

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA FIZIKU

Природно-математички факултет
Радна заједница

Пријем:	29. X. 1984.	
Орг. јединица:	ОД-1	одјељност
ОЗ	10/49	

FLUKTUACIJE GUSTINE I PARNE KORELACIJE EKSITONSKOG SISTEMA

- DIPLOMSKI RAD -

kandidat:

Novica Zdravković

NOVI SAD

1984.

*Zahvaljujem se iskreno profesoru, dr. Bratislavu Tošiću na
ukazanoj pomoći pri izradi ovog rada.*

S A D R Ž A J

U V O D	1
1. NEODRŽANJE EKSITONA I NEKE POSLEDICE	2
1.1. HAMILTONIJAN SISTEMA FRENKELOVIH EKSITONA ZA DVONIVOSKU SHEMU MOLEKULSKIH POBUDJENJA	2
1.2. DIJAGONALIZACIJA EKSITONSKOG HAMILTONIJANA I SPEKTAR EKSITONA	8
1.3. VREMENSKA ZAVISNOST BROJA EKSITONA I OPERATORA KREACIJE I ANIHLACIJE PAROVA EKSITONA	11
2. NESTACIONARNI PROCESI U SISTEMU EKSITONA	14
2.1. KORELACIONA FUNKCIJA ZA SLUČAJ KADA GRINOV FUNKCIJA IMA POL ZA NULTU FREKVenciju	14
2.2. TRANSFORMACIJA OPERATORA BROJA EKSITONA I OPERATORA KREACIJE I ANIHLACIJE PAROVA EKSITONA	18
2.3. STACIONARNE I NESTACIONARNE PARNE KORELACIJE	19
2.4. STACIONARNE I NESTACIONARNE FLUKTUACIJE GUSTINE	22
Z A K L J U Č A K	25
L I T E R A T U R A	27

U V O D

Cilj ovog rada je ispitivanje nekih pojava u sistemu Frenkelovih eksitona, koje su vezane za činjenicu da se broj eksitona u sistemu ne održava. Ovoj se činjenici do danas nije posvećivala dužna pažnja. To ne znači da su dosadašnji rezultati teorije eksitona neispravni. Pre bi se moglo reći da nisu osvetljeni iz svih uglova i da su zbog toga iz analize ispuštenе mnoge interesantne pojave koje mogu imati ne samo fizičke, već i biološke posledice.

U ovom je radu data eksplicitna zavisnost od vremena operatora broja eksitona i operatora koji kreiraju i koji anihiliraju parove eksitona sa suprotnim impulsima. Dobijeni izrazi se koriste prilikom ispitivanja nestacionarne fluktuacije eksitona, kao i nestacionarne korelacije parova eksitona. Ova se ispitivanja vrše metodom Grinovih funkcija, a za sastavne delove ovih funkcija odredjeni su izrazi za operator broja eksitona i za operatore kreacije i anihilacije elektronskih parova.

1. N E O D R Ģ A N J E E K S I T O N A I N E K E P O S L E D I C E

1.1. HAMILTONIJAN SISTEMA FRENKELOVIH EKSITONA ZA DVONIVOSKU SHEMU MOLEKULSKIH POBUDJENJA

Teorije optičkih pobudjenja u kristalima dali su Frenkel i Poerne i to za molekularne kristale, a Vanije i Mot za poluprovodnike. Ova pobudjenja, koja su indukovana svetlošću, nazivaju se eksiton. Eksiton u molekularnim kristalima nazvani su Frenkelovim, a u poluprovodnicima, eksiton Vanije-Mota. I Frenkelovi i eksiton Vanije-Mota su u energetskom smislu slični, jer im je energija reda veličine 3-5 eV, tj. reda veličine vidljive svetlosti koja ih indukuje.

Ukoliko se pomenuti eksiton shvate kao kvazičestice sfernog oblika, tada je bitna razlika izmedju njih u veličini radijusa. Frenkelovi eksiton su malog radijusa, reda veličine 0.1 nm, dok je radijus eksitona Vanije-Mota i nekoliko μm .

Kada svetlost iz popunjene elektronske zone izbací jedan elektron u provodnu zonu, tada nastaje eksiton Vanije-Mota, a to istovremeno znači da se u popunjenoj zoni pojavi ljuje šupljina koja se ponaša kao pozitivno nanelektrisanje, a u provodnoj zoni je elektron, kao negativno nanelektrisanje. Ova se dva nanelektrisanja medjusobno privlače Kulonovom silom. Ukoliko je ova privlačna sila dovoljno jaka da ih drži vezane, u poluprovodniku ne teče struja, već se ovaj vezani kompleks, elektron-šupljina, ponaša kao neutralna čestica. Pomenuti neutralni kompleks pomera se kroz kristal kao neki talas (kvazičestica) i taj se talas naziva eksiton Vanije-Mota. Kada privlačna sila oslabi, odnosno kada se veza elektron-šupljina prekinie, eksiton Vanije-Mota prestaje da postoji. Elektron i šupljina počinju da se kreću nezavisno jedno od drugog, kroz poluprovodnik teče struja, u provodnoj zoni struja elektrona, a u valentnoj struja šupljina.

U slučaju Frenkelovih eksitona svetlost takodje stvara par elektron-šupljina, ali ovaj kompleks ostaje na samom molekulu. Frenkelovi eksiton su zbog toga malog radijusa. Ovo, međutim, ne znači da je pomenuta ekscitacija lokalizovana na

samom molekulu. Kada se jedan molekul u kristalu ekscituje, to odmah izaziva promenu matričnih elemenata interakcije izmedju molekula i eksitacije, te se ovo prenosi na sledeći molekul, a posle izvesnog vremena na sve molekule kristala. Ovakav talas pobudjenja naziva se Frenkelov eksiton.

Frenkelovi eksitonii se najčešće javljaju u molekulskim kristalima, a to su antracen, naftalin, benzol u čvrstom stanju i u kristalima inertnih gasova. Molekuli ovih kristala su veoma izraženi dipoli i zbog toga izmedju njih deluju sile dipol-dipolnog tipa. Potencijal dipol-dipolne interakcije izmedju molekula ima oblik:

$$V_{nm} = e^2 \frac{\vec{r}_n - \vec{r}_m}{|\vec{n} - \vec{m}|^3} - 3e^2 \frac{[\vec{r}_n(\vec{n} - \vec{m})][\vec{r}_m(\vec{n} - \vec{m})]}{|\vec{n} - \vec{m}|^5} \quad 1.1.1$$

gde je: e - nanelektrisanje elektrona,

\vec{n}, \vec{m} - vektori kristalne rešetke,

\vec{r}_n, \vec{r}_m - vektori dipola molekula na mestu \vec{n} i \vec{m} u kristalnoj rešetki.

Očigledno je da dipol-dipolna interakcija opada sa trećim stepenom rastojanja izmedju molekula. Ova se interakcija sastoji iz dva dela koji se bitno razlikuju. Prvi deo zavisi od intenziteta rastojanja izmedju molekula i naziva se analitički deo dipol-dipolne interakcije. Drugi deo zavisi od intenziteta rastojanja i uglova koje vektori dipola zaklapaju sa rastojanjem \vec{n} i \vec{m} i naziva se neanalitički deo dipol-dipolne interakcije. Naziv, neanalitički, dolazi zbog toga što Furije lik pomenutog dela interakcije zavisi od pravca prostiranja eksitona, tako da za svaki pravac eksiton ima drugačiji zakon disperzije. Često se u računima iz određenih razloga neanalitički deo zakaona disperzije odbacuje i eksiton dobijeni u ovakvoj interakciji nazivaju se mehanički eksitonii. Svetlost koja u molekulu indukuje eksiton može da izazove dva efekta. Prvi je promena stanja elektrona u molekulu, a drugi predstavlja promenu stanja unutrašnjih molekulskih vibracija. Ove druge promene, do kojih dovodi svetlost manje energije (infracrvena), kolektivizuju se u kristalu i ovakve kolektivne eksitacije se ponekad nazivaju eksitonima Frenkela, a češće vibronima. U daljem izlaga-

nju govori se samo o eksitonima Frenkela tj. o eksitonima koji nastaju usled promene stanja elektrona u individualnim molekulima.

Ukoliko se analiza ograniči na ovaj slučaj, može se tada hamiltonijam molekularnog kristala, u odnosu na proces optičkih pobudjivanja njegovog elektronskog podsistema, posmatrati kao hamiltonijan sa dvočestičnim fermijonskim interakcijama. U reprezentaciji druge kvantizacije ovakav hamiltonijan ima oblik:

$$H = \sum_{\vec{n}f} E_{nf}^+ A_{nf}^+ A_{nf} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m} f_1 f_2 f_3 f_4} V_{\vec{n}\vec{m}}(f_1, f_2, f_3, f_4) A_{nf_1}^+ A_{nf_2}^+ A_{nf_3}^+ A_{nf_4} \quad 1.1.2$$

gde su: \vec{n}, \vec{m} - čvorovi rešetke,

f_1, f_2, f_3, f_4 - skupovi kvantnih brojeva koji karakterišu stanje elektrona,

E_{nf}^+ - energija elektrona u stanju f ,

$V_{\vec{n}\vec{m}}(f_1, f_2, f_3, f_4)$ - matrični elementi operatora dipol-dipolne interakcije po svojstvenim stanjima elektrona u izolovanom molekulu.

Operatori A_{nf}^+ i A_{nf}^- kreiraju, odnosno anihiliraju elektron na čvoru \vec{n} u stanju f . Ako se sa $H_{\vec{n}}$ označi hamiltonijan molekula na mestu \vec{n} , njegov se problem tada može napisati kao:

$$H_{\vec{n}} \varphi_{\vec{n}}^+ = E_{\vec{n}}^+ \varphi_{\vec{n}}^+ \quad 1.1.3$$

Na osnovu izloženog vidi se da su $E_{\vec{n}}^+$ energije izolovanog molekula, dok su funkcije $\varphi_{\vec{n}}^+$ svojstvene funkcije hamiltonijana izolovanog molekula. Matrični element interakcije dva molekula sa različitim nivoima f_1, f_2, f_3, f_4 ima oblik:

$$V_{\vec{n}\vec{m}}(f_1, f_2, f_3, f_4) = \int \varphi_{\vec{n}}^* f_1 \varphi_{\vec{m}}^* f_2 V_{\vec{n}\vec{m}} \varphi_{\vec{n}} f_3 \varphi_{\vec{m}} f_4 d\tau_{\vec{n}} d\tau_{\vec{m}} \quad 1.1.4$$

gde $d\tau_{\vec{n}}$ i $d\tau_{\vec{m}}$ predstavljaju elemente zapreme u prostoru koji zauzimaju molekuli na mestima \vec{n} i \vec{m} . Talasne funkcije φ veoma brzo opadaju sa rastojanjem, pa se integral 1.1.4 može bez veće greške uzeti kao integral po beskonačnoj zapremini.

U daljoj se analizi smatra da se elektron u molekulu može naći samo u dva stanja, osnovnom 0 i pobudjenom f . Ovakva se shema naziva i shema sa dva nivoa, a opravdana je u slučaju kada se kristal pobudjuje monohromatskim fotonima. She-

ma je opravdana i u slučaju kada fotoni nisu monohromatski, ali su ostali mogući nivoi veoma različiti od energetskog nivoa f . Razmatrati hamiltonijan 1.1.2 kao elektronski hamiltonijan sa dvočestičnim interakcijama nije podesno ni sa matematičke, niti sa fizičke tačke gledišta. Naime, posmatrano fizički, eksiton nije pobudjeni elektron, već kvant pobudjenja molekula kristala. Umesto Fermi operatora A_{nf}^+ uvode se, zbog toga, novi operatori P_n^+ i to na sledeći način:

$$P_n^+ = A_{nf}^+ A_{n0}^+, \quad P_n^- = A_{n0}^+ A_{nf}^- \quad 1.1.5$$

Fizički smisao novouvedenih operatora je očigledan. Operator P_n^+ opisuje proces u kojem je jedan elektron u osnovnom prestao da postoji, a pojavio se u pobudjenom stanju f . Prema tome, operator P_n^+ kreira kvant pobudjenja čija je energija $E_{nf}^+ - E_{n0}^+$. Operator P_n^- opisuje obrnuti proces, odnosno iščezavanje elektrona u pobudjenom stanju i njegova pojava u osnovnom stanju 0. Prema tome, operator P_n^- anihilira (poništava) kvant pobudjenja čija je energija $E_{nf}^- - E_{n0}^-$.

Operatori P_n^+ i P_n^- nemaju fermionske komutacione relacije, a ni bozonske i sa statističke tačke gledišta predstavljaju sredinu izmedju Bose i Fermi operatora. Ovakvi operatori nazivaju se Pauli operatori. Komutacione relacije za Pauli operatore mogu se izvesti na osnovu komutacionih relacija za Fermi operatore uz jedan dopunski uslov čije objašnjenje sledi u daljem izlaganju. Ako je elektronu dopušteno da zauzima samo dva stanja 0 i f , tada, zbog Paulievog principa, za svaki čvor kompletan fermionski prostor izgleda ovako:

$$|0_0 0_f\rangle |1_0 1_f\rangle \quad 1.1.6$$

$$|1_0 0_f\rangle |0_0 1_f\rangle \quad 1.1.7$$

S obzirom na definiciju Pauli operatora 1.1.5, vidi se da su oni identički jednaki nuli u podprostoru 1.1.6, što znači da ovaj podprostor ne može uticati na fizičke karakteristike sistema, pa se može isključiti iz daljeg razmatranja. U podprostoru 1.1.7 Pauli operatori nisu jednaki nuli i što je važnije, delujući na funkciju iz ovog podprostora, daju funkcije u onom drugom, pa je isključivanje podprostora 1.1.6 opravdano.

Očigledno da u podprostoru 1.1.6 važi uslov:

$$A_{nf}^+ A_{nf}^- + A_{n0}^+ A_{n0}^- = 1 \quad 1.1.8$$

Kombinovanjem uslova 1.1.8 sa poznatim komutacionim relacijama za Fermi operatore, dobijaju se za Pauli operatore 1.1.5 sledeći komutacioni zakoni:

$$\left. \begin{aligned} [P_n^+, P_m^+] &= [1 - 2P_n^+ P_m^+] \delta_{nm} \\ [P_n^-, P_m^-] &= [P_n^+, P_m^+] = 0_{n \neq m} \\ P_n^2 &= P_m^2 = 0 \\ P_n^+ P_m^- &= A_{nf}^+ A_{nf}^- = 0 \text{ ili } 1 \end{aligned} \right\} \quad 1.1.9$$

Vidi se da se za jedan čvor rešetke Pauli operatori ponašaju kao Fermi operatori, dok se za različite čvorove rešetke ponašaju kao Boze operatori.

Ako se u hamiltonijanu 1.1.2 uzme u obzir činjenica da indeksi f_1, f_2, f_3, f_4 uzimaju samo dve vrednosti 0 ili f, zatim iskoristi definicija Pauli operatara i njihove komutacione relacije, dobija se hamiltonian sistema u paulionskoj reprezentaciji u obliku:

$$H = E_0 + \Delta \sum_n P_n^+ P_n^- + \sum_{nm} Z_{nm} P_n^+ P_m^- + \frac{1}{2} \sum_{nm} Y_{nm} (P_n^+ P_m^+ + P_m^+ P_n^+) + \sum_{nm} W_{nm} P_n^+ P_m^+ P_m^- P_n^- \quad 1.1.10$$

Uvedene oznake imaju sledeće značenje:

$$\begin{aligned} E_0 &= N[E_0 + \frac{1}{2} V_0(00,00)], \\ \Delta &= E_{nf} - E_{n0} - V_0(00,00) + \frac{1}{2} V_0(f0,0f) + \frac{1}{2}(0f,f0) \\ 2Z_{nm} &= V_{nm}(f0,f0) + V_{nm}(0f,0f) \\ Y_{nm} &= V_{nm}(ff,00) = V_{nm}(00,ff) \\ 2W_{nm} &= V_{nm}(ff,ff) + V_{nm}(00,00) - V_{nm}(f0,0f) - V_{nm}(0f,f0) \\ V_0(f_1, f_2, f_3, f_4) &= \sum_n V_{nn}(f_1, f_2, f_3, f_4) \end{aligned} \quad 1.1.11$$

Pri dobijanju hamiltonijana 1.1.10 uzeta je u obzir činjenica da se molekuli medjusobno ne razlikuju, pa E_{nf} i E_{n0} ne zavise od indeksa rešetke \vec{n} . Sem toga učinjena je prepostavka da kristal ima centar inverzije i da se poklapa sa centrom inverzije izolovanog molekula, zbog čega su matrični elementi tipa:

$$V_{nm}^{(f0,00)}; \quad V_{nm}^{(0f,00)}; \quad V_{nm}^{(00,f0)}; \quad V_{nm}^{(00,0f)}; \\ V_{nm}^{(ff,f0)}; \quad V_{nm}^{(ff,0f)}; \quad V_{nm}^{(f0,ff)}; \quad V_{nm}^{(0f,ff)},$$

jednaki nuli.

Prelaskom sa Fermi na Pauli operatore, kao što se iz dobijenih relacija vidi, veliki deo fermionskih interakcija je uključen u kvadratni deo paulionskog hamiltonijana. Fizički, to znači da su ovakvim prelaskom interakcije čestica uključene u hamiltonijan gasa kvazičestica. Autor ove ideje je Bogoliubov, a sam se metod naziva metod približne druge kvantizacije, a njegova fizička suština je zamena sistema jako interagujućih čestica sistemom slabo interagujućih kvazičestica.

Sledeći korak u analizi je zamena Pauli operatora u hamiltonijanu 1.1.10 Boze operatorima B^+ i B prema približnim relacijama:

$$P_n = B_n; \quad P_n^+ P_n^- = B_n^+ B_n^- \quad 1.1.12$$

Zamena Pauli operatora Boze operatorima unosi u račun izvesnu grešku koja je utoliko manja, ukoliko je broj eksitiranih molekula u kristalu manji. Tačna formula za prelaz sa Pauli operatora na Boze operatore ima oblik:

$$\left. \begin{aligned} P_n &= \left[\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-2)^v}{(1+v)!} B_n^{+v} B_n^v \right]^{1/2} B_n \\ P_n^+ &= B_n^+ \left[\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-2)^v}{(1+v)!} B_n^{+v} B_n^v \right]^{1/2} \\ P_n^+ P_n^- &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-2)^v}{(1+v)!} B_n^{+v+1} B_n^{v+1} \end{aligned} \right\} \quad 1.1.13$$

Ako se poslednji deo relacije 1.1.13 razvije, dobija se:

$$P_n^+ P_n^- \approx B_n^+ B_n^- - B_n^+ B_n^- B_n^+ B_n^- = \hat{N}_n - \hat{N}_n(N_n - 1),$$

odakle se vidi da broj pauliona $P^+ P$ dobija pravilne vrednosti 0 i 1 samo dok je broj bozona jednak 0, 1 i 2. Već za $N=3$ za broj pauliona $P^+ P$ dobija se nepravilan rezultat. Na ovaj način je ilustrovana tvrdnja da je zamena Pauli operatora bozonima po obrascu 1.1.12 dobra samo dok je broj bozona mali, odnosno dok je sistem slabo eksitiran. Metod približne druge kvantizacije se, prema tome, sastoji ne samo u zameni Pauli operatora bozonima, već i u odbacivanju ovih članova če

tvrtoog reda po Boze operatorima. Odbacivanje članova četvrtoog reda je nužno, jer su prve korekcije koje dolaze usled razlike Pauli i Boze komutacionih relacija četvrtoog i viših redova po Boze operatorima. Na osnovu rečenog, hamiltonijan metode približne druge kvantizacije za eksitonski sistem ima oblik:

$$H = E_0 + \Delta \sum_{\vec{n}} B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}}^- + \sum_{nm} Z_{\vec{m}} B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{m}}^- + \frac{1}{2} \sum_{nm} Y_{\vec{m}} (B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{m}}^- + B_{\vec{m}}^+ B_{\vec{n}}^-) \quad 1.1.14$$

Relacija:

$$B_{\vec{n}}^- = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^- e^{i\vec{k}\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} B_{-\vec{k}}^- e^{i\vec{k}\vec{n}} \quad 1.1.15$$

predstavlja Furije transformaciju Boze operatora, posle koje hamiltonijan 1.1.14 postaje:

$$\begin{aligned} H &= E_0 + \sum_{\vec{k}} (\Delta + Z_{\vec{k}}) B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}}^- + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} Y_{\vec{k}} (B_{\vec{k}}^+ B_{-\vec{k}}^- + B_{-\vec{k}}^+ B_{\vec{k}}^-) \\ Z_{\vec{k}} &= \sum_n Z_{n0} e^{i\vec{k}\vec{n}} \\ Y_{\vec{k}} &= \sum_n Y_{n0} e^{i\vec{k}\vec{n}} \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad 1.1.16$$

1.2. DIJAGONALIZACIJA EKSITONSKOG HAMILTONIJANA I SPEKTAR EKSITONA

Dobijeni hamiltonijan 1.1.16 može se dijagonalizovati prelaskom na nove Boze operatore $B_{\vec{k}}$, na sledeći način:

$$B_{\vec{k}} = U_{\vec{k}} b_{\vec{k}} + V_{\vec{k}} b_{-\vec{k}}^+ \quad 1.2.1$$

Transformacione funkcije $U_{\vec{k}}$ i $V_{\vec{k}}$ su, po pretpostavci, parne i realne. Da bi $b_{\vec{k}}$ bili Boze operatori funkcija U i V , treba postaviti tzv. uslov kanoničnosti transformacije. Ukoliko se obrazuje komutator operatora B^+ i B , na osnovu relacije 1.2.1 se dobija:

$$[B_{\vec{k}}, B_{\vec{k}}^+] = U_{\vec{k}}^2 [b_{\vec{k}}, b_{\vec{k}}^+] + V_{\vec{k}}^2 [b_{-\vec{k}}^+, b_{-\vec{k}}] + U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} \{ [b_{\vec{k}}, b_{-\vec{k}}] + [b_{-\vec{k}}, b_{\vec{k}}^+] \}$$

da bi b^+, b bili Boze operatori, mora biti:

$$[b_{\vec{k}}, b_{\vec{k}}^+] = 1, \quad [b_{\vec{k}}, b_{-\vec{k}}] = 0.$$

Kako je $[B_{\vec{k}}, B_{\vec{k}}^+] = 1$, uslov kanoničnosti postaje:

$$U_{\vec{k}}^2 - V_{\vec{k}}^2 = 1 \quad 1.2.2$$

Zamenom 1.2.1 u 1.1.16 dobija se:

$$\begin{aligned}
 H = \epsilon_0 + \sum_{\vec{k}} [V_{\vec{k}}^2(\Delta + Z_{\vec{k}}) + U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} Y_{\vec{k}}] + \sum_{\vec{k}} [(\Delta + Z_{\vec{k}})(U_{\vec{k}}^2 + V_{\vec{k}}^2) + \\
 + 2U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} Y_{\vec{k}}] b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} [(\Delta + Z_{\vec{k}}) U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} + \\
 + \frac{1}{2} Y_{\vec{k}} (U_{\vec{k}}^2 + V_{\vec{k}}^2)] (b_{\vec{k}}^+ b_{-\vec{k}} + b_{-\vec{k}} b_{\vec{k}}) \quad 1.2.3
 \end{aligned}$$

Da bi se postigla eliminacija nedijagonalnih članova, proporcionalnih $b_{\vec{k}}^+ b_{-\vec{k}} + b_{-\vec{k}} b_{\vec{k}}$, koeficijent koji stoji uz njih izjednačen je sa nulom. Na taj se način dobija:

$$\begin{aligned}
 (\Delta + Z_{\vec{k}}) U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} + \frac{1}{2} Y_{\vec{k}} (U_{\vec{k}}^2 + V_{\vec{k}}^2) = 0, \\
 U_{\vec{k}}^2 - V_{\vec{k}}^2 = 1.
 \end{aligned}$$

Rešavajući ovaj sistem jednačina dobija se:

$$\left. \begin{aligned}
 U_{\vec{k}} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta + Z_{\vec{k}}}{\sqrt{(\Delta + Z_{\vec{k}})^2 - Y_{\vec{k}}^2}} + 1 \right] \\
 V_{\vec{k}} &= \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta + Z_{\vec{k}}}{\sqrt{(\Delta + Z_{\vec{k}})^2 - Y_{\vec{k}}^2}} - 1 \right] \\
 U_{\vec{k}} V_{\vec{k}} &= -\frac{1}{2} \frac{\Delta + Z_{\vec{k}}}{\sqrt{(\Delta + Z_{\vec{k}})^2 - Y_{\vec{k}}^2}} \\
 U_{\vec{k}}^2 V_{\vec{k}}^2 &= \frac{\Delta + Z_{\vec{k}}}{\sqrt{(\Delta + Z_{\vec{k}})^2 - Y_{\vec{k}}^2}}
 \end{aligned} \right\} \quad 1.2.4$$

Zamenom ovih rezultata u izraz dobija se dijagonalizovan eksitonski hamiltonijan u obliku:

$$\begin{aligned}
 H = \epsilon_0 + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} [\sqrt{(\Delta + Z_{\vec{k}})^2 - Y_{\vec{k}}^2} - \Delta - Z_{\vec{k}}] + \\
 + \sum_{\vec{k}} \sqrt{(\Delta + Z_{\vec{k}})^2 - Y_{\vec{k}}^2} b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}} \quad 1.2.5
 \end{aligned}$$

Zakon disperzije za eksitone dobija se u obliku:

$$E_e(\vec{k}) = \frac{\partial H}{\partial b_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}}} = \sqrt{(\Delta + Z_{\vec{k}})^2 - Y_{\vec{k}}^2} \quad 1.2.6$$

gde je Δ reda veličine 3 - 5 eV. Na osnovu ovog, bozon u obrazcu 1.2.6 može se razviti u red:

$$E_e(\vec{k}) = \sqrt{(\Delta + Z_{\vec{k}})^2 - Y_{\vec{k}}^2} = (\Delta + Z_{\vec{k}}) \sqrt{1 - \frac{Y_{\vec{k}}^2}{(\Delta + Z_{\vec{k}})^2}} \approx$$

$$\approx (\Delta + Z_{\vec{k}}) \left[1 - \frac{1}{2} \frac{Y_{\vec{k}}^2}{(\Delta + Z_{\vec{k}})^2} \right] = \Delta + Z_{\vec{k}} - \frac{1}{2} \frac{Y_{\vec{k}}^2}{(\Delta + Z_{\vec{k}})} \approx \Delta + Z_{\vec{k}} - \frac{Y_{\vec{k}}^2}{2\Delta},$$

pa približni izraz za energiju glasi:

$$E_e(\vec{k}) = \Delta + Z_{\vec{k}} - \frac{Y_{\vec{k}}^2}{2\Delta} \quad 1.2.7$$

U nameri da se karakteristike eksitona upoznaju odredjenije, pretpostavimo:

- a) da je u $Z_{\vec{k}}$ i $Y_{\vec{k}}$ bitan samo analitički deo operatora dipol-dipolne interakcije,
- b) da je aproksimacija najbližih suseda dobra aproksimacija,
- c) da se posmatra kristal proste kubične strukture,
- d) da je problem ograničen na oblast malih talasnih vektora.

Na osnovu a, b, c sledi:

$$Z_{\vec{k}} = 2Z(\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a),$$

$$Y_{\vec{k}} = 2Y(\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a),$$

gde su $Z_{\vec{k}}$ i $Y_{\vec{k}}$ matrični elementi interakcije za najbliže susede i a - konstanta rešetke. Na osnovu pretpostavke d, dobija se:

$$Z_{\vec{k}} \approx 6Z - Za^2 k^2,$$

$$Y_{\vec{k}} \approx 6Y - Ya^2 k^2.$$

Ako se poslednji izraz zameni u izraz za energiju eksitona dobija se:

$$E_e(\vec{k}) = \tilde{\Delta} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*} \quad 1.2.8$$

gde je:

$$\tilde{\Delta} = \Delta + 6Z - \frac{18Y^2}{\Delta},$$

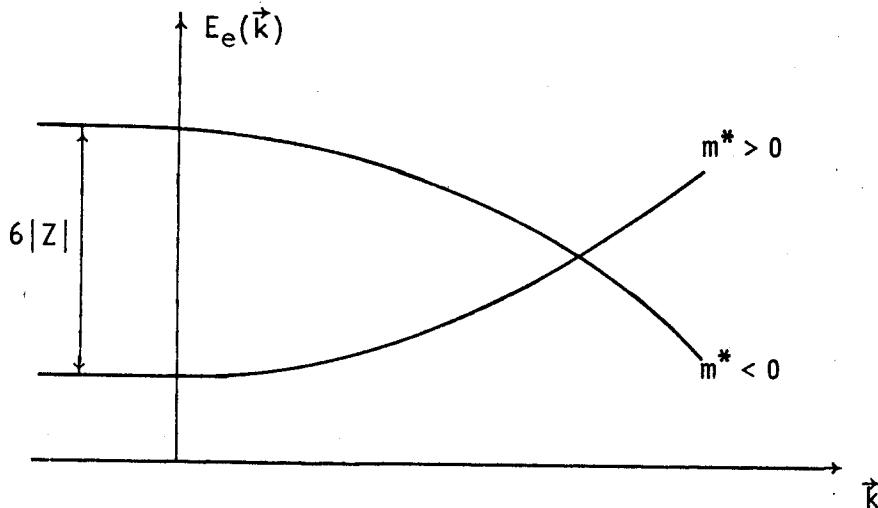
$$m^* = - \frac{\hbar^2}{2a^3 \left(Z - \frac{6Y^2}{\Delta} \right)} \quad 1.2.9$$

Vidi se da se eksiton u oblasti malih talasnih vektora ponaša kao čestica sa efektivnom masom, datom izrazom 1.2.9.

Od znaka matričnog elementa Z zavisi da li eksiton ima pozitivnu ili negativnu masu ili, drugim rečima, koristeći se terminima klasične optike, da li svetlost u kristalu ima pozitivnu ili negativnu disperziju.

U slučaju da je $Z < 0$, eksiton ima pozitivnu efektivnu masu (pozitivnu disperziju), dok za $Z > 0$ eksiton ima negativnu efektivnu masu (dakle, negativnu disperziju).

Grafički se prethodna analiza može dati na sledeći način:



1.3. VREMENSKA ZAVISNOST BROJA EKSITONA I OPERATORA KREACIJE I ANIHILACIJE PAROVA EKSITONA

U prethodnom odeljku hamiltonijan 1.2.3 dijagonalizovan je metodom UV-transformacija i dobijen je spektar eksitona 1.2.6. Na ovom se mestu analiziraju pojave u eksitonskom sistemu, kada se uzima u obzir činjenica da operator ukupnog broja eksitona ne komutira sa hamiltonijanom. Prema tome, broj eksitona se ne održava i to izaziva izvesne specifične efekte, koji su u daljem tekstu analizirani.

Polazeći od hamiltonijana:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \left\{ X(\vec{k}) B^+(\vec{k}) B(\vec{k}) + \frac{1}{2} Y(\vec{k}) [B(-\vec{k}) B(\vec{k}) + B^+(\vec{k}) B^+(-\vec{k})] \right\} \quad 1.3.1$$

$$X(\vec{k}) = \Delta + Z(\vec{k})$$

može se ispitati vremenska zavisnost operatora broja eksitona:

$$\hat{N} = \sum_{\vec{k}} B^+(\vec{k}) B(\vec{k}) \quad 1.3.2$$

Da bi se ova zavisnost ispitala, dovoljno je da se nadje komutator broja eksitona za dato \vec{k} , odnosno $B^+(\vec{k}) B(\vec{k})$.

Na osnovu Hajzenbergovih jednačina kretanja:

$$i\hbar \frac{d\hat{A}}{dt} = [\hat{A}, \hat{H}] \quad 1.3.3$$

posle nalaženja odgovarajućih komutatora za operatore:

$$\left. \begin{aligned} [B^+(\vec{k})B(\vec{k})]_t &\equiv \hat{R}(\vec{k}, t) \\ [B(-\vec{k})B(\vec{k})]_t - [B^+(\vec{k})B^+(-\vec{k})]_t &\equiv \hat{R}'(\vec{k}, t) \\ [B(-\vec{k})B(\vec{k})]_t + [B^+(\vec{k})B^+(-\vec{k})]_t &\equiv \hat{R}''(\vec{k}, t) \end{aligned} \right\} \quad 1.3.4$$

dobija se sledeći sistem jednačina:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\hat{R}(\vec{k}, t)}{dt} &= i\Omega_Y(\vec{k})\hat{R}'(\vec{k}, t) \\ \frac{d\hat{R}''(\vec{k}, t)}{dt} &= -2i\Omega_X(\vec{k})\hat{R}'(\vec{k}, t) \\ \frac{d\hat{R}'(\vec{k}, t)}{dt} &= -2i[\Omega_Y(\vec{k}) + 2\Omega_Y(\vec{k})\hat{R}(\vec{k}, t) + \Omega_X(\vec{k})\hat{R}''(\vec{k}, t)] \\ \Omega_X(\vec{k}) &= \hbar^{-1} X(\vec{k}) \\ \Omega_Y(\vec{k}) &= \hbar^{-1} Y(\vec{k}) \end{aligned} \right\} \quad 1.3.5$$

Osnovni problem koji se postavlja ovde je izbor početnih uslova pri kojima se sistem 1.3.5 rešava. Prilikom izbora početnih uslova mora biti ispunjen zahtev da posle zamene 1.3.4 u 1.3.1 hamiltonijan ostane nezavisan od vremena, odnosno da 1.3.1 dobije oblik:

$$\hat{H} = \sum \left\{ X(\vec{k})B^+(\vec{k}, 0)B(\vec{k}, 0) + \frac{1}{2} Y(\vec{k})[B(-\vec{k}, 0)B(\vec{k}, 0) + B^+(\vec{k}, 0)B^+(-\vec{k}, 0)] \right\} \quad 1.3.6$$

Pomenuti je zahtev svakako zadovoljen ukoliko se odaberu sledeći početni uslovi:

$$\left. \begin{aligned} \hat{R}(\vec{k}, 0) &= B^+(\vec{k}, 0)B(\vec{k}, 0) \\ \hat{R}'(\vec{k}, 0) &= B(-\vec{k}, 0)B(\vec{k}, 0) - B^+(-\vec{k}, 0)B^+(\vec{k}, 0) \\ \hat{R}''(\vec{k}, 0) &= B(-\vec{k}, 0)B(\vec{k}, 0) + B^+(\vec{k}, 0)B^+(-\vec{k}, 0) \end{aligned} \right\} \quad 1.3.7$$

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{d\hat{R}'(\vec{k}, t)}{dt} \right]_{t=0} &= -2i[\Omega_Y(\vec{k}) + 2\Omega_Y(\vec{k})\hat{R}(\vec{k}, 0) + \Omega_X(\vec{k})\hat{R}''(\vec{k}, 0)] \end{aligned} \right\}$$

Rešenja sistema 1.3.5 u tom slučaju glase:

$$\begin{aligned} [B^+(\vec{k})B(\vec{k})]_t &= \alpha_1(\vec{k}, t) + \alpha_2(\vec{k}, t)B^+(\vec{k}, 0)B(\vec{k}, 0) + \alpha_3(\vec{k}, t)B(-\vec{k}, 0)B(\vec{k}, 0) + \\ &\quad + \alpha_3^*(\vec{k}, t)B^+(\vec{k}, 0)B(\vec{k}, 0)B^+(-\vec{k}, 0) \\ [B(-\vec{k})B(\vec{k})]_t &= \beta_1(\vec{k}, t) + \beta_2(\vec{k}, t)B^+(\vec{k}, 0)B(\vec{k}, 0) + \beta_3(\vec{k}, t)B(-\vec{k}, 0)B(\vec{k}, 0) + \\ &\quad + \beta_4(\vec{k}, t)B^+(\vec{k}, 0)B^+(-\vec{k}, 0) \\ [B^+(\vec{k})B^+(-\vec{k})]_t &= \beta_1^*(\vec{k}, t) + \beta_2^*(\vec{k}, t)B^+(\vec{k}, 0)B(\vec{k}, 0) + \beta_3^*(\vec{k}, t)B^+(\vec{k}, 0)B^+(-\vec{k}, 0) + \\ &\quad + \beta_4^*(\vec{k}, t)B(-\vec{k}, 0)B(\vec{k}, 0) \end{aligned} \quad 1.3.8$$

gde su funkcije α i β date sa:

$$\begin{aligned}\alpha_1(\vec{k}, t) &= \frac{\Omega_Y^2(\vec{k})}{2\Omega^2(\vec{k})} [1 - \cos 2\Omega(\vec{k})t], \\ \alpha_2(\vec{k}, t) &= 1 + \frac{\Omega_Y^2(\vec{k})}{\Omega^2(\vec{k})} [1 - \cos 2\Omega(\vec{k})t], \\ \alpha_3(\vec{k}, t) &= \frac{\Omega_Y(\vec{k})\Omega_X(\vec{k})}{2\Omega^2(\vec{k})} [1 - \cos 2\Omega(\vec{k})t + i \frac{\Omega_Y(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} \sin 2\Omega(\vec{k})t], \\ \beta_1(\vec{k}, t) &= -\alpha_3(\vec{k}, t), \\ \beta_2(\vec{k}, t) &= 2\beta_1(\vec{k}, t), \\ \beta_3(\vec{k}, t) &= -\frac{\Omega_Y^2(\vec{k})}{2\Omega^2(\vec{k})} + \frac{\Omega^2(\vec{k}) + \Omega_X^2(\vec{k})}{2\Omega^2(\vec{k})} \cos 2\Omega(\vec{k})t - i \frac{\Omega_X(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} \sin 2\Omega(\vec{k})t, \\ \beta_4(\vec{k}, t) &= -\alpha_1(\vec{k}, t); \\ \hbar \Omega(\vec{k}) &= \sqrt{\Omega_X^2(\vec{k}) - \Omega_Y^2(\vec{k})} \quad 1.3.9\end{aligned}$$

Kao što se vidi, operator totalnog broja eksitona:

$$\hat{N}(t) = \sum_{\vec{k}} [B^+(\vec{k})B(\vec{k})]_t \quad 1.3.10$$

ima veoma komplikovanu zavisnost od vremena i izražen je i preko stacionarnog broja eksitona $B^+(\vec{k}, 0)B(\vec{k}, 0)$, a i preko stacionarnih operatora $B(-\vec{k}, 0)B(\vec{k}, 0)$ i $B^+(\vec{k}, 0)B^+(-\vec{k}, 0)$ koji anihiliraju, odnosno kreiraju parove eksitona sa suprotnim indeksima. Neke su posledice ove činjenice predmet analize u daljem tekstu. Na ovom je mestu potrebno samo naglasiti da direktna zamašna 1.3.8 u 1.3.1 daje rezultat 1.3.6.

2. NESTACIONARNI PROCESI U SISTEMU EKSPONITALNO

2.1. KORELACIONA FUNKCIJA ZA SLUČAJ KADA GRINOVA FUNKCIJA IMA POL ZA NULTU FREKVENCIJU

U teoriji Grinovih funkcija još uvek je otvoren problem nalaženja korelacione funkcije za slučaj kada Grinova funkcija ima pol u tački $\omega = 0$. U razmatranju ovog problema polazi se od opštih jednačina koje povezuju Grinovu funkciju $G(\omega)$ i njenu spektralnu intenzivnost $I(\omega)$. Polazna relacija ima oblik:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' (e^{\beta\omega'} - 1) \frac{I(\omega')}{\omega - \omega'} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad 2.1.1$$

$$\beta = \frac{\hbar}{\theta}; \quad I_m \omega > 0$$

gde je $\theta = k_B T$ - temperatura u energetskim jedinicama.

Korišćenjem poznatog obrasca iz kompleksne analize:

$$\frac{1}{x + i\delta} = \hat{P} \frac{1}{x} + i\pi \delta(x) \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad 2.1.2$$

$$\delta \rightarrow +0$$

može se iz relacije 2.1.1 spektralna intenzivnost eksplicitno izraziti kao:

$$I(\omega) = \frac{G(\omega + i\delta) - G(\omega - i\delta)}{e^{\beta\omega} - 1} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad 2.1.3$$

$$\delta \rightarrow +0$$

Ovaj se izraz koristi u slučajevima kada Grinova funkcija nema pol $\omega = 0$. U slučaju kada ovakav pol postoji, rezultati dobijeni korišćenjem pomenutog izraza, nisu korektni.

Ako je Grinova funkcija sačinjena od operatora \hat{A} i \hat{B} , odnosno:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \ll A(t) | B(0) \gg e^{i\omega t} \quad , \quad 2.1.4$$

odgovarajuća korelaciona funkcija data je tada izrazom:

$$\langle \hat{B}(0) \hat{A}(t) \rangle \equiv C(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega I(\omega) e^{-i\omega t} = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{G(\omega + i\delta) - G(\omega - i\delta)}{e^{\beta\omega} - 1} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \quad 2.1.5$$

$$\delta \rightarrow +0$$

Na ovom je mestu izložen metod po kojem se korelaciona funkcija može odrediti iz Grinove funkcije ne koristeći re-

laciјu 2.1.2.

Pretpostavimo da Grinova funkcija ima oblik:

$$\left. \begin{aligned} G(\omega) &= \frac{i}{2\pi} \frac{k}{\omega - \omega_0} ; \quad \omega \geq 0 ; \\ \frac{\partial k}{\partial \omega} &= 0 ; \quad \omega_0 \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad 2.1.6$$

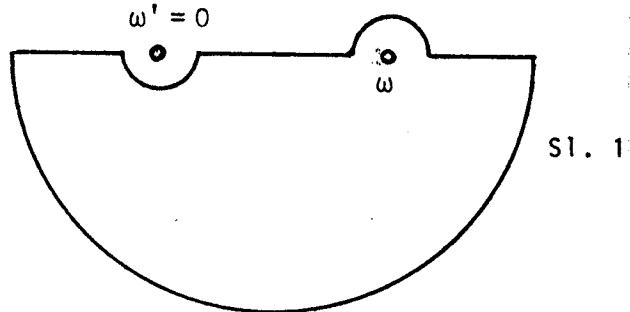
Može se pokazati da se u slučaju $\omega_0 \neq 0$ dobija isti rezultat kao i primenom relacije 2.1.2. Primenom pomenute relacije obrazac 2.1.3 postaje:

$$I(\omega) = k(e^{\beta\omega} - 1)^{-1} \delta(\omega - \omega_0) \quad 2.1.7$$

pa je korelaciona funkcija:

$$C(t) = k e^{-i\omega_0 t} (e^{\beta\omega_0} - 1)^{-1} \quad 2.1.8$$

Ovaj se rezultat, takođe, može dobiti i korišćenjem formule Poenkare-Bertrana. S obzirom na analitičnost spektralne intenzivnosti, kontura integracije u 2.1.1 se može (bez izmene rezultata) deformisati, tako da bude zatvorena u donjoj poluravni promenljive ω' , da prolazi kroz tačku ω i da ne obuhvata tačku $\omega = 0$.



Na osnovu formule Poenkare-Bertrana, kvadrat singularnog integrala:

$$\frac{1}{\pi i} \oint_L \frac{d\omega'}{\omega - \omega'} \frac{1}{\pi i} \oint_L \frac{d\omega''}{\omega'' - \omega'} \quad 2.1.9$$

po zatvorenoj konturi je jedinični operator. Ako se ovo prime ni na izraz:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L d\omega' \frac{(e^{\beta\omega'} - 1)I(\omega)}{\omega - \omega'} \quad 2.1.10$$

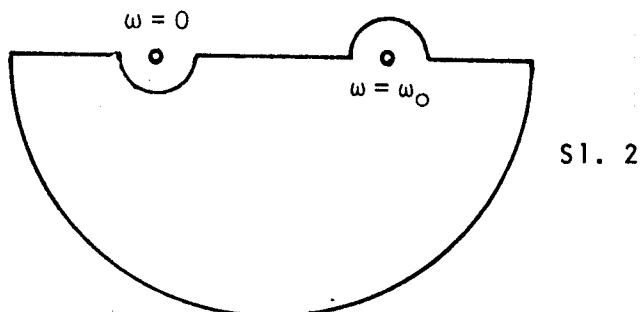
gde je kontura L odabrana kao na S1. 1, tada se dolazi do sledećeg rezultata:

$$\frac{1}{4}(e^{\beta\omega} - 1)I(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \oint_L d\omega' \frac{G(\omega')}{\omega' - \omega} \quad 2.1.11$$

Ako se izraz 2.1.6 zameni u 2.1.11, spektralna intenzivnost se dobija u obliku:

$$I(\omega) = - \frac{ik}{\pi} \frac{1}{(e^{\beta\omega} - 1)(\omega - \omega_0)} \quad 2.1.12$$

Na osnovu dobijene spektralne intenzivnosti, za konturu kao na Sl. 1, gde je pol ω_0 obuhvaćen konturom, a tačka $\omega = 0$ ispuštena, može se pronaći korelaciona funkcija i to na sledeći na-



čin:

$$\begin{aligned} C(t) &= - \frac{ik}{\pi} \oint_L d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{(e^{\beta\omega} - 1)(\omega - \omega_0)} = \\ &= - \frac{ik}{\pi} i\pi \underset{\omega = \omega_0}{\operatorname{Res}} \frac{e^{-i\omega t}}{(e^{\beta\omega} - 1)(\omega - \omega_0)} = ke^{-i\omega t} (e^{\beta\omega} - 1)^{-1} \end{aligned} \quad 2.1.13$$

Kao što se vidi, primenom formula iz teorije singularnih integrala dobijen je isti rezultat 2.1.8, što je dobijeno i primenom standardnog postupka polazeći od relacije 2.1.2.

Ukoliko je $\omega_0 = 0$, relacija 2.1.8 daje besmislen rezultat $C(t) = \infty$. Ovim se potvrđuje već ranije rečeno, da formula 2.1.2 u slučaju kada Grinova funkcija ima pol $\omega_0 = 0$, ne može da se primeni. Razmotrimo sada slučaj kada je $\omega_0 = 0$, odnosno primenu izloženog postupka u kojem se koriste stavovi iz teorije singularnih integrala.

Neka Grinova funkcija ima oblik:

$$G(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{k}{\omega}; \quad \frac{\partial k}{\partial \omega} = 0 \quad 2.1.14$$

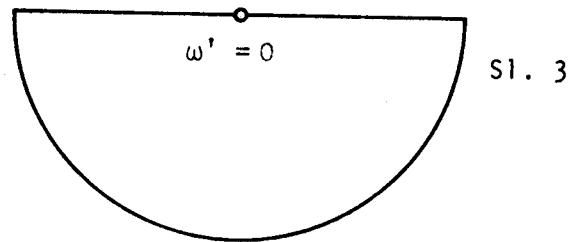
Kontura iz relacije 2.1.1 deformisana je sada tako da bude zatvorena u donjoj poluravni, ali svakako da prolazi kroz tačku $\omega' = 0$, jer u ovom slučaju 0 zamenjuje tačku ω iz prethodnog slučaja.

Primenom formule Poenkare-Bertrana, kao i u prethod-

nom slučaju, dobija se spektralna intenzivnost:

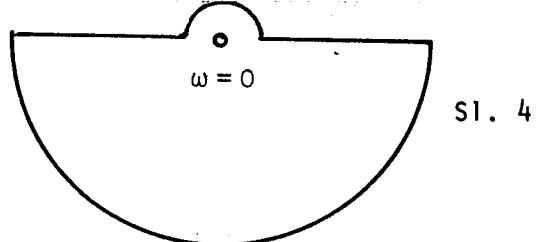
$$I(\omega) = -\frac{ik}{\pi} \frac{1}{(e^{\beta\omega} - 1)\omega}$$

2.1.15



S1. 3

Korelaciona funkcija se određuje na sličan način kao i u prethodnom slučaju, ali kontura L mora da obuhvati tačku $\omega = 0$, jer ona predstavlja pol Grinove funkcije:



S1. 4

Ako se za ovako izabran oblik konture potraži korelaciona funkcija, tada se dobija:

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{ik}{\pi} \oint_L d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{(e^{\beta\omega} - 1)\omega} = \\ &= -\frac{ik}{\pi} \underset{\omega=0}{i\pi} \operatorname{Res} \frac{e^{-i\omega t}}{(e^{\beta\omega} - 1)\omega} = k \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega e^{-i\omega t}}{e^{\beta\omega} - 1} \right), \end{aligned}$$

što daje konačan rezultat:

$$C(t) = -k \left(\frac{1}{2} + \frac{it}{\beta} \right) \quad 2.1.16$$

Kao što se vidi, primena ovog opšteg postupka daje za korelacionu funkciju konačnu funkciju. Takođe se vidi da je za $t=0$ korelaciona funkcija negativna, tj. $C(0) = -k/2$. Na osnovu eksperimenta poznatog fizičara Brokhausa koji je istraživao korelacionu funkciju fluktuacija kristalne gustine prilikom proletanja sporih neutrona dobijena je negativna korelaciona funkcija za $t=0$. Ovaj Brokhausov rezultat je u skladu sa rezultatom 2.1.16 dobijenim u ovom radu.

Navedimo, na kraju ovog izlaganja, rezultat za korelacionu funkciju koja odgovara Grinovoj funkciji sa višestru-

kim polom u nuli. Ako Grinova funkcija ima oblik:

$$G(\omega) = \frac{ik}{2\pi} \frac{1}{\omega^n} \quad 2.1.17$$

tada se primenom iste procedure, izložene u prethodnoj analizi, korelaciona funkcija nalazi po obrascu:

$$\begin{aligned} C(t) &= -\frac{ik}{\pi} \oint_L \frac{d\omega e^{-i\omega t}}{(e^{\beta\omega} - 1)\omega^n} = \\ &= -\frac{ik}{\pi} i\pi \operatorname{Res}_{\omega=0} \frac{e^{-i\omega t}}{(e^{\beta\omega} - 1)\omega^n} = \frac{k}{n!} \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{d^n}{d\omega^n} \left(\frac{e^{-i\omega t}}{e^{\beta\omega} - 1} \right) \end{aligned} \quad 2.1.18$$

Kontura L u obrascu 2.1.18 data je na Sl. 4.. Izvršena analiza je potrebna zbog toga što se prilikom ispitivanja nestacionarnih parnih korelacija eksitona pojavljuje Grinova funkcija koja ima pol za $\omega = 0$.

2.2. TRANSFORMACIJA OPERATORA BROJA EKSITONA I OPERATORA KREACIJE I ANIHILACIJE PAROVA EKSITONA

Parne korelacije eksitona kao i fluktuacije eksitonske gustine ispituju se dijagonalizovanim hamiltonijanom 1.3.6. Pomenuti hamiltonijan ima oblik:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{k}} \left\{ X(\vec{k}) B^+(\vec{k}, 0) B(\vec{k}, 0) + \frac{1}{2} Y(\vec{k}) [B(-\vec{k}, 0) B(\vec{k}, 0) + B^+(\vec{k}, 0) B^+(-\vec{k}, 0)] \right\} \quad 2.2.1$$

Primenom istog postupka kao u prvoj glavi, drugom odeljku, od operatora B i B^+ može se izvesti prelaz na operatore A i A^+ koji su takodje Boze operatori. Kanonička transformacija ima oblik:

$$B(\vec{k}, 0) = u(\vec{k}) A(\vec{k}, 0) + v(\vec{k}) A^+(-\vec{k}, 0) \quad 2.2.2$$

Funkcije u i v date su izrazima:

$$\left. \begin{aligned} u(\vec{k}) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega_X(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} + 1 \right] \\ v(\vec{k}) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega_X(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} - 1 \right] \\ u(\vec{k})v(\vec{k}) &= -\frac{1}{2} \frac{\Omega_Y(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} \end{aligned} \right\} \quad 2.2.3$$

Hamiltonijan 2.2.1 nakon izvršene zamene 2.2.2 dobija sledeći oblik:

$$\begin{aligned}\hat{H} &= \sum_{\vec{k}} \frac{E(\vec{k}) - X(\vec{k})}{2} + \sum_{\vec{k}} E(\vec{k}) A^+(\vec{k}, 0) A(\vec{k}, 0) \equiv \\ &\equiv \hbar \left\{ \sum_{\vec{k}} \frac{\Omega(\vec{k}) - \Omega_X(\vec{k})}{2} + \sum_{\vec{k}} \Omega(\vec{k}) A^+(\vec{k}, 0) A(\vec{k}, 0) \right\} \quad 2.2.4\end{aligned}$$

S obzirom na transformaciju 2.2.2 nestacionarni operatori 1.3.8 mogu se izraziti preko operatora A^+ i A . Ako se relacija 2.2.2, uz korišćenje 2.2.3, zameni u 1.3.8, dobija se rezultat:

$$\begin{aligned}[B(-\vec{k})B(\vec{k})]_t &= -\frac{\Omega_Y(\vec{k})}{2\Omega(\vec{k})} - \frac{\Omega_Y(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} A^+(\vec{k}, 0) A(\vec{k}, 0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega_X(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} + 1 \right] e^{-2it\Omega(\vec{k})} A(-\vec{k}, 0) A(\vec{k}, 0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega_X(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} - 1 \right] e^{2it\Omega(\vec{k})} A^+(\vec{k}, 0) A^+(-\vec{k}, 0) \quad 2.2.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[B^+(\vec{k})B^+(-\vec{k})]_t &= -\frac{\Omega_Y(\vec{k})}{2\Omega(\vec{k})} - \frac{\Omega_Y(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} A^+(\vec{k}, 0) A(\vec{k}, 0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega_X(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} - 1 \right] e^{-2it\Omega(\vec{k})} A(-\vec{k}, 0) A(\vec{k}, 0) + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega_X(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} + 1 \right] e^{2it\Omega(\vec{k})} A^+(\vec{k}, 0) A^+(-\vec{k}, 0) \quad 2.2.6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[B^+(\vec{k})B(\vec{k})]_t &= \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega_X(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} - 1 \right] + \frac{\Omega_X(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} A^+(\vec{k}, 0) A(\vec{k}, 0) - \\ &- \frac{\Omega_Y(\vec{k})}{2\Omega(\vec{k})} e^{-2it\Omega(\vec{k})} A(-\vec{k}, 0) A(\vec{k}, 0) \\ &- \frac{\Omega_Y(\vec{k})}{2\Omega(\vec{k})} e^{2it\Omega(\vec{k})} A^+(\vec{k}, 0) A^+(-\vec{k}, 0) \quad 2.2.7\end{aligned}$$

Ovi se izrazi koriste u daljem izlaganju za ispitivanje parnih korelacija eksitona i fluktuacija eksitonske gustine.

2.3. STACIONARNE I NESTACIONARNE PARNE KORELACIJE

Stacionarne parne korelacijske ispituju se pomoću Gri-

nove funkcije:

$$G(\vec{k}, t) = \langle\langle a(-\vec{k}, t) a(\vec{k}, t) | a^+(\vec{k}, 0) a^+(-\vec{k}, 0) \rangle\rangle \quad 2.3.1$$

gde operatori a i a^+ predstavljaju operatore A i A^+ u Hajzenbergovoj reprezentaciji, tj.

$$\left. \begin{aligned} a(\vec{k}, t) &= e^{i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} A(\vec{k}, 0) e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} \\ a^+(\vec{k}, t) &= e^{i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} A^+(\vec{k}, 0) e^{-i\frac{\hat{H}t}{\hbar}} \end{aligned} \right\} \quad 2.3.2$$

Sam Hamiltonov operator u ovoj reprezentaciji postaje:

$$\hat{H} = \hbar \left\{ \sum_{\vec{k}} \frac{\Omega(\vec{k}) - \Omega_X(\vec{k})}{2} + \sum_{\vec{k}} \Omega(\vec{k}) a^+(\vec{k}, t) a(\vec{k}, t) \right\} \quad 2.3.3$$

Prema opštoj teoriji Grinovih funkcija za Grinovu funkciju $G(\vec{k}, t)$ važi sledeća relacija:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dG(\vec{k}, t)}{dt} &= i\hbar \delta(t) \langle [a(-\vec{k}, 0) a(\vec{k}, 0), a^+(\vec{k}, 0) a^+(-\vec{k}, 0)] \rangle + \\ &+ \langle\langle [a(-\vec{k}, t) a(\vec{k}, t), \hat{H}] | a^+(\vec{k}, 0) a^+(-\vec{k}, 0) \rangle\rangle \end{aligned} \quad 2.3.4$$

Treba naglasiti da su, s obzirom da je hamiltonijan 2.3.3 dijagonalan, sve Grinove funkcije čiji je korelator jednak nuli i same jednake nuli. Korelator je prvi član na desnoj strani relacije 2.3.4.

Ako se u relaciji 2.3.4 nadju komutatori i izvrši prelaz na Furije komponente:

$$\left. \begin{aligned} G(\vec{k}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega G(\vec{k}, \omega) e^{-i\omega t} \\ \delta(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \end{aligned} \right\} \quad 2.3.5$$

dolazi se do konačnog rezultata:

$$\left. \begin{aligned} G(\vec{k}, \omega) &= \frac{iK_G}{2\pi} \frac{1}{\omega - 2\Omega(\vec{k})} \\ K_G &= (1 + \delta_{\vec{0}, \vec{k}}) \operatorname{cth} \frac{\hbar\Omega(\vec{k})}{2\Theta} \end{aligned} \right\} \quad 2.3.6$$

Na osnovu dobijenog izraza za Grinovu funkciju i relacije

2.1.13 , korelaciona funkcija stacionarnih parnih korelacija se može napisati u obliku:

$$\left. \begin{aligned} C_G(\vec{k}, t) &\equiv \langle a^+(\vec{k}, 0) a^+(-\vec{k}, 0) a(-\vec{k}, t) a(\vec{k}, t) \rangle = Re C_{G1} + i Im C_{G1} \\ Re C_{G1}(\vec{k}, t) &= \frac{K_G \cos 2\Omega(\vec{k})t}{e^{2\hbar\Omega(\vec{k})/\theta} - 1} \\ Im C_{G1}(\vec{k}, t) &= \frac{K_G \sin 2\Omega(\vec{k})t}{e^{2\hbar\Omega(\vec{k})/\theta} - 1} \end{aligned} \right\} 2.3.7$$

Kao što se vidi stacionarne parne korelacije eksitona se vrše uz razmenu energije u procesu $2\hbar\Omega(\vec{k})$. Takodje se vidi da su i Re i Im deo korelacione funkcije periodične funkcije vremena.

U daljem se tekstu ispituju nestacionarne parne korelacije. Nestacionarne parne korelacije nazivaju se one korelacije u kojima učestvuju operatori $[B(-\vec{k})B(\vec{k})]_t$ i $[B^+(\vec{k})B^+(-\vec{k})]_t$. Ove se korelacije ispituju preko Grinove funkcije:

$$\Gamma(\vec{k}, t) = \langle b(-\vec{k}, t)b(\vec{k}, t)|b^+(\vec{k}, 0)b^+(\vec{k}, 0) \rangle \quad 2.3.8$$

gde su:

$$\begin{aligned} b(-\vec{k}, t)b(\vec{k}, t) &= e^{\frac{\hat{H}t}{i\hbar}} [B(-\vec{k})B(\vec{k})]_t e^{-\frac{\hat{H}t}{i\hbar}} = \\ &= -\frac{\Omega_Y(\vec{k})}{2\Omega(\vec{k})} - \frac{\Omega_Y(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} a^+(\vec{k}, t)a(\vec{k}, t) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega_X(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} + 1 \right] e^{-2i\Omega(\vec{k})t} a(-\vec{k}, t)a(\vec{k}, t) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega_X(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} - 1 \right] e^{2i\Omega(\vec{k})t} a^+(\vec{k}, t)a^+(-\vec{k}, t) \end{aligned} \quad 2.3.9$$

$$\begin{aligned} b^+(\vec{k}, 0)b^+(\vec{k}, 0) &= \left\{ e^{\frac{\hat{H}t}{i\hbar}} [B^+(\vec{k})B^+(-\vec{k})]_t e^{-\frac{\hat{H}t}{i\hbar}} \right\}_{t=0} = \\ &= -\frac{\Omega_Y(\vec{k})}{2\Omega(\vec{k})} - \frac{\Omega_Y(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} a^+(\vec{k}, 0)a(\vec{k}, 0) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega_X(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} + 1 \right] a(-\vec{k}, 0)a(\vec{k}, 0) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\Omega_X(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} - 1 \right] a^+(\vec{k}, 0)a(\vec{k}, 0) \end{aligned} \quad 2.3.9$$

Primenom istog postupka kao i prilikom nalaženja Grinove funk-

cije $G(\vec{k}, t)$, odnosno $G(\vec{k}, \omega)$ dobija se sledeći rezultat:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(\vec{k}, \omega) &= \frac{iK_{\Gamma}}{2\pi} \left\{ \frac{\Omega_X(\vec{k})}{2\Omega(\vec{k})} \frac{1}{\omega} + \right. \\ &+ \frac{[\Omega_X(\vec{k}) + \Omega(\vec{k})]^2}{8\Omega^2(\vec{k})} \frac{1}{\omega - 4\Omega(\vec{k})} - \frac{[\Omega_X(\vec{k}) - \Omega(\vec{k})]^2}{8\Omega^2(\vec{k})} \frac{1}{\omega + 4\Omega(\vec{k})} \left. \right\} \\ \Gamma(\vec{k}, \omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \Gamma(\vec{k}, t) e^{-i\omega t} \\ K_{\Gamma} &= K_G \end{aligned} \right\} \quad 2.3.10$$

Vidi se, na osnovu dobijenog rezultata, da Grinova funkcija Γ koja opisuje nestacionarne parne korelacije ima pol za $\omega = 0$, a sem toga polove $4\Omega(\vec{k})$ i $-4\Omega(\vec{k})$. Treba uočiti da se, za razliku od stacionarnih parnih korelacija nestacionarne parne korelacije vrše uz razmenu energije u iznosu $4\hbar\Omega(\vec{k})$. Korelaciona funkcija (budući da postoji pol $\omega = 0$) se dobija kombinovanjem relacija 2.1.16 i 2.1.13. Kao rezultat se dobija sledeći izraz:

$$\left. \begin{aligned} C_G(\vec{k}, t) &= \langle b^+(\vec{k}, 0) b^+(-\vec{k}, 0) b(-\vec{k}, t) b(\vec{k}, t) \rangle = \operatorname{Re} C_{\Gamma} + i \operatorname{Im} C_{\Gamma} \\ \operatorname{Re} C_{\Gamma}(\vec{k}, t) &= \frac{-K_{\Gamma}}{4} \cdot \left\{ 1 + \left[1 - \frac{\Omega_X^2(\vec{k}) + \Omega^2(\vec{k})}{2\Omega(\vec{k})\Omega_X(\vec{k})} \operatorname{cth} \frac{2\hbar\Omega(\vec{k})}{\theta} \right] \cos 4\Omega(\vec{k})t \right\} \\ \operatorname{Im} C_{\Gamma}(\vec{k}, t) &= \frac{-K_{\Gamma}}{4} \left\{ \frac{2t\theta}{\hbar} - \left[\frac{\Omega_X^2(\vec{k}) + \Omega^2(\vec{k})}{2\Omega(\vec{k})\Omega_X(\vec{k})} - \operatorname{cth} \frac{2\hbar\Omega(\vec{k})}{\theta} \right] \sin 4\Omega(\vec{k})t \right\} \end{aligned} \right\} \quad 2.3.11$$

Ovde se može zapaziti još jedna specifičnost nestacionarnih parnih korelacija koja ih razlikuje od odgovarajućih stacionarnih parnih korelacija: realni deo korelacione funkcije, a to znači i sama korelaciona funkcija u trenutku $t = 0$ ima negativnu vrednost. Vidi se takođe da je imaginarni deo korelacione funkcije za nestacionarne parne korelacijske aperiodičan i linearno proporcionalan vremenu, što znači da u nestacionarnim parnim korelacijama dolazi do jake disipacije elektronske energije.

2.4. STACIONARNE I NESTACIONARNE FLUKTUACIJE GUSTINE

Stacionarne fluktuacije gustine ispituju se pomoću Grinove funkcije:

$$F(\vec{k}, t) = \langle\langle a^+(\vec{k}, t)a(\vec{k}, t) | a^+(\vec{k}, 0)a(\vec{k}, 0) \rangle\rangle \quad 2.4.1$$

Kao što se vidi, korelator ove funkcije:

$$\langle [a^+(\vec{k}, 0)a(\vec{k}, 0), a^+(\vec{k}, 0)a(\vec{k}, 0)] \rangle = 0 \quad 2.4.2$$

jednak je nuli, pa kako je hamiltonijan dijagonalan i sama funkcija $F(\vec{k}, t)$ je jednaka nuli. Prema tome, u sistemu eksitona nema stacionarnih fluktuacija gustine.

Razmotrimo sada nestacionarne fluktuacije eksitonske gustine. Nestacionarnu gustinu eksitona predstavlja operator $[B^+(\vec{k})B(\vec{k})]_t$, dat izrazom 2.2.7. Grinova funkcija, pomoću koje se ispituju nestacionarne fluktuacije gustine, ima oblik:

$$\Phi(\vec{k}, t) = \langle\langle b^+(\vec{k}, t)b(\vec{k}, t) | b^+(\vec{k}, 0)b(\vec{k}, 0) \rangle\rangle \quad 2.4.3$$

gde su upotrebljene označbe:

$$\begin{aligned} b^+(\vec{k}, t)b(\vec{k}, t) &= e^{\frac{\hat{H}t}{i\hbar}}[B^+(\vec{k})B(\vec{k})]_t e^{-\frac{\hat{H}t}{i\hbar}} = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\Omega_X(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} - 1\right] + \frac{\Omega_X(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} a^+(\vec{k}, t)a(\vec{k}, t) - \\ &- \frac{\Omega_Y(\vec{k})}{2\Omega(\vec{k})} e^{-2it\Omega(\vec{k})} a(-\vec{k}, t)a(\vec{k}, t) - \\ &- \frac{\Omega_Y(\vec{k})}{2\Omega(\vec{k})} e^{2it\Omega(\vec{k})} a^+(\vec{k}, t)a^+(-\vec{k}, t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^+(\vec{k}, 0)b(\vec{k}, 0) &= \left\{ e^{\frac{\hat{H}t}{i\hbar}}[B^+(\vec{k})B(\vec{k})]_t e^{-\frac{\hat{H}t}{i\hbar}} \right\}_{t=0} = \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\Omega_X(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} - 1\right] + \frac{\Omega_X(\vec{k})}{\Omega(\vec{k})} a^+(\vec{k}, 0)a(\vec{k}, 0) - \\ &- \frac{\Omega_Y(\vec{k})}{2\Omega(\vec{k})} a(-\vec{k}, 0)a(\vec{k}, 0) - \frac{\Omega_Y(\vec{k})}{2\Omega(\vec{k})} a^+(\vec{k}, 0)a^+(-\vec{k}, 0) \quad 2.4.4 \end{aligned}$$

Za funkciju $\Phi(\vec{k}, t)$ može se napisati sledeća relacija:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d\Phi(\vec{k}, t)}{dt} &= i\hbar\delta(t)\langle [b^+(\vec{k}, 0)b(\vec{k}, 0), b^+(\vec{k}, 0)b(\vec{k}, 0)] \rangle + \\ &+ \langle\langle [b^+(\vec{k}, t)b(\vec{k}, t), \hat{H}] | b^+(\vec{k}, 0)b(\vec{k}, 0) \rangle\rangle \quad 2.4.5 \end{aligned}$$

koja posle Furije transformacije:

$$\phi(\vec{k}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \phi(\vec{k}, \omega) e^{i\omega t} \quad 2.4.6$$

daje sledeći rezultat:

$$\phi(\vec{k}, \omega) = \frac{iK_\Phi}{2\pi} \frac{\Omega_Y^2(\vec{k})}{8\Omega^2(\vec{k})} \left[\frac{1}{\omega - 4\Omega(\vec{k})} - \frac{1}{\omega + 4\Omega(\vec{k})} \right] \quad 2.4.7$$

$$K_\Phi = K_\Gamma$$

Kao što se vidi, Grinova funkcija $\phi(\vec{k}, \omega)$ ima polove u tačkama $\omega = 4\Omega(\vec{k})$ i $\omega = -4\Omega(\vec{k})$. Pol u $\omega = 0$ ne postoji. Korelaciona funkcija se može naći samo primenom relacije 2.1.13. Nakon primene pomenute relacije dobija se sledeći rezultat:

$$C_\phi(\vec{k}, t) = \langle b^\dagger(\vec{k}, 0)b(\vec{k}, 0)b^\dagger(\vec{k}, t)b(\vec{k}, t) \rangle = Re C_\phi + i Im C_\phi$$

$$Re C_\phi(\vec{k}, t) = \frac{K_\Phi \Omega_Y^2(\vec{k})}{8\Omega(\vec{k})\Omega_X(\vec{k})} \operatorname{cth} \frac{2\hbar\Omega(\vec{k})}{\theta} \cos 4\Omega(\vec{k})t \quad 2.4.8$$

$$Im C_\phi(\vec{k}, t) = \frac{K_\Phi \Omega_Y^2(\vec{k})}{8\Omega(\vec{k})\Omega_X(\vec{k})} \sin 4\Omega(\vec{k})t$$

Vidi se da i realni i imaginarni deo korelacione funkcije nestacionarnih fluktuacija eksitonske gustine jesu periodične funkcije vremena, što znači da, za razliku od nestacionarnih parnih korelacija, ovde nema porasta disipacije sa vremenom. Kao i nestacionarne parne korelacijske i nestacionarne fluktuacijske eksitonske gustine vrše se uz razmenu kvanata energije veličine $4\hbar\Omega(\vec{k})$.

Z A K L J U Č A K

Ispitivanja nestacionarnih i stacionarnih parnih korelacija u sistemu eksitona, kao i ispitivanja nestacionarnih i stacionarnih fluktuacija eksitonske gustine dala su rezultate koji se mogu rezimirati na sledeći način:

a) stacionarne parne korelacijske karakteristike se razmenom kvazianstvene energije veličine $2\hbar\Omega(\vec{k})$ i periodičnošću realnog i imaginarnog dela korelacione funkcije.

b) nestacionarne parne korelacijske karakteristike se razmenom kvazianstvene energije veličine $4\hbar\Omega(\vec{k})$. Osim toga realni deo korelacione funkcije, kao i sama korelaciona funkcija, negativni su u trenutku vremena $t=0$. Što se tiče imaginarnog dela korelacione funkcije, on je linearno proporcionalan vremenu, što znači da usled nestacionarnih parnih korelacija dolazi do disipacije, tj. eksitonska energija se pretvara u druge vidove energije.

c) stacionarne fluktuacije eksitonske gustine uopšte ne postoje, dok se nestacionarne fluktuacije odvijaju uz razmenu kvazianstvene energije čija je veličina $4\hbar\Omega(\vec{k})$. Realni i imaginarni deo korelacione funkcije nestacionarnih fluktuacija eksitonske gustine su periodične funkcije vremena, što znači da disipacija eksitonske energije nije tako intenzivna kao u slučaju nestacionarnih parnih korelacija.

Iz izloženog se vidi da su nestacionarne parne korelacijske karakteristike onaj efekat eksitonske dinamike koji u sebi sadrži najviše specifičnih osobina. Što se tiče negativne korelacione funkcije, pri $t=0$, ovaj rezultat služi kao objašnjenje Brokhausovog eksperimenta u vezi sa fluktuacijama kristalne gustine, pa se može reći da su nestacionarne parne korelacijske karakteristike eksitona slične fluktuacijama kristalne gustine kada se kristal bombarduje sporim neutronima. Veoma velika disipacija eksitonske energije do koje dolazi u procesu nestacionarnih parnih korelacija ukazuje na činjenicu da sistem eksitona ima disperzivna svojstva koja su primećena u biološkoj materiji (i tamo disipacija raste linearno proporcionalno vremenu). S obzirom na rečeno,

može se zaključiti da rezultati ovog rada na neki način potvrđuju ideje Alberta Sent Djerdjija o tome da eksitonski mehanizam igra bitnu ulogu u biološkim procesima.

Na kraju treba reći da osim eksitona i drugi fizički sistemi (feroelektrici i neki magnetni materijali) takođe ne održavaju broj pobudjenja, pa se zaključci, dobijeni ovde, mogu neposredno primeniti i na ove materijale.

L I T E R A T U R A

1. В.М. Агранович „Теория экситонов”, Москва 1968.
2. А.С. Давыдов „Квантовая механика”, Москва 1973.
3. С.В. Тябликов „Методы квантовой теории магнетизма”, Наука, Москва 1965.
4. Ф.Д. Тахов „Краевые задачи”, ГИФМЛ, Москва 1963.
5. B.N. Brockhouse, N.K. Pope, *Phys. Rev. Lett.* 3, 259 (1959)
6. А. Сент Дээрдэй „Биоэнергетика”, Москва 1961.