektronima privlačnu silu koja preovladjuje nad Kulonovom odbojnom silom. Dakle, elektron-fonon interakcija je odgovorna za sparivanje elektrona u superprovodne parove. Medjutim, ne treba zaboraviti da je ova ista interakcija uzrok postojanja električnog otpora u provodniku na višim temperaturama. Na niskim temperaturama, elektron-fonon interakcija deluje u obrnutom smeru; stvara uslove za obrazovanje superkonduktivnih parova.

Predhodno razmatranje možemo uopštiti na sledeći način:

Superprovodnost je posledica obrazovanja elektronskih parova sa bozonskim svojstvima /nulti spin/. Ovi parovi su sposobni da obrazuju kondenzovano stanje. Elementarne eksitacije u ovakvim sistemima imaju pozitivan minimum fazne brzine, i elektroni mogu da se kreću bez trenja.

Nastanak superprovodne struje može se objasniti ovako: Na niskim temperaturama u provodniku se obrazuju elektronski parovi kao posledica elektron-fonon interakcije. Pri uključenju spoljašnjeg električnog polja, par se razgradjuje na dva elektrona. Svaki elektron nosi pored kinetičke i deo vezivne energije koja je odprilike jednaka polovini energije veze elektronskog para. Elektroni sa ovakvim zakonom disperzije /kin. energija + energija veze/ imaju pozitivan minimum fazne brzine i mogu biti superprovodni. Superprovodno stanje se narušava na višim temperaturama; broj fonona raste i energija veze u elektronskom paru se smanjuje. Na nekoj kritičnoj temperaturi ona postaje jednaka nuli, i superprovodnost prestaje.

Razmatranje smo započeli paradoksom koji je postavio osnovne teorije superprovodnosti. Završavamo ga sa jednim sličnim paradoksom koji je suštinski rešio problem superprovodnosti. Elektron-fonon interakcija stvara uslove za superprovodnost, a istovremeno ih narušava /na višim temperaturama/. Iako je ovaj problem rešen, nisu prebrodjene sve suprotnosti vezane za fenomen superprovodnosti.

I. 2. Freliksova analiza Hamiltonijana Elektron-fonom interakcije

Elektron-fonon interakcija, kao što je već napomenuto, uslov je za postizanje superprovodnog stanja. U ovom odeljku će biti pokazano kvantno-mehaničkim proračunom da je ova interakcija privlačna. Celokupno razmatranje vršiće se preko izraza za energiju elektrona u kristalnom polju. Smatraćemo da se elektroni kreću u potencijalu koji stvaraju svi joni smešteni u čvorove kristalne rešetke, i svi elektroni izuzev jednog čije se kretanje posmatra. Hamiltonijan sistem elektrona koji se nalazi u kristalnom polju dat je u obliku

$$H = \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{+} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} V_{\vec{n}\vec{m}} a_{\vec{n}}^{+} a_{\vec{m}} , \quad \vec{n} \neq \vec{m} \qquad 2.1$$

gde je $E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m}$ kinetička energija elektrona, a $a_{\vec{k}}^{+}$ i $a_{\vec{k}}$ fermi operatori. Crtica iznad indeksa označava da se radi o vektoru. $V_{\vec{n}\vec{m}}$ je matrični elemenat operatora kristalnog polja. Operatori $a_{\vec{n}}^{+}, a_{\vec{m}}$ vrše kreiranje, odnosno anihilaciju elektrona na mestima u kristalu odredjenim sa vektorima $\vec{n}$ i $\vec{m}$. Gornji izraz za Hamiltonijan je napisan pod predpostavkom da joni miruju u ravnotežnim položajima. Na temperaturama višim od 0°K, joni počinju da osciluju oko ravnotežnih položaja, što se izražava matematičkim prelazom: $\vec{n} \to \vec{n} + \vec{U}_n$, $\vec{m} \to \vec{m} + \vec{U}_{\vec{m}}$. $\vec{U}_{\vec{n}}$ i $\vec{U}_{\vec{m}}$ predstavljaju pomeranje iz ravnotežnog položaja i to su funkcije koordinata i vremena. Pošto operator kristalnog polja zavisi samo od vektora $\vec{n}$ i $\vec{m}$, možemo pisati da je $V_{\vec{n}\vec{m}} = V(\vec{n}-\vec{m})$ i $V[(\vec{n}-\vec{m})+(\vec{U}_{\vec{n}}-\vec{U}_{\vec{m}})]$. Za niske temperature, poremećaji su mali, što posle razvoja u red i žamene u jednačinu /2.1/ daje

$$V_{\vec{n}\vec{m}} = V[(\vec{n}-\vec{m})+(\vec{U}_{\vec{n}}-\vec{U}_{\vec{m}})] \simeq V(\vec{n}-\vec{m}) + (\vec{U}_{\vec{n}} - \vec{U}_{\vec{m}}) \frac{\partial V(\vec{n}-\vec{m})}{\partial(\vec{n}-\vec{m})}$$

$$H = H_0 + H_i$$

gde je

$$\left.\begin{aligned} H_0 &= \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{+} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} V(\vec{n}-\vec{m}) a_{\vec{n}}^{+} a_{\vec{m}} \\ H_i &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} \nabla_{\vec{n}\vec{m}} V(\vec{n}-\vec{m}) a_{\vec{n}}^{+} a_{\vec{m}} (\vec{U}_{\vec{n}} - \vec{U}_{\vec{m}}) \end{aligned}\right\} \qquad 2.2$$

U jednačini 2.2 Hamiltonijan H_i karakteriše interakciju elektrona sa jonima rešetke (elektron-fonon interakciju). Prvo ćemo razmotriti elektronski deo Hamiltonijana H_0. Izvršićemo transformaciju H_0 iz formule 2.2 stavljajući da je

$$a^+_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}'} a^+_{\vec{k}'} e^{-i\vec{k}'\vec{n}} \qquad a_{\vec{m}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{m}}$$

Posle zamene dobija se

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} a^+_{\vec{k}'} a_{\vec{k}} \sum_{\vec{n}\vec{m}} e^{i\vec{k}\vec{m} - i\vec{k}'\vec{n}} V(\vec{n}-\vec{m})$$

Ako u gornju jednačinu uvedemo smenu

$$\vec{n} - \vec{m} = \vec{l}$$

dobija se da je drugi član ove jednačine

$$\sum_{\vec{n}\vec{m}} V(\vec{n}-\vec{m})\, e^{i\vec{k}\vec{m} - i\vec{k}'\vec{n}} = \sum_{\vec{l}\vec{m}} V(\vec{l})\, e^{-i\vec{k}'\vec{l} - i\vec{m}(\vec{k}-\vec{k}')}$$

Uvedimo oznaku $\sum_{\vec{l}} V(\vec{l}) e^{-i\vec{k}'\vec{l}} = V_{\vec{k}'}$. Sada možemo pisati da je

$$\sum_{\vec{n}\vec{m}} V(\vec{n}-\vec{m})\, e^{i\vec{k}\vec{m} - i\vec{k}'\vec{n}} = \sum_{\vec{m}} V_{\vec{k}'}\, e^{i\vec{m}(\vec{k}-\vec{k}')} = N V_{\vec{k}'} \delta_{\vec{k};\vec{k}'}$$

Hamiltonijan H_0 sada dobija oblik

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}\vec{k}'} a^+_{\vec{k}'} a_{\vec{k}}\, N V_{\vec{k}'} \delta_{\vec{k};\vec{k}'}$$

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} V_{\vec{k}}$$

Konačno se elektronski deo Hamiltonijana može pisati u obliku

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} \left(E_{\vec{k}} + \frac{1}{2} V_{\vec{k}} \right) a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} \qquad 2.3$$

Vidimo da kristalno polje menja energiju slobodnih elektrona; oni pored kinetičke energije sadrže i deo energije koja potiče od dejstva kristalnog polja. Pogledajmo kako ovaj dodatni član $\frac{1}{2} V_{\vec{k}}$ iz jednačine 2.3. utiče na zakon disperzije elektrona. Ako se radi o prostoj kubnoj strukturi možemo pisati da je

$$V_{\vec{k}} = 2V\left[\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a\right]$$

$$\cos k_x a = 1 - \frac{1}{2} k_x^2 a^2, \quad \cos k_y a = -\frac{1}{2} k_y^2 a^2 + 1, \quad \cos k_z a = 1 - \frac{1}{2} k_z^2 a^2$$

gde je V interakcija najbližih suseda /aproksimacija najbližih suseda/ a a konstanta rešetke. Za male talasne vetkore, $V_{\vec{k}}$ posle naznačenih zamena dobija oblik

$$V_{\vec{k}} = 2V\left[3 - \frac{1}{2} a^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\right]$$

$$V_{\vec{k}} = 2V\left(3 - \frac{1}{2} k^2 a^2\right)$$

$$V_{\vec{k}} = 6V - V a^2 k^2$$

Zakon disperzije za elektrone u kristalu će onda biti

$$\varepsilon_{\vec{k}} = \frac{\partial H_0}{\partial a_{\vec{k}}^{+} a_{\vec{k}}} = E_{\vec{k}} + \frac{1}{2} V_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + 3V - \frac{1}{2} V a^2 k^2 = 3V + \hbar^2 k^2 \left(\frac{1}{2m} - \frac{V a^2}{2\hbar^2}\right)$$

$$\varepsilon_{\vec{k}} = 3V + \frac{\hbar^2 k^2}{\dfrac{1}{\frac{1}{2m} - \frac{1}{2}\frac{V a^2}{\hbar^2}}}$$

Član $\left(\frac{1}{m} - \frac{V a^2}{\hbar^2}\right)^{-1}$ u zadnjoj jednačini igra ulogu mase, i

možemo pisati da je $m^* = \dfrac{1}{\frac{1}{m} - \frac{V a^2}{\hbar^2}}$

$$m^* = \frac{m}{1 - \frac{V a^2 m}{\hbar^2}} \qquad 2.4$$

gde je m^* efektivna masa elektrona u kristalu. Kristalno polje menja i hemijski potencijal i stvarnu masu slobodnih elektrona. Efektivna masa elektrona u kristalu može biti i manja a i veća od mase slobodnog elektrona. Efektivna masa elektrona može biti čak negativna. Ona je u blizini dna dozvoljene zone pozitivna, a na vrhu je negativna.

Iz kompletnog izraza za Hamiltonijan

$$H = H_o + H_i$$

$$H = \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{+} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} V(\vec{n}-\vec{m}) a_{\vec{n}}^{+} a_{\vec{m}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} \nabla_{\vec{n}\vec{m}} V(\vec{n}-\vec{m}) a_{\vec{n}}^{+} a_{\vec{m}} (\vec{U}_{\vec{n}} - \vec{U}_{\vec{m}}) \qquad 2.5$$

izdvojićemo onaj deo koji potiče od elektro-fonon interakcije, i napisati ga u prikladnijem obliku. Izvršićemo Furije transformaciju stavljajući da je

$$a_{\vec{n}}^{+} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_2}^{+} e^{-i\vec{k}_2\vec{n}} \qquad a_{\vec{m}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{m}}$$

$$V(\vec{n}-\vec{m}) = \sum_{\vec{k}_1} V_{\vec{k}_1} e^{i\vec{k}_1(\vec{n}-\vec{m})} \cdot \frac{1}{N}$$

Pomeranje $\vec{U}_{\vec{n}}$ i $\vec{U}_{\vec{m}}$ ćemo predstaviti fononskim operatorima $b_{\vec{q}}$ i $b_{\vec{q}}^{+}$.

$$\hat{U}_{\vec{n}} = \sum_{\vec{q}\alpha} \frac{C(\vec{q})}{\sqrt{N}} \vec{l}_{\vec{q}\alpha} \left(b_{-\vec{q}\alpha} + b_{\vec{q}\alpha}^{+} \right) e^{-i\vec{q}\vec{n}}$$

$$\hat{U}_{\vec{m}} = \sum_{\vec{q}\alpha} \frac{C(\vec{q})}{\sqrt{N}} \vec{l}_{\vec{q}\alpha} \left(b_{-\vec{q}\alpha} + b_{\vec{q}\alpha}^{+} \right) e^{i\vec{q}\vec{m}}$$

gde je $C(\vec{q}) = \sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{\vec{q}\alpha}}}$. Ovde je M masa jona, N broj atoma u kristalu a indeks α označava tri vrednosti vektora polarizacije $\vec{l}_{\vec{q}\alpha}$. $\omega_{\vec{q}\alpha} = C_\alpha |\vec{q}| = C_\alpha q$ označava frekvence za odgovarajuće polarizacije, a C_α su komponente brzine prostiranja fonona. Talasni fektor fonona dat je oznakom $\vec{q}$. Na niskim temperaturama, elektron interaguje samo sa longitudinalnim fononima, i možemo u gornjim izrazima izostaviti sumu po α. Obzirom da je $\nabla_{\vec{n}\vec{m}} V(\vec{n}-\vec{m}) = \frac{i}{N} \sum_{\vec{k}_1} \vec{k}_1 V_{\vec{k}_1} e^{i\vec{k}_1(\vec{n}-\vec{m})}$ možemo pisati

$$H_i = i \sum_{\vec{k}\vec{q}} \frac{C(\vec{q})}{2N^2\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2} \vec{k}_1 \vec{l}_{\vec{q}} V_{\vec{k}_1} a_{\vec{k}_2}^{+} a_{\vec{k}} \left(b_{\vec{q}}^{+} + b_{-\vec{q}} \right) \cdot$$

$$\cdot \sum_{\vec{n}\vec{m}} \left[e^{i\vec{n}(\vec{k}_1-\vec{k}_2-\vec{q}) + i\vec{m}(\vec{k}-\vec{k}_1)} - e^{i\vec{m}(\vec{k}-\vec{k}_1-\vec{q}) + i\vec{n}(\vec{k}_1-\vec{k}_2)} \right]$$

Uzimajući da je

$$\sum_{\bar{n}\bar{m}}{}' e^{i\bar{n}(\bar{k}_1-\bar{k}_2)+i\bar{m}(\bar{k}-\bar{k}_1-\bar{q})} = N^2 \delta_{\bar{k}_2,\bar{k}_1}\delta_{\bar{k}_1,\bar{k}-\bar{q}} = N^2 \delta_{\bar{k}_1,\bar{k}}\delta_{\bar{k}_2,\bar{k}-\bar{q}}$$

$$\sum_{\bar{n}\bar{m}}{}' e^{i\bar{m}(\bar{k}-\bar{k}_1)+i\bar{n}(\bar{k}_1-\bar{k}_2-\bar{q})} = N^2 \delta_{\bar{k}_1,\bar{k}}\,\delta_{\bar{k}_2,\bar{k}_1-\bar{q}} = N^2 \delta_{\bar{k}_1,\bar{k}}\delta_{\bar{k}_2,\bar{k}_1-\bar{q}}$$

dobijamo konačan izraz za

$$H_i = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\bar{k}\bar{q}}{}' F(\bar{k},\bar{q})\, a^+_{\bar{k}-\bar{q}} a_{\bar{k}} \left(b_{-\bar{q}} + b^+_{\bar{q}}\right)$$

$$F(\bar{k},\bar{q}) = i\,\frac{C(\bar{q})}{2}\left[\bar{k}\,\vec{l}_{\bar{q}} V_{\bar{k}} - (\bar{k}-\bar{q})\vec{l}_{\bar{q}} V_{\bar{k}-\bar{q}}\right]$$

Kompletan izraz za Hamiltonijan elektron-fonon interakcije sada se može prikazati u obliku

$$H_t = \sum_{\bar{k}}{}' E_{\bar{k}} a^+_{\bar{k}} a_{\bar{k}} + \sum_{\bar{k}}{}' \hbar\omega_{\bar{k}} b^+_{\bar{k}} b_{\bar{k}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\bar{k}\bar{q}}{}' F(\bar{k},\bar{q})\, a^+_{\bar{k}-\bar{q}} a_{\bar{k}} \left(b_{-\bar{q}} + b^+_{\bar{q}}\right) \qquad 2.6.$$

Drugi član gornjeg izraza predstavlja energiju fononskog polja.

Freliksove transformacije

Vrednost izraza /2.6/ neće se promeniti ako izvršimo transformaciju pomoću operatora

$$\hat{U} = e^{-i\hat{S}} \qquad 2.7.$$

gde je $\hat{S}$ neki operator čije su svojstvene vrednosti mnogo manje od kinetičke energije elektrona, kao i od energije fonona. To znači da je H_t i H_{eq} dato jednačinom /2.8/ fizički potpuno ekvivalentno.

$$H_{eq} = \hat{U} H_t \hat{U}^{-1} \qquad 2.8.$$

Ako gornji izraz razvijemo u red, i zadržimo se na prva tri člana, možemo pisati da je

$$H_{eq} \simeq \left(1 - i\hat{S} - \tfrac{1}{2}\hat{S}^2\right) H_t \left(1 + i\hat{S} - \tfrac{1}{2}\hat{S}^2\right)$$

ili

$$H_{eq} \simeq H_t + iH_t\hat{S} - i\hat{S}H_t + \hat{S}H_t\hat{S} - \frac{1}{2}\hat{S}^2H_t - \frac{1}{2}H_t\hat{S}^2$$

Obzirom da je

$$iH_t\hat{S} - i\hat{S}H_t = -i\left[\hat{S},H_t\right]$$

$$\hat{S}H_t\hat{S} - \frac{1}{2}\hat{S}^2H_t - \frac{1}{2}H_t\hat{S}^2 = -\frac{1}{2}\left[\hat{S},\left[\hat{S},H_t\right]\right]$$

možemo pisati

$$H_{eq} \simeq H_t - i\left[\hat{S},H_t\right] - \frac{1}{2}\left[\hat{S},\left[\hat{S},H_t\right]\right] \qquad 2.9$$

Odabraćemo operator $\hat{S}$ u obliku

$$\hat{S} = \sum_{\vec{k}'\vec{q}'}{}' X(\vec{k}',\vec{q}')\, a^+_{\vec{k}'-\vec{q}'} a_{\vec{k}'} \left(b_{-\vec{q}'} + b^+_{\vec{q}'}\right) \qquad 2.10$$

gde je $X(\vec{k}',\vec{q}')$ proizvoljna funkcija koju ćemo kasnije odrediti. Sada se gore navedeni komutatori mogu predstaviti u obliku

$$\left[\hat{S},H_t\right] = \sum_{\vec{k}\vec{q}}{}' X(\vec{k},\vec{q})\left(\varepsilon_{\vec{k}} - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{q}} + \hbar\omega_{\vec{q}}\right) a^+_{\vec{k}-\vec{q}} a_{\vec{k}} b_{-\vec{q}} +$$

$$+ \sum_{\vec{k}\vec{q}}{}' X(\vec{k},\vec{q})\left(\varepsilon_{\vec{k}} - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{q}} - \hbar\omega_{\vec{q}}\right) a^+_{\vec{k}-\vec{q}} a_{\vec{k}} b^+_{\vec{q}}$$

$$\left[\hat{S},\left[\hat{S},H_t\right]\right] = \sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}}{}' X(\vec{k},\vec{q})X(\vec{k}',-\vec{q})\left(\varepsilon_{\vec{k}} - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{q}} + \hbar\omega_{\vec{q}}\right) a^+_{\vec{k}-\vec{q}} a_{\vec{k}} a^+_{\vec{k}'+\vec{q}} a_{\vec{k}'} -$$

$$- \sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}}{}' X(\vec{k},\vec{q})X(\vec{k}',-\vec{q})\left(\varepsilon_{\vec{k}} - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{q}} - \hbar\omega_{\vec{q}}\right) a^+_{\vec{k}-\vec{q}} a_{\vec{k}} a^+_{\vec{k}'+\vec{q}} a_{\vec{k}'}$$

Zamenom ovih komutatora u jednačinu (2.9) dobija se

$$H_{eq} = \sum_{\vec{k}}{}' \varepsilon_{\vec{k}} a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}}{}' \hbar\omega_{\vec{k}} b^+_{\vec{k}} b_{\vec{k}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}\vec{q}}{}' F(\vec{k},\vec{q})\, a^+_{\vec{k}-\vec{q}} a_{\vec{k}} \left(b_{-\vec{q}} + b^+_{\vec{q}}\right) -$$

$$- i\sum_{\vec{k}\vec{q}}{}' X(\vec{k},\vec{q})\left(\varepsilon_{\vec{k}} - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{q}} + \hbar\omega_{\vec{q}}\right) a^+_{\vec{k}-\vec{q}} a_{\vec{k}} b_{-\vec{q}} + i\sum_{\vec{k}\vec{q}}{}' X(\vec{k},\vec{q})\left(\varepsilon_{\vec{k}} - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{q}} - \hbar\omega_{\vec{q}}\right) a^+_{\vec{k}-\vec{q}} a_{\vec{k}} b^+_{\vec{q}}$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}}{}' X(\vec{k},\vec{q})X(\vec{k}',-\vec{q})\left(\varepsilon_{\vec{k}} - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{q}} - \hbar\omega_{\vec{q}}\right) a^+_{\vec{k}-\vec{q}} a_{\vec{k}} a^+_{\vec{k}'+\vec{q}} a_{\vec{k}'} -$$

$$- \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}}{}' X(\vec{k},\vec{q})X(\vec{k}',-\vec{q})\left(\varepsilon_{\vec{k}} - \varepsilon_{\vec{k}-\vec{q}} + \hbar\omega_{\vec{q}}\right) a^+_{\vec{k}-\vec{q}} a_{\vec{k}} a^+_{\vec{k}'+\vec{q}} a_{\vec{k}'} \qquad 2.11$$

Ako se ograničimo na proces spontane emisije fonona, možemo umesto izraza za H_{eq} koristiti operator

$$h = H_{eq}|0_\phi\rangle$$

gde je $|0_\phi\rangle$ fononski vakum.

Za ovo postoji opravdanje sa fizičke strane; na $0°K$ svi članovi jednačine /2.11/ koji ne sadrže sa desne strane kreacioni fononski operator, jednaki su nuli. Zato možemo pisati da je

$$h = \sum_{\vec k}{}' \varepsilon_{\vec k} a^+_{\vec k} a_{\vec k} + \frac{1}{\sqrt N}\sum_{\vec k \vec q}{}' F(\vec k,\vec q)\, a^+_{\vec k-\vec q} a_{\vec k} + i\sum_{\vec k \vec q}{}' X(\vec k,\vec q)(\varepsilon_{\vec k} - \varepsilon_{\vec k-\vec q} - \hbar\omega_{\vec q})\, a^+_{\vec k-\vec q} a_{\vec k} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\vec k \vec k' \vec q}{}' X(\vec k,\vec q)X(\vec k',-\vec q)(\varepsilon_{\vec k} - \varepsilon_{\vec k-\vec q} - \hbar\omega_{\vec q})\, a^+_{\vec k-\vec q} a_{\vec k} a^+_{\vec k'+\vec q} a_{\vec k'} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{\vec k \vec k' \vec q}{}' X(\vec k,\vec q)X(\vec k',-\vec q)(\varepsilon_{\vec k} - \varepsilon_{\vec k-\vec q} + \hbar\omega_{\vec q})\, a^+_{\vec k-\vec q} a_{\vec k} a^+_{\vec k'+\vec q} a_{\vec k'}$$

Funkciju $X(\vec k,\vec q)$ odredićemo tako da se eliminiše onaj deo Hamiltonijana koji dolazi usled elektron-fonon interakcije. To znači da je

$$X(\vec k,\vec q) = -\frac{1}{\sqrt N}\,\frac{iF(\vec k,\vec q)}{\varepsilon_{\vec k} - \varepsilon_{\vec k-\vec q} - \hbar\omega_{\vec q}} = -\frac{\Phi(\vec k,\vec q)}{\sqrt N}\,\frac{1}{\varepsilon_{\vec k} - \varepsilon_{\vec k-\vec q} - \hbar\omega_{\vec q}} \qquad 2.12.$$

gde je $\Phi(\vec k,\vec q) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{\vec q}}}\left[\vec k\,\vec e_{\vec q}\, V_{\vec k} - (\vec k-\vec q)\vec e_{\vec q}\, V_{\vec k-\vec q}\right]$. Posle ovoga dobija se za

$$h = \sum_{\vec k}{}' \varepsilon_{\vec k} a^+_{\vec k} a_{\vec k} + \frac{1}{2N}\sum_{\vec k \vec k' \vec q}{}' \frac{\Phi(\vec k,\vec q)\Phi(\vec k',-\vec q)}{\varepsilon_{\vec k'} - \varepsilon_{\vec k'+\vec q} - \hbar\omega_{q}}\, a^+_{\vec k-\vec q} a_{\vec k} a^+_{\vec k'+\vec q} a_{\vec k'} -$$

$$-\frac{1}{2N}\sum_{\vec k \vec k' \vec q}{}' \frac{\Phi(\vec k,\vec q)\Phi(\vec k',-\vec q)}{\varepsilon_{\vec k'} - \varepsilon_{\vec k'+\vec q} - \hbar\omega_{q}}\cdot\frac{\varepsilon_{\vec k} - \varepsilon_{\vec k-\vec q} + \hbar\omega_{\vec q}}{\varepsilon_{\vec k} - \varepsilon_{\vec k-\vec q} - \hbar\omega_{\vec q}}\, a^+_{\vec k-\vec q} a_{\vec k} a^+_{\vec k'+\vec q} a_{\vec k'}$$

Ako se iz poslednjeg izraza izvrši zamena sumarnog indeksa $\vec k'' = \vec k' + \vec q$ i iz sume izdvoji deo δH kada je $\vec k'' = \vec k$, dobija se

$$\delta H = \sum_{\bar{k}}' \varepsilon_{\bar{k}} a_{\bar{k}}^{+} a_{\bar{k}} + \frac{1}{2N} \sum_{\bar{k}\bar{q}}' \frac{\Phi(\bar{k},\bar{q})\Phi(\bar{k}-\bar{q},-\bar{q})}{\varepsilon_{\bar{k}-\bar{q}} - \varepsilon_{\bar{k}} - \hbar\omega_{\bar{q}}} a_{\bar{k}-\bar{q}}^{+} a_{\bar{k}} a_{\bar{k}}^{+} a_{\bar{k}-\bar{q}} -$$

$$-\frac{1}{2N} \sum_{\bar{k}\bar{q}}' \frac{\Phi(\bar{k},\bar{q})\Phi(\bar{k}-\bar{q},-\bar{q})}{\varepsilon_{\bar{k}-\bar{q}} - \varepsilon_{\bar{k}} - \hbar\omega_{\bar{q}}} \cdot \frac{\varepsilon_{\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{k}-\bar{q}} + \hbar\omega_{\bar{q}}}{\varepsilon_{\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{k}-\bar{q}} - \hbar\omega_{\bar{q}}} a_{\bar{k}-\bar{q}}^{+} a_{\bar{k}} a_{\bar{k}}^{+} a_{\bar{k}-\bar{q}}$$

Kako je $\Phi(\bar{k}-\bar{q},-\bar{q}) = -\Phi(\bar{k},\bar{q})$

$$\Phi(\bar{k}-\bar{q},-\bar{q}) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\hbar}{2M\omega_{\bar{q}}}}\left[(\bar{k}-\bar{q})\vec{e}_{-\bar{q}} V_{\bar{k}-\bar{q}} - (\bar{k}-\bar{q}+\bar{q})\vec{e}_{\bar{q}} V_{\bar{k}-\bar{q}+\bar{q}}\right]$$

možemo pisati da je

$$\delta H = \sum_{\bar{k}}' \varepsilon_{\bar{k}} a_{\bar{k}}^{+} a_{\bar{k}} - \frac{1}{2N} \sum_{\bar{k}\bar{q}}' \frac{\Phi(\bar{k},\bar{q})^2}{\varepsilon_{\bar{k}-\bar{q}} - \varepsilon_{\bar{k}} - \hbar\omega_{\bar{q}}} a_{\bar{k}-\bar{q}}^{+} a_{\bar{k}} a_{\bar{k}}^{+} a_{\bar{k}-\bar{q}} +$$

$$+\frac{1}{2N} \sum_{\bar{k}\bar{q}}' \frac{\Phi(\bar{k},\bar{q})^2}{\varepsilon_{\bar{k}-\bar{q}} - \varepsilon_{\bar{k}} - \hbar\omega_{\bar{q}}} \cdot \frac{\varepsilon_{\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{k}-\bar{q}} + \hbar\omega_{\bar{q}}}{\varepsilon_{\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{k}-\bar{q}} - \hbar\omega_{\bar{q}}} a_{\bar{k}-\bar{q}}^{+} a_{\bar{k}} a_{\bar{k}}^{+} a_{\bar{k}-\bar{q}}$$

Izvršićemo u poslednjem izrazu komutiranje operatora

$$a_{\bar{k}-\bar{q}}^{+} a_{\bar{k}} a_{\bar{k}}^{+} a_{\bar{k}-\bar{q}} = a_{\bar{k}-\bar{q}}^{+} a_{\bar{k}-\bar{q}} - a_{\bar{k}-\bar{q}}^{+} a_{\bar{k}}^{+} a_{\bar{k}} a_{\bar{k}-\bar{q}}$$

i zanemariti doprinos od člana koji sadrži operatore $a_{\bar{k}-\bar{q}}^{+} a_{\bar{k}-\bar{q}}$. Hamiltonijan δH sada glasi

$$\delta H = \sum_{\bar{k}} \varepsilon_{\bar{k}} a_{\bar{k}}^{+} a_{\bar{k}} +$$

$$+\frac{1}{2N} \sum_{\bar{k}\bar{q}}' \frac{\Phi(\bar{k},\bar{q})^2}{\varepsilon_{\bar{k}-\bar{q}} - \varepsilon_{\bar{k}} - \hbar\omega_{\bar{q}}} \left[1 - \frac{\varepsilon_{\bar{k}-\bar{q}} - \varepsilon_{\bar{k}} + \hbar\omega_{\bar{q}}}{\varepsilon_{\bar{k}-\bar{q}} - \varepsilon_{\bar{k}} - \hbar\omega_{\bar{q}}}\right] a_{\bar{k}}^{+} a_{\bar{k}-\bar{q}}^{+} a_{\bar{k}-\bar{q}} a_{\bar{k}}$$

Ako u interakciji sa elektronom, fonon preda svu svoju energiju elektronu, onda je $\hbar\omega_{\bar{q}} = \varepsilon_{\bar{k}} - \varepsilon_{\bar{k}-\bar{q}}$. Odavde sledi da je $\bar{q} = 2\bar{k}$, gde smo sa $\hbar\bar{q}$ označili impuls fonona a sa $\hbar\bar{k}$ impuls elektrona. Obzirom da je $\varepsilon(\bar{k}) = \varepsilon(-\bar{k})$ možemo pisati Hamiltonijan elektron-fonon interakcije, dat gornjom jednačinom, u obliku

$$\delta H = \sum_{\bar{k}}' \varepsilon_{\bar{k}} a_{\bar{k}}^{+} a_{\bar{k}} - \frac{1}{N} \sum_{\bar{k}}' \frac{\Phi(\bar{k},2\bar{k})^2}{\hbar\omega_{2\bar{k}}} a_{\bar{k}}^{+} a_{-\bar{k}}^{+} a_{-\bar{k}} a_{\bar{k}} \qquad 2.13.$$

Drugi član jednačine /2.13/ predstavlja privlačnu elektron-elektron interakciju zbog znaka minus. Takodje se vidi da ova privlačna interakcija postoji izmedju elektrona sa suprotnim impulsima. Može se pokazati računski da je ovaj član veći od svih do sada zanemarenih članova Hamiltonijana, kao i od Kulonovog odbijanja koje postoji medju elektronima u jednom uskom sloju impulsa fermi sfere.

Na taj način smo matematički dokazali postojanje privlačne interakcije izmedju elektrona u superprovodnom kristalu, na temperaturama bliskim apsolutnoj nuli.

I. 3. Model Bardina, Kupera i Šrifera. Kanonske transformacije Bogoljubova

U ovom odeljku će biti govora o modelu superprovodnika koji su na osnovu radova Freliksa formulisali Bardin, Kuper i Šrifer. Prema njihovom modelu, izmedju elektrona sa suprotnim impulsima u oblasti granice fermi sfere, postoje privlačne sile koje iz vezuju u parove. Ti parovi se nazivaju Kuperovi parovi, prema Kuperu koji je dao proračun za energiju veze elektrona u paru.

U ovoj teoriji su uzeti u obzir efekti spin-spin interakcije izmedju elektrona. Pošto elektroni imaju spin $\pm 1/2$, to izmedju elektrona sa antiparalelnim spinovima deluju privlačne sile izmene, dok izmedju elektrona sa paralelnim spinovima deluju odbojne sile. U tom smislu su u teoriji Bardina, Kupera i Šrifera korigovani proračuni Freliksa. Na osnovu ovakvih uopštavanja, dobijen je Hamiltonijan koji ima oblik

$$H_B = \sum_{\bar{k}}{}' E_{\bar{k}} \left[a^+_{\bar{k}(1/2)} a_{\bar{k}(1/2)} + a^+_{-\bar{k}(-1/2)} a_{-\bar{k}(-1/2)} \right] - \frac{1}{N} \sum_{\bar{k}\bar{q}}{}' W(\bar{k},\bar{q})\, a^+_{\bar{k}(1/2)} a^+_{-\bar{k}(-1/2)} \cdot a_{-\bar{q}(-1/2)} a_{\bar{q}(1/2)} \qquad 3.1$$

gde je $W(\bar{k},\bar{q})$ pozitivna i parna funkcija u intervalu

$$P_F - P_G \leq \hbar \bar{k} \leq P_F + P_G \; ; \; P_F - P_G \leq \hbar \bar{q} \leq P_F + P_G \qquad 3.2$$

Interval impulsa elektrona $\hbar \bar{k}$ i $\hbar \bar{q}$ odredjen je graničnim impulsom fermi sfere P_F, i impulsom P_G koji predstavlja polovinu debljine sloja oko graničnog impulsa, tako da važi uslov da je $P_G \ll P_F$. Prema ovom modelu, van intervala /3.2/ funkcija $W(\bar{k},\bar{q})$ jednaka je nuli, a u intervalu se uzima da se sporo menja i može se zameniti konstantom.

Analizu Hamiltonijana /3.1/ izvršićemo metodom koju je predložio Bogoljubov. Umesto operatora $a^+_{\bar{k}(1/2)}$ i $a_{-\bar{k}(-1/2)}$ uvode se novi operatori $A^+_{\bar{k}(1)}, A_{\bar{k}(1)}$ i $A^+_{\bar{k}(0)}, A_{\bar{k}(0)}$ sledećim kanonskim relacijama:

$$a_{\bar{k}(1/2)} = U_{\bar{k}} A_{\bar{k}(0)} + V_{\bar{k}} A^+_{\bar{k}(1)} \, , \quad a_{-\bar{k}(-1/2)} = U_{\bar{k}} A_{\bar{k}(1)} - V_{\bar{k}} A^+_{\bar{k}(0)} \qquad 3.3$$

$$a^+_{\bar{k}(1/2)} = U_{\bar{k}} A^+_{\bar{k}(0)} + V_{\bar{k}} A_{\bar{k}(1)} \, , \quad a^+_{-\bar{k}(-1/2)} = U_{\bar{k}} A_{\bar{k}(1)} - V_{\bar{k}} A_{\bar{k}(0)}$$

gde su $U_{\bar{k}}$ i V_{k} realne i parne funkcije. Da bi navedene transformacije bile kanonične, tj. da bi operatori A bili takodje fermi operatori, funkcije $U_{\bar{k}}$ i $V_{\bar{k}}$ moraju da zadovoljavaju uslove koje ćemo sada izvesti. Operatori $a_{\bar{k}(1/2)}$ i $a^+_{\bar{k}(1/2)}$, kao fermi operatori, moraju zadovoljiti uslov

$$a^+_{\bar{k}(1/2)} a_{\bar{k}(1/2)} + a_{\bar{k}(1/2)} a^+_{\bar{k}(1/2)} = 1$$

Obzirom na ovaj uslov, možemo pisati da je

$$
\begin{aligned}
&\left[U_{\bar{k}} A^{+}_{\bar{k}(0)} + V_{\bar{k}} A_{\bar{k}(1)} \right] \left[U_{\bar{k}} A_{\bar{k}(0)} + V_{\bar{k}} A^{+}_{\bar{k}(1)} \right] + \\
&\left[U_{\bar{k}} A_{\bar{k}(0)} + V_{\bar{k}} A^{+}_{\bar{k}(1)} \right] \left[U_{\bar{k}} A^{+}_{\bar{k}(0)} + V_{\bar{k}} A_{\bar{k}(1)} \right] = U^{2}_{\bar{k}} A^{+}_{\bar{k}(0)} A_{\bar{k}(0)} + U_{\bar{k}} V_{k} A^{+}_{\bar{k}(0)} A^{+}_{\bar{k}(1)} + \\
&+ U_{\bar{k}} V_{\bar{k}} A_{\bar{k}(1)} A_{\bar{k}(0)} + V^{2}_{\bar{k}} A_{k(1)} A^{+}_{\bar{k}(1)} + U^{2}_{\bar{k}} A_{\bar{k}(0)} A^{+}_{\bar{k}(0)} + U_{\bar{k}} V_{\bar{k}} A_{\bar{k}(0)} A_{\bar{k}(1)} + \\
&+ U_{\bar{k}} V_{\bar{k}} A^{+}_{\bar{k}(1)} A^{+}_{\bar{k}(0)} + V^{2}_{\bar{k}} A^{+}_{\bar{k}(1)} A_{\bar{k}(1)} = 1
\end{aligned}
$$

Ako operatori treba da budu fermi operatori, moraju zadovoljavati uslove

$$
\begin{aligned}
&A_{\bar{k}(0)} A^{+}_{\bar{k}(0)} = 1 - A^{+}_{\bar{k}(0)} A_{\bar{k}(0)} \; , \quad A_{\bar{k}(0)} A_{\bar{k}(1)} = - A_{\bar{k}(1)} A_{\bar{k}(0)} \\
&A_{\bar{k}(1)} A^{+}_{\bar{k}(1)} = 1 - A^{+}_{\bar{k}(1)} A_{\bar{k}(1)} \; , \quad A^{+}_{\bar{k}(0)} A^{+}_{\bar{k}(1)} = - A^{+}_{\bar{k}(1)} A_{\bar{k}(0)}
\end{aligned}
\qquad 3.4.
$$

Kombinovanjem jednačina /3.4/ sa gornjim izrazom, dobija se da je uslov kanoničnosti ispunjen, ako funkcije $V_{\bar{k}}$ i $U_{\bar{k}}$ zadovoljavaju jednačinu

$$
U^{2}_{\bar{k}} \mp V^{2}_{\bar{k}} = 1 \qquad 3.5.
$$

Ako se formule /3.3/ zamene u izraz za Hamiltonijan /3.1/, dobija se da je

$$
H_{B} = H_{0} + H_{D} + H_{ND} \qquad 3.6.
$$

gde je

$$
H_{0} = \sum_{\bar{k}}{}' \left[2E_{\bar{k}} V^{2}_{\bar{k}} - U_{\bar{k}} V_{\bar{k}} \frac{1}{N} \sum_{\bar{q}} W(\bar{k},\bar{q})\, U_{\bar{q}} V_{\bar{q}} \right]
$$

$$
H_{D} = \sum_{\bar{k}}{}' \left[E_{\bar{k}} (U^{2}_{\bar{k}} - V^{2}_{\bar{k}}) - (U^{2}_{\bar{k}} - V^{2}_{\bar{k}}) \frac{1}{N} \sum_{\bar{q}}{}' W(\bar{k},\bar{q})\, U_{\bar{q}} V_{\bar{q}} \right] \left(A^{+}_{\bar{k}(0)} A_{\bar{k}(0)} + A^{+}_{\bar{k}(1)} A_{\bar{k}(1)} \right)
$$

$$
H_{ND} = \sum_{\bar{k}}{}' \left[2E_{\bar{k}} U_{\bar{k}} V_{\bar{k}} - (U^{2}_{\bar{k}} - V^{2}_{\bar{k}}) \frac{1}{N} \sum_{\bar{q}}{}' W(\bar{k},\bar{q})\, U_{\bar{q}} V_{\bar{q}} \right] \left(A^{+}_{\bar{k}(0)} A^{+}_{\bar{k}(1)} + A_{\bar{k}(1)} A_{\bar{k}(0)} \right)
$$

Funkcije $U_{\bar{k}}$ i $V_{\bar{k}}$ odredićemo tako da nedijagonalni deo Hamiltonijana H_{ND} bude jednak nuli. Ovo je moguće ako je

$$2E_{\bar{k}}\, U_{\bar{k}} V_{\bar{k}} - (U_{\bar{k}}^2 - V_{\bar{k}}^2)\, \frac{1}{N} \sum_{\bar{q}}' W(\bar{k},\bar{q})\, U_{\bar{q}} V_{\bar{q}} = 0$$

Ako uvedemo oznaku

$$\Delta_{\bar{k}} = \frac{1}{N} \sum_{\bar{q}}' W(\bar{k},\bar{q})\, U_{\bar{q}} V_{\bar{q}} \qquad 3.7.$$

onda se prema uslovu /3.5/ i gornjim jednačinama dobija da je

$$U_{\bar{k}}^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{E_{\bar{k}}}{\sqrt{E_{\bar{k}}^2 + \Delta_{\bar{k}}^2}}\right), \quad V_{\bar{k}}^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{E_{\bar{k}}}{\sqrt{E_{\bar{k}}^2 + \Delta_{k}^2}}\right)$$

$$U_{\bar{k}}^2 - V_{\bar{k}}^2 = \frac{E_{k}}{\sqrt{E_{\bar{k}}^2 + \Delta_{\bar{k}}^2}}, \quad U_{\bar{k}} V_{\bar{k}} = \frac{1}{2}\, \frac{\Delta_{\bar{k}}}{\sqrt{E_{\bar{k}}^2 + \Delta_{\bar{k}}^2}}$$

Zamenom ovih vrednosti u izraz za H_0 i H_D dobijamo

$$H_0 = \sum_{\bar{k}}' \left(E_{\bar{k}} - \frac{E_{\bar{k}}^2}{\sqrt{E_{\bar{k}}^2 + \Delta_{\bar{k}}^2}} - \frac{E_{\bar{k}} \Delta_{\bar{k}}}{\sqrt{E_{\bar{k}}^2 + \Delta_{\bar{k}}^2}}\right) = \sum_{\bar{k}}' E_{\bar{k}} \left(1 - \frac{2E_{\bar{k}} + \Delta_{\bar{k}}}{2\sqrt{E_{\bar{k}}^2 + \Delta_{\bar{k}}^2}}\right)$$

$$H_D = \sum_{\bar{k}}' \left(\frac{E_{\bar{k}}^2}{\sqrt{E_{\bar{k}}^2 + \Delta_{\bar{k}}^2}} + \frac{\Delta_{\bar{k}}^2}{\sqrt{E_{\bar{k}}^2 + \Delta_{\bar{k}}^2}}\right) \left[A^+_{\bar{k}(0)} A_{\bar{k}(0)} + A^+_{\bar{k}(1)} A_{\bar{k}(1)}\right]$$

Konačno se za Hamiltonijan Bardin-Kuper Šriferovog /BCS/ modela dobija izraz koji je dijagonalizovan, i ima oblik

$$H_B = H_0 + H_D = \sum_{\bar{k}}' E_{\bar{k}} \left(1 - \frac{2E_{\bar{k}} + \Delta_{\bar{k}}}{\sqrt{E_{\bar{k}}^2 + \Delta_{\bar{k}}^2}}\right) +$$

$$+ \sum_{\bar{k}}' \sqrt{E_{\bar{k}}^2 + \Delta_{\bar{k}}^2} \left[A^+_{\bar{k}(0)} A_{\bar{k}(0)} + A^+_{\bar{k}(1)} A_{\bar{k}(1)}\right] \qquad 3.8.$$

Sada ćemo ispitati veličinu $\Delta_{\bar{k}}$ koja figuriše u izrazu za energiju elementarnih eksitacija, i koja je data jednačinom /3.7/. Energija elektrona koji učestvuju u provodjenju struje jednaka je

$$E_{\bar{k}} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} - \mu$$

, gde je μ hemijski potencijal, i izražava se $\mu = \frac{\hbar^2 K_F^2}{2m}$.

Energiju elektrona sada možemo u obliku razlike talasnih vektora predstaviti na sledeći način

$$E_{\bar{k}} = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} - \frac{\hbar^2 K_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m} (\bar{K}-\bar{K}_F)(\bar{K}+\bar{K}_F)$$

Pošto ceo ovaj proračun ima smisla samo za uzan sloj impulsa fermi sfere, to u gornjoj jednačini vektore možemo zameniti njihovim intenzitetima. Tada je

$$E_{\bar{k}} \simeq \frac{\hbar^2}{2m} K_F(K-K_F), \ (K \approx K_F) \quad \text{ili} \qquad E_{\bar{k}} \simeq \hbar v_F (\bar{K}-K_F)$$

Prema modelu Bardina, Kupera i Šrifera, funkcija jednaka je

$$W(\bar{k},\bar{q}) = \begin{cases} W, & q_F - q_G \leq q \leq q_F + q_G \\ 0, & q_F - q_G > q, \ q_F + q_G < q \end{cases} \qquad 3.9.$$

Obzirom da funkciju $W(\bar{k},\bar{q})$ u datom sloju možemo zameniti konstantom W , i da je

$$U_{\bar{q}} V_{\bar{q}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta_{\bar{q}}}{\sqrt{E_{\bar{q}}^2 + \Delta_{\bar{q}}^2}}$$

možemo pisati

$$\Delta_{\bar{k}} = \frac{W}{2N} \sum_{\bar{q}}' \frac{\Delta_{\bar{q}}}{\sqrt{\hbar^2 v_F^2 (q-q_F)^2 + \Delta_{\bar{q}}^2}} \qquad 3.10.$$

Ako još predpostavimo da $\Delta_{\bar{k}}$ i $\Delta_{\bar{q}}$ slabo zavise od impulsa, možemo približno uzeti da je $\Delta_{\bar{k}} \simeq \Delta_{\bar{q}} = \Delta$. Tada se formula /3.lo/ svodi na

$$\frac{W}{2N} \sum_{q}' \frac{1}{\sqrt{\hbar^2 v_F^2 (q-q_F)^2 + \Delta^2}} = 1 \qquad 3.11.$$

Dobijena jednačina ima smisla samo ako je $w>0$ jer je gornja suma sigurno pozitivna. Uzimajući u obzir oblik Hamiltonijana /3.1/, to nam govori da se radi o privlačnoj interakciji izmedju elektrona. Ovo predstavlja matematičko objašnjenje za ranije navedenu činjenicu da pri obrazovanju superprovodnih parova, na elektrone deluje privlačna sila, koja preovladjuje nad odbojnom Kulonovom silom. Sa sume /3.11/, možemo preći na integral po zapremini prema pravilu

$$\frac{1}{N}\sum_{\bar q} \to \frac{1}{N}\frac{Na^3}{(2\pi)^3}\int d^3\bar q = \frac{a^3}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta \int_{q_F-q_G}^{q_F+q_G} q^2 dq = \frac{a^3}{2\pi^2}\int_{q_F-q_G}^{q_F+q_G} q^2 dq$$

gde je a^3 zapremina elementarne ćelije kristala; integracija po uglovima je odmah izvršena jer izraz pod sumom ne zavisi od uglova već od intenziteta impulsa $|\hbar\bar q|$. Granice integracije odredjene su oblikom funkcije $w(\bar k,\bar q)$ koji je dat jednačinom /3.9/. Sada se može pisati da je

$$\frac{wa^3}{4\pi^2}\int_{q_F-q_G}^{q_F+q_G} \frac{q^2 dq}{\sqrt{\hbar^2 v_F^2 (q-q_F)^2+\Delta^2}} = 1 \qquad 3.12.$$

Pošto se talasni vektor $\bar q$ menja u uzanom intervalu, možemo približno uzeti da je $q^2 \simeq q_F^2$. Ako se uvede smena $q-q_F=k$, integral /3.12/ dobija oblik

$$\frac{wa^3q_F^2}{4\pi^2}\int_{q_F-q_G}^{q_F+q_G}\frac{dk}{\sqrt{\hbar^2v_F^2k^2+\Delta^2}} = \frac{wa^3q_F^2}{4\pi^2\hbar v_F}\int_{-q_G}^{+q_G}\frac{dk}{\sqrt{k^2+\left(\frac{\Delta}{\hbar v_F}\right)^2}} \qquad 3.13.$$

Posle izvršene integracije i zamene granica, dobija se

$$\ln\frac{q_G+\sqrt{q_G^2+(\Delta/\hbar v_F)^2}}{-q_G+\sqrt{q_G^2+(\Delta/\hbar v_F)^2}} = \frac{4\pi^2\hbar v_F}{wa^3q_F^2} \qquad 3.14.$$

Ako u prvoj aproksimaciji napišemo izraz

$$\sqrt{q_G^2+\left(\frac{\Delta}{\hbar v_F}\right)^2} = q_G\sqrt{1+\left(\frac{\Delta}{\hbar v_F q_G}\right)^2} \simeq q_G\left(1+\frac{1}{2}\,\frac{\Delta^2}{\hbar^2 v_F^2 q_G^2}\right)$$

, dobijamo da je

$$\ln\left(1+\frac{4\hbar^2v_F^2q_G^2}{\Delta^2}\right) = \frac{4\pi^2\hbar v_F}{wa^3q_F^2}$$

Predpostavimo da je $q_G \gg \frac{\Delta}{\hbar v_F}$; na osnovu ove aproksimacije, sledi da je $\frac{4\hbar^2 v_F^2 q_G^2}{\Delta^2} \gg 1$, i jedinica se može zanemariti u gornjem izrazu.

Sada se može pisati

$$\Delta = 2\hbar v_F q_G \, e^{-\frac{4\bar{u}^2 \hbar v_F}{w a^3 q_F^2}} \qquad 3.15.$$

Veličina Δ karakteriše efekat superprovodnosti. Iz formule /3.15/ se vidi da je ova veličina proporcionalna sa vrednošću graničnog impulsa fermi sfere $\hbar q_F$, i debljini sloja impulsa $\hbar q_G$ u kome izmedju elektrona deluju privlačne sile. Ova veličina je takodje direktno srazmerna sa konstantom w efektivne elektron-elektron interakcije. Δ ima dimenzije energije i može se smatrati kao energija veze dva elektrona u paru. Energija veze opada sa temperaturom, i kada na nekoj temperaturi Tc postane jednaka nuli, efekat superprovodnosti prestaje.

Na osnovu do sada izloženog, može se zaključiti da dobri superprovodnici moraju da ispunjavaju sledeće uslove:

1. da imaju fermi sferu velikog radijusa
2. da interakcija w bude jaka
3. da imaju visoku Debajevu frekvenciju, jer je q_G proporcionalno sa frekvencijom fonona

Sada ćemo pokazati da je i u ovom slučaju zadovoljen kriterijum superfluidnosti. Spektar elementarnih eksitacija dobija se iz jednačine /3.8/ diferenciranjem po fermi operatorima

$$\varepsilon_K(0) = \frac{\partial H_D}{\partial A^+_{K(0)} A_{\bar{K}(0)}} \;, \quad \varepsilon_K(1) = \frac{\partial H_D}{\partial A^+_{\bar{K}(1)} A_{\bar{K}(1)}}$$

Na ovaj način se dobija da je

$$\varepsilon_K(0) = \sqrt{E_K^2 + \Delta_K^2} \;, \quad \varepsilon_K(1) = \sqrt{E_K^2 + \Delta_K^2}$$

Ovo znači da obe vrste fermiona imaju isti zakon disperzije. Možemo pisati da je

$$\varepsilon_K = \sqrt{E_K^2 + \Delta_K^2} \qquad 3.16.$$

Ako se u gornju formulu zameni $\Delta_K = \Delta$ i $\hbar(K-K_F) = P-P_F$, dobijamo

$$\varepsilon_p = \sqrt{\Delta^2 + v_F^2 (p - p_F)^2}$$

Kriterijum superkonduktivnosti zahteva da minimum fazne brzine bude pozitivna veličina. Prema gornjoj jednačini sledi

$$\frac{\varepsilon_p}{p} = \sqrt{\frac{\Delta^2}{p^2} + \frac{v_F^2}{p^2}(p - p_F)^2}$$

Uzimajući da je $p^2 \simeq p_F^2$ možemo pisati

$$\frac{\varepsilon_p}{p} \simeq \sqrt{\left(\frac{\Delta}{p_F}\right)^2 + \left(\frac{v_F}{p_F}\right)^2 (p - p_F)^2}$$

Uslov za minimum je $\min \frac{\varepsilon_p}{p} = \frac{d}{dp} \frac{\varepsilon_p}{p} = 0$ ispunjen je za $p = p_F$.

Konačno možemo pisati da je

$$\min \frac{\varepsilon_p}{p} = \frac{\Delta}{p_F} > 0 \qquad 3.17$$

Iz gornje jednačine se vidi da je minimum fazne brzine pozitivan i različit od nule.

BCS teorija daje objašnjenje za pojavu superprovodnosti. Ova teorija objašnjava postojanje energijskog procepa kod superprovodnika. Širina tog energijskog procepa jednaka je

$$E_G = 2\Delta$$

i zato se veličina Δ često naziva parametar energijskog procepa. Ako ovu veličinu podelimo Bolcmanovom konstantom dobijamo brojnu vrednost temperature transformacije T_c u superprovodno stanje.

Prema formuli (3.15) mogu se izračunati vrednosti T_c ako se poznaju veličine koje karakterišu svaki superprovodnik: a , v_F , W , q_0 .

Konstanta W elektron-fonon interakcije za većinu superprovodnih metala je veličina reda 10^{-11} erga. Vrednosti za T_c koje se dobijaju računskim putem uglavnom se dobro slažu sa izmerenim eksperimentalnim vrednostima ako se uzme da je brzina elektrona na Fermi sferi oko 10^8 cm/sec, a za talasni vektor q_0 10^5 cm^{-1}. Medjutim, većina poznatih superprovodnih metala ima i 100-puta veću brzinu elektrona na granici fermi sfere, a ipak im kritične temperature nisu znatno više.

TABLICA 1.Kritične temperature za neke superprovodnike

metal	V	Nb	Zn	Pb	Hg	In	Sn	Ta	Mo	Ga	W
T_c °K	5.03	9.1	0.85	7.2	4.15	3.4	3.72	4.5	0.92	1.1	0.01

II. ELEKTRON-FOTON INTERAKCIJA I SUPERPROVODNOST

U Glavi I razmatrana je teorija superprovodnosti i elektron-fonon interakcija koja uslovljava pojavu superprovodnosti. U ovoj Glavi će na sličan način biti pokazano da i elektron-foton interakcija može izazvati sparivanje elektrona u superprovodne parove, tj. pojavu superprovodnosti. Ovde ćemo se koristiti istim postupkom kao što je to učinjeno u odeljcima (2)i(3) predhodne Glave. To se prvenstveno odnosi na primenu Frelikovih transformacija i kanonskih transformacija Bogoljubova na problem elektron-foton interakcije u superprovodnom kristalu.

II.1. Interakcija elektrona u elektromagnetnom polju

Prilikom proučavanja uticaja elektromagnetnog polja na pojavu superprovodnosti, posmatraćemo slobodne elektrone koji se nalaze u elektromagnetnom polju odredjenom vektorskim potencijalom $\vec{A}$. Prvo ćemo poći od klasičnog izraza za Hamiltonijan elektrona u elektromagnetnom polju, a potom preći na kvantnomehanički oblik. Od celokupnog izraza za energiju elektrona, nas će u prvom redu interesovati energija interakcije izmedju elektrona i fotona.

Impuls elektrona koji se kreće u elektromagnetnom polju čiji je vektorski potencijal $\vec{A}$ jednak je

$$\vec{p} = \vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}$$

gde je $\vec{P}$ generalisani impuls $\vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}}$.

Klasični izraz za Hamiltonijan glasi

$$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{P} - \frac{e}{c}\vec{A}\right)^2 + e\varphi$$

Prelaz na kvantnomehanički Hamiltonijan izvršićemo tako što ćemo generalisani impuls $\vec{P}$ izraziti pomoću operatora impulsa $-i\hbar\nabla$, i razviti gornji izraz u komponente impulsa. Tako se dobija

$$H = \frac{P^2}{2m} - \frac{e}{mc}\vec{P}.\vec{A} + \frac{e^2}{2mc^2}\vec{A}^2 + \frac{i\hbar e}{2mc}\,\mathrm{div}\vec{A} + e\varphi$$

Ako su u pitanju polja čiji je skalarni potencijal φ jednak nuli, i polja koja nemaju izvora tj. kod kojih je div$\vec{A}$ jednaka nuli, onda možemo gornji izraz prepisati u obliku

$$H \simeq \frac{P^2}{2m} - \frac{e}{mc}\vec{P}.\vec{A}$$

pri čemu je zanemaren član sa $\vec{A}^2$ kao mala veličina. Može se uzeti da član $-\frac{e}{mc}\vec{P}.\vec{A}$ potiče od interakcije elektromagnetnog polja i elektrona. Hamiltonijan elektron-foton interakcije dobijamo sumirajući po svim impulsima elektrona ovaj član

$$H_i = -\frac{e}{mc}\sum_{\vec{n}}{}' \vec{P}^{66'}_{\vec{n}}.\vec{A}_{\vec{n}} \qquad 1.1$$

Hamiltonijan interakcije izrazićemo u drugom obliku na taj način što ćemo impuls elektrona predstaviti pomoću fermi operatora a vektorski potencijal pomoću bozonskih operatora.

$$\vec{P}_{\vec{n}}^{66'} = \left(-i\hbar \int \varphi^{*}_{\vec{n}6} \nabla_{\vec{n}} \varphi_{\vec{n}6'}\, d\tau\right) a^{+}_{\vec{n}6} a_{\vec{n}6'} = \vec{P}_{66'} a^{+}_{\vec{n}6} a_{\vec{n}6'} \qquad 1.2$$

gde je

$$\vec{P}_{66'} = -i\hbar \int \varphi^{*}_{\vec{n}6'} \nabla_{\vec{n}} \varphi_{\vec{n}6}\, d\tau$$ -srednja vrednost operatora impulsa.

Indeksi 6 i $6'$ označavaju vrednosti spina, a $\varphi_{\vec{n}6}$ su svojstvene funkcije elektrona. Vektorski potencijal u kvantnomehaničkoj reprezentaciji glasi

$$\vec{A}_{\vec{n}} = \sum_{\vec{q}\alpha} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{a^3 \omega_{\vec{q}}}}\, \frac{\vec{\ell}_{\vec{q}\alpha}}{\sqrt{N}} \left(b_{\vec{q}\alpha} e^{i\vec{q}\vec{n}} + b^{+}_{\vec{q}\alpha} e^{-i\vec{q}\vec{n}}\right) \qquad 1.3$$

U ovom izrazu $\ell_{\vec{q}\alpha}$ predstavlja vektor polarizacije fotona, a indeks označava tri vrednosti vektora polarizacije (jednu longitudinalnu) i dve transverzalne. Fotonski operatori $b^{+}_{\vec{q}\alpha}$ i $b_{\vec{q}\alpha}$ kreiraju, odnosno anihiliraju fotone u kristalnoj rešetki na mestima odredjenim sa vektorom rešetke $\vec{n}$. Zapremina elementarne ćelije jednaka je a^3, gde je a parametar rešetke. Posle ovih zamena Hamiltonijan elektron-foton interakcije dobija oblik

$$H_i = -\frac{e}{mc} \sum_{\vec{n}\vec{q}\alpha 66'}' \sqrt{\frac{2\pi\hbar c^2}{a^3 \omega_{\vec{q}}}}\, \frac{\vec{P}_{66'}\cdot \vec{\ell}_{\vec{q}\alpha}}{\sqrt{N}}\, a^{+}_{\vec{n}6} a_{\vec{n}6'} \left(b_{\vec{q}\alpha} e^{i\vec{q}\vec{n}} + b^{+}_{\vec{q}\alpha} e^{-i\vec{q}\vec{n}}\right)$$

Ako uvedemo oznaku
$$\Phi^{\alpha}_{66'}(\vec{q}) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar e^2}{m^2 a^3 \omega_{\vec{q}}}}\, \vec{P}_{66'}\cdot \vec{\ell}_{\vec{q}\alpha} \qquad 1.4$$

onda gornji izraz možemo napisati na sledeći način

$$H_i = -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{n}\vec{q}\alpha 66'}' \Phi^{\alpha}_{66'}(\vec{q})\, a^{+}_{\vec{n}6} a_{\vec{n}6'} \left(b_{\vec{q}\alpha} e^{i\vec{q}\vec{n}} + b^{+}_{\vec{q}\alpha} e^{-i\vec{q}\vec{n}}\right) \qquad 1.5$$

Izvršićemo u zadnjoj jednačini Furije transformaciju stavljajući da je

$$a^{+}_{\vec{n}6} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}_1}' a^{+}_{\vec{k}_1 6} e^{-i\vec{k}_1\vec{n}}, \qquad a_{\vec{n}6'} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}}' a_{\vec{k}6'} e^{i\vec{k}\vec{n}}$$

Sada je Hamiltonijan interakcije jednak

$$H_i = -\frac{1}{N\sqrt{N}} \sum_{\vec{q}\alpha 66'}' \Phi^{\alpha}_{66'}(\vec{q}) \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}}' a^{+}_{\vec{k}_1 6} a_{\vec{k}6'} b_{\vec{q}\alpha} \sum_{\vec{n}} e^{i\vec{n}(\vec{k}+\vec{q}-\vec{k}_1)} -$$

$$-\frac{1}{N\sqrt{N}} \sum_{\vec{q}\alpha 66'}' \Phi^{\alpha}_{66'}(\vec{q}) \sum_{\vec{k}_1,\vec{k}}' a^{+}_{\vec{k}_1 6} a_{\vec{k}6'} b^{+}_{\vec{q}\alpha} \sum_{\vec{n}}' e^{i\vec{n}(\vec{k}-\vec{q}-\vec{k}_1)}$$

Pošto je

$$\sum_{\vec{n}}' e^{i\vec{n}(\vec{k}+\vec{q}-\vec{k}_1)} = N\,\delta_{\vec{k}_1,\vec{k}+\vec{q}}, \qquad \sum_{\vec{n}}' e^{i\vec{n}(\vec{k}-\vec{q}-\vec{k}_1)} = N\,\delta_{\vec{k}_1,\vec{k}-\vec{q}}$$

posle manjih transformacija sledi

Možemo pisati

$$H_i = -\frac{1}{N\sqrt{N}} \sum_{\vec q \alpha \sigma\sigma'}{}' \Phi^{\alpha}_{\sigma\sigma'}(\vec q) \sum_{\vec k_1, \vec k}{}' a^{+}_{\vec k_1\sigma} a_{\vec k\sigma'} b_{\vec q\alpha} N \delta_{\vec k_1, \vec k+\vec q} -$$

$$-\frac{1}{N\sqrt{N}} \sum_{\vec q \alpha \sigma\sigma'}{}' \Phi^{\alpha}_{\sigma\sigma'}(\vec q) \sum_{\vec k_1, \vec k}{}' a^{+}_{\vec k_1\sigma} a_{\vec k\sigma'} b^{+}_{\vec q\alpha} N \delta_{\vec k_1, \vec k-\vec q}$$

Sada se Hamiltonijan interakcije svodi na oblik

$$H_i = -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec k \vec q \alpha \sigma\sigma'}{}' \Phi^{\alpha}_{\sigma\sigma'}(\vec q)\left[a^{+}_{\vec k+\vec q,\sigma} a_{\vec k,\sigma'} b_{\vec q\alpha} + a^{+}_{\vec k-\vec q,\sigma} a_{\vec k,\sigma'} b^{+}_{\vec q\alpha}\right]$$

Posle zamene sumarnih indeksa $\vec q \to -\vec q$ i manjih transformacija, dobija se

$$H_i = -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec k \vec q \alpha \sigma\sigma'}{}' \Phi^{\alpha}_{\sigma\sigma'}(\vec q) a^{+}_{\vec k+\vec q,\sigma} a_{\vec k,\sigma'} b_{\vec q\alpha} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec k \vec q \alpha \sigma\sigma'}{}' \Phi^{\alpha}_{\sigma\sigma'}(\vec q) a^{+}_{\vec k,\sigma'} a_{\vec k+\vec q,\sigma} b^{+}_{\vec q\alpha} \qquad 1.6$$

Kompletan izraz za Hamiltonijan dobija se ako se pored energije interakcije uračunaju još i energija slobodnih elektrona $\varepsilon_\sigma(\vec k)$ i energija fotona $\varepsilon_\alpha(\vec q)$.

$$H_t = H_0 + H_i = \sum_{\vec k\sigma}{}' \varepsilon_\sigma(\vec k) a^{+}_{\vec k\sigma} a_{\vec k\sigma} + \sum_{\vec q\alpha}{}' \varepsilon_\alpha(\vec q) b^{+}_{\vec q\alpha} b_{\vec q\alpha} -$$

$$-\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec k \vec q \alpha \sigma\sigma'}{}' \Phi^{\alpha}_{\sigma\sigma'}(\vec q)\left[a^{+}_{\vec k+\vec q,\sigma} a_{\vec k,\sigma'} b_{\vec q\alpha} + a^{+}_{\vec k,\sigma'} a_{\vec k+\vec q,\sigma} b^{+}_{\vec q\alpha}\right] \qquad 1.7$$

gde je
$$\varepsilon_\sigma(\vec k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \qquad \varepsilon_\alpha(\vec q) = \hbar\omega_{\vec q}$$

Već se ovde može uočiti velika sličnost izmedju Hamiltonijana(1.7) i Hamiltonijana elektron-fonon interakcije datog jednačinom 2.6 predhodne Glave. Ako Hamiltonijan elektron-foton interakcije napišemo u obliku

$$H_i = -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec k \vec q \alpha \sigma\sigma'}{}' \Phi^{\alpha}_{\sigma\sigma'}(\vec q)\left[a^{+}_{\vec k+\vec q,\sigma} a_{\vec k,\sigma'} b_{\vec q\alpha} + a^{+}_{\vec k-\vec q,\sigma} a_{\vec k,\sigma'} b^{+}_{\vec q\alpha}\right]$$

i zamenimo $\vec q$ sa $-\vec q$ dobijamo ekvivalentan oblik Frelikovog Hamiltonijana.

$$H_i = -\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec k \vec q \alpha \sigma\sigma'}{}' \Phi^{\alpha}_{\sigma\sigma'}(\vec q)\, a^{+}_{\vec k+\vec q,\sigma} a_{\vec k,\sigma'} \left(b_{\vec q\alpha} + b^{+}_{-\vec q\alpha}\right)$$

II.2 Freliksove transformacije za Hamiltonijan elektron-foton interakcije

U predhodnom paragrafu videli smo veliku sličnost izmedju izraza za Hamiltonijane elektron-fonon i elektron-foton interakcije. To ćemo iskoristiti da bi primenili Freliksove transformacije na slučaj elektron-foton interakcije. Transformisaćemo Hamiltonijan 1.7 pomoću unitarnog operatora

$$\hat{U} = e^{-i\hat{S}}$$

Imajući u vidu da je

$$H_{eq} = \hat{U} H_t \hat{U}^{-1}$$

fizički ekvivalentno sa H_t , posle razvoja u red i grupisanja u komutatore, možemo pisati

$$H_{eq} \simeq H_t - i\left[\hat{S}, H_t\right] - \frac{1}{2}\left[\hat{S},\left[\hat{S}, H_t\right]\right] \qquad 2.1$$

Operator $\hat{S}$ odabraćemo u obliku

$$\hat{S} = \sum_{\bar{p}\bar{q}\beta ss'}{}' X^{\beta}_{ss'}(\bar{p},\bar{q})\, a^{+}_{\bar{p}+\bar{q},s}\, a_{\bar{p},s'}\, b_{\bar{q}\beta} + \sum_{\bar{p}\bar{q}\beta ss'}{}' X^{\beta *}_{ss'}(\bar{p},\bar{q})\, a^{+}_{\bar{p},s'}\, a_{\bar{p}+\bar{q},s}\, b^{+}_{\bar{q}\beta} \qquad 2.2$$

gde je $X^{\beta}_{ss'}(\bar{p},\bar{q})$ proizvoljna funkcija koju ćemo odrediti kasnije. Da bi izračunali komutatore koji figurišu u jednačini 2.1 navedimo odredjene komutacione relacije izmedju korišćenih operatora

$$\left[a^{+}_{\bar{p}+\bar{q},s}\, a_{\bar{p},s'},\, a^{+}_{\bar{k}+\bar{q},\sigma}\, a_{\bar{k},\sigma}\right] = a^{+}_{\bar{p}+\bar{q},s}\, a_{\bar{k},\sigma}\, \delta_{\bar{p},\bar{k}+\bar{q}}\, \delta_{s',\sigma} - a^{+}_{\bar{k}+\bar{q},\sigma}\, a_{\bar{p},s'}\, \delta_{\bar{p}+\bar{q},\bar{k}}\, \delta_{s,\sigma}$$

$$\left[b^{+}_{\bar{q}\beta},\, b_{\bar{q}\alpha}\right] = -\left[b_{\bar{q}\alpha},\, b^{+}_{\bar{q}\beta}\right] = \delta_{\bar{q},\bar{q}}\, \delta_{\beta,\alpha}$$

Posle izračunavanja dobija se da su traženi komutatori jednaki

$$\left[\hat{S}, H_t\right] = \sum_{\bar{p}\bar{q}\beta ss'}{}' \Delta E^{\beta}_{ss'}(\bar{p},\bar{q})\left[X^{\beta}_{ss'}(\bar{p},\bar{q})\, a^{+}_{\bar{p}+\bar{q},s}\, a_{\bar{p},s'}\, b_{\bar{q}\beta} - X^{\beta *}_{ss'}(\bar{p},\bar{q})\, a^{+}_{\bar{p},s'}\, a_{\bar{p}+\bar{q},s}\, b^{+}_{\bar{q}\beta}\right]$$

$$\left[\hat{S},\left[\hat{S}, H_t\right]\right] = 2\sum_{\bar{p}\bar{q}\beta ss'}{}' \Delta E^{\beta}_{ss'}(\bar{p},\bar{q})\left|X^{\beta}_{ss'}(\bar{p},\bar{q})\right|^2 \left\{a^{+}_{\bar{p},s'}\, a_{\bar{p},s'} - a^{+}_{\bar{p}+\bar{q},s}\, a_{\bar{p}+\bar{q},s}\right\} b^{+}_{\bar{q}\beta}\, b_{\bar{q}\beta} -$$

$$-2\sum_{\bar{p}\bar{q}\beta ss'}{}' \Delta E^{\beta}_{ss'}(\bar{p},\bar{q})\left|X^{\beta}_{ss'}(\bar{p},\bar{q})\right|^2 a^{+}_{\bar{p}+\bar{q},s}\, a_{\bar{p},s'}\, a^{+}_{\bar{p},s'}\, a_{\bar{p}+\bar{q},s}$$

gde smo uveli oznaku

$$\Delta E^{\beta}_{ss'}(\bar{p},\bar{q}) = \varepsilon_{s'}(\bar{p}) - \varepsilon_{s}(\bar{p}+\bar{q}) + \varepsilon_{\beta}(\bar{q})$$

Ako prepišemo Hamiltonijan 1.7 u obliku

$$H_t = \sum_{\vec{p}s}' \varepsilon_s(\vec{p})\, a^+_{\vec{p},s} a_{\vec{p},s} + \sum_{\vec{q}\beta}' \varepsilon_\beta(\vec{q})\, b^+_{\vec{q}\beta} b_{\vec{q}\beta} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{p}\vec{q}\beta ss'} \Phi^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q}) \cdot$$

$$\cdot \left[a^+_{\vec{p}+\vec{q},s} a_{\vec{p},s'} b_{\vec{q}\beta} + a^+_{\vec{p},s'} a_{\vec{p}+\vec{q},s} b^+_{\vec{q}\beta} \right]$$

i u jednačinu 2.1 zamenimo nadjene komutatore, dobijamo da je ekvivalentni Hamiltonijan jednak

$$H_{eq} = \sum_{\vec{p}s}' \varepsilon_s(\vec{p})\, a^+_{\vec{p},s} a_{\vec{p},s} + \sum_{\vec{q}\beta}' \varepsilon_\beta(\vec{q})\, b^+_{\vec{q}\beta} b_{\vec{q}\beta} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{p}\vec{q}\beta ss'}' \Phi^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q})\, a^+_{\vec{p}+\vec{q},s} a_{\vec{p},s'} b_{\vec{q}\beta} -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{p}\vec{q}\beta ss'}' \Phi^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q})\, a^+_{\vec{p},s'} a_{\vec{p}+\vec{q},s} b^+_{\vec{q}\beta} - i \sum_{\vec{p}\vec{q}\beta ss'}' \Delta E^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q}) X^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q})\, a^+_{\vec{p}+\vec{q},s} a_{\vec{p},s'} b_{\vec{q}\beta} +$$

$$+ i \sum_{\vec{p}\vec{q}\beta ss'}' \Delta E^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q}) X^{*\beta}_{ss'}(\vec{p},\vec{q})\, a^+_{\vec{p},s'} a_{\vec{p}+\vec{q},s} b^+_{\vec{q}\beta} + \sum_{\vec{p}\vec{q}\beta ss'}' \Delta E^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q}) \left| X^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q}) \right|^2 \cdot$$

$$\cdot \left[a^+_{\vec{p}+\vec{q},s} a_{\vec{p},s'} b^+_{\vec{q}\beta} b_{\vec{q}\beta} - a^+_{\vec{p},s'} a_{\vec{p}+\vec{q},s} b_{\vec{q}\beta} b^+_{\vec{q}\beta} \right] +$$

$$+ \sum_{\vec{p}\vec{q}\beta ss'}' \Delta E^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q}) \left| X^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q}) \right|^2 a^+_{\vec{p}+\vec{q},s} a_{\vec{p},s'} a^+_{\vec{p},s'} a_{\vec{p}+\vec{q},s}$$

Analogno postupku u prvoj Glavi, primenićemo fotonski vakum na gornji Hamiltonijan. To znači da će svi članovi koji ne sadrže sa desne strane kreacioni bozonski operator biti jednaki nuli. Gornji izraz tada prelazi u oblik

$$h = \sum_{\vec{p}s}' \varepsilon_s(\vec{p})\, a^+_{\vec{p},s} a_{\vec{p},s} - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{p}\vec{q}\beta ss'}' \Phi^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q})\, a^+_{\vec{p},s'} a_{\vec{p}+\vec{q},s} +$$

$$+ i \sum_{\vec{p}\vec{q}\beta ss'}' \Delta E^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q}) X^{*\beta}_{ss'}(\vec{p},\vec{q})\, a^+_{\vec{p},s'} a_{\vec{p}+\vec{q},s} + \sum_{\vec{p}\vec{q}\beta ss'}' \Delta E^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q}) \left| X^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q}) \right|^2 a^+_{\vec{p}+\vec{q},s} a_{\vec{p},s'} a^+_{\vec{p},s'} a_{\vec{p}+\vec{q},s}$$

Funkciju $X^\beta_{ss'}$ odredićemo tako da eliminišemo članove koji potiču elektron-foton interakcije. Prema tome možemo pisati da je

$$i \sum_{\vec{p}\vec{q}\beta ss'}' \Delta E^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q}) X^{*\beta}_{ss'}(\vec{p},\vec{q})\, a^+_{\vec{p},s'} a_{\vec{p}+\vec{q},s} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{p}\vec{q}\beta ss'}' \Phi^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q})\, a^+_{\vec{p},s'} a_{\vec{p}+\vec{q},s}$$

ili

$$X^{*\beta}_{ss'}(\vec{p},\vec{q}) = -\frac{i}{\sqrt{N}} \frac{\Phi^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q})}{\Delta E^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q})} = -\frac{i}{\sqrt{N}} \frac{\Phi^\beta_{ss'}(\vec{p},\vec{q})}{\varepsilon_{s'}(\vec{p}) - \varepsilon_s(\vec{p}+\vec{q}) + \varepsilon_\beta(\vec{q})}$$

Obzirom da je $\Phi_{ss'}^{\beta}(\vec{p},\vec{q}) = \Phi_{ss'}^{*\beta}(\vec{p},\vec{q})$

funkciju $X_{ss'}^{\beta}$ možemo pisati na sledeći način

$$X_{ss'}^{\beta}(\vec{p},\vec{q}) = \frac{i}{\sqrt{N}} \frac{\Phi_{ss'}^{\beta}(\vec{p},\vec{q})}{\mathcal{E}_{s'}(\vec{p})-\mathcal{E}_s(\vec{p}+\vec{q})+\mathcal{E}_\beta(\vec{q})} \tag{2.3}$$

Sada se Hamiltonijan h svodi na δH

$$\delta H = \sum_{\vec{p}s}{}' \mathcal{E}_s(\vec{p}) a_{\vec{p}s}^+ a_{\vec{p}s} + \frac{1}{N} \sum_{\vec{p}\vec{q}\beta ss'}{}' \frac{|\Phi_{ss'}^{\beta}(\vec{p},\vec{q})|^2}{\mathcal{E}_{s'}(\vec{p})-\mathcal{E}_s(\vec{p}+\vec{q})+\mathcal{E}_\beta(\vec{q})} a_{\vec{p}+\vec{q},s}^+ a_{\vec{p},s'} a_{\vec{p},s'}^+ a_{\vec{p}+\vec{q},s} \tag{2.4}$$

Ako u drugom članu jednačine 2.4 izmenimo poredak operatora, tj. ako izvršimo komutiranje operatora, dobijamo

$$\delta H = \sum_{\vec{p}s}{}' \mathcal{E}_s(\vec{p}) a_{\vec{p}s}^+ a_{\vec{p}s} + \frac{1}{N} \sum_{\vec{p}\vec{q}\beta ss'}{}' \frac{|\Phi_{ss'}^{\beta}(\vec{p},\vec{q})|^2}{\mathcal{E}_{s'}(\vec{p})-\mathcal{E}_s(\vec{p}+\vec{q})+\mathcal{E}_\beta(\vec{q})} a_{\vec{p}+\vec{q},s}^+ a_{\vec{p}+\vec{q},s} -$$
$$- \frac{1}{N} \sum_{\vec{p}\vec{q}\beta ss'}{}' \frac{|\Phi_{ss'}^{\beta}(\vec{p},\vec{q})|^2}{\mathcal{E}_{s'}(\vec{p})-\mathcal{E}_s(\vec{p}+\vec{q})+\mathcal{E}_\beta(\vec{q})} a_{\vec{p}+\vec{q},s}^+ a_{\vec{p},s'}^+ a_{\vec{p},s'} a_{\vec{p}+\vec{q},s}$$

Zamenimo još sumacione indekse

$$\vec{p}+\vec{q} = \vec{k}$$

u poslednja dva člana gornje jednačine; onda dobijamo da je

$$\delta H = \sum_{\vec{p}s}{}' \mathcal{E}_s(\vec{p}) a_{\vec{p}s}^+ a_{\vec{p}s} + \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}\vec{q}\beta ss'}{}' \frac{|\Phi_{ss'}^{\beta}(\vec{k}-\vec{q},\vec{q})|^2}{\mathcal{E}_{s'}(\vec{k}-\vec{q})-\mathcal{E}_s(\vec{k})+\mathcal{E}_\beta(\vec{q})} a_{\vec{k}s}^+ a_{\vec{k}s} -$$
$$- \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}\vec{q}\beta ss'}{}' \frac{|\Phi_{ss'}^{\beta}(\vec{k}-\vec{q},\vec{q})|^2}{\mathcal{E}_{s'}(\vec{k}-\vec{q})-\mathcal{E}_s(\vec{k})+\mathcal{E}_\beta(\vec{q})} a_{\vec{k}s}^+ a_{\vec{k}-\vec{q},s'}^+ a_{\vec{k}-\vec{q},s'} a_{\vec{k},s}$$

Pošto je $\mathcal{E}_{s'}(-\vec{k}) = \mathcal{E}_s(\vec{k})$ za $\vec{q}=2\vec{k}$, gornji Hamiltonijan se svodi na sledeći oblik

$$\delta H = \sum_{\vec{k}s}{}' \left[\mathcal{E}_s(\vec{k}) + \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}\beta ss'}{}' \frac{|\Phi_{ss'}^{\beta}(2\vec{k},-\vec{k})|^2}{\hbar\omega_{2\vec{k}}} \right] a_{\vec{k}s}^+ a_{\vec{k}s} -$$
$$- \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}\beta ss'}{}' \frac{|\Phi_{ss'}^{\beta}(2\vec{k},-\vec{k})|^2}{\hbar\omega_{2\vec{k}}} a_{\vec{k}s}^+ a_{-\vec{k}s'}^+ a_{-\vec{k}s'} a_{\vec{k}s} \tag{2.5}$$

Drugi član jednačine 2.5 predstavlja Hamiltonijan elektron-elektron interakcije. Vidi se da je ova interakcija privlačna (zbog znaka -) i da ona deluje izmedju elektrona sa suprotnim impulsima i suprotnim spinovima (s=+1/2, ś=-1/2). Na taj način smo matematički dokazali da je ova interakcija privlačna, i da elektron-foton interakcija može izazvati pojavu superprovodnosti.

II.3 Kanonske transformacije Bogoljubova i procena Δ(„gepa")

Pokazaćemo sada da se Hamiltonijan 2.5 može napisati u obliku koji daje BCS teorija. U tom cilju podjimo od Hamiltonijana

$$\delta H = \sum_{\bar{k}s}{}' \mathcal{E}_s(\bar{k})\, a^+_{\bar{k}s} a_{\bar{k}s} + \frac{1}{N}\sum_{\bar{k}\bar{Q}\beta ss'}{}' \frac{|\Phi^{\beta}_{ss'}(\bar{k}-\bar{Q},\bar{k})|^2}{\mathcal{E}_{s'}(\bar{k}-\bar{Q}) - \mathcal{E}_s(\bar{k}) + \hbar\omega_{\bar{Q}}}\, a^+_{\bar{k}s} a_{\bar{k}s} -$$

$$- \frac{1}{N}\sum_{\bar{k}\bar{Q}\beta ss'}{}' \frac{|\Phi^{\beta}_{ss'}(\bar{k}-\bar{Q},\bar{k})|^2}{\mathcal{E}_{s'}(\bar{k}-\bar{Q}) - \mathcal{E}_s(\bar{k}) + \hbar\omega_{\bar{Q}}}\, a^+_{\bar{k}s} a^+_{\bar{k}-\bar{Q},s'} a_{\bar{k}-\bar{Q},s'} a_{\bar{k}s}$$

Uvedimo još oznake

$$W(\bar{k},\bar{Q}) = \sum_{\beta ss'}{}' \frac{|\Phi^{\beta}_{ss'}(\bar{k}-\bar{Q},\bar{k})|^2}{\mathcal{E}_{s'}(\bar{k}-\bar{Q}) - \mathcal{E}_s(\bar{k}) + \hbar\omega_{\bar{Q}}} \qquad 3.1$$

$$\mathcal{E}_0 = \frac{1}{N}\sum_{\bar{Q}}{}' W(\bar{k},\bar{Q}) \qquad 3.2$$

Ako u gornje jednačine stavimo da je $2\bar{k}=\bar{Q}=\bar{q}$, dobijamo

$$\delta H = \sum_{\bar{k}s}{}' \Big[\mathcal{E}_s(\bar{k}) + \frac{1}{N}\sum_{\bar{q}}{}' W(\bar{k},\bar{q})\Big] a^+_{\bar{k}s} a_{\bar{k}s} - \frac{1}{N}\sum_{\bar{k}\bar{q}}{}' W(\bar{k},\bar{q})\, a^+_{\bar{k}s} a^+_{-\bar{k},s'} a_{-\bar{q},s'} a_{\bar{q}s}$$

ili

$$\delta H = \sum_{\bar{k}s} E_s(\bar{k})\, a^+_{\bar{k}s} a_{\bar{k}s} - \frac{1}{N}\sum_{\bar{k}\bar{q}}{}' W(\bar{k},\bar{q})\, a^+_{\bar{k}s} a^+_{-\bar{k},s'} a_{-\bar{q},s'} a_{\bar{q},s}$$

gde je $\quad E_s(\bar{k}) = \mathcal{E}_s(\bar{k}) + \mathcal{E}_0 = \mathcal{E}_s(\bar{k}) + \frac{1}{N}\sum_{\bar{q}\beta ss'}{}' \frac{|\Phi^{\beta}_{ss'}(\bar{k},\bar{q})|^2}{\hbar\omega_{2\bar{q}}}$

Pre nego što predjemo na analizu gornjeg Hamiltonijana, razmotrimo sa gledišta BCS teorije elektronska stanja. Superprovodno stanje sadrži mešavinu jednoelektronskih stanja, koja se nalaze u uskom energetskom intervalu, kako ispod tako i iznad Fermijeve energije $\mathcal{E}_F$. Ranije je naglašeno da su ova stanja zauzeta u parovima. Ako je stanje sa talasnim vektorom K i spinom orjentisanim nagore zauzeto, tada je zauzeto i stanje sa talasnim vektorom -K i spinom nadole. Ukoliko je stanje K$\uparrow$ prazno, tada je i stanje -K$\downarrow$ prazno. Prema tome, mi biramo takvu funkciju stanja koja ima oblik

$$\Phi_{ss'} \rightarrow \bar{k}_1\uparrow, -\bar{k}_1\downarrow;\ \bar{k}_2\uparrow, -\bar{k}_2\downarrow;\ \cdots$$

Pogledajmo kako ovo ograničenje utiče na oblik funkcije W(KQ) i na funkciju $\Phi^{\beta}_{ss'}$ datu jednačinom 1.4(Glava II, prvi odeljak).

$$\Phi^{\beta}_{ss'}(\bar{k},\bar{Q}) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar e^2}{m^2 a^3 \omega_Q}}\; \vec{P}_{ss'} \cdot \vec{\ell}_{\bar{Q}\beta}$$

Predpostavimo da na niskim temperaturama elektron interaguje samo sa longitudinalnom komponentom elektromagnetnih talasa($\beta=1$), i da je ugao izmedju vektora polarizacije fotona $\vec{\ell}_{\bar{q}\beta}$ i impulsa elektrona $\vec{P}_{ss'}$ jednak nuli. Tada je njihov skalarni proizvod jednak umnošku njihovih inteziteta. Pogledajmo još za odgovarajuće vrednosti spina, koje nam kombinacije sa gledišta BCS teorije odgovaraju. Pošto si s′mogu imati vrednosti -1/2 i +1/2, onda možemo obrazovati ovakve moguće kombinacije stanja elektrona

s=+1/2 ,	s=-1/2 ,	s=+1/2 ,	s=-1/2
ś=-1/2 ,	ś=+1/2 ,	ś=+1/2 ,	ś=+1/2
$\uparrow\downarrow\ \Phi_{12}$	$\downarrow\uparrow\ \Phi_{21}$	$\uparrow\uparrow\ \Phi_{11}$	$\downarrow\downarrow\ \Phi_{22}$

Fenomen superprovodnosti izazivaju stanja $\uparrow\downarrow\Phi_{12}$ i $\downarrow\uparrow\Phi_{21}$, i možemo uzeti da su ravnopravna. Prema tome, možemo pisati da je

$$\Phi_{12}=\Phi_{21}=\Phi \quad , \quad \Phi_{11}=\Phi_{22}\approx 0$$

Sada se funkcije $\Phi^{0}_{ss'}$ i $W(\bar{k},\bar{q})$ mogu napisati u obliku

$$\Phi^{0}_{ss'}=\Phi=\sqrt{\frac{2\pi\hbar e^2}{a^3m^2\omega_q}}\,|P_F| \quad , \quad W(\bar{k},\bar{q})=2\,\frac{|\Phi|^2}{\hbar\omega_q} \qquad 3.3$$

gde je sa P_F označen impuls elektrona u graničnom sloju Fermi sfere. Ovde ćemo usvojiti predpostavku o obliku funkcije $W(\bar{k}\bar{q})$ koji daje BCS teorija. Prema ovoj teoriji, razmatranje se ograničava na slučaj uzanog sloja impulsa Fermi sfere, koji je odredjen graničnim impulsom Fermi sfere $\hbar k_F$ i impulsom $\hbar k_G$ koji predstavlja polovinu debljine ovog sloja u k-prostoru. Talasni vektor elektrona $\bar{k}$ mora pripadati intervalu

$$k_F-k_G\leqslant k\leqslant k_F+k_G \qquad 3.4$$

Van intervala (3.4) funkcija $W(\bar{k}\bar{q})$ jednaka je nuli, a u intervalu se uzima da se sporo menja i može se zameniti konstantom interakcije W.

$$W(kq)=\begin{cases} W \ , & k_F-k_G\leqslant k\leqslant k_F+k_G \\ 0 \ , & k_F-k_G>k\ ,\quad k_F+k_G<k \end{cases} \qquad 3.5$$

Posle ovog razmatranja, Hamiltonijan 2.5 može se napisati u obliku

$$H=\sum_{\bar{k}}{}' E_{\bar{k}}\left[a^{+}_{\bar{k}(1/2)}a_{\bar{k}(1/2)}+a^{+}_{-\bar{k}(-1/2)}a_{-\bar{k}(-1/2)}\right]- \qquad 3.6$$

$$-\frac{1}{N}\sum_{\bar{k}\bar{q}}{}' W(\bar{k},\bar{q})\,a^{+}_{\bar{k}(1/2)}a^{+}_{-\bar{k}(-1/2)}a_{-\bar{q}(-\frac{1}{2})}a_{\bar{q}(1/2)}$$

gde je

$$E_{\bar{k}}=\varepsilon_{\bar{k}(1/2)}+\varepsilon_{0(1/2)}=\varepsilon_{-\bar{k}(-1/2)}+\varepsilon_{0(-1/2)} \qquad 3.7$$

Videli smo da je Hamiltonijan 3.6 istog oblika kao i BCS Hamiltonijan. Prema tome, možemo izvršiti kanonske transformacije Bogoljubova nad ovim Hamiltonijanom na isti način kao što je to uradjeno u poglavlju 3. prve Glave. Zato se ovde nećemo zadržavati na ponavljanju celog postupka, već ćemo navesti nadjene rezultate. Prema formulama 3.8 i 3.7 (I.3) možemo pisati da je Hamiltonijan elektron-foton interakcije jednak

$$H_e = \sum_{\bar{K}}' E_{\bar{K}} \left(1 - \frac{2E_{\bar{K}} + \Delta_{\bar{K}}}{2\sqrt{E_{\bar{K}}^2 + \Delta_{\bar{K}}^2}}\right) + \sum_{\bar{K}}' \sqrt{E_{\bar{K}}^2 + \Delta_{\bar{K}}^2} \left[A^{+}_{\bar{K}(0)} A_{\bar{K}(0)} + A^{+}_{\bar{K}(1)} A_{\bar{K}(1)} \right]$$

gde je

$$\Delta_{\bar{K}} = \frac{1}{N} \sum_{\bar{q}}' W(\bar{K},\bar{q})\, U_{\bar{q}} V_{\bar{q}} = \frac{1}{2N} \sum_{\bar{q}}' W(\bar{K},\bar{q}) \frac{\Delta_{\bar{q}}}{\sqrt{E_{\bar{q}}^2 + \Delta_{\bar{q}}^2}}$$

Ako predpostavimo da $\Delta_{\bar{q}}$ i $\Delta_{\bar{K}}$ ne zavise od impulsa, ili bolje rečeno slabo zavise od impulsa, onda možemo pisati da je

$$\Delta_{\bar{K}} = \Delta_{\bar{q}} = \Delta$$

U tom slučaju se gornja formula svodi na oblik

$$\frac{1}{2N} \sum_{\bar{q}}' \frac{W(\bar{K},\bar{q})}{\sqrt{E_{\bar{K}}^2 + \Delta^2}} = 1 \qquad 3.8$$

Funkciju $W(\bar{k}\bar{q})$ možemo zameniti konstantom interakcije W i ona prema jednačinama 3.3 jednaka

$$W(\bar{K},\bar{q}) = W = 2\frac{|\Phi|^2}{\hbar\omega} = \frac{2}{\hbar\omega} \frac{2\bar{u}\hbar e^2}{a^3 m^2 \omega} \hbar^2 K_F^2 = \frac{4\bar{u} e^2 \hbar^2 K_F^2}{a^3 m^2 \omega^2} \qquad 3.9$$

gde je ω frekvencija fotona, a P_F granični impuls elektrona i jednak je $\hbar K_F$. Obzirom na jednačine 3.2 i 3.7 energiju elektrona možemo izraziti na sledeći način

$$E_{\bar{K}} = \varepsilon_{\bar{K}} + \varepsilon_0 = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + \frac{1}{N} \sum_{\bar{q}}' W(\bar{K},\bar{q})$$

gde smo sa ε_0 označili dodatnu energiju koju elektron stiče u interakciji sa fotonom. Ako predjemo sa sume na integral po uzanom sloju impulsa Fermi sfere, smatrajući pri tome funkciju $W(\bar{k}\bar{q})$ konstantom, dobijamo da je

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{N} \sum_{\bar{q}} W = \frac{W}{N} \frac{Na^3}{(2\bar{u})^3} \int_0^{2\bar{u}} d\varphi \int_0^{\bar{u}} \sin\theta\, d\theta \int_{K_F - K_G}^{K_F + K_G} q^2 dq = \frac{Wa^3}{\bar{u}^2} K_G K_F^2$$

gde smo stavili da je q^2 približno jednako K_F^2. Prema tome, možemo pisati da je energija elektrona jednaka

$$E_K = \frac{\hbar^2 K^2}{2m} + \frac{Wa^3}{\bar{u}^2} K_G K_F^2$$

Energiju elektrona možemo izraziti i u drugom obliku; ako iz jednačine 3.9 zamenimo vrednost za konstantu interakcije W dobijamo da je

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}\,\frac{8e^2 k_G k_F^2}{\pi m\,\omega^2}$$

Označimo li sa

$$\omega_0^2 = \frac{8e^2 k_G k_F^2}{\pi m} \qquad 3.10$$

možemo konačno pisati da je energija elektrona jednaka

$$E_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}\,\frac{\omega_0^2}{\omega^2} \qquad 3.11$$

Konstanta ω_0 ima dimenzije sec^{-1} i predstavja frekvencu. Kasnije ćemo videti kakvu ulogu ima ova konstanta u elektron-foton interakciji i superprovodnosti.

Izrazimo još energiju elektrona E u funkciji hemijskog potencijala

$$E = E_k - \mu = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m}\left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)$$

Ovaj izraz se može napisati u obliku razlike talasnih vektora na sledeći način

$$E = \frac{\hbar^2}{2m}(k^2 - c^2 k_F^2) = \frac{\hbar^2}{2m}(k - ck_F)(k + ck_F) \simeq \frac{\hbar^2 k_F}{2m}(1+c)(k - ck_F)$$

gde smo stavili da je $k \simeq k_F$ i $c^2 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$.

Zamenjujući brzinu elektrona na granici Fermi sfere koja je jednaka $\hbar k_F/m$ u gornji izraz, možemo pisati

$$E = \frac{\hbar v_F}{2}(1+c)(k - ck_F) \qquad 3.12$$

Ako uvrstimo ovu energiju u jednačinu 3.8 dobijamo da je

$$\frac{1}{2N}\sum_{\vec{q}}{}' \frac{W}{\sqrt{\left[\frac{\hbar v_F}{2}(1+c)(k-ck_F)\right]^2 + \Delta^2}} = 1$$

Predjimo sa sume na integral prema već navedenom pravilu

$$\frac{W}{2N}\sum_{\vec{q}}{}' \frac{1}{\sqrt{\left[\frac{\hbar v_F}{2}(1+c)(k-ck_F)\right]^2 + \Delta^2}} = \frac{Wa^3 k_F^2}{4\pi^2}\int_{k_F-k_G}^{k_F+k_G} \frac{dk}{\sqrt{\left[\frac{\hbar v_F}{2}(1+c)(k-ck_F)\right]^2 + \Delta^2}} = 1$$

gde je integracija po uglovima odmah izvršena i gde je $k^2 \simeq k_F^2$. Posle manjih transformacija, gornji integral dobija oblik

$$\int_{k_F-k_G}^{k_F+k_G} \frac{dk}{\sqrt{(k-ck_F)^2 + \left[\frac{\Delta}{\hbar v_F/2\,(1+c)}\right]^2}} = \frac{2\pi^2\hbar v_F}{Wa^3 k_F^2}(1+c)$$

Ako se uvede smena $k - ck_F = q$ možemo pisati

$$\int_{-k_G}^{+k_G} \frac{dq}{\sqrt{q^2 + \left[\frac{\Delta}{\frac{\hbar v_F}{2}(1+c)}\right]^2}} = \frac{2\pi^2\hbar v_F}{Wa^3 k_F^2}(1+c)$$

Posle integracije i zamene granica dobija se

$$\ln \frac{K_G + \sqrt{K_G^2 + \left[\frac{\Delta}{\frac{\hbar V_F}{2}(1+C)}\right]^2}}{-K_G + \sqrt{K_G^2 + \left[\frac{\Delta}{\frac{\hbar V_F}{2}(1+C)}\right]^2}} = \frac{2\bar{u}^2\hbar V_F}{Wa^3K_F^2}(1+C) \qquad 3.13$$

Ako se razvije izraz pod korenom u red i uzmu se samo prva dva člana u obzir (ostali su zanemarljivo mali) gornju jednačinu možemo pisati u obliku

$$\ln \frac{2K_G + \frac{1}{2}\left[\frac{\Delta}{\frac{\hbar V_F(1+C)}{2}}\right]^2 \cdot \frac{1}{K_G}}{\frac{1}{2}\left[\frac{\Delta}{\frac{\hbar V_F(1+C)}{2}}\right]^2 \cdot \frac{1}{K_G}} = \frac{2\bar{u}^2\hbar V_F}{Wa^3K_F^2}(1+C)$$

ili

$$\ln\left[1 + \frac{\hbar^2 V_F^2 K_G^2 (1+C)^2}{\Delta^2}\right] = \frac{2\bar{u}^2\hbar V_F}{Wa^3K_F^2}(1+C)$$

Obzirom da je $\frac{\hbar^2 V_F^2 K_G^2 (1+C)^2}{\Delta^2} \gg 1$, jedinicu možemo zanemariti, i konačno dobijamo da je

$$\Delta = \hbar V_F K_G (1+C)\, e^{-\frac{2\bar{u}^2\hbar V_F}{Wa^3K_F^2}(1+C)} \qquad 3.14$$

Zamenimo u eksponent gornje formule vrednost konstante interakcije W, i preuredimo ga na sledeći način

$$\frac{2\bar{u}^2\hbar V_F(1+C)}{Wa^3K_F^2} = \frac{2\bar{u}\hbar V_F(1+C)}{a^3K_F^2} \cdot \frac{a^3 m^2 \omega^2}{4\bar{u}e^2\hbar^2K_F^2} = \frac{\bar{u}m(1+C)}{2e^2K_F^3}\,\omega^2$$

ili uzimajući u obzir jednačinu 3.10 možemo pisati eksponent u obliku

$$4\frac{K_G}{K_F}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}(1+C)$$

Ako još stavimo da je $C = \sqrt{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$ jednačina 3.14 svodi se na oblik

$$\Delta = \hbar v_F K_G\left(1+\sqrt{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}\right) e^{-4\frac{K_G}{K_F}\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\left(1+\sqrt{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}\right)} \qquad 3.15$$

Gornja formula je slična formuli 3.15 (treći odeljak prve Glave) koja u BCS teoriji objašnjava pojavu superprovodnosti. Naredno razmatranje posvetićemo analizi gornje jednačine.

Funkcija (3.15) karakteriše uticaj elektromagnetnog polja na superprovodnost. Pošto se veličine k_G i k_F mogu smatrati za konstante svakog superprovodnika, to je njihov odnos $4K_G/K_F$ parametar koji zavisi od samog kristala. Zato će nas prvenstveno interesovati zavisnost Δ od frekvencije fotona ω.

Prvo što se uočava jeste da se superprovodnost fotonima može ostvariti ako je njihova frekvencija veća od teorijski izračunate frekvencije ω_0.

$$\omega \geqslant \omega_0$$

Za frekvencije fotona manje od ω_0 veličina Δ postaje imaginarna, i o superprovodnosti nema smisla govoriti. Pošto je

$$\omega_0^2 = \frac{8e^2 k_G K_F^2}{\bar{u} m}$$

za tipičan slučaj provodnika može se uzeti da je $K_F = 10^8\ cm^{-1}$ i $K_G = 10^5\ cm^{-1}$. Posle izračunavanja po gornjoj formuli dobija se da je $\omega_0 = 8.03\ 10^{14}\ sec^{-1}$.
Ovoj frekvenciji odgovara talasna dužina $\lambda_0 = 23\,400\ Å$.

Funkcija (3.15) ima maksimum koji pada u blisko infracrveno područje spektra. Diferenciranjem Δ po ω nalazimo maksimum iz uslova

$$\frac{d\Delta}{d\omega} = 0$$

Ovaj maksimum se ne može tačno naći, ali izračunavanja pokazuju da se može dosta dobro predstaviti formulom

$$\omega_m \simeq \frac{\omega_0}{\sqrt{\sqrt{2\frac{K_G}{K_F}} - 3\frac{K_G}{K_F}}}$$

Za već navedene vrednosti K_G i K_F dobija se da je

$$\omega_m \simeq 2.5\omega_0 = 20{,}01 \cdot 10^{14}\ sec^{-1}.$$

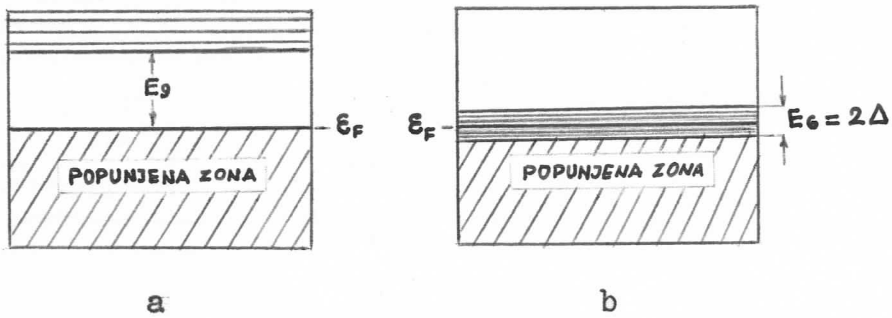
Frekvenciji maksimuma odgovara talasna dužina od 9360 Å.

Ranije smo napomenuli da veličina Δ karakteriše pojavu superprovodnosti. Prema BCS reoriji, elektron-fonon interakcija stvara energijski procep kod superprpvpdnika. Veličina ovog procepa je

$$E_G = 2\Delta$$

pri čemu se Δ smatra parametrom energijskog procepa. Treba napomenuti da je energijski procep koji se javlja kod superprovodnika sasvim druge prirode od energijskog procepa koji koji postoji kod izolatora, poluprovodnika i metala u normalnom stanju. U normalnom stanju (metal nije superprovodan), na apsolutnoj nuli, popunjena valentna zona odeljena je od provodne zone zabranjenom zonom. Širina zabranjene zone je ustvari veličina energijskog procepa. U slučaju superprovodnika, pri temperaturama bliskim 0°K, na Fermijevom nivou se javlja energijski procep E_G koji je jednak 2Δ. BCS teorija daje vezu izmedju parametra energijskog procepa Δ i temperature transformacije u superprovodno stanje T_c.

Energijski procep („gep") za superprovodni metal možemo šematski prikazati kao na slici 1b.

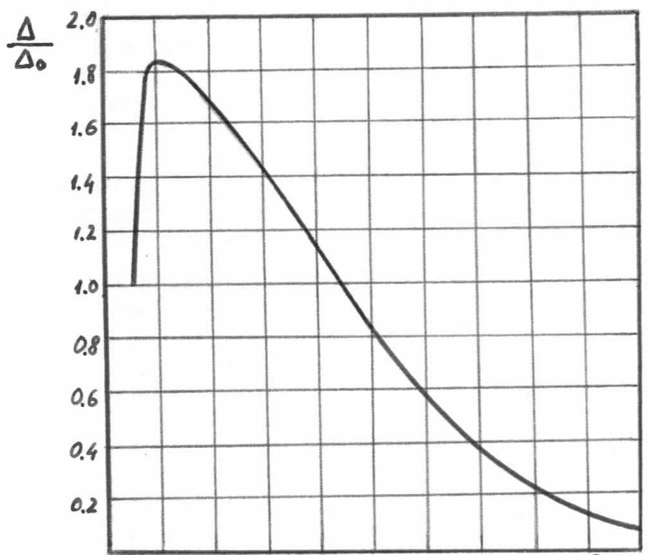


Slika 1. Šematski prikaz energijskog procepa za normalni provodnik(a) i superprovodnik(b)

Funkcija (3.15) grafički je prikazana na slici 2. Zavisnost parametra energijskog procepa Δ od frekvencije fotona data je relativnim odnosom Δ/Δ_0 u funkciji ω/ω_0, gde je uvedena oznaka Δ_0, kada je $\omega=\omega_0$ i jednaka je

$$\Delta_0 = \hbar v_F K_G \, e^{-4\frac{K_G}{K_F}}$$

Napominjemo da se ovde radi o energijskom procepu koji je nastao u superprovodniku usled elektron-foton interakcije, dakle uticajem elektromagnetnog polja na superprovodni metal. U tom smislu će dalje biti govora o superprovodnosti izazvanoj fotonima.



Slika 2. Vrednosti energijskih procepa u relativnoj razmeri u funkciji frekvencije fotona za slučaj elektron-foton interakcije.

Sa slike 2. se vidi da sa povećanjem frekvence fotona vrednost energijskog procepa (tačnije parametra energijskog procepa), brzo raste do neke maksimalne vrednosti, a potpm se asimptotski približava nuli kada je $\omega/\omega_o \gg 1$. Već pri vrednosti $\omega/\omega_o = 30$, može se smatrati da je Δ jednako nuli. Ova talasna dužina za koju je parametar energijskog procepa jednak nuli pripada mikrotalasnom području. To znači da u oblasti visokih frekvencija (velika energija fotona) ne može foton izazvati pojavu superprovodnosti. Naprotiv, fotoni manje energije mogu da izazovu superprovodnost. Postoji oblast spektra elektromagnetnih talasa ($\omega < \omega_o$) za koju ne možemo ništa odredjenije reći do tvrdnje da je u toj oblasti Δ imaginarno.

Prema već navedenim vrednostima za k_F i k_G dobija se za slučaj maksimuma ($\omega = \omega_m \simeq 2.5\omega_o$) da je vrednost parametra energijskog procepa, izračunata po formuli (3.15), jednaka

$$\Delta = 1,83\Delta_o \simeq 2,1 \cdot 10^{-14} erg$$

Ako se ova energija podeli sa Bolcmanovom konstantom k_B dobija da je temperatura prelaza u superprovodno stanje $T_C = 102°K$. Izračunavanja koja se odnose na nešto veće vrednosti za k_F pokazuju da se temperature transformacije povećavaju skoro do vrednosti sobnih temperatura.

Pri razmatranju elektron-foton interakcije u teoriji superprovodnosti, predpostavili smo da ova interakcija postoji u svakoj tači unutar kristala. Time smo prećutno prešli preko činjenice da elektromagnetno polje može da prodre samo do odredjene dubine u metal. Veličina koja karakteriše elektromagnetno polje u kristalu (provodniku) je Londonova dubina prodiranja λ_L. Tipična eksperimentalna vrednost za λ_L u metalima na 0°K iznosi 500 Å. Prema tome, da bi u principu dobili superprovodnost fotonima, moramo raditi sa tankim filmovima a ne sa masivnim metalima.

Izračunavanja i eksperimenti pokazuju da Londonova dubina prodiranja opada sa porastom frekvencije fotona. Glover i Tinkam su eksperimentalno utvrdili da fotoni čija je energija manja od energije procepa E_G mogu da prodju kroz superprovodni metal. Fotoni koji imaju veću vrednost energije od energijskog procepa kod superprovodnika ne mogu proći kroz metal. Oni eksituju elektrone iznad energijskog procepa i takvi elektroni ne mogu biti superprovodni. Ovi eksperimentalni rezultati idu u prilog našem zaključku da fotoni velike energije razaraju superprovodno stanje.

Z A K L J U Č A K

U prethodnim poglavljima pokazali smo da fotoni mogu izazvati prelaz u superprovodno stanje. Pri tome smo se služili istim postupkom na kome se zasniva BCS-teorija. Pored ovoga, videli smo još niz interesantnih osobina koje proističu iz oblika funkcije 3.15 . Ovde ćemo navesti glavne odlike ove funkcije koja karakteriše uticaj elektromagnetnog polja na superprovodnik.

Ako prihvatimo postojanje „gepa" za univerzalnu osobinu superprovodnika, onda možemo tvrditi da i elektron-foton interakcija izaziva pojavu superprovodnosti. Pri tome, energija, odnosno talasna dužina fotona mora zadovoljavati uslov

$$\lambda \leq \frac{\bar{u}c}{eK_F}\sqrt{\frac{\bar{u}m}{2K_G}}$$

- Granična talasna dužina, odnosno frekvencija fotona odredjena je osobinama svakog metala-superprovodnika.
- Funkcija 3.15 ispoljava jasno izraženi maksimum za odredjenu talasnu dužinu fotona pri kojoj je veličina energijskog procepa najveća.
- Ovom maksimumu odgovara i najveća temperatura prelaza u superprovodno stanje.
- Maksimalne temperature transformacije dobijaju se za fotone čija se talasna dužina nalazi u infracrvenoj oblasti spektra.
- Ove temperature su više oko 100 puta nego u slučaju elektron-fonon interakcije.
- Superprovodnost se ne može ostvariti sa fotonima čija je energija veća od energije procepa za više od 30-puta.

Na kraju treba pomenuti i ovo; kao što ni BCS teorija ne može da odredi jasnu prirodu mehanizma interakcije elektrona i fonona, tako je i proces eletron-foton interakcije i učešće fotona u sparivanju elektrona u parove ostao nerazjašnjen.

S A D R Ž A J

LITERATURA

A. S. DAVIDOV, KVANTNA MEHANIKA, MOSKVA 1962

CHARLES KITTEL, INTRODUCTION TO SOLID STATE PHYSICS

Bogoljubov N. N., Tolmačev V. V., Širkov D. V.,
Novi metodi u teoriji superprovodnosti M., 1958

H. Frolich, Phys. Rev., 79, 845-856 (1950)

H. Frolich, Proc. Roy. Soc., A215, 291-298 (1952)

H. Frolich, Proc. Roy. Soc., A223, 296-305 (1954)

J. Bardeen, L. Cooper, J. Schrieffer,
Phys. Rev., 108, 1175-1204 (1957)

Bogoljubov N.N., 34, 58(1958); Nuovo Cimento, 7,794