



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU



Wolfram Demonstration Project kao interaktivni alat u nastavi fizike

Mentor: dr Maja Stojanović

Kandidat: Nevena Radošević

Novi Sad, 2018.

Sadržaj

1 Uvod	5
2 Klasična mehanika	9
2.1 Zakoni održanja u klasičnoj mehanici	9
2.1.1 Zakon održanja energije	9
2.1.2 Zakon održanja impulsa	11
2.1.3 Zakon održanja momenta impulsa	12
2.2 Računarske demonstracije zakona održanja	14
2.2.1 Wolfram Demonstrations Project	14
2.2.2 Demonstracija ZOE	14
2.2.3 Demonstracija ZOI	16
2.2.4 Rad sa darovitim učenicima – demonstracija ZOMI	17
2.3 Odabrani primeri iz kinematike i dinamike	20
2.3.1 Hodanje ili trčanje po kiši?	20
2.3.2 Ugaona brzina kompakt diska	22
2.3.3 Linearni harmonički oscilator	23
2.3.4 Rezultantna sila u dvodimenzionom prostoru	25
3 Elektrodinamika	29
3.1 Fluks elektrostatičkog polja	29
3.1.1 Linije sila električnog polja	29
3.1.2 Fluks vektorskog polja	30
3.1.3 Demonstracija	31
3.2 Linije sila električnog polja za sisteme tačkastih nanelektrisanja	32
3.2.1 Linije sila i ekvipotencijalne linije	32
3.2.2 Vizualizacija ekvipotencijalnih linija i linija sila	34
4 Specijalna teorija relativnosti	37
4.1 Geometrija STR	38
4.1.1 Lorencove transformacije i relativna istovremenost događaja	38
4.1.2 Posledice Lorencovih transformacija	41
4.2 Vizualizacija relativističkih efekata u mehanici	42
4.2.1 Prostor Minikovskog	42
4.2.2 Paradoks automobila i garaže	43
4.2.3 Relativnost istovremenosti	46

5 Zaključak	47
Prilog	51
A Internet adrese korišćenih prezentacija	51
Literatura	53

1

Uvod

Fizika je osnovna (prirodna) nauka i kao takva ona u sebi objedinjuje eksperimentalna i teorijska iskustva o svetu koji nas okružuje. Iako poseduje i teorijski i eksperimentalni aspekt, bez obzira na to da li su praćeni odgovarajućim setom laboratorijskih vežbi ili ne, praktično svi kursevi fizike su u suštini teorijski [Telegdi (1990)]. To se, naravno, reflektuje u nastavi fizike. Fizički principi i zakoni se formulišu precizno, jezikom matematike [Fajnman (1999)], a to od učenika zahteva određeni nivo apsракcije. Upravo tu do značaja dolaze eksperimenti kao sastavni deo nastave fizike. Naime, dobro je poznato da uz eksperimente deca lako razumeju, prihvataju i uče, naročito ako i oni sami učestvuju u njihovom izvođenju [Smiljanić-Grujić, M. (2007); Tomašev, Ž. (2010)]. Takođe, eksperimenti su obično osmišljeni tako da se, na osnovu njih, iz posmatrane pojave izdvajaju suštinske odlike.

Prema aktuelnim teorijskim modelima posvećenim problemima nastave fizike, razlikuje se nekoliko vrsta eksperimenata koji se koriste u nastavi [Smiljanić-Grujić, M. (2007)]:

Demonstracioni eksperimenti

Demonstracione oglede obično izvodi nastavnik, prilikom izlaganja novog gradiva, a posmatraju ih svi učenici u odeljenju. Pri tome, posebnu ulogu imaju (klasični) ogledi poznatih naučnika koji na suštinski način objašnjavaju ili ilustruju neku fizičku pojavu.

Frontalne laboratorijske vežbe

U ovu grupu spadaju eksperimenti koji su osmišljeni i realizovani tako da učenici sami dolaze do određenih zaključaka. Frontalne vežbe se obično sastoje iz tri dela: uvodnog izlaganja nastavnika, izvođenja eksperimenta i naknadne provere rezultata i diskusije.

Fizički praktikum

Konačno, fizički praktikum je viši stepen eksperimentalnih vežbi koje traju ceo čas tako da se učenici mogu detaljno posvetiti rešavanju zadanih problema. Ove vežbe se obično izvode na kraju polugodišta i kroz njih se rekapitulira prethodno gradivo. Takođe, na osnovu njih, nastavnik može da proceni u kojoj meri su učenici sposobljeni za samostalno rešavanje praktičnih problema. Bitno je naglasiti i da se prilikom izvođenja vežbi iz praktikuma koriste precizniji instrumenti kao i da vežbama prethode detaljnija uputstva koja učenicima daje nastavnik.

The screenshot shows the homepage of the Wolfram Demonstration Project. At the top, there's a section titled "FEATURED DEMONSTRATIONS" with a grid of 15 thumbnail images representing various interactive demonstrations. To the right of this grid is a link "View latest ». Below this is a section titled "BROWSE TOPICS" with a grid of 9 category icons: Mathematics, Business & Social Systems, Creative Arts, Computation, Systems, Models & Methods, Kids & Fun, Physical Sciences, Engineering & Technology, and Life Sciences. Each icon has a brief description underneath. To the right of the browse topics is a section titled "FEATURED CONTRIBUTORS" featuring three profiles: Herbert W. Franke (Egling, Germany), Karl Scherer (Auckland, New Zealand), and Marc Brodie (Pittsburgh, Pennsylvania, USA). Each profile includes a small photo of the contributor and their name, location, and the number of demonstrations they have contributed. At the bottom right of the page, there's a call-to-action: "Join the Demonstrations Project Share your work with the world. Getting started is simple."

Slika 1.1: Početna stranica Wolfram Demonstration Project-a.

Razvoj savremenih računarskih tehnologija je omogućio uvođenje jednog novog pomoćnog alata u nastavi fizike. To su multimedijalni uređaji na kojim se vrše različite simulacije ili demonstracije fizičkih fenomena. Multimedijalni uređaji su često značajno pristupačniji od opremljene laboratorije i mogu lakše da zainteresuju učenike naviknute na moderne tehnologije. Takođe, pomoću računarskih simulacija/demonstracija je moguće dočarati fenomene koji se ne mogu realizovati u laboratoriji (jedan od primera je kruženje planeta oko Sunca, diskutovan u odeljku 2.2.4). Ipak, treba imati u vidu da nije poželjno potpuno isključiti neki vid eksperimenta u nastavi, jer eksperiment učenika dovodi u direktnu vezu sa fenomenom koji se izučava.

Danas postoji određen broj besplatnih računarskih paketa za simuliranje/demonstriranje fizičkih procesa. Jedna od poznatijih je internet adresa Univerziteta u Koloradu – [PhET](#), na kojoj se mogu naći i simulacije prilagođene korisnicima iz [Srbije](#). Takođe, veliki broj video snimaka eksperimenata i njihovih detaljnih objašnjenja se može pogledati na internet stranici [YouTube](#). U nastavku ćemo predstaviti demonstracije napisane u CDF formatu ([Computable Document format](#)) koje pokreće Wolfram-ov [CDF Player](#). Postoji više razloga za taj izbor. Pre svega, pomenuti softver je lako dostupan svima. Dalje, postoji veliki broj gotovih simulacija koje ilustruju fenomene iz različitih oblasti fizike, matematike i drugih nauka. Konačno, moguće je preuzeti čitave kodove čime se zainteresovanim učenicima/studentima omogućava dalji samostalni rad. On obično započinje modifikacijom postojećih kodova i nastavlja se samostalnim projektima. Za samostalno programiranje je neophodno imati novije verzije programskog jezika

Physical Sciences

- [Astronomy](#)
- [Chemistry](#)
- [Earth Science](#)
- [History of Science](#)
- [Materials Science](#)
- **Physics**
 - » [High School Physics](#)
 - » [Acoustics](#)
 - » [Astrophysics](#)
 - » [College Physics](#)
 - » [Electromagnetism](#)
 - » [Fluid Mechanics](#)
 - » [Gravitation Theory](#)
 - » [Mechanics](#)
 - » [Optics](#)
 - » [Particle Physics](#)
 - » [Quantum Physics](#)
 - » [Statistical Mechanics](#)
 - » [Waves](#)

Slika 1.2: Katalog oblasti koje se vode pod fizičkim naukama.

MATHEMATICA.

Kao što je navedeno u uvodu, u nastavku će biti predstavljene računarske demonstracije napisane u Wolfram-ovom CDF formatu ([Computable Document format](#)). Da bi se pokrenule simulacije iz [Wolfram Demonstration Project-a \(WDP\)](#), neophodno je da se instalira CDF-player. Odgovarajuća instalacija se može besplatno dobiti na [ovoј adresi](#). Nakon instaliranja CDF player-a, moguće je pristupiti hiljadama gotovih demonstracija iz različitih oblasti nauke, umetnosti, tehnologije itd. Treba naglasiti da CDF player radi na svim standardnim platformama (Windows, Mac ili Linux), pa ga je moguće, bez većih problema, koristiti sa tzv. pametnom tablom. Početni meni WDP-a je prikazan na Sl. 1.1, odakle se mogu videti osnovne oblasti iz kojih postoji gotove simulacije/demonstracije.

Iz samog naziva paketa se može naslutiti da su u pitanju računarski programi koji pretenduju da dopune demonstracione eksperimente. Naravno, računarske simulacije imaju tu prednost da, praktično istovremeno, učenicima mogu približiti fenomene koji se odvijaju na različitim prostorno-vremenskim skalamama (od atomskih, pa sve do astronomskih pojava). Spisak oblasti iz fizičkih nauka, za koje postoji računarski kodovi, prikazan je na Sl. 1.2. Lista uključuje astronomiju, hemiju, nauku o materijalima, kao i standardne oblasti klasične i moderne fizike poput mehanike, ektromagnetizma, optike, astrofizike, teorije gravitacije, statističke i kvantne fizike. Posebno je zanimljivo da postoji čitav spisak demonstracija posvećen srednjoškolskoj fizici. U sledećih nekoliko odjeljaka će biti predstavljene demonstracije iz WDP-a koje ilustruju fenomene iz klasične mehanike čestica, elektrodinamike i specijalne teorije rela-

tivnosti koji se izučavaju u gimnazijama. Poželjno je napomenuti još jednu opciju koju pruža rad sa CDF player-om. Naime, sve simulacije koje sadrže prikaze trodimenzionalih tela je moguće posmatrati iz različitih uglova. Preciznije, u toku samog izvođenja simulacije je moguće menjati ugao iz kojeg se simulacija posmatra, što svakako doprinosi povećanju utiska realnosti simulacije.

Posebno je interesantno da svi kodovi pre objavlјivanja na internet stranici [WDP-a](#) prolaze recenziju u toku koje priznati stručnjaci iz odgovarajućih polja testiraju kvalitet, jasnoću i preciznost (videti [ovde](#)).

Ostatak teksta je posvećen pokušaju da se, uz pomoć WDP demonstracija, poboljša kvalitet izlaganja određenih nastavnih tema iz srednjoškolskog gradiva fizike. Glava [2](#) sadrži nekoliko važnih problema iz mehanike čestica (zakoni održanja i linearni harmonijski oscilator), kao i nekoliko dodatnih interesantnih problema. U Glavi [3](#) su prezentovane demonstracije koje se bave vizualizacijom pojmove iz elektrodinamike: linijama sila elektrostatičkog polja i ekvipotencijalnim linijama dok su neki aspekti specijalne teorije relativnosti, uključujući tu geometrijski prikaz prostor-vremena i izabrane standardne paradoxse, izloženi u Glavi [4](#). Svaku demonstraciju koja je predstavljena prati odgovarajući teorijski uvod koji sadrži gradivo koje se predaje učenicima u gimnazijama.

2

Klasična mehanika

2.1 Zakoni održanja u klasičnoj mehanici

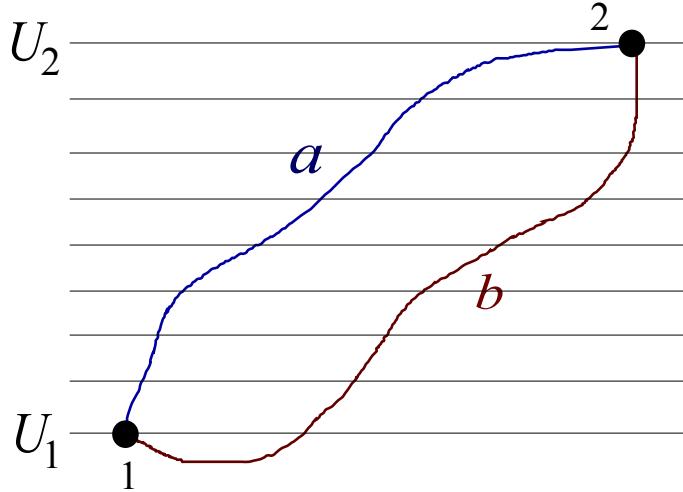
Prema saremnenim shvatanjima fizike zakoni održanja su posledica simetrija fizičkih sistema [Hübsch T. (2011)]. Za razmatranja u okvirima klasične (ne-kvantne i ne-relativističke) mehanike, najvažnija su tri velika zakona održanja. To su zakon održanja mehaničke energije, zakon održanja impulsa i zakon održanja momenta impulsa. Oni se dovode u vezu sa samim osobinama prostora i vremena dajući time teorijsku potporu dobro poznatoj činjenici da se fizički eksperimenti mogu ponavljati nezavisno od izbora početnog trenutka merenja ili orientacije aparature u laboratoriji. Iako je ovde ispravnost zakona održanja demonstrirana oslanjanjem na Njutnove zakone kretanja, njihovo važenje prevazilazi okvire Njutnove mehanike. Drugim rečima, zakoni održanja energije (ZOE), impulsa (ZOI) i momenta impulsa (ZOMI) važe, u odgovarajućoj formi, i na nivou kvantne i relativističke fizike.

Interesantno je da, iako su bili dobro eksperimentalno i teorijski utemeljeni, zakoni održanja ranije nisu smatrani fundamentalnom osnovom fizike. Poznat je primer spektra β raspada čiji se eksperimentalni podaci nisu mogli uklopiti u zakon održanja energije. Nils Bor je pokušao da protumači ovo neslaganje hipotezom da ZOE ne važi u svakom pojedinačnom procesu već samo statistički [Hübsch T. (2011)]. Nedugo zatim, Pauli je sugerisao da se neslaganje između ZOE i izmerenih energija čestica u raspodu može eliminisati pretpostavkom o trećoj čestici koja u reakciji odnosi deo energije. Ta čestica je kasnije postala poznata kao neutrino (iako je Pauli predložio naziv neutron). Paulijevo pismo u kojem iznosi hipotezu o neutrinu se može pogledati [ovde](#).

Radi preglednosti, izvođenja koja slede su data za najmanji mogući broj čestica u sistemu ("jednočestični" i dvočestični sistemi). Naravno, razmatranja je moguće proširiti i na proizvoljan broj čestica pod različitim okolnostima [Milić, B. (1997)].

2.1.1 Zakon održanja energije

Da bi se precizno formulisao zakon održanja mehaničke energije, potrebno je prvo uvesti pojam konzervativnih, odnosno potencijalnih, sila. Konzervativne sile su one kod kojih izvršeni rad (A), pri prelasku materijalne tačke iz položaja 1 u položaj 2, ne zavisi od oblika trajektorije. Primeri konzervativnih sila su Njutnova gravitaciona sila, Kulonova sila ili elestrična sila harmonijskog oscilatora [Čaluković N. (2011); Žižić B. (1989)].



Slika 2.1: Nazavisnost izvršenog rada od oblika trajektorije u polju konzervativne sile (prikazane su dve trajektorije *a* i *b*). Horizontalne linije predstavljaju ekvipotencijalne površi, tako da je rad jednak razlici potencijala u tačkama 2 i 1

Budući da rad sile zavisi samo od krajnjih tačaka trajektorije, moguće je uvesti novu matematičku funkciju čija razlika u krajnjim tačkama trajektorije ($\Delta U = U_2 - U_1$) meri izvršeni rad $\Delta A = A_2 - A_1$ [videti Sl. 2.1]:

$$\Delta A = -\Delta U. \quad (2.1)$$

Veličina U se naziva potencijalnom energijom.

Ukoliko se posmatra rad materijalne tačke, koja se kreće u polju konzervativne sile \mathbf{F} , izvršen na elementarnom pomeranju $\Delta \mathbf{r}$, jednačina (2.1) se može zapisati i kao

$$\Delta A = \mathbf{F} \cdot \Delta \mathbf{r} = -\Delta U. \quad (2.2)$$

Sa druge strane, kinetička energija materijalne tačke mase m , koja se kreće brzinom \mathbf{v} , data je sa

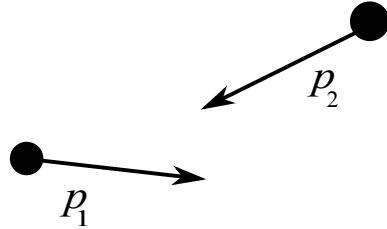
$$T(\mathbf{p}) = \frac{m\mathbf{v}^2}{2} = \frac{\mathbf{p}^2}{2m}, \quad (2.3)$$

gde je

$$\mathbf{p} = mv \quad (2.4)$$

impuls čestice. Ako posmatramo malu promenu impulsa čestice, $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}$ (uz $|\Delta \mathbf{p}| \ll |\mathbf{p}|$), kinetička energija čestice sa novim impulsom je

$$\begin{aligned} T(\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) &= \frac{(\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) \cdot (\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p})}{2m} \\ &\approx \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \Delta \mathbf{p}. \end{aligned} \quad (2.5)$$



Slika 2.2: Izolovani sistem od dve čestice impulsa \mathbf{p}_1 i \mathbf{p}_2 koje interaguju silom \mathbf{F} .

Ako sada iskoristimo drugi Njutnov zakon u obliku

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \mathbf{F} \quad (2.6)$$

indukovana promena kinetičke energije se može zapisati kao

$$\Delta T = \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \Delta \mathbf{p} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \Delta t. \quad (2.7)$$

Zakon održanja energije se sada može dobiti kombinovanjem jednačina (2.2) i (2.7). Pošto je za elementarno pomeranje $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{v} \Delta t$, nalazimo

$$\frac{\Delta(T + U)}{\Delta t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (2.8)$$

Odnosno,

$$T + U = \text{const.} \quad (2.9)$$

Dakle, ako se čestica kreće u polju konzervativne sile, ukupna mehanička energija $E = T + U$ se ne menja sa vremenom. Do istog zaključka se dolazi i ako se umesto jedne čestice posmatra sistem od N čestica koje međusobno interaguju konzervativnim silama [Milić, B. (1997)].

Inače, ZOE se tumači kao posledica simetrije fizičkih sistema u odnosu na vremenske translacije. Drugim rečima, nezavisnost izbora početnog trenutka za opis neke fizičke pojave, odnosno homogenost toka vremena, za posledicu ima ZOE [Milić, B. (1997)].

2.1.2 Zakon održanja impuls-a

Da bismo ilustrovali ZOI, posmatrajmo izolovani sistem koji se sastoji od dve čestice koje međusobno interaguju silom \mathbf{F} [videti Sl. 2.2]. Njutnove jednačine kretanja (2.6) za ovaj sistem glase

$$\frac{\Delta \mathbf{p}_1}{\Delta t} = \mathbf{F}_{12}, \quad \frac{\Delta \mathbf{p}_2}{\Delta t} = \mathbf{F}_{21}, \quad (2.10)$$

gde je \mathbf{F}_{12} sila na prvu česticu (koja potiče od druge čestice) a \mathbf{F}_{21} sila na drugu česticu (koja potiče od prve čestice). Iz jednačine (2.10) je

$$\frac{\Delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)}{\Delta t} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}. \quad (2.11)$$

Međutim, na osnovu trećeg Njutnovog zakona (tzv. zakon akcije i reakcije) je $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$, tako da (2.11) postaje

$$\frac{\Delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)}{\Delta t} = 0, \quad (2.12)$$

odnosno

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \text{const.} \quad (2.13)$$

Dakle, ukupni impuls izolovanog dvočestičnog sistema se održava. Pošto analogno izvođenje važi i za izolovani sistem od N čestica [Žižić B. (1989)], ako sa \mathbf{P} označimo ukupni impuls izolovanog sistema, možemo pisati

$$\mathbf{P} = \text{const.} \quad (2.14)$$

Znajući da je impuls vektorska veličina, vidimo da je jednačina (2.14) ekvivalentna sistemu od tri jednačine za projekcije vektora ukuopnog impulsa na ose Dekartovog koordinatnog sistema:

$$P_x = \text{const}, \quad P_y = \text{const}, \quad P_z = \text{const.} \quad (2.15)$$

U zadacima se često razmatraju problemi u kojima se materijalna tela kreću duž jednog pravca, ili se kretanje čitavog sistema odvija u ravni (recimo, kod razmatranja kretanja tela u polju cenzralnih sila kakve su Njutnova gravitaciona sila ili Kulonova sila). Tada se ZOI svodi na prvu, odnosno prve dve relacije iz (2.15).

Prilikom rešavanja računskih problema, često se sreće situacija u kojoj se materijalne tačke kreću duž jednog pravca (recimo, duž x -ose). Ako indeksima 1 i 2 označimo prvo i drugo telo u sudaru, tada se ZOI izražen u (2.15) pomoću ukuopnog impulsa, svodi na

$$p_1^i + p_2^i = p_1^f + p_2^f, \quad (2.16)$$

gde smo sa $p_1^i + p_2^i$ označili x -komponentu ukuopnog impulsa dva tela u nekom trenutku pre sudara, dok $p_1^f + p_2^f$ označava ukuopnu x -komponentu impulsa dva tela posle sudara.

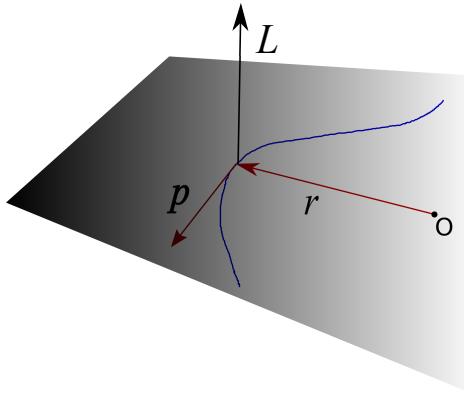
Za razliku od ZOE, koji je posledica homogenosti toka vremena, ZOI se javlja zbog toga što je prostor homogen. Odnosno, ZOI je posledica invarijantnosti fizičkih sistema u odnosu na translacije u prostoru [Milić, B. (1997)].

2.1.3 Zakon održanja momenta impulsa

Sledeća veličina, čiji zakon održanja diskutujemo, je moment impulsa. U slučaju materijalne čestice koja se kreće tako da ima položaj \mathbf{r} i impuls \mathbf{p} , moment impulsa je definisan kao

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (2.17)$$

Dakle, moment impulsa je vektor koji ima pravac normale na ravan koju čine radijus-vektor čestice i njen impuls (tj. brzina) a intenzitet mu je dat sa $|\mathbf{L}| = |\mathbf{r}||\mathbf{p}| \sin \theta$, pri čemu je θ ugao između vektora \mathbf{r} i \mathbf{p} (intenzitet $|\mathbf{L}|$ je očigledno jednak površini paralelograma konstruisanog nad vektorima \mathbf{r} i \mathbf{p}). Smer vektora \mathbf{L} je određen pravilom desnog zavrtnja [Žižić B. (1989)].



Slika 2.3: Ako se, prilikom kretanja materijalne tačke, održava moment impulsa, kretanje se odvija u ravni

Pošto moment impulsa zavisi od dva vektora (\mathbf{r} i \mathbf{p}), promena stanja čestice opisana sa $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ i $\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}$, uz $|\Delta\mathbf{r}| \ll |\mathbf{r}|$, $|\Delta\mathbf{p}| \ll |\mathbf{p}|$, indukuje promenu momenta impulsa $\mathbf{L} \rightarrow \mathbf{L}'$, gde je

$$\begin{aligned}\mathbf{L}' &= (\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) \times (\mathbf{p} + \Delta\mathbf{p}) \\ &\approx \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \Delta\mathbf{r} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \Delta\mathbf{p}\end{aligned}\tag{2.18}$$

pri čemu smo zanemarili član $\propto |\Delta\mathbf{p}||\Delta\mathbf{r}|$. Međutim, na osnovu definicije impulsa (2.4) i činjenice da je za elementarno pomeranje $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{v}\Delta t$, imamo

$$\Delta\mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\Delta t \mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0,\tag{2.19}$$

tako da je $\mathbf{L}' = \mathbf{L} + \Delta\mathbf{L}$, gde je

$$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \Delta\mathbf{p}.\tag{2.20}$$

Dakle, mala promena momenta impulsa zavisi samo od male promene impulsa (tj. brzine) čestice.

Usko povezan sa momentom impulsa je moment sile, definisan sa

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \frac{\Delta\mathbf{p}}{\Delta t}\tag{2.21}$$

pri čemu smo, u drugoj jednakosti, iskoristili Njutnov zakon kretanja (2.6). Imajući u vidu (2.20), jednačinu (2.21) možemo zapisati tako da veza između momenta sile i momenta impulsa bude očigledna

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \frac{\Delta\mathbf{L}}{\Delta t}.\tag{2.22}$$

Upravo nam (2.22) omogućava da diskutujemo ZOMI. Naime, ako je konfiguracija sila koje deluju na materijalnu česticu takva da je $\mathbf{M} = \mathbf{0}$, važiće ZOMI

$$\mathbf{L} = \text{const.}\tag{2.23}$$

Od posebnog značaja su situacije u kojima se materijalna čestica kreće u polju tzv. centralne sile. Ako pretpostavimo da je koordinatni početak smešten u izvor sile, centralna sila je uvek usmerena duž pravca radijus vektora čestice ($\mathbf{F} \propto \mathbf{r}$). Tada je očigledno $\mathbf{M} = \mathbf{0}$ i moment impulsa čestice se održava. Primeri centralnih sila su Njutnova gravitaciona i Kulonova sila.

Kao što smo primetili na početku ovog odeljka, pravac vektora \mathbf{L} je dat normalom na ravan koju sačinjavaju vektori \mathbf{r} i \mathbf{p} [videti Sl. 2.3]. Ukoliko važi ZOMI, pravac vektora \mathbf{L} se ne menja tako da vektori \mathbf{r} i \mathbf{p} sve vreme kretanja čestice leže u istoj ravni. Dakle, ZOMI za posledicu ima ograničavanje kretanja čestice na ravan što znatno olakšava rešavanje velikog broja praktičnih problema.

Konačno, slično kao ZOI i ZOE, ZOMI se danas tumači kao posledica simetrije fizičkog sistema. Ukoliko je prostor izotropan, odnosno, ako je fizički sistem invarijantan u odnosu na rotacije, moment impulsa je veličina koja se održava [Milić, B. (1997)].

2.2 Računarske demonstracije zakona održanja

Kao što je već napomenuto u uvodnom delu teksta, računarske demonstracije/simulacije postaju sve važniji deo savremene nastave fizike. Ovaj vid demonstracije fizičkih procesa je naročito pogodan ako se u učionici nalazi tzv. pametna tabla. Tada je moguće prikazivati određenu fizičku pojavu svim đacima/studentima u učionici.

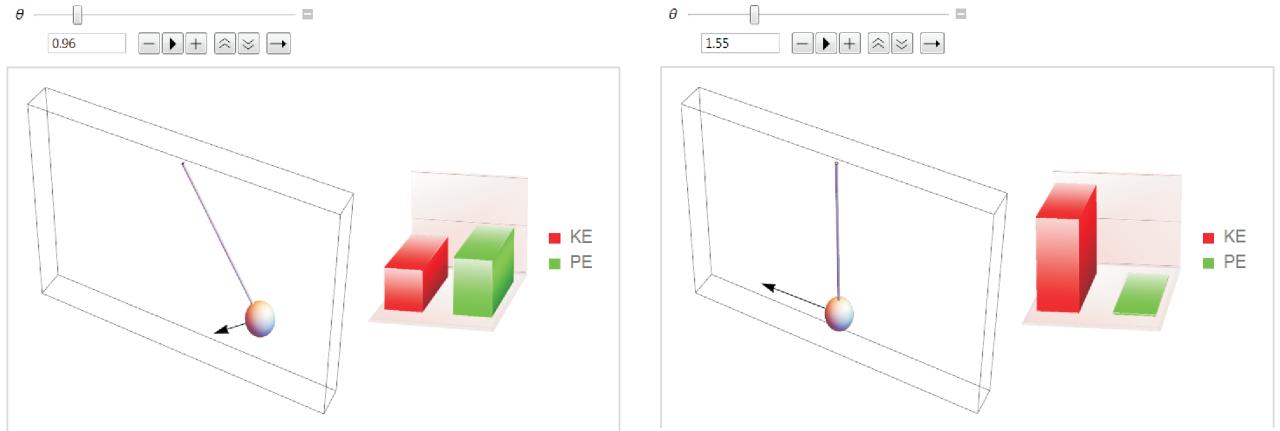
2.2.1 Wolfram Demonstrations Project

U nastavku ćemo predstaviti demonstracije napisane u CDF formatu ([Computable Document format](#)) koje pokreće Wolfram-ov [CDF Player](#). Postoji više razloga za taj izbor. Pre svega, pomenuti softver je lako dostupan svima. Dalje, postoji veliki broj gotovih simulacija koje ilustruju fenomene iz različitih oblasti fizike, matematike i drugih nauka. Konačno, moguće je preuzeti čitave kodove čime se zainteresovanim učenicima/studentima omogućava dalji samostalni rad. On obično započinje modifikacijom postojećih kodova i nastavlja se samostalnim projektima. Za samostalno programiranje je neophodno imati programski jezik [Mathematica](#).

Da bi se pokrenule simulacije iz [Wolfram Demonstration Project-a](#), neophodno je da se instalira CDF-player. Odgovarajuća instalacija se može besplatno dobiti na [ovoj adresi](#). Nakon instaliranja CDF player-a, moguće je pristupiti hiljadama gotovih demonstracija iz različitih oblasti nauke, umetnosti, tehnologije itd.

2.2.2 Demonstracija ZOE

Za ilustraciju ZOE u mehanici je izabrana demonstracija u kojoj se simulira ponašanje matematičkog klatna i grafički se predstavljaju iznosi potencijalne i kinetičke energije. Simulacija se može preuzeti sa [ove adresе](#). Kada se datoteka sa simulacijom pokrene pomoću CDF player-a, otvaraju se dva panela. Veći panel je podeljen na dva dela. Na levom se nalazi prikaz vertikalnog klatna koje se kreće u polju Zemljine teže, a na desom je dat grafički prikaz trenutne potencijalne i kinetičke energije: crvenom bojom je predstavljena kinetička a zelenom potencijalna energija klatna klatna [Videti Sl. 2.4]. Na kugli klatna je nacrtana strelica koja predstavlja brzinu kugle. Njena orijentacija i dužina se menjaju sa kretanjem klatna tako da u svakom položaju strelica verno predstavlja pravac i intenzitet vektora brzine kugle.



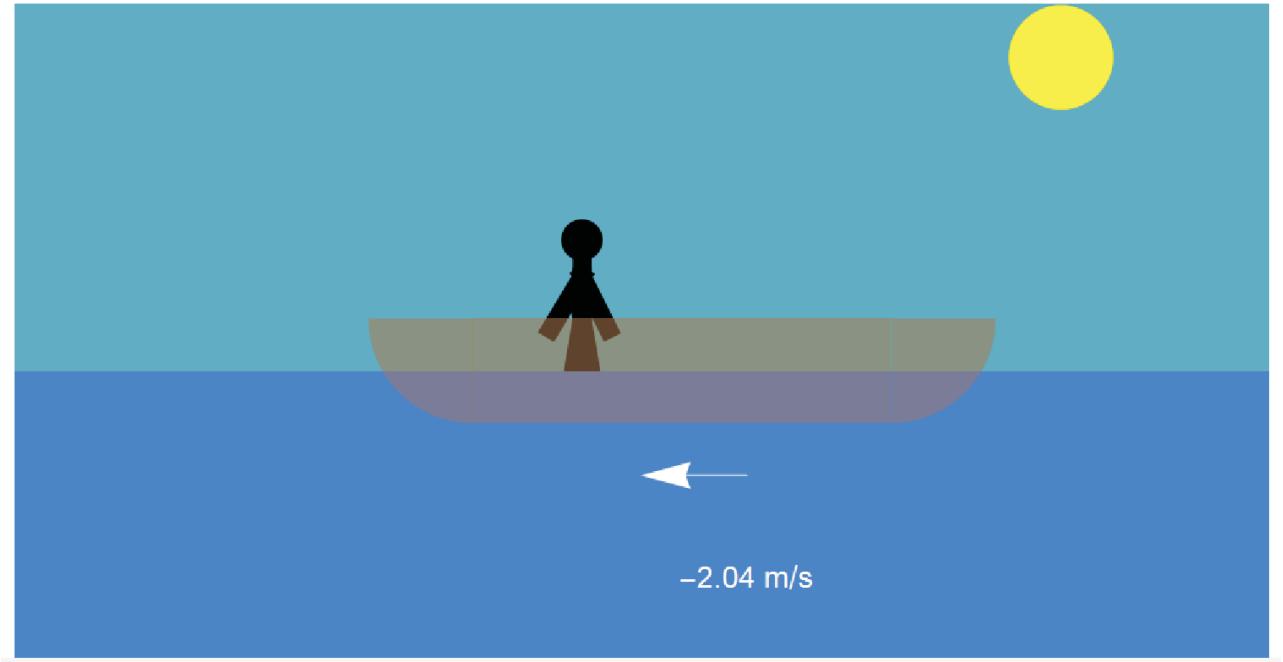
Slika 2.4: Prikaz simulacije matematičkog klatna za dve vrednosti ugla otklona.



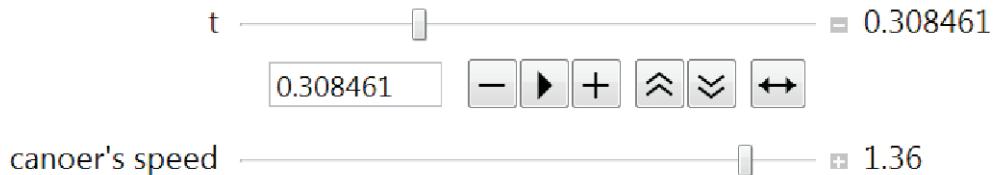
Slika 2.5: Kontrolni panel za demonstraciju kinetičke i potencijalne energije matematičkog klatna.

Manji panel sadrži komande pomoću kojih se kontroliše demonstracija [Videti Sl. 2.5]. Osnovna promenjiva, čijom promenom se opisuje kretanje klatna, je ugao otklona θ . On se zadaje na intervalu $\theta \in [0, 2\pi]$. Pomoću komandi $[+]$ i $[-]$ se povećava i smanjuje vrednost ugla otklona, sa $[>]$ se pokreće simulacija dok naredbe $[\approx]$ i $[\asymp]$ ubrzavaju i usporavaju simulaciju. Konačno, komanda $[→]$ menja orijentaciju strelice [strelica se može orijentisati i tako da bude usmerena suprotno od vektora brzine kugle]. Treba obratiti pažnju da kod računa kinetičku i potencijalnu energiju, kao i brzinu kugle, u funkciji ugla θ , a ne vremena! Na Sl. 2.4 su prikazana dva reprezentativna položaja klatna. U prvom je vrednost ugla θ mala i to odgovara trenutku bliskom početku kretanja klatna iz horizontalnog položaja [njemu očigledno odgovara vrednost $\theta = 0$]. Zbog toga je dužina strelice koja reprezentuje brzinu kugle relativno mala a vrednost potencijalne energije je veća od vrednosti kinetičke energije [položaju $\theta = 0$ odgovara maksimalna potencijalna energija jer u toj tački klatno miruje]. Druga ilustracija pokazuje klatno u položaju $\theta \approx \pi/2$, tako da je u njemu kinetička energija (gotovo) maksimalna a potencijalna energija (praktično) iščezava.

Poželjno je napomenuti još jednu opciju koju pruža rad sa CDF player-om. Naime, sve simulacije koje sadrže prikaze trodimenzionalnih tela je moguće posmatrati iz različitih uglova. Preciznije, u toku samog izvođenja simulacije je moguće menjati ugao iz kojeg se simulacija posmatra, što svakako doprinosi povećanju utiska realnosti simulacije.



Slika 2.6: Prikaz demonstracije ZOI sa putnikom u čamcu.



Slika 2.7: Kontrolni panel za demonstraciju ZOI.

2.2.3 Demonstracija ZOI

Zakon održanja impulsa ćemo ilustrovati demonstracijom koja prikazuje kretanje čoveka u čamcu i koja se može preuzeti [ovde](#).

U okviru pomenute demonstracije se prikazuje sledeći (idealizovan) problem. Zamislimo čoveka od 60 kg koji se nalazi kod krme čamca čija je masa 40 kg tako da ceo sistem miruje u odnosu na površinu vode. Prepostavljamo da se sila trenja između čamca i vode može zanemariti. Čovek zatim počinje da se kreće brzinom v prema pramcu čamca (koordinatni sistem ćemo orijentisati tako da se ovaj pravac poklapa sa x -osom). Kako je u početnom trenutku sistem mirovao, čamac počinje da se kreće u suprotnom smeru brzinom koja se može odrediti iz ZOI u obliku (2.16). Neka je $m_1 = 60 \text{ kg}$ masa čoveka a $m_2 = 40 \text{ kg}$ masa čamca. Pošto u početnom trenutku i čovek i čamac miruju [$v_1^i = v_2^i = 0$], iz (2.16) nalazimo brzinu čamca

$$v_2^f = -v_1^f \frac{m_1}{m_2}. \quad (2.24)$$

Znak – govori da se čamac kreće u suprotnom smeru od smera kretanja čoveka. Bitna karakteristika opisanog kretanja je da se centar masa sistema ne pomera u toku kretanja čoveka i čamca. Naime, centar masa pomenutog sistema je definisan sa [Čaluković N. (2011); Žižić B. (1989)]

$$X_c = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \quad (2.25)$$

jer smo koordinatni sistem izabrali tako da se ketanje odvija duž x -ose. Pošto je

$$m_1 \frac{\Delta x_1}{\Delta t} = p_1^f, \quad m_2 \frac{\Delta x_2}{\Delta t} = p_2^f, \quad (2.26)$$

kombinovanjem sa ZOI iz (2.16), nalazimo

$$(m_1 + m_2) \frac{\Delta X_c}{\Delta t} = p_1^f + p_2^f = p_1^i + p_2^i = 0. \quad (2.27)$$

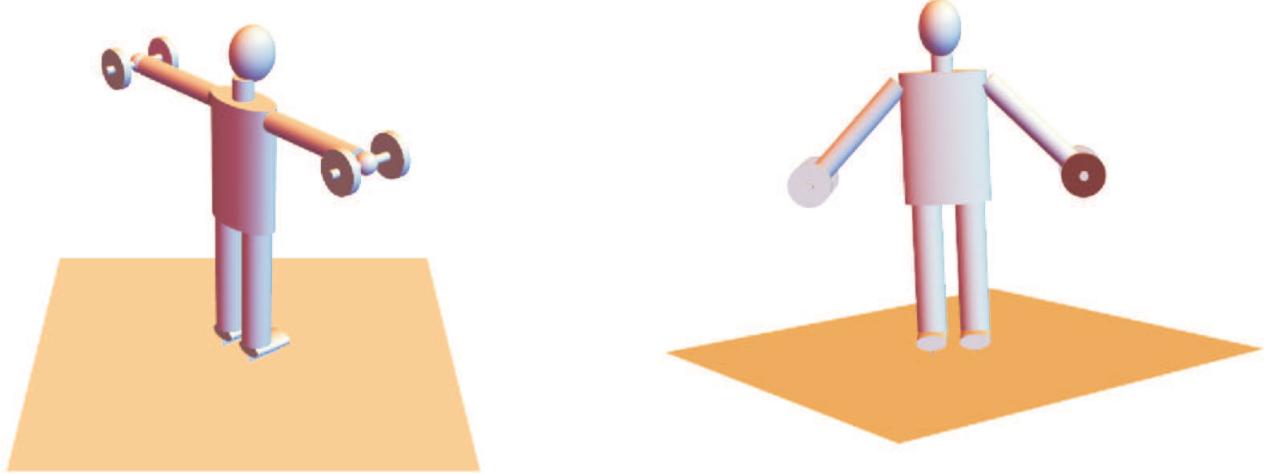
Kada se pomenuta simulacija pokrene uz pomoć CDF player-a, na ekranu se dobija slika poput one prikazane na Sl. 2.6. Prikazan je čamac, zajedno sa čovekom koji se kreće u njemu, a u donjem delu panoa je ispisana x -komponenta brzine čamca. Uz glavni panel ide prozor sa kontrolama simulacije, prikazan na Sl. 2.7. Komandni dugmići imaju sličan smisao kao u prethodno opisanoj simulaciji. U ovom slučaju je osnovna nezavisno promenjiva vreme t , odnosno, simulacija generiše dinamički prikaz sistema čovek + čamac. Komande $[+]$ i $[-]$ menjaju vrednost nezavisno promenjive t , \blacktriangleright pokreće simulaciju a naredbe $\lceil \rceil$ i $\lfloor \rfloor$ ubrzavaju i usporavaju simulaciju. Konačno, poslednja komanda u nizu \rightarrow definiše smer kretanja čoveka u čamcu. U ovoj simulaciji postoji još jedan nezavistan parametar koji se može zadati. To je brzina čoveka u odnosu na čamac [canoer's speed]. Veza između brzine čoveka i brzine čamca je određena sa (2.24). Lako se proverava da se u slučaju kada je brzina čoveka $v_1 = 1.36\text{m/s}$ za brzinu čamca dobija $v_2 = 204\text{m/s}$, što je vrednost prikazana na Sl. 2.6.

Zanimljivo je da se isti fizički problem diskutuje u udžbeniku [Čaluković N. (2011)] na strani 272. Zbog toga ova demonstracija može lako i efektno da se uklopi u nastavnu jedinicu *Zakon održanja impulsa*.

2.2.4 Rad sa darovitim učenicima – demonstracija ZOMI

Za kraj je ostavljena diskusija vezana za ZOMI. Budući da se operacija vekorskog proizvoda ne predaje učenicima prvog razreda gimnazije, primer ZOMI je ostavljen za rad sa naprednim učenicima koji žele da se upoznaju sa matematičkim aparatom neophodnim za precizno formulisane zakona održanja momenta imulsa. Simulacija koju predstavljamo se može preuzeti [ovde](#).

Posmatrajmo uprošćenu situaciju u kojoj materijalna tačka mase m rotira oko fiksne ose. Ako koordinatni sistem postavimo tako da se osa rotacije uvek poklapa sa z -osom, pri čemu se materijalna tačka koja rotira konstantno nalazi u xy -ravni na rastojanju r od ose (tj., materijalna tačka opisuje kružnicu poluprečnika $r = \sqrt{x^2 + y^2}$), ugao između vektora \mathbf{r} i \mathbf{p} je uvek 90° . Zbog toga je intenzitet njihovog vektorskog proizvoda, koji je jednak površini paralelograma konstruisanog nad \mathbf{r} i \mathbf{p} jednostavno $|\mathbf{r}||\mathbf{p}|$. Pošto je vektor \mathbf{L} usmeren duž ose



Slika 2.8: Klizač sa tegovima u rukama koji ilustruje ZOMI. Prikazana su dva različita položaja ruku i posmatranje rotacije se vrši iz različitih uglova.

rotacije, jedino će njegova z -komponenta biti različita od nule. Dakle, $L_z = |\mathbf{r}||\mathbf{p}|$. Međutim, pošto telo koje rotira opisuje kružnicu, imamo

$$|\mathbf{p}| = mv = mr\omega, \quad (2.28)$$

gde je ω kružna frekvencija kretanja materijalne tačke. Prema tome, jednačine koje opisuju ZOI [(2.17) i (2.23)] se u ovom slučaju svode na [Čaluković N. (2011)]

$$L_z = mr^2\omega \equiv I\omega = \text{const} \quad (2.29)$$

gde smo uveli moment inercije materijalne tačke mase m koja kruži oko ose rotacije na rastojanju r sa kružnom frekvencijom ω

$$I = mr^2. \quad (2.30)$$

Menjanjem poluprečnika kruga ZOMI se sada može izraziti pomoću odnosa poluprečnika trajektorije i kružne frekvencije u dva različita trenutka:

$$(r_i)^2\omega_i = (r_f)^2\omega_f, \quad \text{ili} \quad \left(\frac{r_f}{r_i}\right)^2 = \frac{\omega_i}{\omega_f}. \quad (2.31)$$

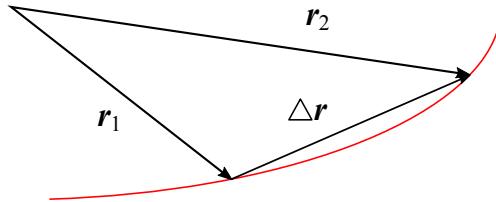
Princip fizičkog fenomena koji se diskutuje u demonstraciji ZOMI se najlakše objašnjava upravo jednačinama iz (2.31).

U Wolframovoј demonstraciji ZOMI se prikazuje na primeru klizača koji širi i skuplja ruke a modelovan je prema fizičkom modelu opisanom u prethodnom paragrafu. Otvaranjem demonstracije u CDF player-u, dobija se ekran na kome je prikazan klizač sa raširenim rukama koji može da se okreće oko fiksne vertikalne ose [videti Sl. 2.8]. Klizač je predstavljen sa tegovima u rukama kako bi se naglasilo da se dinamika njegove rotacije posmatra kroz model materijalne tačke koja rotira po kružnici odgovarajućeg poluprečnika. Kontrolni panel demonstracije je prikazan na Sl. 2.9 i sastoji se od dva reda komandi. Komande iz gornjeg reda (▶,

i služe za pokretanje, pauziranje i resetovanje simulacije. Pomoću komandi iz donjeg reda se zadaje ugao θ pod kojim klizač drži ruke (sa tegovima). Pri tome je $\theta \in [3\pi/2, 2\pi]$. Demonstraciju je moguće pustiti sa fiksnim uglom θ tako da se posmatra rotacija klizača određenom konstantnom brzinom. Pošto se u demonstraciji prikazuju trodimenzionalni objekti, moguće je izabrati ugao posmatranja (slično kao i kod demonstracije ZOE). Mnogo je interesantnije posmatrati kada se demonstracija pusti a pri tome se menja ugao otklona θ . Tada se brzina rotacije klizača menja u skladu sa (2.31): sa širenjem ruku klizača, brzina rotacije se smanjuje i obrnuto.



Slika 2.9: Kontrolni panel za simulaciju sa klizačem.



Slika 2.10: Površina koju prebriše radijus vektor za neki vremenski interval Δt jednaka je intenzitetu vektorskog proizvoda vektora r_1 i Δr .

Zanimljivo je poređiti upravo opisani problem klizača sa drugim Keplerovim zakonom. On se obično iskazuje u formi: *radijus vektori planeta oko sunca prebrišu jednake površine za jednake intervale vremena* [Čaluković N. (2011)]. Međutim, površina koju prebriše radijus vektor je [videti Sl. 2.10]

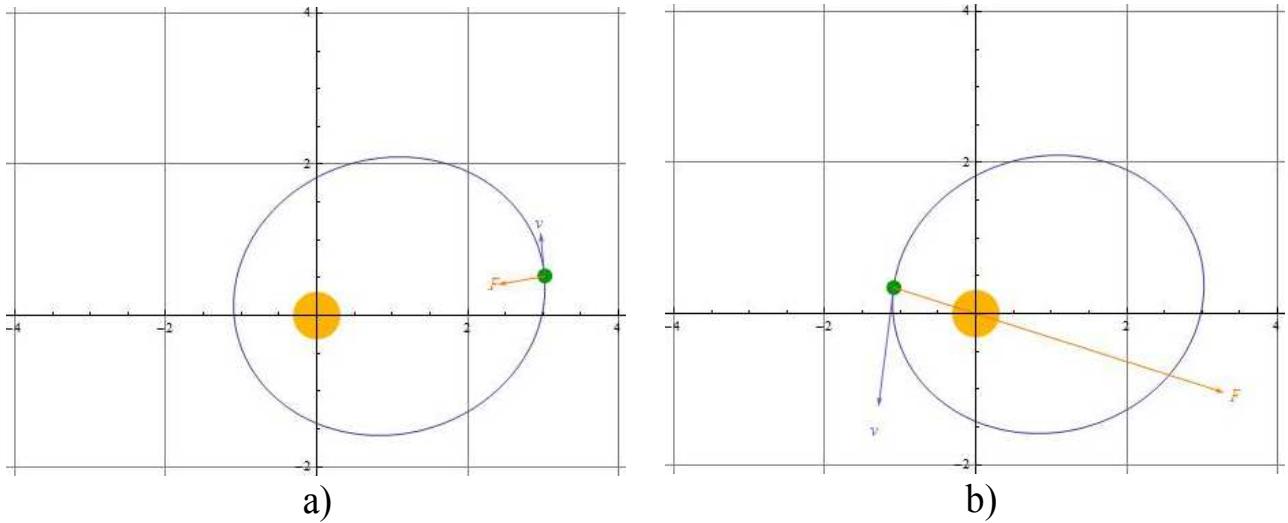
$$\Delta \mathbf{A} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \Delta \mathbf{r}, \quad (2.32)$$

tako da je brzina njene promene direktno proporcionalna momentu impulsa

$$\frac{\Delta \mathbf{A}}{\Delta t} = \frac{1}{2} \mathbf{r} \times \mathbf{v} = \frac{\mathbf{L}}{2m} \quad (2.33)$$

odakle vidimo da je drugi Keplerov zakon samo jedna od varijanti ZOMI. Na sajtu [Wolfram Demonstrations Project](#) postoji više demonstracija koje se bave Keplerovim zakonima. Jedna od njih, koja se može preuzeti [ovde](#), naročito je pogodna jer se u njoj direktno predstavlja dinamika rotacije planete oko Sunca. Budući da je Njutnova gravitaciona sila centralna, za kretanje planeta oko Sunca važi ZOMI i, shodno tome, kretanje planete se odvija u ravni. Ta činjenica je iskorišćena u ovoj demonstraciji i kretanje planete u odgovarajućoj ravni je opisano koordinatama x i y . U demonstraciji je omogućeno biranje početnog položaja planete (x_0, y_0) kao i njene početne brzine (\dot{x}_0, \dot{y}_0) . Menjanje ovih parametara dovodi do promene oblika putanje planete. Takođe, u demonstraciji postoji opcija koja omogućava trenutni prikaz vektora brzine planete i vektora gravitacione sile Sunca na planetu. Demonstracija jasno pokazuje kako se brzina planete povećava kada je ona bliža Suncu, a smanjuje se prilikom njenog udaljavanja [videti Sl. 2.11]. Ovo je u punoj analogiji sa povećavanjem i smanjivanjem brzine klizača kada skuplja i širi ruke.

Istovremeno prikazivanje demonstracija sa klizačem i Keplerovim zakonom može da pomogne učenicima da jasnije sagledaju različite aspekte ZOMI. U prvom slučaju je akcenat na momentu inercije materijalne tačke koja kruži dok se u drugom slučaju uvodi lepa geometrijska predstava o površinama koje planete prebrišu kretajući se po eliptičnim putanjama oko Sunca.



Slika 2.11: Kretanje planete oko sunca i ZOMI: a) kada je planeta udaljenja od Sunca kreće se sporije a b) kada je bliža Suncu kreće se brže. Planeta je prikazana zelenim a Sunce žutim krugom. Planeta oko Sunca kruži po elipsi, tako da se Sunce nalazi u jednoj žiži elipse [tzv. prvi Keplerov zakon].

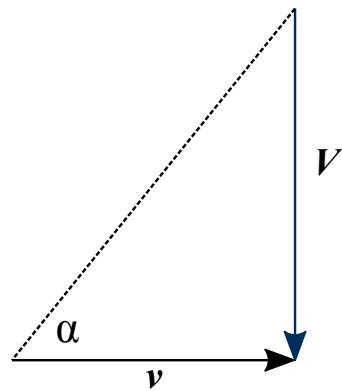
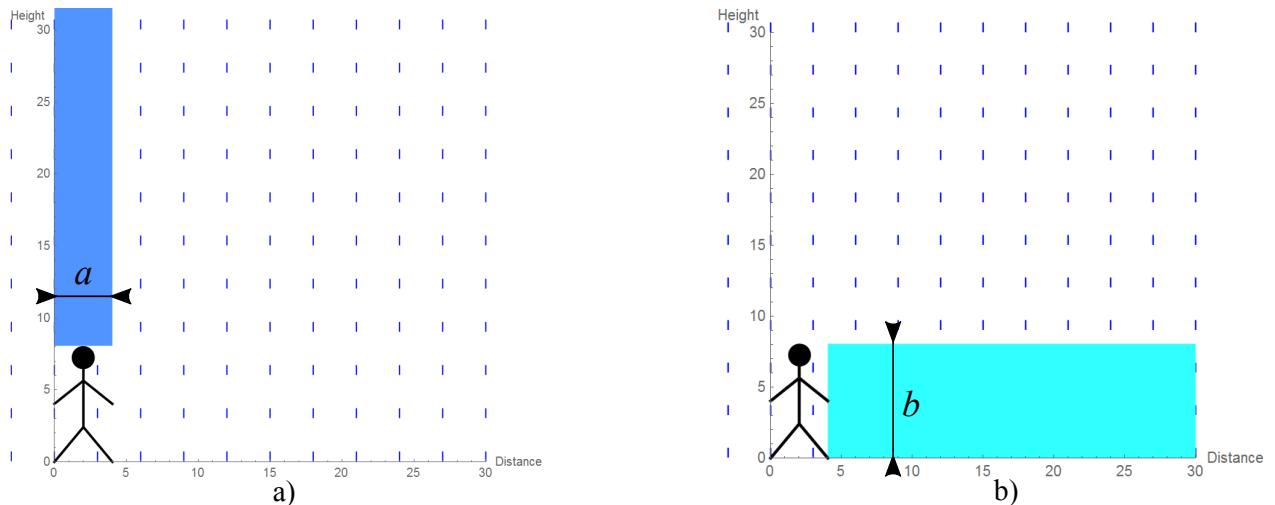
2.3 Odabrani primeri iz kinematike i dinamike

2.3.1 Hodanje ili trčanje po kiši?

Jedna od poznatih nedoumica, koja se može rešiti pažljivom kinematičkom analizom u idealizovanom slučaju, glasi: da li ćete manje pokisnuti ako hodate ili brzo trčite po kiši? Naravno, komplikovanjem postavke problema, približavajući ga time realnoj situaciji, jednostavno rešenje koje je ovde prikazano nije uvek primenjivo. Ipak, ispostavlja se da je rešenje po kojem treba trčati što brže često ono pravo. Nastavak diskusije se bazira na članku [[Hailman & Torrents \(2009\)](#)] i WDP demonstraciji koja se može preuzeti [ovde](#).

Za početak, uvedimo sledeće idealizacije. Pretpostavimo da se kretanje čoveka koji se kreće po kiši odvija u dve dimenzije. Dalje, pretpostavićemo i da se silueta čoveka može apoksimirati pravougaonikom kao i da nema vetra. Takođe, smatraćemo da kiša pada ravnomerno tako da se može uvesti gustina kiše obračunata po površini (pošto se ceo problem razmatra u dvodimenzionom svetu) koju ćemo označiti sa σ . Imajući u vidu gornje idealizacije, originalni problem možemo preformulisati na sledeći način: Koja je optimalna brzina kretanja pravougaonika u uniformnoj kiši koja će dovesti do njegovog minimalnog kvašenja?

Važnu ulogu u rešenju problema ima količnik modula vektora brzine kojom padaju kišne kapi (\mathbf{V}) i modul vektora brzine kojom se kreće čovek (\mathbf{v}). Međusobni odnos ovih vektora je prikazan na Sl. 2.12. Sa crteža je očigledno da važi $|\mathbf{V}|/|\mathbf{v}| = \tan \alpha$. Za početak, razmotrimo dva krajnja slučaja. U prvom ćemo pretpostaviti da je $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, odnosno, pretpostavićemo da se čovek ne kreće. Sva kiša, koja u ovom slučaju kvasi pravougaonik, pada na njegovu gornju ivicu dužine a . Pošto pravougaonik u ovom slučaju miruje, ukupna količina kiše, koja je reprezentovana tamno plavim pravougaonikom iznad čoveka koji stoji, proporcionalna je vremenu u kojem se čovek ne pomera i iznosi $Q_0 = \sigma a |\mathbf{V}| t$. Ova situacija je prikazana na Sl.

Slika 2.12: Geometrija vektora brzine kiše \mathbf{V} i brzine kojom se kreće pravougaonika \mathbf{v} .

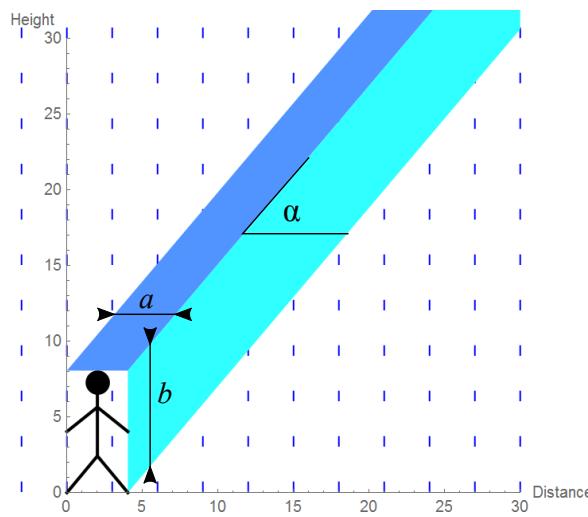
Slika 2.13: Dva graična slučaja: a) čovek se ne kreće i b) čovek se kreće brzinom mnogo većom od brzine kojom padaju kišne kapi. Osenčeni pravougaonici predstavljaju količinu vode koja padne na čoveka

2.13 a). Sa druge strane, ako je brzina kretanja čoveka jako velika ($|\mathbf{v}| \gg |\mathbf{V}|$), delovaće kao da se kapi kiše ne pomeraju. Tada sva kiša koja kvasi čoveka dolazi od mirujućih kapi koje pokupi pravougaonik visine b na svom putu. Pošto smo pretpostavili da kiša pada homogeno, ukupna količina vode koju pokupi čovek u ovom slučaju je $Q_\infty = \sigma b |\mathbf{v}| t$, gde je t vreme boravka na kiši. Na Sl. 2.13 b) je ukupna količina vode koju čovek pokupi, krećući se brzinom mnogo većom od brzine kojom padaju kišne kapi, predstavljena svetlo plavim pravougaonikom. Posmatrajmo sada opšti slučaj u kojem su brzine kretanja čoveka i kišnih kapi uporedive (videti Sl. 2.14). Kao što smo videli, tada je $|\mathbf{V}| = |\mathbf{v}| \tan \alpha$ pa je ukupna količina vode koja padne na čoveka koji se kreće brzinom \mathbf{v} data sa

$$Q_v = a\sigma t|\mathbf{V}| + b\sigma t|\mathbf{v}|, \quad (2.34)$$

odnosno

$$\frac{Q}{t\sigma|\mathbf{v}|} = a \tan \alpha + b = a \frac{|\mathbf{V}|}{|\mathbf{v}|} + b. \quad (2.35)$$



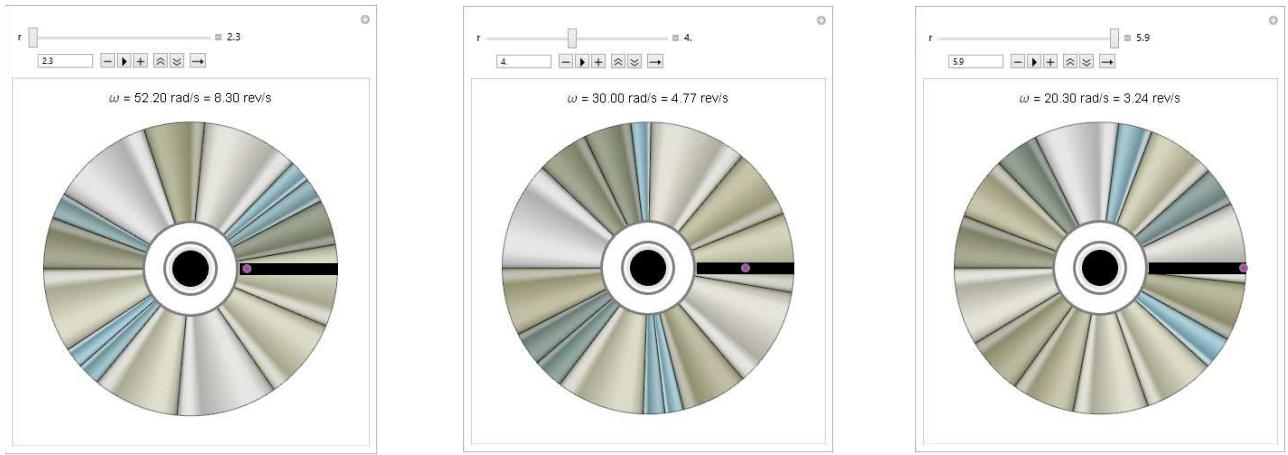
Slika 2.14: Ukupna količina kiše koja padne na čoveka koji se kreće brzinom v je određena odnosom te brzine i brzine padanja kišnih kapi V , dimenzijama čoveka ($a \times b$), vremenom provedenim na kiši (t) i gustinom raspodele kišnih kapi (σ)

Prema tome, količina vode koja padne na čoveka će biti manja što je njegova brzina kretanja u odnosu na brzinu padanja kišnih kapi veća. Primećujemo da u gornjoj jednakosti figuriše konstantni član koji ne zavisi od odnosa brzina čoveka i kapi. On ima jednostavnu geometrijsku interpretaciju u činjenici da su površine pravougaonika i paralelograma koji imaju jednu zajedničku osnovu i visinu iste. Drugim rečima, količina vode koja padne na ivicu visine b ne zavisi od brzine kretanja i ukupna količina kiše koja padne se može smanjiti samo tako što se smanji ona količina koja padne na gornju ivicu a i to se postiže povećanjem brzine kretanja.

Za kraj napominjemo da ova demonstracija ima stanaridni kontrolni panel u kojem može da se menja odnos brzine kišnih kapi i kretanja čoveka. Sistem jedinica je odabran tako da je izražen uglom α . Minimalna brzina kretanja čoveka odgovara uglu $\alpha = \pi/2$ a maksimalna uglu $\alpha \rightarrow 0$. Takođe, moguće je menjati i veličinu osobe koja hoda/trči po kiši jer i to utiče na količinu vode koja se pokupi.

2.3.2 Ugaona brzina kompakt diska

Opšte je poznato da kompakt-disk (CD) predstavlja jedan od optičkih memorijskih uređaja razvijen 80-tih godina prošlog veka (više istorijskih i tehničkih detalja o CD-u se može naći [ovde](#)). Podaci se na CD-u zapisuju duž spirale koja počinje blizu centra diska a završava se na njenom obodu (njena ukupna dužina je oko 5.3km). Podaci sa audio diska se očitavaju po principu konstantne linearne brzine koja iznosi 1.2m/s, što daje ukupnu dužinu audio zapisa od oko 74min. Budući da se podaci očitavaju sa konsantnom linearnom brzinom, ugaona brzina diska se mora smanjivati kako se spirala približava kraju. Potrebna brzina obrtanja za očitavanje podataka na rastojanju r od centra diska se lako nalazi iz $\omega = v/r$, gde je $v = 1.2\text{s}$. U [WDP demonstraciji](#) je prikazana zavisnost ugaone brzine audio diska od mesta na spirali sa kojeg se očitavaju podaci a koje je određeno rastojanjem tačke od centra diska (r). Ova demonstracija ima izlaz koji je prikazan za Sl. 2.15 za tri različite vrednosti koordinate r .



Slika 2.15: Princip konsantne linearne brzine na kojem se zasniva očitavanje podataka sa audio diska. Laser koji očitava podatke je predstavljen crvenom tačkom

Ugaona brzina kojom se disk okreće kada se očitavaju podaci sa početka spirale ($r = 2.3\text{cm}$) iznosi $500 \text{ obrtaja/min} = 8.34 \text{ obrtaja/s}$, dok je za tačke na obodu diska ($r = 5.9\text{cm}$) jednaka $200 \text{ obrtaja/min} = 3.3 \text{ obrtaja/s}$.

2.3.3 Linearni harmonijski oscilator

Harmonijski oscilator predstavlja jedan od najvažnijih modela u fizici. Poznata je izjava [Sidnija Kolmena](#) u kojoj čak tvrdi i da se karijera mladog teorijskog fizičara (uglavnom) svodi na bavljenje sve apstraktinijim verzijama harmonijskih oscilatora. Harmonijski oscilator ima važnu ulogu u velikom broju fizičkih teorija (mehanika, teorija kondenzovanog stanja, teorija elementarnih čestica itd.) a učenici se po prvi put sreću sa najjednostavnijom predstavom harmonijskog oscilatora u vidu jednostavnog modela koji opisuje kretanje materijalne tačke mase m zakaćene na oprugu konstante elastičnosti k duž jednog pravca (x -osa). Sila koja deluje na česticu je proporcionalna istezanju opruge i privlačna je, pa Njutnova jednačina (2.6) glasi

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = -kx. \quad (2.36)$$

Dakle, sila koja deluje na česticu u slučaju linearog harmonijskog oscilatora je

$$F = -kx. \quad (2.37)$$

Tada na osnovu jednačine (2.2) sledi da je potencijalna energija u slučaju LHO jednostavno

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} \quad (2.38)$$

tako da tačka $x = 0$ odgovara ravnotežnom položaju čestice. Zaista, pošto je mala promena potencijalne energije, indukovana malom promenom položaja čestice, data sa

$$\Delta U = U(x + \Delta x) - U(x) = k \frac{(x + \Delta x)^2}{2} - \frac{kx^2}{2} \approx k \frac{x^2 + 2x\Delta x}{2} - \frac{kx^2}{2} = kx\Delta x \quad (2.39)$$

pri čemu smo, u duhu prethodne diskusije, zadržali samo članove linearne po Δx . Pošto zamena (2.37) i (2.39) vodi na identitet, vidimo da je potencijalna energija LHO opisana sa (2.38).

Pored zavisnosti rastojanja čestice od ravnotežnog položaja, od interesa su promena brzine i promena ubrzanja čestice. Ispostavlja se da se tražena rešenja mogu zapisati u obliku [Čaluković N. (2011); Milić, B. (1997)]

$$x(t) = x_0 \sin \omega t, \quad v(t) = v_0 \cos \omega t, \quad a(t) = -a_0 \sin \omega t, \quad (2.40)$$

gde je $\omega = \sqrt{k/m}$ kružna frekvencija oscilovanja, x_0 je amplituda oscilovanja a amplitude brzine i ubrzanja su

$$v_0 = \omega x_0, \quad a_0 = \omega^2 x_0. \quad (2.41)$$

Navedena rešenja omogućavaju da se lako pokaže ZOE u slučaju linearog harmonijskog oscilatora (LHO). Pošto su kinetička i potencijalna energija za LHO date sa

$$T(t) = \frac{mv^2(t)}{2} = \frac{kx_0^2}{2} \cos^2 \omega t, \quad U(t) = \frac{kx^2(t)}{2} = \frac{kx_0^2}{2} \sin^2 \omega t, \quad (2.42)$$

vidimo da za ukupnu energiju važi

$$E(t) = T(t) + U(t) = \frac{kx_0^2}{2} = \text{const.} \quad (2.43)$$

Dakle, zbir kinetičke i potencijalne energije LHO se zaista ne menja sa vremenom.

Pošto je $\sin(0) = 0$, vidimo da rešenja navedena u (2.40) opisuju situaciju u kojoj se čestica u početnom trenutku nalazi u ravnotežnom položaju. To, očigledno, nije jedini mogući slučaj. Opštiji skup rešenja je dat sa

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad v(t) = v_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad a(t) = -a_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2.44)$$

gde je sa φ_0 označena početna faza. Ukoliko je $\varphi \neq 0$, čestica se u početnom trenutku oscilovanja nalazi u tački $x = x_0 \sin \varphi_0$, posmatrano od ravnotežnog položaja. Specijalno, za $\varphi = \pi/2$, vidimo da se čestica u početnom trenutku nalazi na maksimalnom rastojanju od ravnotežnog položaja $x = x_0$, pri čemu joj je početna brzina $v = 0$. Kako između sinusnih i kosinusnih funkcija postoji jednostavna relacija $\sin(t + \pi/2) = \cos(t)$, opšte rešenje jednačine (2.39) se ponekad zapisuje i kao

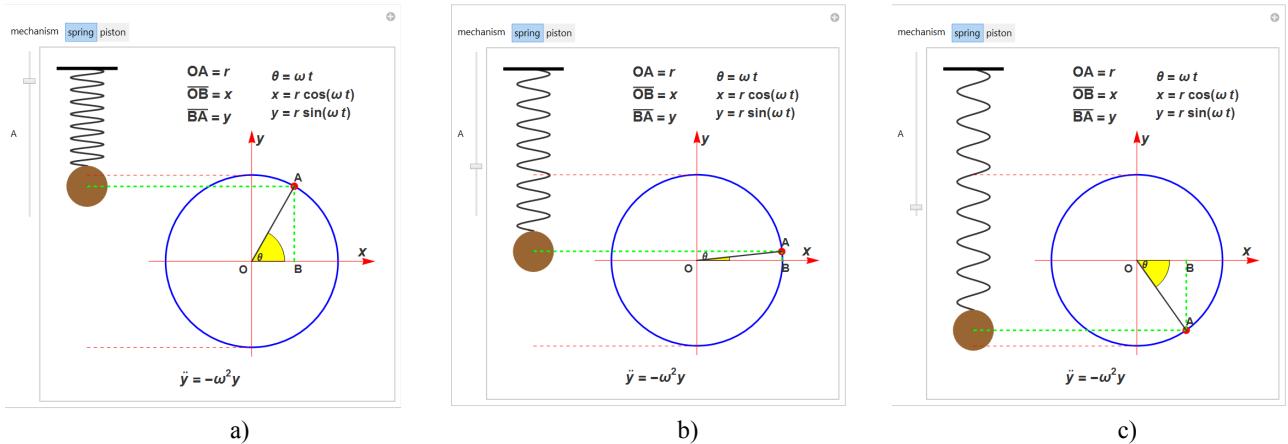
$$x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad v(t) = -v_0 \sin(\omega t + \varphi_0), \quad a(t) = -a_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (2.45)$$

pri čemu, u sva tri slučaja važi veza između amplituda iz (2.41). Navedimo još i da se Njutnova jednačina za LHO obično zapisuje pomoću ω

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\omega^2 x, \quad (2.46)$$

jer je ovaj oblik pogodniji za uopštavanja na slučajeve kada harmonijske oscilacije nisu prouzrokovane elastičnom oprugom, dok se i dalje mogu okarakterisati kružnom frekvencijom ω .

Na internet stranici WDP postoji više demonstracija koje se bave temom LHO. Recimo, demonstracija koja se može preuzeti [ovde](#) daje prikaz rešenja (2.40) pomoću trigonometrijskih funkcija na kružnici [postoji razlika u notaciji: promenljivoj x u rešenju (2.40) odgovara



Slika 2.16: Šematski prikaz LHO pomoću čestice na opruzi. Rešenje (2.40) je prikazano promenom koordinate y na gornjim graficima. Data su tri položaja čestice: panel a) prikazuje trenutak u kojem je čestica u blizini tačke $y = y_0$, panel b) prikazuje položaj u blizini ravnotežnog a panel c) u blizini položaja $x = -x_0$.

koordinata y koja je predstavljena rastojanjem \overline{BA} . Demonstracija omogućava da se menja položaj čestice, odnosno njeno rastojanje od ravnotežnog položaja (komanda označena sa A na kontrolnom panelu): vrednosti parametra $A = 0$ odgovara položaj $x = x_0$ a maksimalnoj vrednosti položaj $x = -x_0$.

Demonstracija koja se može preuzeti [ovde](#) pruža malo detaljniji uvid u rešenja jednačine (2.36). Naime, korisniku je omogućeno da bira numeričke vrednosti parametara koji opisuju rešenja jednačine (2.36): x_0, m, k i φ_0 a konkretno rešenje koje se koristi u demonstraciji je (2.45). Kao vizualni dodatak grafičkom prikazu rešenja, data je predstava LHO u vidu kuglice prikačene na elastičnu oprugu. Jedan primer izlaza ove demonstracije je prikazan na Sl. 2.17. Kao što se vidi, za odabране vrednosti paametara x_0, k, m, φ_0 , demonstracija crta grafike za $x(t), v(t), a(t), T(t), U(t)$ i računa ukupnu energiju $E = T+U$. Za fiksirane vrednosti navedenih parametara je moguće posmatrati pomeranje kuglice u funkciji vremena (ravnotežni položaj je označen žutom a krajnji položaji zelenim vertikalnim linijama). Sa druge strane, moguće je fiksirati određeni vremenski trenutak τ (odnosno, rastojanje čestice od ravnotežnog položaja) i posmatrati kako se, u zavisnosti od izbora m, k, x_0 i φ_0 menjaju $x(\tau), v(\tau), a(\tau), E(\tau)$ i $U(\tau)$.

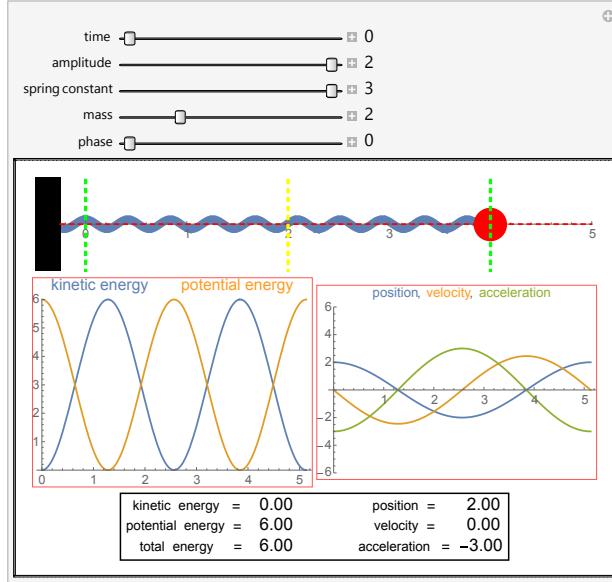
2.3.4 Rezultantna sila u dvodimenzionom prostoru

Kao što je već diskutovano u odeljku 2.1 Njutnova jednačina kretanja za materijalnu tačku glasi

$$\frac{\Delta \mathbf{p}}{\Delta t} = \mathbf{R}, \quad (2.47)$$

pri čemu je \mathbf{R} rezultujuća sila koja deluje na telo

$$\mathbf{R} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}^{(i)}. \quad (2.48)$$



Slika 2.17: Položaj, brzina, ubrzanje, kinetička i potencijalna energija za česticu koja harmonički osciluje, dati u funkciji vremena.

Pretpostavimo sada da se kretanje tela odvija u xy -ravni kao i da sve sile koje deluju na telo leže u istoj ravni. Vektorska Njutnova jednačina (2.47) se u tom slučaju svodi na dve jednačine za x i y komponente

$$\frac{\Delta p_x}{\Delta t} = R_x, \quad \frac{\Delta p_y}{\Delta t} = R_y, \quad (2.49)$$

gde je

$$R_x = \sum_{i=1}^N F_x^{(i)}, \quad R_y = \sum_{i=1}^N F_y^{(i)}. \quad (2.50)$$

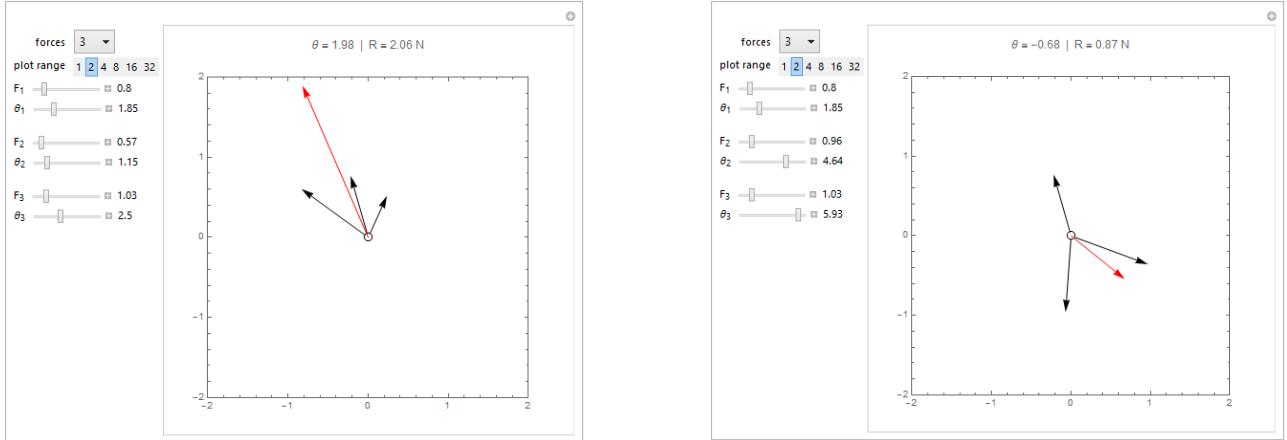
Za razvijanje fizičke intuicije o kretanju materijalnih tačaka, poželjno je imati vektorski prikaz rezultujuće sile. Pošto se kretanje odvija u ravni, svi vektori koji se pojavljuju u ovom problemu su u potpunosti određeni njihovim intenzitetom i uglem koji strelica zauzima u odnosu na standardnu x -osu. Kada su poznate sve sile $\mathbf{F}^{(i)}$, vektor ukupne sile je određen intenzitetom

$$|\mathbf{R}| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} \quad (2.51)$$

i uglem

$$\theta = \arctan \frac{R_y}{R_x}. \quad (2.52)$$

WDP demonstracija, koja se može preuzeti [ovde](#) omogućava grafički prikaz rezultujuće sile na telo u zavisnosti od intenziteta i orijentacije pojedinačnih sila $\mathbf{F}^{(i)}$. Poslednju činjenicu je potrebno posebno naglasiti jer učenici često zaboravljaju na vektorskiju prirodu fizičkih veličina.



Slika 2.18: Grafički prikaz rezultujuće sile za dva skupa sila $\mathbf{F}^{(1)}$, $\mathbf{F}^{(2)}$ i $\mathbf{F}^{(3)}$.

Sama demonstracija dozvoljava zadavanje do $N = 6$ sila pomoću njihovih intenziteta i uglova koje zaklapaju sa x -osom. Intenziteti sila se zadaju u njutnima, a uglovi se menjaju od $\theta = 0$ do $\theta = 2\pi$. Kao rezultat je dat grafički prikaz svih vektora $\mathbf{F}^{(i)}$ i rezultante \mathbf{R} zajedno sa numeričkim vrednostima iz (2.51) i (2.52). Na Sl. 2.18 su prikazana dva primjera. Vektor rezultujuće sile je predstavljen crvenom strelicom.

3

Elektrodinamika

3.1 Fluks elektrostatičkog polja

3.1.1 Linije sila električnog polja

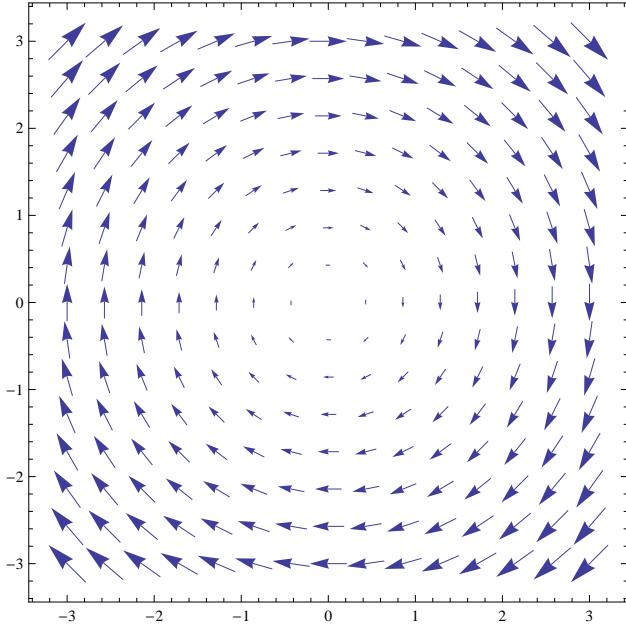
Fundamentalni doprinos fizici XIX veka je svakako Maksvelova elektrodinamika, objedinjena teorija električnih, magnetnih i optičkih fenomena, čiji je jedan od važnijih rezultata tumačenje svetlosti kao elektromagnetskog talasa. U vreme kada je Maksvel zaokružio svoju teoriju, uticaj Njutnove mehanike na sveukupnu fiziku je još uvek bio velik. Iako je Maksvel elektrodinamiku formuliso pomoću električnih i magnetnih veličina (električno i magnetno polje, gustine struja itd.), za njega su te fizičke veličine imale samo sekundarnu prirodu. Drugim rečima, smatrao je da se elektromagnetne i optičke pojave mogu svesti na mehaničko ponašanje etra. Zbog toga je izmišljao različite prateće mehaničke modele koji su trebali da doprinesu mehaničkom razumevanju elektrodinamike. Koliko god da su Maksevelove jednačine bile uspešne u objašnjavanju različitih pojava vezanih za elektrodinamiku, toliko su prateći mehanički modeli bili "rogobatni i kontradiktorni" [Einstein A. (1920)].

Prvi pravi korak ka oslobođanju od mehaničkog pogleda na elektromagnetne pojave je došao sa radovima Faradeja i njegovim konceptom polja. Kako bi vizualno predstavio polje, Faradej je uveo i pojam linija sila polja. Faradejeve ideje o polju i linijama sila su imale velikog uticaja na fizičare XIX veka (videti, recimo, Meksvelov članak [Maxwell (1856)]) a ti pojmovi se koriste i u savremenoj fizici. Linije sila nekog polja se precizno uvode na sledeći način. Neka u prostoru koji posmatramo postoji neko vektorsko fizičko polje. To znači da je u svakoj tački prostora definisan vektor, odnosno veličina određena pravcem smerom i intenzitetom. Vizualno, vektore predstavljamo orijentisanim strelicama tako da se vektorsko polje može predstaviti određenim brojem strelica koje ispunjavaju prostor (videti Sl. 3.1]). Vektorsko polje sa Sl. 3.1 je nacrtano u programu MATHEMATICA 8.0 naredbom

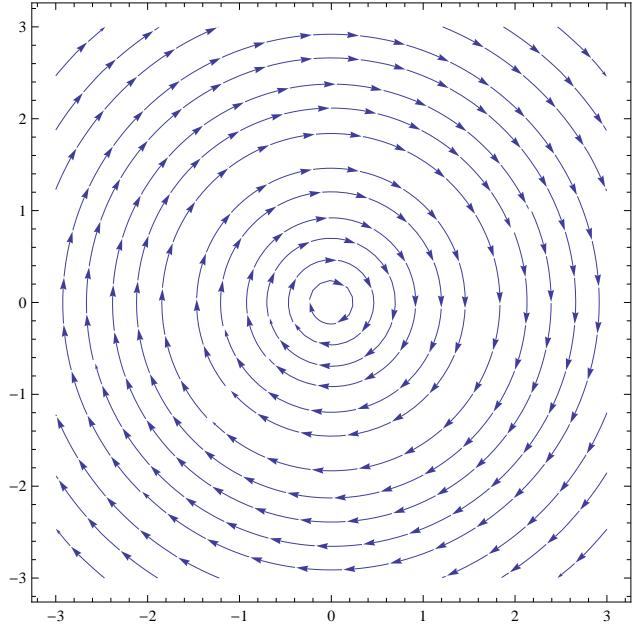
```
VectorPlot[{y, -x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}].
```

Vektorske linije sila sada uvodimo kao krive u prostoru takve da se, u svakoj tački koja leži na krivoj, vektor posmatranog polja poklapa sa tangentom na krivu. Recimo, za vektorsko polje prikazano na Sl. 3.1, odgovarajuće linije sila su prikazane na Sl. 3.2 Linije sila prikazane na Sl. 3.2 su takođe dobijene pomoću programa MATHEMATICA 8.0 naredbom

```
StreamPlot[{y, -x}, {x, -3, 3}, {y, -3, 3}].
```



Slika 3.1: Grafički prikaz vektorskog polja $\mathbf{A}(x, y) = ye_x - xe_y$.



Slika 3.2: Linije sila vektorskog polja $\mathbf{A}(x, y) = ye_x - xe_y$.

Naravno, moguće je nacrtati i linije sila komplikovanih polja. Recimo, za vektorsko polje

$$\mathbf{B} = (1 - x^2 + y)\mathbf{e}_x + (1 + x - y^2)\mathbf{e}_y \quad (3.1)$$

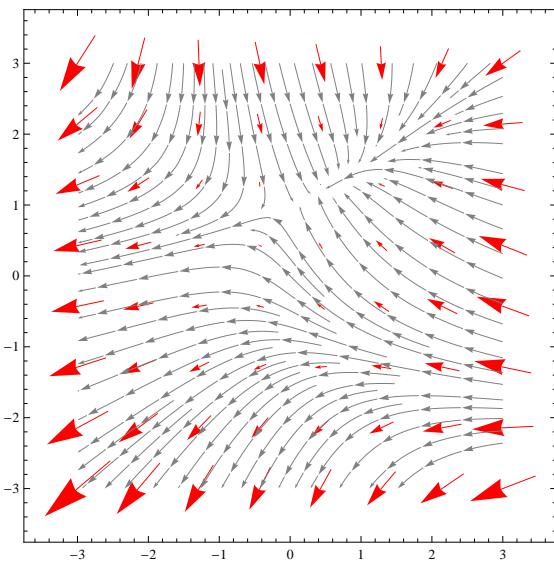
odgovarajući grafik, koji sadrži linije sila polja i neke od tangenti, prikazan je na Sl. 3.3. Interesantno je da Faradej nije imao formalno matematičko obrazovanje, ali je intuitivno razumeo potrebu za uvođenjem novih (matematičkih) veličina u opisu elektromagnetskih pojava [Mlađenović, M. (2008)]. Po konvenciji, linije sila električnog polja izviru u pozitivnim a završavaju se u negativnim nakelektrisanjima.

3.1.2 Fluks vektorskog polja

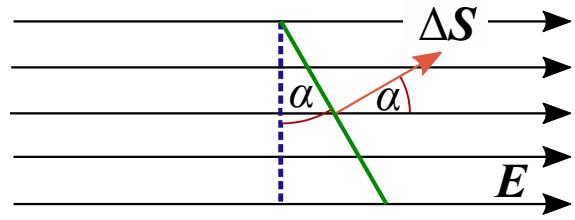
Usko povezan sa linijama sila vektorskog polja je i pojam fluksa. To je broj linija sila koji prođe kroz neku površinu postavljenu normalno na lokalni pravac linija sila u nekoj tački. Često se koristi konvencija po kojoj je intenzitet vektorskog polja u nekoj tački srazmeran broju linija sila koje prolaze kroz neku jediničnu površinu. Tada fluks daje meru intenzitea vektorskog polja. Naravno, moguće je naći eksplicitan izraz za fluks vektorskog polja. Prepostavimo situaciju kao na Sl. 3.4. U opštem slučaju, kao što smo videli u prethodnim primerima, linije sila polja su krive. Ipak, ako posmatramo dovoljno malu oblast prostora, uvek možemo prepostaviti da su linije prave (drugim rečima, u dovoljno maloj oblasti prostora, možemo prepostaviti da je polje \mathbf{E} homogeno). Neka je dat i element površine $\Delta\mathbf{S}$ koji sa pravcem vektora \mathbf{E} zaklapa ugao α . Tada je normalna površina koju "vidi" polje \mathbf{E} data sa $\Delta S \cos \alpha$ i elementarni fluks iznosi

$$\Delta\Phi = |\mathbf{E}| \Delta S \cos \alpha = \mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{S} \quad (3.2)$$

pri čemu smo iskoristili definiciju skalarnog proizvoda [Mušicki, Dj., Milić, B. (1975)].



Slika 3.3: Grafički prikaz vektorskog polja $\mathbf{B}(x, y)$ definisanog u (3.1).



Slika 3.4: Uz određivanje fluksa vektorskog polja.

3.1.3 Demonstracija

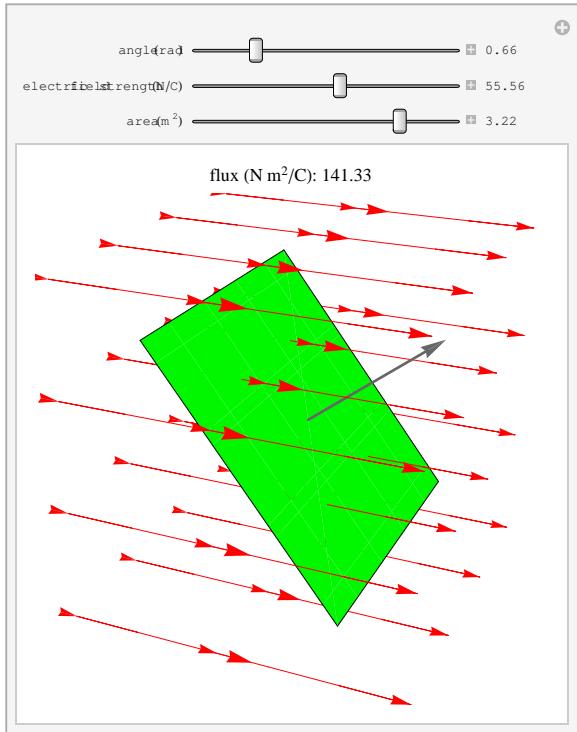
Fluks vektorskog polja je veličina koja se prirodno pojavljuje u mehanici fluida i elektromagnetizmu, ali i u nekim savremenim teorijama koje razmatraju različita vektorska polja. WDP demonstracija koja se može preuzeti [ovde](#) služi da učenicima/studentima na interaktivan način približi pojам fluksa na primeru elektrostatičkog polja. Naime, korisnik sam može birati tri parametra. To su

1. ugao koji zaklapaju vektor elementa površine i vektora elektrostatičkog polja meren u radijanima
2. intenzitet vektora elektrostatičkog polja meren u N/C (prepostavlja se da je elektrostatičko polje homogeno)
3. veličinu površine merenu u m^2

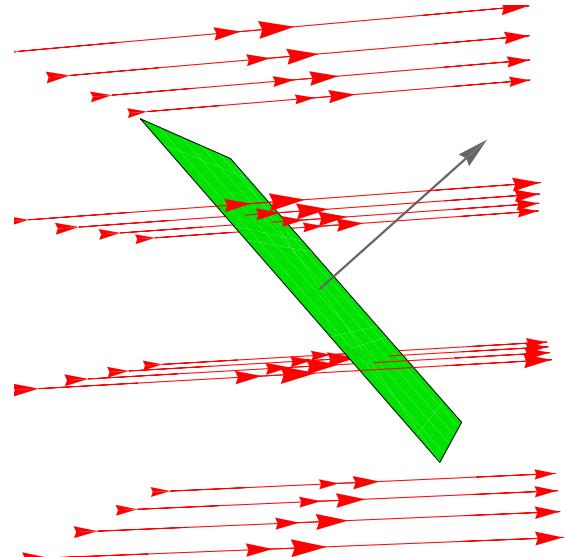
Nakon izbora parametara, program daje grafički prikaz problema i daje numeričku vrednost fluksa izraženu u Nm^2/C . Jedan primer je prikazan na Sl. 3.5. Lako je videti da se za izbor parametara sa grafika ($|\mathbf{E}| = 55.56\text{N/C}$, $\Delta S = 3.22\text{m}^2$ i $\alpha = 0.66\text{rad}$), korišćenjem jednačine (3.2) dobija isti rezultat koji je prikazan na Sl. 3.5

$$\Delta\Phi = 5.56\text{N/C} \cdot 3.22\text{m}^2 \cdot \cos 0.66 = 141.33 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}} \quad (3.3)$$

Budući da demonstracija prikazuje trodimenzione objekte, moguće je interaktivno menjati ugao posmatranja. Dakle, učenik/student sam može da menja parametre simulacije i da bira ugao posmatranja [videti Sl. 3.6] čime sebi približava dosta apstraktan pojам fluksa vektorskog polja. Poput demonstracija koja opisuje kretanje planete oko Sunca iz odeljka 2.2.4, demonstracija u kojoj se računa fluks elektrostatičkog polja se ne može realizovati u okviru eksperimenta u laboratoriji i potencijano unosi novi kvalitet u nastavu fizike.



Slika 3.5: Grafički izlaz WDP demonstracije za računanje fluksa elektrostatičkog polja.



Slika 3.6: Menjanje ugla posmatranja u WDP demonstraciji.

3.2 Linije sila električnog polja za sisteme tačkastih nanelektrisanja

3.2.1 Linije sila i ekvipotencijalne linije

Kao što je već napomenuto u prethodnom odeljku, linije sila električnog polja su predstavljale važan koncept koji je doprineo oslobađanju elektrodinamike od pomoćnih mehanicističkih modela i njenom formulisanju kao potpuno nezavisne discipline. U odeljku 3.1 su razmatrani primeri linija sila vektorskih polja i grafički su prikazani na Sl. 3.2 i 3.2. Međutim, ti primeri polja su donekle veštački jer nisu dovedeni u direktnu vezu sa nekom konkretnom raspodelom nanelektrisanja.

Ukoliko se razmatraju sistemi tačkastih nanelektrisanja u vakuumu, poznato je da se rezultujuće vektorско polje dobija na osnovu principa linearne superpozicije [Milić, B. (2002)]. Ako su tačkasta nanelektrisanja smeštена u tačke \mathbf{r}_i tada je rezultujuće polje u tački \mathbf{r} dato zbirom Kulonovih polja pojedinih nanelektrisanja

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} (\mathbf{r} - \mathbf{r}_i), \quad (3.4)$$

pri čemu su e_i veličine tačkastih naboja a $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{F/m}$ je dielektrična konstanta za vakuum. Treba primetiti veliku razliku između primera superpozicije sila u mehanički čestica, diskutovanog u odeljku 2.3.4, i superpozicije iz (3.4). Naime, sile koje su razmatrane u 2.3.4

su konstantne a jednakost (3.4) definiše vektorsko polje $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Sila koja deluje na tačkasto naelektrisanje e smešteno u tačku sa koordinatom \mathbf{r} je jednostavno $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = e\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

Ispostavlja se da je Kulonova sila potencijalna pa se mnogobrojni problemi iz elektrostatike znatno jednostavnije rešavaju ako se uvede elektrostatički potencijal ϕ . On se može definisati slično potencijalnoj energiji sistema materijalnih tački, koja je uvedena u odeljku 2.1.1. Neka je tačkasto naelektrisanje e' smešteno u koordinatni početak. Kulonova sila koja deluje na naelektrisanje e koje se nalazi u tački \mathbf{r} je data sa

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{ee'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \quad (3.5)$$

pa je promena potencijalne energije ovog sistema, prilikom pomeranja tačkastog naelektrisanja e za $\Delta\mathbf{r}$, duvž pravca vektora \mathbf{r} , data sa [videti (2.2)]

$$\Delta U = -\mathbf{F} \cdot \Delta\mathbf{r} = -\frac{ee'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \Delta\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = -\frac{ee'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|\mathbf{r}| |\Delta\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|^3} = -\frac{ee'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|^2}. \quad (3.6)$$

Promenu potencijala tačkastog naelektrisanja e' sada definižemo kao promenu potencijalne energije obračunatu po probnom naelektrisanju e . Tj.

$$\Delta\phi(\mathbf{r}) = \frac{\Delta U}{e} = -\frac{e'}{4\pi\varepsilon_0} \frac{|\Delta\mathbf{r}|}{|\mathbf{r}|^2}. \quad (3.7)$$

Iz gornje jednakosti nalazimo elektrostatički potencijal tačkastog naelektrisanja

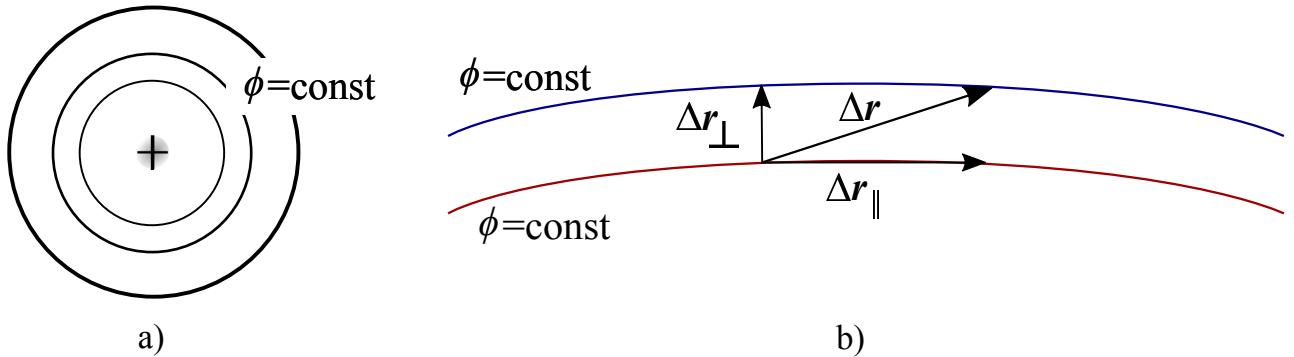
$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e'}{|\mathbf{r}|}. \quad (3.8)$$

Treba obratiti pažnju da je elektrostatički potencijal uvek definisan do na konstantu.

Sada možemo uvesti i ekvipotencijalne površine za elektrostatičko polje. Geometrijski gledano, to su površi u prostoru koje odgovaraju konstantnim vrednostima elektrostatičkog potencijala. Recimo, iz (3.8) se vidi da će u slučaju jednog tačkastog naelektrisanja ekvipotencijalne linije biti sfere [videti Sl. 3.7 pod a)]. Značaj ekvipotencijalnih površi se vidi iz relacije $\mathbf{E} \cdot \Delta\mathbf{r} = -\Delta\phi$. Prepostavimo da se neko tačkasto naelektrisanje kreće u polju \mathbf{E} kojem odgovara potencijal ϕ . Ukoliko se naelektrisanje pomera tako da ostaje na ekvipotencijalnoj površini, biće $\Delta\phi = 0$. Budući da je za tačkasto naelektrisanje $\mathbf{F} = e\mathbf{E}$, vidimo da prilikom kretanja po ekvipotencijalnoj liniji na naelektrisanje ne deluje sila bez obzira što se kreće u spoljašnjem elektrostatičkom polju \mathbf{E} . Dakle, budući da će efekat elektrostatičkog polja na tačkasto naelektrisanje biti vidljiv samo kada se naelektrisanje kreće tako da prelazi sa jedne ekvipotencijalne površine na drugu, linije sila elektrostatičkog polja moraju predstavljati lokalne normale na ekvipotencijalne linije. Ovaj zaključak je posledica jednostavne činjenice da se svako pomeranje naelektrisanja u prostoru između dve bliske ekvipotencijalne površi se uvek može razložiti na dve komponente od kojih je jedna paralelna na lokalnu ekvipotencijalnu površinu a druga normalna na nju [videti Sl. 3.7 pod b)]. Kao i u slučaju elektrostatičkog polja, elektrostatički potencijal sistema tačkastih naelektrisanja se može naći kao

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^N \frac{e_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}. \quad (3.9)$$

što je još jedna manifestacija principa linearne superpozicije u elektrodinamici.



Slika 3.7: a) Ekvipotencijalne linije (projekcije ekvipotencijalnih površi) za tačkasto nanelektrisanje i b) razlaganje pomeraja $\Delta\mathbf{r}$ na komponentu koja leži duž lokalne paralele na ekvipotencijalnu liniju ($\Delta\mathbf{r}_{\parallel}$) i komponente koja je duž lokalne normale na ekvipotencijalnu liniju ($\Delta\mathbf{r}_{\perp}$).

3.2.2 Vizualizacija ekvipotencijalnih linija i linija sila

Jasno je da je veoma teško na pregledan način predstaviti ekvipotencijalne površi za neku proizvoljnu raspodelu nanelektrisanja u prostoru. Zbog toga se često prikazuju ekvipotencijalne linije koje mogu predstavljati presek ekvipotencijalnih površi i nekih ravnih. Takođe, često se za vizualizaciju koriste i dvodimenzionalni sistemi kod kojih se ekviskalarne površi zaista svode na ekviskalarne linije.

Jedna od WDP demonstracija koja se bavi ovom problematikom se može preuzeti [ovde](#). Netrivijalni sistem tačkastih nanelektrisanja, sa koji se učenici obično prvi put susreću, je električni dipol. Njega sačinjavaju dva nanelektrisanja (jedno pozitivno, a drugo negativno i to tako da je apsolutna vrednost tih nanelektrisanja ista i iznosi e), koja se nalaze na nekom konačnom rastojanju \mathbf{l} . Ako pozitivno nanelektrisanje smestimo u tačku sa koordinatama (a, b) a negativno u tačku sa koordinatama (c, d) , tako da je $\mathbf{l} = (a - c)\mathbf{e}_x + (b - d)\mathbf{e}_y$, izraz (3.9) se svodi na

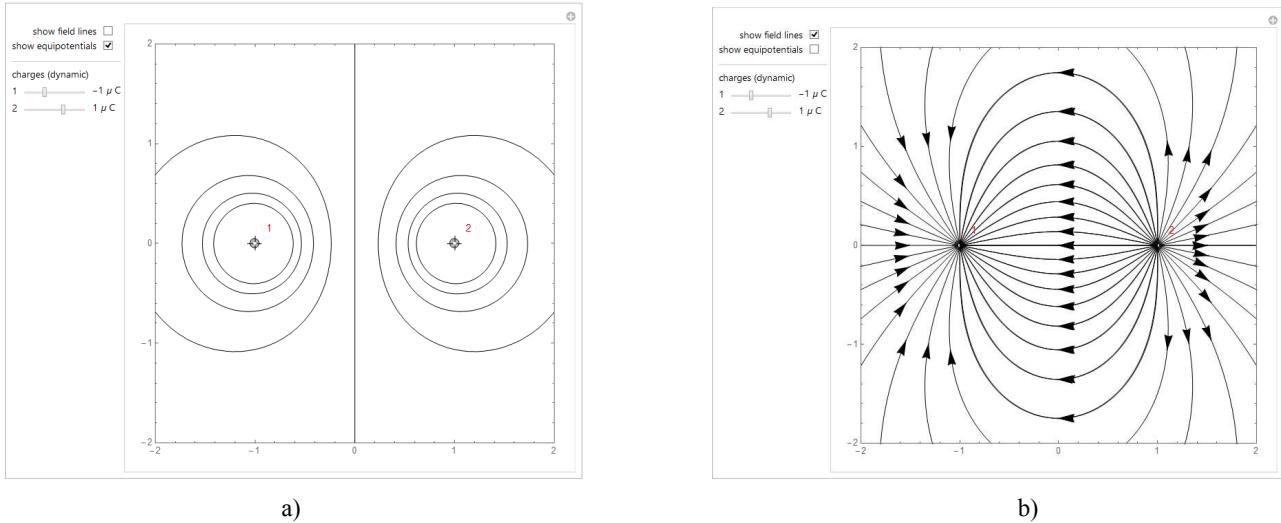
$$\phi(x, y) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{\sqrt{(x - c)^2 + (y - d)^2}} \quad (3.10)$$

a eksplisitni izrazi za komponente rezultujućeg elektrostatičkog polja su

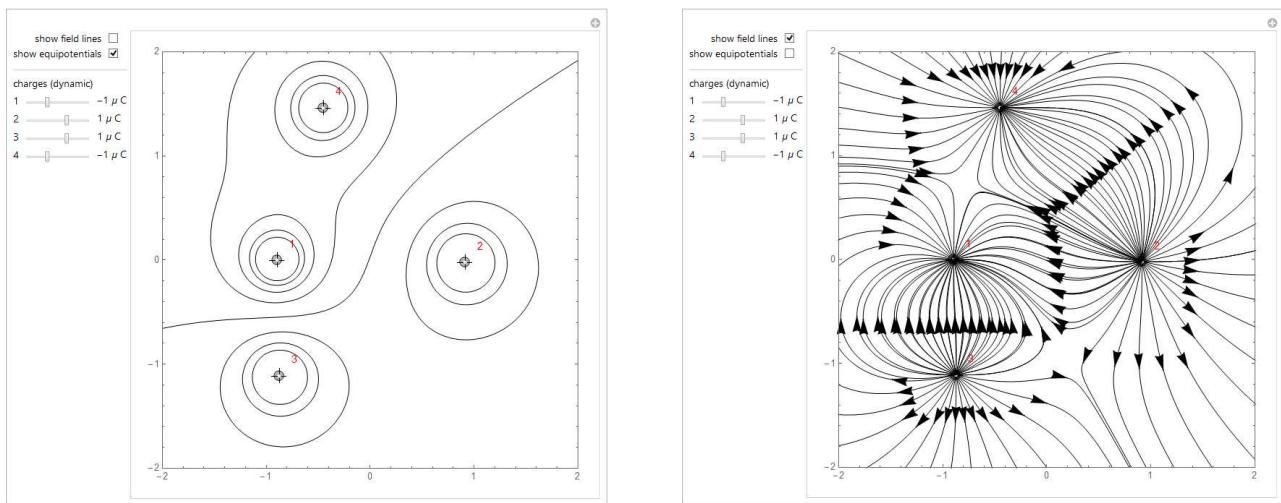
$$\begin{aligned} E_x(x, y) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - a}{[(x - a)^2 + (y - b)^2]^{3/2}} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - c}{[(x - c)^2 + (y - d)^2]^{3/2}}, \\ E_y(x, y) &= \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{y - b}{[(x - a)^2 + (y - b)^2]^{3/2}} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0} \frac{y - d}{[(x - c)^2 + (y - d)^2]^{3/2}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Prikaz ekvipotencijalnih linija električnog dipola, generisanog WDP demonstracijom, dat je na Sl. 3.8 pod a). Odgovarajuće linije sila rezultujućeg polja su prikazane na Sl. 3.8 pod b). Koordinate tačke u kojoj se nalazi pozitivno nanelektrisanje su određene sa $a = 1, b = 0$ a za negativno nanelektrisanje $c = -1, d = 0$. Ukoliko je potrebno, demonstracija omogućava da se na istom grafiku prikažu i ekvipotencijalne linije i linije sila elektrostatičkog polja.

Ova demonstracija se može koristiti i za grafičku ilustraciju komplikovanih sistema čestica. Nanelektrisanja se mogu dodati korišćenjem tastera Alt i pozicioniranjem pomoću miša. Panel koji se nalazi sa leve strane omogućava da se izabere intenzitet i znak nanelektrisanja a moguće



Slika 3.8: a) Ekvipotencijalne linije električnog dipola i b) odgovarajuće linije sila elektrostatickog polja. Koorinate pozitivnog naelektrisanja su $(1, 0)$ a koordinate negativnog $(-1, 0)$.



Slika 3.9: a) Ekvipotencijalne linije i b) odgovarajuće linije sila elektrostatickog polja za sistem od četiri tačkasta naelektrisanja.

je menjati i uzajamni položaj nanelektrisanja. Na taj način se mogu grafički reprezentovati i elektrostatički sistemi čije su karakteristike znatno komplikovanije od potencijala i polja dipola. Jedan primer sistema od četiri nanelektrisanja, zajedno sa odgovarajućim ekvipotencijalnim linijama i linijama sila elektrostatičkog polja, prikazan je na Sl. 3.9.

4

Specijalna teorija relativnosti

Kao što je dobro poznato [Mušicki, Dj. (1981), Jackson (1999)], pre Ajnštajnovog formulisanja specijalne teorije relativnosti (STR), situacija u fizici bila takva da su postojale dve ”ve-like” teorije: Njutnova mehanika i Maksvelova elektrodinamika. Ove dve teorije su se razlikovale po skupu simetrijskih transformacija koje su ostavljale invarijantnim osnovne jednačine: Njutnovе jednačine su invarijantne u odnosu na Galilejeve transformacije, a Maksvelove jednačine u odnosu na Lorencove transformacije. Pod pretpostavkom da postoji jedan jedinstven opis prirode, mehanika i elektrodinamika su morale biti svedene pod zajednički okvir. Dakle, postojale su barem tri mogućnosti [Jackson (1999)]

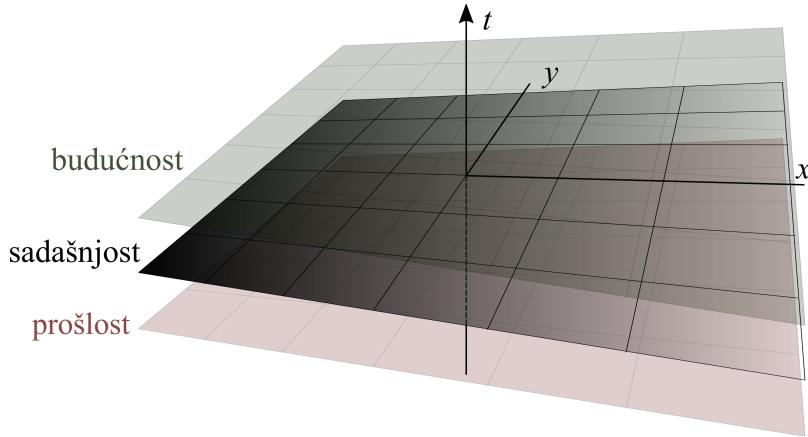
1. Maksvel-Lorencove jednačine su samo aproksimativne dok je fundamentalna teorija elektrodinamike invarijantna u odnosu na Galilejeve transformacije
2. Galilejeva relativnost je primenjiva samo na mehaniku. Za opis elektromagnetnih pojava postoji preferirani koordinatni sistem – Lorencov nepokretni etar
3. Galilejeva invarijantnost mehanike je aproksimativna i zakoni Njutnovе mehanike se moraju modifikovati

Imajući u vidu značajne uspehe koje su Njutnova mehanika i Maksvel-Lorencova elektrodinamika postigle, većini fizičara je kao najverovatnija izgledala opcija 2.. Dakle, kao veoma značajan zadatak se postavio merenje brzine pokretnih tela (recimo, Zemlje) u odnosu na etar. Negativan rezultat Majkelson-Morlijevog eksperimenta je zbog toga došao kao veliko iznenadenje.

Ajnštajnov fundamentalni doprinos sa specijanom teorijom relativnosti (STR) se ogledao u velikom uprošćavanju problema odnosa mehanike i elektrodinamike. Naime, on je pokazao da se svi postojeći eksperimentalni rezultati mogu objasniti ako se prihvate sledeći postulati:

1. Zakoni fizike su invarijantni za posmatrače u inercijalnim sistemima reference
2. Brzina svetlosti je konstantna i ne zavisi od posmatrača

Direktna posledica ovih postulata je modifikovanje Njutnovе mehanike, odnosno, isticanje Lorencovih transformacija naspram Galilejevih. Budući da se Lorencovim transformacijama povezuju prostorne i vremenske koordinate događaja, pojmovi apsolutne dužine predmeta ili apsolutne istovremenosti između događaja gube smisao. Prema tome, posmatrači koji se nalaze u različitim inercijalnim sistemima mogu nuditi različite interpretacije istih fizičkih procesa.



Slika 4.1: Apsolutno vreme Njutnove fizike: svi događaji koji se dešavaju u naznačenim xy -ravnima su istovremeni; događaji koji se odigravaju u crvenoj ravni prethode onim iz sive, a događaji iz zelene se odigravaju nakon događaja iz sive ravni. Ova podela je podjednako dobra za sve posmatrače, odnosno ne zavisi od njihovog kretanja.

Na primer, jedan od ključnih pojmova Njutnove mehanike je tzv. absolutno vreme. Ono teče podjednako za sve posmatrače, tj. ne nezavisi od njihovog kretanja. U odnosu na tok absolutnog vremena se za svaki događaj, na jedinstven način *za sve* posmatrače mogu odrediti događaji koji mu prethode, koji se dešavaju u isto vreme sa njim, kao i oni koji se nalaze u budućnosti datog događaja (Videti Sl. 4.1). Ispostavlja se da ovakva podela, kao i pojам absolutnog vremena, nisu u skladu sa eksperimentalnim podacima i STR.

Jedan od problema koji prate uspešno savladavanje osnova STR je činjenica da se relativistički efekti u mehanici javljaju na brzinama koje nisu dostupne svakodnevnom iskustvu pa je jako teško izvesti eksperimente u srednjoškolskoj laboratoriji koji bi ih predstavili đacima. Zbog toga alternativni pristupi, poput demonstracija predstavljenih u ovom poglavlju, mogu biti od velike pomoći kako učenicima koji se po prvi put sreću sa STR, tako i nastavnicima koji predaju to gradivo.

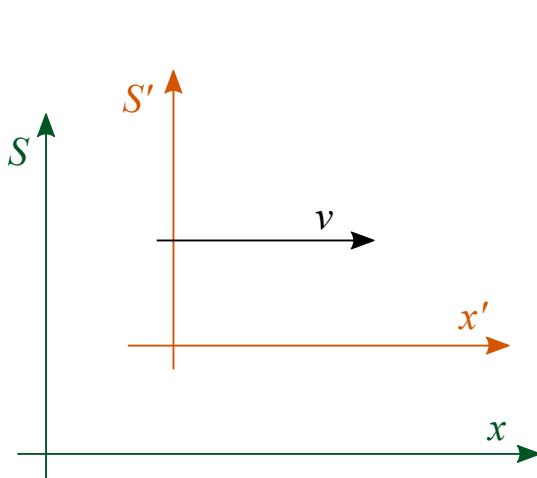
4.1 Geometrija STR

4.1.1 Lorencove transformacije i relativna istovremenost događaja

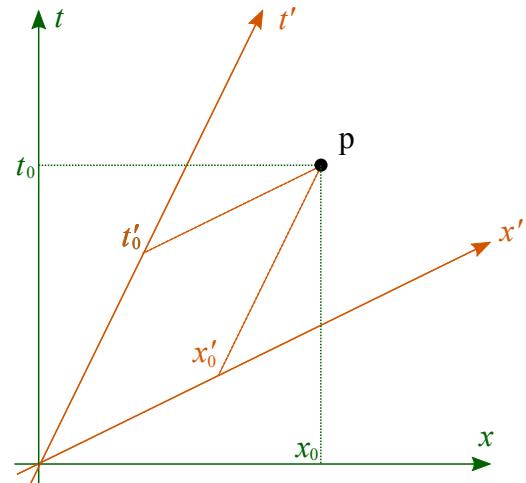
Kao što je već napomenuto, Lorencove transformacije povezuju koordinate u dva inercijalna sistema reference. Neka se, radi jednostavnosti, sistem S' (sa koordinatama t', x', y' i z') kreće konstantnom brzinom v duž x -ose koordinatnog sistema S (u kojem su koordinate t, x, y i z) tako da su x i x' ose stalno paralelne (videti Sl. 4.2). Lorencove transformacije u ovom slučaju glase [Žigman, V. (1997); Mušicki, Dj. (1981)]:

$$t' = \frac{t - (v/c^2)x}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z \quad (4.1)$$

pri čemu je sa c označena brzina svetlosti. Jednačine (4.1) je moguće rešiti po t, x, y i z . Tako



Slika 4.2: Dva inercijalna koordinatna sistema: sistem \$S'\$ se kreće konstantnom brzinom \$v\$ u odnosu na sistem \$S\$ duž \$x\$– ose tako da im se \$y\$ i \$y'\$, odnosno \$z\$ i \$z'\$ ose poklapaju.



Slika 4.3: Predstavljanje koordinatnih osa sistema \$S'\$ u koordinatnom sistemu \$S\$.

dobijamo inverzne relacije

$$t = \frac{t' + (v/c^2)x'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad y = y', \quad z = z'. \quad (4.2)$$

Vidimo da se dva sistema jednačina razlikuju samo po predznaku brzine \$v\$ što vodi na dva ekivalentna opisa kretanja ova dva sistema. Po prvom, sistem \$S\$ miruje i gledano iz njega se sistem \$S'\$ kreće u pozitivnom smeru \$x\$-ose. Po drugom, potpuno ravноправном gledištu posmatrača iz sistema \$S'\$, sistem \$S\$ se kreće duž negativnog smera \$x'\$ ose. Inače, četvorodimenzionalni prostor sa koordinatama \$t, x, y, z\$, koje su u dva različita koordinatna sistema povezane Lorencovim transformacijama, naziva se prostor Minikovskog.

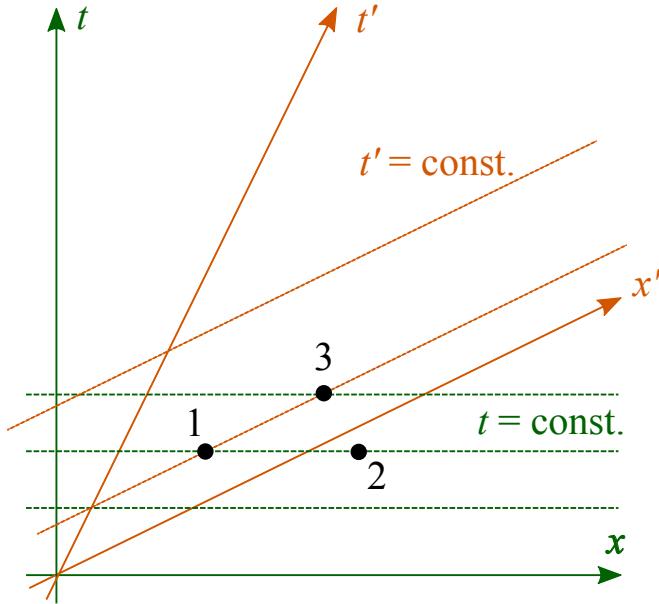
Budući da Lorencove transformacije "mešaju" prostorne i vremenske koordinate, za lakše razumevanje posledica Lorencovih transformacija se koriste tzv. prostorno-vremenski dijagrami [Žigman, V. (1997)]. Između ostalog, prostorno-vremenski dijagrami se mogu koristiti za prikazivanje koordinata nekog događaja u dva inercijalna sistema povezana transformacijama (4.1). Pokažimo prvo kako se u okviru \$S\$ sistema mogu predstaviti ose koordinatnog sistema \$S'\$. Koordinatna linija \$x'\$ je određena uslovom \$t' = 0\$, pa iz (4.1) vidimo da je to prava definisana sa

$$x' \text{ osa} : t = \frac{v}{c^2}x. \quad (4.3)$$

Slično, uslovom \$x' = 0\$ je određena \$t'\$ koordinatna osa. Ponovo je reč o pravoj liniji

$$t' \text{ osa} : t = \frac{x}{v}. \quad (4.4)$$

Događaj \$\mathbf{p}\$ koji u sistemu \$S\$ ima koordinate \$(t_0, x_0)\$ u sistemu \$S'\$ je određen koordinatama \$(t'_0, x'_0)\$ koje se nalaze pomoću (4.1) a koordinatne ose sistema \$S'\$ su date sa (4.3) i (4.4). Odnos koordinata nekog događaja u dva sistema, kao i uzajamni položaj osa ta dva sistema je prikazan na Sl. 4.3.



Slika 4.4: Za posmatrača iz sistema S su istovremeni događaji koji su definisani uslovom $t = \text{const}$ (horizontalne isprekidane zelene linije) a za posmatrača iz sistema S' su događaji određeni sa $t' = \text{const}$ (narandžaste linije)

Pomoću prostorno-vremenskih dijagrama se može ilustrovati i razlika u shvatanju pojma istovremenosti u Njutnovoj mehanici i STR. Kao što je već napomenuto, u Njutnovoj mehanici je pojam istovremenosti apsolutan za sve posmatrače i svi događaji imaju jedinstven skup istovremenih, prošlih i budućih događaja (Sl. 4.1). Nasuprot tome, u teoriji relativnosti, pojam istovremenosti *zavisi* od izbora koordinatnog sistema. Situacija je šematski prikazana na Sl. 4.4. U sistemu S su istovremeni događaji određeni uslovom $t = \text{const}$: geometrijski gledano, to su prave linije u tx -ravni koje su paralelne sa x -osom. Recimo, za posmatrača iz sistema S , događaji 1 i 2 sa Sl. 4.4 su istovremeni, a događaji 1 i 3 nisu. Sa druge strane, u sistemu S' su istovremeni oni događaji čije koordinate zadovoljavaju uslov $t' = \text{const}$ i to su prave linije paralelne sa x' osom koja je definisana u (4.3). Tako su za posmatrača iz sistema S' istovremeni događaji 2 i 3. Kao što se lepo vidi sa Sl. 4.4, događaji 1 i 2, koji su istovremeni u sistemu S *nisu* istovremeni za posmatrače iz sistema S' . Činjenica da istovremenost događaja zavisi od sistema u kojem se posmatrači nalaze je uzrok mnogih naočiglednih paradoksa. Jedan od njih je i paradoks automobila i garaže koji je detaljnije diskutovan u Odeljku 4.2.2.

Treba napomenuti da postoji veličina koja, za razliku od vremenskog intervala između događaja, jeste invarijantna u odnosu na Lorencove transformacije. To je prostorno-vremenski interval¹:

$$\Delta s^2 = c^2 \Delta t^2 - \Delta x^2 - \Delta y^2 - \Delta z^2 = c^2 \Delta t'^2 - \Delta x'^2 - \Delta y'^2 - \Delta z'^2. \quad (4.5)$$

Ako je $\Delta s^2 > 0$, kaže se da je interval vremenskog tipa i tada je uvek moguće naći koordinatni sistem u kojem se dva događaja, povezana intervalom vremenskog tipa, dešavaju sukcesivno u istoj tački prostora ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$). Sa druge strane, ako je $\Delta s^2 < 0$, kaže se da je

¹Nekada se prostorno-vremenski interval u STR jednostavno naziva intervalom između događaja

pitanju interval prostornog tipa. Tada je uvek moguće pronaći sistem reference u kojem se dva događaja, povezana intervalom prostornog tipa, odigravaju istovremeno ($\Delta t = 0$).

4.1.2 Posledice Lorencovih transformacija

Osnovni efekti kroz koje se ispoljavaju specifičnosti Lorencovih transformacija su kontrakcija dužine i dilatacija vremena [Mušicki, Dj. (1981); Žigman, V. (1997)]. Ove pojave igraju važnu ulogu i u velikom broju naočiglednih paradoksa STR zbog čega im je potrebno posvetiti posebnu pažnju.

Pretpostavimo da se u sistemu S' nalazi štap dužine l_0 koji leži duž x' ose. Drugim rečima ako je x'_1 prostorna koordinata koja odgovara početnoj tački štapa a x'_2 koordinata vrha štapa, imamo $x'_2 - x'_1 = l_0$. Podrazumeva se da su koordinate x'_1 i x'_2 određivane istovremeno za posmatrača iz sistema S' , iako sam izbor trenutka t' u kojem se vrši to određivanje nije bitan. Sa druge strane, koordinate početka i kraja štapa, za posmatrača iz sistema S su određene sa

$$x'_1 = \frac{x_1 - vt_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad x'_2 = \frac{x_2 - vt_2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (4.6)$$

Iz gornje jednačine nalazimo

$$l_0 = x'_2 - x'_1 = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \quad (4.7)$$

Ako koordinate (x_1, t_1) i (x_2, t_2) opisuju dva događaja koji predstavljaju merenje dužine štapa u sistemu S , tada se mora uzeti $t_1 = t_2$ pa nalazimo

$$x_2 - x_1 \equiv l = l_0 \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}. \quad (4.8)$$

Gornja jednakost se interpretira kao efekat kontrakcije dužine: štap koji miruje u sistemu S' za posmatrača iz sistema S izgleda kraći za faktor $\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}$.

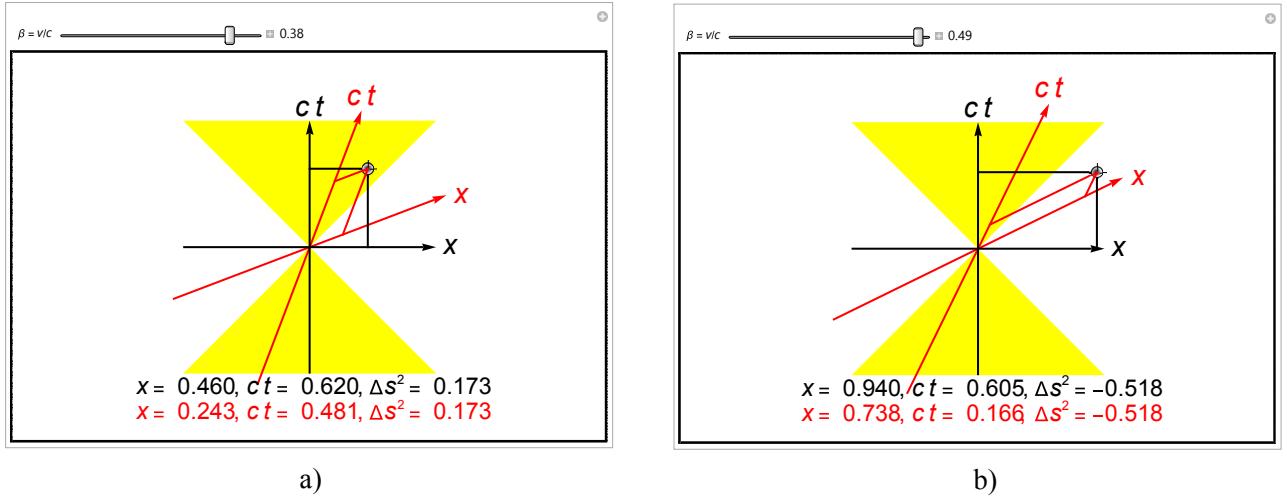
Kako bismo izveli jednakost koja opisuje dilataciju vremena, posmatrajmo dva događaja koji se u S' sistemu odigravaju u istoj prostornoj tački: $x'_1 = x'_2, y'_1 = y'_2$ i $z'_1 = z'_2$. Takođe, neka se prvi događaj odigrao u trenutku t'_1 a drugi u trenutku t'_2 . Vremenske koordinate ovih događaj u sistemu S su

$$t_1 = \frac{t'_1 + (v/c^2)x'_1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \quad t_2 = \frac{t'_2 + (v/c^2)x'_2}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (4.9)$$

tako da je

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} \quad (4.10)$$

Dakle, za posmatrača iz sistema S , vremenski interval Δt je duži od vremenskog intervala $\Delta t'$ u sistemu S' .



Slika 4.5: Dvodimenzioni prostor Minikovskog: demonstracija prikazuje dva koordinatna sistema povezana Lorencovim transformacijama za dve različite vrednosti parametra β

4.2 Vizualizacija relativističkih efekata u mehanici

4.2.1 Prostor Minikovskog

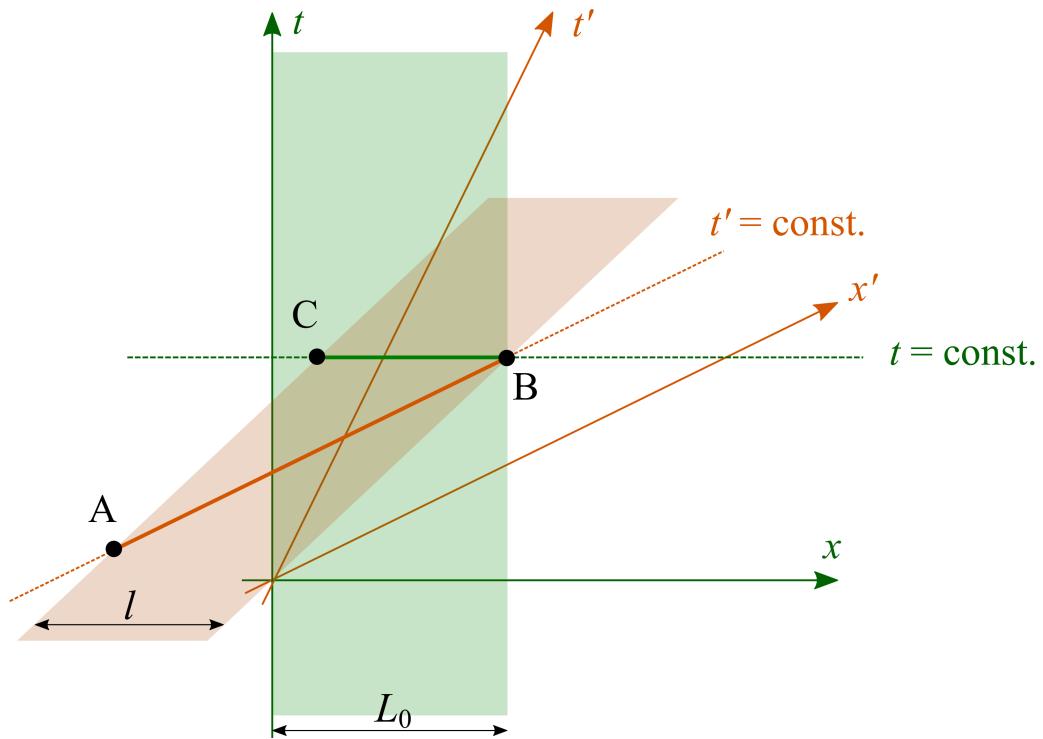
Prva demonstracija koju ćemo opisati ilustruje neke osobine dvodimenzionog prostora Minikovskog (jedna prostorna koordinata x i jedna vremenska koordinata t). Demonstracija, koja se može preuzeti sa [ove adresе](#) omogućava da se vizualizuje Lorencova transformacija u funkciji odnosa $\beta \equiv v/c$ (ovde v označava brzinu kretanja sistema S' ; radi preglednosti, sve veličine koje se odnose na ovaj sistem su prikazane crvenom bojom). Birajući odnos β i položaj tačke u $x - ct$ ravni, demonstracija prikazuje uzajamni odnos dva koordinantska sistema i eksplicitno navodi vrednosti koordinata u oba sistema, kao i vrednost prostorno-vremenskog intervala. Jedino fizičkih veličina su izabrane tako da su u x i ct izraženi u metrima. Tako, recimo, umesto transformacija iz (4.1) imamo

$$ct' = \frac{ct - \beta x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \textcolor{red}{ct}, \quad x' = \frac{x - \beta ct}{\sqrt{1 - \beta^2}} \equiv \textcolor{red}{x}. \quad (4.11)$$

Dva primera prikaza ove demonstracije su dati na Sl. 4.5.

Na Sl. 4.5 a) je prikazan odnos koordinatnih osa pri $\beta = 0.38$. Vrednost prostorno-vremenskog intervala koja se navodi je $\Delta s^2 = 0.173$ i odnosi se na dva događaja od kojih je prvi sa koordinatama ($ct = 0, x = 0$) a drugi sa koordinatama ($ct = 0.62, x = 0.46$) za posmatrača u sistemu S . Koordinate pomenuta dva događaja, za posmatrača iz sistema S' su ($\textcolor{red}{ct} = 0, \textcolor{red}{x} = 0$) i ($\textcolor{red}{ct} = 0.481, \textcolor{red}{x} = 243$). Lako je proveriti da su vrednosti koordinata događaja u sistemu S' dobijene od koordinata iz sistema S transformacijama navedenim u (4.11). Pošto je $\Delta s^2 > 0$, ova dva događaja su povezana intervalom vremenskog tipa. Slično, na Sl. 4.5 b) je prikazana situacija u kojoj su dva događaj povezana intervalom prostornog tipa.

Konačno, treba napomenuti da je maksimalna moguća vrednost parametra $\beta = 0.5$ kao i da je moguće birati smer kretanja sistema S' . Žutom bojom je predstavljen tzv. svetlosni konus. Njega sačinjavaju svi događaji koji su povezani sa događajem iz koordinatnog početka



Slika 4.6: Prostorno-vremenski dijagram koji opisuje paradoks automobila i garaže. Zeleni koordinatni sistem (S) je vezan za garažu a narandžasti za automobil. Za posmatrača iz S , u trenutku t , automobil je predstavljen zadebljanom zelenom linijom koja spaja događaje B i C. Za posmatrača iz S' , u trenutku t' kada prednji kraj automobila stiže do zida garaže, automobil je predstavljen narandžastom zadebljanom linijom – pravom AB (videti tekst).

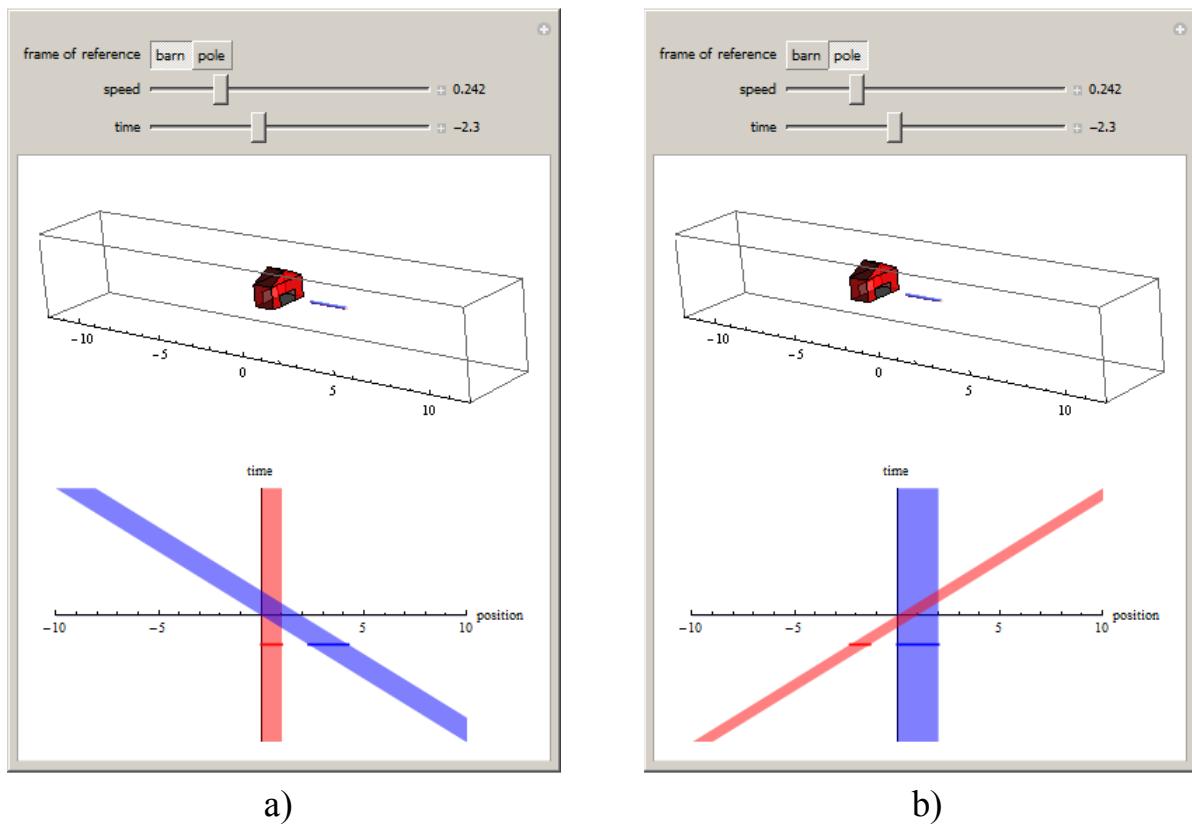
intervalom vremenskog tipa (kako u njegovoj prošlosti, tako u njegovoj budućnosti).

4.2.2 Paradoks automobila i garaže

Kontrakcija dužine, u kombinaciji sa relativnošću istovremenosti, može da prouzrokuje različite pogrešne interpretacije relativističkih efekata. Jedan poznati primer je tzv. paradoks automobila i garaže [Radovanović, V. (2015)].

Navodni paradoks se sastoji u sledećem. Prepostavimo da automobil dužine l_0 pokušavamo da parkiramo u garažu dužine $L_0 < l_0$, tako da automobil ceo stane unutra. Na prvi pogled, to je nemoguće. Međutim, pošto znamo za efekat kontrakcije dužine, možemo vozaču automobila predložiti da vozi automobil jako brzo. Ako je brzina kretanja automobila v takva da je $l_0\sqrt{1 - (v/c)^2} < L_0$, za posmatrača koji miruje pored garaže automobil izgleda kraće i prema tome može da stane u garažu². Sa druge strane, pošto i vozač automobila poznae osnove STR, on se buni i tvrdi da predloženo rešenje nije dobro. Naime, iz *njegovog* referentnog sistema, automobil miruje a garaža se kreće prema njemu. Zbog toga će garaža izgledati još kraća i tek tada automobil neće moći da stane u nju. Prirodno se nameće važno pitanje: Da li će

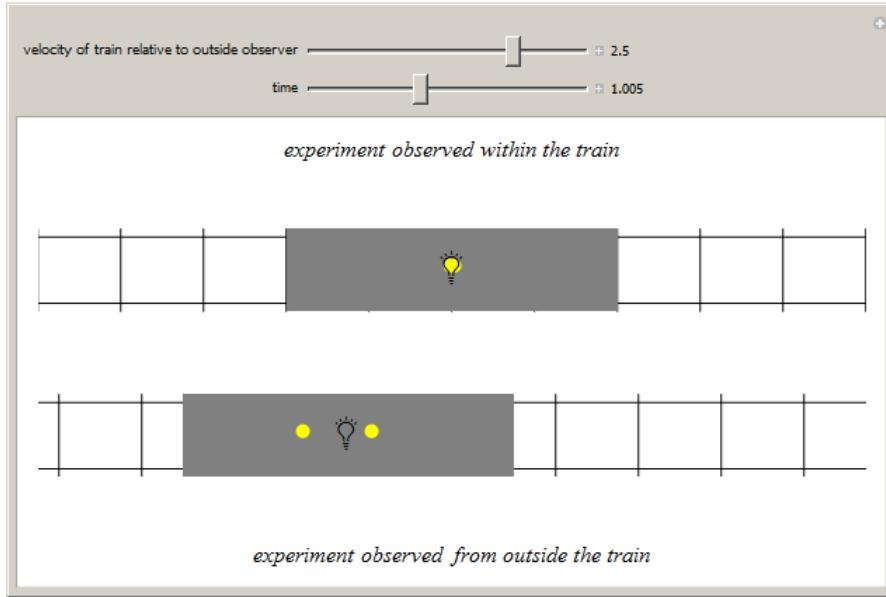
²Zanemarujemo činjenicu da će taj automobil očigledno moći samo jednom da se na ovaj način parkira u datu garažu



Slika 4.7: Prostorno-vremenski dijagram koji opisuje paradoks automobila i garaže. Zeleni koordinatni sistem je vezan za garažu a narandžasti za automobil. Za posmatrača iz S , u trenutku t , automobil je predstavljen zadebljanom zelenom linijom koja spaja događaje B i C. Za posmatrača iz S' , u trenutku t' kada prednji kraj automobila stiže do zida garaže, automobil je predstavljen narandžastom zadebljanom linijom (videti tekst).

automobil moći da stane u garažu ako se kreće doboljno brzo? Odnosno, koji posmatrač je u pravu?

Kratak odgovor bi glasio: oba posmatrača su u pravu, jer događaji koji su istovremeni u jednom sistemu ne moraju da budu istovremeni u drugom. Obrazložimo ovo malo detaljnije. U tu svrhu ćemo nacrtati prostorno-vremenski dijagram koji prikazuje prolazak automobila kroz garažu iz nepokretnog sistema (posmatrač koji stoji pored garaže) i iz sistema vezanog za automobil (sistem vozača automobila). Dijagram je prikazan na Sl. 4.6. Koordinate (t, x) se odnose na sistem vezan za garažu a koordinate (t', x') za sistem vozača automobila. U sistemu vezanom za garažu, garaža miruje. Zbog toga je garaža na prostorno-vremenskom dijagramu predstavljena pomoću zelene osenčene oblasti (beskonačno dugi pravougaonik širine L_0). Slično, u sistemu S se automobil kreće konstantnom brzinom. Tada je, u sistemu S , automobil predstavljen oblašću prostor-vremena koja se nalazi između dve linije konsantnog nagiba (narandžasta oblast). Rastojanje između tih linija zavisi od brzine kretanja automobila. Ako je brzina automobila v , tada je rastojanje između pomenute dve linije, koje opisuju početak i kraj automobila, dato sa $l = l_0 \sqrt{1 - (v/c)^2}$. Ako je v dovoljno veliko, biće $l < L_0$ i postojaće oblast na prostorno-vremenskom dijagramu za koju se automobil u potpunosti nalazi u garaži.



Slika 4.8: Demonstriranje relativnosti pojma istovremenosti: Posmatrač koji stoji u vagonu registruje određene istovremene događaje koji nisu istovremeni za posmatrača koji stoji pored pruge (videti tekst).

Takva je, recimo, situacija opisana događajima B i C. Događaj B daje jednu poziciju prednjeg kraja automobila, a događaj C poziciju zadnjeg kraja automobila. Dakle, u naznačenom trenutku t , oba kraja automobila su u garaži i posmatrač vezan za garažu je u pravu. Međutim, ovi događaji nisu istovremeni za posmatrača iz S' . Kada prednji kraj automobila dođe do zida garaže (događaj B), u naznačenom trenutku t' , zadnji kraj automobila još uvek nije ušao u garažu (događaj A). Prema tome, i drugi posmatrač je u pravu. Sa njegove, podjednako ispravne tačke gledišta, automobil ne može da stane u garažu.

WDP demonstracija koja se bavi paradoksom automobila i garaže se može preuzeti na [ovoju internet adresi](#). Korisniku je omogućeno da bira između dva koordinatna sistema: prvi je vezan za garažu, a drugi za automobil koji je reprezentovan plavim cilindrom³. Ako se izabere sistem u kojem garaža miruje, ona je na prostorno-vremenskom dijagramu reprezentovana uspravnim crvenim pravougaonikom a automobil plavim paralelogramom. Za dovoljno veliko β (koje se menja od 0 do 1), moguće je automobil u potpunosti smestiti u garažu. Vremenska evolucija se može zadati menjanjem parametra t . Na Sl. 4.7 je prikazana situacija u kojoj brzina automobila još uvek nije dovoljno velika da bi efekat kontrakcije dužine dovoljno skratio automobil i za posmatrača iz sistema S , on ne može da stane u garažu. To će se dogoditi za $v \approx 0.87$. Naime, u demonstraciji je uzeto $l_0 = 2L_0 = 2$, pa je tada $\sqrt{1 - 0.88^2} \approx 0.5$ i automobil tačno staje u garažu. Slično, moguće je ceo proces posmatrati iz sistema vezanog za automobil. U njemu je automobil predstavljen vertikalnim plavim cilindrom. Pošto je $l_0 > L_0$, ne postoji takva brzina za koju će se automobil naći u garaži u potpunosti. Posebno je ilustrativno razmatranje prostorno vremenskog dijagrama za velike brzine ($v > 0.9$). Tada, iz sistema vezanog za garažu, automobil lako staje unutra. Međutim, za posmatrača iz automobila,

³Originalni naziv ove demonstracije je "Length Contraction Visualization: Pole and Barn" tako da plavi cilindar zapravo predstavlja stub ili banderu; naravno, interpretacija paradoksa ostaje nepromenjena

garaža se skraćuje i automobil se ne može parkirati u nju u celosti. Prelazak sa jednog na drugi koordinatni sistem se vrši pomoću kontrola pole/barn. Takođe, pošto ova demonstracija sadrži prikaze trodimenzionih objekata, moguće je birati ugao posmatranja procesa (to važi za oba koordinatna sistema).

4.2.3 Relativnost istovremenosti

Konačno, treća demonstracija koju ćemo predstaviti ilustruje relativnost istovremenosti. Ranija diskusija ovog fenomena je bila formalna i zasnivala se na analizi Lorencovih transformacija. Demonstracija, koja se može preuzeti [ovde](#) ilustruje fenomen razmatrajući (misaoni) eksperiment.

Pretpostavimo da se vagon, u kojem se nalazi izvor svetlosti, kreće po šinama konstantnom brzinom v . Neka je izvor svetlosti smešten na sredinu vagona dok se na krajevima vagona, normalno na pravac prostiranja svetlosti, nalaze ogledala. Posmatrač iz vagona vidi da se fotoni, emitovani iz centra vagona, kreću u suprotnim smerovima. Pošto im je brzina ista, u istom trenutku (t'_1) će stići do ogledala, odbiti se i u istom trenutku ($t'_2 > t'_1$) se sresti u izvoru svetlosti.

Posmatrač sa nasipa će pomenute događaje opisati drugačije. Bez obzira što je brzina kretanja fotona ista i u sistemu vezanom za vagon i u sistemu vezanom za nasip, za posmatrača sa nasipa fotoni neće stići do ogledala u istom trenutku. Usled kretanja voza, foton koji se kreće suprotno od smera kretanja vagona prelazi manji put i prvi stigne do ogledala (t_1). Nakon toga, u trenutku $t_2 > t_1$, drugi foton stiže do ogledala. Posle odbijanja, fotoni menjaju smer kretanja i ponovo prelaze različite puteve. Kako se u razlike u putevima, zbog konstantnosti kretanja brzine voza, tačno kompenzuju, fotoni se sreću u izvoru svetlosti u trenutku $t_3 > t_2 > t_1$.

Izlaz pomenute demonstracije je prikazan na Sl. 4.8. Korisnik može da bira brzinu kretanja voza i da sve prati kroz promenu u vremenu. Promena brzine kretanja voza utiče na razliku u predenim putevima fotona i samim tim određuje razliku $t_2 - t_1$.

5

Zaključak

Savremene tehnologije menjaju ljudski život sve većom brzinom. Iako te promene ne moraju nužno biti pozitivne, potencijalne mogućnosti koje se otvaraju za nastavu iz prirodnih nauka su zaista velike i treba ih iskoristiti. Veliki broj različitih multimedijalnih uređaja omogućava da se učenicima približe pojave koje je teško dočarati pomoću standardnih metoda predavanja (tabla, kreda i ”obične” prezentacije) ili demonstracionih vežbi.

U ovom radu je, kroz nekoliko primera iz fizike, prezentovan sadržaj [Wolfram Demonstration Project-a](#). Na pomenutoj internet stranici se nalazi veliki broj (više hiljada) gotovih demonstracija/simulacija fenomena iz različitih oblasti prirodnih nauka. Svi kodovi su testirani od strane relevantnih stručnjaka čime je garantovano da ispunjavaju najviše standarde. Potrebno je naglasiti da se svi kodovi mogu preuzimati besplatno, kao i da je za njihovo pokretanje dovoljno instalirati [CDF-player](#) koji je dostupan na sajtu. Takođe, svi kodovi se mogu modifikovati, čime se otvara mogućnost za samostalni rad učenika. Dakle, lista potencijalnih korisnika DWP-a je zaista velika.

Najbolji efekat primene računarskih simulacija/demonstracija se verovatno postiže u učionicama koje sadrže tzv. pametnu tablu jer tada svi učenici mogu direktno pratiti izlaganje nastavnika. Naravno, ako se od učenika očekuje samostalni rad u vidu modifikovanja postojećih ili kreiranja novih računarskih simulacija, što zahteva viši nivo razumevanja gradiva, prednost imaju standardne računarske učionice.

Prilog

Dodatak A

Internet adrese korišćenih prezentacija

1. Internet stranica WDP-a: <http://demonstrations.wolfram.com/>
2. Demonstracija ZOE:
<http://demonstrations.wolfram.com/ConservationOfEnergyWithASimplePendulum/>
3. Demonstracija ZOI:
<http://demonstrations.wolfram.com/ConservationOfMomentumInACanoe/>
4. Demonstracija ZOMI:
<http://demonstrations.wolfram.com/SpinningIceSkater/>
5. Keplerovi Zakoni:
<http://demonstrations.wolfram.com/MotionOfAPlanetAroundAStar/>
6. Hodanje/trčanje po kiši:
<http://demonstrations.wolfram.com/ShouldYouWalkOrRunThroughTheRain/>
7. Ugaona brzina CD-a:
<http://demonstrations.wolfram.com/AngularVelocityOfACompactDisc/>
8. LHO 1:
<http://demonstrations.wolfram.com/SimpleHarmonicMotion/>
9. LHO 2:
<http://demonstrations.wolfram.com/SimpleHarmonicMotionForASpring/>
10. Rezultanta sila:
<http://demonstrations.wolfram.com/ResultantOfASumOfForces/>
11. Fluks elektrostatičkog polja:
<http://demonstrations.wolfram.com/ElectricFlux/>
12. Linije sila elektrostatičkog polja:
<http://demonstrations.wolfram.com/ElectricFieldLinesDueToACollectionOfPointCharges/>
13. Prostor Minikovskog:
<http://demonstrations.wolfram.com/MinkowskiSpacetime/>

14. Paradoks automobila i garaže:
<http://demonstrations.wolfram.com/LengthContractionVisualizationPoleAndBarn/>
15. Relativnost istovremenosti:
<http://demonstrations.wolfram.com/RelativityOfSimultaneity/>

Literatura

- Čaluković N. (2011). *Fizika 3 - za treći razred matematičke gimnazije*. Krug, Beograd.
- Einstein A. (1920). Ether and the Theory of Relativity. Predavanje održano na Univerzitetu u Lajdenu.
- Fajnman, R. (1999). *Karakter fizičkog zakona*. Klub NT, Beograd.
- Hailman, D. & Torrents, B. (2009). Soggy jogging in flatland: A 2d analysis of running in the rain. *Math Horizons*, 17, 22.
- Hübsch T. (2011). *Fundamentalna fizika elementarnih čestica*. Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad.
- Jackson, J. D. (1999). *Classical electrodynamics*. Wiley, New York.
- Maxwell, J. (1856). *On Faraday's Lines of Force*. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society*, X, 155.
- Milić, B. (1997). *Njutnova mehanika*. Studentski trg, Beograd.
- Milić, B. (2002). *Meksvelova Elektrodinamika*. Studentski trg, Beograd.
- Mladjenović, M. (2008). *Velikani Fizike*. PMF, Novi Sad.
- Mušicki, Dj. (1981). *Uvod u teorijsku fiziku – Elektrodinamika sa teorijom relativnosti*. Građevinska knjiga, Beograd.
- Mušicki, Dj., Milić, B. (1975). *Matematičke osnove teorijske fizike*. Naučna knjiga, Beograd.
- Radovanović, V. (2015). *Specijalna teorija relativnosti*.
- Smiljanić-Grujić, M. (2007). *Demonstracioni praktikum fizike u nastavi – diplomski rad*. Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad.
- Telegdi, V. L. (1990). *Mind over matter – Intellectual Content of Experimental Physics*.
- Tomašev, Ž. (2010). *Eksperimenti iz termodinamike u nastavi fizike za osnovnu školu – master rad*. Prirodno-matematički fakultet, Novi Sad.
- Žigman, V. (1997). *Specijalna teorija relativnosti – Mehanika*. Studentski Trg, Beograd.
- Žižić B. (1989). *Kurs opšte fizike – fizička mehanika*. Građevinska knjiga, Beograd.

Biografija



Nevena Radošević (Ljuština) je rođena 13. 02. 1982. godine u Novom Sadu. Završila je Gimnaziju "Isidora Sekulic", prirodno-matematički smer, a nakon toga i Prirodno matematički fakultet, smer diplomirani fizicar. Trenutno je zaposlena kao profesor fizike u Gimnaziji "Jovan Jovanović Zmaj".

Novi Sad, 4. 08. 2018.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije:

TD

Tip zapisa:

TZ

Vrsta rada:

VR

Autor:

AU

Mentor:

MN

Naslov rada:

NR

Jezik publikacije:

JP

Jezik izvoda:

JI

Zemlja publikovanja:

ZP

Uže geografsko područje:

UGP

Godina:

GO

Izdavač:

IZ

Mesto i adresa:

MA

Fizički opis rada:

FO

Naučna oblast:

NO

Naučna disciplina:

ND

Predmetna odrednica/ ključne reči:

PO

UDK

Čuva se:

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

Datum prihvatanja teme od NN veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik:

član:

član:

Monografska dokumentacija

Tekstualni štampani materijal

Master rad

Nevena Radošević

Prof. dr Maja Stojanović

Wolfram Demonstration Project kao interaktivni alat u nastavi fizike

srpski (latinica)

srpski/engleski

Srbija

Vojvodina

2018

Autorski reprint

Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

5 poglavlja/1 prilog /53 strane /18 literarnih citata/37 slika

Fizika

Metodika nastave fizike

Računarske demonstracije, multimedijalni pristup nastavi, Wolfram Demonstration Project

Biblioteka departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu

nema

U radu je predstavljena računarska platforma za multimedijalnu i interaktivnu demonstraciju fizičkih pojava - Wolfram Demonstration Project. Kroz više primera iz Njutnove mehanike, elektrodinamike i specijalne teorije relativnosti, prikazane su mogućnosti WDP-a u nastavi fizike namenjenoj učenicima gimnazija. Razmatrani su primeri za redovnu nastavu, kao i oni namenjeni radu sa darovitim učenicima.

April 2018

13.8.2018.

Prof. dr Milan Pantić

Prof. dr Maja Stojanović (mentor)

Doc. dr Ivana Bogdanović

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type:

DT

Type of record:

TR

Content code:

CC

Author:

AU

Mentor/comentor:

MN

Title:

TI

Wolfram Demonstration Project as an interactive tool in teaching physics

Language of text:

LT

Language of abstract:

LA

Country of publication:

CP

Locality of publication:

LP

Publication year:

PY

Publisher:

PU

Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

PP

Physical description:

PD

Scientific field:

SF

Scientific discipline:

SD

Subject/ Key words:
SKW
Computer demonstrations, applications of multimedia in teaching physics,
Wolfram Demonstration Project

UC

Holding data:

HD

Note:

N

Abstract:

AB

This thesis presents, through several examples from Newtonian mechanics, electrodynamics and special theory of relativity, an interactive tool - Wolfram Demonstration Project. The text covers topics from standard high school physics as well as those oriented to gifted pupils.

Accepted by the Scientific Board:

ASB

April 2018.

Defended on:

DE

August 13. 2018.

Thesis defend board:

DB

President:

Prof. dr Milan Pantić

Member:

Prof. dr Maja Stojanović (mentor)

Member:

Doc. dr Ivana Bogdanović