ORLIĆ NIKOLA

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

NOVI SAD

D I P L O M S K I R A D

Tema: GEOMETRIJSKA OPTIKA I

TALASNA MEHANIKA

Novi Sad, septembra 1981.

Zahvaljujem se na pomoći i sugestijama
Dr STANOJU STOJANOVIĆU koji me je uputio
pri izradi ovog diplomskog rada

S A D R Ž A J

U V O D

Teorijska mehanika je nauka o opštim zakonima mehaničkog kretanja i ravnoteže materijalnih tela. Kretanje u širem smislu reči predstavlja neodvojiv atribut materije, i prema tome, obuhvata sve pojave koje se događaju u prirodi. Međutim, mehaničkim kretanjem naziva se promena položaja koja se vrši u toku vreme na materijalnih tela jedno u odnosu na drugo.

Razvoj mehanike datira od najranijeg postojanja ljudskog roda. Razlozi ovako ranog postojanja mehanike su sasvim jasni, jer čovek da bi opstao morao se služiti raznim napravama i usavršavati njihovu njihovu primenu u svakodnevnom životu i radu.

Dakako, stepen razvoja mehanike ranog ljudskog doba bio je na nivou ondašnjih proizvodnih snaga. Razlozi takvog razvoja su isključivo istorijski, jer robovlasnički poredak korišti jeftinu radnu snagu robova, pa stoga nije imao posebnog interesa za brži i bolji razvoj mehanike.

U srednjem veku, tj. do druge polovine 15-og veka, vlada zastoj u razvoju mehanike kao i u oblasti drugih nauka, što se objašnjava karakterom društvenih odnosa u feudalnom sistemu i dominaciji teologije u nauci i filozofiji.

Međutim, u drugoj polovini 15-og veka, piše Engels "Duhovna diktatura crkve bila je slomljenja". To je bio jedan od najvećih progresivnih prevrata koje je čovečanstvo do tada doživelo, jedna epoha kojoj su bili potrebni titani i koja je rodila titane po snazi misli, strastvenosti i karakteru po svestranosti i učenosti." (Engels, Dijalektika prirode, str. 3 i 5).

Između ovih titana misli treba pomenuti čuvenog italijanskog naučnika Galileja, jer je sa njegovim delima započela nova epoha u razvoju mehanike. Galilej je suprotno skolastičkom gledanju, priznavao neophodnost ogleda za postavljanje osnova mehanike i fizike i dosledno je provodio ovo gledište u svojim naučnim istraživanjima. Galilej je osnivač jedne od oblasti mehanike - dinamike, učenja o kretanju materijalnih tela. On je prvi uveo pojam brzine i ubrzanja pokretnog tela. Osim toga, Galilej je postavio jedan od osnovnih zakona dinamike - zakon inercije. Ocenjujući značaj radova Galileja u dinamici, čuveni francuski matematičar i mehaničar Lagranž kaže: "Bio je potreban neobičan genije da bi otkrio prirodne zakone u takvim pojavama, koje su uvek stajale pred očima, a čije je objašnjenje uvek izmicalo istraživanju filozofa."

Radove u dinamici produžili su posle Galileja mnogi naučnici. Među tim naučnicima spomenućemo francuskog naučnika-mehaničara Lagranža i engleskog naučnika-mehaničara Hamiltona. U radovima Lagranža sva mehanika je izložena strogo analitički na osnovu jednog opšteg principa-principa mogućih pomeranja. Lagranž je objedinjio princip mogućih pomeranja sa principom Dalambera, postavio u opštem obliku diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema, koje nose njegovo ime. Razradu novih metoda za integriranje diferencijalnih jednačina dinamike nalazimo uglavnom u radovima Hamiltona, francuskog naučnika POasona i nemačkog matematičara Jakobija.

METOD GENERALISANIH KOORDINATA

Veze koje generalno ograničavaju mehaničko kretanje sistema čestica mogu se po onoj ili ovoj osobini klasifikovati na više načina. Najznačajnija klasifikacija vrsta veza predstavlja podelu na tzv. holonomme ili neholonomne veze.

Pod holonomnim vezama podrazumevaju se ograničenja položaja sistema koja se matematički izražava u obliku sistema jednakosti:

$$f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N, t) = 0, \; j = 1, 2, \cdots, k \qquad (1.1)$$

gde je $\vec{r}_i$ vektor položaja i-te čestice a N broj čestica sistema. Ove veze, kao što je naznačeno, u opštem slučaju mogu biti funkcije vremena.

Veze koje se analitički ne izražavaju na gornji način nazivaju se neholonomne veže. Ove veze, ukoliko ograničavaju samo položaj sisteme, izražavaju se u obliku nejednačina:

$$f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N, t) \gtrless 0, \; j = 1, 2, \cdots, k \qquad (1.2)$$

Međutim, ukoliko ograničavaju osim položaja još i brzine čestica sistema analitički, onda mogu biti izražene ili pomoću jednačina tipa:

$$f_j(\vec{r}_1 \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \cdots, \dot{\vec{r}}_N, t) = 0, \; j = 1, 2, \cdots, k \qquad (1.3)$$

ili pomoću nejednačina tipa:

$$f_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \cdots, \vec{r}_N, \dot{\vec{r}}_1, \dot{\vec{r}}_2, \cdots, \dot{\vec{r}}_N, t) \gtrless 0, \; j = 1, 2, \cdots, k \qquad (1.4)$$

Nezavisno od vrste veža (holonomne ili neholonomne) sve veze koje eksplicitno zavise od vremena nazivaju se nestacionarne veze, dok one koje eksplicitno ne zavise od vremena - stacionarne veze.

Veze u opštem slučaju matematički vrlo komplikuju problem u tom smislu što se javljaju dve vrste teškoća. Prva od njih se sastoji u tome što sve kordinate čestica sistema nisu međusobno nezavisne veličine, pa prema tome ni sve dinamičke jednačine sistema

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i + \vec{R}_i \,, \quad i = 1,2,\cdots,N \tag{1.5}$$

nisu međusobno nezavisne. Druga teškoća, koja se javlja zbog postojanja veza, ogleda se u tome što sile reakcije nisu apriori tade. One se pojavljuju kao nepoznate veličine koje treba odrediti. Naime saopštiti nekakvo ograničenje sistemu čestica u sumštini znači da na sistem deluju neke dopunske sile (sile reakcije) koje neposredno nisu poznate a koje, s druge strane, na neki način determinišu kretanje sistema.

U slučaju holonomnih sistema teškoće prve vrste (problem zavisnih koordinata) rešavaju se, u principu, na dva načina: metodom množitelja veza i metodom generalisanih koordinata. Metodom množitelja veza, kao što je poznato, problem zavisnih koordinata razrešava se tako što se dinamički sistem jednačina uvećava za broj jednačina veza, tj. sistem sadrži 3N + k jednačina i isto toliko nepoznatih funkcija. Karakteristično je da što je sistem čestica vezaniji (veliki broj jednačina veza) matematički je sve složeniji za rešavanje.

Drugi način razrešavanja problema zavisnih koordinata vrši se, kao što je rečeno, metodom generalisanih koordinata. Ovaj metod u osnovi bazira na mogućnošću eliminacije zavisnih koordinata koristeći jednačine veza. Ovo je moguće uraditi samo ako su veze oblika (1), tj. u slučaju holonomnih sistema. Obično se u ovom metodu ne ide putem neposredne eliminacije generalisanih koordinata kao jednačina veza, već se u suštini to isto radi ali na drugi jednostavniji način. Naime, ako je sistem od N čestica ograničen sa k holonomnih veza, onda on ima 3N - k = n nezavisnih koordinata. Ovaj broj nezavisnih koordinata istovremeno, po definiciji, prestavlja broj stepeni slobode sistema.

Sada se biraju veličine $q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}$, koje su međusobno nezavisne i koje jednoznačno određuju položaj sistema kao celinu. Ove veličine, u opštem slučaju, nemaju dimenzije dužine te se s toga nazivaju generalisane koordinate. Sam izbor generalisanih koordinata je takav da su veze automatski zadovoljehe. Nakon ovoga treba izraziti vektore položaja čestica $\vec{r}_i$ u funciji ovako odabranih generalisanih koordinata:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_{3N-k}, t), \quad i = 1, 2, \dots, N \tag{1.6}$$

Ove transformacione relacije od $(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N)$ na $(q_1, q_2 \dots q_{3N-k})$ možemo smatrati kao parametarske jednačine promenljivih .

Generalisane koordinate neposredno ne određuju položaj čestica u sistemu već određuju položaj sistema kao celinu. U tom smislu za generalisane koordinate možemo uzeti ugao, zatim veličine koje imaju dimenziju energije ili dimenziju momenta impulsa. U svojstvu generalisanih koordinata mogu biti uzete amplitude Furie razvoja vektora položaja $\vec{r}_i$, itd.

Kao što smo napomenuli, samim izborom generalisanih koordinata veze su automatski zadovoljene i broj nepoznatih funkcija je sveden na minimum, što predstavlja vrlo veliko matematičko olakšanje.

Teškoće koje nam u rešavanju problema unose unapred nepoznate sile reakcije rešavaju se na taj način što se fizički problem tako postavi da u njemu ne figurišu reakcije. Na ovaj način se možemo rešiti samo tzv. idealnih sila reakcija. Naime, koristeći osobinu da je rad idealnih sila reakcija na proizvoljnom virtuelnom pomeranju sistema jednak nuli moguće je formulisati problem tako da u njemu ove sile reakcije ne figurišu. Formulisanje problema na ovaj način predstavlja ustvari Dalamber-Lagranžev princip.

1.2. LAGRANŽEV METOD

Diferencijalne jednačine kretanja u generalisanim koordinatama možemo dobiti pomoću Dalamber-Lagranževog principa. Ovaj princip, koji važi za holonomne i idealne sisteme ima oblik:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}\delta\vec{r_i} - \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{v_i}}\delta\vec{r_i} = 0 \qquad (1.7)$$

Prvi član predstavlja elementarni rad na makakvim virtuelnim pomeranjima sistema, i u generalisanim koordinatama postaje:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}\delta\vec{r_i} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}d\vec{r_i}' - \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}d\vec{r_i} = \sum_{j=1}^{n} Q_j dq_j' - \sum_{j=1}^{n} Q_j dq_j$$

a ako uvedemo oznaku

$$\delta q_j = dq_j' - dq_j \qquad (1.8)$$

predhodni član možemo napisati još i kao

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}\delta\vec{r_i} = \sum_{i=j}^{n} Q_j\delta q_j \qquad (1.9)$$

gde su Q_j generalisane sile, a δq_j varijacije generalisanih koordinata. Drugi član možemo takođe transformisati na sledeći način koristeći ( )

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{v_i}}\delta\vec{r_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{v_i}}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j}\delta q_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{v_i}}\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j}\right)\delta q_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v_i}\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j} - \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v_i}\frac{d}{dt}\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j}\right)\delta q_j.$$

Pošto je

$$d\vec{r_i} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j}dq_j \qquad (1.10)$$

onda je

$$\vec{v_i} = \frac{d\vec{r_i}}{dt} = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j}\dot{q_j},$$

sledi da je

$$\frac{\partial\vec{v_i}}{\partial\dot{q_j}} = \frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j}. \qquad (1.11)$$

Zbog nezavisnosti operacija $\frac{d}{dt}$ i $\frac{\partial}{\partial q_j}$ možemo izmeniti njihov red te je

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial\vec{r_i}}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j}\cdot\frac{d\vec{r_i}}{dt} = \frac{\partial\vec{v_i}}{\partial q_j} \qquad (1.12)$$

Sada predhodni izraz možemo napisati u obliku

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\dot{\vec{v_i}}\delta\vec{r_i} = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v_i}\frac{\partial\vec{v_i}}{\partial\dot{q_j}} - \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v_i}\frac{\partial\vec{v_i}}{\partial q_j}\right)\delta q_j.$$

Uvodeći kinetičku energiju sistema

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v_i}\vec{v_i} \qquad (1.13)$$

imamo

$$\frac{\partial T}{\partial q_j}=\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}=\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i \frac{\partial \vec{V}_i}{\partial \dot{q}_j}$$

te konačno dobijamo

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i \delta \vec{r}_i=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right) \tag{1.14}$$

Konačno, Dalamber-Lagranžev princip u generalisanim koordinatama ima oblik:

$$\sum_{j=1}^{n} Q \delta q_j-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j=0,$$

tj.

$$\sum_{j=1}^{n}\left(Q_j-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial T}{\partial q_j}\right)\delta q_j=0 \tag{1.15}$$

Pošto su generalisane koordinate međusobno nezavisne i njihove varijacije δq_j su takođe nezavisne, te da bi gornji izraz za ma kakve vrednosti δq_j bio identički jednak nuli, svi koeficijenti uz njih moraju biti jednaki nuli.

$$Q_j-\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}+\frac{\partial T}{\partial q_j}=0 \quad j=1,2,\dots n \tag{1.16}$$

Ove se jednačine nazivaju Langraževe jednačine, a za razliku od Lagranževih jednačina prve vrste (jednačine sa množiteljima veza) one se nazivaju i Lagranževe jednačine druge vrste.
Ove jednačine predstavljaju diferencijalne jednačine kretanja u generalisanim koordinatama koje važe kako za prinudno tako i za slobodno kretanje sistema čestica, koje se može shvatiti kao specijalan slučaj prvog kada je k=0.

Predpostavimo da se generakisane sile Q_j mogu izvesti is uopštenog potencijala V koji je funkcija od generalisanih koordinata q_j, generalisanih brzina $\dot{q}_j$ i vremena t po obrascu

$$Q_j=-\frac{\partial V}{\partial q_j}+\frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \tag{1.17}$$

Iz predhodnog obrasca sledi, razvijanje zadnjeg člana

$$Q_j=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}\ddot{q}_k+(**),$$

gde su sa (••) označeni članovi koji ne sadrže generalisana ubrzanja $\ddot{q}_j$. Pošto se u mehanici razmatra samo slučaj kad sile ne zavise od ubrzanja, svi koeficijenti uz $\ddot{q}_k$ moraju biti jednaki nuli

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k} = 0$$

odakle se zaključuje da uopšteni potencijali linearno zavisi od generalisanih brzina

$$V = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \dot{q}_j + U = V_1 + U \qquad (1.18)$$

gde su α_j i U izvesne funkcije od generalisanih koordinata i vremena. Takav slučaj imamo naprimer kod Lorencove sile, za koju se u elektrodinamici dokazuje da se može izvesti iz uopštenog potencijala, koji zavisi od skalarnog i vektorskog potencijala elektromagnetnog polja.

Ako su svi koeficijenti α_j jednaki nuli, tj. ako V ne zavisi od generalisanih brzina, uopšteni potencijal se svodi na uobičajeni potencijal $V = U(q_j, t)$.

Dakle u slučaju potencijalnih sila Lagranževe jednačine (1.15) glase:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} ,$$

što možemo napisati u obliku

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0$$

ili koncižnije

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1,2,\cdots,n \qquad (1.19)$$

gde smo uveli oznaku

$$L(q_j, \dot{q}_j, t) = T - U \qquad (1.20)$$

Ovako uvedena funkcija L naziva se Lagranževa funkcija i ona zavisi od svih generalisanih koordinata, generalisanih brzina i eventualno vremena.

Odgovarajuće jednačine (1,18) predstavljaju Lagranževe jednačine za sisteme u kojima dejstvuju samo potencijalne sile u običnom ili generalisanom smislu reči. U opštem slučaju, kad imamo i potencijalne i nepotencijalne sile, možemo staviti

$$Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} + Q_j^*$$

gde smo sa Q_j označili nepotencijalni deo sila. Tada Lagranževe jednačine dobijaju oblik

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} + Q^*$$

odnosno

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^* \qquad (1,21)$$

gde su sad u Lagranževoj funkciji L sadržane samo potencijalne sile.

1.3. ANALIZA LAGRANŽEVIH JEDNAČINA

Lagranževe jednačine (1.18) ili (1.20) su, kao što smo već naveli, diferencijalne jednačine kretanja u generalisanim koordinatama. Ispitajmo pre svega matematičku strukturu ovih jednačina u kojima sve veličine moraju biti u funkciji traženih generalisanih koordinata i njihovih brzina. Kinetička energija T je u opštem slučaju kvadratna funkcija generalisanih brzina i glasi

$$T=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k+\sum_{j=1}^{n} b_j\dot{q}_j+C$$

pri čemu koeficijenti u opštem slučaju zavise od generalisanih koordinata i vremena, odakle sledi

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\dot{q}_k+b_i \tag{1.22}$$

S druge strane parcijalni izvodi $\frac{\partial T}{\partial q_i}$ biće

$$\frac{\partial T}{\partial q_i}=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_k+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_j}{\partial q_i}\dot{q}_j+\frac{\partial C}{\partial q_i}, \tag{1.23}$$

a generalisane sile Q_j moraju biti date kao funkcije tipa $Q(q_k,\dot{q}_k,t)$ koje najčešće ne zavise od generalisanih brzina. Stavljajući ove izraze u jednačine (1.16), dobijamo

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\dot{a}_{ik}\dot{q}_k+\dot{b}_i-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i}\dot{q}_j\dot{q}_k-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b_j}{\partial q_i}-\frac{\partial C}{\partial q_i}=Q(q_k,\dot{q}_k,t$$

odakle vidimo, grupišući srodne članove, da su Lagranževe jednačine u eksplicitnom vidu oblika

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\ddot{q}_k+\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\alpha_{ijk}\dot{q}_j\dot{q}_k+\sum_{k=1}^{n}\beta_{ik}\dot{q}_k+\gamma_i=Q(q_k,\dot{q}_k,t),\quad i=1,2,\dots n \tag{1.24}$$

gde su koeficijenti izvesne funkcije od generalisanih koordinata i vremena.

Dakle, Lagranževe jednačine predstavljaju sistem od n simultanih običnih diferencijalnih jednačina drugog reda, linearnih po $\ddot{q}_k$, u kojima su nepoznate funkcije sve generalisane koordinate sistema q_k $(k=1,2,\cdots,n)$, a nezavisno promenljivo vreme t, pri čemu je broj ovih jednačina jednak broju stepeni slobode.

Pokazuje se da je u klasičnoj mehanici uvek determinanta gornjeg sistema $|a_{ik}|\neq 0$ pa se gornji sistem jednačina uvek može rešiti po izvodima najvišeg reda $\ddot{q}_k$, te prelaskom na generalisane koordinate nije narušen princip kauzalnosti.

Prema tome, Lagranžev metod ima znatna preimućstva: On važi za ma kakve generalisane kordinate, sve generalisane koordinate su međusobno nezavisne i nije potrebno poznavati sile reakcije, a kao posledica ovih osobina broj Lagranževih jednačina predstavlja najmanji mogući broj diferencijalnih jednačina kretanja.

Navedimo na kraju da se iz Lagranževih jednačina (1.18) u izvesnim slučajevima mogu neposredno dobiti prvi integrali. Naime, ako Lagranževa funkcija L ne zavisi od jedne ili više generalisanih koordinata

$$\frac{\partial L}{\partial q_i}=0 \qquad i=1,2,\cdots,r \tag{1.25}$$

takve koordinate q_k nazivaju se ciklične, a Lagranževe jednačine tada daju

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=0$$

odakle se integracijom dobija

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}=const. \qquad i=1,2,\cdots,r \tag{1.26}$$

Dakle, svakoj cikličnoj koordinati, tj. koordinati koja ne ulazi eksplicitno u Lagranževu funkciju, odgovara jedan prvi integral oblika (1.25) .

2 HAMILTONOV METOD

Da bi smo prešli sa diferencijalnih na integralne principe, transformišimo Dalamber-Lagranžev princip napisan u obliku.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \delta\vec{r}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{V}}_i \delta\vec{r}_i = 0 \qquad (2.1)$$

Prvi član ovog principa prema definiciji pojma varijacije iznosi

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i d\vec{r}_i' - \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i d\vec{r}_i = -dU' + dU$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \delta\vec{r}_i = -\delta U, \qquad (2.2)$$

pri čemu smo predpostavili da su sile potencijalne. Drugi član možemo transformisati na sledeći način:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{V}}_i \delta\vec{r}_i = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i \delta\vec{r}_i - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i \frac{d}{dt}\delta\vec{r}_i .$$

Kao što vidimo drugi član Dalamber-Lagranževog principa (2.1) nakon izvršene transformacije daje dva člana. Prvi od ovih članova prema obrascima (1.10), (1.11) i (1.13) iznosi

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\delta q_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i \frac{\partial\vec{r}_i}{\partial q_j}\right)\delta q_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i \frac{\partial\vec{V}_i}{\partial \dot{q}_j}\right)\delta q_j ,$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i \delta\vec{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\delta q_j \qquad (2.3)$$

Drugi član prema obrascu (1.12) je

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i \frac{d}{dt}\delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i \delta\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i \delta\vec{V}_i$$

tj.

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{V}_i \frac{d}{dt}\delta\vec{r}_i = \delta T \qquad (2.4)$$

te, konačno, drugi član u Dalamber-Lagranževog principa možemo napisati u obliku

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\vec{V}}_i \delta\vec{r}_i = \frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j - \delta T \qquad (2.5)$$

Tada Dalamber-Lagranžev princip (2.1) na osnovu obrasca (2.2) i (2.5) glasi:

$$-\delta U-\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j+\delta T=0,$$

odnosno, pošto je L=T-U

$$\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j=\delta L \tag{2.6}$$

Ovo je drugi oblik Dalamber-Lagraževog principa za sisteme u kojima dejstvuju samo potencijalne sile, koji je pogodan za prelaz na integralne principe. Ovaj oblik Dalamber-Lagranževog principa naziva se centralna Lagranževa jednačina.

2. 1. Hamiltonov princip

Integralimo obe strane jednačine (2.6) po vremenu od t_0 do t_1

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta L\,dt \tag{2.7}$$

s obzirom na to da se na levoj strani uzajamno poništavaju operacije integraljenja i diferenciranja po vremenu, a na desnoj strani možemo izmeniti red operacija variranja i integraljenja, predhodnu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}\delta q_j\Big|_{t_0}^{t_1}=\delta\int_{t_0}^{t_1}L\,dt \tag{2.8}$$

Imajući u vidu da su varijacije δq_j u trenucima t_0 i t_1 jednake nuli jer se položaj sistema pri pravom i okolnom putu u tim trenucima poklapaju, integrisani deo otpada, pa konačno dobijamo

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}L\,dt=0 \tag{2.9}$$

Ovaj integral koji figuriše u gornjem obrascu

$$W=\int_{t_0}^{t_1}L(q_i,\dot{q}_i,t)\,dt \tag{2.10}$$

naziva se Hamiltonovo dejstvo, te možemo reći: Stvarno kretanje sistema čestica sa idealnim holonomnim vezama i potencijalnim silama vrši se tako da Hamiltonovo dejstvo duž pravog puta ima stacionarnu vrednost u odnosu na dejstvo duž svih okolnih puteva.

Ovaj princip naziva se Hamiltonov princip i predtavlja jedan od najvažnijih zakona mehanike. On je formulisan u obliku uslova koji mora da zadovoljava dejstvo koje ima integralni oblik i stoga ovaj princip predstavlja jedan opšti integralni princip mehanike.

2.2. Ekvivalentnost Hamiltonovog principa i Lagranževih jednačina

Pokažimo sad da su Hamiltonov princip i Lagranževe jednačine ekvivalentne. U tom smislu izračunajmo varijaciju Hamiltonovog dejstva, imajući u vidu da operacije variranja i integraljenja kao nezavisne operavcije mogu izmeniti svoj red i da se prema načinu na koji smo uveli pojam varijacije pravila variranja formalno poklapaju sa pravilima diferenciranja s tom razlikom što je $\delta t = 0$ dok je $dt \neq 0$. Tako imamo

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \delta L\, dt,$$

tj.

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} \delta q_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right) dt \qquad (2.11)$$

Da bismo se oslobodili varijacija generalisanih brzina $\delta \dot{q}_i$ koje nisu nezavisne od varijacije δq_i, transformišimo svaki integral u drugoj sumi na taj način što ćemo prvo primeniti obrazac

$$\delta \frac{dq_i}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q_i \qquad (2.12)$$

a potom izvršiti parcijalnu integraciju

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \frac{d}{dt} \delta q_i\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\delta q_i =$$

$$= \left| \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i \right|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta q_i\, d \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i},$$

a pošto integrisani deo prema obrascu

$$\delta q_i(t_0) = 0 \qquad \delta q_i(t_1) = 0 \qquad i = 1, 2, \cdots, n \qquad (2.13)$$

otpada, imamo

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i = - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta q_i dt \tag{2.14}$$

Tada izraz (2,11) dobija oblik

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \Big) \delta q_i dt \tag{2.15}$$

i ovaj obrazac određuje varijaciju Hamiltonovog dejstva.

Ako sada pođemo od Lagraževih jednačina (1,18)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i = 1,2,\cdots,n \tag{2.16}$$

neposredno vidimo da je tada gornji izraz (2.15) jednak nuli

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} L \, dt = 0 \tag{2.17}$$

a to je Hamiltonov princip. Ako pak pođemo od Hamiltohovog principa tj. od zahteva da izraz (2.17) bude jednak nuli, zbog nezavisnosti varijacija δq_i svi koeficijenti uz njih u izrazu (2.13) moraju biti jednaki nuli i tako dolazamo do Lagranževih jednačina (2.16)

Dakle, Hamiltonov princip i Lagranževe jednačine su međusobno ekvivalentna, tj. Lagranževe jednačine određuju upravo one funkcije $q_i(t)$ za koje Hamiltonovo dejstvo ima stacionarnu vrednost.

2.3. HAMILTONOVE JEDNAČINE

Generalisani impulsi

Posmatrajmo sistem od N čestica sa n stepeni slobode bez veza ili sa idealnim holonomnim vezama i potencijalnim silama. U tom slučaju najpogodnije diferencijalne jednačine kretanja su Lagranževe jednačine

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0 \qquad i=1,2,\cdots n \tag{2.18}$$

koje predstavljaju sistem n simultanih običnih diferencijalnih jednačina drugog reda u odnosu na nepoznate funkcije $q_j(t)$.
Postavimo pitanje može li se sniziti red ovih diferencijalnih, tako da ovaj sistem diferencijalnih jednačina drugog reda zamenimo izvesnim sistemom diferencijalnih jednačina prvog reda. Svakako da se to može postići na taj način da se broj diferencijalnih jednačina udvostruči, čime se i broj nepoznatih funkcija mora udvostručiti, što se može uraditi na mnogo načina. Očigledno je da se taj cilj može najpogodnije postići ako u Lagranževim jednačinama (2.18) za nove nepoznate funkcije uzmemo veličine koje ćemo označiti sa p_j

$$p_j=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{2.19}$$

Ovako definisane veličine nazivaju se generalisani impulsi, pri čemu svakoj generalisanoj koordinati odgovara jedan konjugovan (pridružen) generalisani impuls. Međutim, generalisani impulsi ne moraju imati dimenziju impulsa, kao što ni generalisane koordinate ne moraju imati dimenzije dužine.

Prema načinu uvođenja generalisani impulsi su potpuno ravnopravni sa generalisanim koordinatama, a zajedno sa njima nazivaju se kanonske promenljive. Da bismo videli smisao generalisanih impulsa, posmatrajmo slobodno kretanje sistema i za generalisane koordinate uzmimo pravougle koordinate čestica sistema.

Tada imamo

$$L = T - U = \frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{n} m_\nu(\dot{x}_\nu + \dot{y}_\nu + \dot{z}_\nu) - U(x_\nu, t) \tag{2.20}$$

pa su odgovarajući generalisani impulsi

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\nu} = m_\nu \dot{x}_\nu, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{y}_\nu} = m_\nu \dot{y}_\nu, \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m_\nu \dot{z}_\nu \tag{2.21}$$

a to su komponente impulsa četica sistema.

Dakle, u slučaju slobodnog kretanja sistema i pravouglih koordinata generalisani impulsi prestavljaju komponente impulsa čestiwa sistema i u tom smislu generalisani impulsi prestavljaju generalizaciju pojma impulsa.

Ispitajmo sad detaljnije sistem jednačina (2.20), koji definišw generalisane impulse. Ako posmatramo opšti slučaj kad potencijalna energija može zavisiti i od generalisanih brzina $\dot{q}_j$, kinetička energija sistema prema obrascu

$$T = T_2 + T_1 + T_0$$

je kvadratna funkcija a uopšteni potencijal je oblik (1.17), tj. linearna funkcija generalisanih brzina, koja se u slučaju običnog potehcijala svodi na $U(q_j, t)$. S toga je Lagranževa funkcija u opštem slučaju oblika

$$L = T - V = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n} b_j\dot{q}_j + c - \sum_{j=1}^{n}\alpha_j\dot{q}_j - \beta$$

ili kraće

$$L = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_j\dot{q}_k + \sum_{j=1}^{n} b_j'\dot{q}_j + c' \tag{2.22}$$

gde je

$$b_j' = b_j - \alpha_j \qquad c' = c - \beta$$

Generalisahi impulsi, tj. parcijalni izvodi $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}$ biće tada linearne funkcije generalisanih brzina

$$p_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_k + b_j' \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{2.23}$$

Ovo je eksplicitni oblik sistema jednačina (2.19), koje nam daju vezu između generalisanih impulsa i generalisanih brzina.

Da bi smo ispitali mogućnost rešavanja ovog sistema jednačina po veličinama $\dot{q}_j$, ispitajmo determinantu ovog sistema $|a_{jk}|$. Predpostavićemo da je ova determinanta jednaka nuli

$$|a_{jk}|=0$$

to bi bio uslov da sistem homogenih jednačina po $\dot{q}_j$ sa istim koeficijentima

$$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\dot{q}_k=0 \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{2.24}$$

ima rešenja različita od nule $\dot{q}_k \neq 0$. Ovaj sistem jednačina može se napisati i u obliku

$$\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}=0 \qquad i=1,2,\cdots,n$$

gde je T_2 kvadratni član kinetičke energije. Pošto je prema Ojlerovoj teoriji o homogenim funkcijama

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_j}\dot{q}_j=2T_2$$

zaključujemo da i T_2 mora biti jednako nuli, što je moguće samo tada kada su svi $\dot{q}_j$ jednaki nuli. Protivrečnosti ovih zaključaka očevidno pokazuju da naša predpostavka $|a_{jk}|=0$ nema smisla, te mora biti

$$|a_{jk}|\neq 0 \tag{2.25}$$

Tada se rešavanjem sistema jednačina (2.19) po promenljivima $\dot{q}_j$ dobijaju rešenja oblika

$$\dot{q}_j=\sum_{k=1}^{n} c_{jk}p_k+d_j \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{2.26}$$

gde su c_{jk} i d_j neki novi koeficijenti.

Prema tome, sistem jednačina koji definiše generalisane impulse u klasičnoj mehanici uvek se može rešiti po generalisanim brzinama, te se generalisane brzine uvek mogu zameniti generalisanim impulsima.

2.4. Hamiltonove jednačine

Pređimo sada na dobijanje traženih diferencijalnih jednačina kretanja prvog reda. Ako uvedemo generalisane impulse (2.19) kao nove nepoznate funkcije Lagranževe jednačine (2.18) dobijaju oblik

$$\frac{dp_j}{dt}-\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$$

tj.

$$\dot{p}_j=\frac{\partial L}{\partial q_j} \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{2.27}$$

U ovom obliku Lagranževih jednačina figurišu samo prvi izvodi nepoznatih funkcija q_j i p_j. S druge strane, možemo formirati varijacije Lagranževe funkcije $L(q_j,\dot{q}_j,t)$ čija varijacija iznosi

$$\delta L=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial q_j}\delta q_j+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\delta \dot{q}_j, \tag{2.28}$$

pa prema definiciji generalisanih impulsa (2.19) i Lagranževim jednačinama (2.18) dobijamo

$$\delta L=\sum_{j=1}^{n}\dot{p}_j\delta q_j+\sum_{j=1}^{n}p_j\delta\dot{q}_j \tag{2.29}$$

Pošto je

$$p_j\delta\dot{q}_j=\delta(p_j\dot{q}_j)-\dot{q}_j\delta p_j$$

prethodni izraz možemo napisati u obliku

$$\delta L=\sum_{j=1}^{n}\dot{p}_j\delta q_j+\delta\sum_{j=1}^{n}p_j\dot{q}_j-\sum_{j=1}^{n}\dot{q}\delta p_j$$

a otuda

$$\delta\Big(\sum_{j=1}^{n}p_j\dot{q}_j-L\Big)=\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\delta p_j-\sum_{j=1}^{n}\dot{p}_j\delta q_j \tag{2.30}$$

Odavde vidimo da je izraz u zagradi takav da je njegova varijacija linearna funkcija od δp_j i δq_j, te ovaj izraz, koji označavamo sa H, možemo smatrati funkcijom od svih generalisanih koordinata, generalisanih impulsa i vremena

$$H(q_j,p_j,t)=\sum_{j=1}^{n}p_j\dot{q}_j-L \tag{2.31}$$

Ovako definisana funkcija $H(q_j,p_j,t)$ naziva se Hamiltonova funkcija. Uvodeći oznaku (2.31) možemo relaciju (2.30) napisati u obliku

$$\delta H=\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\delta p_j-\sum_{j=1}^{n}\dot{p}_j\delta q_j \tag{2.32}$$

Međutim, možemo neposredno formirati varijaciju Hamiltonove funkcije, smatrajući je funkcijom od promenljivih q_j, p_j i t

$$\delta H=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}\delta p_j+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_j}\delta q_j \tag{2.33}$$

Poređenjem ovih obrazaca zaključujemo da zbog nezavisnosti varijacija δp_j i δq_j odgovarajući koeficijenti uz njih moraju biti međusobno jednaki

$$\frac{dp_j}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \frac{dq_j}{dt}=\frac{\partial H}{\partial p_j} \quad j=1,2,\cdots,n \tag{2.34}$$

Jednačine (2.34) nazivaju se Hamiltonove jednačine ili kanonske jednačine kretanja i one predstavljaju tražene diferencijalne jednačine kretanja prvog reda sa nepoznatim funkcijama

$q_j(t)$ i $p_j(t)$.

Pokažimo sada da su Hamiltonove jednačine (2.34), kao i Lagranževe ekvivalentne sa Hamiltonovim principom. Izračunajmo sada varijaciju Hamiltonovog dejstva

$$W=\int_{t_0}^{t_1}L(q_j,\dot{q}_j,t)\,dt,$$

koje prema obrascu (2.31) možemo napisati i u obliku

$$W=\int_{t_0}^{t_1}L\,dt=\int_{t_0}^{t_1}\Big(\sum_{j=1}^{n}p_j\dot{q}_j-H\Big)dt \tag{2.35}$$

Varijacija ovog izraza, s obzirom na to da je dozvoljena izmena reda operacija variranja i integriranja i da je Hamiltonova funcija oblika $H(q_j,p_j,t)$ glasi

$$\delta W=\delta\int_{t_0}^{t_1}\Big(\sum_{j=1}^{n}p_j\dot{q}_j-H\Big)dt=\int_{t_0}^{t_1}\delta\Big(\sum_{j=1}^{n}p_j\dot{q}_j-H\Big)dt$$

odnosno

$$\delta W=\int_{t_0}^{t_1}\Big(\sum_{j=1}^{n}p_j\delta\dot{q}_j+\sum_{j=1}^{n}\dot{q}_j\delta p_j-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial q_j}\delta q_j-\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial H}{\partial p_j}\delta p_j\Big)dt \tag{2.36}$$

Radi eliminisanja δq_j svaki od integrala u prvoj sumi možemo transformiaati na taj način što ćemo prvo izmeniti red operacija variranja i diferenciranja po vremenu, a potom izvršiti parcijalnu integraciju

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_j \delta q_j \, dt = \int_{t_0}^{t_1} p_j \frac{d}{dt}(\delta q_j) dt = \int_{t_0}^{t_1} p_j d(\delta q_j) = |p_j \delta q_j|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \delta q_j \, dp_j$$

a pošto prema uslovima $\delta q_j(t_0) = 0$ i $\delta q_j(t_1) = 0$ integrisani deo otpada, ostaje

$$\int_{t_0}^{t_1} p_j \delta \dot{q}_j \, dt = -\int_{t_0}^{t_1} \dot{p}_j \delta q_j \, dt \qquad (2.37)$$

Tada varijacija dejstva (2.36) dobija oblik

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} \left(\dot{p}_j \delta q_j + \dot{q}_j \delta p_j - \frac{\partial H}{\partial q_j} \delta q_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \delta p_j \right) dt$$

ili posle grupisanja članova

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \left(\dot{q}_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} \right) \delta p_j - \sum_{j=1}^{n} \left(\dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial q_j} \right) \delta q_j \right\} dt \qquad (2.38)$$

Ovaj obrazac određuje varijaciju Hamiltonovog dejstva u funkciji varijacija kanonskih promenljivih. Ako sad pođemo od Hamiltonovih jednačina (2.34) neposredno vidimo da je gornji izraz jednak nuli, čime dobijamo Hamiltonov princip. Ako pak pođemo od Hamiltonovog principa, tj. od zahteva da gornji izraz bude jednak nuli, zbog nezavisnosti varijacija δq_j i δp_j svi koeficijenti uz njih moraju biti jednaki nuli, čime dobijamo Hamiltonove jednačine.

Dakle, Hamiltonove jednačine i Hamiltonov princip su međusobno ekvivalentni, tj. Hamiltonove jednačine određuju baš one funkcije $q_j(t)$ i $p_j(t)$ za koje Hamiltonovo dejstvo ima stacionarnu vrednost.

2.5. Smisao Hamiltonove funkcije

Zadržimo se sada na Hamiltonovoj funkciji (2.31) i pokažimo pre svega način njenog formiranja. Ako je formiramo po samoj definiciji

$$H=\sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L(q_j \dot{q}_j t)$$

Dobija se funkcija oblika $f(q_j, \dot{q}_j, p_j, t)$. Međutim, prema načinu formiranja zaključili smo da Hamiltonova funkcija mora biti izražena samo pomoću generalisanih koordinata, generalisanih impulsa i vremena i osnovni problem prelaska sa Lagranževog na Hamiltonov formalizam sastoji se u tome kako se gornja veličina može dobiti u funkciji navedenih promenljivih, U tom cilju treba poći os sistema jednačina (2.19), koji u eksplicitnom obliku ima vid (2.23)

$$\begin{aligned} p_1 &= a_{11}\dot{q}_1 + \cdots + a_{1n}\dot{q}_n + b_1' \\ p_2 &= a_{21}\dot{q}_1 + \cdots + a_{2n}\dot{q}_n + b_2' \\ p_n &= a_{n1}\dot{q}_1 + \cdots + a_{nn}\dot{q}_n + b_n' \end{aligned} \qquad (2.39)$$

i ovaj sistem od n linearnih jednačina rešiti po generalisanim brzinama $\dot{q}_j$ čime se dobijaju rešenja oblika (2.26)

$$\dot{q}_j = \varphi_j(q_k, p_k, t) \equiv \sum_{k=1}^{n} c_{jk} p_k + d_j \qquad j=1,2,\dots,n$$

Kao što smo naveli, determinanta gornjeg sistema linearnih jednačina uvek je različita od nule, te je uvek moguće gornji sistem jednačina rešiti po promenljivoj $\dot{q}_j$. Ako sad tako nađena rešenja za $\dot{q}_j$ uvrstimo u Hamiltonovu funkciju, dobićemo

$$H=\sum_{j=1}^{n} p_j \varphi_j(q_k, p_k, t) - L(q_j, \varphi_j(q_k, p_k, t), t) \equiv F(q_k, p_k, t) \qquad (2.40)$$

$$H=\sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left[p_j - L(q_j, t)\right]}_{F} \varphi_j(q_k, p_k, t) \equiv F(q_k, p_k, t)$$

čime smo ovu veličinu zaista izrazili u traženom obliku, tj. u funkciji promenljivih q_j, p_j, t .

Da bi smo videli fizički smisao Hamiltonove funkcije, napomenimo da smo prema analizi veličine

$$H = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = const.$$

zaključili da veličina H , koja se poklapa sa Hamiltonovom funkcijom, pod vrlo opštim uslovima predstavlja ukupnu energiju sistema. Ovde ređe posmatrajmo opšti slučaj, kad je kinetička energija ma kakva kvadratna funkcija generalisanih brzina i kad sile imaju potencijal, koji može zavisiti i od generalisanih brzina. Ako ih napišemo u obliku

$$T = T_2 + T_1 + T_0 \,, \quad V = V_1 + U$$

Lagranževa funkcija biće takođe kvadratna funkcija generalisanih brzina

$$L = L_2 + L_1 + L_0 \qquad (2.41)$$

gde su L_2, L_1 i L_0 kvadratni, linearni i nezavisni član

$$L_2 = T_2 \,, \quad L_1 = T_1 - V_1 \,, \quad L_0 = T_0 - U \qquad (2.42)$$

Hamiltoneva funkcija biće tada jednaka

$$H = \sum_{j=1}^{n} p_j \dot{q}_j - L = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (L_2 + L_1 + L_0) \dot{q}_j - (L_2 + L_1 + L_0)$$

odnosno

$$H = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_1} \dot{q}_1 - L_2 - L_1 - L_0 \qquad (2.43)$$

Na prva dva člana možemo primeniti Ojlerovu teoremu o homogenim funkcijama

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L_2}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2L_2 \,, \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial L_1}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2L_1 \,,$$

tako da se prethodni izraz transformiše u

$$H = L_2 - L_1 \qquad (2.44)$$

Zamenimo li još ovde L_2 i L_o prema obrascima (2,42), konačno dobijamo da je Hamiltonova funkcija u opštem slučaju

$$H = T_2 - T_1 + U \tag{2.45}$$

Ako je kretanje slobodno ili sa stacioniranim vezama, kinetička energija je homogena kvadratna funkcija generalisanih brzina, tako da tada važi $T = T_2$, $T_o = 0$ te je

$$H = T + U \equiv E \tag{2.46}$$

Prema tome, ako su sve sile koje dejstvuju na sistem potencijalne a kretanje sistema slobodno ili sa stacioniranim vezama, Hamiltonova funkcija predstavlja ukupnu energiju sistema. Pri tom napomenimo da u ovako definisanu energiju E ne ulazi celokupni uopšteni potencijal, već samo njen nezavisni član, koji odgovara običnom potencijalu i koji čak sme zavisiti i eksplicitno od vremena.

Ispitajmo još po kojim uslovima je Hamiltonova funkcija integral kretanja. U tom cilju diferencirajmo je totalno po vremenu

$$\frac{d}{dt} H(q_j, p_j, t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \dot{p}_j + \frac{\partial H}{\partial t}, \tag{2.47}$$

pa zamenimo ovde $\dot{q}_j$ i $\dot{p}_j$ prema Hamiltonovim jednačinama (2.34)

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_j} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial p_j} \left(-\frac{\partial H}{\partial q_j} \right) + \frac{\partial H}{\partial t},$$

tj.

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} \tag{2.48}$$

Ovde vidimo da ako je $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, integracijom neposredno dobijamo

$$H(q_j, p_j, t) = const. \tag{2.49}$$

Dakle, ako Hamiltonova funkcija ne zavisi eksplicitno od vremena, onda predstavlja jedan integral kretanja koji se obično poklapa sa zakonom održanja energije. Naime, ovakav slučaj imamo ako je kretanje sistema slobodno ili sa stacionoranim vezama i ako su sve sile konzervativne, ali i u slučaju kad imamo uopšteni potencijal čiji nezavisni član ne zavisi eksplicitno od vremena.

2.6. Analiza Hamiltonovih jednačina

Analizitajmo sad Hamiltonove jednačine (2.34), u kojima predpostavljamo da je poznata Hamiltonova funkcija $H(q_j, p_j, t)$

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}, \quad \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j} \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

Ove jednačine predstavljaju sistem od 2n simultanih običnih diferencijalnih jednačina prvog reda rešenih po $\dot{q}_j$ i $\dot{p}_j$, u kojima su nepoznate funkcije sve generalisane koordinate q_j i svi generalisani impulsi p_j, a nezavisno promenljiva vreme t, pri čemu je broj ovih jednačina jednak dvostrukom broju stepeni slobode. Pri primeni Hamiltonovih jednačina postupa se na sličan način kao sa Lagranževim jednačinama. Po izboru generakisanih koordinata moraju se naći odgovarajući generalisani impulsi, a zatim na način kako smo malopre izložili Hamiltonova funksija izražena pomoću generalisanih koordinata, generalisanih impulsa i eventualno vremena. Potom treba formirati Hamiltonove jednačine za svaku kanonsku promenljivu, i rešiti ovaj sistem jednačina uz date početne uslove q_{jo}, i p_{jo}, čime se dobijaju generalisane koordinate i generalisani impulsi kao funkcije vremena.

Rešenja ovih jednačina su jednoznačna, jer su Hamiltonove jednačine eksplicitno rešene po izvodima najvišeg reda, što je u saglasnosti sa principom kauzalnosti.

U koliko su veze stacionarne i sistem konzervativan, Hamiltonova funkcija može se naći i na taj način što se ukupna energija sistema izrazi u funkciji generalisanih koordinata i generalisanih impulsa. U nekim slučajevima Hamiltonove jednačine omogućavaju neposredno nalaženje prvih integrala, kao na primer prvi integral u obliku (2.49). Ako Hamiltonova funkcija ne zavisi eksplicitno od jedne ili više generalisanih koordinata, tj. ako je

$$\frac{\partial H}{\partial q_j}=0 \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{2.50}$$

odgovarajuće Hamiltonove jednačine za generalisane impulse daju

$$\frac{\partial p_j}{\partial t}=-\frac{\partial H}{\partial q_j}=0,$$

a otuda

$$p_j=const. \qquad j=1,2,\cdots,n \tag{2.51}$$

Pošto je prema definiciji Hamiltonove funkcije (2.31) $\frac{\partial H}{\partial q_j}=\frac{\partial L}{\partial q_j}$, iz uslova (2.50) sledi da je u tom slučaju i $\frac{\partial L}{\partial q_j}=0$ pa takve generalisane koordinate, koje ne ulaze eksplicitno u Hamiltonovu funkciju ne figurišu eksplicitno ni u Lagranževoj funkciji. Stoga su one prema definiciji (2.46) ciklične koordinate, a odavde vidimo da svakoj cikličnoj koordinati odgovara jedan prvi integral oblika $p_j=const.$ Hamiltonova funkcija tada postaje funkcija samo od n - r generalisanih koordinata i toliko isto promenljivih generalisanih impulsa, čime je problem efikasno sveden na problem n - r steoeni slobode.

Posmatrajmo još slučaj kad dve odgovarajuće kanonske promenljive figurišu u Hamiltonovoj funkciji samo preko neke funkcije, naprimer $f(q_1,p_1)$. To su takozvane združene kanonske promenljive, Hamiltonove jednačine za p_1 i q_1 glase

$$\dot p_1=-\frac{\partial H}{\partial q_1}=-\frac{\partial H}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial q_1}, \quad \dot q_1=\frac{\partial H}{\partial p_1}=\frac{\partial H}{\partial f}\frac{\partial f}{\partial p_1} \tag{2.52}$$

Deobom ovih jednačina dobijamo

$$\frac{\dot p_1}{\dot q_1}=\frac{dp_1}{dq_1}=-\frac{\frac{\partial f}{\partial q_1}}{\frac{\partial f}{\partial p_1}},$$

a otuda

$$\frac{\partial f}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial f}{\partial p_1}dp_1=0$$

odakle integracijom sledi kao prvi integral

$$f(q_1,p_1)=const. \tag{2.53}$$

Međutim, poseban značaj Hamiltonovih jednačina leži u sledećem. Dok nepoznate funkcije u Lagranževim jednačinama generalisane koordinate određuju samo položaj sistema, nepoznate funkcije u Hamiltonovim jednačinama generalisane koordinate i generalisani impulsi određuju ne samo položaj već i stanje kretanja sistema.

Dakle, Hamiltonove jednačine neposredno određuju mehaničko stanje sistema i stoga one igraju veliku ulogu u svim onim granama teorijske fizike koje baziraju na pojmu stanja sistema. Takav slučaj imamo u statističkoj fizici i kvantnoj mehanici, gde su ove jednačime od posebnog interesa.

Odgovarajuća geometrijska interpretacija može se dobiti uvođenjem $2n$ dimenzionog Euklidovog prostora, u kome pod tačkom podrazumevamo svaki uređeni skup.

$$X = (q_1, \cdots, q_n, p_1, \cdots, p_n) \tag{2.54}$$

i u kome je metrička forma definisana obrascem

$$ds^2 = \sum_{j=1}^{n} dq_j^2 + \sum_{j=1}^{n} dp_j^2 \tag{2.55}$$

Tako definisan 2n dimenzioni Euklidov prostor naziva se fazni prostor i pomoću njega se mehaničko stanje sistema čestica predstavlja jednom tačkom, tzv. reprezentativnom tačkom u faznom prostoru, čiji je broj dimenzija jednak dvostrukom broju stepeni slobode.

KANONSKE TRANSFORMACIJE

Prilikom rešavanja sistema Hamiltonovih jednačina one se obično svode na Lagranževe jednačine. Prema tome što se matematičkih olakšica tiče, Hamiltonov formalizam se bitno ne razlikuje od Lagranževog. Preimućstvo Hamiltonovg metoda u odnosu na Lagranžev metod nije u njegovoj matematičkoj jednostavnošti prilikom rešavanja odgovarajućih jednačina kretanja, već u činjenici da on dublje prodire u strukturu mehanike. Zbog toga što ravnopravnost koordinata i impulsa, uzetih kao nezavisne funkcije, predstavlja veliku slobodu pri izboru veličina koje se uzimaju za "koordinate" i "impulse", i zbog toga što se kao rešenje problema dobija mehaničko stanje sistema.

Izbor generalisanih koordinata a samim tim i generalisanih impulsa, datog sistema nije jednoznačan. S druge strane, sam izbor generalisanih koordinata direktno utiče na matematičku komplikovanost rešavanja odgovarajućih Hamiltonovih jednačina kretanja. Najjednostavnije bi se dati problem mogao rešiti kada bi, na pr. sve genaralisane koordinate bile ciklične ili bar što veći njihov broj. Svakoj cikličnoj koordinati, na osnovu Hamiltonovih jednačina odgovara njoj konjugovan konstantan generalisan inpuls čime se rešenje problema u mnogome matematički pojednostavljuje. Na primer, proučavajući kretanje čestica u sferno simetričnom potencijalu (potencijal zavisi samo od sfera koordinate $\vec{r}$; $V=V(\vec{r})$ ako se za generalisane koordinatem odaberu Dekaртove koordinate x,y i z, onda nijedna od njih neće biti ciklična. Međutim, ako se za generalisane koordinate odaberu sferne koordinate r, θ, φ onda će θ i φ biti cilične, čime se ovaj problem efektivno svodi na jednodimenzionalni problem po koordinati $\vec{r}$.

Dakle, osobina cikličnosti generalisanih koordinata je vezana za sam izbor ovih koordinata. Pošto su koordinate sistema , koje je najprirodnije uzeti za generalisane, retko kad ciklične, uopšte nameće se potreba za razradu procedure prelatka sa tzv. starih kanonskih promenjljivih na neki drugi pogodniji (ne moraju biti obavezno generalisane koordinate ciklične) sistem kanonskih promenljibih (tzv. nove kanonske promenljive).

Na bazi ovakvih transformacija kanonskih promenljivih izgrađene su, u odnosu na Lagranžev i Hamiltonov metod, apstraktnije forme izlaganja fizičke suštine mehanike. I ako na ovaj način dobijeni metodi mogu da predstavljaju izvesnu olakšicu u rešavanju problema klasične mehanike, njihova glavna korist je u tome što su oni predstavljali polaznu tačku u izgradnji statističke i kvantne mehanike.

3.1. Formulacija kanonskih transformacija

Kao što je istaknuto, izbor generalisanih koordinata nije jednoznačan. S druge strane, oblik Lagranževih jednačina ne zavisi od izbora generalisanih koordinata i u tom smislu formalni oblik Lagranževih jednačina je invarijantan u odnosu na transformaciju generalisanih koordinata $q_1, q_2, \ldots, q_n$ na neke nove $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ tj. na transformaciju

$$Q_i = Q_i(q_k, t) \qquad (3.1)$$

Uporedo sa Lagranževim jednačinama, oblik Hamiltonovih jednačina, prirodno takođe ne zavisi od izbora generalisanih koordinata i u tom smislu oblik Hamiltonovih jednačina je invarijantan u odnosu na transformaciju (3.1) .

Međutim, pošto u Hamiltonovom metodu uporedo sa generalisanim koordinatama u svojstvu nepoznatih funkcija se pojavljuju i generalisani impulsi, pojam transformacije se ovde može proširiti tako da istovremeno obuhvati i generalisane koordinate i generalisane impulse.

$$Q_i = Q_i(q_k, p_k, t) \quad , \quad P_i = P_i(q_k, p_k, t) \tag{3.2}$$

Ovakvo proširenje pojma transformacije sa generalisanim koordinatama na istovremeno generalisane koordinate i impulse, predstavlja jedno od osnovnih i bitnih preimućstava Hamiltonovog metoda.

Međutim, pri proizvoljnim transformacijama (3.2) Hamiltonove jednačine kretanja ne zadržavaju svoj oblik, tj. Hamiltonove jednačine, u opštem slučaju, nisu invarijantne u odnosu na transformaciju (3.2). Ovde su od posebnog interesa one transformacije tipa (3.2) u odnosu na koje se oblik Hamiltonovih jednačina ne menja, tj. takve transformacije u odnosu na koje su Hamiltonove jednačine invarijantne

$$\left.\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \end{aligned}\right\} \text{kanoničnom transforma-} \atop \text{cijom prelazi u} \left\{\begin{aligned} \dot{Q}_i &= \frac{\partial K}{\partial P_i} \\ \dot{P}_i &= -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \end{aligned}\right. \tag{3.3}$$

gde je $K(Q_i, P_i, t)$ nova Hamiltonova funkcija. Transformacije tipa (3.2) koje ispunjavaju navedeni uslov nazivaju se kanonske transformacije.

Uslov kanoničnosti se može izraziti i u drugom obliku. Naime, pošto su Hamiltonove jednačine ekvivalentne Hamiltonovom principu, uslov da transformacija (3.2) bude kanonična može se napisati u obliku

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}_i - H(q_k,p_k,t)\right\}dt = 0 \ \ \begin{matrix}\text{kanoničnom}\\ \text{transforma-}\\ \text{cijom prelazi u}\end{matrix} \ \ \delta\int_{t_0}^{t_1}\left\{\sum_{i=1}^{n} P_i\dot{Q}_i - K(Q_k,P_k,t)\right\}dt = 0 \tag{3.4}$$

I ako su jednačine (3.4.) istovremeno zadovoljene, u opštem slučaju ne sledi da su njihove podintegralne funkcije jednake. Naime, za ma kakvu funkciju F starih i novih promenljivih, zbog poklapanja položaja sistema na pravom i zaobilaznom putu za $t=t_o$ i $t=t_1$, biće $\delta F(t_o)=0$ i $\delta F(t_1)=0$, te je

$$\delta\int_{t_o}^{t_1}\frac{dF}{dt}dt=\delta F(t_1)-\delta F(t_o)=0 \qquad (3.5)$$

Ovde sledi da se u opštem slučaju, podintegralne funkcije u jednačinama (3.4.) mogu razlikovati za $\frac{dF}{dt}$, tj.

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\dot{q}_i-H(q_k,p_k,t)=\sum_{i=1}^{n}P_i\dot{Q}_i-K(Q_k,P_k,t)+\frac{dF}{dt} \qquad (3.6)$$

Ova jednačina predstavlja traženi uslov da transformacija (3.2) bude kanonična. Funkcija F se naziva funkcija generatrise date kanonične transformacije promenljivih. Kasnije će biti pokazano na koji način, zadavajući funkciju generatrise, se može jednoznačno naći odgovarajuća kanonična transformacija. Uslov kanoničnosti (3.6) se može napisati i u diferencijalnom obliku množeči uslov (3.6) sa dt

$$\sum_{i=1}^{n}p_i dq_i-H(q_k,p_k,t)dt=\sum_{i=1}^{n}P_i dQ_i-K(Q_k,P_k,t)dt+dF \qquad (3.7)$$

ili ako se uslov (3.7) napiše za drugi skup mogućih promena kanonskih promenljivih za isto vreme dt

$$\sum_{i=1}^{n}p_i d'q_i-H(q_k,p_k,t)dt=\sum_{i=1}^{n}P_i d'Q_i-K(Q_k,P_k,t)dt+d'F \qquad (3.8)$$

onda se oduzimanjem (3.8) od (3.7), uslov kanoničnosti može napisati i u obliku

$$\sum_{i=1}^{n}p_i\delta q_i-\sum_{i=1}^{n}P_i\delta Q_i=\delta F \qquad (3.9)$$

3.2. Tipovi generatrise

Funkcija generatrise F, koja određuje prelaz sa starih kanoničnih promenljivih na nove, treba da je funkcija kako starih tako i novih promenljivih. Dakle, osim vremena, ona je funkcija promenljivih: $F(q_K, p_K, Q_K P_K, t)$.

Međutim, pošto između starih i novih promenljivih postoji 2n jednačina veza (3.2) broj nezavisno promenljivih je samo 2n. U tom smislu funkcija generatrise F se može uzeti u jedno od sledećih fizičkih interesnih oblika.

$$F_1(q_K, Q_K, t);\ F_2(q_K, P_K, t);\ F_3(p_K, Q_K, t);\ F_4(p_K, P_K, t) \qquad (3.10)$$

Ako se za funkciju generatrise uzme oblik onda je

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - H dt = \sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i - K dt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \qquad (3.11)$$

Pošto se stare koordinate q_K i nove Q_K ovde uzimaju kao nezavisno promenljive, iz jednačine (3.11) sledi da je

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \qquad (3.12)$$

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \qquad (3.13)$$

Sistem jednačina (3.12) za datu funkciju generatrise jednoznačno određuje odgovarajuću kanonsku transformaciju. Naime, sistem jednačina $p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = \varphi(q_K, Q_K, t)$, kada se reši po Q_i daje prvu polovinu kanonske transformacije (3.2) tj. $Q_i = Q_i(q_K, p_K, t)$. Ako se ova rešenja uvrste u sistem jednačina $P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} = \psi_i(q_K, Q_K, t)$ dobiće se druga polovina transformacije (3.2), tj. $P_i = P_i(q_K, p_K, t)$

Nakon određivanja kanonske transformacije, jednačina (3.13) omogućava da se nađe nova Hamiltonova funkcija K.

Može se ispostaviti, što zavisi od problema da je za funkciju generatrise zgodnije uzeti oblik F_2. U ovom slučaju, da bi se došlo do sistema jednačina koji određuje kanonsku transformaciju mora se izvršiti prelaz sa F_1 na F_2.

Ako se iskoristi identitet $d\sum_{i=1}^{n} P_i Q_i = \sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i + \sum_{i=1}^{n} Q_i dP_i$, jednačina (3.11) se može napisati u obliku

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - Hdt = -\sum_{i=1}^{n} Q_i dP_i - Kdt + d\left\{F_1 + \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i\right\} \qquad (3.14)$$

Ovde sledi da je izraz u velikoj zagradi takav da je njegov diferencijal linearna funkcija diferencijala dq_i, dP_i i dt te se može smatrati da je on funcija od q_k, P_k, i t a to odgovara obliku F_2

$$F_2(q_k, P_k, t) = F_1 + \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i \qquad (3.15)$$

Ako se sada izračuna diferencijal funkcije F_2 i zameni u (3.14) dobija se

$$\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i - Hdt = -\sum_{i=1}^{n} Q_i dP_i - Kdt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_2}{\partial P_i} dP_i + \frac{\partial F_1}{\partial t} dt \qquad (3.16)$$

Izjednačavajući koeficijente uz iste diferencijale dobija se

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \qquad (3.17)$$

$$K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \qquad (3.18)$$

U ovom slučaju za datu funkciju generatrise tipa F_2 sistema jednačina (3.17) jednoznačno određuje odgovarajuću kanonsku transformaciju. Naime, sistem jednačina $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \varphi_i(q_k, P_k, t)$, $i = 1, 2, \cdots, n$ kada se reši po P_i određuje drugu polovinu kanonske transformacije (3.2), tj $P_i = P_i(q_k, p_k, t)$. Ako se ova rešenja smene u sistem jednačina $Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} = \psi_i(q_k, P_k, t)$, dobiće se prva polovina transformacije (3.2), tj. $Q_i = Q_i(q_k, p_k, t)$. Nakon određivanja kanoske transformacije, jednačina (3.18) omogućava da se nađe nova Hamiltonova funkcija

$$K(Q_k, P_k, t).$$

Ako je pogodnije da se za funkciju generatrise uzme oblik F_3 onda, da bi se došlo do sistema jednačina koji određuje odgovarajuću kanonsku transformaciju treba poći od uslova (3.7)

s tim što treba uzeti da je $F=F_1$ i $\sum_{i=1}^{n} p_i dq_i = d\sum_{i=1}^{n} p_i q_i - \sum_{i=1}^{n} q_i dp_i$.
Tako se dobija

$$-\sum_{i=1}^{n} q_i dp_i - Hdt = \sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i - Kdt + d\left\{F_1 - \sum_{i=1}^{n} q_i p_i\right\} \tag{3.19}$$

Iz (3.19) sledi da je $F_1 - \sum q_i p_i$ funkcija koja zavisi od p_i i Q_i, dakle funkcija oblika $F_3(p_k, Q_k, t)$. Pišući totalni diferencijal za generatrisu F_3 i zamenjujući u (3.19) dobija se

$$-\sum_{i=1}^{n} q_i dp_i - Hdt = \sum_{i=1}^{n} P_i dQ_i - Kdt + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_3}{\partial p_i} dp_i + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_3}{\partial Q_i} dQ_i + \frac{\partial F_3}{\partial t} \tag{3.20}$$

Odavde sledi izjednačavajući koeficijente uz iste diferencijale

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i}, \quad P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \tag{3.21}$$

$$K = H + \frac{\partial F_3}{\partial t} \tag{3.22}$$

Ovde za datu funkciju generatrise F, sistem jednačina (3.21) jednoznačno određuje kanonsku transformaciju. Po određivanju kanonske transformacije, jednačina (3.22) određuje novu Hamiltonovu funkciju.

Na vrlo sličan način se pokazuje da ako je data generatrisa oblika F_4, koja je jednaka $F_4 = F_1 + \sum_{i=1}^{n} P_i Q_i - \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$, sistem jednačina koji određuje odgovarajuću kanonsku transformaciju i novu Hamiltonovu funkciju, ima oblik

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad Q = \frac{\partial F_4}{\partial P_i}, \quad K = H + \frac{\partial F_4}{\partial t} \tag{3.23}$$

3.3. Invarijante kanonskih transformacija

Postoji izvestan broj veličina u Hamiltonovom formalizmu koje su invarijante u odnosu na proizvoljnu kanonsku transformaciju. Jedna takva veličina je Poasonova zagrada funkcija $U(q_K,p_K,t)$ i $V=V(q_K,p_K,t)$

$$[UV]=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial p_i}-\frac{\partial U}{\partial p_i}\frac{\partial V}{\partial q_i}\right) \tag{3.24}$$

Pre nego što bude pokazana invarijantnost izraza (3.24), biće prvo pokazana invarijantnost Poasonovih zagrada kanonskih promenljivih (tzv. fundamentalnih Poasonovih zagrada) u odnosu na ma kakvu kanonsku transformaciju. U tom smislu biće pokazane neke pomoćne ralacije. Tako, ako se pođe od sistema jednačina (3.12) i (3.21) dobija se

$$\frac{\partial p_i}{\partial Q_\ell}=\frac{\partial^2 F_1}{\partial q_i\partial Q_\ell}=-\frac{\partial P_\ell}{\partial q_i} \tag{3.25}$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial Q_\ell}=-\frac{\partial^2 F_3}{\partial Q_\ell\partial p_i}=\frac{\partial P_\ell}{\partial p_i} \tag{3.26}$$

Primenjijući (3.25) i (3.26) u izračunavanju fundamentalne Poasonove zagrade $[Q_K,P_\ell]$ dobija se

$$[Q_\ell P_\ell]_{q,p}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_\ell}{\partial q_i}\frac{\partial P_\ell}{\partial p_i}-\frac{\partial Q_K}{\partial p_i}\frac{\partial P_\ell}{\partial q_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_K}{\partial q_i}\frac{\partial q_i}{\partial Q_K}+\frac{\partial Q_K}{\partial p_i}\frac{\partial p_i}{\partial Q_\ell}\right)=\frac{\partial Q_K}{\partial Q_\ell}=\delta_{K\ell}$$

Međutim, kako je

$$[Q_K P_\ell]_{QP}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_K}{\partial Q_i}\frac{\partial P_\ell}{\partial P_i}-\frac{\partial Q_K}{\partial P_i}\frac{\partial P_\ell}{\partial Q_i}\right)=\sum_{i=1}^{n}\delta_{K,i}\,\delta_{\ell,i}=\delta_{K,\ell}$$

sledi da je

$$[Q_K,P_\ell]_{q,p}=[Q_K,P_\ell]_{Q,P}=\delta_{K,\ell} \tag{3.27}$$

Na sličan način se dokazuje da se i ostale fundamentakne Poasonove zagrade takođe kanonski invarijantne

$$[Q_k, Q_l]_{q,p} = [Q_k, Q_l]_{Q,P} = 0$$
$$[P_k, P_l]_{q,p} = [P_k, P_l]_{Q,P} = 0 \qquad (3.28)$$

Koristeći sada kanonsku invarijantnost fundamentalnih Poasonovih zagrada biće pokazana kanonska invarijantnost Poasonovih zagrada funkcija U i V. Naime, pošto su funkcije U i V funkcije od q_i, p_i i t, može se pisati

$$[U,V]_{q,p} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial p_i} - \frac{\partial U}{\partial p_i}\frac{\partial V}{\partial q_i}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left\{\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial q_i}\right)\right]\left[\sum_{l=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial p_i} + \frac{\partial V}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial p_i}\right] - \left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial Q_k}\frac{\partial Q_k}{\partial p_i} + \frac{\partial U}{\partial P_k}\frac{\partial P_k}{\partial p_i}\right)\right]\left[\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial V}{\partial Q_l}\frac{\partial Q_l}{\partial q_i} - \frac{\partial V}{\partial P_l}\frac{\partial P_l}{\partial q_i}\right)\right]\right\}$$

Ovaj se izraz može dalje napisati u obliku

$$[U,V]_{q,p} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{\partial U}{\partial Q_k}\frac{\partial V}{\partial Q_l}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\frac{\partial Q_l}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_i}\frac{\partial Q_l}{\partial q_i}\right) + \right.$$
$$+ \frac{\partial U}{\partial Q_k}\frac{\partial V}{\partial P_l}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_k}{\partial q_i}\frac{\partial P_l}{\partial p_i} - \frac{\partial Q_k}{\partial p_i}\frac{\partial P_l}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial U}{\partial P_k}\frac{\partial V}{\partial Q_l}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial P_k}{\partial q_i}\frac{\partial Q_l}{\partial p_i} - \frac{\partial P_k}{\partial p_i}\frac{\partial Q_l}{\partial q_i}\right) +$$
$$\left. + \frac{\partial U}{\partial P_k}\frac{\partial V}{\partial P_l}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial P_k}{\partial q_i}\frac{\partial P_l}{\partial p_i} - \frac{\partial P_k}{\partial p_i}\frac{\partial P_l}{\partial q_i}\right)\right\} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left\{\frac{\partial U}{\partial Q_k}\frac{\partial V}{\partial Q_l}[Q_k Q_l]_{q,p} + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial U}{\partial Q_k}\frac{\partial V}{\partial P_l}[Q_k P_l]_{q,p} + \frac{\partial U}{\partial P_k}\frac{\partial V}{\partial Q_l}[P_l Q_l]_{q,p} + \frac{\partial U}{\partial P_k}\frac{\partial V}{\partial P_l}[P_k P_l]_{q,p}\right\}$$

Koristeći (3.29) i (3.30), dobija se

$$[U,V]_{q,p} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial Q_k}\frac{\partial V}{\partial P_l}\delta_{k,l} - \frac{\partial U}{\partial P_k}\frac{\partial V}{\partial Q_l}\delta_{k,l}\right) = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial U}{\partial Q_k}\frac{\partial V}{\partial P_k} - \frac{\partial U}{\partial P_k}\frac{\partial V}{\partial Q_k}\right)$$

tj.

$$[U,V]_{q,p} = [U,V]_{Q,P} \qquad (3.29)$$

što je i trebalo dokazati. Prema tome, u buduće prilikom pisanja Poasonovih zagrada biće izostavljeni indeksi koji označavaju po kojim se promenljivim izračunavaju ove zagrade.

4. HAMILTON - JAKOBIJEV METOD

Kada se govori o promeni kanonskih transformacija onda se obično podrazumevaju dva metoda. Prvi od njih se odnosi na sistem čija Hamiltonova funkcija ne zavisi eksplicitno od vremena (integral kretanja). U ovom slučaju uvek postoji takva kanonska transformacija pri kojoj su sve nove koordinate cikliče.
Zahvaljujući ovakvoj kanonskoj transformaciji integracija jednačina kretanja u novim promenljivim je trivijalna.
Drugi metod se sastoji u traženju takve kanonske transformacije koja omogućava prelaz sa "starih" kanonskih promenljivih $q_i(t)$ i $p_i(t)$ na "nove" $q_{io} \equiv q_i(t_o)$ i $p_{io} \equiv p_i(t_o)$ koje određuju početnu kinematično stanje sistema. Dakle "nove" kanonske promenljive predstavljaju početne vrednosti koordinata i impulsa sistema (konstante). Nalaženjem ovakve kanonske transformacije, koja ima oblik

$$q_i = q_i(q_{io}, p_{io}, t), \quad p_i = p_i(q_{io}, p_{io}, t) \qquad (4.1)$$

istovremeno je i dobijeno konačno rešenje problema. Ovaj drugi metod je opštiji za to što je primenljiv i na sistem čija Hamiltonova funkcija eksplicitno zavisi od vremena.
Nalaženje kanonske transformacije (3.6) razrešava se Hamilton-Jakobilijevim metodom.

4.1. Hamilton - Jakobijeva jednačina

Potreba i dovoljan uslov da nove kanonske promenljive budu konstantne jeste da nova Hamiltonova funkcija identički bude jednaka nuli $K \equiv 0$. Tada je

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} = 0 \qquad \text{i} \qquad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} = 0$$

tj.

$$Q_i = \beta_i = const. \qquad i \qquad P_i = \alpha_i = const \tag{4.2}$$

Pošto je veza između stare i nove Hamiltonove funkcije (nezavisna od tipa generatrise) $K = H + \frac{\partial F}{\partial t}$, uslov $K=0$ se svodi na jednačinu

$$H(q_i, p_i, t) + \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \tag{4.3}$$

koja određuje upravo onu funkciju generatrise F za koju je $K=0$, tj. za koju su nove promenljive konstante. Ovde je zgodno da se za F odabere funkcija generatrise $F_2(q_i, P_i, t)$, koja se u Hamilton-Jakobijevom metodu obično obeležava $S(q_i, P_i, t)$ i naziva glavna Hamiltonova funkcija. Pošto je $p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ (druga polovina sistema jednačina koji za datu funkciju F_2 određuje kanonsku transformaciju), jednačina (4.3) postaje

$$H\left(q_1, \cdots, q_n, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \cdots \frac{\partial S}{\partial q_n}, t\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \tag{4.4}$$

Jednačina (4.4) predstavlja osnovu Hamilton-Jakobijevog metoda (u istom smislu kao što Lagranževe ili Hamiltonove jednačine predstavljaju osnovne jednačine Lagranževog odnosno Hamiltonovog metoda) i nosi naziv Hamilton-Jakobijeva jednačina. Matematički ona predtavlja parcijalnu diferencijalnu jednačinu prvog reda u kojoj je nepoznata funkcija S a nezavisne promenljive $q_1, \cdots, q_n$ i t.

Svaka parcijalno diferencijalna jednačina prvog reda ima dva tipa rešenja: tzv. opšti i potpuni integral. Opšti integral zavisi od proizvoljnih funkcija, dok potpuni integral zavisi od proizvoljnih konstanti.

U primeni, međutim, osnovnu ulogu igra potpuni integral koji sadrži onoliko proizvoljnih konstanti koliko nezavisno promenljivih.

Budući da jednačina (4.4) sadrži n + 1 nezavisno promenljivu, potpuni integral jednačine je oblik $S = S(q_1, \cdots, q_n, t, \alpha_1 \cdots \alpha_n \cdots \alpha_{n+1})$.

Pošto funkcija S eksplicitno ne figuriše u jednačini (4.4) već samo njeni izvodi, sledi da ako je S rešenje onda je i $S+\alpha$

rešenje. To znači da se jedna konstanta uvek može izabrati kao aditivna. Međutim, ova aditivna konstanta nema nikakvog značaja zbog toga što u sistem jednačina (3.17), koji određuje kanonsku transformaciju, ne ulazi funkcija S već njeni izvodi. Zbog toga se potpuni integral jednačine (4.4) može napisati u obliku

$$S = S(q_1, \cdots, q_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, t) \qquad (4.5)$$

Forma rešenja (4.5) potpuno odgovara formi funkcije generatrise tipa F_2 ukoliko se za nove impulse odaberu upravo konstante tj. ako se stavi da je $P_i = \alpha_i$.

Sistem jednačina (3.17), koji za datu funkciju generatrise $F_2 \equiv S$ određuje odgovarajuću kanonsku transformaciju, se može napisati sada u obliku

$$Q_i = \beta_i = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial \alpha_i} \qquad (4.6)$$

$$p_i = \frac{\partial S(q_i, \alpha_i, t)}{\partial q_i} \qquad (4.7)$$

Algebarski sistem jednačina (4.6) i (4.7) za $t = t_0$ (početni trenutak vremena) određuje konstante α_i i β_i kao funkcija od početnih vrednosti q_{i0}, p_{i0}, t_0 , tj. $\beta_i = \beta_i(q_{i0}, p_{i0}, t_0)$ i $\alpha_i = \alpha_1(q_{i0}, p_{i0}, t_0)$
Zamenjujući sada vrednosti sa α_i i β_i u sistem (4.6) dobija se

$$q_i = q_i\,(t, q_{i0}, p_{i0}) \qquad (4.8)$$

Stavljajući, dalje, izraze (4.8) i vrednosti za α_i u sistem jednačina (4.7) dobija se

$$p_i = p_i\,(t, q_{i0}, p_{i0}) \qquad (4.9)$$

Transformacije promenljivih (4.8) i (4.9) predstavljaju traženu kanonsku transformaciju za koju je $K \equiv 0$, tj. predstavljaju konačme jednačine kretanja datog mehaničkog sistema.

Izbor veličina α_i u svojstvu novih impulsa u izvesnom smislu je prizvoljan, jer umesto proste zamene α_i sa P_i moguće je za nove impulse odabrati n promenljivih nežavisnih funkcija γ_i od α_i, tj. stavljajući da je $P_i = \gamma_i\,(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$. Tada glavna Hamiltonova funkcija ima oblik

$$S=S(q_1,\dots,q_n,\gamma_1,\dots,\gamma_n,t) \qquad (4.10)$$

Izbor u svojstvu novih impulsa ovog ili onog sistema konstanti γ_i u mnogim slučajevima se pokazuje boljim u odnosu na prostu zamenu α_i sa P_i.

Diferencirajući glavnu Hamiltonovu funkciju totalno po vremenu dobija se

$$\frac{dS}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial q_i}\dot q_i+\frac{\partial S}{\partial t}$$

Stavljajući da je $p_i=\frac{\partial S}{\partial q_i}$ i koristeći Hamilton-Jakobijevu jednačinu $\frac{\partial S}{\partial t}=-H$, gornji izraz postaje

$$\frac{dS}{dt}=\sum_{i=1}^{n}p_i\dot q_i-H=L \qquad (4.11)$$

Ovde sledi da je

$$S=\int_{t_1}^{t}L\,dt+const.=\int_{t_1}^{t}L\,dt \qquad (4.12)$$

gde je t_1 prizvoljan trenutak vremena (odgovara integracionoj konstanti pri rešavanju neodređenog integrala). Dakle, fizički smisao glavne Hamiltonove funkcije se sastoji u tome što ona predstavlja Hamiltonovo dejstvo sa neodređenom gornjom granicom. Ovde treba napomenuti da izraz (4.12) ne može da služi za izračunavanje funkcije S zbog toga što se unapred ne zna $q_i=q_i(t)$ pa se ni odgovarajući integral ne može izračunati.

4.2. Karakteristična Hamiltonova funkcija

U slučaju kad Hamiltonova funkcija sistema eksplicitno ne sadrži vreme t, Hamilton-Jakobijeva jednačina tada ima oblik

$$\frac{\partial S}{\partial t}+(q_i,\frac{\partial S}{\partial q_i})=0 \qquad (4.13)$$

Potpuni integral ove jednačine se može tražiti u obliku

$$S(q_i,\alpha_i,t)=W(q_i,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},h)-ht \qquad (4.14)$$

Funkcija $W(q_i\alpha_1,\dots\alpha_{n-1}h)$ se naziva karakteristična Hamiltonova funkcija. Stavljajući (4.14) u jednačinu (4.13) ona postaje

$$H(q_i\frac{\partial W}{\partial q_i})=h \tag{4.15}$$

što predstavlja parcijalnu diferencijalnu jednačinu koja ne sadrži vreme. Potpuni integral jednačine (4.15) sadrži n proizvoljnih konstanti od kojih je jedna aditivna (iz istih razloga kao i pri rešavanju jednačine (4.4)) te se može staviti da je nula. Ostale konstante $\alpha_1,\alpha_2\dots\alpha_{n-1}$ mogu zajedno sa konstantom h iz (4.15) biti uzete za nove (konstante) impulse P_i .

Znajući karakterističnu Hamiltonovu funkciju $W(q_i,\alpha_i)$ saglasno jednačinama (4.6), odgovarajuća kanonska transformacija je određena sledećim sistemom algebarskih jednačina

$$p_i=\frac{\partial W(q_i,\alpha_1,\dots\alpha_{n-1},h)}{\partial q_i} \tag{4.16}$$

$$\left.\begin{aligned} Q_n=\beta_n&=\frac{\partial W(q_i\alpha_1,\dots\alpha_{n-1},h)}{\partial h}-t \\ Q_n=\beta_i&=\frac{\partial W(q_i,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},h)}{\partial\alpha_i} \qquad i\neq n \end{aligned}\right\} \tag{4.17}$$

Sistem jednačina, (4.16) daće nam za $t=t_0$ rešenja $\alpha_i=\alpha_i(q_{i0},p_{i0})$ i $h=h(q_{i0},p_{i0})$ sistem (4.17) $\beta_i=\beta_i(q_{i0},p_{i0},t)$. Vraćajući nazad ova rešenja u (4.16) i (4.17) dobija se $q_i=q_i(q_{i0},p_{i0},t)$ i $p_i=p_i(q_{i0},p_{i0},t)$ tj. konačno rešenje problema.

4.3. Razdvajanje promenljivih

Hamilton-Jakobijev metod, u opštem slučaju, nema praktičnih prednosti u odnosu na Hamiltonov metod zbog toga što je rešavanje Hamilton-Jakobijeve (parcijalne) jednačine teži zadatak od rešavanja sistema od 2n Hamiltonovih jednačina koje su obične diferencijalnejednačine prvog reda. Međutim, u nekim slučajevima se u

Hamilton-Jakobijevoj jednačini mogu razdvojiti promenljive odakle se neposredno rešenje problema svodi na kvadrature. U ovom slučaju Hamilton-Jakobijev metod se pokazuje kao vrlo efikasan. Nažalost, ne postoji prost kriterijum koji bi ukazivao kada je moguće izvršiti razdvajanje promenljivih. Međutim, u problemima koji su od interesa za savremenu atomsku fiziku, razdvajanje promenljivih se skoro uvek može izvršiti.

U tom smislu ovde će biti razmotreni samo konzervativni sistemi kod kojih je Hamiltonova funkcija jedan prvi integral. Za ovaj slučaj je glavna Hamiltonova funkcija može napisati u obliku $S(q_i,\alpha_i,t)=W(q_i,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1};h)-ht$, pri čemu karakteristična Hamiltonova funkcija $W(q_i,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},h)$ zadovoljava jednačinu (4.15).

Jedan od slučajeva kada se jednačina (4.15) može rešiti metodom razdvajanja promenljivih je kada su sve ili samo jedan deo promenljivih javlja u obliku združenih kanonskih promenljivih. Neka su, naprimer, q_1 i p_1 združene kanonske promenljive. Tada je Hamiltonova funkcija sistema oblika

$$H=H[f(q_1,p_1),q_2,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n]=h$$

Jednačina (4.15) za ovaj slučaj postaje

$$H=H\left[f\left(q_1,\frac{\partial W}{\partial q_1}\right),q_2,\dots,q_n,\frac{\partial W}{\partial q_2},\dots,\frac{\partial W}{\partial q_n}\right]=h \qquad (4.18)$$

Rešenje jednačine (4.18) se traži u obliku

$$W(q_i,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},h)=W_1(q_1,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},h)+W'(q_2,\dots,q_n,\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1},h) \qquad (4.19)$$

Nakon smene (4.19) u (4.18) dobija se

$$H\left[f\left(q_1,\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right),q_2,\dots,q_n,\frac{\partial W'}{\partial q_2},\dots,\frac{\partial W'}{\partial q_n}\right]=h \qquad (4.20)$$

Da bi ova jednačina bila zadovoljena za svako q_1, neophodno je da je $f\left(q_1,\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right)=\alpha_1$, gde je α_1 proizvoljna konstanta

(u tom smislu, naprimer, konstanta α_1 iz (4.19)). Sada se karakteristična Hamiltonova funkcija nalazi iz sistema jednačina

$$f\left(q_1, \frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right) = \alpha_1 \tag{4.21}$$

$$H\left(q_2, \cdots, q_n, \frac{\partial W'}{\partial q_2}, \cdots, \frac{\partial W'}{\partial q_n}, \alpha\right) = h \tag{4.22}$$

Ako se jednačina (4.21) reši po $\frac{\partial W_1}{\partial q_1}$ i integrali dobija se

$$W(q_1, \alpha_1, \cdots \alpha_{n-1}, h) = \int F_1(q_1, \alpha_1)\, dq_1 \tag{4.23}$$

dok je potpuni integral jednačine (4.22) (kada se reši jednačina (4.22))

$$W'(q_2, \cdots, q_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, h)$$

Karakteristična Hamiltonova funkcija, konačno, ima oblik

$$W = W_1(q_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, h) + W'(q_2, \cdots, q_n, \alpha_1, \cdots \alpha_{n-1}, h) \tag{4.24}$$

U koliko se dva para promenljivih, naprimer q_1, p_1 i q_2, p_2 javljaju u obliku združenih promenljivih, tj. ako je Hamiltonova funkcija sistema oblika

$$H(f_1(q_1, p_1), f_2(q_2, p_2), q_3, \cdots, q_n, p_3, \cdots, p_n) = h \tag{4.25}$$

onda se odgovarajuća karakteristična Hamiltonova funkcija može dobiti iz sledećeg sistema jednačina

$$\begin{gathered} f(q_1, p_1) = \alpha_1 \\ f(q_2, p_2) = \alpha_2 \\ H\left(q_3, \cdots, q_n, \frac{\partial W'}{\partial q_3}, \cdots \frac{\partial W'}{\partial q_n}, \alpha_1, \alpha_2\right) \end{gathered} \tag{4.26}$$

Rešenje sistema (4.26) se može napisati u obliku

$$W = W'(q_3, \cdots, q_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, h) + \sum_{i=1}^{n} W_i(q_i, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, h) \tag{4.27}$$

gde je

$$W_i(q_i, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, h) = \int F_i(q_i, \alpha_i)\, dq_i$$

U koliko se sve promenljive javljaju u obliku združenih kanonskih promenljivih, tj. ako je hamiltonijam sistema oblika

$$H(f_1(q_1, p_1), \cdots, f_n(q_n, p_n)) = h \tag{4.28}$$

onda se odgovarajuća karakteristična Hamiltonova funkcija dobija iz sledećeg sistema jednačina

$$
\begin{aligned}
f_1(q_1, p_1) &= \alpha_1 \\
f_2(q_2, p_2) &= \alpha_2 \\
f_n(q_n, p_n) &= \alpha_n
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

Pri čemu se konstanta h (integral kretanja) izražava kao

$$h = h(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \tag{4.30}$$

Rešenje sistema (4.29) je

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i(q_i, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \tag{4.31}$$

gde je

$$W_i = \int F_i(q_i, \alpha_i)\, dq_i \tag{4.32}$$

Iz ove analize sledi da zahvaljujući specijalnoj strukturi Hamiltonove funkcije moguće je u Hamilton-Jakobijevoj jednačini razdvojiti promenljive i rešenje svesti na kvadrature.

Specijalno, ako je neka koordinata, naprimer q_1, ciklična onda je na osnovu (4.21)

$$f\left(\frac{\partial W_1}{\partial q_1}\right) = \alpha_1 \tag{4.33}$$

Ako se ova jednačina reši po $\frac{\partial W}{\partial q_1}$ dobija se

$$\frac{\partial W_1}{\partial q_1} = \varphi(\alpha_1) \tag{4.34}$$

Pošro je α_1 prizvoljna konstanta i $\varphi(\alpha_1)$ je, takođe, proizvoljna konstanta koja se može obeležiti sa α_1. Ovde se posredno dobija da je

$$W_1(q_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, h) = \alpha_1 q_1 \tag{4.35}$$

U ovom slučaju karakteristična Hamiltonova funkcija je

$$W = W'(q_2, \cdots, q_n, \alpha_1, \cdots, \alpha_{n-1}, h) + \alpha q_1 \tag{4.36}$$

Ukoliko je sistem imao više cikličnih koordinata naprimer q_1 i q_2 onda iz prve dve jednačine sistema (4.26) sledi

$$W_1 = \alpha_1 q_1 \quad i \quad W_2 = \alpha_2 q_2 \tag{4.37}$$

Odgovarajuća Hamiltonova karakteristična funkcija je oblika

$$W = W'(q_3 \cdots, q_n, \alpha_1, \cdots \alpha_{n-1}, h) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i \tag{4.38}$$

U koliko su sve koordinate ciklične, onda se lako iz (4.29) dobija da je rešenje za funkciju W oblika

$$W(q_i \alpha_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i q_i \tag{4.39}$$

Postoje i drugi slučajevi kada je moguće Hamilton-Jakobijevu jednačinu rešiti metodom razdvajanja promenljivih, ali oni u okviru ovog kursa neće biti razmatrani.

Kao primer biće razmotren harmonijski oscilator sa jednim stepenom slobode. Hamiltonijam ovog sistema je

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2} \tag{4.40}$$

Stavljajući da je $f(pq) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$, na osnovu (4.28) i (4.29) je

$$H(f(p,q) \equiv H(\alpha) = \alpha = h,$$

te je $h = \alpha$. Hamilton-Jakobijeva jednačina za funkciju W je

$$H(f(q, \frac{\partial W}{\partial q}) = \alpha, \quad tj. \quad \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial W}{\partial q}\right)^2 + \frac{kq^2}{2} = \alpha \tag{4.41}$$

Iz (4.33), uzimajući u obzir šta je funkcija f, sledi

$$\frac{\partial W}{\partial q} = \sqrt{2m\alpha - kmq^2} \tag{4.42}$$

Ovde se dobija

$$W = \int \sqrt{2m\alpha - kmq^2}\, dq \tag{4.43}$$

Glavna Hamiltonova funkcija je sada

$$S = W - \alpha t = \int \sqrt{2m\alpha - kmq^2}\, dq - \alpha t \tag{4.44}$$

Kanonska transformacija (tj. konačne jednačine kretanja) dobija se polazeći od sistema jednačina (4.6) i (4.7). U ovom slučaju ove jednačine izgledaju

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int \sqrt{2m\alpha - kmq^2}\, dq - t \quad i \quad p = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial q} = \frac{\partial}{\partial q} \int \sqrt{2m\alpha - kmq^2}\, dq$$

tj.

$$\beta=-t+\frac{1}{\omega}\int\frac{dq}{\sqrt{A^2-q^2}} \quad \text{i} \quad p_i=\sqrt{2m\alpha-kmq^2} \tag{4.45}$$

gde je $A^2=\frac{2\alpha}{k}$, $\omega^2=\frac{k}{m}$. Rešavajući integral u (4.37) dobija se

$$q=\sqrt{\frac{2\alpha}{k}}\sin\omega(t+\beta) \quad \text{i} \quad p=\sqrt{2m\alpha}\cos\omega(t+\beta) \tag{4.46}$$

pri čemu α i β treba odrediti iz početnih uslova. Izrazi (4.38) predstavljaju konačne jednačine kretanja u problemu harmonijskog oscilatora sa jednim stepenom slobode.

Kao drugi primer biće razmotreno ravno kretanje tačke pod dejstvom centralne sile. Hamiltonijam je

$$H=\frac{1}{2m}\left(p_r^2+\frac{p_\varphi^2}{r^2}\right)+V(r) \tag{4.47}$$

Hamilton-Jakobijeva jednačina za funkciju W je

$$\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)^2\right\}+V(r)=h \tag{4.48}$$

Ovde h predstavlja ukupnu energiju čestica. Pošto hamiltonijam (4.39) ne sadrži eksplicitno koordinatu φ (ciklična koordinata), prema (4.36), rešenje se može tražiti u obliku

$$W(r,\varphi)=W_1(r)+\alpha_\varphi\varphi \tag{4.49}$$

Uzimajući u obzir ovo jednačina (4.41) postaje

$$\frac{1}{2m}\left\{\left(\frac{\partial W_1}{\partial r}\right)^2+\frac{\alpha_\varphi}{r^2}\right\}+V(r)=h \tag{4.50}$$

pri čemu je očigledno da konstanta α_φ predstavlja moment impulsa p_φ. Iz jednačine (4.42) se dobija

$$W_1(r)=\int dr\sqrt{2m(h-V)-\frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}} \tag{4.51}$$

Pošto hamiltonijan sistema ne zavisi eksplicitno od vremena i uzimajući (4.41) i (4.43), glavna Hamiltonova funkcija ima oblik

$$S(r,\varphi,t)=-ht+\alpha_\varphi\varphi+\int dr\sqrt{2m(h-V)-\frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}} \tag{4.51}$$

pri čemu konstante h i α_φ možemo uzeti za nove impulse P_r odnosno P_φ .

Kanonska transformacija koja odgovara funkciji generatrise (4.44) je na osnovu (4.6) i (4.7)

$$\beta = \frac{\partial S}{\partial h} = -t + \frac{\partial}{\partial h}\int dr\sqrt{2m(h-V) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}$$

$$\beta_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \alpha_\varphi} = \varphi + \frac{\partial}{\partial \alpha_\varphi}\int dr\sqrt{2m(h-V) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}} \qquad (4.53)$$

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial W_1}{\partial r} = \sqrt{2m(h-V) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}$$

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = \alpha_\varphi$$

odakle je

$$\beta_r = -t + \int\frac{m\,dr}{\sqrt{2m(h-V) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}} \qquad (4.54)$$

$$\beta_\varphi = \varphi - \int\frac{\alpha_\varphi\,dr}{\sqrt{2m(h-V) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}} \qquad (4.55)$$

$$p_r = \sqrt{2m(h-V) - \frac{\alpha_\varphi^2}{r^2}}$$

$$p_\varphi = \alpha_\varphi \qquad (4.56)$$

Jednačina (4.46) daje zavisnost r od vremena, dok jednačina (4.47) predstavlja jednačinu trajektorije $\varphi = \varphi(r)$ odnosno $r = r(\varphi)$.

Na ovim prostim primerima se može videti da je Hamilton-Jakobijev(slučaj razdvajanja promenljivih) veoma efikasan metod pomoću koga se vrlo brzo dolazi do rešenja.

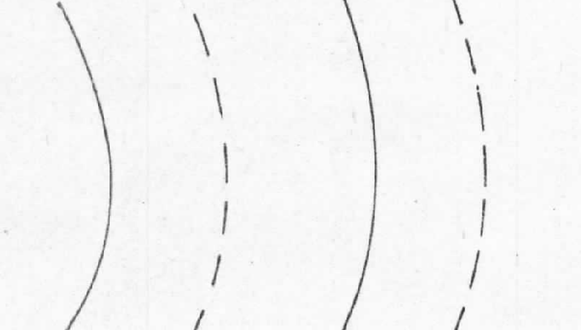
4.4. GEOMETRIJSKA OPTIKA I TELESNA MEHANIKA

Slično tome kao što je formalizam klasičnih Poasonovih zagrada predstavljao polaznu tačku u dobijanju tzv. matrične kvantne mehanike (Hajzebergova slika), tako je veza Hamilton -Jakobijevog metoda sa geometrijskom optikom predstavljala polaznu tačku u stvaranju tzv. talasne mehanike (Šredingerova slika). Ovaj paragraf biće posvećen upravo razmatranju veze Hamilton-Jakobijevog metoda i geometrijske optike.

Biće razmotreni konzervativni sistemi kod kojih Hamiltonova funkcija predstavlja ukupnu energiju sistema (pod ovim uslovima Hamiltonova funkcija eksplicitno ne zavisi od vremena). Zbog ove osobine glavna Hamiltonova funkcija se može tražiti u obliku

$$S(q_i,P_i,t) = W(q_i,P_i) - Et \qquad (4.57)$$

odakle sledi da karakteristična funkcija $W(q_i,P_i)$ ne zavisi od vremena te jednačine $W(q_i,P_i)=const.$ u konfiguracionom prostoru predstavlja jednu fiksnu površinu. Površina $S(q_i,P_i,t)=const.$ se u svakom trenutku vremena poklapa sa nekom površinom $W(q_i,P_i)=const.$ Na primer, površina $S=a$ i $S=b$ u trenutku $t=0$, na osnovu (4.49), se poklapaju sa površinama $W=a$ odnosno $W=b$.



Međutim, posle vremena dt površina $S=a$, na osnovu (4.49), će se poklapati sa površinom $W=a+Edt$ a površina $S=b$ sa površinom $W=b+Edt$. Ovo znači da se za vreme dt površina $S=a$ pomerila iz položaja $W=a$ u položaj $W=a+Edt$.

Na ovaj način kretanje površine $S=a$ je slično prostiranju fronta nekog talasa, naprimer, talasa gustine ili pritiska u fluidu.

U opštem slučaju svaka površina $S=const.$ u toku vremena menja svoj oblik, pa prema tome i brzina kretanja ove površine u različitim njenim tačkama biće različita. Jednostavnosti radi ovde će biti iztačunata ova brzina u slučaju kada se sistem sastoji od jedne čestice. Ako se za keneralisane koordinate odaberu Dekartove koordinate, brzina talasa u nekoj tački površine $S=const.$ u konfiguracionom prostoru je

$$u=\frac{ds}{dt} \tag{4.58}$$

dge je ds rastojanje koje talas prođe za vreme dt u prawcu normalnom na površinu S. S druge strane, talasni front za vreme dt se pomeri od površine W do površine $W+dW$, gde je $dW=Edt$

Pošto je

$$dW=|grad\, W|ds=|\nabla W|ds \tag{4.59}$$

brzina takasa je

$$u=\frac{ds}{dt}=\frac{E}{|\nabla W|} \tag{4.60}$$

Veličina $|\nabla W|$ se može naći iz Hamilton-Jakobijeve jednačine, koja za jednu česticu glsi

$$\frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]+V=E \tag{4.61}$$

odakle se dobija

$$(\nabla W)^2=2m(E-V) \tag{4.62}$$

Uzimajući ovo u obzir, relacija (4.52) postaje

$$u=\frac{E}{\sqrt{2m(E-V)}} \quad ili \quad u=\frac{E}{\sqrt{2mT}} \tag{4.63}$$

gde je T kinetička energija čestice. Ili, uzimajući da je $2mT=m^2v^2=p^2$, izraz za brzinu talasa (4.55) postaje

$$u=\frac{E}{p}=\frac{E}{mv} \tag{4.64}$$

Jednačina (4.56) pokazuje da je brzina površine obrnuto proporcionalna brzina čestice, čije se kretanje upravo opisuje pomoću funkcije S. Osim ovoga, lako se pokazuje da trajektorija čestice predtavlja normalnu trajektoriju površina $S = const$. Ovo sledi otuda što je pravac trajektorije određen pravcem vektora $\vec{p} = m\vec{v}$. Naime, na osnovu (4.16) (ako su generalisane koordinate Dekartove) se dobija

$$\vec{p} = \nabla W \tag{4.65}$$

i pošto je vektor ∇W normalan na ekvipovršine $W = const$, tj. na $S = const$, sledi da je trajektorija čestice normalna na ekvipovršine $S = const$. Na taj način sistem površina $W = const$ određuje familiju ortogonalnih trajektorija mogućih kretanja. Kada se posmatrana čestica kreće duž jedne od ovih trajektorija istovremeno se kreće i površina S, pri čemu su ove dve brzine nesinhronizovane, tj. pri povećanju brzine čestice brzina kretanja površine S se smanjuje i obrnuto.

Ove relacije koje su izvedene za slučaj jedne čestice u istoj formi mogu biti primljene i u slučaju sistema čestica. Naime, kao što je poznato, kinetička energija slobodnog sistema ili sistema sa stacionarnim vezama ima oblik

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j \tag{4.66}$$

koja se može napisati u obliku

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\frac{dq_i\,dq_j}{dt^2} \tag{4.67}$$

Ako se uvede metrika konfiguracionog n-dimenzionog prostora izrazom

$$d\rho^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,dq_i\,dq_j \tag{4.68}$$

izraz za kinetičku energiju (4.68) postaje

$$T=\frac{1}{2}\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 \qquad (4.69)$$

Hamiltonova funkcija sistema je sada

$$E=\frac{1}{2}P_\rho^2+V \qquad (4.70)$$

Odgovarajuća Hamilton - Jakobijeva jednačina je

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W}{\partial \rho}\right)^2+V=E \qquad (4.71)$$

što se može napisati i u obliku

$$\frac{1}{2}(\nabla W)^2+V=E \qquad (4.72)$$

Jednačina (4.63) određuje kretanje reprezentativne tačke u n-dimenzionom konfiguracionom prostoru (ona reprezentuje kretanje sistema). Uzimajući u obzir (4.51), (4.52) i (4.63) dobija se da je brzina kretanja površine $S=const.$ u slučaju sistema čestica

$$U=\frac{E}{\sqrt{2(E-V)}}=\frac{E}{\sqrt{2T}}=\frac{E}{\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2} \qquad (4.73)$$

Prema tome, umesto stvarne trajektorije čestice (u slučaju jedne čestice) ovde treba razmatrati trajektoriju reprezentativne tačke u konfiguracionom prostoru, tj veza između brzine reprezentativne tačke i brzine površine $S=const.$ je oblika (4.56). Naime, prelaz sa jedne čestice na sistem čestica ne donosi nikakve nove fizičke rezultate i zbog matematičke jednostavnosti biće posmatrano kretanje jedne čestice.

Pomeranje površine $S=const$ u konfiguracionom prostoru je čisto formalno identifikovano sa talasom i u tom smislu je uveden pojam brzine talasa. Međutim nigde se do sada nije bliže diskutovala priroda ovih talasa i zbog toga se ništa ne može reći o tako važnim pojmovima kao što su talasna dužina i frekvencija ovih talasa. Da bi se stekla neka predstava o ovim talasima biće učinjena formalna analogija između svetlosnih talasa i ovih talasa.

Talasna jednačina elektromagnetnih talasa glasi

$$\nabla^2\varphi-\frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=0 \qquad (4.74)$$

gde je φ skalarni potencijal (ili bilo koja komponenta vektorskog potencijala), n - indeks prelamanja sredine i c brzina svetlosti u vakuumu. Ako je n konstanta (homogene sredine) jedno od rešenja jednačine (4.66) su ravni talasi oblika

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(\vec{k}\vec{r}-c\omega t)} \qquad (4.75)$$

pri čemu je veza između talasnog broja k i frekvencije

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{nc\omega}{c} \qquad (4.76)$$

Ne gubeći ništa od opštosti može se uzeti da je pravac prostiranja svetlosti pravac Z - OSE , tako da je

$$\varphi = \varphi_0 e^{i(kz-\omega t)} = \varphi_0 e^{i\frac{\omega}{c}(nz-\omega\frac{c}{\omega}t)} = \varphi_0 e^{ik_0(nz-ct)} \qquad (4.77)$$

gde je $k_0 = \frac{\omega}{c}$ talasni broj u vakuumu.

U slučaju nehomogenih sredina n je funkcija položaja. Tada rešenje jednačine (4.67), kao što je poznato, nisu više ravni talasi, već se prilikom prostiranja front elektromagnetnog talasa usled nehomogenosti deformiše. U ovom slučaju rešenje jednačine (4.66) se može tražiti u obliku

$$\varphi = e^{A(r)} e^{ik_0[L(r)-ct]} \qquad (4.78)$$

Veličine $A(r)$ i $L(r)$ su realne funkcije rastojanja r i određuju se iz uslova da (4.70) predstavlja partikularni integral talasne jednačine (4.66).

Kada bi n bilo konstantno onda bi L bilo jednako nz i zove se optički put.

Izračunavajući $\nabla\varphi$ i $\nabla^2\varphi$ dobija se

$$\nabla\varphi = \nabla(A + ik_0L) \qquad (4.79)$$

i

$$\nabla^2\varphi = \varphi[\nabla^2 A + ik_0\nabla^2 L + (\nabla A)^2 - k_0^2(\nabla L)^2 + 2ik_0\nabla A\nabla L] \qquad (4.80)$$

tako da je talasna jednačina

$$[\nabla^2 A+(\nabla A)^2-k_o^2(\nabla L)^2+n^2 k_o^2]\varphi+i[2\nabla A\,\nabla L+\nabla^2 L]k_o\varphi=0 \qquad (4.81)$$

Ovde se dobijaju jednačine koje određuju funkcije $A(r)$ i $L(r)$

$$\nabla^2 A+(\nabla A)^2+k_o^2[n^2-(\nabla L)^2]=0 \qquad (4.82)$$

$$2(\nabla A)(\nabla L)+\nabla^2 L=0 \qquad (4.83)$$

Najinteresantniji fizički slučaj koji će biti ovde posmatran jeste kada se n malo menja na rastojanjima koja su istog reda veličine kao i talasna dužina svetlosti, tako da se na ovim rastojanjima promena veličine n može zanemariti (ova predpostavka čini osnovu geometrijske optike). Ova predpostavka fizički znači da je talasna dužina svetlosti mala (u graničnom slučaju $\lambda\to 0$) u poređenju sa rastojanjima na kojima se manifestuje nehomogenost sredine. Polazeći od ove predpostavke član koji sadrži $k_o=\frac{4\pi^2}{\lambda_o^2}$ u jednačini (4.72) je dominantan, te se (4.72) približno svodi na jednačinu

$$(\nabla L)^2=n^2 \qquad (4.84)$$

koja određuje optički put L. Kao što je poznato iz geometrijske optike površina $L=const$. predstavlja ekvifaznu površinu i kao takva određuje front talasa. Svetlosni zraci budući da predstavljaju ortogonalne trajektorije ovih površina takođe su određeni jednačinom (4.74).

Hamilton-Jakobijeva jednačina (4.54) formalno ima vrlo veliku sličnost sa jednačinom (4.74) ukoliko karakteristična Hamiltonova funkcija igra ulogu optičkog puta L a $\sqrt{2m(E-V)}$ koeficijent prelamanja n. U ovom slučaju klasična mehanika predstavlja analogon geometrijske optike, u kome ulogu fronta elektromagnetnih talasa i njihovih ortogonalnih trajektorijama svetlosnim zracima igraju površine $S=const$ i njihove ortogonalne trajektorije-Moguće putanje čestica. Na osnovu ove analogije je jasno zbog čega Hajgensova talasna teorija i Njutnova korpuskularna teorija podjednako dobro objašnjavaju prelamanje i odbijanje svetlosti u kontekstu geometrijske optike. Zato se klasična mehanika može shvatiti kao analog geometrijskoj optici u kojoj ulogu talasnih površina i svetlosnih zraka (koji predstavljaju ortogonalne trajektorije talasnih površina) igraju površine $S=const$i ortogonalne prema njima trajektorije kretanja. Odavde je jasno, zašto su Hajgensova talasna teorija i Njutnova korpuskularna teorija podjednako dobro objašnjavale pojave odbijanja i prelamanja. Dakle, u okvirima geometrijske optike između ovih teorija postoji formalna analogija (sličnost).

Konstatovali smo već da princip najmanjeg dejstva ima sličnost sa principom ferma u geometrijskoj optici. Sada ova sličnost postaje razumljiva.

Princip najmanjeg dejstva može se napisati u obliku

$$\Delta\int\sqrt{2mT}\,ds=0,$$

a znamo da je koren $\sqrt{2mT}$ proporcionalan indeksu prelamanja, ili obrnuto proporcionalan brzini talasa. Prema tome, analogon principa najmanjeg delovanja u geometrijskoj optici, mora imati izgled

$$\Delta\int n\,ds=\Delta\int\frac{ds}{u}=0, \qquad (4.85)$$

što predstavlja dve dobro poznate varijante Fermaovog principa.

Opšte poznata konstatacija o sličnosti između principa najmanjeg dejstva i Fermaovog prinsipa sada na osnovu gore izloženog postaje razumljiva.

Mi još nismo našli veličine koje bi u klasičnoj mehanici igrale ulogu frekvencije i talasne dužine. Jedino, što smo već uradili, to je, da tražena dužina talasa mora da bude znatno manja od toga rastojanja na kojem postoje primetna nehomogenost polja sila. Dalje od ovoga prirodno, u klasičnoj mehanici, nismo mogli da idemo, jer je, budući da je analog geometrijske optike, klasična mehanika ona oblast, u kojoj se ne susreću efekti koji zavise od dužine talasa (interferencija, difrakcija i tome slično). Dakle, iako formalno dvojnost " čestica talasa " ima mesto i u klasičnoj mehanici, ipak talasna koncepcija ovde ne daje nikakve rezultate zbog toga što nisu ispunjeni uslovi za pojavu talasnih efekata. Dakle, u okviru klasične mehanike postoji samo takozvana korpuskularna sila.

Time ne manje, može da se pokuša da se napiše talasna jednačina koja bi se za slučaj $\lambda \to 0$ svela na Hamilton-Jakobijevu jednačinu. Sličnost između jednačina (9.94) i (9.81) označava da je veličina L proporcionalna W. Videćemo da je koeficijenat proporcionalnosti ovde mera dužine talasa. Iz sličnosti veličina L i W sledi da $S = W - Et$ mora biti proporcionalno fazi oscilovanja

$$k_0 (L - ct) = 2\pi \left(\frac{L}{\lambda_0} - \nu t \right)$$

Prema tome, energija E mora biti proporcionalna frekvenciji tj.

$$E = h\nu \tag{4.86}$$

Pošto je talasna dužina vezana frekvencijom sa odnosom

$$\lambda \nu = u$$

odakle s obzirom na (4.64) dobijamo

$$\lambda = \frac{u}{\nu} = \frac{E}{p} : \frac{E}{h}$$

tj.

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{4.87}$$

Jednačinu (4.74) možemo napisati u obliku

$$\nabla^2\varphi-\frac{1}{u^2}\frac{d^2\varphi}{dt^2}=0,$$

gde je u brzina svetlosnog talasnog fronta u sredini sa indeksom prelamanja n. Ako se zameni ovde φ_0 sa $\varphi e^{-i\omega t}$ onda će jednačina dobiti izgled

$$\nabla^2\varphi+\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\varphi=0, \qquad (4.88)$$

što predstavlja samo po sebi talasnu jednačinu koja ne sadrži vreme. Veličina φ ovde je amplituda oscilovanja i u talasnoj mehanici njoj treba da odgovara neka veličina Ψ koja zadovoljava jednačinu istoga tipa. Pošto je sada λ jednako $\frac{h}{p}$ gde je $p=\sqrt{2m(E-V)}$, jednačina za koju je W ajkonal, treba da ima izgled

$$\nabla^2\Psi+\frac{8\pi^2 m}{h^2}(E-V)\Psi=0 \qquad (4.89)$$

Jednačina (4.89) izražava poznatu jednačinu talasne mehanike - Šredingerovu jednačinu.

Iz formule (4.87) se vidi da je talasna dužina direktno proporcionalna koeficijentu h. Prema tome, što je manje h manja je i dužina talasa, a time veza sa geometrijskom optikom postaje tešnja.

Ekvivalentnost Hamilton-Jakobijeve jednačine i jednačine ajkonala, utvrdio je Hamilton 1834. godine, a odgovarajuću talasnu jednačinu dobili su Luj de Brolji i Šredinger 1926. godine. Ponekada se izražava mišljenje, da je Hamilton pošao malo dalje, dobio bi Šredingerovu jednačinu. To ipak nije tako, jer za takvu ekstrapolaciju on nije imao dovoljno eksperimentalnog materijala. U ono vreme, u kojem je živeo Hamilton, klasična mehanika se smatrala apsolutno tačnom, i nije bilo osnove za njeno eksperimentalno proveravanje u cilju njenog utačnjavanja i stvaranja opštije teorije. Drugim rečima, Hamilton nije imao osnove da smatra da se h razlikuje od nule. Ta činjenica, da je klasična mehanika samo aproksimanija talasne mehanike i da ova aproksimanija predstavlja svojevrsnu " geometrijsku optiku ",postala je jasna znatno kasnije kada su bili otkriveni efekti koji zavise od talasne dužine čestice (napr. u interferencionim ogledima Davidsona i Germera). Samo posle toga može da se pripuše određeni fizički smisao veličini h , koja je poznata kao Plankova konstanta.

Sada vidimo da klasična mehanika sadrži u sebi zrno kvantne mehanike i da je HamiltonL- Jakobijeva jednačina naročito pogodna za prelaz sa prve na drugu.

5. ZAKLJUČAK

Generalisane koordinate su međusobno nezavisni parametri. Tih generalisanih koordinata ima uvek onoliko koliko ima i stepeni slobode datog mehaničkog sistema. Uopšte, one nam služe za lakše određivanje položaja sistema u prostoru, nego što nam to omogućavaju Dekartove koordinate.

Za rešavanje diferencijalnih jednačina kretanja drugog reda, značajnu ulogu imaju generalisane koordinate, generalisane brzine i vreme. Diferencijalne jednačine kretanja izražene pomoću predhodno navedenih veličina nazivaju se Lagranževim jednačinama, pomoću kojih opisujemo mehaničko stanje sistema.

Međutim, niz preimućstava, a naročito pri ispitivanju različitih opštih problema mehanike, predstavlja opisivanje pomoću generalisanih koordinata i impulsa sistema.

Transformacijom Lagranževih jednačina dobijaju se diferencijalne jednačine kbetanja prvog reda, koje se nazivaju Hamiltonovim jednačinama. S obzirom na ravnopravnost generalisanih koordinata i impulsa u Hamiltonovim jednačinama, one se zbog toga nazivaju kanonskim jednačinama. Hamiltonove jednačine dopuštaju znatno šire klase transformacija nego što je to naprimer moguće kod Lagranževih jednačina.

Ako u Hamiltonovoj funkciji zamenimo stare generalisane nezavisne promenljive veličine sa novim generalisanim nezavisnim promenljivim veličinama, takve transformacije se zovu kanonskim transformacijama. Svaka kanonska transformacija se karakteriše svojom funkcijom F, koja se naziva funkcija generatrise, pri tom se predpostavlja da je funkcija F data kao funkcija starih i novih koordinata. Daljom transformacijom Hamiltonovih jednačina dobija se Hamilton-Jakobijeva jednačina, koja je takođe osnov nekog opšteg metoda integriranja jednačina kretanja.

Nalaženjem integrala Hamilton-Jakobijeve jednačine može se postići tzv. razdvajanje promrnljivih. Ovde je bitan pogodan izbor koordinata.

Veliki značaj ima Hamilton-Jakobijeva jednačina i u geometrijskoj optici jer je analog ajkonalu što znači da je ona veza između talasne mehanike i geometrijske optike. Na osnovu ove jednačine Šredinger je stvorio teoriju talasne mehanike.

6. LITERATURA

1. Đorđe Mušicki: Uvod u teorijsku fiziku

2. L.D. Landau i E.M. Lifšic: Mehanika

3. I.M. Voronkov: Teorijska mehanika

4. G. Golštajn: Klasična mehanika