

D-369

Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Institut za fiziku

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ПРИМЉЕНО:		14. VIII. 1998.
ОРГАНИЗ.ЈЕД.		БРОЈ
0603		9/196

diplomski rad

Švarcsildovo rešenje u opštoj teoriji relativnosti

kandidat

Predrag Ranin

mentor

dr Milutin Blagojević

Novi Sad, jun 1998.

Najtoplje se zahvaljujem svom mentoru, dr Milutinu Blagojeviću, koji je svojim znanjem i korisnim sugestijama doprineo da ovaj rad bude završen. Takođe se zahvaljujem i profesorima: dr Darku Kaporu, dr Mariu Škrinjaru i dr Stanoju Stojanoviću koji su me podržavali i savetovali tokom studija fizike.

1. Uvod

The black holes of nature are the most perfect macroscopic objects there are in the universe: the only elements in their construction are our concepts of space and time. And since the general theory of relativity provides only a single unique family of solutions for their description, they are the simplest objects as well.

S.Chandrasekhar

U ovom radu analizirane su neke osobine Švarcšildove metrike. Ovo rešenje Ajnštajnovih jednačina gravitacionog polja predstavlja jedno od najznačajnijih egzaktnih rešenja u okviru opšte teorije relativnosti (OTR). Ono opisuje gravitaciono polje van sferno simetrične crne rupe ili zvezde i pružilo je i mogućnost eksperimentalne provere OTR. Efekti koje je OTR predvidela u okviru Sunčevog sistema, a koji su vezani za Švarcšildovu metriku, su posmatrani i u velikoj su saglasnosti sa predviđanjima. To su: precesija Merkurovog perihela, skretanje svetlosnih zraka pri prolasku pored Sunca, gravitacioni crveni pomak i kašnjenje radarskih signala koji su reflektovani od planeta. Svi ovi efekti ukazuju na važnost detaljne analize Švarcšildove metrike. Pored toga, ovi eksperimenti omogućuju i indirektnu proveru osnovnih principa OTR.

Opšta teorija relativnosti je, iako formulisana jezikom klasične fizike (tj. ne uzima u obzir kvantne efekte), aktuelna do izvesne mere i danas. Osnovni fizički princip od koga ona polazi pri analizi gravitacione interakcije predstavlja princip ekvivalencije. Do ovog principa Ajnštajn je došao razmatranjem misaonog eksperimenta sa posmatračem u liftu koji se ubrzava a zatim i analizom Etvešovog eksperimenta kojim je pokazana ekvivalentnost gravitacione i inercijalne mase. Ukoliko se posmatrač nalazi u liftu koji se ubrzava (tj. predstavlja neinercijalni referentni sistem) tada on ne može nikakvim lokalnim merenjem da utvrdi da li se nalazi u gravitacionom polju ili se lift ubrzava jer se u oba slučaja svi fizički procesi odvijaju istovetno. Odavde sledi i važan zaključak da se gravitaciono polje može lokalno kompenzovati ubrzanjem.

Princip ekvivalencije (PE) se može formulisati na sledeći način: U lokalnom referentnom sistemu koji slobodno pada svi zakoni fizike su isti kao u specijalnoj teoriji relativnosti. Mogu se razlikovati tri različita oblika ovog principa, u zavisnosti od njihove "jačine". Prema slabom PE u gornjoj formulaciji se umesto svih zakona fizike u obzir uzimaju samo zakoni mehanike. Ukoliko se ograničimo na sve zakone fizike izuzev gravitacije, dobijamo srednje jaki PE. Konačno, ako obuhvatimo sve zakone fizike dobijamo jaki PE. Upravo ovaj oblik PE je Ajnštajn prihvatio 1916 pri formulaciji konačne verzije opšte teorije relativnosti.

Drugi važan princip koji leži u osnovi OTR jeste opšti princip kovarijantnosti. Može se formulisati na sledeći način: oblik fizičkih zakona ne zavisi od izbora sistema koordinata. On iskazuje ideju da oblik fizičkih zakona treba da bude isti u svim referentnim sistemima, nezavisno od toga da li su oni inercijalni ili su ubrzani. Na ovaj način, svi referentni sistemi postaju ravnopravni i tako inercijalni referentni sistemi gube privilegovani položaj koji su imali u specijalnoj teoriji relativnosti. Ovaj princip je matematički realizovan kroz zahtev da sve fizičke veličine treba da su tenzori a da su zakoni fizike tenzorske relacije između njih koje su invarijantne na grupu opštih koordinatnih transformacija.

Svoju realizaciju ovi fizički principi dobijaju uvođenjem prostor-vremena kao zakrivljenog četvorodimenzionalnog Rimanovog prostora sa lokalno Lorencovom metrikom. U gravitacionom polju ne mogu se definisati globalni Lorencovi (tj. inercijalni)

sistemi već se oni menjaju od tačke do tačke. Osobine ovog prostor-vremena, tj. njegovu metriku, određuje raspored materije u njemu. Sa druge strane, kretanje tela u gravitacionom polju zavisi od lokalnih svojstava prosor-vremena. Jednačine kretanja su jednačine geodezijske linije i mogu se u okviru OTR dobiti iz samih jednačina polja. Za Ajnštajna je ovo bila jedna od najvažnijih posledica OTR. Geodezijske linije predstavljaju linije ekstremne dužine i tela koja se kreću duž njih slobodno padaju, tj. kreću se po inerciji. Raspored materije u Univerzumu, međutim, ne određuje u potpunosti njegovu geometriju. Potrebno je jos definisati i granične uslove koje zadovoljava metrika. Isti raspored materije može, uz drugačije granične uslove, da rezultuje različitim geometrijama prostor-vremena.

Švarcšildova metrika predstavlja rešenje Ajnštajnovih jednačina polja za vakuum u prostoru van stacionarno i sferno simetrično raspoređene materije. U prostoru unutar ove oblasti metrika ima drugačiji oblik, koji zavisi od svojstava prisutne materije. Prostor-vreme se u tom slučaju sastoji iz dva dela - unutrašnje i spoljašnje oblasti koje su međusobno povezane, uz uslov da na granici njihove metrike imaju jednakе vrednosti (uslov da je metrika neprekidna funkcija). Ovaj slučaj realizovan je kod sferno simetričnih zvezda. Ukoliko je, međutim, sva materija koncentrisana u jednoj tački tada Švarcšildovo rešenje važi za celo prostor-vreme. U tom slučaju imamo crnu rupu. Upravo je ovaj slučaj razmatran u ovom radu jer se u njemu mogu sagledati sve osobine ovog rešenja.

Izvođenje Švarcšildovog rešenja i matematički detalji vezani za njega su dati u drugom odeljku ovog rada. U njemu je pokazano kako se ovo rešenje može dobiti polazeći od pretpostavke da je prostor-vreme sferno simetrično i stacionarno. Kao što će kasnije u ovom radu biti pokazano, uz korišćenje Kilingovih vektora, ove simetrije prostor-vremena impliciraju postojanje određenih integrala kretanja. Izračunavanja komponenata tenzora krivine su vršena upotrebom diferencijalnih formi u ortonormiranom bazisu jer se tako izračunavanja pojednostavljaju. Na kraju odeljka dato je i poređenje rezultata sa Njutnovom teorijom gravitacije koje je potrebno da bi se utvrdio fizički smisao integracionih konstanti dobijenih u rešenju. Pokazano je i da je ovo rešenje asimptotski ravno, tj. da ono za veliko r ono prelazi u prostor-vreme Minkovskog.

U trećem odeljku analizirano je kretanje probnih čestica u geometriji Švarcšilda. Probne čestice se u prostor-vremenu kreću duž geodezijskih linija - linija sa ekstremnom vrednošću sopstvene dužine. Svako telo konačne mase m vrši perturbaciju "pozadinske" metrike, tj. prostor-vremena u kome se kreće. Na taj način, svetska linija tela odstupa od geodezika. U idealnom slučaju, metrika u okolini geodezijske linije je metrika Minkovskog. U realnom slučaju, odstupanje od ove metrike zavisi od vrednosti mase tela, njegovog momenta impulsa i viših multipolnih momenata. Ukoliko pređemo na granični slučaj u kome masa tela m teži nuli, putanje su zaista geodezici. U tom slučaju govorimo o probnim česticama.

Jednačine kretanja probne čestice su na ovom mestu dobijene korišćenjem činjenice da telo u prostor-vremenu Švarcšilda poseduje dva integrala kretanja - energiju E i momenat impulsu L . Postojanje ovih integrala kretanja je povezano sa simetrijama prostor-vremena. Kao što je pokazano u *Dodataku C*, ukoliko metrika ne zavisi od neke koordinate x_1 (ciklična koordinata) tada postoji i globalno definisano Kilingovo vektorsko polje K sa osobinom da njegov skalarni proizvod sa impulsom čestice p predstavlja integral kretanja: $K \cdot p = p_1 = \text{const.}$ Švarcšildova metrika ne zavisi od dve koordinate: φ (zbog sferne simetrije) i t (zbog stacionarnosti) pa tako postoje i dva Kilingova vektorska polja K_φ i K_t , i sa njima povezani integrali kretanja L i E .

Pošto se jednačine probnih čestica i svetlosti razlikuju, treći odeljak je podeljen na dva dela. U prvom delu razmatrano je kretanje probnih čestica sa $m \neq 0$. Prvo je analizirano radikalno kretanje čestica (slučaj kada je $L=0$). Kao što je pokazano, koordinatno vreme t

potrebno da čestica dostigne horizont događaja ($r=2m$) je beskonačno. To znači da sa stanovišta posmatrača koji je van crne rupe čestica nikada neće doći do horizonta događaja. Situacija je, međutim, drugačija u sistemu reference čestice. Sopstveno vreme τ potrebno da ona dođe do horizonta događaja je konačno. Ovo ukazuje na to da izbor Švarcšildovih koordinata (t, r, θ, ϕ) nije pogodan u blizini horizonta događaja, što je diskutovano u četvrtom odeljku.

Kretanje čestice u slučaju $L \neq 0$ je analizirano uvođenjem efektivnog potencijala $V^2(r, L)$. Tačke ekstremnih vrednosti ovog potencijala, zajedno sa energijom čestice E , određuju karakter kretanja u geometriji Švarcšilda. Diskutovani su slučajevi kada postoje stabilne orbite. Za slučaj svetlosti ($m=0$) izračunate su jednačine nultih geodezika i pokazano je da se u svakoj tački može definisati konus izbegavanja, čija je generatrisa upravo tangenta na nulti geodezik. Svetlosni zraci koji se nalaze unutar ovog konusa moraju da završe u crnoj rupi (a potom i u singularnosti). Ostali zraci mogu da izbegnu crnu rupu i odu u beskonačnost. Na samom horizontu događaja konus izbegavanja je u potpunosti otvoren (tj. poluotvor mu je π) tako da svi zraci moraju da odu u crnu rupu.

Opšta teorija relativnosti predviđa postojanje singularnosti prostor-vremena. Ovaj rezultat, da jedna teorija predviđa postojanje tačaka u kojima ona prestaje da važi, ne ide u prilog OTR. On ukazuje na ograničenost njene primene i na potrebu za formulisanjem opštije teorije, koja bi bila oslobođena ovakvih inherentnih problema unutar nje same.

Kao što su Hoking i Penrouz nedvosmisleno pokazali, pri izvesnim uslovima u prostor-vremenu mora doći do formiranja singularnosti. Dokaz ove teoreme prepostavlja važenje izvesnih premsa: da je gravitaciona interakcija uvek privlačna, da je energija uvek pozitivna i da ne postoje zatvorene krive vremenskog tipa. Iako ove polazne prepostavke nisu strogo dokazane, teoreme Hokinga i Penrouza ne gube mnogo na svojoj opštosti jer su ove premise intuitivno prihvatljive.

Singularnosti, generalno gledano, mogu biti dva tipa: singularnosti crnih rupa i kosmološke singularnosti (velikog praska ili velikog sažimanja). Singularnost velikog praska je granica prostor-vremena u prošlosti iz koje je nastao naš Univerzum. Svetske linije svih tela u današnjem Univerzumu imaju početak u ovoj singularnosti. Udaljavanje galaksija, prvi put registrovano od strane Habla dvadesetih godina ovog veka, daje velik dokaz u prilog ove tvrdnje. Singularnosti crnih rupa nastaju gravitacionim kolapsom zvezda velikih masa u poslednjem stadijumu njihove evolucije. Ovaj teorijski zaključak, da zvezda sa dovoljno velikom masom mora da se sažme ispod svog gravitacionog radijusa ($r=2m$) kada je njen nuklearno gorivo iscrpljeno, ima i solidnu eksperimentalnu potvrdu u astronomskim posmatranjima. Naime, ukoliko crna rupa obrazuje binarni sistem sa nekom zvezdom, može se očekivati da će deo zvezdane materije biti privučen ka crnoj rupi i oko nje formirati akrecioni disk. Pri tome dolazi do snažne emisije elektromagnetskih talasa. Neki binarni izvori x-zraka imaju ove osobine - *Cygnus X-1*, *LMC X-3* *SS433*... Sličan proces moguće je i kod aktivnih galaktičkih jezgara (AGN). Postoji mogućnost da se i u centru naše galaksije nalazi crna rupa mase $\sim 10^6 M_\odot$ (na mestu centra galaksije se nalazi snažan izvor radio talasa *Sgr A**). Singularnost nastala ovakvim gravitacionim kolapsom je odvojena od ostatka Univerzuma horizontom događaja. Za posmatrača koji je van crne rupe singularnost u njoj je neopservabilna. Postavlja se pitanje da li su sve singularnosti neopservabilne za posmatrače koji se nalaze u beskonačnosti, tj. da li one mogu imati uticaj na spoljni svet. Ovo pitanje je od velike važnosti budući da u singularnosti prestaju da važe zakoni fizike, pa stoga ne možemo predvideti šta sve može iz nje da izade. Penrouz je predložio hipotezu o kosmičkoj cenzuri prema kojoj sve singularnosti moraju biti odvojene horizontom događaja od ostatka Univerzuma. Ova hipoteza za sada nije dokazana, mada je mnogi autori prihvataju.

Crnu rupu u potpunosti karakterišu samo tri parametra: njena masa m , momenat impulsa J i nanelektrisanje Q . Sve ostale informacije o osobinama materije od kojih je crna rupa nastala ostaju izgubljene. Površina crne rupe je u vezi sa njenom entropijom a ova je opet povezana sa temperaturom. Klasična slika o crnim rupama kao o izuzetno stabilnim i većim objektima promenjena je u poslednjih dvadesetak godina. Teorijskim putem je pokazano da, kada se u obzir uzmu i kvantni efekti, crna rupa emituje termalno zračenje pošto poseduje efektivnu temperaturu obrnuto proporcionalnu njenoj masi. Usled emitovanja energije njena masa se smanjuje sve dok crna rupa ne nestane u eksploziji zračenja. Još uvek nije potpuno izvesno šta se pri tome događa sa singularnošću. Odgovori na ovakva i slična pitanja moraće da sačekaju formulaciju kompletne kvantne teorije gravitacije.

U četvrtom odeljku su izloženi motivi za maksimalno analitičko proširivanje Švarcšildove mnogostrukosti. Singularnosti prostor-vremena, generalno gledano, postoje u onim tačkama u kojima nulti geodezici imaju završetak za neku konačnu vrednost afinog parametra. Pored toga, komponente Rimanovog tenzora krivine postaju u ovim tačkama beskonačne. Gravitacioni radius $r=2m$ deluje na prvi pogled kao singularnost - komponenta metrike g_{rr} postaje beskonačna u ovoj tački. Ovo, međutim, nije realna singularnost već samo prividna. Kao što je u radu pokazano, nijedna od komponenata Rimanovog tenzora krivine nije singularna u ovoj tački, kao ni skalar krivine R . Takođe, ni nulti geodezici se ne završavaju na horizontu događaja već nastavljaju svoj put u crnu rupu. Sve ovo ukazuje na to da Švarcšildove koordinate (t, r, θ, ϕ) ne opisuju dovoljno dobro prostor-vreme u blizini horizonta događaja i da je potrebno naći neke pogodnije koordinate koje neće biti singularne. Da bi se ovaj cilj ostvario, prvo je kao primer uzeto Rindlerovo prostor-vreme. Kada se u njemu odrede nulti geodezici, za koordinate se mogu uzeti afini parametri duž njih. Intervali u kojima se nove koordinate nalaze se mogu proširiti i na taj način se prostor-vreme analitički proširuje. Pored ovoga, time je uklonjena i singularnost koja se nalazila u koordinatnom početku. Pokazano je i da je Rindlerovo prostor-vreme u stvari samo deo prostor-vremena Minkovskog. Analogna procedura je zatim primenjena i na Švarcšildovo prostor-vreme. Tako je dobijeno maksimalno analitičko proširenje Švarcšildove mnogostrukosti. Švarcšildove koordinate pokrivaju samo deo celokupnog prostor-vremena. Izražena preko Kruskalovih koordinata, metrika više nije singularna na gravitacionom radiusu. Singularnost u $r=0$ je realna, fizička singularnost jer tu komponente Rimanovog tenzora krivine postaju beskonačne i nulti geodezici imaju završetak, pa se ona ne može ukloniti prelaskom na nove koordinate. Prošireno prostor-vreme poseduje i neke nove osobine koje polazno nije imalo - ono se sastoji od dve singularnosti i dve asimptotske oblasti. Ove singularnosti su linije prostornog tipa. Jedna od njih je singularnost u prošlosti a druga je u budućnosti. Asimptotske oblasti su kauzalno odvojene jedna od druge, tj. nijedan posmatrač ili signal ne može da pređe iz jedne oblasti u drugu.

2. Izvođenje Švarcšildove metrike

Posmatrajmo prostor-vreme van tačkaste mase. Tenzor energije-impulsa je tada jednak nuli

$$T_{\mu\nu} = 0 \quad (2.1)$$

Neka je posmatrano prostor-vreme sferno simetrično i stacionarno (komponente metričkog tenzora $g_{\mu\nu}$ ne zavise od vremena). Metrika koja poseduje ove simetrije može se u opštem slučaju napisati u obliku

$$ds^2 = -e^{2f(r)}dt^2 + e^{2g(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.2)$$

gde su $f(r)$ i $g(r)$ za sada neodredene funkcije. Ovako odabrane koordinate nazivaju se Švarcšildove koordinate. Moguće je uvesti i neke druge koordinatne sisteme koji takođe poseduju sfernu simetriju i koji su stacionarni (npr. izotropne koordinate) ali Švarcšildove koordinate imaju jednostavnu geometrijsku interpretaciju - površina dvodimenzionalne sfere $r=const.$, $t=const.$ jednaka je

$$P = \int (rd\theta)(r\sin\theta d\varphi) = 4\pi r^2 \quad (2.3)$$

odakle se vidi da θ i φ predstavljaju uobičajene ugaone koordinate, dok je r analogno radijusu sfere.

Pošto posmatramo oblast prostor-vremena van tačkaste mase, Ajnštajnovе jednačine za gravitaciono polje imaju sledeći oblik

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (2.4)$$

Komponente Ajnštajnovog tenzora mogu se lako odrediti ukoliko se računaju u ortonormiranom bazisu. Sve veličine računate u ovom bazisu imaju indekse označene kapom. U tom slučaju metrika ima sledeći oblik

$$ds^2 = -(\omega^{\hat{t}})^2 + (\omega^{\hat{r}})^2 + (\omega^{\hat{\theta}})^2 + (\omega^{\hat{\varphi}})^2 \quad (2.5)$$

Bazisne 1-forme su na osnovu (2.2) jednake

$$\omega^{\hat{t}} = e^{f(r)}dt ; \quad \omega^{\hat{r}} = e^{g(r)}dr ; \quad \omega^{\hat{\theta}} = r d\theta ; \quad \omega^{\hat{\varphi}} = r \sin\theta d\varphi \quad (2.6)$$

gde d predstavlja operator spoljašnjeg izvoda Kartana. Pošto postoji uslov ortonormiranosti, koji znači da je skalarni proizvod bazisnih vektora i 1-formi jednak Kronekerovom simbolu

$$\langle \mathbf{e}_{\hat{\mu}}, \omega^{\hat{\nu}} \rangle = \delta_{\hat{\mu}}^{\hat{\nu}} \quad (2.7)$$

mogu se na osnovu ovoga napisati i bazisni vektori

$$\mathbf{e}_{\hat{t}} = e^{-f(r)} \frac{\partial}{\partial t} ; \quad \mathbf{e}_{\hat{r}} = e^{-g(r)} \frac{\partial}{\partial r} ; \quad \mathbf{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} ; \quad \mathbf{e}_{\hat{\varphi}} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.8)$$

Kao što je u *Dodatku A* pokazano, komponente Ričijevog tenzora su, izražene preko funkcija $f(r)$ i $g(r)$, jednake

$$R_{\hat{t}\hat{t}} = e^{-2g(r)} \left[f''(r) - f'(r)g'(r) + (f'(r))^2 + \frac{2f'(r)}{r} \right] \quad (2.9a)$$

$$R_{\hat{r}\hat{r}} = -e^{-2g(r)} \left[f''(r) - f'(r)g'(r) + (f'(r))^2 - \frac{2g'(r)}{r} \right] \quad (2.9b)$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = R_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r} + e^{-2g(r)} (g'(r) - f'(r) - \frac{1}{r}) \right] \quad (2.9c)$$

Vandijagonalne komponente Ričijevog tenzora su jednake nuli. Ričijev skalar krivine R , koji se dobija kontrakcijom Ričijevog tenzora, jednak je

$$\begin{aligned} R = R^{\mu}_{\mu} &= -2e^{-2g(r)} \left[f''(r) - f'(r)g'(r) + (f'(r))^2 \right] \\ &\quad + \frac{2}{r} \left[\frac{1}{r} + e^{-2g(r)} (2g'(r) - 2f'(r) - \frac{1}{r}) \right] \end{aligned} \quad (2.10)$$

Sada se na osnovu definicije Ajnštajnovog tenzora mogu izračunati njegove komponente

$$G_{\hat{t}\hat{t}} = R_{\hat{t}\hat{t}} - \frac{1}{2} g_{\hat{t}\hat{t}} R = \frac{2}{r} g'(r) e^{-2g(r)} + \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2g(r)}) \quad (2.11a)$$

$$G_{\hat{r}\hat{r}} = R_{\hat{r}\hat{r}} - \frac{1}{2} g_{\hat{r}\hat{r}} R = \frac{2}{r} f'(r) e^{-2g(r)} - \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2g(r)}) \quad (2.11b)$$

$$\begin{aligned} G_{\hat{\theta}\hat{\theta}} &= G_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = R_{\hat{\phi}\hat{\phi}} - \frac{1}{2} g_{\hat{\phi}\hat{\phi}} R \\ &= e^{-2g(r)} \left[f''(r) - f'(r)g'(r) + (f'(r))^2 - \frac{1}{r} (g'(r) - f'(r)) \right] \end{aligned} \quad (2.11c)$$

Na osnovu Ajnštajnovih jednačina mogu se komponente Ajnštajnovog tenzora $G_{\mu\nu}$ izjednačiti sa nulom i na taj način dobiti diferencijalne jednačine za $f(r)$ i $g(r)$. Iz jednačine (2.11a) za tt komponentu sledi jednačina za $g(r)$

$$\frac{2}{r} g'(r) e^{-2g(r)} + \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2g(r)}) = 0 \quad (2.12)$$

odakle se dobija

$$\frac{dg(r)}{1 - e^{2g(r)}} = \frac{dr}{r} \quad (2.13)$$

Integracijom ove jednačine dobija se rešenje za $g(r)$

$$g(r) = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{c_1}{r} \right) \quad (2.14)$$

Da bismo odredili drugu nepoznatu funkciju $f(r)$, iskoristićemo jednačinu za rr komponentu Ajnštajnovog tenzora (2.11b)

$$\frac{2}{r} f'(r) e^{-2g(r)} - \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2g(r)}) = 0 \quad (2.15)$$

Uvrštavanjem rešenja za $g(r)$ u ovu jednačinu dobijamo diferencijalnu jednačinu za $f(r)$

$$f'(r) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r - c_1} \right) \quad (2.16)$$

Integracijom ove jednačine dobija se rešenje za $f(r)$

$$f(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{c_1}{r} \right) + \ln c_2 \quad (2.17)$$

Sada kada smo odredili $f(r)$ i $g(r)$ možemo napisati i izraz za metriku:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{c_1}{r} \right) c_2^2 dt^2 + \left(1 - \frac{c_1}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (2.18)$$

Potrebno je još odrediti i integracione konstante c_1 i c_2 . Konstanta c_2 se može jednostavno eliminisati pogodnim izborom jedinice vremena: $t \leftarrow c_2 t$. Da bi se odredilo c_1 potrebno je uspostaviti korespondenciju sa Njutnovom teorijom gravitacije. Rezultati opšte teorije relativnosti u slučaju malih brzina probnih čestica ($v \ll c$) i slabog gravitacionog polja moraju biti u saglasnosti sa rezultatima Njutnove teorije. Prema Njutnovoj teoriji, gravitacioni potencijal u polju tela mase m iznosi:

$$\varphi = -\frac{Gm}{r} \quad (2.19)$$

Ukoliko postoji samo radikalno kretanje ($\theta, \varphi = const.$), ubrzanje probne čestice jednako je:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{Gm}{r^2} \quad (2.20)$$

Prema opštoj teoriji relativnosti, probne čestice se kreću duž geodezijskih linija, pa prema tome njihove jednačine kretanja glase:

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (2.21)$$

gde su Kristofelovi simboli druge vrste, izraženi preko komponenata metričkog tenzora, jednaki:

$$\Gamma_{\nu\lambda}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu\alpha} \left(\frac{\partial g_{\alpha\lambda}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\nu\alpha}}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\alpha} \right) \quad (2.22)$$

Za radikalnu koordinatu r jednačina kretanja, prema (2.21), glasi:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^r \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\lambda}{ds} = 0 \quad (2.23)$$

U njutnovskoj aproksimaciji smatramo da je brzina probne čestice mnogo manja od brzine svetlosti i da je gravitaciono polje slabo. Ovi uslovi se matematički mogu izraziti na sledeći način:

$$\frac{dr}{ds} \ll 1 \quad ; \quad \frac{c_1}{r} \ll 1 \quad (2.24)$$

Izraz za kvadrat linijskog elementa može se u ovoj aproksimaciji (uzimajući u obzir da je $\theta, \varphi = const.$) napisati u obliku:

$$ds^2 = -dt^2 \left[\left(1 - \frac{c_1}{r} \right) - \left(1 - \frac{c_1}{r} \right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 \right] \approx -dt^2 \quad (2.25)$$

Na osnovu predhodna dva izraza, jednačina kretanja za r (2.23) postaje:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\Gamma_{tt}^r \quad (2.26)$$

Da bismo izračunali Γ iskoristićemo njegovu definiciju (2.22), tako da dobijamo:

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{c_1}{r} \right) \frac{c_1}{r^2} \approx \frac{1}{2} \frac{c_1}{r^2} \quad (2.27)$$

Sada možemo napisati jednačinu kretanja za r u njutnovskoj aproksimaciji:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{c_1}{r^2} \quad (2.28)$$

Poređenjem ovog izraza sa jednačinom kretanja u Njutnovoj teoriji (2.20), dobijamo vrednost konstante c_1

$$c_1 = 2Gm \quad (2.29)$$

U dosadašnjim proračunima korišćen je sistem jedinica u kome je $c=1$. Možemo još, jednostavnosti radi, odabrat i $G=1$, pa je tada $c_1=2m$. Švarcšildovu metriku možemo sada napisati u konačnom obliku:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (2.30)$$

Ovo rešenje je jedinstveno za slučaj sfernosimetričnog stacionarnog prostor-vremena (teorema Birkofa). Ovde možemo zapaziti da se u specijalnom slučaju $m=0$ dobija prostor-vreme Minkovskog, što se i moglo očekivati. Takođe, rešenje Švarcšilda je i asimptotski ravno, tj. u beskonačnosti prostornog tipa ono prelazi u prostor-vreme Minkovskog.

Ovo rešenje se može, uopšteno gledano, koristiti za opisivanje dva tipa objekata. U prvom slučaju, kod crnih rupa, rešenje (2.30) se može primeniti za sve vrednosti r , tj. $0 < r < \infty$. U tom slučaju $r=0$ predstavlja singularnost prostor-vremena. Sfera $r=2m$ predstavlja horizont događaja i svaka probna čestica koja se nađe unutar njega ne može ga više napustiti. Rešenje (2.30) je singularno za $r=2m$ (g_{rr} postaje beskonačno), ali ova singularnost je samo prividna - ona je posledica nepovoljno odabranog koordinatnog sistema a ne samog prostor-vremena (detaljnije o ovom problemu u odeljku 4).

U drugom slučaju, npr. kod zvezda i planeta, rešenje (2.30) opisuje prostor-vreme samo izvan tela, tj. za $r > R$, gde je R radijus tela. Unutrašnja oblast mora biti opisana metrikom drugačijeg oblika, koja zavisi od unutrašnjeg sastava tela. U ovom slučaju horizont događaja ne postoji pošto je uvek $R > 2m$. Takođe ne postoji ni singularnost za $r=0$.

3. Kretanje čestica u geometriji Švarcšilda

Fizika je, još od svog početka, proučavala kretanje tela i njegove uzroke, kao i zakonitosti vezane za njega. Prvobitan uspeh Njutnove mehanike bio je vezan za opisivanje kretanja planeta u Sunčevom sistemu. Prihvatanje Ajnštajnove OTR od strane šire naučne zajednice je u velikoj meri bilo uzrokovano njenim uspešnim predviđanjem pomeranja Merkurovog perihela i skretanja zraka svetlosti u polju Sunca. U ovom odeljku ćemo razmatrati kretanje čestica u geometriji Švarcšilda u slučaju kada ona opisuje crnu rupu. Pošto se u okviru OTR kretanje probnih čestica i kretanje svetlosti (i drugih kvanata za koje je $m=0$) obično razmatraju odvojeno, ovaj odeljak je podeljen na dva dela.

3.1 Kretanje probne čestice sa $m \neq 0$

Probne čestice se u gravitacionom polju kreću duž geodezika - linija ekstremne sopstvene dužine. Jednačina geodezika je data u (2.21) i njenim rešavanjem se može dobiti putanja čestice. Putanja se, međutim, može odrediti i koristeći činjenicu da je kvadrat kvadriektora impulsa čestice konstantan i jednak:

$$g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = -\mu^2 \quad (3.1)$$

gde je μ masa čestice. Kao što je u *Dodatu C* pokazano, čestica koja se kreće po geodezijskoj liniji u prostor-vremenu Švarcšilda poseduje dva integrala kretanja: energiju $E = -p_t$ i momenat impulsa $L = p_\phi$. Ukoliko se čestica kreće u ekvatorijalnoj ravni ($\theta = \pi/2$) gornji izraz se u razvijenom obliku, koristeći vrednosti za $g_{\mu\nu}$, može napisati kao:

$$-\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} E^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} + \mu^2 = 0 \quad (3.2)$$

Prema principu ekvivalencije, sve čestice se kreću istovetno, bez obzira na njihovu masu. Stoga možemo uvesti redukovane vrednosti energije \tilde{E} i momenta impulsa \tilde{L} , tako da gornja jednačina postaje:

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) = \tilde{E}^2 \quad (3.3a)$$

$$\tilde{E} \equiv \frac{E}{\mu} ; \quad \tilde{L} \equiv \frac{L}{\mu} ; \quad \tau \equiv \mu \lambda \quad (3.3b)$$

Rešenje ove jednačine, koje daje vezu između r i sopstvenog vremena τ , jednako je:

$$\tau = \int dr \left[\tilde{E}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2}\right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (3.4)$$

Oblik ovog rešenja zavisi naravno od vrednosti parametara \tilde{E} i \tilde{L} . Za početak, posmatrajmo prvo samo čisto radikalno kretanje čestice. Tada je $\tilde{L} = 0$. Jednačina (3.4) se tada uprošćava i glasi:

$$\tau = \int dr \left(\frac{2m}{r} - 1 + \tilde{E}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

U najvišoj tački putanje, tj. za $r=R$ je $(dr/d\tau)=0$ pa je:

$$R = \frac{2m}{1 - \tilde{E}^2} \quad (3.6)$$

Rešenje jednačine (3.5) se može napisati u parametarskom obliku:

$$r = \frac{1}{2} R (1 + \cos \eta) \quad (3.7a)$$

$$\tau = \frac{1}{2} \left(\frac{R^3}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} (\eta + \sin \eta) \quad (3.7b)$$

što predstavlja jednačinu cikloide. U trenutku $\tau=0$ je $r=R$ i $\eta=0$. Sopstveno vreme koje je potrebno čestici da dođe do singularnosti $r=0$ ($\eta=\pi$) je:

$$\tau_0 = \frac{\pi}{2} \left(\frac{R^3}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.8)$$

Zanimljivo je još naći i sopstveno vreme τ_H potrebno da čestica dođe do horizonta događaja. U trenutku prolaska kroz horizont je $r=2m$ i $\eta=\eta_H$ pa imamo:

$$2m = r = \frac{m}{1 - \tilde{E}^2} (1 + \cos \eta_H) = \frac{2m}{1 - \tilde{E}^2} \left(1 - \sin^2 \frac{1}{2} \eta_H \right) \quad (3.9a)$$

$$\eta_H = 2 \arcsin \tilde{E} \quad (3.9b)$$

Vidimo odavde da je τ_H konačno i jednak:

$$\tau_H = \frac{1}{2} \left(\frac{R^3}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} (\eta_H + \sin \eta_H) \quad (3.10)$$

Prema tome, prolazak kroz horizont događaja $r=2m$ ne predstavlja za česticu nikakav poseban događaj. Posmatrač koji se nalazi van crne rupe, međutim, neće imati ovaku sliku. Da bismo ovo pokazali, odredimo prvo koordinatno vreme t u funkciji parametra η . Pošto je $p_r=-E$, imamo da je:

$$\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-1} \tilde{E} \quad (3.11)$$

Uvrštavanjem (3.7a) u ovaj izraz i koristeći (3.9b), dobijamo jednačinu:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{\tilde{E} \cos^2 \frac{1}{2} \eta}{\cos^2 \frac{1}{2} \eta - \cos^2 \frac{1}{2} \eta_H} \quad (3.12)$$

Da bismo eliminisali τ , iskoristimo (3.7b):

$$d\tau = \left(\frac{R^3}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \cos^2 \frac{1}{2} \eta d\eta \quad (3.13)$$

$$\frac{dt}{d\eta} = \tilde{E} \left(\frac{R^3}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{\cos^4 \frac{1}{2} \eta}{\cos^2 \frac{1}{2} \eta - \cos^2 \frac{1}{2} \eta_H} \quad (3.14)$$

Integracijom jednačine (3.14), uz nešto duži račun, dobijamo t u funkciji parametra η :

$$t = \tilde{E} \left(\frac{R^3}{2m} \right)^{\frac{1}{2}} \left[(1 - \tilde{E}^2) \eta + \frac{1}{2} (\eta + \sin \eta) \right] + 2m \ln \left| \frac{\tan \frac{1}{2} \eta_H + \tan \frac{1}{2} \eta}{\tan \frac{1}{2} \eta_H - \tan \frac{1}{2} \eta} \right| \quad (3.15)$$

Odavde vidimo da, kako se čestica približava horizontu $\eta \rightarrow \eta_H$, tako i $t \rightarrow \infty$. Dakle, za posmatrača koji se nalazi van crne rupe čestica nikad neće proći kroz horizont.

Analizirajmo sada slučaj $L \neq 0$. Na ovom mestu pogodno je uvesti efektivni potencijal definisan kao:

$$\tilde{V}^2(r, \tilde{L}) = \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \left(1 + \frac{\tilde{L}^2}{r^2} \right) \quad (3.16)$$

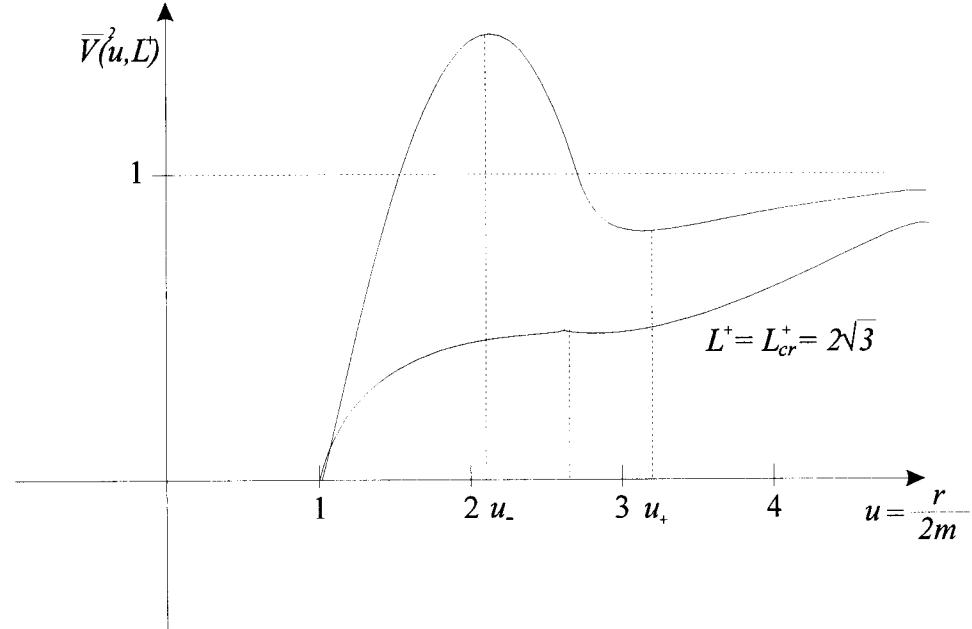
Jednačina kretanja za radijalnu koordinatu r (3.3a) sada postaje:

$$\left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + \tilde{V}^2(r, \tilde{L}) = \tilde{E}^2 \quad (3.17)$$

Iz definicije efektivnog potencijala (3.16) vidimo da se on pri $r \rightarrow \infty$ asimptotski približava 1

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \tilde{V}(r, \tilde{L}) = 1 \quad (3.18)$$

Takođe, \tilde{V}^2 je manje od nule za $r < 2m$, tj. unutar crne rupe, a na samom horizontu ($r=2m$) jednako nuli. Na slici 1 šematski je prikazana zavisnost \tilde{V}^2 od r .



Sl. 1 Efektivni potencijal

Vidimo da karakter kretanja zavisi od vrednosti parametara \tilde{E} i \tilde{L} . Tačke u kojima je $\tilde{V}^2 = \tilde{E}^2$ nazivaju se tačke povratka. U ovim tačkama menja se znak $(dr/d\tau)$ -ukoliko se r smanjivalo, pri nailasku na tačku povratka r će početi da se povećava, i obratno. Pošto je jednačina $\tilde{V}^2 = \tilde{E}^2$ kubna po r , broj tačaka povratka može biti nula, jedan ili dva.

Da bismo odredili lokalne ekstremne vrednosti efektivnog potencijala uvedimo bezdimenziione veličine u i L^+

$$u \equiv \frac{r}{2m} ; \quad L^+ \equiv \frac{\tilde{L}}{m} \quad (3.19a)$$

$$\tilde{V}^2(u, L^+) = 1 - u^{-1} - \frac{1}{4} L^{+2} u^{-3} + \frac{1}{4} L^{+2} u^{-2} \quad (3.19b)$$

Tako dobijamo da su ekstremne vrednosti efektivnog potencijala u tačkama

$$\frac{d}{du} \tilde{V}^2(u, L^+) = 0 = u^{-2} + \frac{3}{4} L^{+2} u^{-4} - \frac{1}{2} L^{+2} u^{-3} \quad (3.20a)$$

$$u_{\pm} = \frac{1}{2} L^+ \left(\frac{1}{2} L^+ \pm \left(\frac{1}{4} L^{+2} - 3 \right)^{\frac{1}{2}} \right) \quad (3.20b)$$

Tačka u_- predstavlja maksimum a u_+ minimum efektivnog potencijala. U tačkama u_+ i u_- mogu da postoje kružne orbite. U tački u_+ orbita je stabilna a u u_- nestabilna jer mala perturbacija može česticu nepovratno da odvede u crnu rupu ili beskonačnost. U slučaju kada je $L^+ = L_{cr}^+ = 2\sqrt{3}$ imamo

$$u_+ = u_- = \frac{1}{4} L_{cr}^{+2} = 3 \quad (3.21)$$

i tada u tački $u=3$ postoji nestabilna kružna orbita. Sada možemo da analiziramo moguća kretanja probne čestice:

1.Slučaj $L^+ > 4$ (tada je maksimum efektivnog potencijala veći od 1)

Ovde postoji globalan maksimum efektivnog potencijala u tački u_- i lokalni minimum u u_+ .

a. Ako je energija čestice veća od maksimuma efektivnog potencijala, tj. $E > V(u_-) = V_M$, čestica će krećući se iz beskonačnosti ka crnoj rupi upasti u nju i završiti u singularnosti (ili će, ukoliko se u početnom trenutku kretala od nje, završiti u beskonačnosti).

b. Ako je $\tilde{V}_M > \tilde{E} > 1$, čestica koja dolazi iz beskonačnosti će doći do tačke povratka i zatim se vratiti nazad u beskonačnost.

c. Za $\tilde{E}^2 < 1$ postoje vezane orbite - čestica se kreće između dve tačke povratka opisujući elipsu čiji perihel vrši precesiju.

d. U tačkama u_+ i u_- postoji nestabilna i stabilna kružna orbita, respektivno.

2.Slučaj $2\sqrt{3} < L^+ < 4$ je kvalitativno isti kao predhodni sa tom razlikom da čestica koja dolazi iz beskonačnosti mora neminovno da završi u crnoj rupi, pošto je za nju $\tilde{E} > 1$.

3.Slučaj $L^+ < 2\sqrt{3}$

Ovde ne postoje vezane orbite - svaka čestica sa $\tilde{E} < 1$ mora da završi u singularnosti.

Na kraju napišimo još i jednačinu orbite, tj. vezu između r i φ . Pošto je $p_\varphi = L$ imamo da je

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\tilde{L}}{r^2} \quad (3.22)$$

Ako ovu jednačinu rešimo po $d\tau$ i uvrstimo u (3.17) dobijamo

$$\left(\frac{\tilde{L}}{r^2} \frac{dr}{d\varphi} \right)^2 + \tilde{V}^2(r) = \tilde{E}^2 \quad (3.23)$$

Uvodeći smenu $v = m/r$ dobijamo jednačinu

$$\left(\frac{dv}{d\varphi} \right)^2 = (L^+)^{-2} \left(\tilde{E}^2 - (1 - 2v)(1 + L^{+2}v^2) \right) \quad (3.24)$$

čijim se rešavanjem može odrediti oblik orbite $r = r(\varphi)$.

3.2 Kretanje fotona

U slučaju fotona (a takođe i za neutrine i gravitone) je $\mu=0$ tako da se veličine \tilde{E} i \tilde{L} ne mogu definisati. Podimo zato od jednačine (3.2). Kada u nju uvrstimo $\mu=0$ dobijamo

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = E^2 \quad (3.25)$$

Uz ovu jednačinu imamo još i da je

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{dt}{d\tau} = E \quad (3.26)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \frac{L}{r^2} \quad (3.27)$$

Uvodeći smenu $u=r^{-1}$ dobijamo jednačinu orbite

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = u^2 (2mu - 1) + b^{-2} \equiv f(u) \quad (3.28)$$

gde je b udarni parametar definisan kao

$$b \equiv \frac{L}{E} \quad (3.29)$$

Analizirajmo prvo najprostiji slučaj - radikalno kretanje fotona $L=0$. Jednačina (3.25) se uprošćava i postaje

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm E \quad (3.30)$$

Elementarnom integracijom se dobija rešenje

$$r = \pm E\tau + r_0 \quad (3.31)$$

Znak + odgovara slučaju kada se foton udaljava od crne rupe a znak – kada ide ka njoj. Da bismo dobili r u funkciji koordinatnog vremena t , uvrstimo (3.30) u (3.26)

$$\frac{dr}{dt} = \pm \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \quad (3.32)$$

Integracijom dobijamo rešenje

$$t = \pm r \pm 2m \ln \left(\frac{r}{2m} - 1 \right) + const. \quad (3.33)$$

Kao i u slučaju masivnih čestica, vidimo da $t \rightarrow \infty$ kako se foton približava horizontu $r=2m$, dok se sa sopstvenim vremenom fotona τ ne događa ništa značajno.

Razmotrimo sada opšti slučaj opisan jednačinom (3.28). Tačke povratka će postojati za one vrednosti u za koje $f(u)$ ima nule. Izvod $f(u)$ je

$$f'(u) = 6mu^2 - 2u \quad (3.34)$$

i ima nulu za $u=(3m)^{-1}$ a ovo će biti i dvostruka nula $f(u)$ ako udarni parametar b ima vrednost

$$b = 3\sqrt{3}m \quad (3.35)$$

Tada se (3.28) može faktorizovati na sledeći način

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 = 2m \left(u + \frac{1}{6m}\right) \left(u - \frac{1}{3m}\right)^2 \quad (3.36)$$

Prema tome, za $r=3m$ postoji kružna orbita. Ukoliko foton iz beskonačnosti nailazi na crnu rupu sa udarnim parametrom $b = 3\sqrt{3}m$ on će spiralno i asimptotski da dostiže kružnu orbitu $r=3m$.

Da bismo utvrdili koji svetlosni zraci će dostići horizont, možemo u svakoj tački definisati konus čija je generatrisa tangenta putanje fotona (3.36). Svi svetlosni zraci koji se nalaze unutar ovog konusa moraju neminovno da dostignu horizont i završe u crnoj rupi. Ostali zraci će izbeći horizont i mogu da odu u beskonačnost. Ako sa ψ označimo poluotvor ovog konusa tada je

$$ctg \psi = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\phi} \quad (3.37)$$

gde je $d\tilde{r}$ element sopstvene dužine koji je jednak

$$d\tilde{r} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} dr \quad (3.38)$$

Kada gornji izraz uvrstimo u (3.37) dobijamo:

$$ctg \psi = \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{1}{u} (1 - 2mu)^{-\frac{1}{2}} \frac{du}{d\phi} \quad (3.39)$$

gde je $u=1/r$. U ovu jednačinu možemo uvrstiti $du/d\phi$ iz (3.36) i dobiti

$$ctg \psi = \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{6m} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{3m} - 1\right) \quad (3.40)$$

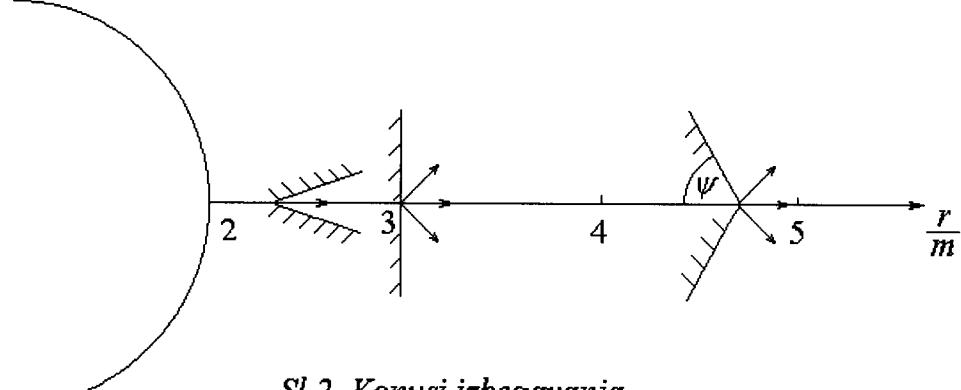
odnosno

$$tg \psi = \left(\frac{r}{2m} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{6m} + 1\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{r}{3m} - 1\right)^{-1} \quad (3.41)$$

Odavde se vidi da je

$$\psi \approx 3\sqrt{3} \frac{m}{r} \quad \text{za } r \rightarrow \infty \quad (3.42)$$

Dakle, za veliko r konus je uzak i poluprečnik mu je $3\sqrt{3}m$. Za $r=3m$ konus je otvoren ($\psi=\pi/2$) a na samom horizontu $r=2m$ je $\psi=\pi$ i svetlosni signal ne može da izbegne crnu rupu. Na slici 2 su prikazani konusi za neke vrednosti r .



Sl 2. Konusi izbegavanja

4. Maksimalno analitičko proširenje Švarcšildove mnogostrukosti

Gravitacioni radijus $r=2m$ nije izazivao veliku pažnju istraživača u prvim godinama posle Švarcšildovog izvođenja metrike, koja nosi njegovo ime, 1916 godine. Smatralo se da se nijedno telo ne može sabiti do svog gravitacionog radijusa, tako da je on smatrana kao fizički irelevantan. Pored toga, koordinatno vreme potrebno čestici da dođe do njega, u slučaju da on ipak postoji, je beskonačno. Uz sve ovo, korišćen je i pogrešan termin Švarcšilda "singularnost". Čak je i Ajnštajn pri formulaciji Ajnštajn-Roznovog mosta 1935 smatrao da u $r=2m$ postoji fizička singularnost i u cilju njenog uklanjanja je i uveo taj model. Prvi koji je shvatio da je "singularnost" $r=2m$ samo posledica koordinatnog sistema a ne realan objekat, bio je Lemetr koji je 1933 godine napisao:

"Singularnost Švarcšilda je samo fiktivna, ona je analogna sa slučajem postojanja horizonta u univerzumu de Sitera."

(Lemaitre, 1933)

Rimanov tenzor krivine $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$ nije singularan u $r=2m$, u šta se možemo uveriti izračunavanjem jedne njegove tipične komponente

$$R_{\hat{r}\hat{r}\hat{r}\hat{r}} = -\frac{2m}{r^3} \quad (4.1)$$

Slični izrazi se dobijaju i za ostale komponente.

Generalno gledano, singularnosti postoje u onim tačkama gde nulti geodezici imaju završetak za neku konačnu vrednost afinog parametra. Čak i ako je $R^{\mu}_{\nu\alpha\beta}$ konačno u nekoj tački, singularnost u njoj može da postoji. Ukoliko postoji singularnost koja nije fizička, već je samo posledica odabranog koordinatnog sistema, ona se može otkloniti prelaskom na nove koordinate i analitičkim proširivanjem date mnogostrukosti.

Uzmimo kao primer prostor-vreme Rindlera

$$ds^2 = -x^2 dt^2 + dx^2 \quad (4.2)$$

Ovde se koordinate nalaze u intervalu $-\infty < t < \infty$ i $0 < x < \infty$. Komponenta metričkog tensora g_{tt} jednaka je nuli za $x=0$, pa je g^t_t singularno u toj tački. Skalar krivine R jednak je nuli i stoga nije singularan, što nam govori da je singularnost samo posledica odabranog koordinatnog sistema. Potrebno je dakle uvesti novi koordinatni sistem koji će biti slobodan od singularnosti. U tu svrhu možemo iskoristiti nulte geodezike. Afini parametar duž nultog geodezika možemo uzeti za novu koordinatu. U dvodimenzionalnom prostor-vremenu nulti geodezici mogu biti dve vrste: oni koji "dolaze" ("ingoing") i oni koji "odlaze" ("outgoing"). Unutar jedne vrste, dva različita nulta geodezik se ne mogu seći jer u tački preseka njihove tangente moraju da se poklapaju, što bi značilo i da se svuda poklapaju i da je to isti taj geodezik. U Rindlerovom prostor-vremenu nulti geodezici se mogu odrediti iz jednačine

$$g_{\mu\nu} k^\mu k^\nu = -x^2 \left(\frac{dt}{d\lambda} \right)^2 + \left(\frac{dx}{d\lambda} \right)^2 = 0 \quad (4.3)$$

gde je k^μ tangentni vektor na geodezik. Odavde sledi jednačina

$$\left(\frac{dt}{dx} \right)^2 = \frac{1}{x^2} \quad (4.4)$$

čijom integracijom dobijamo jednačine nultih geodezika

$$t = \pm \ln x + const. \quad (4.5)$$

Znak + odgovara geodezicima koji "odlaze" ("outgoing") a znak - onima koji "dolaze" ("ingoing"). Sada možemo definisati nulte koordinate (u, v) na sledeći način

$$u = t - \ln x \quad (4.6a)$$

$$v = t + \ln x \quad (4.6b)$$

Metrika u ovim koordinatama glasi

$$ds^2 = -e^{v-u} dudv \quad (4.7)$$

Koordinate (u, v) se nalaze u intervalu $-\infty < u < \infty$ i $-\infty < v < \infty$ i još uvek pokrivaju samo oblast $x > 0$. Mi treba da nađemo koordinate koje će pokrivati celo prostor-vreme. Te koordinate možemo da definišemo kao afini parametar duž nultih geodezika. Da bismo našli ovaj afini parametar, iskoristićemo činjenicu da Rindlerovo prostor-vreme poseduje Kilingov vektor $K = \partial/\partial t$. Tada je E integral kretanja

$$\begin{aligned} E &= -K \cdot p = -K_\alpha p^\alpha = -g_{\alpha\beta} K^\alpha p^\beta \\ &= -g_{tt} \frac{dt}{d\lambda} = x^2 \frac{dt}{d\lambda} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Ako u ovaj izraz uvrstimo vrednosti za t i x , dobijene inverznom transformacijom izraza (4.6)

$$t = \frac{1}{2}(u + v) \quad (4.9a)$$

$$x = e^{\frac{1}{2}(v-u)} \quad (4.9b)$$

dobijamo afini parametar duž geodezika koji "odlazi" (uzimajući pri integraciji da je $u = \text{const.}$)

$$\lambda = \frac{1}{2E} \int e^{v-u} dv = \frac{e^{-u}}{2E} e^v + \text{const.} \quad (4.10)$$

Prema tome, afini parametar duž nultog geodezika koji "odlazi" je $\lambda_{\text{out}} = e^v$. Na sličan način možemo dobiti i afini parametar duž nultog geodezika koji "dolazi" $\lambda_{\text{in}} = -e^{-u}$ (ovoga puta smo pri integraciji uzeli $v = \text{const.}$). Sada možemo da definišemo nove koordinate (U, V) kao affine parametre duž nultih geodezika

$$U = \lambda_{\text{in}} = -e^{-u} \quad (4.11a)$$

$$V = \lambda_{\text{out}} = e^v \quad (4.11b)$$

Metrika sada postaje

$$ds^2 = -dUdV \quad (4.12)$$

U Rindlerovom prostor-vremenu koordinate (U, V) uzimaju vrednosti $U < 0$ i $V > 0$. Metrika (4.12) više nije singularna za $U=0$ ili $V=0$, tako da njihov interval možemo proširiti na $-\infty < U < \infty$ i $-\infty < V < \infty$. Ako sa nultih koordinata (U, V) pređemo na nove, definisane kao

$$T = \frac{1}{2}(U + V) \quad (4.13a)$$

$$X = \frac{1}{2}(V - U) \quad (4.13b)$$

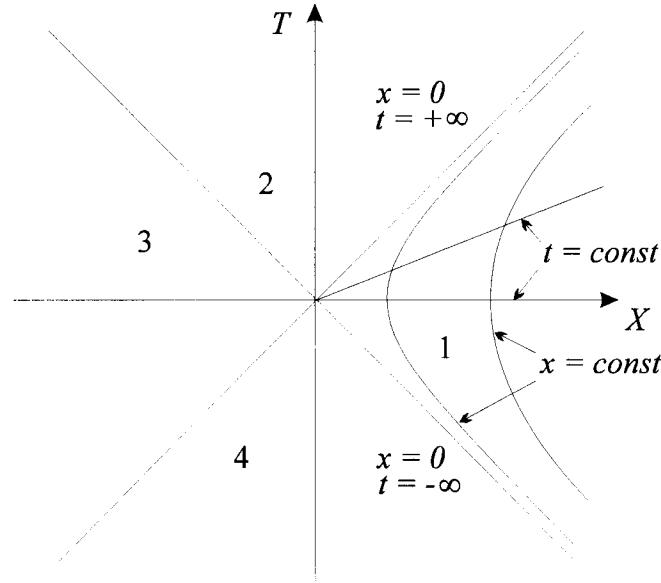
dobijamo metriku

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2 \quad (4.14)$$

koja predstavlja prostor-vreme Minkovskog. Koordinate (t, x) su u vezi sa koordinatama Minkovskog (T, X) preko izraza

$$x = (X^2 - T^2)^{\frac{1}{2}} \quad (4.15a)$$

$$t = th^{-1}\left(\frac{T}{X}\right) \quad (4.15b)$$



Sl.3 Prostor-vreme Minkovskog i Rindlerovo prostor-vreme

Na Slici 3 je prikazano prostor-vreme Minkovskog (T, X) , gde se koordinate nalaze u intervalu $-\infty < T < \infty$ i $-\infty < X < \infty$. Vidi se da je Rindlerovo prostor-vreme samo jedan njegov deo, određen uslovom $X > |T|$.

Slična procedura se može ponoviti i u slučaju Švarcšildovog prostor-vremena. Za razliku od Rindlerovog, ovo prostor-vreme je četvorodimenzionalno, ali zbog sferne simetrije možemo analizirati samo njegov (t, r) deo

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}dr^2 \quad (4.16)$$

I u ovom slučaju analiziramo jednačinu nultih geodezika

$$0 = g_{\mu\nu}k^\mu k^\nu = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)\left(\frac{dt}{d\lambda}\right)^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 \quad (4.17)$$

odakle dobijamo

$$\left(\frac{dt}{dr}\right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-2} \quad (4.18)$$

Rešavanjem ove jednačine dobijamo radikalne nulte geodezike

$$t = \pm r_* + const. \quad (4.19)$$

gde je Rege-Vilerova koordinata r_* definisana kao

$$\frac{dr_*}{dr} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \quad (4.20a)$$

$$r_* = r + 2m \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right) \quad (4.20b)$$

Nulte koordinate (u, v) definišemo na sledeći način

$$u = t - r_* \quad (4.21a)$$

$$v = t + r_* \quad (4.21b)$$

Metrika (4.16) tako postaje

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dudv \quad (4.22)$$

gde je r funkcija od u i v implicitno data sa

$$r + 2m \ln\left(\frac{r}{2m} - 1\right) = r_* = \frac{1}{2}(v - u) \quad (4.23)$$

Koristeći ovu vezu, metriku (4.22) možemo napisati i u sledećem obliku

$$ds^2 = -\frac{2m}{r} e^{-\frac{r}{2m}} e^{\frac{1}{4m}(v-u)} dudv \quad (4.24)$$

Vidimo da ova metrika više nije singularna za $r=2m$. Da bismo odredili afini parametar duž nultog geodezika, ponovo koristimo činjenicu da prostor-vreme Švarcšilda poseduje Kilingov vektor $K=\partial/\partial t$ i da je stoga energija E integral kretanja

$$\begin{aligned} E &= -K \cdot p = -g_{\mu\nu} K^\mu p^\nu = -g_{tt} \frac{dt}{d\lambda} \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{dt}{d\lambda} \end{aligned} \quad (4.25)$$

Uvrštavajući ovde t iz (4.21) i uzimajući $v=const.$, dobijamo afini parametar

$$\lambda = \frac{e^{-\frac{r}{2m}}}{Er} \int e^{\frac{1}{4m}(v-u)} du = -\frac{4me^{-\frac{r}{2m}} e^{\frac{v}{4m}}}{Er} e^{-\frac{u}{4m}} + const. \quad (4.26)$$

Izraz ispred člana $-e^{-u/4m}$ je monotono rastuća funkcija od u . Ovo se može pokazati na sledeći način. Iz (4.21) dobijamo da je $u=v-2r_*$, pa prema tome u monotono opada sa r_* . Sa druge strane, r_* je monotono rastuća funkcija od r (na osnovu (4.20b)), tako da je $u(r)$ monotono opadajuća funkcija. Pošto izraz ispred $-e^{-u/4m}$ očigledno monotono opada sa r , on će monotono da raste sa u . Afni parametar λ je dakle proizvod dve monotono rastuće funkcije od u i samim tim raste sa u . Dakle, možemo uzeti da je afni parametar duž geodezika koji "odlazi" $\lambda_{out}=-e^{-u/4m}$ jer i u ovom slučaju tok funkcije ostaje isti. Slično se dobija i afni parametar duž geodezika koji "dolazi" $\lambda_{in}=e^{v/4m}$. Konačno, uvedimo nove koordinate (U,V) na osnovu ovih afnih parametara

$$U = \lambda_{out} = -e^{-\frac{u}{4m}} \quad (4.27a)$$

$$V = \lambda_{in} = e^{\frac{v}{4m}} \quad (4.27b)$$

i metrika postaje

$$ds^2 = -\frac{32m^3}{r} e^{-\frac{r}{2m}} dU dV \quad (4.28)$$

Singularnost za $r=2m$ ($U=0$ ili $V=0$) više ne postoji, tako da Švarcšildovo prostor-vreme možemo proširiti uzevši da U i V uzimaju sve moguće vrednosti za koje je zadovoljen uslov $r>0$. Singularnost u $r=0$ i dalje postoji i ona se ne može ukloniti koordinatnim transformacijama jer je fizička i realno postoji. Sa nultih koordinata (U,V) možemo preći na Kruskalove (\tilde{u}, \tilde{v}) , definisane sa

$$\tilde{u} = \frac{1}{2}(U + V) \quad (4.29a)$$

$$\tilde{v} = \frac{1}{2}(V - U) \quad (4.29b)$$

Tako konačno dobijamo maksimalno analitičko proširenje Švarcšildove mnogostrukosti u Kruskalovim koordinatama

$$ds^2 = \frac{32m^3}{r} e^{\frac{r}{2m}} (-d\tilde{u}^2 + d\tilde{v}^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4.30)$$

Veza Švarcšildovih (t, r) sa novim koordinatama (\tilde{u}, \tilde{v}) je

$$\left(\frac{r}{2m} - 1 \right) e^{\frac{r}{2m}} = \tilde{u}^2 - \tilde{v}^2 \quad (4.31a)$$

$$\frac{t}{4m} = th^{-1} \left(\frac{\tilde{v}}{\tilde{u}} \right) \quad (4.31b)$$

Fizička singularnost $r=0$ se nalazi na mestu gde je $\tilde{v}^2 - \tilde{u}^2 = 1$, tako da sada postoje zapravo dve singularnosti

$$\tilde{v} = +\left(1 + \tilde{u}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.32a)$$

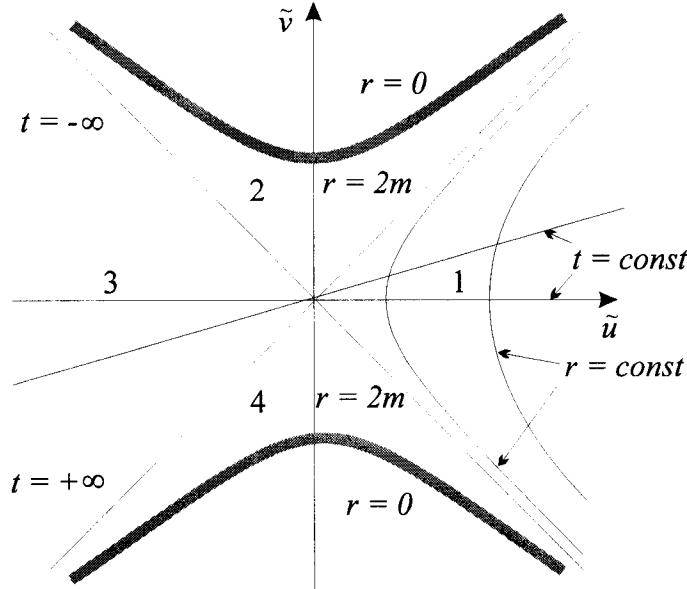
$$\tilde{v} = -\left(1 + \tilde{u}^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.32b)$$

Pored toga, proširena mnogostruktost sadrži i dve asimptotske oblasti. U Švarcšildovim koordinatama asimptotska oblast je data uslovom $r \gg 2m$. U ovom slučaju taj uslov glasi $\tilde{u}^2 \gg \tilde{v}^2$, tako da imamo i dve asimptotske oblasti

$$\tilde{u} \gg +|\tilde{v}| \quad (4.33a)$$

$$\tilde{u} \ll -|\tilde{v}| \quad (4.33b)$$

Kruskalov dijagram prikazuje ukupno četiri oblasti.



Sl.4 Kruskalov dijagram

Koordinate θ i ϕ nisu prikazane na Kruskalovom dijagramu, tako da svaka tačka predstavlja dvodimenzionalnu sferu poluprečnika r .

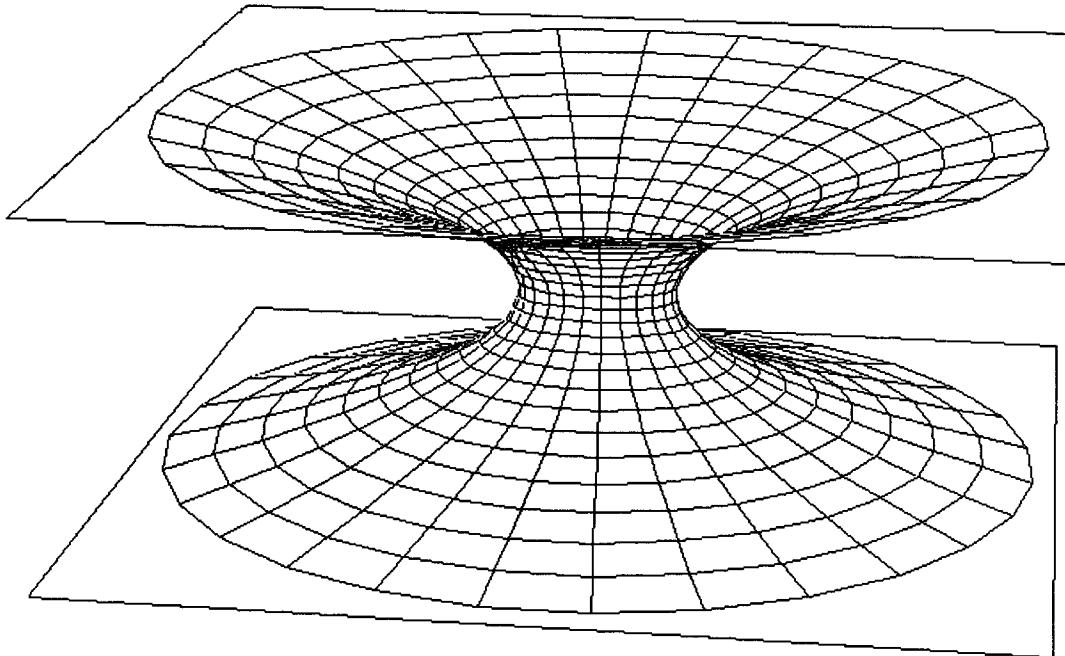
Oblasti 1 i 3 su van gravitacionog radijusa ($r>2m$) a oblasti 2 i 4 unutar njega ($r<2m$). Singularnosti u $r=0$ su linije prostornog a ne vremenskog tipa kako bi se moglo očekivati analizirajući Švarcšildove koordinate (t,r) . Kada posmatrač iz asimptotske oblasti prođe kroz horizont događaja i uđe u crnu rupu (oblast 2) ne može je više napustiti i mora završiti u singularnosti za neko konačno sopstveno vreme. Švarcšildove koordinate (t,r) pokrivaju samo oblasti 1 i 2, odakle se vidi da su nekompletne jer opisuju samo deo celokupne mnogostrukosti. Radijalni nulti geodezici su prave linije pod uglom 45° u odnosu na koordinatne ose, što se može dobiti iz uslova $ds^2=0$, odakle je

$$d\tilde{u} = \pm d\tilde{v} \quad (4.34)$$

Iz ovoga se može zaključiti da svi vektori vremenskog tipa (timelike) zaklapaju sa vertikalnom osom ugao manji od 45° . Slično tome, vektori prostornog tipa (spacelike) su pod uglom većim od 45° u odnosu na \tilde{v} osu. Sa Kruskalovog dijagrama se još može zaključiti da posmatrač koji se nalazi u jednoj od asimptotskih oblasti ne može da pređe u drugu jer ne postoji kriva vremenskog tipa koja povezuje ove dve oblasti.

Gornja diskusija obuhvata, uopšteno gledano, dva različita slučaja.

U prvom slučaju, prostor-vreme je kompletno proširenje Švarcšildovog rešenja i sadrži sve četiri oblasti sa Kruskalovog dijagrama. Ono sadrži dve singularnosti - jednu u budućnosti (oblast 2) i jednu u prošlosti (oblast 4). Dve identične asimptotski ravne oblasti povezane su 'grlo' koje se obično naziva Ajnštajn-Rozenov 'most'. Ovo se najbolje može videti ako se neka hiperpovrš $t=const.$ (recimo $t=0$) 'uroní' u trodimenzionalni Euklidov prostor. Tada dobijamo površ prikazanu na slici.



Sl. 5 Ajnštajn-Rozenov most

Koordinata θ ovde nije prikazana pa tako svaka kružnica $r=const.$ predstavlja u stvari sferu. Najuži deo mosta je sfera $r=2m$. Ona je granica između dva univerzuma. Iako se sa slike čini da bi posmatrač iz jedne asimptotske oblasti mogao da pređe u drugu, to nije ostvarivo. Sa povećanjem t 'grlo' se prvo sužava, zatim zatvara i na kraju nestaje, ostavljajući asimptotske oblasti odvojene jednu od druge. Nastajanje i nestanak mosta ima oscilatorni karakter. Posmatrač koji bi pokušao da kroz most pređe u drugu oblast bi ušao u crnu rupu i završio u singularnosti. Ovaj model sa dve singularnosti i dve asimptotske oblasti verovatno ne odgovara realnom slučaju u našem univerzumu. Jednačine polja u OTR su diferencijalne jednačine i one lokalno određuju prostor-vreme. Njima je još potrebno

dodati početne i granične uslove. Da bismo dobili maksimalno prošireno Švarcšildovo rešenje, potrebno je kao početan uslov uzeti postojanje dve asimptotski ravne oblasti i inicijalne singularnosti (u oblasti 4). Ne postoji razlog za verovanje da su u nekoj oblasti univerzuma postojali tako posebni početni uslovi.

Realna situacija više odgovara drugom slučaju - da inicijalna singularnost ne postoji, već samo singularnost u budućnosti i da je ona nastala gravitacionim kolapsom neke zvezde. U ovom slučaju postoje samo oblasti 1 i 2. Unutar kolapsirajuće zvezde je $T_{\mu\nu} \neq 0$ tako da u toj oblasti metrika nije Švarcšilda već ima neki drugi oblik koji zavisi od unutrašnje strukture zvezde.

Kada zvezda potroši svoje nuklearno gorivo (sav vodonik je fuzionisan u helijum), ona počinje da se hlađi i skuplja. Skupljanje će se zaustaviti kada se pritisak degenerisanog elektronskog gasa izjednači sa gravitacionom silom. Takva zvezda će postati beli patuljak. Beli patuljci, međutim, ne mogu imati masu veću od neke kritične vrednosti (Čandrasekarova granica $M \approx 1.3M_S$ (Chandrasekhar 1930)), jer pritisak degenerisanog elektronskog gasa ne može da spreči sažimanje usled privlačne gravitacione sile. Ukoliko je masa zvezde veća od Čandrasekarove granice, ona će nastaviti da se sažima. Pri tome ona može da eksplodira (i postane supernova) i tako se oslobođi viška mase. Tada će zvezda postati neutronska zvezda, jer dolazi do reakcije neutronizacije $p + e^- \rightarrow n + \nu$. U ovom slučaju dalje sažimanje sprečava pritisak degenerisanog neutronskog gasa (koji je veći od pritiska degenerisanog elektronskog gasa). Gustina neutronske zvezde je izuzetno velika - reda veličine 10^{18} kg/m^3 , a njen radijus vrlo mali $R \approx 10 \text{ km}$. Kao i u slučaju belih patuljaka, postoji maksimalna masa koju neutronska zvezda može imati - granica Openhajmer-Volkova $M \approx 0.7M_S$. Ukoliko, međutim, zvezda mase nekoliko Sunčevih masa (ili veće) ne uspe da se oslobođi viška mase, njen radijus će se smanjiti na vrednost manju od njenog gravitacionog radijusa ($R = 2M$) i zvezda će postati crna rupa.

Do sada je razmatran slučaj idealizovanog sferno simetričnog gravitacionog kolapsa. U realnosti, većina zvezda nije potpuno sferno simetrična, a pored toga poseduje i izvestan momenat impulsa. Postavlja se pitanje da li se i u tom slučaju može formirati crna rupa? Teoreme o singularnostima Hokinga i Penrouza potvrđuju da je pri izvesnim pretpostavkama (važenje opšte teorije relativnosti, pozitivnost gustine energije) formiranje crne rupe neizbežno. Metodama teorije perturbacija (Price 1972), pokazano je da pri gravitacionom kolapsu koji malo odstupa od sferne simetrije takođe dolazi do formiranja singularnosti koja je izolovana horizontom događaja od ostatka Univerzuma.

Ideja o postojanju crnih rupa je stara oko 200 godina. U tom periodu se ova ideja razvijala od spekulacije do egzaktnog matematičkog formalizma. Paralelno sa teorijom su napredovala i astronomska posmatranja. Do sada je otkriven izvestan broj astrofizičkih objekata koji bi mogli da sadrže crne rupe. Ukoliko crna rupa obrazuje binarni sistem sa nekom zvezdom, može se očekivati da će deo zvezdane materije biti privučen ka crnoj rupi i oko nje formirati disk. Pri tome dolazi do snažne emisije elektromagnetnih talasa. Neki binarni izvori x-zraka imaju ove osobine - *Cygnus X-1*, *LMC X-3*, *SS433*.... Sličan proces je moguć i kod aktivnih galaktičkih jezgara (AGN). Postoji mogućnost da se i u centru naše galaksije nalazi crna rupa mase $\sim 10^6 M_S$ (na mestu centra galaksije se nalazi snažan izvor radio talasa *Sgr A**).

Dodatak A

Komponente Ričijevog tenzora u slučaju sferno simetrične metrike

Stacionarna sferno simetrična metrika može se napisati u obliku

$$ds^2 = -e^{2f(r)}dt^2 + e^{2g(r)}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (\text{A.1})$$

Da bismo lakše odredili komponente Ričijevog tenzora možemo preći u ortonormirani bazis u kome metrika ima oblik

$$ds^2 = -(\omega^{\hat{t}})^2 + (\omega^{\hat{r}})^2 + (\omega^{\hat{\theta}})^2 + (\omega^{\hat{\phi}})^2 \quad (\text{A.2})$$

gde su bazisne 1-forme

$$\omega^{\hat{t}} = e^{f(r)}\mathbf{d}t \quad ; \quad \omega^{\hat{r}} = e^{g(r)}\mathbf{d}r \quad (\text{A.3a})$$

$$\omega^{\hat{\theta}} = r\mathbf{d}\theta \quad ; \quad \omega^{\hat{\phi}} = r\sin\theta\mathbf{d}\varphi \quad (\text{A.3b})$$

Prema definiciji, Ričijev tenzor se dobija kontrakcijom Rimanovog tenzora

$$R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu} \quad (\text{A.4})$$

Komponente Rimanovog tenzora su u vezi sa 2-formama krivine na sledeći način

$$\mathfrak{R}^\mu{}_\nu = R^\mu{}_{\nu|\alpha\beta}\omega^\alpha \wedge \omega^\beta \quad (\text{A.5})$$

Vertikalne linije označavaju da se sumiranje po indeksima α i β vrši samo za $\alpha < \beta$. Dakle, potrebno je odrediti šest 2-formi krivine u ortonormiranom bazisu. One se mogu odrediti koristeći izraz

$$\mathfrak{R}^\mu{}_\nu = \mathbf{d}\omega^\mu{}_\nu + \omega^\mu{}_\alpha \wedge \omega^\alpha{}_\nu \quad (\text{A.6})$$

gde je

$$\omega_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(c_{\mu\nu\alpha} + c_{\mu\alpha\nu} - c_{\nu\alpha\mu})\omega^\alpha \quad (\text{A.7a})$$

$$\omega_{\mu\nu} = -\omega_{\nu\mu} \quad (\text{A.7b})$$

Koeficijenti $c_{\mu\nu\alpha}$ se mogu odrediti koristeći

$$\mathbf{d}\omega^\alpha = -c_{[\mu\nu]}{}^\alpha \omega^\mu \wedge \omega^\nu \quad (\text{A.8})$$

Ovi koeficijenti su antisimetrični po prva dva indeksa

$$c_{\mu\nu}{}^\alpha = -c_{\nu\mu}{}^\alpha \quad (\text{A.9})$$

Delovanjem operatora \mathbf{d} na bazisne 1-forme (A.3) dobijamo vrednosti za koeficijente

$$c_{\hat{t}\hat{r}}{}^{\hat{t}} = f'(r)e^{-g(r)} \quad ; \quad c_{\hat{r}\hat{\theta}}{}^{\hat{\theta}} = -\frac{1}{r}e^{-g(r)} \quad (\text{A.10a})$$

$$c_{\hat{r}\hat{\phi}}{}^{\hat{\phi}} = -\frac{1}{r}e^{-g(r)} \quad ; \quad c_{\hat{\theta}\hat{\phi}}{}^{\hat{\phi}} = -\frac{1}{r}ctg\theta \quad (\text{A.10b})$$

Ostali koeficijenti su jednaki nuli, izuzev onih koji se iz (A.10) mogu dobiti na osnovu svojstva antisimetrije. Sada kada znamo koeficijente $c_{\mu\nu\alpha}$ možemo iz (A.7a) naći $\omega_{\mu\nu}$

$$\omega_{\hat{t}\hat{r}} = -\omega_{\hat{r}\hat{t}} = -f'(r)e^{f(r)-g(r)}\mathbf{d}t \quad (\text{A.11a})$$

$$\omega_{\hat{r}\hat{\theta}} = -\omega_{\hat{\theta}\hat{r}} = -e^{-g(r)}\mathbf{d}\theta \quad (\text{A.11b})$$

$$\omega_{\hat{r}\hat{\phi}} = -\omega_{\hat{\phi}\hat{r}} = -\sin\theta e^{-g(r)}\mathbf{d}\varphi \quad (\text{A.11c})$$

$$\omega_{\hat{\theta}\hat{\phi}} = -\omega_{\hat{\phi}\hat{\theta}} = -\cos\theta \mathbf{d}\varphi \quad (\text{A.11d})$$

Korišćenjem izraza (A.6) dobijamo 2-forme krivine

$$\mathfrak{R}^{\hat{r}\hat{r}} = -e^{-2g(r)} [f''(r) - f'(r)g'(r) + (f'(r))^2] \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{r}} \quad (\text{A.12a})$$

$$\mathfrak{R}^{\hat{r}\hat{\theta}} = -\frac{1}{r} f'(r) e^{-2g(r)} \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} \quad (\text{A.12b})$$

$$\mathfrak{R}^{\hat{r}\hat{\phi}} = \frac{1}{r} g'(r) e^{-2g(r)} \omega^{\hat{r}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} \quad (\text{A.12c})$$

$$\mathfrak{R}^{\hat{\theta}\hat{\theta}} = \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2g(r)}) \omega^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\theta}} \quad (\text{A.12d})$$

$$\mathfrak{R}^{\hat{\theta}\hat{\phi}} = \frac{1}{r} g'(r) e^{-2g(r)} \omega^{\hat{\theta}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} \quad (\text{A.12e})$$

$$\mathfrak{R}^{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -\frac{1}{r} f'(r) e^{-2g(r)} \omega^{\hat{\phi}} \wedge \omega^{\hat{\phi}} \quad (\text{A.12f})$$

Poređenjem ovih izraza sa (A.5) možemo odrediti komponente Rimanovog tenzora

$$R^{\hat{t}\hat{r}\hat{r}} = R^{\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = -e^{-2g(r)} [f''(r) - f'(r)g'(r) + (f'(r))^2] \quad (\text{A.13a})$$

$$R^{\hat{t}\hat{\theta}\hat{\theta}} = R^{\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = -\frac{1}{r} f'(r) e^{-2g(r)} \quad (\text{A.13b})$$

$$R^{\hat{r}\hat{\theta}\hat{\theta}} = R^{\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = \frac{1}{r} g'(r) e^{-2g(r)} \quad (\text{A.13c})$$

$$R^{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\phi}} = \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2g(r)}) \quad (\text{A.13d})$$

Sve ostale komponente Rimanovog tenzora su jednake nuli, izuzev onih koje slede iz (A.13) na osnovu simetrija ovog tenzora

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\mu\nu[\alpha\beta]} \quad (\text{A.14a})$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{[\mu\nu]\alpha\beta} \quad (\text{A.14b})$$

$$R_{\mu[v\alpha\beta]} = 0 \quad (\text{A.14c})$$

$$R_{\mu\nu\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\mu\nu} \quad (\text{A.14d})$$

Konačno, kontrakcijom Rimanovog tenzora dobijamo komponente Ričijevog tenzora u ortonormiranom bazisu

$$R_{\hat{r}\hat{r}} = e^{-2g(r)} \left[f''(r) - f'(r)g'(r) + (f'(r))^2 + \frac{2f'(r)}{r} \right] \quad (\text{A.15a})$$

$$R_{\hat{r}\hat{\theta}} = -e^{-2g(r)} \left[f''(r) - f'(r)g'(r) + (f'(r))^2 - \frac{2g'(r)}{r} \right] \quad (\text{A.15b})$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = R_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r} + e^{-2g(r)} (g'(r) - f'(r) - \frac{1}{r}) \right] \quad (\text{A.15c})$$

Vandijagonalne komponente Ričijevog tenzora su jednake nuli.

Dodatak B

Rešenje u slučaju kada postoji kosmološka konstanta

Kosmološku konstantu je uveo Ajnštajn 1917 da bi mogao da formuliše statički kosmološki model. On je primetio da u jednačine polja može da se doda član oblika $\Lambda g_{\mu\nu}$ a da pri tome njihova divergencija i dalje ostane jednaka nuli (jer je uvek $g_{\mu\nu;\nu}=0$). Jednačine polja u tom slučaju glase

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (\text{B.1})$$

Pošto tražimo rešenje u odsustvu materije, jednačine polja su u našem slučaju

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{B.2})$$

I ovde tražimo rešenje koje je statičko i sferno simetrično, tako da je metrika oblika

$$ds^2 = -e^{2f(r)} dt^2 + e^{2g(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{B.3})$$

Ukoliko iskoristimo tt komponentu jednačina polja (B.2)

$$R_{\hat{t}\hat{t}} - \frac{1}{2} R + \Lambda = 0 \quad (\text{B.4})$$

i rezultat (A.15a) za komponente Ričijevog tenzora, dobijamo diferencijalnu jednačinu za $g(r)$

$$g'(r) + \left(\frac{1}{2r} - \frac{1}{2} r \Lambda \right) e^{2g(r)} - \frac{1}{2r} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Smenom $z(r) = e^{-2g(r)}$ ova jednačina postaje linearna diferencijalna jednačina

$$z'(r) + \frac{z(r)}{r} = \frac{1}{r} - r \Lambda \quad (\text{B.6})$$

čije je rešenje

$$z(r) = 1 - \frac{1}{3} \Lambda r^2 - \frac{c_1}{r} \quad (\text{B.7})$$

Uvrštavajući ovo rešenje u smenu dobijamo vrednost funkcije $g(r)$

$$g(r) = -\frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right) \quad (\text{B.8})$$

gde se vrednost integracione konstante $c_1 = 2m$ može dobiti postupkom analognim onom u odeljku 2. Da bismo odredili $f(r)$ možemo iskoristiti rr komponentu jednačina polja (B.2) koja daje vezu između funkcija $f(r)$ i $g(r)$

$$\frac{2}{r} f'(r) e^{-2g(r)} - \frac{1}{r^2} (1 - e^{-2g(r)}) + \Lambda = 0 \quad (\text{B.9})$$

Kada u ovaj izraz uvrstimo $g(r)$ iz (B.8) dobijamo diferencijalnu jednačinu za $f(r)$

$$f'(r) = \left(\frac{m}{r^2} - \frac{1}{3} \Lambda r \right) \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right)^{-1} \quad (\text{B.10})$$

čije je rešenje

$$f(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3} \Lambda r^2 \right) \quad (\text{B.11})$$

Sada kada znamo $f(r)$ i $g(r)$ možemo napisati metriku

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$$

Vidimo da u slučaju kada je $\Lambda=0$ dobijamo Švarcšildovo rešenje. U odsustvu crne rupe, tj. za $m=0$, dobija se prostor-vreme de Sitera. Gore navedeno prostor-vreme poseduje dva horizonta: r_- i r_+ . Horizont r_- odgovara horizontu događaja crne rupe dok je r_+ kosmološki horizont.

Dodatak C Kilingovi vektori i integrali kretanja

Simetrije nekog prostor-vremena mogu se opisati Kilingovim vektorima. Neka je prostor vreme opisano metrikom $g_{\mu\nu}$ i neka je ona u datom koordinatnom sistemu nezavisna od koordinate x^A

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^A} = 0 \quad (\text{C.1})$$

Ukoliko se iz neke tačke S , sa koordinatama (x^α, x^A) , pomerimo u pravcu x^A za neko $\Delta x = \varepsilon$, metrika će biti

$$g_{\mu\nu}(x^\alpha, x^A + \varepsilon) = g_{\mu\nu}(x^\alpha, x^A) + \varepsilon \frac{\partial g_{\mu\nu}(x^\alpha, x^A)}{\partial x^A} + \dots = g_{\mu\nu}(x^\alpha, x^A) \quad (\text{C.2})$$

Prema tome, translacija u pravcu x^A je funkcionalno invarijantna transformacija jer ne menja metriku. Sada možemo definisati Kilingov vektor

$$K \equiv \frac{\partial}{\partial x^A} \quad (\text{C.3})$$

On predstavlja generator izometrije prostor-vremena. U koordinatnom sistemu koji smo odabrali ovaj Kilingov vektor ima komponente

$$K^\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^A}, \omega^\mu \right) = \delta^\mu_A \quad (\text{C.4})$$

Da bismo našli jednačinu koju zadovoljava Kilingov vektor, izračunajmo prvo njegov kovarijantni izvod

$$\begin{aligned} K_{\mu;\nu} &= g_{\mu\alpha} K^\alpha_{;\nu} = g_{\mu\alpha} \left(\frac{\partial K^\alpha}{\partial x^\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta} K^\beta \right) = g_{\mu\alpha} \Gamma^\alpha_{\nu A} \\ &= \Gamma_{\mu\nu A} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^A} + \frac{\partial g_{\mu A}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu A}}{\partial x^\mu} \right) = \frac{1}{2} (g_{\mu A,\nu} - g_{\nu A,\mu}) \end{aligned} \quad (\text{C.5})$$

Odavde vidimo da je $K_{\mu;\nu}$ antisimetričan po indeksima μ i ν , tako da možemo napisati Kilingovu jednačinu

$$K_{\mu;\nu} + K_{\nu;\mu} = 0 \quad (\text{C.6})$$

Kilingovi vektori imaju jednu, za fiziku veoma važnu, osobinu:
Skalarni proizvod impulsa p čestice koja se kreće po geodezijskoj liniji sa Kilingovim vektorom je konstanta kretanja

$$p_A = p \cdot K = \text{const.} \quad (\text{C.7})$$

Da bismo ovo dokazali, nađimo izvod p_A duž geodezidske linije

$$\begin{aligned} \frac{dp_A}{d\lambda} &= \frac{d}{d\lambda}(p^\mu K_\mu) = (p^\mu K_\mu)_{;\nu} p^\nu \\ &= p^{\mu,\nu} p^\nu K_\mu + K_{\mu;\nu} p^\mu p^\nu = K_{\mu;\nu} p^\mu p^\nu = K_{(\mu;\nu)} p^\mu p^\nu = 0 \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Prema tome, p_A je konstanta kretanja.

Ovaj rezultat sada možemo primeniti na slučaj metrike Švarcšilda. Metrički tenzor $g_{\mu\nu}$ u Švarcšildovim koordinatama (t, r, θ, ϕ) ne zavisi od koordinata t i ϕ . Stoga postoje dva Kilingova vektora K_1 i K_2

$$K_1 = \frac{\partial}{\partial t} \quad ; \quad K_2 = \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (\text{C.9})$$

sa komponentama

$$K_1^\mu = (K_1, \omega^\mu) = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \omega^\mu \right) = \delta^{\mu}_0 = (1, 0, 0, 0) \quad (\text{C.10a})$$

$$K_2^\mu = (K_2, \omega^\mu) = \left(\frac{\partial}{\partial \phi}, \omega^\mu \right) = \delta^{\mu}_3 = (0, 0, 0, 1) \quad (\text{C.10b})$$

Vidimo da postoje dva integrala kretanja koji odgovaraju ovim Kilingovim vektorima: energija čestice E i njen momenat impulsa L

$$p_\mu K_1^\mu = p_t = -E = \text{const.} \quad (\text{C.11a})$$

$$p_\mu K_2^\mu = p_\phi = L = \text{const.} \quad (\text{C.11b})$$

Literatura

1. A.Einstein *The Meaning of Relativity*, (1955)
2. C.Misner, K.Thorne, J.A.Wheeler *Gravitation*, (1973)
3. R.Wald *General Relativity*, (1984)
4. M.Blađojević, *SFIN*, god II, broj 2, (1989) 1-39
5. S.Chandrasekhar, *The Mathematical Theory of Black Holes*, (1983)

Abstract

Some properties of the Schwarzschild solution of general relativity, especially those related to black holes, are analyzed in this paper. The emphasis is given on the maximal analytic extension of the Schwarzschild geometry and Kruskal coordinates. Null geodesics and orbits of test particles in this space-time are calculated. Some problems which are related to space-time singularities have also been considered.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

- Redni broj:
RBR
- Identifikacioni broj:
IBR
- Tip dokumentacije:*Monografska dokumentacija*
TD
- Tip zapisa: *Tekstualni štampani materijal*
TZ
- Vrsta rada: *Diplomski rad*
VR
- Autor: *Predrag Ranin, br. dos. 331/93*
AU
- Mentor: *dr Milutin Blagojević, Institut za fiziku, Zemun*
MN
- Naslov rada: *Švarcšildovo rešenje u opštoj teoriji relativnosti*
NR
- Jezik publikacije: *Srpski (latinica)*
JP
- Jezik izvoda: *Srpski*
JI
- Zemlja publikovanja: *Jugoslavija*
ZP
- Uže geografsko područje: *Vojvodina*
UGP
- Godina: *1998.*
GO
- Izdavač: *Autorski reprint*
IZ
- Mesto i adresa: *Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad*
MA
- Fizički opis rada: *(4/26/5/0/5/0/0)*
FO
- Naučna oblast: *Fizika*
NO
- Naučna disciplina: *Teorija relativnosti i gravitacija*
ND
- Predmetna odrednica/ključne reči: *gravitacija, crne rupe, prostor-vreme*
PO
- Čuva se: *Biblioteka Instituta za fiziku, PMF, Novi Sad*
- Izvod: *U radu je analizirano Švarcšildovo rešenje Ajnštajnovih jednačina polja. Posebna pažnja je posvećena primeni na crne rupe. Analizirani su horizont događaja i singularnost. Pokazano je i kako se ovo prostor-vreme može proširiti i dobiti njegovo maksimalno analitičko proširenje.*
IZ
- Datum prihvatanja teme od strane veća:
DP
- Datum odbrane: *28.7. 1998*
DO
- Članovi komisije:
Predsednik:
dr Darko Kapor, redovan profesor, PMF, Novi Sad
Članovi:
dr Milutin Blagojević, redovan profesor, Institut za fiziku, Zemun
dr Božidar Vujičić, redovan profesor, PMF, Novi Sad
dr Stanoje Stojanović, redovan profesor, PMF, Novi Sad
KO