PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET U

NOVOM SADU

O NEKIM PROBLEMIMA RELATIVISTIČKE KVANTNE MEHANIKE

Novi Sad 1981

Z A H V A L J U J E M S E P R O F E S O R U

Dr. BRATISLAVU S. TOŠIĆU

NA SUGESTIJAMA TOKOM IZRADE DIPLOMSKOG RADA

S A D R Ž A J :

1. KLAJN-GORDONOVA I DIRAKOVA JEDNAČINA

Početkom XX veka razvile su se dve značajne i fundamentalno nove fizičke teorije. Jedna je bila Anštajnova specijalna teorija relativnosti, a druga Kvantna mehanika. Treba naglasiti da su u početnoj fazi analizirani problemi klasične fizike u svetlu teorije relativnosti, dok se kvantna mehanika u početku bavila problemima fizike u kojima nisu bili uzeti u obzir relativistički efekti. Tek tridesetih godina ovog veka, počeli su ozbiljno da se tretiraju problemi relativističke kvantne mehanike, to jest kvantne mehanike koja uzima u obzir relativističke efekte.

Već u samom početku razvitka relativističke kvantne mehanike pojavio se jedan fundamentalan problem, koji se sastojao u tome što operator relativističke kinetičke energije nije bio linearan operator, a kao što se zna, kvantna mehanika zbog principa superpozicije zahteva linearnost operatora koji prestavljaju fizičke veličine.

Ako se krene od osnovnih formula relativističke teorije:

$$E = mc^2 \,;\; \vec{p} = m\vec{v} \,;\; m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \,;\; \vec{p} = p_1\vec{i} + p_2\vec{j} + p_3\vec{k} \tag{1.1}$$

onda se dolazi do relacije $c^2m^2 - \vec{p}^{\,2} = m_0^2c^2$ (1.2)

odakle sledi:

$$\hat{H}_{kin} = c\sqrt{\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2 + \hat{p}_4^2} \,;\; p_4 = m_0 c \tag{1.3}$$

Zbog korena koji se javlja u (1.3) očigledno je da je operator kinetičke energije nelinearan. Prvu ideju za kvantno-mehanički tretman sa Hamiltonijanom (1.3) dali su Klajn i Gordon, polazeći od ideje da $\hat{H}^2_{kin}$ pretstavlja linearni operator. S tim u vezi oni su rešavali:

$$\hat{H}^2_{kin}\Psi = E^2\Psi$$

što se svelo na:

$$\Delta\Psi + \left(\frac{2mE^2}{\hbar^2c^2} - \frac{2m_0^2c^2}{\hbar^2}\right)\Psi = 0 \tag{1.4}$$

Ova jednačina se naziva Klajn-Gordonova jednačina i pokazala se kao uspešna pri rešavanju problema čestica koje imaju ili nultu masu mirovanja $(m_0 = 0)$, ili $m_0 \neq 0$ ali nulti ili celobrojni spin. Za čestice sa polu celim spinom Klajn-Gordonova

jednačina se pokazala kao nepodesna.
Engleski fizičar Dirak , pristupijo je relativističkom problemu sa operatorom (1.3) na sasvim drugi način. On je odlučijo da operator (1.3) "linearizuje"i to tako što je postavijo zahtev:

$$\hat{p}_1^2+\hat{p}_2^2+\hat{p}_3^2+\hat{p}_4^2=(\alpha_1\hat{p}_1+\alpha_2\hat{p}_2+\alpha_3\hat{p}_3+\alpha_4\hat{p}_4)^2 \tag{1.5}$$

Ispostavilo se da (1.5) može biti zadovoljeno ako koeficijenti ispunjavaju uslove :

$$\alpha_1^2=\alpha_2^2=\alpha_3^2=\alpha_4^2=1 \qquad \begin{aligned} \alpha_1\alpha_2+\alpha_2\alpha_1&=0\\ \alpha_1\alpha_3+\alpha_3\alpha_1&=0\\ \alpha_1\alpha_4+\alpha_4\alpha_1&=0\\ \alpha_2\alpha_3+\alpha_3\alpha_2&=0\\ \alpha_2\alpha_4+\alpha_4\alpha_2&=0\\ \alpha_3\alpha_4+\alpha_4\alpha_3&=0 \end{aligned} \tag{1.6}$$

Očigledno je da ove uslove nemogu da zadovolje obični brojevi α. Dirak je pronašao da veličine α moraju da budu matrice 4x4. Uslučaju da važi (1.5)operator kinetičke energije(1.3) postaje.

$$\hat{H}_{kin}=\pm c(\alpha_1\hat{p}_1+\alpha_2\hat{p}_2+\alpha_3\hat{p}_3+\alpha_4\hat{p}_4) \tag{1.7}$$

Ovaj operator je linearan ali predstavlja matricu 4x4,čiji su elementi diferencijalni operatori. Na ovaj način došlo se do Dirakove jednačine

$$\hat{H}_{kin}\tilde{\Psi}=E\tilde{\Psi} \tag{1.8}$$

gde pošto je $\hat{H}_{kin}$ matrica 4x4 , talasne funkcije $\tilde{\Psi}$ moraju da budu četvorokomponentne kolone oblika :

$$\tilde{\Psi}=\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{pmatrix} \tag{1.9}$$

uslov normiranja ovih funkcija glasi :

$$\int dv\,\tilde{\Psi}^*\tilde{\Psi}=\int dv\,(\Psi_1^*\,\Psi_2^*\,\Psi_3^*\,\Psi_4^*)\begin{pmatrix}\Psi_1\\ \Psi_2\\ \Psi_3\\ \Psi_4\end{pmatrix}=\int dv\left[|\Psi_1|^2+|\Psi_2|^2+|\Psi_3|^2+|\Psi_4|^2\right]=1 \tag{1.10}$$

Dirakova jednačina uspela je da objasni pojavu spina , koja se zahvaljujući tome smatra za posledicu relativističkih efekata. Jedan velikih uspeha Dirakove teorije je pretskazivanje postojanja anti-čestica. Radi se o tome što se prilikom rešavanja Dirakove jednačine u kulonovskom polju ispostavilo da za energiju postoje dva rešenja od kojih jedno odgovara energijama elektrona, a drugo razdvojeno od njega pragom energije $2m_0c^2$ odgovara energijama pozitrona to jest čestici koja ima istu masu kao elektron ali suprotno naelektrisanje.

Kasnije se ispostavilo da svaka nama poznata čestica ima odgovarajuću anti-česticu, i danas je pojam anti-materije dobro poznat i eksperimentalno verifikovan. Na kraju ovog dela izlaganja treba zapaziti da je masa u Dirakovoj teoriji operator koji ima oblik :

$$\hat{m} = \frac{\hat{H}_{kin}}{c^2} = \frac{1}{c}\left(\alpha_1 \hat{p}_1 + \alpha_2 \hat{p}_2 + \alpha_3 \hat{p}_3 + \alpha_4 \hat{p}_4\right) \qquad (1.11)$$

S tim u vezi , ako se u relativističkim problemima pojavi potencijalna energija koja je proporcijonalna masi, treba voditi računa o operatorskom karakteru mase.

Cilj ovog diplomskog rada je da se ispitaju neki relativistički problemi u kojima je potencijalna energija proporcionalna masi kretanja čestice. Zbog izvanredne teškoće rešavanja računa u daljem tekstu rada REŠAVAĆE SE ISKLJUČIVO JEDNODIMENZIONALNI PROBLEMI.

2. DIRAKOV PROBLEM ZA JEDNODIMENZIONALNO KRETANJE

Energija, impuls i masa dati su u relativističkoj teoriji sa:

$$E = mc^2 \; ; \; p = mv \; ; \; m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{2.1}$$

Dalje možemo pisati

$$m^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = m_0^2 \; ; \; c^2 m^2 - (mv)^2 = m_0^2 c^2 \; ; \; m^2 = \frac{1}{c^2}(p^2 + p_0^2) \; ; \; p_0 = m_0 c$$

odavde sledi:

$$m = \frac{1}{c}\sqrt{p^2 + p_0^2} \; ; \; E = c\sqrt{p^2 + p_0^2} \tag{2.2}$$

Ako pređemo na kvantno mehaničke operatore, onda $E \to \hat{H}$ koji mora biti linearni operator i $m \to \hat{m}$, koji takođe mora biti linearan. U tom cilju ćemo sumu kvadrata operatora

$$\hat{p}^2 + \hat{p}_0^2 \; ; \; \hat{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x} \; ; \; \hat{p}_0 = m_0 c \tag{2.3}$$

pretvoriti u kvadrat sume.

$$\hat{p}^2 + \hat{p}_0^2 \equiv (\alpha\hat{p} + \beta\hat{p}_0)^2 = \alpha^2\hat{p}^2 + (\alpha\beta + \beta\alpha)\hat{p}\hat{p}_0 + \beta^2\hat{p}_0^2 \tag{2.4}$$

Da bi važio identitet (2.4) mora biti:

$$\alpha^2 = 1 \; ; \; \beta^2 = 1 \; ; \; \alpha\beta + \beta\alpha = 0 \tag{2.5}$$

Uzmimo da je

$$\alpha = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \; ; \; \beta = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ T & 0 \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

pa je

$$\alpha^2 = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X^2 & 0 \\ 0 & Y^2 \end{pmatrix} \; ; \; \beta^2 = \begin{pmatrix} 0 & Z \\ T & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & Z \\ T & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ZT & 0 \\ 0 & ZT \end{pmatrix}$$

$$\alpha\beta + \beta\alpha = \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & Z \\ T & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & Z \\ T & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (X+Y)Z \\ (X+Y)T & 0 \end{pmatrix}$$

Da bi bili ispunjeni uslovi (2.5) uzećemo:

$$X = 1 \; ; \; Y = -1 \; ; \; Z = -i \; ; \; T = i \tag{2.7}$$

pa je:

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

i operatori $\hat{m}$ i $\hat{H}$ imaju oblik

$$\hat{m} = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} \hat{p} & -i\hat{p}_0 \\ i\hat{p}_0 & -\hat{p} \end{pmatrix} \; ; \; \hat{H} = c\begin{pmatrix} \hat{p} & -i\hat{p}_0 \\ i\hat{p}_0 & -\hat{p} \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

odnosno:
$$\frac{d^2\Phi_1}{dx^2}+\frac{\omega_1^2c^2-\omega_0^2c^2}{\hbar^2}\Phi_1=0 \tag{3.4}$$

Na osnovu (2.1) možemo pisati
$$\omega_1^2-\omega_0^2=\frac{\omega_0^2}{1-v^2/c^2}-\omega_0^2=\omega_0^2\left(\frac{c^2}{c^2-v^2}-1\right)=\omega_0\frac{v^2}{c^2-v^2}=$$
$$=\frac{\omega_0^2}{c^2/v^2-1}=\frac{\omega_0^2}{1-v^2/c^2}\cdot\frac{1-\frac{v^2}{c^2}}{c^2/v^2-1}=\omega_1^2\frac{\frac{c^2-v^2}{c^2}}{\frac{c^2-v^2}{v^2}}=\omega_1^2\frac{v^2}{c^2}=\left(\frac{\omega_1 v}{c}\right)^2$$

Sada (3.4) postaje:
$$\frac{d^2\Phi_1}{dx^2}+\left(\frac{\omega_1 v}{c}\right)^2\frac{c^2}{\hbar^2}\Phi_1=0$$
odnosno:
$$\frac{d^2\Phi_1}{dx^2}+\left(\frac{\omega_1 v}{\hbar}\right)^2\Phi_1=0 \tag{3.5}$$
Jedno partikularno rešenje je:
$$\Phi_1=C_1 e^{-i\frac{\omega_1 v}{\hbar}x} \tag{3.6}$$

pošto je
$$\Phi_2=-\frac{\hbar}{\omega_0 c}\frac{d\Phi_1}{dx}-\frac{\omega_1}{i\omega_0}\Phi_1$$
to sledi
$$\Phi_2=C_1\left(-\frac{\hbar}{\omega_0 c}i\frac{\omega_1 v}{\hbar}+\frac{i\omega_1}{\omega_0}\right)e^{i\frac{\omega_1 v}{\hbar}x}=i\frac{\omega_1}{\omega_0}\left(1-\frac{v}{c}\right)C_1 e^{i\frac{\omega_1 v}{\hbar}x} \tag{3.7}$$
znači:
$$\Phi_1=C_1e^{i\frac{p}{\hbar}x}\ ;\ \Phi_2=i\frac{\omega_1}{\omega_0}\left(1-\frac{v}{c}\right)C_1e^{i\frac{p}{\hbar}x}\ ;\ p=\omega_1 v \tag{3.8}$$

Sistem se normira na delta funkciju, to jest:
$$C_1^2\int_{-\infty}^{+\infty}dx\left[e^{i\frac{p-p'}{\hbar}x}+\frac{\omega_1^2}{\omega_0^2}\left(1-\frac{v}{c}\right)^2e^{i\frac{p-p'}{\hbar}x}\right]=\delta(p-p')$$

$$C_1^2\left[1+\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2}\frac{(1-v/c)^2}{1-v^2/c^2}\right]\int_{-\infty}^{+\infty}dx\, e^{i\frac{p-p'}{\hbar}x}=\delta(p-p')$$

$$C_1^2\left(1+\frac{c-v}{c+v}\right)\delta\left(\frac{p-p'}{\hbar}\right)2\pi=\delta(p-p')$$

3. SVOJSTVENI PROBLEM OPERATORA MASE

Ovaj problem se postavlja na sledeći način:

$$\hat{m}\hat{\Phi} = m\hat{\Phi} \quad ; \quad \frac{1}{c}\begin{pmatrix} \hat{p} & -ip_0 \\ ip_0 & -\hat{p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} \tag{3.1}$$

Dalje je

$$\begin{pmatrix} -\frac{i\hbar}{c}\frac{d}{dx} & -im_0 \\ im_0 & \frac{i\hbar}{c}\frac{d}{dx} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Phi_1 \\ \Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\Phi_1 \\ m\Phi_2 \end{pmatrix}$$

$$-\frac{i\hbar}{c}\frac{d\Phi_1}{dx} - m\Phi_1 - im_0\Phi_2 = 0 \quad ; \quad \frac{i\hbar}{c}\frac{d\Phi_2}{dx} - m\Phi_2 + im_0\Phi_1 = 0$$

i dolazimo do sistema diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} &\frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{mc}{i\hbar}\Phi_1 + \frac{m_0 c}{\hbar}\Phi_2 = 0 \\ &\frac{d\Phi_2}{dx} - \frac{mc}{i\hbar}\Phi_2 + \frac{m_0 c}{\hbar}\Phi_1 = 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ako prvu jednačinu diferenciramo po x dobijemo sledeće

$$\frac{d^2\Phi_1}{dx^2} + \frac{mc}{i\hbar}\frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{m_0 c}{\hbar}\frac{d\Phi_2}{dx} = 0$$

Posle zamene $\frac{d\Phi_2}{dx}$ iz druge jednačine (3.2) u dobijenu relaciju imamo:

$$\frac{d^2\Phi_1}{dx^2} + \frac{mc}{i\hbar}\frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{m_0 c}{\hbar}\left(\frac{mc}{i\hbar}\Phi_2 - \frac{m_0 c}{\hbar}\Phi_1\right) = 0$$

odnosno:

$$\frac{d^2\Phi_1}{dx^2} + \frac{mc}{i\hbar}\frac{d\Phi_1}{dx} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Phi_1 + \frac{m m_0 c^2}{i\hbar^2}\Phi_2 = 0 \tag{3.3}$$

Iz prve od jednačina (3.2) imamo da je:

$$\Phi_2 = -\frac{\hbar}{m_0 c}\frac{d\Phi_1}{dx} - \frac{m}{im_0}\Phi_1$$

pa 3.3 postaje:

$$\frac{d^2\Phi_1}{dx^2} + \frac{mc}{i\hbar}\frac{d\Phi_1}{dx} - \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\Phi_1 - \frac{mc}{i\hbar}\frac{d\Phi_1}{dx} + \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\Phi_1 = 0$$

$$C_1^2 = \frac{1+v/c}{4\pi\hbar} \quad ; \quad C_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+v/c}{\pi\hbar}} \tag{3.9}$$

Zamenom C u (3.8) dobijemo konačno:

$$\Phi_1(x,p) = \sqrt{\frac{1+v/c}{4\pi\hbar}}\, e^{i\frac{p}{\hbar}x} \, ; \quad \Phi_2(x,p) = i\sqrt{\frac{1-v/c}{4\pi\hbar}}\, e^{i\frac{p}{\hbar}x} \, ; \quad p = mv \tag{3.10}$$

4. SVOJSTVENI PROBLEM OPERATORA KINETIČKE ENERGIJE

Ovaj problem se matematički izražava na:

$$\hat{H}\hat{\Psi} = E\hat{\Psi} \qquad c\begin{pmatrix}\hat{p} & -i\hat{p}_0 \\ i\hat{p}_0 & -\hat{p}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1 \\ \Psi_2\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\Psi_1 \\ \Psi_2\end{pmatrix} \tag{4.1}$$

Dalje je:

$$\begin{pmatrix}-i\hbar c\frac{d}{dx} & -im_0c^2 \\ im_0c^2 & i\hbar c\frac{d}{dx}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_1 \\ \Psi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}E\Psi_1 \\ E\Psi_2\end{pmatrix}$$

$$-i\hbar c\frac{d\Psi_1}{dx} - E\Psi_1 - im_0c^2\Psi_2 = 0 \quad ; \quad i\hbar c\frac{d\Psi_2}{dx} - E\Psi_2 + im_0c^2\Psi_1 = 0$$

i dobijamo sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned}&\frac{d\Psi_1}{dx} + \frac{E}{i\hbar c}\Psi_1 + \frac{m_0c}{\hbar}\Psi_2 = 0 \\ &\frac{d\Psi_2}{dx} - \frac{E}{i\hbar c}\Psi_2 + \frac{m_0c}{\hbar}\Psi_1 = 0\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\frac{d\Psi_2}{dx} = \frac{E}{i\hbar c}\Psi_2 - \frac{m_0c}{\hbar}\Psi_1 \, ; \quad \Psi_2 = -\frac{\hbar}{m_0c}\frac{d\Psi_1}{dx} - \frac{E}{im_0c^2}\Psi_1$$

$$\frac{d\Psi_2}{dx} = -\frac{E}{im_0c^2}\frac{d\Psi_1}{dx} + \frac{E^2}{\hbar m_0c^3}\Psi_1 - \frac{m_0c}{\hbar}\Psi_1$$

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + \frac{E}{i\hbar c}\frac{d\Psi_1}{dx} + \frac{m_0c}{\hbar}\frac{d\Psi_2}{dx} = 0$$

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + \frac{E}{i\hbar c}\frac{d\Psi_1}{dx} - \frac{E}{i\hbar c}\frac{d\Psi_1}{dx} + \frac{E^2}{\hbar^2c^2}\Psi_1 - \frac{m_0^2c^2}{\hbar^2}\Psi_1 = 0$$

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + \frac{E^2 - m_0^2c^4}{\hbar^2c^2}\Psi_1 = 0 \tag{4.3}$$

Na osnovu (2.1) možemo pisati:

$$\frac{E^2-m_0^2c^4}{\hbar^2c^2}=\frac{m^2c^4-m_0^2c^4}{\hbar^2c^2}=\frac{c^2}{\hbar^2}(m^2-m_0^2)=\frac{c^2m_0^2}{\hbar^2}\left(\frac{1}{1-v^2/c^2}-1\right)=\frac{c^2m_0^2}{\hbar^2}\left(\frac{c^2}{c^2-v^2}-1\right)=$$

$$=\frac{c^2}{\hbar^2}\,\frac{m_0^2}{c^2/v^2-1}=\frac{c^2}{\hbar^2}\,\frac{m_0^2}{1-v^2/c^2}\cdot\frac{1-v^2/c^2}{c^2/v^2-1}=\frac{c^2}{\hbar^2}m^2\,\frac{\frac{c^2-v^2}{c^2}}{\frac{c^2-v^2}{v^2}}=\frac{m^2v^2}{\hbar^2}$$

znači:
$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2}+\left(\frac{mv}{\hbar}\right)^2\Psi_1=0 \tag{4.4}$$

Jedno partikularno rešenje je:
$$\Psi_1=C_1e^{i\frac{p}{\hbar}x}\ ;\quad p=mv \tag{4.5}$$

Sada treba naći funkciju
$$\Psi_2=-\frac{\hbar}{m_0c}\,i\frac{p}{\hbar}C_1e^{i\frac{p}{\hbar}x}+\frac{iE}{m_0c^2}C_1e^{i\frac{p}{\hbar}x}=$$
$$=C_1\frac{i}{m_0c}\left(\frac{E}{c}-p\right)e^{i\frac{p}{\hbar}x}$$

Dalje možemo pisati:
$$\frac{1}{m_0c}\left(\frac{E}{c}-p\right)=\frac{1}{m_0c}\left(\frac{mc^2}{c}-mv\right)=\frac{1}{m_0c}m(c-v)=\frac{1}{c}\,\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}(c-v)=$$
$$=\frac{1}{c}\,\frac{c}{\sqrt{(c-v)(c+v)}}(c-v)=\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}$$

znači:
$$\Psi_2=iC_1\sqrt{\frac{c-v}{c+v}}\,e^{i\frac{p}{\hbar}x}=iC_1\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}}\,e^{i\frac{p}{\hbar}x} \tag{4.6}$$

Uslov normiranja je:
$$C_1^2\int_{-\infty}^{\infty}dx\,e^{i\frac{p-p'}{\hbar}x}\left(1+\frac{c-v}{c+v}\right)=\delta(p-p')$$
$$C_1^2\,2\pi\hbar\left(1+\frac{c-v}{c+v}\right)=\delta(p-p')$$
$$C_1=\sqrt{\frac{c+v}{4\pi\hbar c}}=\sqrt{\frac{1+v/c}{4\pi\hbar}} \tag{4.7}$$

Konačno možemo pisati:
$$\Psi_1(x,p)=\sqrt{\frac{1+v/c}{4\pi\hbar}}\,e^{i\frac{p}{\hbar}x}\ ;\quad \Psi_2(x,p)=i\sqrt{\frac{1-v/c}{4\pi\hbar}}\,e^{i\frac{p}{\hbar}x}\ ;\quad p=mv \tag{4.8}$$

tako da operator energije i operator mase imaju iste svojstvene funkcije što se i moglo očekivati.

5. ČESTICA U POTENCIJALU KOJI JE PROPORCIONALAN MASI

Klasični potencijal koji je proporcionalan masi čestice može se napisati u opštem slučaju kao:

$$V(x)=m f(x) \tag{5.1}$$

Takvi potencijali su, naprimer, potencijal sile zemljine teže $V_g=mgx$ ili potencijalna energija linearnog oscilatora $V_0=\frac{1}{2}m\omega^2x^2$ itd.

U relativističkoj teoriji, prema (2.9) masa je diferencijalnog tipa i pretstavlja matricu 2x2. To znači da se i funkcija $f(x)$ mora pretstaviti u vidu matrice 2x2 to jest:

$$\hat{f}(x)=\begin{pmatrix} \hat{f}(x) & 0 \\ 0 & \hat{f}(x) \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

Osim toga, operatori $\hat{m}$ i $\hat{f}$ ne komutiraju, pa se potencijal može napisati u obliku:

$$\hat{V}(x)=\frac{1}{2}(\hat{m}\hat{f}+\hat{f}\hat{m})=\frac{1}{2c}\left\{\begin{pmatrix} \hat{p} & -i\hat{p}_0 \\ i\hat{p}_0 & -\hat{p} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{f} & 0 \\ 0 & \hat{f} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \hat{f} & 0 \\ 0 & \hat{f} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{p} & -i\hat{p}_0 \\ i\hat{p}_0 & -\hat{p} \end{pmatrix}\right\} \tag{5.3}$$

Dalje možemo pisati:

$$\hat{V}(x)=\frac{1}{2c}\left\{\begin{pmatrix} \hat{p}\hat{f} & -i\hat{p}_0\hat{f} \\ i\hat{p}_0\hat{f} & -\hat{p}\hat{f} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \hat{f}\hat{p} & -i\hat{f}\hat{p}_0 \\ i\hat{f}\hat{p}_0 & -\hat{f}\hat{p} \end{pmatrix}\right\}=$$

$$=\frac{1}{2c}\begin{pmatrix} \hat{p}\hat{f}+\hat{f}\hat{p} & -2ip_0f \\ 2ip_0f & -\hat{p}\hat{f}-\hat{f}\hat{p} \end{pmatrix}$$

Treba naglasiti da pošto $\hat{p}_0=m_0c$ i $\hat{f}=f(x)$ komutiraju, može se pisati:

$$\hat{p}_0\hat{f}+\hat{f}\hat{p}_0=2p_0f=2m_0cf$$

Ako sada potražimo antikomutator $\hat{p}\hat{f}+\hat{f}\hat{p}$, i kako je $\hat{p}=i\hbar\frac{d}{dx}$ možemo pisati

$$\hat{p}\hat{f}\psi=-i\hbar f'\psi-i\hbar f\psi'\ ;\ \hat{f}\hat{p}\psi=-i\hbar f\psi'$$

pa imamo konačno:

$$\hat{p}\hat{f}+\hat{f}\hat{p}=-i\hbar\left(2f\frac{d}{dx}+f'\right) \tag{5.4}$$

Konačan oblik operatora potencijalne energije je

$$\hat{V}(x) = \begin{pmatrix} -\frac{i\hbar}{c}\left(2f\frac{d}{dx} + f'\right) & -i\omega_0 f \\ i\omega_0 f & \frac{i\hbar}{2c}\left(2f\frac{d}{dx} + f'\right) \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

Konačni oblik hamiltonijana sistema, koji se dobije kada se na (5.5) doda operator kinetičke energije (2.9), je sledeći:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -i\hbar\left(\frac{f}{c} + c\right)\frac{d}{dx} - \frac{i\hbar}{2c} f' & -i\omega_0(f+c^2) \\ i\omega_0(f+c^2) & i\hbar\left(\frac{f}{c} + c\right)\frac{d}{dx} + \frac{i\hbar}{2c} f' \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

Svojstveni problem: $\hat{H}\hat{\Psi} = E\hat{\Psi}$ svodi se na:

$$-i\hbar\frac{f+c^2}{c}\frac{d\Psi_1}{dx} - \frac{i\hbar}{2c} f'\Psi_1 - E\Psi_1 - i\omega_0(f+c^2)\Psi_2 = 0$$

$$i\hbar\frac{f+c^2}{c}\frac{d\Psi_2}{dx} + \frac{i\hbar}{2c} f'\Psi_2 - E\Psi_2 + i\omega_0(f+c^2)\Psi_1 = 0$$

odnosno:

$$\frac{d\Psi_1}{dx} + \frac{\frac{1}{2}f' + \frac{Ec}{i\hbar}}{f+c^2}\Psi_1 + \frac{\omega_0 c}{\hbar}\Psi_2 = 0$$

$$\frac{d\Psi_2}{dx} + \frac{\frac{1}{2}f' - \frac{Ec}{i\hbar}}{f+c^2}\Psi_2 + \frac{\omega_0 c}{\hbar}\Psi_1 = 0$$

Ako uvedemo oznake:

$$\Theta(x) = \frac{\frac{1}{2}f' + \frac{Ec}{i\hbar}}{f+c^2} \; ; \; k_0 = \frac{\omega_0 c}{\hbar} \tag{5.7}$$

onda možemo pisati:

$$\begin{aligned} &\frac{d\Psi_1}{dx} + \Theta\Psi_1 + k_0\Psi_2 = 0 \\ &\frac{d\Psi_2}{dx} + \overset{*}{\Theta}\Psi_2 + k_0\Psi_1 = 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Dalje sledi:

$$\Psi_2 = -\frac{1}{k_0}\frac{d\Psi_1}{dx} - \frac{\Theta}{k_0}\Psi_1 \; ; \; \frac{d\Psi_2}{dx} = -\overset{*}{\Theta}\Psi_2 - k_0\Psi_1$$

$$\frac{d\Psi_2}{dx}=-K_0\Psi_1+\frac{\overset{*}{\Theta}}{K_0}\frac{d\Psi_1}{dx}+\frac{\Theta\overset{*}{\Theta}}{K_0}\Psi_1$$

$$\frac{d\Psi_2}{dx}=\frac{|\Theta|^2-K_0^2}{K_0}\Psi_1+\frac{\overset{*}{\Theta}}{K_0}\frac{d\Psi_1}{dx}$$

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2}+\Theta\frac{d\Psi_1}{dx}+\Theta'\Psi_1+K_0\frac{d\Psi_2}{dx}=0$$

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2}+\Theta\frac{d\Psi_1}{dx}+\Theta'\Psi_1+\left(|\Theta|^2-K_0^2\right)\Psi_1+\overset{*}{\Theta}\frac{d\Psi_1}{dx}=0$$

Konačno:

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2}+\left(\Theta+\overset{*}{\Theta}\right)\frac{d\Psi_1}{dx}+\left(\Theta'+\Theta\overset{*}{\Theta}-K_0^2\right)\Psi_1=0$$

$$\Theta(x)=\frac{\frac{1}{2}f'(x)+\frac{Ec}{i\hbar}}{f(x)+c^2}\ ;\ \overset{*}{\Theta}(x)=\frac{\frac{1}{2}f'(x)-\frac{Ec}{i\hbar}}{f(x)+c^2}\ ;\ K_0=\frac{m_0c}{\hbar} \tag{5.9}$$

$$\Psi_2=-\frac{1}{K_0}\left(\frac{d\Psi_1}{dx}+\Theta\Psi_1\right) \tag{5.10}$$

Dobijeni izrazi se znatno uprišćavaju, ukoliko je

$$f(x)=F(x)-c^2 \tag{5.11}$$

To znači da je potencijalna energija data sa

$$V(x)=mF(x)-mc^2 \tag{5.12}$$

a ovo je uvek dopušteno, jer se potencijalna energija određuje uvek do na aditivnu konstantu. Aditivna konstanta je ovde negativna relativistička energija čestice $-mc^2$.
Tada jednačina (5.9) glasi:

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2}+\left(T+T^*\right)\frac{d\Psi_1}{dx}+\left(T'+\overset{*}{T}T-K_0^2\right)\Psi_1=0$$

$$\Psi_2=-\frac{1}{K_0}\left(\frac{d\Psi_1}{dx}+T\Psi_1\right);\ T(x)=\frac{F'(x)}{2F(x)}-i\frac{Ec}{\hbar F(x)}\ ;\ K_0=\frac{m_0c}{\hbar} \tag{5.13}$$

6. SLUČAJ KADA POTENCIJALNA ENERGIJA NE ZAVISI OD MASE ČESTICE

Ako je potencijalna energija oblika:

$$\hat{V}(x) = V_0 f(x) \quad ; \quad \frac{\partial V_0}{\partial m} = 0 \tag{6.1}$$

onda je hamiltonijan sistema dat sa:

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} -i\hbar c \frac{d}{dx} + V_0 f & -i m_0 c^2 \\ i m_0 c^2 & i\hbar c \frac{d}{dx} + V_0 f \end{pmatrix} \tag{6.2}$$

Svojstveni problem: $\hat{H}\hat{\Psi} = E\hat{\Psi}$ se u ovom slučaju svodi na:

$$-i\hbar c \frac{d\Psi_1}{dx} + V_0 f \Psi_1 - E\Psi_1 - i m_0 c^2 \Psi_2 = 0$$

$$i\hbar c \frac{d\Psi_2}{dx} + V_0 f \Psi_2 - E\Psi_2 + i m_0 c^2 \Psi_1 = 0$$

odnosno

$$\frac{d\Psi_1}{dx} + \frac{E - V_0 f}{i\hbar c}\Psi_1 + \frac{m_0 c}{\hbar}\Psi_2 = 0$$

$$\frac{d\Psi_2}{dx} - \frac{E - V_0 f}{i\hbar c}\Psi_2 + \frac{m_0 c}{\hbar}\Psi_1 = 0$$

Uvedemo oznake:

$$R(x) = \frac{E - V_0 f(x)}{i\hbar c} \quad ; \quad K_0 = \frac{m_0 c}{\hbar} \tag{6.3}$$

pa konačno dobijemo

$$\begin{aligned} &\frac{d\Psi_1}{dx} + R\Psi_1 + K_0 \Psi_2 = 0 \\ &\frac{d\Psi_2}{dx} + \overset{*}{R}\Psi_2 + K_0 \Psi_1 = 0 \end{aligned} \tag{6.4}$$

što se već poznatom procedurpm svodi na:

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + (R + R^*)\frac{d\Psi_1}{dx} + (R' + \overset{*}{R}R - K_0^2)\Psi_1 = 0$$

$$\Psi_2 = -\frac{1}{K_0}\left(\frac{d\Psi_1}{dx} + R\Psi_1\right) ; \; R(x) = i\frac{V_0 f(x) - E}{\hbar c} \; ; \; K_0 = \frac{m_0 c}{\hbar}$$

Poslednja jednačina je mnogo prostija nego u prethodnom slučaju jer je $R + R^* = 0$ pa konačno imamo:

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + (R' + \overset{*}{R}R - k_0^2)\Psi_1 = 0$$

$$\Psi_2 = -\frac{1}{k_0}\left(\frac{d\Psi_1}{dx} + R\Psi_1\right); \ R(x) = \frac{iv_0}{\hbar c}\left(f(x) - \frac{E}{v_0}\right); \ k_0 = \frac{m_0 c}{\hbar} \tag{6.5}$$

7. ČESTICA U KONSTANTNOM POTENCIJALU KOJI ZAVISI OD MASE

Neka je potencijal dat sa

$$\hat{V}(x) = \begin{cases} \infty & \text{za } x<1 \ \text{i} \ x>1 \\ -v_0^2 m & \text{za } x \in (0L) \end{cases} \tag{7.1}$$

Onda je prema (5.9):

$$f(x) = -v_0^2; \ f'(x) = 0; \ \theta(x) = \frac{Ec}{i\hbar}\frac{1}{c^2 - v_0^2}; \ \theta' = 0$$

$$\theta + \overset{*}{\theta} = 0; \ \theta\overset{*}{\theta} = \frac{E^2}{\hbar^2 c^2\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)} = \varrho_0^2; \ \theta = \varrho_0 i \tag{7.2}$$

tako da se rešava jednačina:

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} + (\varrho_0^2 - k_0^2)\Psi_1 = 0 \qquad x \in (0,L); \ \varrho_0 > k_0 \tag{7.3}$$

rešenje jednačine je:

$$\Psi_1 = C_1 e^{iQx} + C_2 e^{-iQx}; \ Q = \sqrt{\varrho_0^2 - k_0^2} \tag{7.4}$$

Granični uslovi su:

$$\Psi_1(0) = 0 \quad \text{i} \quad \Psi_1(L) = 0 \tag{7.5}$$

Što daje:

$$\begin{aligned} &C_1 + C_2 = 0 \\ &C_1 e^{iQL} + C_2 e^{-iQL} = 0 \end{aligned} \tag{7.6}$$

Sekularna jednačina glasi:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{iQL} & e^{-iQL} \end{vmatrix} = 0 \qquad -2i\sin QL = 0 \qquad QL = n\pi \qquad n = 0 \pm 1 \pm 2 \pm 3$$

$$C_2 = -C_1$$

znači:

$$\Psi_1(x)=C_1\left(e^{i\frac{n\pi}{L}x}-e^{-i\frac{n\pi}{L}x}\right)=2iC_1\sin\frac{n\pi}{L}x \qquad (7.7)$$

to jest:

$$\Psi_1(x)=\tilde{C}_1\sin\frac{n\pi}{L}x \quad n=1,2,3,4$$

Dalje je:

$$\Psi_2(x)=-\frac{1}{k_0}\left(\frac{d\Psi_1}{dx}+\theta\Psi_1\right)=-\frac{\tilde{C}_1}{k_0}\left(\frac{n\pi}{L}\cos\frac{n\pi}{L}x-iq_0\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$=-\tilde{C}_1\left(\frac{Q}{k_0}\sin\frac{n\pi}{L}x+i\frac{q_0}{k_0}\sin\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Uslov normiranja je:

$$\tilde{C}_1^2\int_0^L dx\left[\left(1+\frac{q_0^2}{k_0^2}\right)\sin^2\frac{n\pi}{L}x+\frac{Q^2}{k_0^2}\cos^2\frac{n\pi}{L}x\right]=1$$

$$\tilde{C}_1^2\frac{L}{2}\left(\frac{k_0^2+q_0^2+Q^2}{k_0^2}\right)=1\,;\quad \tilde{C}_1^2\frac{L}{2}\,\frac{k_0^2+q_0^2+q_0^2-k_0^2}{k_0^2}\,;\quad C_1^2L\frac{q_0^2}{k_0^2}=1$$

$$C_1=\frac{k_0}{q_0}\frac{1}{\sqrt{L}}$$

Konačno:

$$\Psi_{1n}(x)=\frac{k_0}{q_0\sqrt{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x\,;\quad \Psi_{2n}(x)=-\frac{Q}{q_0\sqrt{L}}\cos\frac{n\pi}{L}x+i\frac{1}{\sqrt{L}}\sin\frac{n\pi}{L}x$$

$$\Psi_{1n}(x)=\frac{1}{\sqrt{L}}\frac{k_0}{q_0}\sin\frac{n\pi}{L}x\,;\quad \Psi_{2n}(x)=\frac{i}{\sqrt{L}}\left(\sin\frac{n\pi}{L}x+i\frac{Q}{q_0}\cos\frac{n\pi}{L}x\right)$$

Komponenta Ψ_{1n} ostaje u kutiji ("box"-u) dok komponenta Ψ_{2n} izlazi iz kutije ("box-a).

Energija čestice:

$$Q=\frac{n\pi}{L}\,;\quad Q^2=\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,;\quad q_0^2-k_0^2=\frac{n^2\pi^2}{L^2}\,;\quad q_0^2=k_0^2+\frac{\pi^2}{L^2}n^2$$

$$E_n^2=\hbar^2c^2\left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)^2\left(k_0^2+\frac{\pi^2}{L^2}n^2\right)\,;\quad E_n=\hbar c\left(1-\frac{v_0^2}{c^2}\right)\sqrt{k_0^2+\frac{\pi^2}{L^2}n^2} \qquad (7.8)$$

$$n=1,2,3,4$$

8. ČESTICA U GRAVITACIONOM POLJU

Potencijalna energija u polju velike mase M, obrnuta od nivoa $-mc^2$ data je sa

$$V(x) = mF(x) - mc^2;\quad F(x) = -\frac{G}{|x|};\quad G = \gamma M \qquad (8.1)$$

γ - гравитациона константа

Dalje možemo pisati:

$$F(x) = -\frac{G}{|x|} = \begin{cases} -\frac{G}{|x|} & ;\ x>0 \\ G/x & ;\ x<0 \end{cases} \qquad (8.2)$$

za slučaj $x>0$ imamo

$$F'(x) = \frac{G}{x^2};\quad \frac{F'(x)}{2F(x)} = -\frac{1}{2x};\quad \frac{-iEc}{\hbar F(x)} = \frac{iEc}{\hbar G}(x);\quad T(x) = -\frac{1}{2x} + i\frac{Ec}{\hbar G}x$$

$$T + \overset{*}{T} = -\frac{1}{x};\quad T' = \frac{1}{2x^2} + i\frac{Ec}{\hbar G};\quad T\overset{*}{T} = \frac{1}{4x^2} + \frac{E^2c^2}{\hbar^2 G^2}x^2 \qquad (8.3)$$

za slučaj $x<0$ je:

$$F'(x) = -\frac{G}{x^2};\quad \frac{F'(x)}{2F(x)} = -\frac{1}{2x};\quad \frac{-iEc}{\hbar F(x)} = -\frac{iEc}{\hbar G}x;\quad T(x) = -\frac{1}{2x} - i\frac{Ec}{\hbar G}x$$

$$T + \overset{*}{T} = -\frac{1}{x};\quad T' = \frac{1}{2x^2} - \frac{Ec}{\hbar G}i;\quad T\overset{*}{T} = \frac{1}{4x^2} + \frac{E^2c^2}{\hbar^2 G^2}x^2 \qquad (8.4)$$

Jednačina (5.13) glasi:

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{d\Psi_1}{dx} + \left(\pm\frac{iEc}{\hbar G} - k_0^2 + \frac{E^2c^2}{\hbar^2G^2}x^2 + \frac{3}{4}\frac{1}{x^2}\right)\Psi_1 = 0$$

$$(+) \to x>0;\quad (-) \to x<0 \qquad (8.5)$$

Uvedemo novu funkciju z smenom:

$$\Psi_1 = z e^{i\varphi};\quad \frac{d\Psi_1}{dx} = \frac{dz}{dx}e^{\varphi} + z\varphi' e^{\varphi};\quad \frac{d^2\Psi_1}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dz}{dx}\varphi' e^{\varphi} +$$

$$+ z\varphi'' e^{\varphi} + z\varphi'^2 e^{\varphi} \qquad (8.6)$$

zamenom (8.6) u (8.5) dobijemo

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left(2\varphi' - \frac{1}{x}\right)\frac{dz}{dx} + \left(\pm\frac{iEc}{\hbar G} - k_0^2 + \frac{E^2c^2}{\hbar^2G^2}x^2 + \frac{3}{4}\frac{1}{x^2} + \varphi'' - \frac{1}{x}\varphi' + \varphi'^2\right)z = 0$$

Uzmimo:

$$\varphi'^2 = \frac{E^2c^2}{\hbar^2G^2}x^2;\quad \varphi' = \pm\frac{iEc}{\hbar q}x;\quad \varphi'' = \pm\frac{iEc}{\hbar G};\quad -\frac{1}{x}\varphi' = \mp\frac{iEc}{\hbar G}$$

za $x>0$ to jest $x\in(0\infty)$

$$\left.\begin{aligned}&\varphi'=i\frac{Ec}{\hbar G}x\ ;\ \varphi=i\frac{Ec}{2\hbar G}x^2\ ;\ \psi_1(x>0)=Z_+e^{i\frac{Ec}{2\hbar G}x^2}\\&\frac{d^2Z_+}{dx^2}+\left(\frac{2iEc}{\hbar G}x-\frac{1}{x}\right)\frac{dZ_+}{dx}+\left(\frac{iEc}{\hbar G}-k_0^2+\frac{3}{4}\frac{1}{x^2}\right)Z_+=0\end{aligned}\right\}\tag{8.7}$$

za $x<0$ to jest $x\in(-\infty\, 0)$

$$\left.\begin{aligned}&\varphi'=i\frac{Ec}{\hbar G}x\ ;\ \varphi=i\frac{Ec}{2\hbar G}x^2\ ;\ \psi_1(x>0)=Z_-e^{i\frac{Ec}{\hbar G}x^2}\\&\frac{d^2Z_-}{dx^2}+\left(\frac{2iEc}{\hbar G}x-\frac{1}{x}\right)\frac{dZ_-}{dx}+\left(-\frac{iEc}{\hbar G}-k_0^2+\frac{3}{4}\frac{1}{x^2}\right)Z_-=0\end{aligned}\right\}\tag{8.8}$$

Smena:

$$x=a\zeta\ ;\ dx=a\,d\zeta\ ;\ \frac{d}{dx}=\frac{1}{a}\ ;\ \frac{dZ_\pm}{dx}=\frac{1}{a}\frac{dZ_\pm}{d\zeta}\ ;\ \frac{d^2Z_\pm}{dx^2}=\frac{1}{a^2}\frac{d^2Z_\pm}{d\zeta^2}\tag{8.9}$$

$$\frac{d^2Z_\pm}{dx^2}+\left(2i\frac{Ec}{\hbar G}a^2\zeta-\frac{1}{\zeta}\right)\frac{dZ_\pm}{d\zeta}+\left(\pm i\frac{Ec}{\hbar G}a^2-k_0^2a^2+\frac{3}{4\zeta^2}\right)Z_\pm=0$$

$$\frac{Ec}{\hbar G}a^2=1\ ;\ a=i\sqrt{\frac{\hbar G}{Ec}}\ ;\ x=i\zeta\sqrt{\frac{\hbar G}{Ec}}$$

$$\left.\begin{aligned}&x\in(0,\infty)\ ;\ \zeta\in(0,-\infty)\\&x\in(-\infty,0)\ ;\ \zeta\in(i\infty,0)\\&\psi_1^{(\pm)}(\zeta)=e^{-\frac{1}{2}\zeta^2}Z_\pm\end{aligned}\right\}\tag{8.10}$$

$$\frac{d^2Z_\pm}{dx^2}-\left(2i\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)\frac{dZ_\pm}{d\zeta}+\left(\frac{k_0^2\hbar G}{Ec}\mp i+\frac{3}{4\zeta^2}\right)Z_\pm=0\tag{8.11}$$

Ako rešenje jednačine (8.11) potražimo u obliku

$$Z=\sum_{\vartheta=0}^{\infty}a_\vartheta\zeta^{\vartheta+k}\ ;\ \frac{dZ}{d\zeta}=\sum_{\vartheta=0}^{\infty}(\vartheta+k)a_\vartheta\zeta^{\vartheta+k-1}\ ;\ \frac{d^2Z}{d\zeta^2}=\sum_{\vartheta=0}^{\infty}(\vartheta+k-1)a_\vartheta\zeta^{\vartheta+k-1}\tag{8.12}$$

$$\sum_{\vartheta=0}^{\infty}{}'\left[(\vartheta+k-1)(\vartheta+k)-(\vartheta+k)+3/4\right]a_\vartheta^\pm\zeta^{\vartheta+k-2}=\sum_{\vartheta=0}^{\infty}\left[2i(\vartheta+k)-\frac{k_0^2}{k_E^2}\pm i\right]a_\vartheta^\pm\zeta^{\vartheta+k}\ ;\ k_E^2=\frac{Ec}{\hbar G}$$

$$\sum_{\vartheta=0}^{\infty}\left[(\vartheta+k)(\vartheta+k-2)+s(s+1)\right]a_\vartheta^\pm\zeta^{\vartheta+k-2}\equiv\sum_{\vartheta=0}^{\infty}{}'2i\left(\vartheta+k\pm s+is\frac{k_0^2}{k_E^2}\right)a_\vartheta^\pm\zeta^{\vartheta+k}\ ;\ s=\frac{1}{2}$$

$\vartheta=\mu+2\ ;\ \vartheta=0\ ;\ \mu=-2$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\vartheta=\mu$

$$\sum_{\mu=-2}^{\infty}{}'\left[(\mu+k)(\mu+k+2)+s(s+1)\right]a_{\mu+2}^\pm\zeta^{\mu+k}=\sum_{\mu=0}^{\infty}2i\left(\mu+k\pm s+is\frac{k_0^2}{k_E^2}\right)a_\mu^\pm\zeta^{\mu+k}$$

$$\kappa(\kappa-2)a_0^{\pm}\xi^{\mu-2}+(\kappa+1)(\kappa-1)a_1^{\pm}\xi^{\mu-1}=0$$

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\left[(\mu+\kappa)(\mu+\kappa+2)+s(s+1)\right]a_{\mu+2}^{\pm}\xi^{\mu+\kappa}=\sum_{\mu=0}^{\infty}2i\left(\mu+\kappa\pm s+is\frac{\kappa_0^2}{\kappa_E^2}\right)a_{\mu}^{\pm}\xi^{\mu+\kappa}$$

Da bi obe komponente Ψ_1 i Ψ_2 bile jednake nuli za X=0, što fizički znači da čestica mase m nemože da "padne" u centar velike mase M, mora se uzeti :

$$\kappa=2\ ;\ a_0^{\pm}\neq 0\ ;\ a_1^{\pm}=0 \qquad (8.13)$$

pa se za koeficijente $a_{\mu}^{\pm}$ dobija obrazac :

$$a_{\mu+2}^{\pm}=2i\frac{\mu+2+s\left(i\frac{\kappa_0^2}{\kappa_E^2}\pm 1\right)}{(\mu+2)\cdot(\mu+4)+s(s+1)}a_{\mu}^{\pm} \qquad (8.14)$$

$$\mu=0,1,2\ ;\ s=\frac{1}{2}\ ;\ \kappa_0=\frac{m_0 c}{\hbar}\ ;\ \kappa_E=\sqrt{\frac{Ec}{\hbar G}}$$

Dalje je :

$$a_2=2i\frac{2+\alpha}{2\cdot 4+\beta}a_0\ ;\ a_4=2i\frac{4+\alpha}{4\cdot 6+\beta}a_2=\frac{(2+\alpha)(4+\alpha)}{(2\cdot 4+\beta)(4\cdot 6+\beta)}(2i)^2a_0$$

$$a_6=2i\frac{6+\alpha}{6\cdot 8+\beta}a_4=(2i)^3\frac{(2+\alpha)(4+\alpha)(6+\alpha)}{(2\cdot 4+\beta)(4\cdot 6+\beta)(6\cdot 8+\beta)}a_0$$

$$a_{2n}=(2i)^n\frac{(2+\alpha)(4+\alpha)(6+\alpha)\ldots(2n+\alpha)}{(2\cdot 4+\beta)\cdot(4\cdot 6+\beta)(6\cdot 8+\beta)\ldots[2n(2n+2)+\beta]}a_0$$

$$\alpha^{\pm}=s\left(i\frac{\kappa_0^2}{\kappa_E^2}\pm 1\right)\ ;\ \beta=s(s+1)$$

$$(2+\alpha)\cdot(4+\alpha)\ldots(2n+\alpha)=2^n(1+\alpha/2)(2+\alpha/2)\ldots(n+\alpha/2)$$

$$\Gamma(2+\alpha/2)=(1+\alpha/2)\Gamma(1+\alpha/2)\ ;\ \Gamma(3+\alpha/2)=(2+\alpha/2)(1+\alpha/2)\Gamma(1+\alpha/2)$$

$$\Gamma(n+1+\alpha/2)=(n+\alpha/2)(n-1+\alpha/2)\ldots(2+\alpha/2)(1+\alpha/2)\Gamma(1+\alpha/2)$$

$$(1+\alpha/2)\cdot(2+\alpha/2)\ldots(n+\alpha/2)=\frac{\Gamma(n+1+\alpha/2)}{\Gamma(n+\alpha/2)}$$

$$(2\cdot 4+\beta)\cdot(4\cdot 6+\beta)\cdot(6\cdot 8+\beta)\ldots[2n(2n+2)+\beta]=$$

$$=2^{2n}\left(1\cdot 2+\frac{\beta}{4}\right)\cdot\left(2\cdot 3+\beta/4\right)\cdot\left(3\cdot 4+\frac{\beta}{4}\right)\ldots\left[n(n+1)+\beta/4\right]=$$

$$=2^{2n}\prod_{m=1}^{n}\left[m(m+1)+\frac{\beta}{4}\right]\ ;\ \prod_{m=1}^{0}\left[m(m+1)+\beta/4\right]=1$$

znači:

$$a_{2n}^{\pm} \equiv \frac{i^n}{\Gamma(1+\frac{1}{2}\alpha^{\pm})} \frac{\Gamma(n+1+\frac{1}{2}\alpha^{\pm})}{\prod_{m=1}^{n}[m(m+1)+\beta/4]} a_0^{\pm}$$

Konačno možemo pisati:

$$\Psi_1^{\pm}(\xi) = \frac{a_0^{\pm}}{\Gamma(1+\frac{1}{2}\alpha^{\pm}} \xi^2 e^{\frac{i}{2}\xi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n \Gamma(n+1+\frac{1}{2}\alpha^{\pm})}{\prod_{m=1}^{n}[m(m+1)+\frac{3}{16}]} \xi^{2n}$$

$$\alpha^{\pm} = \frac{1}{2}\left(i\frac{\omega_0^2 CG}{\hbar E} \pm 1\right); \quad \prod_{m=1}^{0}\left[m(m+1)+\frac{3}{16}\right] = 1 \tag{8.15}$$

$$\xi \in (0,-i\infty) \text{ za } \Psi_1^{+} \text{ и } \xi \in (i\infty, 0) \text{ za } \Psi_1^{-}; \quad \xi = -ix\sqrt{\frac{EC}{\hbar G}}$$

Uslov neprekidnosti u $x=0$ odnosno $\xi=0$ jer je:

$$\Psi_1^{+}(0) = \Psi_1^{-}(0) = 0; \quad \frac{d\Psi_1^{+}}{dx}\Big|_{x=0} = \frac{d\Psi_1^{-}}{dx}\Big|_{x=0} = 0 \tag{8.16}$$

Potražimo sada funkciju Ψ_2 na osnovu formule(5.13)

$$\Psi_2^{\pm}(x) = -\frac{1}{k_0}\left[\frac{d\Psi_1^{\pm}}{dx} + T^{\pm}(x)\Psi_1^{\pm}(x)\right]$$

$$T^{\pm}(x) \rightarrow \frac{i}{2\xi}\sqrt{\frac{EC}{\hbar G}} \mp \xi\sqrt{\frac{EC}{\hbar G}} = \sqrt{\frac{EC}{\hbar G}}\left(\frac{i}{2\xi} \mp \xi\right) \tag{8.17}$$

$$x = i\xi\sqrt{\frac{\hbar G}{EC}}$$

$$\frac{d\Psi_1^{\pm}}{dx} = \frac{1}{i\sqrt{\frac{\hbar G}{EC}}}\frac{d\Psi_1^{\pm}}{d\xi} = -i\sqrt{\frac{EC}{\hbar G}}\frac{d\Psi_1^{\pm}}{d\xi} \tag{8.18}$$

$$\Psi_2^{\pm}(\xi) = \sqrt{\frac{\hbar E}{\omega_0 CG}}\left[i\frac{d\Psi_1^{\pm}(\xi)}{d\xi} - \left(\frac{i}{2\xi} \mp \xi\right)\Psi_1^{\pm}(\xi)\right] \tag{8.19}$$

Sada se vidi da je:

$$\Psi_2^{\pm}(0) = 0 \tag{8.20}$$

Što znači da ni druga komponenta nemože da "padne" u centar velike mase M. Za neprekidnost u $\xi=0$ mora biti pored (8.20) i:

$$\frac{d\Psi_2^{+}(\xi)}{d\xi}\Big|_{\xi=0} = \frac{d\Psi_2^{-}(\xi)}{d\xi}\Big|_{\xi=0} \tag{8.21}$$

Na osnovu (8.15) i (8.19) definitivno se uslov (8.21) svodi na:

$$\left.\frac{d^2\Psi_1^+}{d\xi^2}\right|_{\xi=0} - \frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{\Psi_1^+}{\xi}\right]_{\xi=0} = \left.\frac{d^2\Psi_2^-}{d\xi^2}\right|_{\xi=0} - \frac{1}{2}\frac{d}{d\xi}\left[\frac{\Psi_2^-}{\xi}\right]_{\xi=0} \tag{8.22}$$

Pošto se za n=0 faktori $\Gamma[n+1+\alpha^{\pm}/2]$ i $\Gamma[1+\alpha^{\pm}/2)$ skraćuju to je uslov (8.21) zadovoljen ako je:

$$a_0^+ = a_0^- = a \tag{8.23}$$

Konačno možemo pisati:

$$\left.\begin{aligned}
&\Psi_1^{\pm}(\xi) = \frac{a}{\Gamma(1+\frac{1}{2}\alpha^{\pm})}\,\xi^2 e^{\frac{i}{2}\xi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n\,\Gamma(n+1+\frac{1}{2}\alpha^{\pm})}{\prod_{m=1}^{n}\left[m(m+1)+\frac{3}{16}\right]}\,\xi^{2n} \\
&\Psi_2^{\pm}(\xi) = \sqrt{\frac{\hbar E}{\omega_0^2 G C}}\left[i\,\frac{d\Psi_1^{\pm}(\xi)}{d\xi} - \left(\frac{i}{2\xi} \mp \xi\right)\Psi_1^{\pm}(\xi)\right] \\
&\alpha^{\pm} = \frac{1}{2}\left(i\,\frac{\omega_0^2 C G}{\hbar E} \pm 1\right)\; ; \; \prod_{m=1}^{0}\left[m(m+1)+\frac{3}{16}\right] = 1 \\
&\text{za } \Psi_{1,2}^{+} \; ; \; \xi \in (0,-i\infty) \;\; \text{za } \Psi_{1,2}^{-} \; ; \; \xi \in (i\infty, 0) \; ; \; \xi = -ix\sqrt{\frac{EC}{\hbar G}}
\end{aligned}\right\} \tag{8.24}$$

Red ima beskonačni radijus konvergencije i može se normirati bez ograničenja na energiju.

Na kraju, interesantno je napomenuti da se čestica u polju velike mase M ponaša veoma slično nerelativističkom prostornom oscilatoru ali sa čisto imaginarnom elongacijom.

9. ČESTICA U ELEKTRIČNOM POLJU-POZITRON

Potencijalnu kulonovsku energiju čestice očitavaćemo od energije mirovanja m_0c^2, to jest:

$$V(x) = -\frac{e^2}{|x|} - m_0c^2 = \begin{cases} -\frac{e^2}{x} - m_0c^2 \ ; & x>0 \\ \frac{e^2}{x} - m_0c^2 \ ; & x<0 \end{cases} \qquad (9.1)$$

prema (6.3) imamo:

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{i\hbar c}\left(E + m_0c^2 + \frac{e^2}{x}\right) \ ; & x>0 \\ \frac{1}{i\hbar c}\left(E + m_0c^2 - \frac{e^2}{x}\right) \ ; & x<0 \end{cases} \qquad (9.2)$$

Uvedemo oznaku: $E + m_0c^2 = W_0$ (9.3)

pa je:

$$R'(x) = \begin{cases} \frac{-e^2}{i\hbar c}\frac{1}{x^2} \ ; & x>0 \\ \frac{e^2}{i\hbar c}\frac{1}{x^2} \ ; & x<0 \end{cases}$$

$$\overset{*}{R}(x)R(x) = \begin{cases} \frac{1}{\hbar^2 c}\left(W_0^2 + \frac{e^4}{x^2} + 2W_0 e^2\frac{1}{x}\right) \ ; & x>0 \\ \frac{1}{\hbar^2 c}\left(W_0^2 + \frac{e^4}{x^2} - 2W_0 e^2\frac{1}{x}\right) \ ; & x<0 \end{cases}$$

Jednačina za određivanje talasne funkcije $\Psi_1^{\pm}$ (gde $\pm$ označava $x \gtrless 0$) respektivno, ima oblik, uz pretpostavku da je $E<0$ to jest $E=-|E|$

$$\frac{d^2\Psi_1^{\pm}}{dx^2} + \left[\frac{-|E|^2}{\hbar^2c^2}\left(\frac{2m_0c^2}{|E|}-1\right) \pm 2\frac{|E|}{\hbar c}\left(\frac{m_0c^2}{|E|}-1\right)\ell\frac{1}{x} + \ell(\ell \pm i)\frac{1}{x^2}\right]\Psi_1^{\pm} = 0 \quad (9.4)$$

$$\ell = \frac{e^2}{\hbar c}$$

Uzmimo smenu funkcije:

$$\Psi_1 = Uz \ ; \ \frac{d\Psi_1}{dx} = U'z + z'U \ ; \ \frac{d^2\Psi_1}{dx^2} = U''z + 2U'z' + Uz''$$

pa (9.4) postaje:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{U'}{U}\frac{dz}{dx} + \left[\frac{U''}{U} - \frac{|E|^2}{\hbar^2c^2}\left(\frac{2m_0c^2}{|E|}-1\right) \pm 2\ell\frac{|E|}{\hbar c}\left(\frac{m_0c^2}{|E|}-1\right)\frac{1}{x} + \ell(\ell \pm i)\frac{1}{x^2}\right]z = 0$$

$$\Psi_1^+ \to z_1^+ \to U^+ = e^{-\frac{|E|}{\hbar c}\sqrt{\frac{2m_0c^2}{|E|}-1}\;x}$$

$$\Psi_1^- \to z_1^- \to U^- = e^{\frac{|E|}{\hbar c}\sqrt{\frac{2m_0c^2}{|E|}-1}\;x} \qquad (9.5)$$

$$m_0c^2 > \frac{|E|}{2}$$

Konačno imamo:

$$\frac{d^2 z_1^\pm}{dx^2} \mp 2\kappa \frac{dz_1^\pm}{dx} + \left[\pm 2\ell \frac{|E|}{\hbar c}\left(\frac{m_0c^2}{|E|}-1\right)\frac{1}{x} + \ell(\ell \pm i)\frac{1}{x^2}\right] z_1^\pm = 0$$

$$\ell = \frac{e^2}{\hbar c}\ ;\ \kappa = \frac{|E|}{\hbar c}\sqrt{2\frac{m_0c^2}{|E|}-1}\ ;\ m_0c^2 > \frac{|E|}{2} \qquad (9.6)$$

Asimtotsko rešenje jednačine (9.6) ponaša se kao

$$z_1^\pm(\infty) \sim e^{\pm\kappa x}$$

pa se zbog toga umesto rešenja jednačine (9.6) u vidu reda mora uzeti polinom, što sa svoje strane daje restrikciju na parametar E.

za $x>0$

$$z_1^+ = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu^+ x^{\nu+s}\ ;\ (z_1^+)' = \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' a_\nu^+ x^{\nu+s-1}(\nu+s)\ ;\ (z_1^+)'' = \sum_{\nu=0}^{\infty}{}' a_\nu^+ x^{\nu+s-2}(\nu+s)(\nu+s-1)$$

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\left[(\nu+s)(\nu+s-1)+\ell(\ell+i)\right] a_\nu^+ x^{\nu+s-2} = 2\sum_{\nu=0}^{\infty}{}'\left[\kappa(s+\nu) - \frac{\ell|E|}{\hbar c}\left(\frac{m_0c^2}{|E|}-1\right)\right] a_\nu^+ x^{\nu+s-1}$$

$$\nu=\mu+1\ ;\ \nu=0\ \mu=-1 \qquad\qquad \nu=\mu$$

$$\sum_{\mu=-1}^{\infty}\left[(\mu+s)(\mu+s+1)+\ell(\ell+i)\right] a_{\mu+1}^+ x^{\mu+s-1} = 2\sum_{\mu=0}^{\infty}{}'\kappa\left[(\mu+s) - \frac{|E|\ell}{\hbar c\kappa}\left(\frac{m_0c^2}{|E|}-1\right)\right] a_\mu^+ x^{\mu+s-1}$$

$$(s-1)s\,a_0^+ x^{\mu-2} = 0\ ;\quad a_0 \neq 0 \quad s=1 \quad z_1^+(0)=0$$

$$a_{\mu+1}^+ = 2\kappa\frac{\mu+1-\frac{|E|\ell}{\hbar c\kappa}\left(\frac{m_0c^2}{|E|}-1\right)}{(\mu+1)(\mu+2)+\ell(\ell+i)}\,a_\mu^+ \qquad (9.7)$$

$$\mu = 0,1,2,\dots$$

Da bi se red za z_1^+ prekinuo, mora biti:

$$\frac{|E|\ell}{\hbar c\kappa}\left(\frac{m_0c^2}{|E|}-1\right) = n+1\ ;\quad n=0,1,2 \qquad (9.8)$$

Ovo daje sledeće vrednosti za energije:

$$\frac{|E|}{m_0c^2} = 1 \pm \sqrt{1-\frac{1}{1+\left(\frac{n+1}{\ell}\right)^2}}$$

to jest:

$$E_n = m_0c^2\left[\mp\sqrt{1-\frac{1}{1+\frac{\hbar^2c^2}{e^4}(n+1)^2}} - 1\right] \qquad (9.9)$$

Lako je konstatovati da bi se iste energije dobile i za stanje 2^{-}_{2} .
Na kraju možemo izvršiti procenu dobijenih energija:

$$\frac{\hbar^2c^2}{e^4}\sim\frac{10^{-54}\cdot 9\cdot 10^{20}}{(4{,}8)^4\cdot 10^{-40}}=\frac{9}{6}\,\frac{10^{-34}}{10^{-38}}\sim 10^{4}\gg 1$$

$$\frac{1}{1+\frac{\hbar^2c^2}{e^4}(n+1)^2}\approx\frac{e^4}{\hbar^2c^2}\,\frac{1}{(n+1)^2}\ll 1$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{1+\frac{\hbar^2c^2}{e^4}(n+1)^2}}\approx\sqrt{1-\frac{e^4}{\hbar^2c^2}\,\frac{1}{(n+1)^2}}\approx 1-\frac{e^4}{2\hbar^2c^2}\,\frac{1}{(n+1)^2}$$

Približna rešenja su:

$$E_n^{(1)}=\frac{e^4m_0}{2\hbar^2}\,\frac{1}{(n+1)^2}-2m_0c^2 \qquad (9.10)$$

$$E_n^{(2)}=-\frac{e^4m_0}{2\hbar^2}\,\frac{1}{(n+1)^2} \qquad (9.11)$$

Treba primetiti da je rešenje $E_n^{(2)}$ rezultat koji daje nerelativistička teorija , dok rešenje (9.10) pretstavlja totalno relativistički rezultat sa negativnom energijom. Može se konstatovati da $E_n^{(1)}$ ne može nizakakvo n da postane pozitivno, to jest da je jonizacija za ovaj tip rešenja nemoguća.
Prema tome $E_n^{(1)}$ pretstavlja rešenje za POZITRON dok rešenje $E_n^{(2)}$ pretstavlja standardnu energiju elektrona koju daje i nerelativistička teorija.

10. RELATIVISTIČKA I NERELATIVISTIČKA ČESTICA U GRAVITACIONOM POLJU ZEMLJE

Prvo ćemo razmotriti nerelativistički problem, kada je hamiltonijan sistema dat sa:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + mqx \tag{10.1}$$

Svojstveni problem $\hat{H}\Psi = E\Psi$ svodi se na

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\Psi}{dx^2} + mqx\Psi = E\Psi$$

što se konačno može pisati kao:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{2m^2q}{\hbar^2}x\right)\Psi = 0 \quad ; \quad x \in (0, \infty) \tag{10.2}$$

Ovde ćemo uvesti smenu argumenta

$$x = a\xi + b \quad ; \quad dx = a\,d\xi \quad ; \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{a} \quad ; \quad \frac{d^2\Psi}{dx^2} = \frac{1}{a^2}\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} \tag{10.3}$$

zamenom (10.3) u (10.2) dobijemo:

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2}a^2 - \frac{2m^2q}{\hbar^2}ba^2 - \frac{2m^2q}{\hbar^2}a^3\xi\right]\Psi = 0 \tag{10.4}$$

stavimo da je:

$$b = \frac{E}{mq} \quad ; \quad a = \left(\frac{\hbar^2}{2m^2q}\right)^{1/3} \quad ; \quad \xi = \frac{x - \frac{E}{mq}}{\left(\frac{\hbar^2}{2m^2q}\right)^{1/3}} \tag{10.5}$$

$$\xi \in \left(-\frac{E}{mq}, \infty\right)$$

pa (10.4) prelazi u Ejri-jevu jednačinu:

$$\frac{d^2\Psi}{d\xi^2} - \xi\Psi = 0 \tag{10.6}$$

Ovu jednačinu ćemo rešavati koristeći se operatorskom metodom. Za jednačinu:

$$(\hat{D}^2 + \hat{f})\Psi = 0 \quad ; \quad \hat{D}^2 \equiv \frac{d^2}{dx^2} \quad ; \quad \hat{f} \equiv f(\xi) \tag{10.7}$$

dva partikularna rešenja su data sa

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\hat{D}^{-2}\hat{f})^n\hat{D}^{-2}f(\xi) \\ \Psi_2 &= \xi - \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\hat{D}^{-2}\hat{f})^n\hat{D}^{-2}\xi f(\xi) \end{aligned} \tag{10.8}$$

ovde je

$$\hat{D}^{-2} = \int d\xi \int d\xi \quad ; \quad f(\xi) = -\xi \tag{10.9}$$

pa imamo:

$$-\Psi_1(\xi) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{D}^{-2}\hat{f})\hat{D}^{-2}\xi \tag{10.10}$$

$$-\Psi_2(\xi) = \xi + \sum_{n=0}^{\infty} (\hat{D}^{-2}\hat{f})\hat{D}^{-2}\xi^2 \tag{10.11}$$

Dalje imamo:

$$\hat{D}^{-2}\xi = \frac{1}{2\cdot 3}\xi^3 \; ; \; \hat{D}^{-2}\xi\hat{D}^{-2}\xi = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}\xi^6 \quad \text{i tako dalje}$$

pa se opšti član može pisati kao:

$$a_{1n} = \frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{(3n)!}\xi^{3n} \tag{10.12}$$

Za drugo rešenje je:

$$\hat{D}^{-2}\xi^2 = \frac{1}{3\cdot 4}\xi^4 \; ; \; \hat{D}^{-2}\xi\hat{D}^{-2}\xi^2 = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\xi^7$$

pa je opšti član sledećeg oblika

$$a_{2n} = \frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{(3n+1)!}\xi^{3n+1} \tag{10.13}$$

S obzirom da je faktor (-1) nebitan možemo konačno pisati rešenja nerelativističkog problema (10.2):

$$\Psi_1(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{3n}}{(3n)!}\prod_{s=1}^{n}(3s-2)$$

$$\Psi_2(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{3n+1}}{(3n+1)!}\prod_{s=1}^{n}(3s-1) \tag{10.14}$$

$$\prod_{s=1}^{0} f(s) \equiv 1 \; ; \; \xi \in \left(-\frac{E}{mg}, \infty\right) \; ; \; \xi = \left(\frac{2m^2 g}{\hbar^2}\right)^{-1/2}\left(x - \frac{E}{mg}\right)$$

Kao što se vidi, rešenja nerelativističkog problema su Ejri-jeve funkcije. Ove funkcije zavise od realnog argumenta. Sada ćemo razmotriti relativistički problem, kada je

$$V(x) = \frac{g}{2}(\hat{m}\hat{x} + \hat{x}\hat{m}) - \hat{m}c^2 \tag{10.15}$$

Na osnovu ovoga sledi da za dalji račun treba koristiti opštu jednačinu (5.13), to jest:

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2}+(T+\overset{*}{T})\frac{d\Psi_1}{dx}+(T'+\overset{*}{T}T-k_0^2)\Psi_1=0 \tag{10.16}$$

$$\Psi_2=-\frac{1}{k_0}\left(\frac{d\Psi_1}{dx}+T\Psi_1\right);\ k_0=\frac{m_0c}{\hbar};\ x\in(0,\infty)$$

Pošto je ovde $F(x)=qx$, to sledi:

$$T(x)=\frac{1}{2x}-i\frac{Ec}{\hbar q}\frac{1}{x};\ \overset{*}{T}(x)T(x)=\frac{1}{4x^2}+\frac{E^2c^2}{\hbar^2q^2}\frac{1}{x^2}$$

$$T'(x)=-\frac{1}{2x^2}+i\frac{Ec}{\hbar q}\frac{1}{x^2};\ T(x)+\overset{*}{T}(x)=\frac{1}{x} \tag{10.17}$$

Jednačina (10.16) postaje:

$$\frac{d^2\Psi_1}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{d\Psi_1}{dx}+\left[-k_0^2+\left(-\frac{1}{4}+i\frac{Ec}{\hbar q}+\frac{E^2c^2}{\hbar^2q^2}\right)\frac{1}{x^2}\right]\Psi_1=0$$

odnosno:

$$x^2\frac{d^2\Psi_1}{dx^2}+x\frac{d\Psi_1}{dx}+\left[-k_0^2x^2+\left(\frac{Ec}{\hbar q}+\frac{i}{2}\right)^2\right]\Psi_1=0 \tag{10.18}$$

Ova jednačina je slična Beselovoj, pa ćemo pokušati metodom smene argumenta da je svedemo na ovu jednačinu. Ako stavimo da je:

$$x=a\xi;\ dx=a\,d\xi;\ \frac{d\xi}{dx}=\frac{1}{a};\ \frac{d\Psi_1}{dx}=\frac{1}{a}\frac{d\Psi_1}{d\xi};\ \frac{d^2\Psi_1}{dx^2}=\frac{1}{a^2}\frac{d^2\Psi_1}{d\xi^2} \tag{10.19}$$

pa zamenom u (10.18) dobijemo:

$$\xi^2\frac{d^2\Psi_1}{d\xi^2}+\xi\frac{d\Psi_1}{d\xi}+\left[-k_0^2a^2\xi^2+\left(\frac{Ec}{\hbar q}+\frac{i}{2}\right)^2\right]\Psi_1=0$$

Uzmimo da je:

$$-k_0^2a^2=1;\ a=\frac{i}{k_0};\ p=i\left(\frac{Ec}{\hbar q}+\frac{i}{2}\right) \tag{10.20}$$

pa konačno dobijemo:

$$\xi^2\frac{d^2\Psi_1}{d\xi^2}+\xi\frac{d\Psi_1}{d\xi}+(\xi^2-p^2)\Psi_1=0$$

$$\xi=\frac{ix}{k_0};\ \xi\in(0,i\infty);\ p=-\frac{1}{2}+i\frac{Ec}{\hbar q} \tag{10.21}$$

Jednačina (10.21) je Beselova i njeno rešenje tražimo u vidu beskonačnog reda:

$$\Psi_1=\sum_{\nu=0}^{\infty}a_\nu\xi^{\nu+k};\ \frac{d\Psi_1}{d\xi}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+k)a_\nu\xi^{\nu+k-1};\ \frac{d^2\Psi_1}{d\xi^2}=\sum_{\nu=0}^{\infty}(\nu+k-1)(\nu+k)\xi^{\nu+k-2} \tag{10.22}$$

zamenom (10.22) u (10.21) imamo:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}{}'\left[(\nu+\kappa)^2-p^2\right]a_\nu \xi^{\nu+\kappa} = -\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' a_\nu \xi^{\nu+\kappa+2}$$

Izvršimo zamenu u prvoj sumi $\nu=\mu+2$ a u drugoj $\nu=\mu$

$$\sum_{\mu=-2}^{\infty}\left[(\mu+2+\kappa)^2-p^2\right]a_{\mu+2}\xi^{\mu+\kappa+2} = -\sum_{\mu=0}^{\infty}{}' a_\mu \xi^{\mu+\kappa+2}$$

Ako uzmemo:

$$\kappa_{1,2}=\pm p \quad ; a_0\neq 0 \quad ; a_1=0 \tag{10.23}$$

onda se za koeficijente a_μ dobija rekurentni obrazac:

$$a^{\pm}_{\mu+2} = -\frac{1}{(\mu+2)(\mu+2\pm 2p)}a^{\pm}_{\mu} \qquad \mu=0,1,2, \tag{10.24}$$

za koeficijente a^+ imamo:

$$a_2^+ = -\frac{1}{2\cdot(2+2p)}a_0^+ \; ; a_4^+ = -\frac{1}{4(4+2p)}\cdot a_2^+ = (-1)^2\frac{1}{2\cdot 4(2+2p)(4+2p)}a_0^+$$

odnosno:

$$a_{2n}^+ = (-1)^n\frac{1}{2\cdot 4\cdots 2n\,(2+2p)\cdot(4+2p)\dots(2n+2p)}a_0^+ =$$

$$= (-1)^n\frac{1}{2^n n!\, 2^n(1+p)(2+p)\dots(n+p)}a_0^+$$

Pošto je

$$(1+p)(2+p)\dots(n+p) = \frac{\Gamma(n+1+p)}{\Gamma(1+p)}$$

to sledi:

$$a_{2n}^{\pm} = \Gamma(1\pm p)\frac{(-1)^n}{2^{2n}n!\,\Gamma(n+1+p)} \tag{10.25}$$

Zamenom (10.25) u (10.22) dobijemo dva rešenja za komponentu $\psi_1(\xi)$.

$$\psi_{1p}(\xi) = J_p(\xi) = 2^p\,\Gamma(1+p)\sum_{n=0}^{\infty}{}'\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1+p)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n+p}$$

$$\psi_{1,-p}(\xi) = J_{-p}(\xi) = 2^{-p}\,\Gamma(1-p)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1-p)}\left(\frac{\xi}{2}\right)^{2n-p} \tag{10.26}$$

$$\xi=\frac{it}{m_0 c}\;;\;\xi\in(0,i\infty)\;;\;p=-\frac{1}{2}+i\frac{Ec}{\hbar q}$$

Funkcije $\psi_{2p}(\xi)$ i $\psi_{2,-p}(\xi)$ lako se nalaze na osnovu formule (10.16).

Kao što se vidi stanja relativističke čestice u gravitacionom polju Zemlje su Beselove funkcije od čisto imaginarnog argumenta sa kompleksnim parametrom p. Ovakve funkcije se nazivaju još i Hajnkelovim funkcijama.

11. OPŠTE FORMULE KADA SE POTENCIJALNA ENERGIJA SASTOJI OD DVA DELA: JEDAN ZAVISI OD MASE A DRUGI NE

Ako je potencijalna energija data sa

$$V(x) = m f(x) + V_0 \varphi(x) \quad ; \quad \frac{\partial V_0}{\partial m} = 0 \tag{11.1}$$

onda prema rezultatima dobijenjm u poglavljima 5 i 6 možemo pisati

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + (\lambda + \overset{*}{\lambda})\frac{d\psi_1}{dx} + (\lambda' + \overset{*}{\lambda}\lambda - k_0^2)\psi_1 = 0$$

$$\lambda(x) = \frac{\frac{1}{2}f'(x) + \frac{Ec}{i\hbar} - \frac{cV_0}{i\hbar}\varphi(x)}{f(x) + c^2} \quad ; \quad k_0 = \frac{m_0 c}{\hbar} \tag{11.2}$$

$$\psi_2(x) = -\frac{1}{k_0}\left[\frac{d\psi_1}{dx} + \lambda(x)\psi_1(x)\right]$$

Ukoliko je potencijal obrnut od nivoa mc^2, tada je:

$$V(x) = m\left[f(x) - c^2\right] + V_0\varphi(x)$$

to jest:

$$V(x) = m F(x) + V_0\varphi(x)$$
$$F(x) = f(x) - c^2 \tag{11.3}$$

pa ulogu funkcije $f(x)$ u (11.2) igra funkcija $F(x)$. Tada je

$$\frac{d^2\psi_1}{dx^2} + (L + \overset{*}{L})\frac{d\psi_1}{dx} + (L' + \overset{*}{L}L - k_0^2)\psi_1 = 0$$

$$L(x) = \frac{\frac{1}{2}F'(x) + \frac{Ec}{i\hbar} - \frac{cV_0}{i\hbar}\varphi(x)}{F(x)} \quad ; \quad k_0 = \frac{m_0 c}{i\hbar} \tag{11.4}$$

$$\Psi_2(x) = -\frac{1}{K_0}\left[\frac{d\Psi_1}{dx} + L(x)\Psi_1(x)\right]$$

Kao primer razmotrićemo slučaj kada na česticu deluje i gravitacijona sila velike mase M i električna sila od naelektrisanja z_0. Pretpostavimo da masa veliko M koja stvara gravitacijono polje ima isto efektivno naelektrisanje z_0, pa je ukupna potencijalna energija u kojoj se kreće naelektrisana čestica data sa :

$$V(x) = -mc^2 - \frac{mG}{|x|} - \frac{\mathcal{E}}{|x|}$$

$$G = \gamma M \; ; \; \mathcal{E} = e^2 z_0 \; ; \; F(x) = -\frac{G}{|x|} \; ; \; V_0\varphi(x) = -\frac{\mathcal{E}}{|x|} \tag{11.5}$$

Možemo sada potražiti funkciju : $L(x)$

$$L(x) = \frac{F'(x)}{2F(x)} - i\frac{Ec}{\hbar F(x)} + i\frac{c}{\hbar}\frac{V_0\varphi(x)}{F(x)}$$

$$L(x) = \frac{F'(x)}{2F(x)} - i\frac{Ec}{\hbar F(x)} + i\frac{c}{\hbar}\frac{\mathcal{E}}{G} = \begin{cases} -\frac{1}{2x} + i\left(\frac{Ec}{\hbar G}x - \frac{\mathcal{E}c}{\hbar G}\right) \; ; \; x > 0 \\ -\frac{1}{2x} - i\left(\frac{Ec}{\hbar G}x - \frac{\mathcal{E}c}{\hbar G}\right) \; ; \; x < 0 \end{cases} \tag{11.6}$$

$$L'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2x^2} + i\frac{Ec}{\hbar G} \; ; \; x > 0 \\ \frac{1}{2x^2} - i\frac{Ec}{\hbar G} \; ; \; x < 0 \end{cases} \tag{11.7}$$

$$\overset{*}{L}(x)L(x) = \frac{1}{4x^2} + \left(\frac{Ec}{\hbar G}x - \frac{\mathcal{E}c}{\hbar G}\right)^2 \quad \text{za} \quad x \gtrless 0 \tag{11.8}$$

$$L(x) + \overset{*}{L}(x) = -\frac{1}{x} \quad \text{za} \quad x \gtrless 0 \tag{11.9}$$

jednačina (11.4)glasi:

$$\frac{d^2\Psi_1^{\pm}}{dx^2} - \frac{1}{x}\frac{d\Psi_1^{\pm}}{dx} + \left[-K_0^2 \pm i\frac{Ec}{\hbar G} + \frac{3}{4}\frac{1}{x^2} + \frac{E^2c^2}{\hbar^2G^2}\left(x - \frac{\mathcal{E}}{E}\right)^2\right]\Psi_1^{\pm} = 0 \tag{11.10}$$

Jednačina koja je dobijena ne može se zgodno rešavati pomoću potencijalnog reda pa je zato dalje nećemo analizirati. Treba ipak zapaziti izvesnu analogiju između ove jednačine i jednačine za prostorni oscilator.

12. ZAKLJUČAK

Rezultati ovog diplomskog rada mogu se sumirati na sledeći način :

a) Postavljene su osnovne jednačine za slučajeve kada je potencijalna energija proporcionalna masi čestice, i kada ne zavisi od mase čestice . Takođe je razmatran problem kada se potencijalna energija sastoji iz dva dela , pri čemu je jedan proporcionalan masi čestice, a drugi nije. Ispostavilo se da je matematički mnogo pogodnije, ako se potencijalna energija "očitava" od energije $-mc^2$. Ovo nemože suštinski da menja rezultate jer je potencijalna energija uvek određena do na aditivnu konstantu.

b) Ispitivane su sopstvene funkcije operatora mase i kinetičke energije. Ispostavilo se da oba pomenuta operatora imaju iste svojstvene funkcije i da one predstavljaju ravne talase.

c) Ispitivanje ponašanja relativističke čestice u jednodimenzionalnoj potencijalnoj jami sa beskonačno visokim zidovima pokazalo je da se čestica nemože u potpunosti zadržati u jami. Jedna komponenta ostaje u jami dok druga prolazi kroz beskonačne zidove jame. Naravno ovde je pretpostavljeno da je dubina jame proporcionalna masi čestice.

d) Razmatran je i problem ponašanja relativističke čestice u gravitacijonom polju velike mase M. Sa formalno matematičke tačke tačke gledišta ovaj problem je veoma sličan problemu nerelativističkog prostornog oscilatora. Razlika se sastoji u tome što relativistička stanja zavise od imaginarnog argumenta i što se za normiranje talasne funkcije ne moraju nametati nikakve restrikcije na energiju čestice.

e) Napravljena je paralela između ponašanja nerelativističke i relativističke čestice u gravitacijonom polju Zemlje. Ispostavilo se da su stanja nerelativističke čestice opisana Enrijevim funkcijama, dok su stanja relativističke čestice data Hajnkelovim funkcijama.

f) Rešavan je jednodimenzionalni problem naelektrisane čestice u kulonovskom polju. Kao što se i moglo očekivati za energiju su dobijena dva rešenja od kojih jedno odgovara elektronskim, a drugo pozitronskim energijama.

L I T E R A T U R A :

1) P.A.M. DIRAC : Principles of Quantum Mechanics

Klarendon Press Oxford 1938

2) V. ROŽANSKI : Uvod u Kvantnu Mehaniku

Naučna knjiga Beograd 1963