UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU

Deterministički haos i analiza nekih nelinearnih sistema

- diplomski rad -

Mentor: *Dr Miroslav Vesković*

Kandidat: *Nikola Ojkić*

Novi Sad, oktobar 2006.

Zbog nedostatka jednog eksera, otpala je potkovica,
zbog nedostatka potkovice, izgubljen je konj,
zbog gubitka konja, izgubljen je jahač,
zbog nedostatka tog jahača, izgubljena je bitka,
zbog te izgubljene bitke pala je kraljevina!

Engleska narodna pesma

Sadržaj:

Uvod

Ljudi često u svakodnevnom govoru upotrebljavaju reč haos pritom misleči da je to nešto što bismo svi želeli da izbegnemo na neki način[1]. S druge strane postoje ljudi koji u haosu uživaju, kojima je haos blizak i u njemu ne vide nikakvog neprijatelja. Ti ljudi se nazivaju haosolozi i pravi su eksperti u Teoriji haosa. Oni čak imaju i veoma smele izjave da ne postoji delić ovog sveta bez haosa i da je haos jedini pravi način sagledavanja stvari.

Šta reći?

Da li im treba verovati? Da li treba zaboraviti na sve pre haosologa ili je to samo nešto novo, neko moderno shvatanje sveta i stvari oko nas?

Početkom 20. veka nastaje teorija relativnosti, 30-ih godina nastaje kvantna mehanika, a 70-ih Nova teorija menja svet oko nas. Ta terija se uvlači u medicinu, bilogiju, ekonomiju, berzu, ritam srca i u svačiji mali život na Zemlji. Ako vanzemaljci postoje ova teorija se verovatno već i sa njima sprijateljila. Ta se nova nauka zove ***Haosologija*** ili ***Teorija haosa***.

Ova nova teorija sagledava probleme na nov način, pronalazi zakone u na prvi pogled nesagledivom sistemu, kao što je turbulancija. Često posmatra sisteme kod kojih je determinizam odavno zaboravljen. Mnogi će reći da je determinizam nešto što je svakom čoveku prihvatljivo i da je takav svet u kome mi živimo, ali haosolozi se samo smeškaju.

[1] Haos na poslu, haos u saobraćaju, haos na fakultetu i još mnogo haosa...

1.Početak haosa

1.1 Šta je Teorija haosa?

Teorija haosa je teorija koja opisuje kompleksna i nepredvidiva kretanja sistema, kao i njihovu dinamiku. Za ovakve sisteme karakteristična je osetljivost na početne uslove. Ovo konkretno znači, da za male razlike u početnim uslovima imamo potpuno različita ponašanja sistema posle određenog vremena.

Možemo razlikovati dve vrste haosa:

1. **Deterministički haos** i
2. **Nedetrministički haos**

1. **Deterministički haos** se javlja u sistemima koji su matematički determinisani, a to znači da se ovi sistemi ponašaju po tačno utvrđenim zakonima-matematički zapisanim, ali za posmatrača sistem deluju da je poptpuno nepredvidiv.
2. **Nedetrministički haos** se javlja u sistemima koji nisu potpuno matematički determinisani.

Sledeći primer će da ilustruje deterministički i nedetrministički haos.

PRIMER:

Pitamo se koliko će jedan student fizike da poraste u sledećih nekoliko godina tokom studija. Recimo, da je naš matematički model dat sledećom jednačinom:

$$x_{i+1} = x_i + 2cm,$$

gde smo za x_1 uzeli visinu studenta u prvoj godini. Ovaj sistem je matematički **determinisan**, a bio bi haotičan kada bi male razlike u početnim vrednostima (ovde se to odnosi na visinu u prvoj godini) dovele do ***sasvim*** različitih konačnih rezultata (visina tog studenta posle 6 godina studiranja).
Prethodni sistem bi bio matematički **nedeterminisan** ako bi bio opisan jednačinom:

$$x_{i+1} = x_i + 2cm + \varepsilon,$$

gde $\varepsilon \in [-1,1]cm$ i postoji određena verovatnoća $p(\varepsilon)$ pojavljivanja ovog parametra iz datog skupa u svakoj sledećoj iteraciji. U ovakvim sistemima ako haos postoji on se naziva nedetrministički haos, i daleko složenija teorija stoji u njegovoj pozadini u odnsu na detremnistički haos.

Ovaj Diplomski rad će se baviti determinističkim haosom, načinom njegovog otkrivanja i njegovom analizom. Nekoliko konkretnih primera će biti razmatrano na kojima će se veoma lako sagledati suština. Cilj ovog rada je da ukratko predstavi tu ogromnu, modernu teoriju 20. veka, koja je promenila pristupe i načine posmatranja prirode.

2. Gde se haos javlja?

2.1 Oslcilator sa potencijalom četvrtog stepena

U ovom poglavlju navešćemo jedan primer iz klasične mehanike koji ilustruje nastanak haosa u fizičkom sistemu. Primenom Njutnove mehanike na konkretan realan problem dobićemo diferencijalnu jednačinu koja će u potpunosti opisati ponašanje sistema. Tako da stvar deluje gotova, ali haos se pojavljuje tek kada datu jednačinu počnemo da rešavamo!

Ovde treba biti oprezan, jer i pažljivi posmatrač tog realnog sistema mogao je lako da uoči njegovo čudno i poptpuno nepredvidivo ponašanje. Ovaj primer će nam poslužiti da konkretno sagledamo haos i da ga intuitivno bolje shvatimo.

Posmatraćemo jedan oscilator na koga deluje sila otpora sredine kao i prinudna periodična sila i da se ceo oscilator nalazi u polju sa odgovarajućim potencijalom. Pretpostavimo da silu otpora sredine možemo da modelujemo kao:

$$\vec{F}_{sr.} = -b\frac{dx}{dt}\vec{e}_x,$$

gde smo sa $\vec{e}_x$ obeležili jedinični vektor x ose, a sa b konstantu proporcionalnosti. Lako možemo uočiti da data sila ima sličan oblik kao i Stoskova sila[2]. Potencijal u kome se kreće telo pretpostavimo da možemo da napišemo izrazom sledećeg oblika:

$$U = gx^4,$$

gde će sila usled ovog potencijala biti:

$$\vec{F}_p = -grad\,U = -4g\,x^3\vec{e}_x.$$

Prinudnu silu uzimamo u standardnom obliku:

$$F_{os} = F\cos(wt).$$

Sada možemo pisati drugi Njutnov zakon za dati oscilator:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - 4gx^3 + F\cos(wt). \tag{1}$$

[2] Telo sfernog oblika poluprečnika r koje se kreće u sredini viskoziteta η, sa brzinom v "oseća" silu otpora te sredine: $F = 6\pi\eta r v$. Ova sila je poznata pod nazivom Stoksova sila.

Posle dugog razmišljanja kako da rešimo ovu jednačinu, numerički način deluje kao najlakši. Uz početne uslove kao i vrednosti konstanti možemo krenuti sa numeričkim algoritmom.

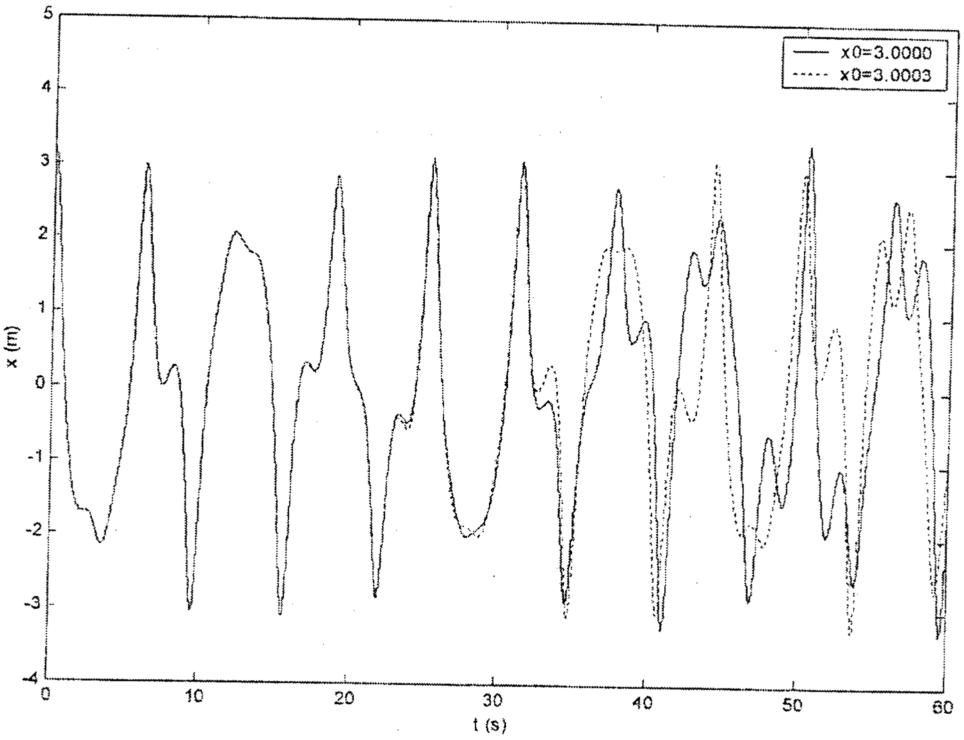
Radi što tačnijeg rešenja koristićemo Runge-Kuta metod koji ima globalnu grešku reda $O(\delta t^4)$. U dodatku je dat Runge-Kuta metod. Uzećemo dva različita skupa početnih uslova:

a) $x_0(0)=3$ i $v_0(0)=3$;

b) $x_0(0)=3.00003$ i $v_0(0)=3$.

Vidimo da se početni uslovi za x razlikuju sa relativnom greškom od 0.001%. Algoritam Runge-Kuta je napisan u programa MatLab i dobijena je slika 1.

Dramatična razlika u rešenjima za različite početne uslove će nas i odvesti na trag haosa. Sa slike 1 vidimo rešenja jednačine za dva različita skupa početnih uslova. Posle isteka 30s od početka kretanja uočava se različito ponašanje ova dva rešenja, a posle 50s svaka sličnost se gubi. Ogromna osetljivost na početne uslove je zapravo fascinantna. Rešenja posle određenog vremena počinju da se ponašaju potpuno različito iako su se početni uslovi razlikovali samo za x komponentu i to za čitavih 0.001%!



slika 1

Pitanje je šta se dešava?

- Ako početne uslove merimo sa odredjenom greškom svaki model koji budemo pridružili našoj konkretnom sistemu (oscilatoru) neće baš biti u saglasnosti sa onim što ćemo meriti (položaj tog oscilatora posle 50*s*)! To znači da ako posle 35s, 40s, 50s, 60*s* ... uporedimo vrednosti dobijene na računaru za elongaciju x i vrednosti koje bismo merili za x za navedene vremenske intervale, lako bismo utvrdili da se uopšte ne slažu.
- S druge strane, nemamo samo problem sa našim modelom. Ako naš oscilator pokrenemo sa „istim" početnim uslovima nekoliko puta zaredom, uočićemo potpuno drugačije ponašanje. Verujte mi![3] Reprodukcija potpuno istih početnih uslova i teorijski deluje nemoguća.
- Koji su to faktori koji nam prave probleme? Da li je to: w-kružna frekvencja, g - koeficijent uz x^4, sam oblik potencijala x^4, ili možda F-amplituda sile?
- Još jedan podatak će nas možda odvesti na pravi put. Ako bismo uzeli običan linearni harmonijski oscilator sa prigušenjem, dobili bismo sledeću diferencijalnu jednačinu:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - gx + F\cos(wt)\,. \qquad (2)$$

- Rešenje ove jednačine se može dobiti i analitički, a numeričko rešenje će se u potpunosti poklapati sa analitičkim. Takođe rešenja se neće uopšte razlikovarti za dva različita skupa početnih uslova! Šta možemo onda da zaključimo upoređivajući jednačinu (2) i jednačinu (1)?
- ***Pogrešan zaključak***: Nelinernost u jednačini (1) (član $-4gx^3$) je pravi krivac što za dva različita početna uslova koja se razlikuju sa relativnom greškom od 0.001% imamo krajnja rešenja (posle 50*s*) koja se drastično razlikuju.

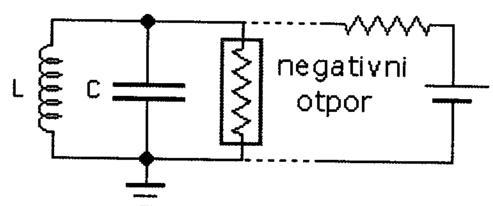
Pravi zaključak sledi posle sledećeg poglavlja!

[3] Nekada ste sigurno videli u časovničarskoj radnji napravu koja ima nekoliko klatna koji su čudno povezani i još čudnije se kreću. Tajna te naprave je što postoji mali elektro magnet koji ne dozvoljava da se sve zaustavi, iako se nama čini da ne postoji neki poseban izvor energije. Ako ste ikada pokušali da zaključite kako će koji deo da se kreće, onda ste pravi entuzijasta koji je zarobljen još u drevni determinizam.

2.2 Jednačina van der Pola

U ovom poglavlju ćemo analizirati jednačinu van der Pola i matematičkim eksperimentom ćemo utvrditi da **sama nelinearnost ne izaziva haos**[4].

Jednačina van der Pola opisuje kako se menja napon u jednom karakterističnom električnom kolu. To kolo se sastoji od: zavojnice induktivnosti L, kondenzatora kapaciteta C i negativnog otpora R. Šema je prikazana na slici 2. Desni deo kola služi za punjenje kondenzatora.



slika 2.

Posle analize kola dobijamo sledću jednačinu[5]:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0, \tag{3}$$

gde ε ima ulogu parametra, koji zavisi od konkretnih vrednosti komponenata u kolu.

Rešavanje jednačine počećemo numerički i to za tri različita skupa početnih vrednosti:

a) $x(0)=10$ i $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=0$;

b) $x(0)=-4$ i $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=-2$; c) $x(0)=0$ i $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0}=-10$.

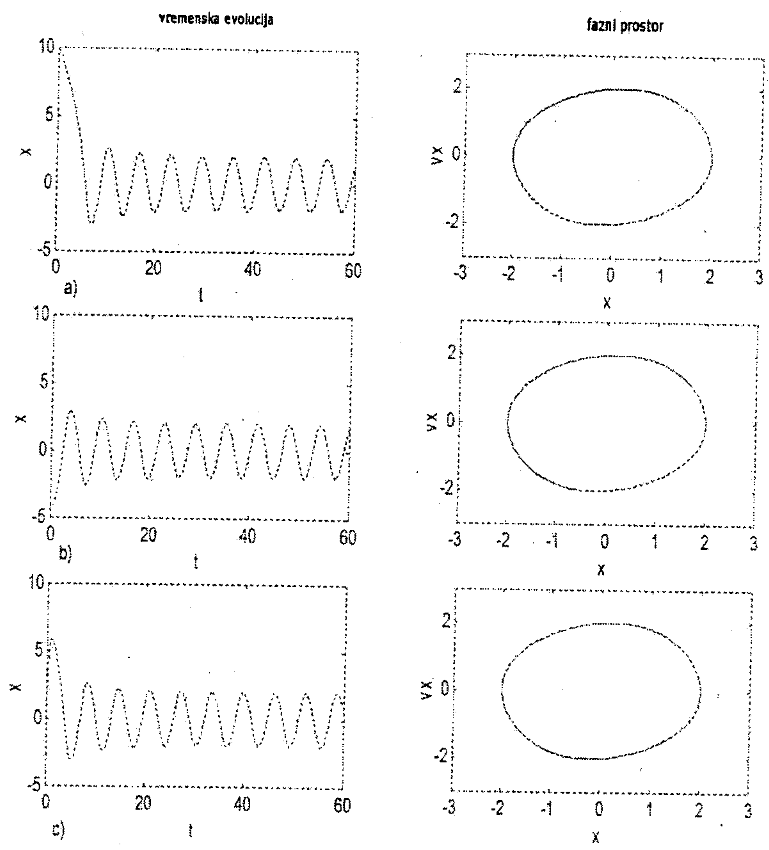
---

[4] Ovde konkretno mislimo da nelinearne jednačine ne moraju nužno da od dva početna uslova koja se neznatno razlikuju, kreiraju rešenja koja se drastično razlikuju, posle određenog vremenskog perioda.

[5] Ovde je izostavljena detaljna analiza kola jer ona nije neophodna za razumevanje same suštine haosa. Van der Pol je došao do ove jednačine 1926. godine i zbog toga nosi njegovo ime.

Rešavaćemo jednačinu (3) Runge-Kuta metodom. Ako bismo jednačinu rešavali za različite parametre ε dobili bismo da rešenja imaju isto ponašanje, pa možemo zaključiti da parametar ε ne utiče na stabilnost.

Na slici 3 data su numerička rešenja jednačine (3) za različite početne uslove. Sa slike vidimo vremensku zavisnost promenjive $x(t)$, kao i kretanje oscilatora u faznom prostoru[6]. Figura u faznom prostoru po kojoj se „kreće" sistem naziva se **atraktor**. Sa slike se takođe vidi da su rešenja stabilna, nezavisno kakvi su početni uslovi.



slika 3

[6] U ovom konkretnom slučaju fazni prostor čine samo dve koordinate (x,v_x). Ovakav način pretstavljanja u teoriji haosa imaće neprocenjivu vrednost, jer će se tek u faznom prostoru uočiti prve zakonitosti. Kod amortizovanog linearnog harmoijskog oscilatora slika u faznom prostoru izgleda kao spirala, sa konačnom tačkom na $v_x = 0$, gde smo sa v_x označili brzinu oscilatora tj. $\frac{dx}{dt}$.

Iz ovog poglavlja mogli smo da vidimo da nas u haos ne dovodi nelinearnost jednačina već neka sinergičnost[7] nelinearnosti i funkcije koja eksplicitno zavisi od vremena, jednačina (1).

- ***Pravi zaključak***: Funkcija koja eksplicitno zavisi od vremena (član $F\cos(wt)$) ***je potreban uslov*** da napravi haos. Sama nelinearnost ne dovodi do haosa.

Pre nego što pređemo na poglavlje **3**, gde će biti dat tačan matematički kriterijum koji će nam otkrivati sisteme koji nemaju haos, treba da se upoznamo sa još jednim zanimljivim ponašanjem haotičnih sistema, a to ćemo uraditi kroz poglavlje **2.3**.

[7] zajedničko delovanje, saradnja, pomaganje

2.3 Prvi put u haosu

„Prilike koje se u atmosferi pojavljuju, a zatim nestaju; porodice vrtloga i ciklona; događaji koji svi poštuju matematička pravila, a ipak se nikada ne ponavljaju"

Edvard Lorenc

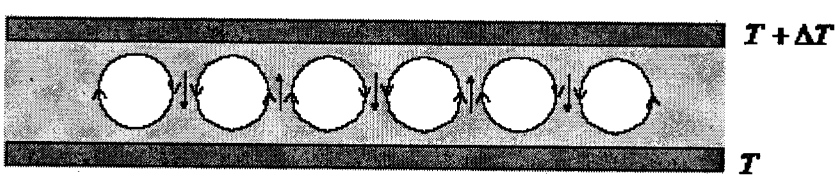
2.3.1 Benarov eksperiment

Ovaj eksperiment je vrlo jednostavno osmišljen. U tom eksperimentu imam dve paralelne ploče između kojih je fluid. Donja ploča se održava na određenoj temperaturi T, a gornja na temperaturi $T+\Delta T$. Zagrejana tečnost u blizini donje ploče se diže, a tečnost u blizini vrha se spušta. Zagrejana tečnost se penje jer se usled zagrevanja njena zapremina povećala, pa joj se smanjuje gustina. Ovakvom načinu cirkulacije tečnosti suprostavljaju se viskozne sile.

Pri malim razlikama temperature ΔT viskozne sile su nesavladive, stoga tečnost miruje i toplota se prenosi konstantno tj. sa konstantnom toplotnom provodljivošću.

Daljim povećavanjem temperature to stanje postaje nestabilno i pri određenoj vrednosti Relejevog broja R_a pojavljuje se cilindrično kretanje tečnosti kao što je prikazano na slici. Ako bismo temperaturu nastavili da povećavamo , pa i Relejv broj, u jendom mometnu došlo bi do haotičnog kretanja fluida. Cilindre tečnosti koje smo prvo uočili odjednom bi počeli da se krive i da se totalno nepredvidivo talasaju.

Za opis Benarovog eksperimenta Lorenz je redukovao Navijer-Stoksove jednačine na sistem od tri diferencijalne jednačine



slika 3.1

2.3.2 Lorencov sistem jednačina

Lorenc je prvi naučnik koji je konkretno uočio da male razlike u početnim uslovima mogu da dovedu do ogromnih neslaganja rezultata posle određenog vremena. Sve je počelo 60-tih godina 20. veka u Masačusetskom institutu za tehnologiju. Lorenc je radio na svom Rojal Mak Bi (Royal McBee) računaru i bavio se realnim meteorološkim problemom, koji ostvaren u laboratoriji predstavlja Benarov eksperiment. Numeričkim rešavanjem za početne uslove Lorenc je dobijao rezultate ali uvek različite za različite početne uslove, čak i kada su se oni za neverovatno malo razlikovali. Naravno, on je odmah posumnjao u svoju mašinu ili u neki ljudski faktor, a ustvari on je stojao pred neverovatnom novom Naukom[8].

Ta ogroma osetljivost rešenja na početne uslove naziva se efekat leptira (Butterfly effect). Naziv ovog efekta potiče od činjenice da su jednačine kojima se modeluje vreme (a samim tim ovo se odnosi na stvarno vreme koje vidimo kroz prozor) neverovatno osetljive na početne uslove[9], pa se postavlja pitanje :

„Da li krila leptira u Brazilu mogu da pokrenu tornado u Teksasu?"

Sada ćemo analizirati Lorencov sistem jednačina:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \tag{4}$$

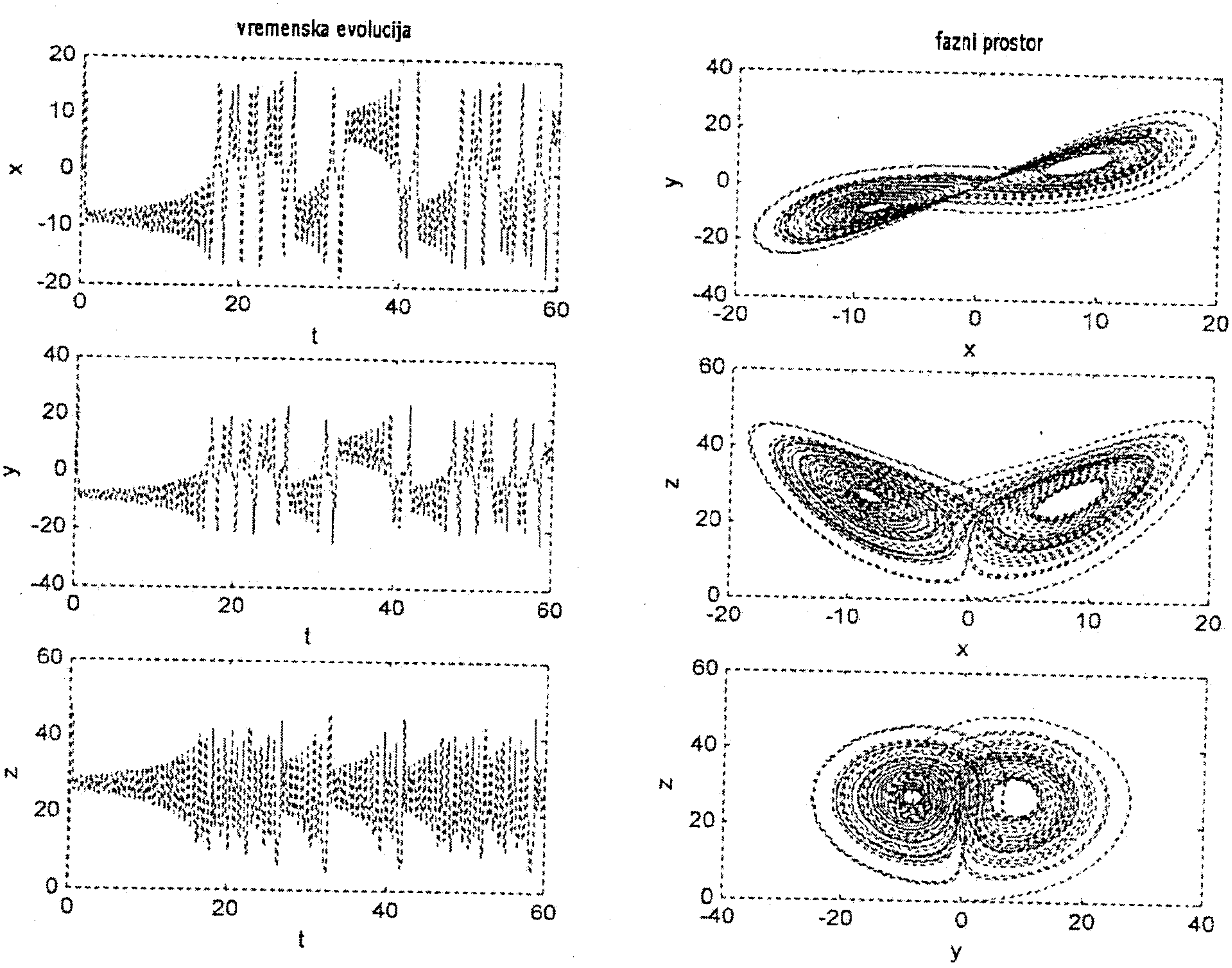
$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz \tag{5}$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz \tag{6}$$

[8] Knjige kažu da je Lorenc jednom prilikom zaustavio mašinu u svom izračunavanju i kada ju je ponovo pokrenuo, umesto da unese broj na kojoj je mašina stala Lorenca je mrzelo da kuca 0.506127 nego je zaokružio broj na 0.506. Dobio je skroz drugačije rezultate koje je Lorenc interpretirao kao: „...računar se opet pokvario ili nisam dobro ukucao broj...". Posle ponovnog i ponovnog ponavljanja sličnih početnih uslova Lorenc je bio na tragu Nove nauke.

[9] Ovde možda vredi spomenuti neka nihilistička shvatanja koja su povezana sa razmišljanjem koliko je uopšte moguće napisati jednačinu koja odgovara stvarnosti i ko/šta nam, uopšte, osim eksperimenta garantuje tu sigurnost.

Gde su nepoznate x, y i z dok su konstante: σ, r i b. Rešićrmo dati sistem za određene vredosti parametara kao i za konkretne početne uslove. Uzećemo $\sigma=10$, $b=8/3$ i $r=28$, a za početne vrednosti $x(0)=z(0)=0$ i $y(0)=1$. Numeričkim rešavanjem jednačina dobijamo sliku 4. Sa leve strane vidimo kako promenjive zavise od vremena, a sa desne strane vidimo kako izgledaju projekcije trodimenzionalnog atrkatora (x,y,z) na odgovarajaće ravni (x,y), (x,z) i (y,z) od gore prema dole, respektivno. Naglasili smo već da će ovakav način predstavljanja biti od ogromnog značaja.



slika 4

Analiza slike 4:

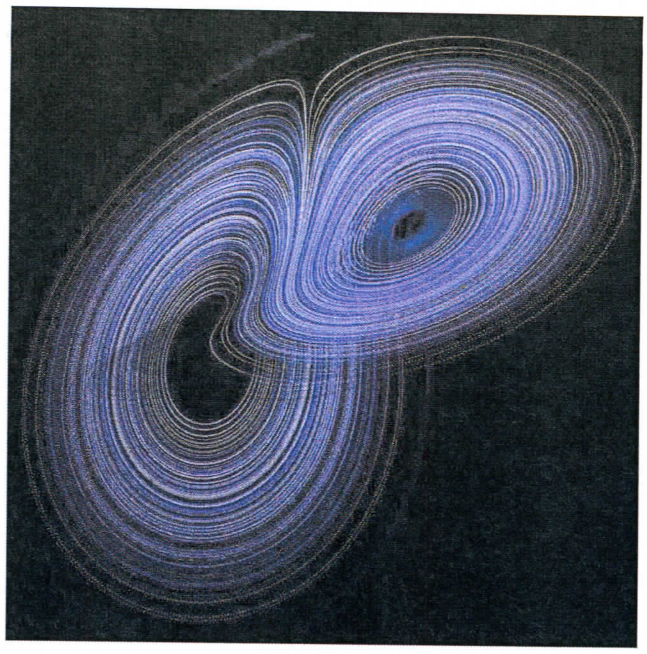
- Ako posmatramo zavisnost x od t, vidimo da oscilator osciluje oko tačke $x_0 = -10$ i oko tačke $x_0 = 10$.
- Najčudnije je od svega što ne možemo nikako da odredimo kada će naš oscilator prestati da osciluje oko donje tačke i kada će se odlučiti za gornju. Ovo je momenat u kome haosolozi uživaju i čudno se smeju čekajući pristalice mehanicističkog determinizma da odgovore na ovo pitanje!
- Sa desne strane vidimo projekciju atraktora na različite ravni. Oni su čudni iz više razloga. Oscilator nekoliko puta osciluje oko jedne tačke, pa onda nekoliko puta oko druge tačke (bez ikakvog redosleda niti predvidivog broja oscilacija) i tako do beskraja.
- Ne smemo da zaboravimo da menjanjem početnih uslova za male vrednosti, dobijamo takođe potpuno drugačiju sliku 4 ali sve ostaje isto tj. **potpuno neprevidivo**!

Na slici 5a i 5b vidimo trodimenzionalnu sliku Lorencovog **čudnog atraktora**. Nijednog momenta oscilator ne krene ponovo istom putanjom, nego u ograničenom prostoru stvara beskonačno dugačku putanju. Beskonačno u konačnome[10]!

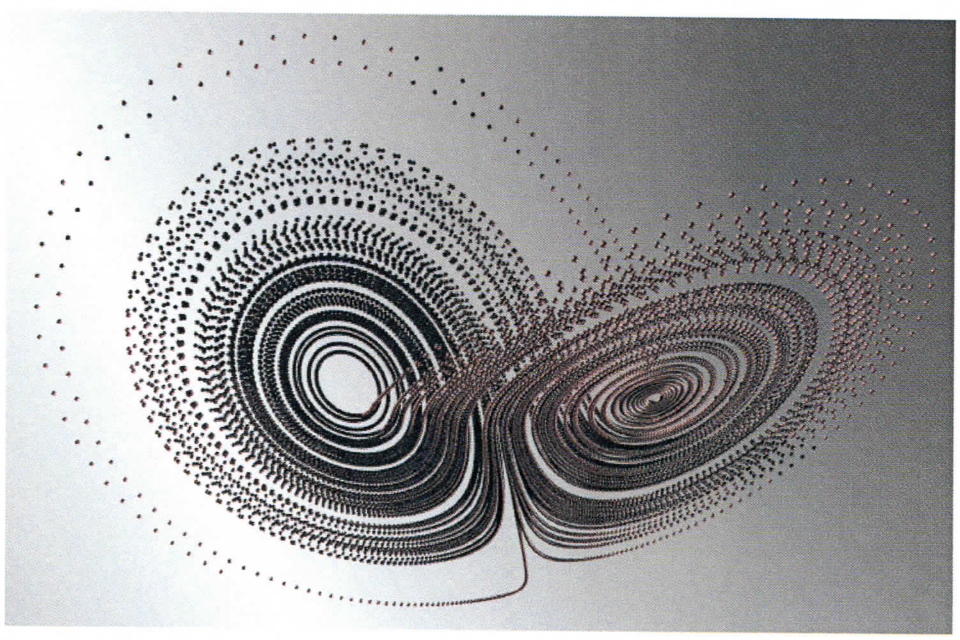
- Da li postoji neki način da čim vidimo jednačine odmah kažemo da li haos postoji ili ne? Za sada ne postoji generalno rešenje za ovaj problem, ali za veliki skup dinamičkih sistema postoji jasan kriterijum-teorema Poenkare-Bendiksona kojom će se baviti sledeće poglavlje.

Lorencov sistem je od velikog značaja za celu teoriju haosa. Kao što bi se svaki veliki stručnjak iz kvantne mehanike mogao vratiti revolucionarnom eksperimentu sa propuštanjem elektrona kroz dva otvora, tako se svaki istraživač haosa vraća svom početku-Lorencovom sistemu jednačina.

[10] Čudni atraktori za razliku od običnih atraktora predsatvljaju geometrijske objekte koji imaju fraktalnu dimenziju. Jedan od kriterijuma da je sistem prešao u haotično stanje je dimenzija njegovog atraktora-ako je dimenzija fraktalna (necelobrojna) sistem je haotičan, a ako je dimenzija celobrojna, sistem je u stacionarnom stanju. Konkretno, dimenzija Lorencovog čudnog atraktora je 2.06!



slike 5a



slika5b

3. Matematički kriterijum haosa

U ovom poglavlju objasnićemo teoremu Poencare-Bendiksona koja će nam otkriti koji sistemi sigurno nemaju haos. Prvo ćemo ukratko navesti koje smo dinamičke sisteme imali do sada i da li su bili osetljivi na početne uslove.

3.1 Već analizirani sistemi

Analizirani sistemi:

- Prigušeno klatno sa potencijalom četvrtog stepena i prinudnom silom čija je jednačina bila:
$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-b\frac{dx}{dt}-4gx^3+F\cos(wt).$$
Kod ovog sistema ***imali smo haos*** (za male razlike u početnim uslovima velika odstupanja posle određenog vremena), slika 1.
- Linearni harmonijski oscilator sa prigušenjem i prinudnom silom čija je jednačina bila:
$$m\frac{d^2x}{dt^2}=-b\frac{dx}{dt}-gx+F\cos(wt).$$
Kod ovog sistema ***nismo imali haos***, postoji čak i analitičko rešenje.
- Jednačina van der Pola:
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\varepsilon(x^2-1)\frac{dx}{dt}+x=0,$$
ovde ***nismo imali haos*** iako analitičko rešenje nismo znali.
- Lorencov sistem jednačina:
$$\frac{dx}{dt}=\sigma(y-x)$$
$$\frac{dy}{dt}=rx-y-xz$$
$$\frac{dz}{dt}=xy-bz$$
Ovde smo imali haos sa čudnim atraktorom.

3.2. Teorema Poenkare-Bendiksona

Jednostavniju verziju ove teoreme dokazao je Poenkare, tek kasnije 1901. švedski matematičar Bendikson daje strožiji dokaz.

Teorema:

Ako sistem jednačina koji opisuje naš realan dinamički sistem možemo napisati u sledećem obliku:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,y), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x,y), \tag{13}$$

onda se u ovakvom sistemu neće pojaviti haos[11]. Naravno, f i g moraju da budu neprekidne, diferencijabilne funkcije.

Pokušaćemo sada ovu teoremu da primenimo na već prethodna 4 analizirana slučaja, pa ćemo ujedno videti njene prednosti i mane.

3.3. Primena teoreme na već analizirane sisteme

- Prigušeno klatno sa potencijalom četvrtog stepena i prinudnom silom čija je jednačina bila:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - 4gx^3 + F\cos(wt).$$

Ovu jednačinu možemo transformisati u sitem jednačina:

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -by - 4gx^3 + F\cos(wt),$$

[11] Naravno ovde treba voditi računa. Haos se neće pojaviti u našem matematičkom modelu, ali ako model nije dobar naš stvarni sistem može da bude haotičan. Stoga će ono što stvarno vidimo u laboratoriji, u svemiru, u jezgru atoma biti haotično. Jedna od suštinskih poteškoća je da ako mi hoćemo da naš sistem potpuno, do detalja opišemo, naš matematički model postaje sve komplikovaniji , pa se i sistem jednačina povećava; tada haos počinje da vreba.

ali vidimo da nam je potrebna još jedna jednačina, pa potpuni sistem izgleda ovako:

$$\frac{dx}{dt} = y,$$
$$\frac{dy}{dt} = -by - 4gx^3 + F\cos(wt),$$
$$\frac{dt}{dt} = 1.$$

Sada je jasno da ovaj sistem ne može da se napiše kao sistem jednačina (13), pa nam teorema tvrdi da u ovakvom sistemu može nastati haos, što smo pokazali da se stvarno i dešava. Još jedna zanimljiva osobina ovog oscilatora je da za određene vrednosti amplitude sile F haos postoji, a za određene ne. Na slici 1 su prikazana dva rešenja za $F = 7.5$. Dok rešenja uopšte ne bi bila haotična za vrednosti $F = 1.5$.

- Linearni harmonijski oscilator sa prigušenjem i prinudnom silom čija je jednačina bila:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dx}{dt} - gx + F\cos(wt).$$

Na sličan način možemo transformisati i ovu jednačinu u sistem od tri jednačine. Zaključak bi bio takođe isti: „U ovom sistemu se može pojaviti haos". Naravno, znamo da se ovaj sistem hatično ne ponaša.

- Jednačina van der Pola:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon\,(x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0,$$

koju ćemo transformisati u sledeći sistem:

$$\frac{dx}{dt} = y,$$
$$\frac{dy}{dt} = -\varepsilon\,(x^2 - 1)y - x.$$

Vidimo da ovaj sistem odgovara sistemu iz teoreme Poenkare-Bendiksona, sistem jednačina (13), pa teorema tvrdi da haos ne postoji, što smo mi mogli i da pretpostavimo iz prethodnog numeričkog eksperimenta.

- Lorencov sistem jednačina:

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y-x),$$
$$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz,$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - bz.$$

On već na prvi pogled deluje da ne može da se transformiše u sistem jednačina (13), pa teorema kaže da je haos moguć.

Zaključak ovog poglavlja:

- Vidimo da nam ova teorema nudi ogromne mogućnosti, ali isto tako videli smo da je teorema odlučiva za samo dvodimenzionalne sisteme. Kada su u pitanju sistemi od tri četriri i više diferencijalnih jednačina prvog reda ova teorema nam ne nudi konkretne odgovore.
- S druge strane ova teorema se bavi samo sistemima koji mogu da budu napisani diferencijalnim jednačinama. Postoje dinamički sistemi koji se zapisuju rekurentnim jednačinama gde onda ovaj naš kriterijum nema smisla[12].

Lorencov sistem jednačina nas lako može odvesti u haos ali za slične sisteme koji takođe imaju nelinearne članove postoje određeni parametri za koje su rešenja stabilna. Da bismo jasnije ovo ilustrovali analiziraćemo Roslerov sistem jednačina koji će za odredjene vrednosti parametara pokazivati haos, a za odredjene ne. Zato sledi poglavlje samo posvećeno ovom sistemu jednačina.

[12] Jedna od verovatno najpoznatijih rekurentnih jednačina u teoriji haosa koja se inače koristila za opisivanje populacije, ekonomskog rasta i u mnogim drugim modelima je: $x_{i+1} = rx_i(1-x_i)$. Ova jednačina je ekstremno haotična, stim što je haos izazvan malim promenam parametra r ($r > 3.57$), a za istu početnu vrednost x_1. To znači da za dve bliske vrednosti konstante r i za iste početne vrednosti x_1 posle određenog broja iteracija, npr. 1000 , x_{1000} će se drastično razlikovati u ta dva slučaja. U ovakvim slučajevima kriterijum haotičnosti daje se preko Ljapunovog eksponenta. S druge strane treba uočiti da je kod rekurentnih relacija nastanak haosa može da dođe i za jednodimenzione sisteme, dok za sisteme diferencijalnih jednačina haos se može pojaviti tek za sisteme od tri diferencijalne prvog reda, pa naviše. Detaljna analiza ovog modela data je u [1].

4. Kritični parametri

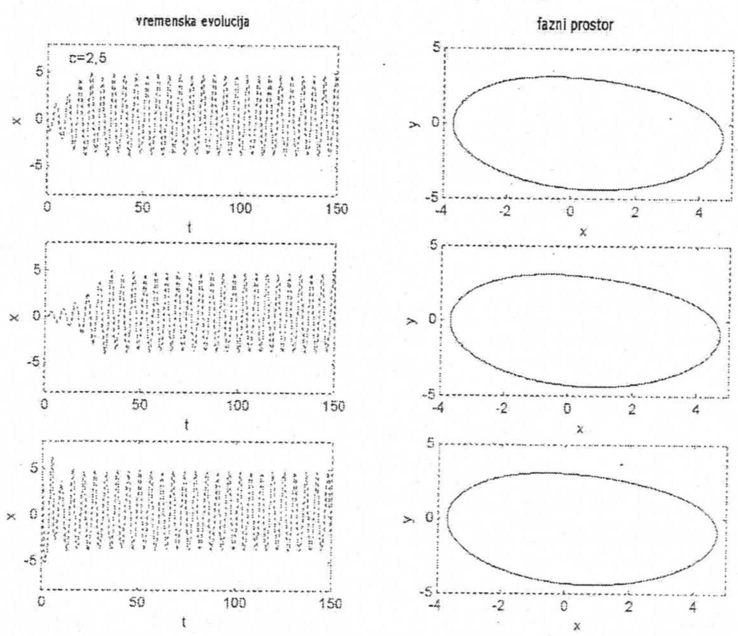
4.1 Roslerov sistem jednačina

U ovom poglavlju analiziraćemo Roslerov sistem jednačina koji izgleda ovako:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$
$$\frac{dy}{dt} = x + 0.2y$$
$$\frac{dz}{dt} = 0.2 + (x - c)z$$

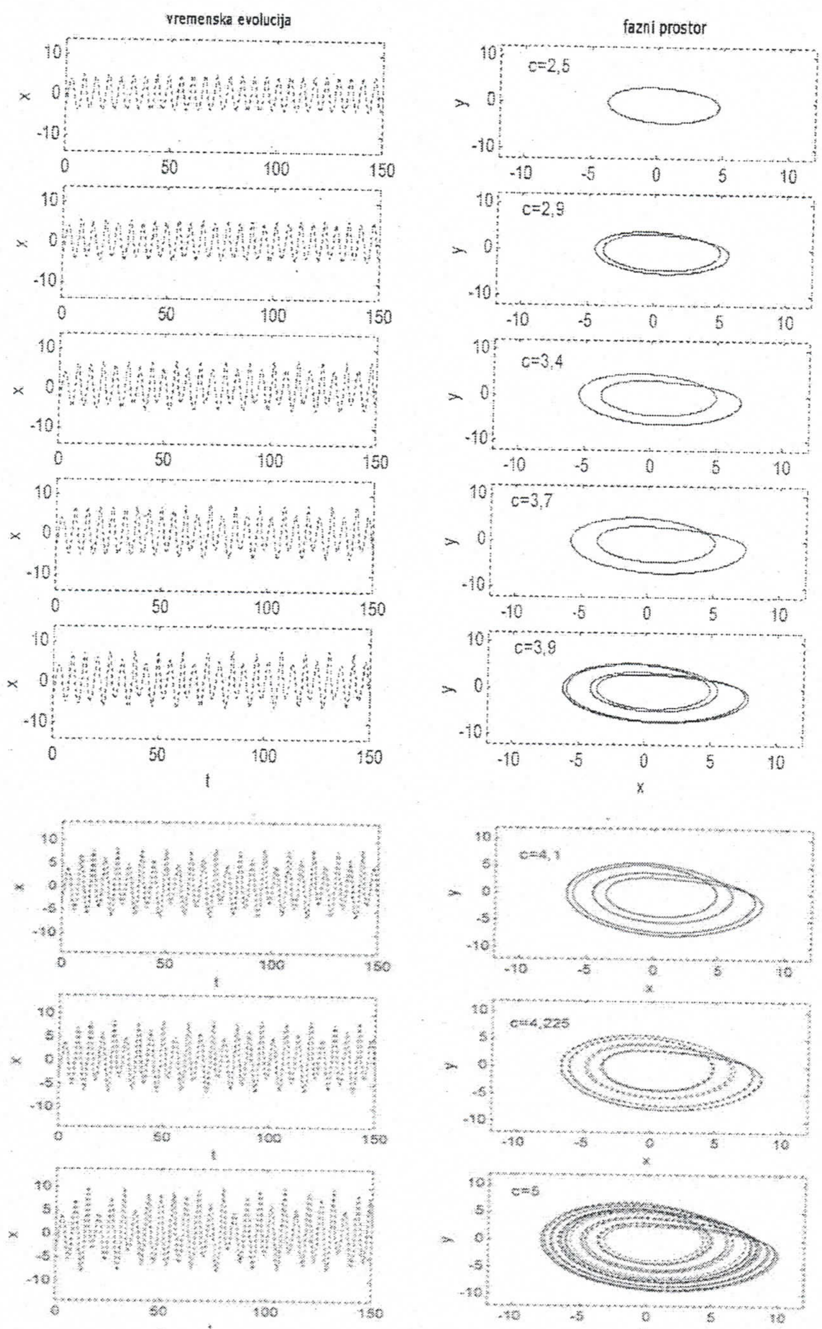
Za razliku od Lorencovog sistema koji je imao svoju fizičku interpretaciju, Roslerov sistem je čista matematička kreacija. Videćemo da za određene vrednosti parametra c haos postoji, a za određene ne postoji. U poslednjoj jednačini uočavamo nelinearnost xz.

Primenom teoreme Poenkare-Bendiksona na ovaj sistem, vidimo da haos može da se pojavi. Krenućemo prvo sa numeričkim rešavanjem Runge-Kuta metodom za $c = 2.5$ ali za različite početne vredosti, slika 6. Vidimo da su rešenja stabilna i da nema haotičnog ponašanja atraktora.



slika 6

Još na kraju prethodnog poglavlja rekli smo da je Roslerov sistem jednačina zanimljiv iz posebnog razloga, jer za različite vrednosti parametra c haos postoji, a za određene ne postoji. U otkrivanju tih „problematičnih" vrednosti poslužiće nam fazni prostor.
Za iste početne uslove, a različite vrednosti konstante c imamo sliku 7.



slika 7

Kako treba tumačiti prethodne slike?

- Za $c = 2.9$ i $c = 3.4$ i $c = 3.7$ period se udvostručuje ali sistem još ne pokazuje haotično ponašanje(ne postoji čudni atraktor).
- Vidimo da za $c = 2.5$ imamo stacionarne oscilacije za x dok atraktor ima samo jedan period.
- Za $c = 3.9$ vidimo da se period opet udvostručuje i četir je puta veći nego za $c = 2.5$.
- Za $c = 4.225$ period se ponovo udvostručio i sada je osam puta veći nego za $c = 2.5$.
- Dok za $c = 5$ nastaje potpuni haos tj. sistem ispunjava veći deo faznog prostora i pravi čudni atraktor.

Fajgenbaum je 1979. godine otkrio da se udvustručenje perioda javlja za određene vrednosti konstante c i utvrdio je da važi sledeća relacija:

$$\delta = \lim_{k \to \infty} \frac{c_k - c_{k-1}}{c_{k+1} - c_k}, \quad \delta = 4.4669...$$

gde su c_{k-1} i c_k i c_{k+1} uzastopne vrednosti konstantne c za koje dolazi do udvostručenja perioda. δ se naziva prva Fajgenbaumova konstanta i javlja se u mnogim drugim oblastima teorije haosa i od velikog je značaja. Kao i za veliki broj ostalih konstanti u prirodi i za ovu se smatra da je transcendentan broj, ali to još nije dokazano.

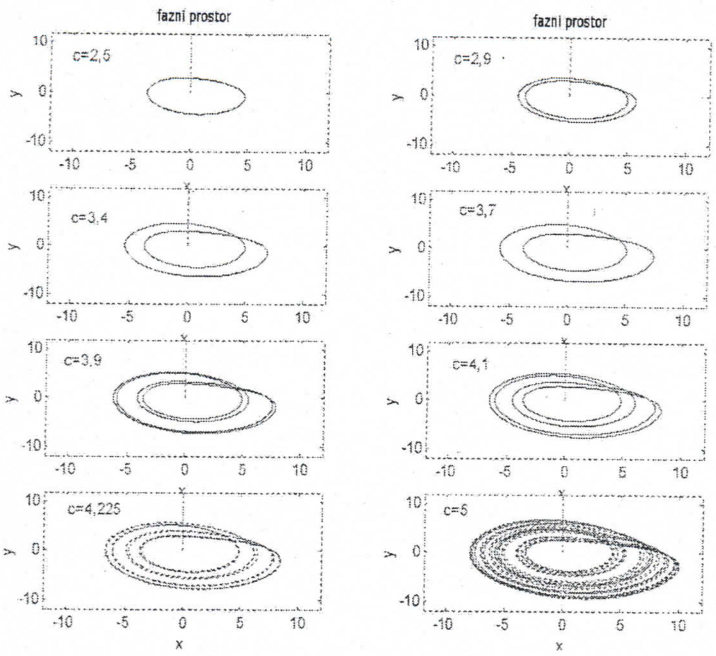
4.2. Poenkareovi preseci i bifurkacioni[13] dijagrami

Da bismo lakše uočili i vizualno pretstavili kada dolazi do dupliranja perioda, a kada do haosa, koriste se Poenkareovi preseci i Poenkareovi bifurkacioni dijagrami.

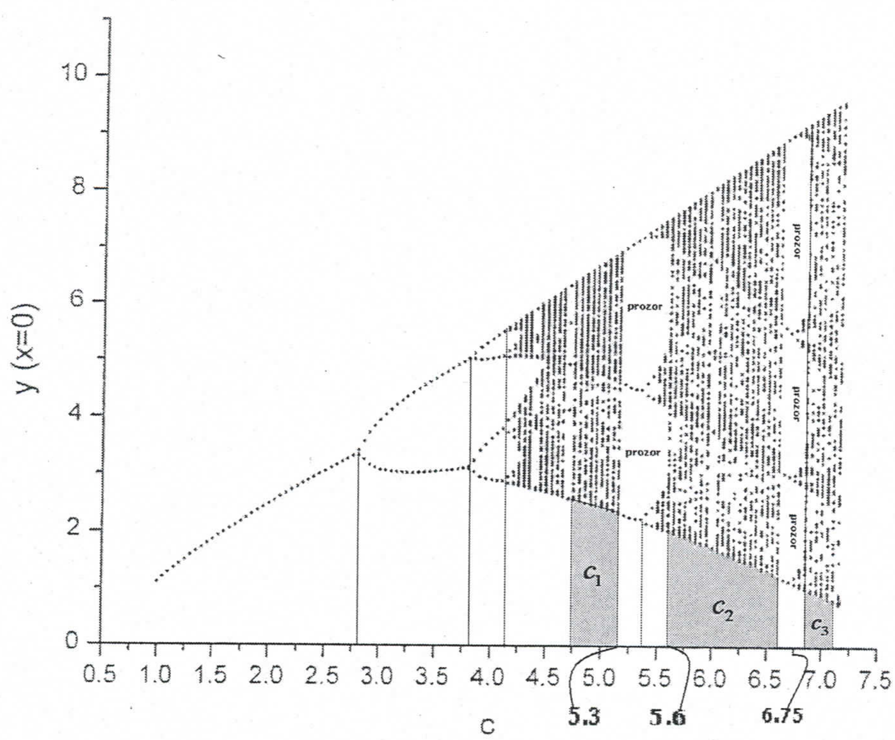
Poenkareovi preseci se konstruišu veoma lako. Na već postojeće projekcije trodimenzionalnog atraktoa uvedemo osu $x = 0$ i tražimo presek dvodimenzionalne projekcije atraktora i te ose (uzimamo samo pozitivne vrednosti), slika 8. U tački preseka očitamo y komponentu.

Bifurkacioni dijagram se konstruiše tako što se očitana vrednost y komponente preseka i vrednost odgovarajuće konstante c crtaju na jednom grafiku, slika 9.

[13] Bifurkacija je račvanje, grananje ili cepanje na dvoje.



slika 8



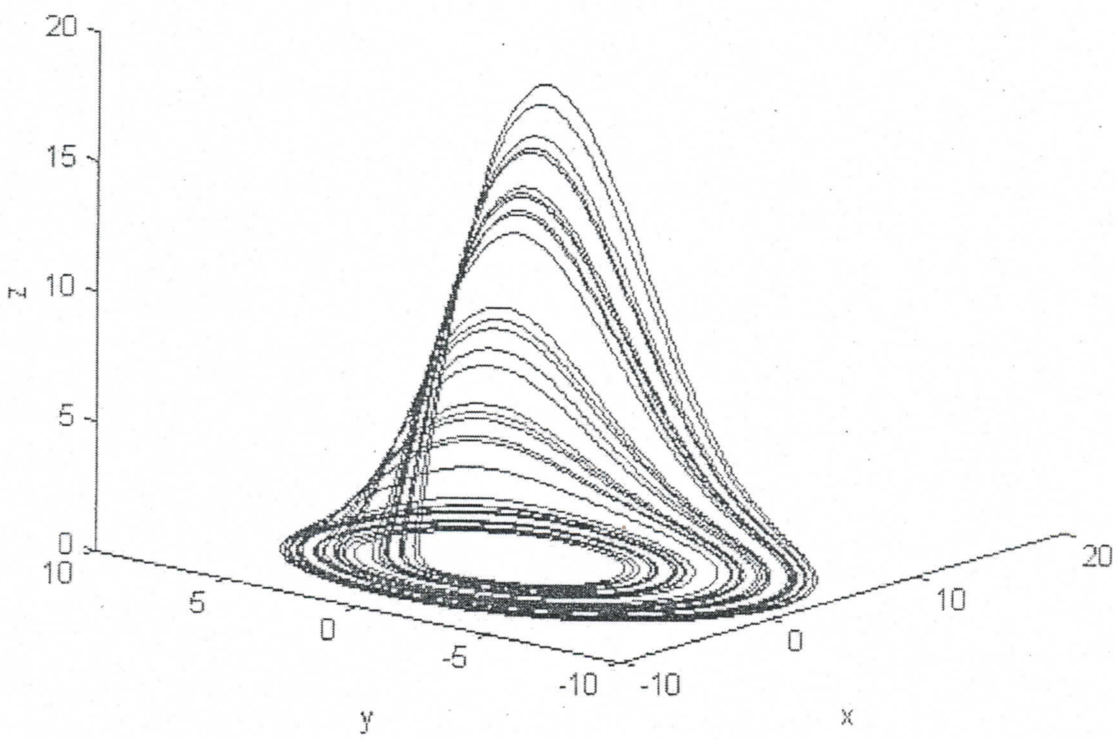
slika 9

Ovako prikazivanje preko bifurkacionih dijagrama je od ogromnog značaja, jer se tačno uočava vrednosti konstante c za koju dolazi do dupliranja perioda. Isto tako, jasno se uočava i vrdnosti kostante c za koje dolazi do haosa. Vidimo da se vrednosti za c, za koje dolazi do haosa kreću u sledećim intervalima:

$$c \in \begin{cases} [4.75, 5.3] - c_1 \\ [5.6\ , 6.6] - c_2 \\ [6.8\ , 7.2] - c_3 \end{cases}$$

Na grafiku su ovi intervali označeni sivom bojom. Za određene vrednosti $c \in [5.3, 5.6]$ (ovo je aproksimativno uzeto), imamo da je ponašanje sistema nehaotično i da postoje dva prozora. Za $c = 6.75$ imamo ponovno dupliranje perioda i uočavamo sada već tri prozora.

Ponašanje čudnog atraktora u trodimenzionalnom faznom prostoru za $c = 5$ date je na slici 10. Uočavamo haotično ponašanje(odsustvo svakog mogućeg predviđanja kretanje atraktora).



slika 10

Zaljučak ovog poglavlja:

- Videli smo da i jedan jednostavan model kao što je ovaj koji se sastoji samo od tri diferencijalne jednačine ima veoma nepredvidivo ponašanje.
- Videli smo da za određene vrednosti konstante c imamo lep uređen sistem sa jasno definisanim atraktorom, dok za druge imamo potpuni haos i odustvo svake mogućnosti predviđanja ponašanja čudnog atraktora.
- Pokušali smo aproksimativno da odredimo vrednosti za c za koje imamo stabilno rešenje i to je upravo ponašanje sistema kakvo nama odgovara u većini sluačajeva. Ako je c veličina koja zavisi od parametara koje možemo da kontrolišemo u realnom sistemu onda je poželjno prvo odrediti intervale za c za koje sistem ne pokazuje haotično rešenje, a potom kontrolom parametra i ostvariti tu traženu vrednost.

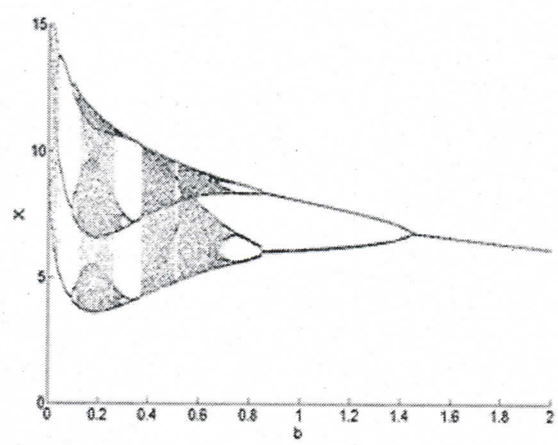
Roslerov sistem može se malo uopštiti tako što osim konstante c, imamo još dve konstante a i b. Taj sistem izgleda ovako:

$$\frac{dx}{dt} = -y - z$$

$$\frac{dy}{dt} = x + ay$$

$$\frac{dz}{dt} = b + z\,(x - c)$$

Ovaj sistem je takođe izuzetno osetljiv i na konstante a i b, pa se i za njih može sprovesti slična analiza. Bifurkacioni dijagram za kostantu b, dok su ostala dva parametra konstantni $a = 0.2$ i $c = 5.7$, dat je na slici 11.



slika 11

5. Zaključak

Kroz prethodna poglavlja predsatavljeni su neki osnovni pojmovi i metode u teoriji haosa. Prikazani su primeri na kojima je haos prilično jednostavno analizirati. Od samog nastanka, pa do danas, teorija haosa se neverovatno razvijala, jer je svoju primenu nalazila gotovo svugde: u medicini, ekonomiji, ekologiji, astronomiji, bilogiji, primenjenoj fizici...

Svaka od ovih naučnih oblasti dugo je posmatrala slične probleme ali je teorija haosa omogućila da se o tim problemima priča na isti način. Ogromna nepredvidivost cena neke robe na svetskom tržištu, nepredvidivost potomaka jedne vrste, nepravilno kretanje Saturnovog satelita samo su neki od primera gde je teorija haosa jednostavno pokazala svoju moć.

Kod različitih oblika oboljenja srca, dolazi do njegovog nepredvidivog rada . Detaljnim snimanjem EKG-a i priomenom teorije haosa koja nalazi zakone i konstante (npr. fraktaln dimenzija čudnog atraktora) u naizgled nesagledivom sistemu, dobijena je ogromna i neverovatno uspešna dijagnostika.

Jedna od grana matematike koja je usko povezana sa teorijom haosa je fraktalna geometrija. Ova geometrija počinje da se razvija 1970. godine, a osnivač je Mandelbrot. Ova geometrija se bavi geometrijskim objektima-fraktalima koji nemaju celobrojnu dimenziju. Pokazuje se da ova geometrija najbolje opisuje oblike u prirodi: oblake, planine, obale, krošnje, nečiju kosu, pa sve do klastera galaksija. Ali kada malo bolje sagledamo stvari videćemo da su Euklidove tačke, prave i ravni toliko apstraktni pojmovi da ih samo možemo reprodukovati u sopstvenoj mašti. Na slici 12 vidimo fraktale koji su umetnički dorađeni dok na slici 13 vidimo mnogo prizemnije fraktalne oblike koje možemo i da pojedemo.

slika 12

slika 13

Naveli smo da teorija haosa ulazi u mnoge druge naučne oblasti, tako da je teorija haosa ušla i na osnove studije fizike na skoro svim fakultetima u svetu.

Treba naglasiti da je teorija haosa uzela svoj zamah u doba računara i da je svoj procvat upravo doživela zahvaljujući njima. S druge strane, još 50-tih godina stvorio se futuristički san (koji nije bio ostvaren) nekih meteorologa, da kada budemo imali računar da ćemo moći da rešavamo ogromne sisteme jednačina koji će nam omogućiti dugročno predviđanje vremena, i ne samo to, modelovanje bilo kakvih sistema sa ogromnim brojem jednačina će se konačno isplatiti. Danas znamo da se san tih meteorologa nije ostvario pronalaskom računara, nego se još više iskomplikovao otkrivanjem haosa. Koliko god je nekom haos uništio snove, mnogima je otvorio oči i dao novi, potpuniji način izučavanju prirode.

Razmislite samo kako je ceo život pod uticajem malih sitnica koje toliko menjaju njegov tok. Svaki put kad se vratite po zaboravljene ključeve, pitajte se da li će te sreti iste ljude na ulici, sresti iste poglede, uhvatiti isti autobus, preći vam crna mačka put, pasti vam saksija na glavu ili ko zna šta još....

6. Dodatak

6.1. Ojlerov metod

Ojlerov metod je matematički algoritam za numeričko rešavanje diferencijalne jednačine prvog reda date u sledećem obliku:

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t), \quad y(t_0) = y_0 .$$

Algoritam izgleda ovako:

$$y_{k+1} = y_k + h\,f(y_k,t_k),$$
$$t_{k+1} = t_k + h,$$

$$h = \frac{t_{pos} - t_0}{n}.$$

Gde je $t_{pos} - t_0$ oblast integracije, a n broj podeoka na koji delimo datu oblast integracije. Greška koja nastaje pri svakoj iteraciji proporcinolna je sa h^2, dok je globalna greška posle svih n iteracija proporcinalna sa h.

Zbog male tačnosti ovog metoda i njegove nemogućnosti za uspešno rešavanje nekih problema, najčešće se koristi Runge-Kuta metod koji ima globalnu grešku reda h^4. Ovaj metod prikazan je u 6.2.

6.2. Runge-Kuta metod

Runge-Kuta metod je matematički algoritam za numeričko rešavanje diferencijalne jednačine prvog reda date u sledećem obliku:

$$\frac{dy}{dt} = f(y,t), \quad y(t_0) = y_0 .$$

Algoritam izgleda ovako:

$$y_{k+1} = y_k + h\frac{(f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4)}{6},$$
$$t_k = t_{k-1} + h,$$

$$f_1 = f(t_k, y_k),$$
$$f_2 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + f_1\frac{h}{2}),$$
$$f_3 = f(t_k + \frac{h}{2}, y_k + f_2\frac{h}{2}),$$
$$f_4 = f(t_k + h, y_k + f_3\, h),$$
$$h = \frac{t_{pos} - t_0}{n}.$$

Gde je $t_{pos} - t_0$ oblast integracije, a n broj podeoka na koji delimo datu oblast integracije. Greška koja nastaje pri svakoj iteraciji proporcinolna je sa h^5, dok globalna greška posle svih n iteracija proporcinalna je sa h^4. Vidimo da se vrednosti za f_2, f_3 i f_4 aproksimativno dobijaju Ojlerovom metodom, koji je dat u 6.1.

Literatura

[1] Dr Milivoj Belić, „Deterministički haos" ,SFIN, Beograd, 1990.
[2] Vitor Torres, „Fisíca Computacional", Univesidade de Aveiro, 2004.
[3] Džejms Glajk: „Haos", Narodna knjiga Alfa, 2001.
[4] E. Lorenz, „Some Aspects of Atmospheric Predictability"
[5] Rudra Pratar, „Matlab 5", Oxford Univesity Press, 1999
[6] Predrag Cvitanović, „Universality in chaos", Bristol, 1984
[7] Predrag Cvitanović, „Classical and Quantum Chaos", 2004
[8] J. P. Eckmann, „Roads to turbulence in dissipative dynamical systems", Department of theoretical physics, University of Geneva, Switzerland

BIOGRAFIJA

Ime i prezime: Nikola Ojkić
E-mail: nidzaojkic@yahoo.com
Datum rođenja: 29.01.1982.
Mesto rođenja: Novi Sad

Obrazovanje

Osnovno obrazovanje:

1989-1997 : OŠ "Jovan Popović", Novi Sad

- Nosilac diplome "Vuk Karadžić" za prosečnu ocenu osmogodišnjih studija (5,00)
- Specijalna diploma za matematiku

Srednje obrazovanje:

1997-2001 : Gimnazija "Jovan Jovanović Zmaj", Novi Sad
Smer:Prirodno-matematički

- ***Nosilac povelje najistaknutijeg učenika generacije prirodno-matematičkog smera gimnazije "J. J. Zmaj"***
- Prosek ocena po godinama:prva (4.67),druga (5.00), treća (5.00),četvrta (5.00)
- U trećem razredu :
  3. nagrada na Opštinskom takmičenju iz fizike
  3. nagrada na Republičkom takmičenju iz fizike
  Pohvalu na Saveznom takmičenju iz fizike
  Pohvalu na Okružnom takmičenju iz matematike
- U četvrtom razredu :

3. nagradu na Republičkom takmičenju iz fizike
Pohvalu na Saveznom takmičenju iz fizike
1. nagrada na okružnom takmičenju iz matematike

Visoko obrazovanje:

2001-2006 Prirodno-matematički Fakultet u Novom Sadu
Odsek: fizika
Smer: diplomirani fizičar

- Prosečna ocena prve godine: 10.00, druge: 9.67, treće: 9.5, četvrte: 9.25. Ukupno: 9.62
- Izuzetna nagrada Prirodno-matematičkog fakulteta, za postignut uspeh 2001/2002

- Nagrada Prirodno-matematičkog fakulteta, za postignut uspeh 2002/2003
- Diploma Kraljevine Norveške i stipendija za 2002-2003
- Poster na **ICPS**-u 2002. (**I**nternational **C**onference for **P**hysics **S**tudents, Hungary, Budapest 2002.) kao koautor:"Determining of Coefficient of Viscosity Using the Principle of Amortized Oscillations"
- Poster na **ICPS**-u 2003. (Denmark, Odense 2003.) kao koautor: "Monitoring of Solar UV-B Radiation"
- Prezentacija rada na **Primatijadi** u Bečićima 2004. ako autor: "Fononi u konačnom kristalnom lancu"
- Prezentacija rada na **Summer Academy**, Budva: "MPI-**M**essage **P**assing **I**nterface"

Četvrtu godinu redovnih studija završio sam u Portugalu na Univerzitetu Aveiro u okviru programa Campus Europae.

Dodatne informacije

Znanje jezika:
- Engleski: odlično
- Nemački: osnovno
- Portugalski: srednje

Znanje računara: Microsoft office, Mathematica, Matlab, Oracle

Interesovanja

- Muzika & Umetnost & Filozofija
- Matematika

Novi Sad, Oktobar 2006. **Nikola Ojkić**

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: **RBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: **TZ**	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	Diplomski rad
Autor: **AU**	Nikola Ojkić, 325/01
Mentor: **MN**	Dr Miroslav Vesković, redovan profesor
Naslov rada: **NR**	
Jezik publikacije: **JP**	srpski (latinica)
Jezik izvoda: **JI**	srpski/engleski
Zemlja publikovanja: **ZP**	Srbija
Uže geografsko područje: **UGP**	Vojvodina
Godina: **GO**	2006.
Izdavač: **IZ**	Autorski reprint
Mesto i adresa: **MA**	Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Fizički opis rada: **FO**	
Naučna oblast: **NO**	Fizika
Naučna disciplina: **ND**	Teorija haosa
Predmetna odrednica/ ključne reči: **PO**	Deterministički haos, Lorenc, Rosler, Bendikson, Poenkare, van der Pol

UDK	
Čuva se: **ČU**	Biblioteka departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu
Važna napomena: **VN**	Nema
Izvod: **IZ**	Rad je predstavio osnovne stvari iz teorije haosa. Analizirani su jendostavni dinamički sistemi i prikazana su njihova numerička rešenja. Uočena je ogromna osetljivost rešenja na male razlike u počenim uslovima što je i bio cilj. Analizirani su poznati primeri: nelinearni oscilator, Lorencov sistem, jednačina van der Pola i Roslerov sistem. Sve numeričke kalkulacije rađene su u programu Matlab.
Datum prihvatanja teme od NN veća: **DP**	
Datum odbrane: **DO**	
Članovi komisije: **KO**	
Predsednik:	Dr Ištvan Bikit, redovan profesor
član:	Dr Miroslav Vesković, redovan profesor
član:	De Milan Pantić, redovan profesor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: **ANO**	
Identification number: **INO**	
Document type: **DT**	Monograph publication
Type of record: **TR**	Textual printed material
Content code: **CC**	Final paper
Author: **AU**	Nikola Ojkić 325/01
Mentor: **MN**	Dr Miroslav Vesković, full professor
Title: **TI**	Deterministic chaos and analysis of some non-linear systems
Language of text: **LT**	Serbian (Latin)
Language of abstract: **LA**	English
Country of publication: **CP**	Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2006
Publisher: **PU**	Author's reprint
Publication place: **PP**	Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Physical description: **PD**	
Scientific field: **SF**	Physics
Scientific discipline: **SD**	Chaos theory
Subject/ Key words: **SKW** **UC**	Deterministic chaos, Lorenz, Rossler, Bendixson, Poincare, van der Pol

Holding data: **HD**	Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4
Note: **N**	none
Abstract: **AB**	This work has presented basic things from Chaos theory. Some easy examples of dynamic systems have been shown and their numerical solutions are also presented. It is shown that very slightly difference in initial conditions can produce great one in final solutions. Following famous examples have been analyzed: Non-linear oscillator, Lorenz system, van der Pol's equation and Rossler's system. All numerical calculations have been done in Matlab softwere.
Accepted by the Scientific Board: **ASB**	
Defended on: **DE**	
Thesis defend board: **DB**	
President:	Dr Ištvan Bikit, full professor
Member:	Dr Miroslav Vesković, full professor
Member:	De Milan Pantić, full professor