UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU

Savremen pristup specijalnoj teoriji relativnosti

- diplomski rad -

Mentor:
Milica Pavkov – Hrvojević

Kandidat:
Nevena Ljuština

Novi Sad, 2008

Sadržaj

1 Uvod

" Slično muzici, matematika i matematička fizika su umetničke tvorevine. Kao i u muzici, treba da razlikujemo tehniku od ideja. Niko ne može dobro svirati Betovena, niti iko može pisati naučne članke o teoriji relativnosti ako nije savladao tehniku. Ipak, isto kao što čovek može osetiti duboko uzbudjenje slušajući Betovena iako uopšte ne poznaje tehniku sviranja, tako se može osetiti duboko zadovoljstvo kad se shvate osnovne ideje teorije relativnosti čak iako se ne razume matematička tehnika." (Leopold Infeld)

Specijalna teorija relativnosti nastala je zbog protivrečnosti koje su u XIX veku postojale izmedju teorije i eksperimenta. Tada je fizikom i prirodnim naukama vladala mehanika i teorija polja. Smatralo se da se sve oko nas može objasniti Njutnovim zakonima koji glase:
1) Ako na telo ne deluje spoljašnja sila ono miruje ili se kreće ravnomerno i pravolinijski.
2) Ubrzanje tela proporcionalno je spoljašnjoj sili koja deluje na njega.
3) Sila akcije i sila reakcije su jednake po pravcu i intenzitetu, a suprotne po smeru.
Zakone moženo matematički izraziti kao:

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= 0, \\ m\vec{a} &= \vec{F}, \\ \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Njutnovi zakoni formulisani su za inercijalne sisteme reference, odnosno sisteme koji se u odnosu na postulirani apsolutno nepokretni sistem reference kreću ravnomerno i pravolinijski. Njutnova mehanika se zasniva na stabilnosti i nepromenljivosti mase i apsolutnom prostoru i vremenu, odnosno prostoru i vremenu koji čine univerzalnu strukturu vasione.

Da bi definisao prostor i vreme Njutn uvodi vreme koje jednako protiče za sve sisteme i prostor koji apsolutno miruje u vasioni. U odnosu na apsolutni sistem vreme je homogeno, svi trenuci su ravnopravni i prostor je takav da su sve tačke i pravci ravnopravni, odnosno prostor je homogen i izotropan. Apsolutni prostor je beskonačan, nepokretan, sveprisutan, dok apsolutno vreme protiče nezavisno od nas. Apsolutnost prostora se ogleda u tome što su izmerena rastojanja ista bez obzira na inercijalni sistem reference. Apsolutnost vremena ispoljava se u tome što su mereni intervali vremena nezavisni od inercijalnog sistema reference.

Razotkriti tajanstvenost prirode znači razumeti je i predvideti budućnost. U mehanici ponašanje nekog sistema u prethodnom i sledećem trenutku odredjeno je trenutnim položajima i brzinama svih čestica u sistemu i silama koje deluju izmedju njih. Kretanje čestica odredjujemo pomoću sistema reference koje im pridružujemo. Bez obzira da li je sistem reference nepokretan ili se kreće ravnomerno i pravolinijski u odnosu na apsolutni sistem svi mehanički procesi dešavaju se na isti način i merenjem ne možemo da primetimo razliku. Iz toga sledi da svi zakoni klasične mehanike moraju imati isti oblik u svim inercijalnim sistemima reference. To je tzv. Galilejev (klasični) princip relativnosti.

Osim Njutnovskog modela sveta u XIX veku razvijala se i elektromagnetna teorija. Maksvel je bio suočen sa eksperimentalnim rezultatima Faradeja po kojima su električno i magnetno polje realno postoje. Ovi eksperimenti su bili u suprotnosti sa Njutnovom slikom u kojoj su polja samo matematičke konstrukcije za opisivanje dejstva na daljinu medju česticama. Kao rezultat Maksvelovog rada nastale su Maksvelove jednačine, koje za elektromagnetno polje u vakuumu glase:

1) Naelektrisanja stvaraju električno polje, čije su linije sila otvorene i imaju početak i kraj u ovim naelektrisanjima.

2) Magnetni polovi ne postoje, pa magnetne linije sila nemaju ni početak ni kraj, tj. one su uvek bezizvorne i u većini slučajeva zatvorene.

3) Menjanjem magnetnog polja stvara se električno polje, čije su linije sila zatvorene i obavijaju magnetne linije sila.

4) Stacionarnim kretanjem naelektrisanja kao i menjanjem električnog polja stvara se magnetno, čije linije sila obavijaju strujne linije odnosno električne linije sila.

Matematički jednačine se izražavaju:

$$\begin{aligned} \mathrm{div}\,\vec{E} &= \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \\ \mathrm{div}\,\vec{B} &= 0, \\ \mathrm{rot}\,\vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \\ \mathrm{rot}\,\vec{B} &= \mu_0\vec{j} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \end{aligned} \tag{2}$$

Jednačine potpuno odredjuju jačine električnog i magnetnog kao funkcije položaja i vremena pri datoj prostorno vremenskoj raspodeli naelektrisanja i struja. Jedna od posledica Maksvelovih jednačina bila je da oscilujuće magnetno polje stvara oscilujuće električno polje (što je Faradej eksperimentalno pokazao) i oscilujuće električno polje proizvodi oscilujuće magnetno polje (što je Maksvel teorijski zaključio), pri čemu se stvara elektromagnetni talas. Prema Maksvelovoj teoriji svetlost je elektromagnetni talas koji se prostire konačnom brzinom koja u vakuumu iznosi:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = 2.99792458 \cdot 10^8 \text{ m/s}. \tag{3}$$

Medjutim prema mehaničkoj teoriji (zakon sabiranja brzina) brzina svetlosnog signala zavisi od sistema reference.

Fizičari XIX veka želeli su da pomire i ujedine mehaniku i teoriju polja i zbog toga uvode pojam etra, kroz koji se elektromagnetni talasi kreću slično kao što se mehanički (npr. zvučni) talasi kreću kroz odredjenu sredinu. Prema ovakvoj slici postojao je jedan izdvojen sistem u odnosu na koji etar apsolutno miruje, odnosno jedan i samo jedan sistem u kome je brzina svetlosti c, što je bilo u suprotnosti sa Galilejevim principom relativnosti koji kaže da su svi inercijalni sistemi ravnopravni. U mehanici etra pretpostavljalo se da ako putujemo veoma brzo u nekom pravcu i smeru, tada bi brzina svetlosti u istom pravcu i smeru trebala da bude veća od c, dok brzina svetlosti u suprotnom smeru treba da bude manja od c. Uvodjenjem pojma etra moglo se merenjem brzine svetlosti u raznim sistemima utvrditi koji od tih sistema apsolutno miruje u odnosu na etar, samo je to još eksperimentalno trebalo pokazati.

Polazeći od toga Majkelson i Morli pokušali su da odrede apsolutno kretanje Zemlje u odnosu na etar. Ovaj eksperiment je jedan od najznačajnijih eksperimenata u istoriji fizike. On se sastojao u merenju brzine svetlosti u pravcu kretanja Zemlje (prvo u istom, a zatim u suprotnom smeru) i brzine normalno na pravac kretanja zemlje. Ishod ovog eksperimenta pokazao je da ne postoji nikakva razlika u brzinama prostiranja svetlosti u različitim pravcima, odnosno da u inercijalnom sistemu reference brzina svetlosti uopšte ne zavisi od kretanja izvora niti posmatrača. Ovakav rezultat srušio je pojam etra, jer je zapaženo da se Zemlja ne kreće u odnosu na etar i doveo je u protivrečnost teoriju polja i mehaniku.

Tada je postalo jasno da ovakvu fizičku realnost treba uporediti sa drugačijim apstraktnim svetom matematike, zbog čega nastaje nova teorija. Početkom XX veka niz otkrivenih pojava objašnjen je pomoću te nove slike koja se iskriztalizovala iz Maksvelove elektrodinamike. Tako je nastala specijalna teorija relativnosti. U ovom radu pokušala sam da predstavim specijalnu teoriju relativnosti na drugačiji pristupačniji način. Da bi slikovitije i detaljnije objasnila pojmove ove teorije koristila sam multimedijalne primere iz knjige: "Physlet Qantum Physics" (Mario Belloni, Wolfgang Christian, Anne J. Cox)

2 Postulati STR

"Najneshvatljivije na svetu je da je on shvatljiv." (Ajnštajn)

Specijalnu teoriju relativnosti formulisao je Albert Ajnštajn 1905, pretvorivši zamršene pojave u jedinstvenu teoriju. Ajnštajn je znao da ne treba da napusti princip relativnosti, jer zakoni fizike moraju biti invarijantni (imati isti oblik u svim inercijalnim sistemima reference), jer se i sve fizičke pojave koje oni opisuju odigravaju na isti način. Princip relativnosti klasične mehanike zasniva se na Galilejevim transformacijama. Medjutim ovaj princip nije bio uskladjen za Maksvelove jednačine. Zbog toga je bilo potrebno uspostaviti opštije transformacije izmedju koordinata istog dogadjaja u dva inercijalna sistema reference i proveriti da li su svi postojeći zakoni invarijantni u odnosu na te transformacije. Nova teorija morala je da uzme u obzir i konstantnost brzine svetlosti. Brzina svetlosti označava vrednost jedne prirodne konstante i ukazuje na to da postoji maksimalna, konačna brzina uzajamnog dejstva. Zbog toga je Ajnštajn odbacio pojmove apsolutnog prostora i vremena, prihvatio Lorencove transformacije i pomoću prethodnih zaključaka zasnovao Specijalnu teoriju relativnosti na dva postulata:

1) **Svi zakoni fizike su istog oblika u inercijalnim sistemima reference. Ne postoji izdvojeni, privilegovani, inercijalni sistem reference.**

2) **Brzina svetlosti u vakuumu, odnosno maksimalna brzina prostiranja interakcije, ista je u svim inercijalnim sistemima reference, nezavisno od relativnog kretanja izvora i posmatrača.**

1) i 2) su temelji na kojima je izgradjena STR, a sve ostalo je logično izvodjenje.

3 Prostor i vreme

" Šta je vreme? Jedna tajna - nesuštastvena a svemoćna. Jedan uslov sveta pojava, jedno kretanje povezano i pomešano sa postojanjem tela u prostoru i njihovim kretanjem. Da li bi bilo vremena kada ne bi bilo kretanja? I kretanja da nema vremena ? Upitaj se samo! Da li je vreme funkcija prostora? Ili obrnuto? Ili su oboje identični? Samo se upitaj! Vreme je delatno, ono ima glagolsku strukturu, ono "dozreva". Šta tu dozreva? Promena! Sada nije Tada, Ovde nije Tamo, jer je izmedju njih kretanje. Medjutim, pošto je kretanje kojim se meri vreme kružno i u sebi zatvoreno, to kretanje ujedno je i promena koju bismo tako mogli označiti kao mirovanje i zastoj, jer se Tada stalno ponavlja u Sada, Tamo u Ovde." (Tomas Man)

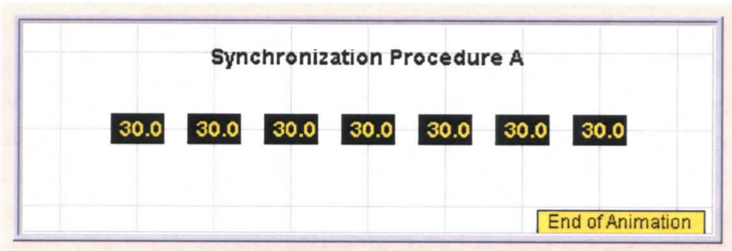
Da bi se STR razumela potrebno je na drugačiji način sagledati vreme i prostor.

3.1 Šta su istovremeni dogadjaji?

Dva dogadjaja su istovremena ako dva časovnika (bilo koji periodičan proces koji omogućava postavljanje etalona na vremenskoj osi) na mestu tih dogadjaja pokazuju isto. Ovi časovnici moraju imati isti ritam i moraju biti postavljeni na isto pokazivanje tj. sinhronizovani.

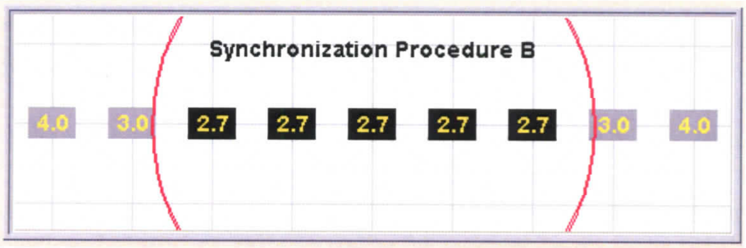
3.2 Postupak sinhronizacije časovnika

Postupak sinhronizacije časovnika možemo uraditi na 2 načina:
1)Svi časovnici sinhronizuju se na jednom mestu prema osnovnom časovniku. Zatim se časovnici polako prenose (da bi se dilatacija vremena zanemarila) u različite tačke prostora na jednaka rastojanja, tako da se formira trodimenzionalna rešetka. U animaciji je dat jednostavniji primer sa jednom dimenzijom.



Sl.1: 1. način sinhronizacije časovnika

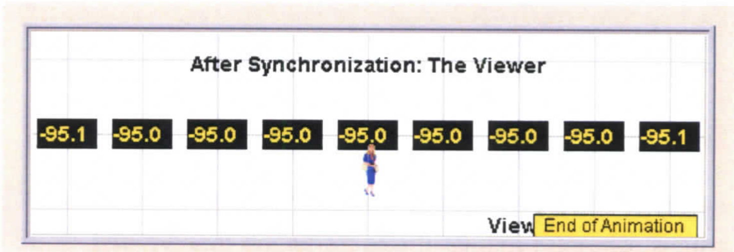
2) U različitim tačkama sistema na ravnomernim rastojanjima postave se časovnici. Od jednog podešenog časovnika u trenutku $t = t_0$ šalje se svetlosni signal do drugih i tek kada svetlosni signal stigne do njih oni se naviju. Pošto se svetlost kreće konačnom brzinom, potrebno je odredjeno vreme da svetlosni signal stigne do njih. Ako je τ vreme koje je potrebno svetlosti da stigne od početnog do nekog drugog časovnika, onda ćemo taj drugi časovnik u odredjenom trenutku naviti tako da pokazuje $t = t_0 + \tau$.



Sl.2: 2. način sinhronizacije časovnika

3.3 Posmatranje sinhronizovanih časovnika

Posmatrač koji stoji u nekoj odredjenoj tački koordinatnog sistema, nakon sinhronizacije časovnika neće za svaku tačku tog sistema moći da očita isto vreme jer je svetlosti koja ima konačnu brzinu potrebno odredjeno vreme da dodje do posmatrača. Ako se posmatrač kreće u prostoru, tada za iste tačke prostora, očitava različita vremena. On će videti približno sinhronizovane časovnike ako se nalazi na velikoj udaljenosti od sistema.

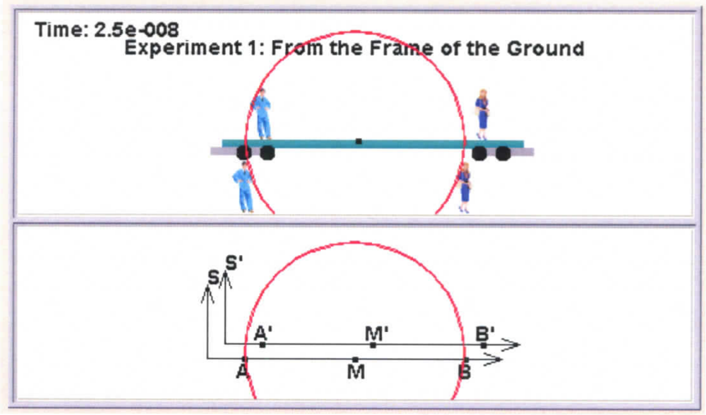


Sl.3: Posmatranje sinhronizovanih časovnika

Razlika izmedju klasičnih i relativističkih pojmova istovremenosti javlja se tek kada posmatramo dogadjaje i uporedjujemo eksperimentalne rezultate u dva različita sistema reference. Postavlja se pitanje da li su dva dogadjaja koja su istovremena u jednom sistemu reference, istovremena i u drugom? Klasična fizika odgovorila bi sa da. Časovnici ne menjaju svoj ritam prilikom kretanja. Vremenski intervali izmedju dva dogadjaja su isti bez obzira da li časovnik miruje ili se kreće jer je vreme apsolutno. Relativistička fizika postavila bi pitanje " Da li sat menja ritam kada se nalazi u kretanju?" Nijedan eksperiment koji se odnosio na kretanje "malim" brzinama nije mogao da odgovori potvrdno na ovo pitanje. Medjutim, šta bi se desilo kada bi brzine bile približne brzini svetlosti. Tada bi sat promenio svoj ritam. Dva dogadjaja koja su istovremena u jednom sistemu nisu istovremena u drugom, tako da ni apsolutno vreme ne postoji. Ovo se može pojasniti sledećim primerom.

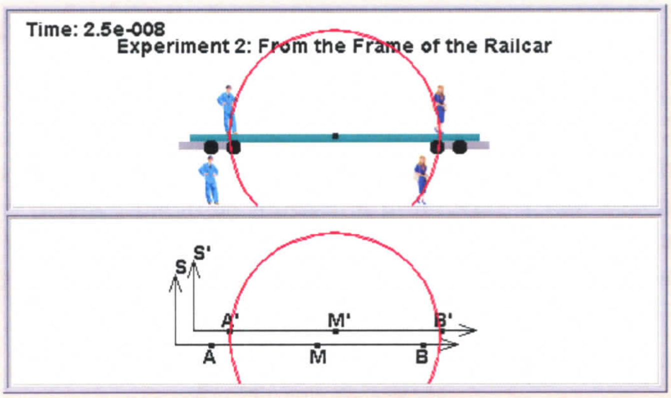
3.4 Primer - Istovremenost dogadjaja

U ovom primeru prikazana su dva koordinatna sistema S i S'. Jedinična duž na x osama ovih sistema je jedan metar, a na y osi jedinična duž je vreme koje je potrebno svetlosti da predje jedan metar ili 3,33 10^{-9} s. Sistem S je vezan za zemlju, dok je sistem S' vezan za kolica koja se nalaze na šinama. Na krajevima kolica: na zemlji nalaze se dva posmatrača A i B; a na kolicima posmatrači A' i B'. U početnom trenutku tačka u kojoj se nalazi posmatrač A poklapa se sa tačkom u kojoj se nalazi posmatrač A'; dok se B poklapa sa B'. Svetlosni signal se šalje iz tačke M (nalazi se na istoj udaljenosti od A i od B), odnosno M' (nalazi se na istoj udaljenosti od A' i B'). U isto vreme, kolica počinju da se kreću, odnosno S' se kreće uniformno u odnosu na S. Ako se posmatra iz sistema S, vidi se da svetlosni signal prvo stiže do A', zatim istovremeno u A i B i posle toga u B'.



Sl. 4: Istovremeni dogadjaji ako je sistem reference zemlja

Ako se posmatra iz sistema S', vidi se da svetlosni signal prvo stiže do B, zatim istovremeno u A' i B' i posle toga u A.



Sl. 4: Istovremeni dogadjaji ako su sistem reference kolica

4 Lorencove transformacije

Lorencove transformacije predstavljaju stub STR. Iz postulata sledi da Galilejeve transformacije ne mogu da se primene na sisteme koji se kreću brzinama koje su približne brzini svetlosti. Svaka fizička pojava odredjena je mestom (x, y, z) i vremenom t. Zbog toga bilo je potrebno pronaći način za nalaženje prostornih i vremenskih koordinata dogadjaja sistema S' ako su poznate koordinate u sistemu S i relativna brzina kretanja sistema S' u odnosu na S - u duž zajedničke ose. Lorencove transformacije imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
t' &= \frac{t-(u/c^2)x}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\
x' &= \frac{x-ut}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\
y' &= y, \\
z' &= z.
\end{aligned} \tag{4}$$

Obrnute transformacije iz S'u S dobijaju se zamenom u sa $-u$.

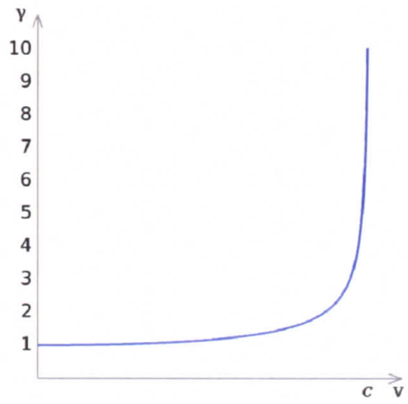
$$\begin{aligned}
t &= \frac{t'+(u/c^2)x'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\
x &= \frac{x'+ut'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\
y &= y', \\
z &= z'.
\end{aligned} \tag{5}$$

Uobičajne oznake koje se uvode su:

$$\beta = \frac{u}{c}, \tag{6}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Na datom grafiku za γ faktor vidi se da relativistički efekti postaju značajni tek za $u = 0.5c$.



Sl. 5: γ faktor

Vidimo da transformacije na nov način vezuju prostorne i vremenske koordinate nekog dogadjaja. Trenutak t' ne zavisi samo od trenutka t u kojem se ovaj dogadjaj odvija u S, već i od koordinate x u S. Zbog ovakve nerazdvojne povezanosti prostora i vremena uvodi se četvorodimenzioni prostorno - vremenski kontinuum, a jedan od osnovnih pojmova STR je dogadjaj odredjen skupom (x, y, z, t). Vreme nije apsolutno. Svaki sistem reference ima svoj prostor i vreme, a veza izmedju koordinata dogadjaja u različitim sistemima data je Lorencovim transformacijama.
Ako ove jednačine primenimo na Maksvelovu teoriju može se videti da se struktura Maksvelovih jednačina ne menja. Medjutim, to ne važi za Njutnovu mehaniku.
Zbog toga je bilo potrebno uopštiti zakone Njutnove mehanike.
Može se videti da u graničnom slučaju malih brzina u poredjenju sa c ($u \ll c$) Lorencove transformacije prelaze u Galilejeve. To je tzv. princip korespodencije.

5 Kontrakcija dužine i dilatacija vremena

Kontrakcija dužine i dilatacija vremena predstavljaju neposrednu posledicu Lorencovih transformacija.

5.1 Kontrakcija dužine

Posmatraju se dva koordinatna sistema S i S' i štap dužine l_0 u S'. S' se kreće u odnosu na S brzinom $\vec{u}$ duž zajedničke x ose. Krajevi štapa odredjeni su koordinatama x_1' i x_2' u S' koje se moraju posmatrati istovremeno. Iz Lorencovih transformacija dobija se

$$\begin{aligned} x_1' &= \frac{x_1 - ut_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \\ x_2' &= \frac{x_2 - ut}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \end{aligned}$$

Sledi da je:

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}. \tag{7}$$

Ako je:

$$\begin{aligned} l &= x_2 - x_1, \\ l_0 &= x_2' - x_1', \end{aligned}$$

sledi da je:

$$l = l_0\sqrt{1 - u^2/c^2}. \tag{8}$$

Iz jednačine (8) se vidi da je $l < l_0$, tj. posmatraču iz S dužina štapa izgleda skraćena faktorom $\sqrt{1 - u^2/c^2}$.

5.2 Dilatacija vremena

Posmatra se vremenski interval Δt_0 izmedju dva dogadjaja koji se dešavaju u sistemu S' na istom mestu $(x_1' = x_2')$. S' se kreće u odnosu na S brzinom $\vec{u}$ duž zajedničke x ose. Početak i kraj vremenskog intervala Δt_0, označeni su sa t_1' i t_2', odnosno $\Delta t_0 = t_2' - t_1'$. Iz Lorencovih transformacija dobija se :

$$
\begin{aligned}
t_1 &= \frac{t_1' + (u/c^2)x_1'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\
t_2 &= \frac{t_2' + (u/c^2)x_2'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.
\end{aligned}
$$

Sledi da je:

$$
t_2 - t_1 = \frac{t_2' - t_1'}{\sqrt{1-u^2/c^2}}.
$$

Ako je:

$$
\begin{aligned}
t_2 - t_1 &= \Delta t, \\
t_2' - t_1' &= \Delta t_0,
\end{aligned}
$$

sledi da je:

$$
\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \tag{9}
$$

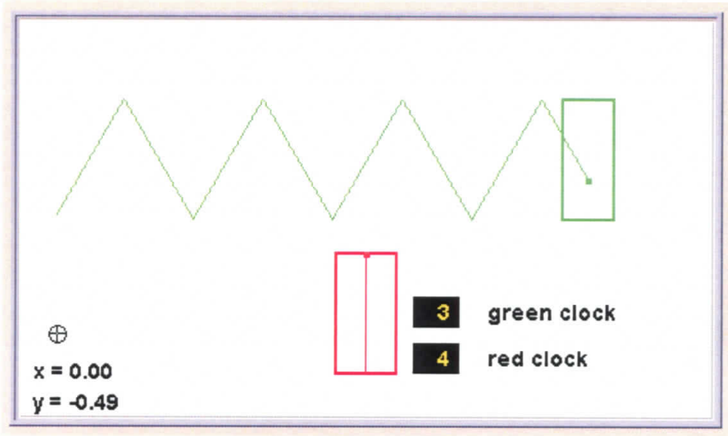
Iz dobijene jednačine vidi se da je $\Delta t > \Delta t_0$, tj. posmatraču u S vremenski interval Δt_0 izgleda produžen faktorom $\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}$.

Iz svega navedenog, sledi da u sistemu reference u kojem telo miruje, telo ima najveću dužinu, dok je vremenski interval izmedju dva dogadjaja, u tom sistemu najkraći.

5.3 Primer za dilataciju vremena i kontrakciju dužine

Dilatacija vremena i kontrakcija dužine mogu se objasniti pomoću primera koji koristi model svetlosnog časovnika. Svetlosni časovnik sastoji se iz kutije na čijem dnu se nalazi emiter svetlosnog signala koji je istovremeno i detektor, a na gornjoj stranici nalazi se ogledalo. Svetlosni signal se emituje, odbija od ogledala i detektuje se, što se registruje kao jedan otkucaj časovnika. Dužina kutije je $L_0/2 = 0,5$ m, pa je rastojanje koje svetlost prelazi za jedan otkucaj časovnika $L_0 = 1$ m ,to znači da je svaki otkucaj 3,33 $\cdot 10^{-9}$ s. U primerima su data dva svetlosna časovnika, crveni i zeleni. Posmatrač se nalazi u crvenom časovniku, a zeleni časovnik se kreće u odnosu na crveni brzinom $\vec{u} = 0,5c$.

A Dilatacija vremena

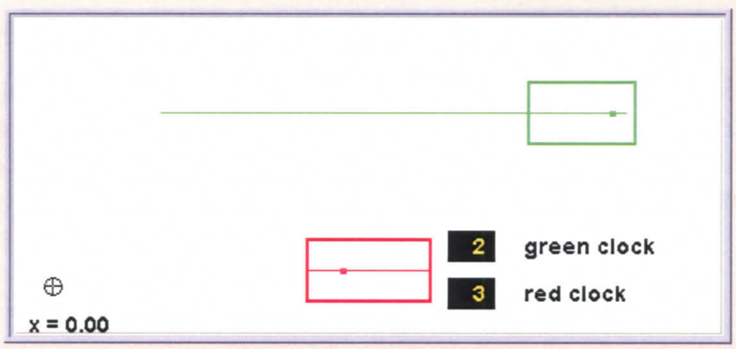


Sl. 6: Dilatacija vremena

U ovom primeru zanemaruje se kontrakcija dužine horizontalne strane časovnika. Kao što se vidi na slici, svetlosni signal u crvenom časovniku prelazi put L_0 za jedan otkucaj, dok će svetlost u zelenom časovniku gledano iz sistema crvenog časovnika prelaziti duži put, jer je putanja jedna cik - cak linija. Pošto je brzina svetlosti konstanta sledi da su posmatraču koji se nalazi u crvenom časovniku otkucaji zelenog časovnika sporiji, odnosno vremenski intervali izgledaju duži. Koliko su vremenski intervali duži može se dobiti i sa slike, ako se iskoristi Pitagorina teorema na deo cik cak linije. Ako je $c\Delta t'$ put koji predje svetlost u zelenom(pokretnom) časovniku ako se gleda iz sistema reference crvenog časovnika, $u\Delta t'$ rastojanje koje predje sam časovnik, a L_0 put koji prelazi svetlost ako se gleda iz sistema zelenog časovnika, može se napisati:

$$
\begin{aligned}
(c\Delta t')^2 &= (u\Delta t')^2 + L_0^2 \\
(1-\beta^2)\Delta t'^2 &= (L_0/c)^2 = \Delta t^2 \\
\Delta t' &= \gamma \Delta t, \\
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}
\end{aligned}
\tag{10}
$$

B Kontrakcija dužine



Sl. 7: Kontrakcija dužine

U ovom primeru zeleni i crveni časovnik zarotiraju se za 90°. Rezultati koji su dobijeni u primeru A (zeleni časovnik otkucava sporije) postoje i sada, a brzina svetlosti je konstantna, što znači da će posmatraču iz sistema reference crvenog zeleni časovnik izgledati skraćen. Kontrahovan je faktorom γ, zbog univerzalnosti brzine svetlosti.

6 Geometrijski prikaz dogadjaja

6.1 Apsolutne veličine u STR

Fizika je zanimljiva zbog apsolutnih veličina i zakona koji ne zavise od slučajnog stanja posmatrača. Apsolutne veličine u STR su : 1) brzina svetlosti 2) interval izmedju dogadjaja 3) sopstveno vreme

Interval izmedju dogadjaja je veličina koja odredjuje "rastojanje" izmedju dva dogadjaja (x_1, y_1, z_1, t_1) i (x_2, y_2, z_2, t_2) u inercijalnom sistemu S:

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 \tag{11}$$

Može se pokazati da je interval izmedju dogadjaja invarijantna veličina u odnosu na Lorencove transformacije, tj. ne menja se pri prelazu iz jednog u drugi inercijalni sistem. Ako je $s^2 > 0$ interval je vremenskog tipa i uvek se može naći sistem S' u kojem se dogadjaji sukcesivno dešavaju na istom mestu ($\Delta r' = 0$) Ako je $s^2 < 0$ interval je prostornog tipa i uvek se može naći sistem S' u kome su dogadjaji istovremeni ($\Delta t' = 0$), sistem S' u kome je redosled dogadjaja isti kao i u S ($\Delta t' > 0$) i sistem S'' u kojem je redosled dogadjaja izmenjen u odnosu na dogadjaje u sistemu S ($\Delta t' < 0$).

Sopstveno vreme je vreme koje se meri jednim časovnikom na istom mestu ($\Delta x = \Delta y = \Delta z$). Beskonačno mali sopstveni vremenski interval dobija se kao:

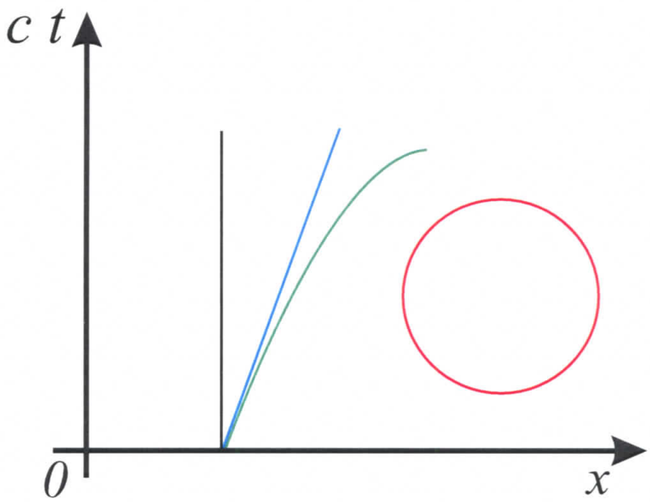
$$d\tau = \frac{ds}{c} \tag{12}$$

$d\tau$ je invarijantno u odnosu na Lorencove tranformacije. Iz formule za dilataciju vremena može se videti da je:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - u^2/c^2} \tag{13}$$

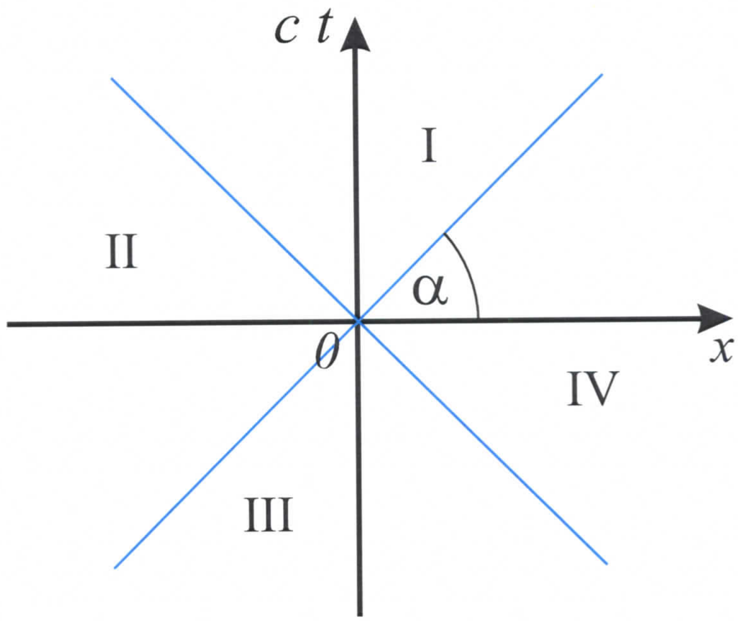
6.2 Prostorno - vremenski dijagrami

Za geometrijski prikaz dogadjaja (x, y, z, t) koristi se četvorodimenzionalan prostor, a dogadjaj se prikazuje kao tačka čije su koordinate x, y, z, ct (da bi vremenska osa imala istu jedinicu kao i prostorna) i koja se zove svetska tačka. Putanji koju svetska tačka opisuje odgovara svetska linija. Pošto je teško prikazati četvorodimenzioni prostor, obično se koristi dvodimenzionalni prostorni - vremenski kontinuum. Prikazujemo ga pomoću jedne prostorne (x ose) i jedne vremenske (ct ose). Mirovanje tela prikazano je crnom linijom, uniformno kretanje plavom linijom, ubrzano kretanje zelenom. Kriva koja ne može predstavljati svetsku liniju nekog materijalnog tela je npr. kružnica obojena crveno, jer telo ne može biti u isto vreme na dva različita mesta.



Sl. 8: Prostorno - vremenski dijagram

Kretanje čestice iz tačke $x = 0$, $t = 0$ (nulti dogadjaj) brzinom $\vec{u}$, možemo prikazati pomoću prave koja prolazi iz koordinatnog početka i nagnuta je prema ct osi pod uglom α čiji je tangens jednak brzini čestice. Ako je ta čestica npr. foton koji se kreće brzinom c, onda je $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Na slici (9) su prikazane prave koje predstavljaju prostiranje dva svetlosna signala u suprotnim smerovima ($x = \pm ct$). Ako je brzina kretanja manja od c, prave kojima prikazujemo ovo kretanje nalaziće se u oblastima I i III. U tim oblastima je $s^2 > 0$, pa je interval izmedju dogadjaja vremenskog tipa. U I oblasti je $t > 0$, pa svi dogadjaji koji se nalaze u okviru I predstavljaju apsolutnu budućnost u odnosu na nulti dogadjaj, a u oblasti III svi dogadjaji predstavljaju apsolutnu prošlost u odnosu na nulti dogadjaj. U oblastima II i IV je $s^2 < 0$ i interval izmedju bilo kog dogadjaja i nultog dogadjaja je prostornog tipa.

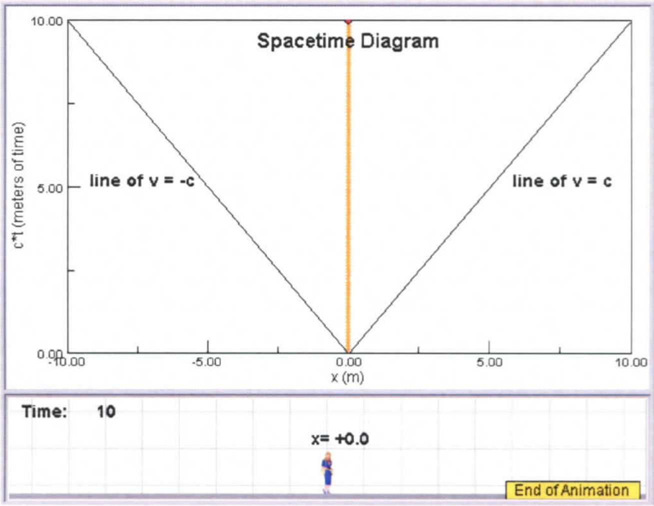


Sl.9: Prostorno vremenski dijagram

6.3 Primer prikaza prostorno vremenskog dijagrama

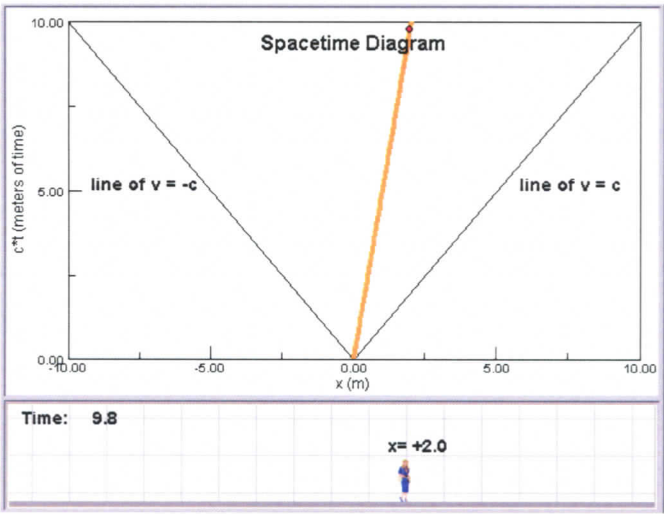
Pomoću ove animacije menjanjem vrednosti brzine kretanja čoveka dobijamo različite prostorno vremenske dijagrame.

$\beta = 0$



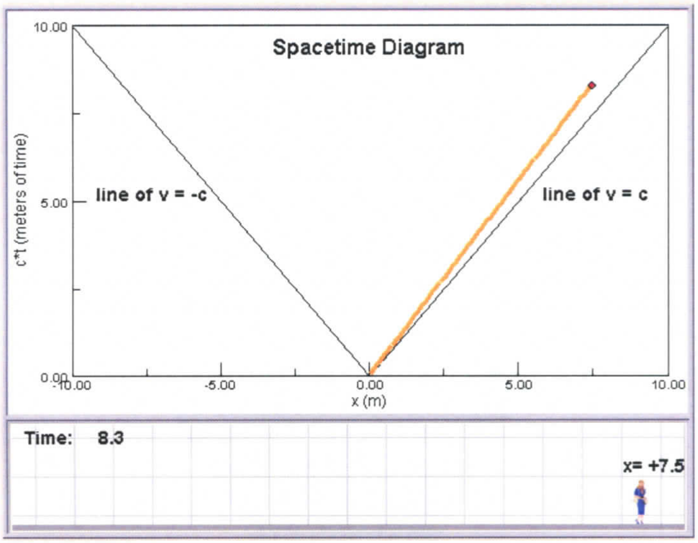
Sl. 10: Prostorno vremenski dijagram $\beta = 0$

$\beta = 0,2$



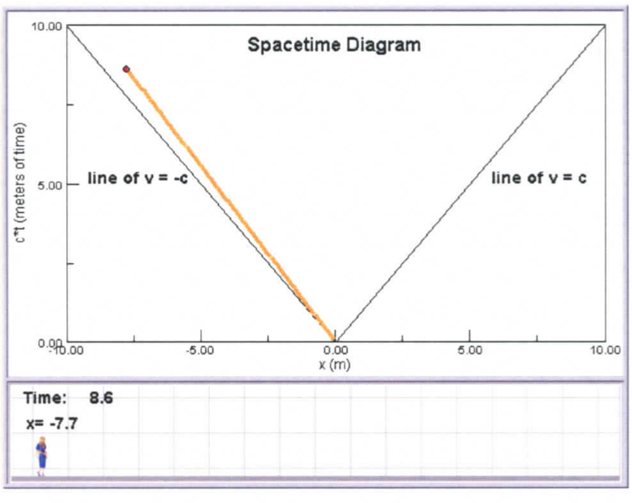
Sl. 11: Prostorno vremenski dijagram $\beta = 0,2$

$\beta = 0,9$



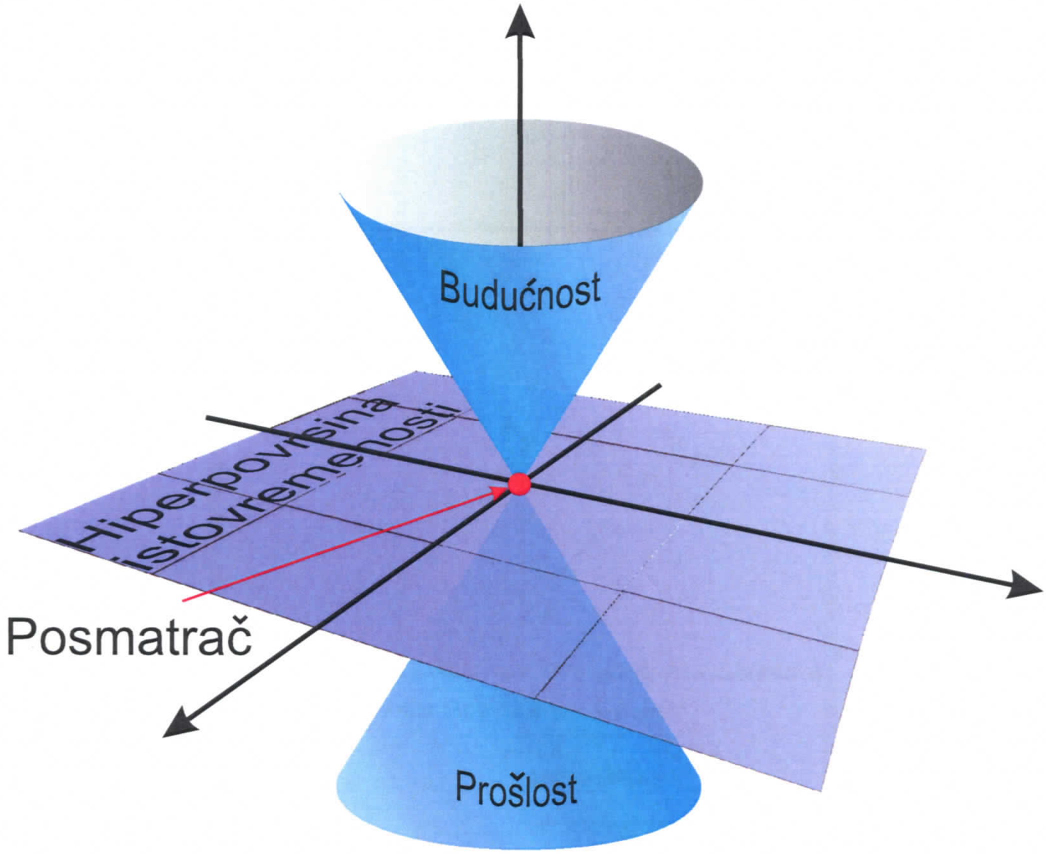
Sl. 12: Prostorno vremenski dijagram $\beta = 0,9$

$\beta = -0,9$



Sl. 13: Prostorno vremenski dijagram $\beta = -0,9$

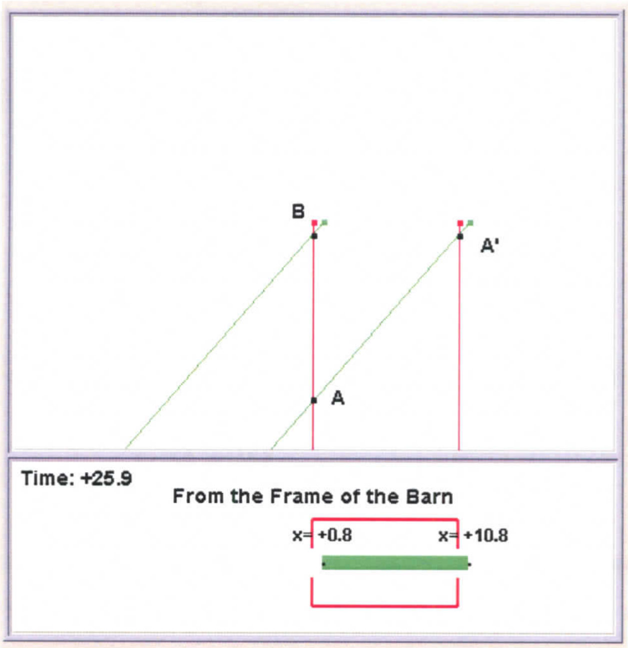
Ako umesto jedne prostorne koordinate koristimo dve prostorne koordinate dobijamo svetlosni konus.



Sl. 14: Svetlosi konus

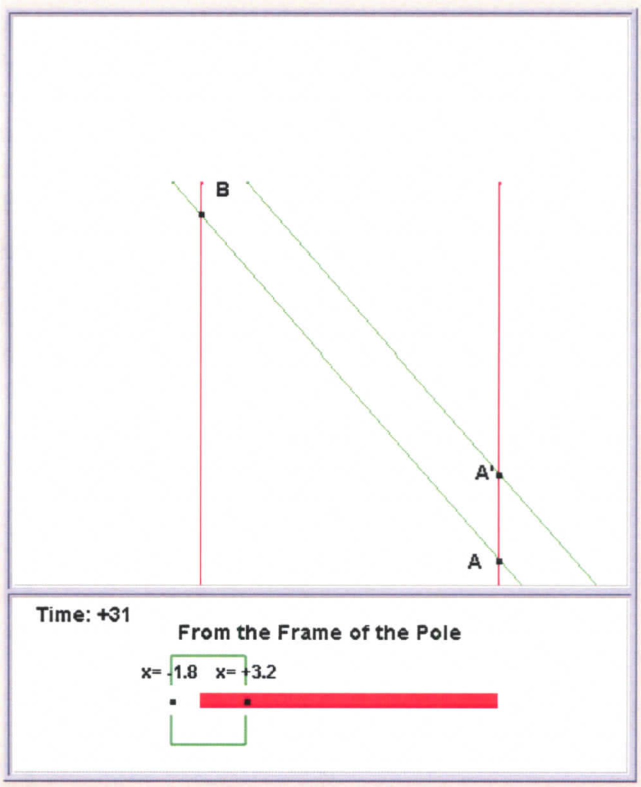
6.4 Primer - Geometrijski prikaz relativnosti istovremenosti - Paradoks kutije i štapa

Paradoks kutije i štapa je misaoni eksperiment u kome štap prolazi kroz kutiju na kojoj se na bočnim stranama nalaze otvori. Ako se posmatra iz sistema reference koji je vezan za kutiju, štap će izgledati skraćen u odnosu na dužinu merenu iz sopstvenog sistema. Zbog toga postoji trenutak kada su i jedan i drugi kraj štapa istovremeno u kutiji. Tada se kutija može i zatvoriti sa obe strane. Na prostorno vremenskom dijagramu kretanje krajeva kutije prikazano je crvenim linijama, dok je kretanje krajeva štapa prikazano zelenim linijama.



Sl.15: Paradoks kutije i štapa: Sistem reference je vezan za kutiju

Ako se posmatra iz sistema reference koji je vezan za štap, kutija će izgledati skraćena u odnosu na dužinu merenu iz sopstvenog sistema. Zbog toga neće postojati ni jedan trenutak kada su i jedan i drugi kraj štapa u kutiji. Kutija se ne može zatvoriti sa obe strane pri prolasku štapa kroz nju.

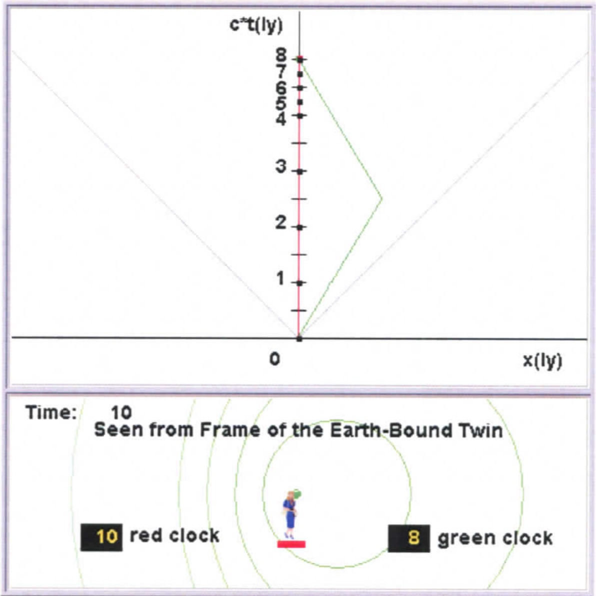


Sl.16: Paradoks kutije i štapa: Sistem reference je vezan za štap

U klasičnoj mehanici ovakva pojava predstavlja paradoks, medjutim u STR ona to nije. Dogadjaji koji su istovremeni u jednom sistemu reference nisu istovremeni i u drugom sistemu reference.

7 Primer - Paradoks blizanaca

'Paradoks' blizanaca predstavlja misaoni eksperiment koji deluje kao paradoks, ali ustvari nije. Suština priče zasniva se na činjenici da časovnik u stanju mirovanja meri najduže vreme. Priča o dva blizanca počinje tako što jedan blizanac kreće raketom na put i kreće se brzinom koja je bliska brzini svetlosti, dok drugi blizanac ostaje na Zemlji. Posle nekog vremena blizanac iz rakete se vraća na Zemlju. Koji od blizanaca je stariji? Ova priča postaje paradoks ako se polazi od pogrešnih pretpostavki. Ako pretpostavimo da su oba sistema inercijalna tada je relativno ono što vidimo. Medjutim, ova pretpostavka je netačna, jer se jedan brat nalazi u inercijalnom sistemu, a drugi u neinercijalnom sistemu, sistemu koji ubrzava. Ako bi ovi sistemi bili inercijalni svaki blizanac bi mogao da tvrdi da je on stariji, ali nikada ne bi postojala mogućnost da se uporedi sopstveno vreme jednog blizanca sa sopstvenim vremenom drugog, odnosno da se blizanci dovedu u istu tačku. Koji bi putnik stvarno bio mladji odgovoriće OTR. Na slici je dat prostorno vremenski dijagram kretanja blizanaca iz sistema reference koji je vezan za Zemlju. Crvenom linijom prikazano je kretanje blizanca koji je na Zemlji, a zelenom kretanje blizanca koji se udaljava i vraća na Zemlju. "Crvenom" blizancu izgledaće da je "zeleni" blizanac mladji, što možemo da vidimo na crvenom i zelenom časovniku, na kojima "crveni" blizanac očitava sopstveno vreme i vreme "zelenog" blizanca.



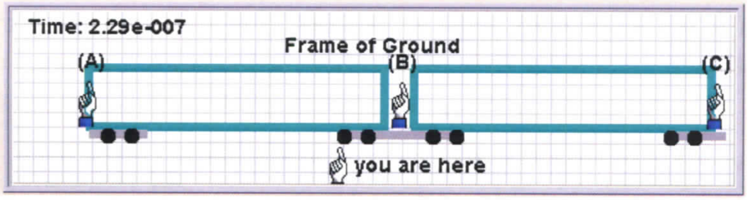
Sl.17: Paradoks blizanaca: sistem reference je vezan za Zemlju

8 Problemi

Objašnjavajući STR korisno je postaviti nekoliko zadataka (problema) koji bi omogućili slušaocima bolje razumevanje i produbljivanje dosadašnjeg izlaganja.

8.1 Problem 1

Tri čoveka A, B i C putuju vozom koji se kreće relativističkom brzinom kao što je prikazano na slici i u animaciji u smeru A-C. Posmatrač se nalazi na zemlji. Kada B prodje pored posmatrača, posmatrač prima svetlosni signal koji je poslao čovek A i čovek C u isto vreme. Ko je prvi poslao svetlosni signal?

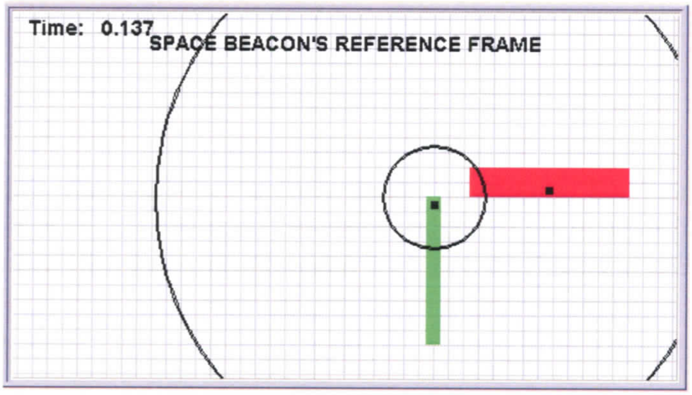


Sl.18: Problem 1

Odgovor je: čovek C. Voz se kreće u smeru A-C, tako da svetlosni signal od čoveka C do posmatrača prelazi duži put, nego svetlosni signal od čoveka A do posmatrača.

8.2 Problem 2

Svemirski brod prolazi pored svemirskog svetionika brzinom $0,7c$. Na slici položaj je dat u m, a vreme u 10^{-5} s. Svetionik emituje svetlosne signale kao što je dato u animaciji. Vreme koje je dato u levom gornjem uglu je vreme u sistemu svemirskog svetionika. Koliki je vremenski interval izmedju odašiljanja dva signala, ako ih meri posmatrač u svemirskom brodu?



Sl.19: Problem 2

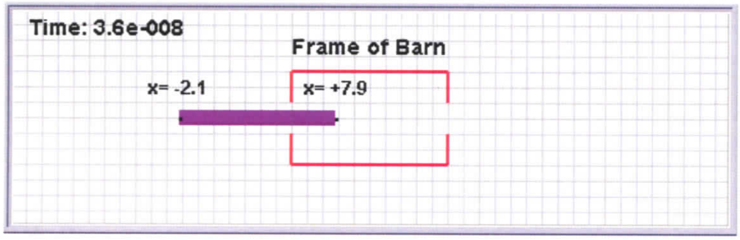
Odgovor: U sistemu reference koji je vezan za svetionik prvi signal se emituje u trenutku $t_1 = 0,075 \cdot 10^5$ s, a drugi signal u trenutku $t_2 = 0,126 \cdot 10^{-5}$ s. Sledi da je $\Delta t_0 = 0,051 \cdot 10^{-5}$. Ako iskoristimo formulu za dilataciju vremena

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

dobićemo kako će izgledati ovaj vremenski interval posmatraču iz svemirskog broda. Dobija se da je $\Delta t = 0,073 \cdot 10^{-5}$ s.

8.3 Problem 3

Štap prolazi kroz kutiju kao što je prikazano na slici. Položaj je dat u m, dok je vreme dato u s. Vreme i položaji na slici i u animaciji su dati iz sistema reference koji je vezan za kutiju. Kolika je sopstvena dužina štapa?



Sl.20: Problem 3

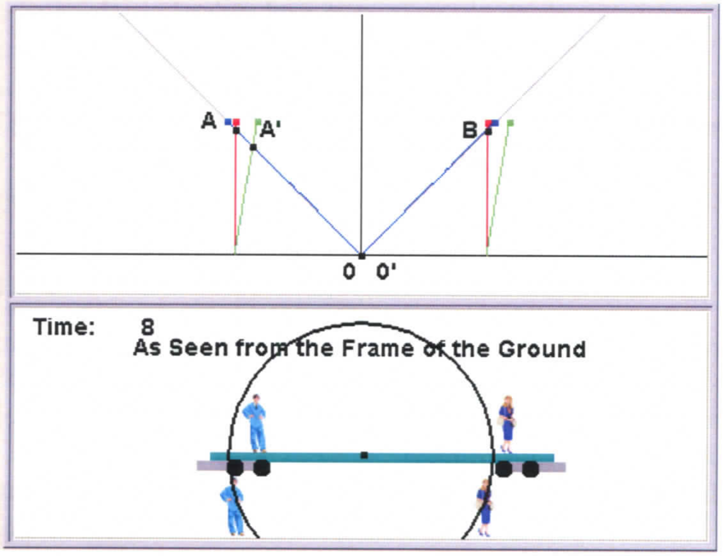
Odgovor je: Prvo se izračuna brzina kojom se štap kreće u sistemu reference kutije. Pošto je put koji predje štap za vreme $t = 1,27 \cdot 10^{-7} s$ $19m$ sledi da je $u = 1,49 \cdot 10^8$ m/s. Vidi se da je dužina štapa u sistemu reference kutije $l = 10$ m. Ako iskoristimo formulu za kontrakciju dužine

$$l = l_0\sqrt{1 - u^2/c^2},$$

dobija se da je $l_0 = 11,49$ m.

8.4 Problem 4

Na slici i u animaciji data su kolica koja se kreću po šinama, kao i prostorno vremenski dijagram tog kretanja. U kom sistemu reference se nalazi posmatrač (u sistemu reference koji je vezan za kolica ili u sistemu reference koji je vezan za zemlju)?

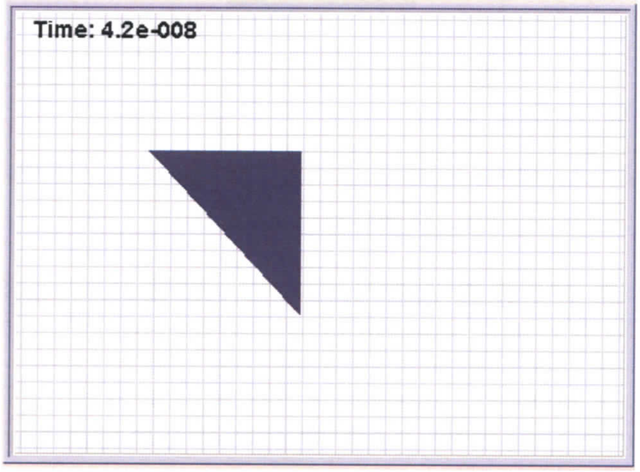


Sl.21: Problem 4

Odgovor je: Sistem reference je vezan za zemlju, jer signal dolazi istovremeno do posmatrača (nalaze se na jednakim udaljenostima od emitera signala) koji se nalaze na zemlji.

8.5 Problem 5

Dat je trougao koji se kreće na desno kao što je dato na slici (animaciji). Položaj je dat u m, a vreme u s. Kojom brzinom treba trougao da se kreće da bi izgledao kao jednakokraki trougao?



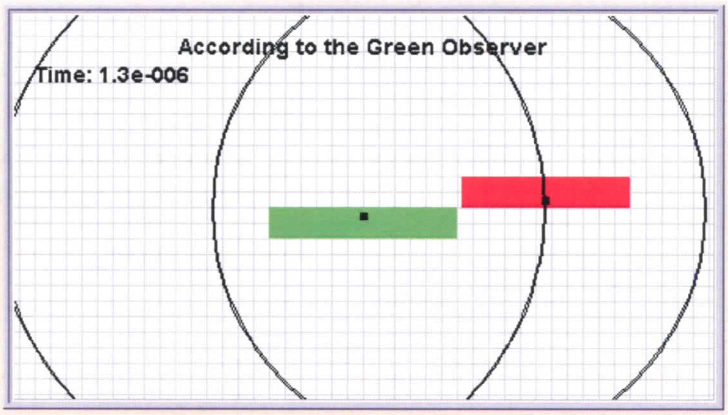
Sl.22: Problem 5

Odgovor je: Prvo se izračuna brzina kojom se trougao kreće u animaciji (može se očitati vreme i predjeni put). Dobija se da je brzina $v = 1,93 \cdot 10^8 m/s$. Zatim se izračuna sopstvena dužina katete koja se kreće po x osi (formula za kontrakciju dužine) i dobije se da je $l_0 = 14m$. Opet iz relacije za kontrakciju dužine može se izračunati kolika treba da je brzina da bi se kateta skratila na $10m$ (koliko je dužina druge katete koja je normalna na pravac kretanja). Brzina je $v = 0,7c$

8.6 Problem 6

Dva lenjira (zeleni i crveni) prolaze jedan pored drugog relativnom brzinom koja je bliska brzini svetosti. Položaj je dat u m, a vreme u s. Kada se desni krajevi lenjira poklope na tom mestu se pojavljuje svetlosni signal (dogadjaj 1). Kada se levi krajevi lenjira poklope takodje se javlja svetlosni signal (dogadjaj 2). Dogadjaje 1 i 2 možemo da posmatramo iz sistema reference zelenog i crvenog lenjira. Koji od odgovora je tačan za sve relativne brzine ova dva lenjira?

1) Postoji jedinstvena brzina kada su dogadjaji 1 i 2 istovremeni u oba sistema reference.
2) Dogadjaj 1 se uvek dešava pre dogadjaja 2 bez obzira na sistem reference.
3) Pri datoj brzini, zeleni i crveni posmatrač se slažu koji dogadjaj će se prvi desiti.
4) Nijedan od prethodno navedenih odgovora.



Sl.23: Problem 6

Odgovor je: Tačan odgovor je 4). Za sve nerelativističke brzine, može se smatrati da su dogadjaji istovremeni u oba sistema reference i dogadjaj 1 će se uvek desiti pre dogadjaja 2.

U slučaju relativističkih brzina dogadjaji u zelenom i crvenom sistemu reference neće biti istovremeni, a koji dogadjaj će se prvi desiti zavisi od sistema reference iz koga posmatramo.

9 Prostor Minkovskog

Lorencove transformacije pokazuju da su prostorne i vremenske koordinate medjusobno "isprepletane". Zbog toga je potrebno definisati četvorodimenzionalni prostor čije tačke predstavljaju dogadjaje. Rimanov prostor definiše se kao skup tačaka $(x^1, x^2, ...x^n)$ u kome su rastojanje izmedju dve beskonačno bliske tačke definiše kao $ds^2 = g_{pq} dx^p dx^q$ (metrička forma). Pošto ds^2 mora biti invarijantno pri prelasku iz jednog sistema u drugi, za definisanje četvorodimenzionalnog prostora koristi se jedna takva veličina u STR, a to je kvadrat intervala izmedju dogadjaja:

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \tag{14}$$

Iz oblika metrike vidi se da su koordinate:

$$\begin{aligned} x^1 &= x, \\ x^2 &= y, \\ x^3 &= z, \\ x^4 &= ct, \end{aligned}$$

a metrički tenzor je:

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ovako definisan prostor naziva se prostor Minkovskog.
Lorencove transformacije u ovom prostoru dobijaju oblik:

$$x'^{\mu} = \alpha^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \qquad (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4), \tag{15}$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

9.1 Skalari, vektori, i tenzori u prostoru Minkovskog

Da bi se zakoni mogli formulisati u obliku koji je invarijantan prema transformacijama koordinata, treba odgovarajuće fizičke veličine izraziti tako da njihove osobine ne zavise od izbora koordinatnog sistema. To nam omogućava poseban matematički aparat koji koristi veličine definisane samim zakonom transformacije: tenzorski račun. Ako je u sistemu reference S data funkcija $\Phi(x^1, x^2, x^3, x^4)$, a u sistemu S' $\Phi'(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4)$ i ako je u svakoj tači prostora

$$\Phi(x^1, x^2, x^3, x^4) = \Phi'(x'^1, x'^2, x'^3, x'^4) \tag{16}$$

tj. ako pri transformaciji koordinata ova funkcija ostaje nepromenjena, ona se zove tenzor nultog reda ili skalar.

Skup od 4 veličine A^μ, $(\mu = 1,2,3,4)$, koji se pri transformaciji koordinata transformiše po zakonu:

$$A'^\mu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} A^\nu \tag{17}$$

naziva se kontravarijantni vektor, kontravarijantni tenzor prvog reda ili kvadrivektor.

Skup od 4 veličine A_μ, $(\mu = 1,2,3,4)$, koji se pri transformaciji koordinata transformiše po zakonu:

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} A_\mu \tag{18}$$

naziva se kovarijantni vektor ili kovarijantni tenzor prvog reda.

Skup od 16 veličina u četvorodimenzionalnom prostoru $A^{\mu\nu}$, $(\mu, \nu = 1,2,3,4)$ koje se pri transformaciji koordinata transformišu po zakonu:

$$A'^{\mu\nu} = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} A^{\rho\sigma} \tag{19}$$

naziva se kontravarijantni tenzor drugog reda.

Skup od 16 veličina u četvorodimenzionalnom prostoru $A_{\mu\nu}$, $(\mu, \nu = 1,2,3,4)$ koje se pri transformaciji koordinata transformišu po zakonu:

$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} A_{\rho\sigma} \tag{20}$$

naziva se kovarijantni tenzor drugog reda.

Skup od 16 veličina u četvorodimenzionalnom prostoru A^ν_μ, $(\mu, \nu = 1,2,3,4)$ koje se pri transformaciji koordinata transformišu po zakonu:

$$A'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} A^\sigma_\rho \tag{21}$$

naziva se mešoviti tenzor drugog reda.

10 Kovarijantna formulacija fizičkih zakona

Da bi formulacija fizičkih zakona bila kovarijantna, veličine koje figurišu u ovim fizičkim zakonima moraju biti definisane samim zakonom transformacije. Tenzorski račun u prostoru Minkovskog omogućava nam da sve veličine definišemo zakonima transformacije u odnosu na transformacije koordinata u odnosu na koje zahtevamo da svi fizički zakoni ostaju invarijantni (u odnosu na Lorencove transformacije). Kada fizički zakon formulišemo u tenzorskom obliku, tada je ta formulacija kovarijantna.

Ako je:

$$A^{\rho\sigma} = B^{\rho\sigma},$$

obe strane transformišu se na isti način, pa sledi:

$$A'^{\mu\nu} = B'^{\mu\nu}. \tag{22}$$

Oblik jednačina ostaje nepromenjen. Isto važi i za tenzore nultog i prvog reda.

11 Kovarijantna formulacija mehanike

Za formulisanje kovarijantnih zakona mehanike potrebno je:
1) Da sve mehaničke veličine u svim inercijalnim sistemima budu povezane istim zakonima kao i u klasičnoj mehanici. Pri formulaciji kovarijantnih zakona, same fizičke veličine dobijaju drugačiji oblik.
2) Relativistička mehanika u prvoj aproksimaciji prelazi u Njutnovu mehaniku.

11.1 Relativistička kinematika

Osnovni kinematički pojmovi u prostoru Minkovskog su:
kvadrivektor položaja:

$$x^\mu = (x, y, z, ct) \equiv (\vec{r}, ct), \tag{23}$$

kvadrivektor brzine:

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau},$$

gde je $d\tau$ sopstveno vreme,

$$V^\mu = \left(\frac{\vec{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \frac{c}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right), \tag{24}$$

kvadrivektor ubrzanja:

$$A^\mu = \frac{dV^\mu}{d\tau}. \tag{25}$$

12 Relativistička dinamika

Kvadrivektor impulsa

Za česticu koja se kreće uniformno u beskonačno malom vremenskom intervalu kvadrivektor impulsa je:

$$P^{\mu} = mV^{\mu}$$

,

$$P^{\mu} = \left(\frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right), \tag{26}$$

gde je m sopstvena masa čestice (mera inertnosti čestice).

Osnovna jednačina relativističke dinamike dobija se generalizacijom osnovne jednačine klasične mehanike.

$$\frac{d}{d\tau}(mV^{\mu}) = F^{\mu}(x^{\nu}, V^{\nu}, \tau), \tag{27}$$

gde je τ sopstveno vreme čestice, a F^{μ} je kvadrivektor sile. Ovakva jednačina ima kovarijantan oblik (jer je definisana vektorima u prostoru Minkovskog) i u graničnom slučaju prelazi u odgovarajuću jednačinu Njutnove mehanike.

Iz osnovne jednačine dinamike za $\mu = 1, 2, 3$ možemo dobiti [1]:

relativistički impuls čestice:

$$p_i = \frac{mv_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \tag{28}$$

silu koja deluje na česticu (u zavisnosti od prve tri komponente kvadrivektora sile):

$$f_i = F_i\sqrt{1 - v^2/c^2}, \tag{29}$$

relativističku diferencijalnu jedačinu kretanja čestice:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv_i}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \right) = f_i(x^k, v^k, t). \tag{30}$$

12.1 Relacija izmedju mase i energije

Četvrta skalarna jednačina dinamike

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = \vec{f}\cdot\vec{v} \tag{31}$$

može se dobiti iz [1]:

$$\frac{d}{d\tau}(mV^4) = F^4 \tag{32}$$

i koristeći ortogonalnost kvadrivektora brzine i kvadrivektora sile:

$$(V, F) = V_\mu F^\mu = 0. \tag{33}$$

Ako se jednačina (31) uporedi sa zakonom energije klasične mehanike

$$\frac{dT}{dt} = \vec{f}\cdot\vec{v}, \tag{34}$$

dobija se da je kinetička energija:

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} + C. \tag{35}$$

Za $v = 0$, $T = 0$, iz čega se dobija da je

$$C = -mc^2$$

Sledi da je:

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - mc^2. \tag{36}$$

Pošto se kinetička energija može izraziti kao razlika energija u stanju kretanja i stanju mirovanja $T = E - E_0$, dobija se da je energija čestice jednaka zbiru kinetičke energije i invarijante:

$$E = T + mc^2, \tag{37}$$

odnosno

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{38}$$

Energija mc^2 je energija koju poseduje svaka čestica nezavisno od stanja kretanja i zato se ova energija uobičajno naziva energija mirovanja i označava se sa E_0:

$$E_0 = mc^2. \tag{39}$$

Kada je $v \ll c$ dobija se:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + mc^2. \tag{40}$$

Zbir kinetičke energije i energije mirovanja naziva se ukupna relativistička energije izolovane čestice. Kvadrivektor impulsa možemo izraziti preko relativističke energije:

$$P^\mu = \left(\frac{mc}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}\right) = \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right). \tag{41}$$

Vidi se da se ukupna energija E i relativistički impuls $\vec{p}$ ujedinjuju u u jednu fizičku veličinu - kvadrivektor impulsa. Relativistički impuls predstavlja prostorne komponente kvadrivektora impulsa, dok ukupna energija predstavlja vremensku komponentu kvadrivektora impulsa.
Može se pokazati [1] da su kvadrivektor brzine, kao i njen kvadrivektor impulsa invarijantnog intenziteta:

$$P^\mu P_\mu = m^2c^2. \tag{42}$$

Iz (41) i (42) može se dobiti da je:

$$E^2/c^2 - p^2 = m^2c^2,$$

odnosno

$$E^2 - p^2c^2 = E_0^2. \tag{43}$$

Ako se iskoristi (37) može se intenzitet impulsa $\vec{p}$ izraziti preko kinetičke energije:

$$(T + mc^2)^2 - p^2c^2 = (mc^2)^2$$

$$p = \frac{1}{c}\sqrt{T^2 + 2mc^2T}. \tag{44}$$

12.2 Primer: Relacija izmedju mase i energije

Iz dobijene relacije izmedju mase i energije (39) neposredno se vidi da je svakoj masi pridružena energija i obrnuto svakoj energiji pridružena masa. Ova relacija govori o proporcionalnosti mase i energije, odnosno o pretvaranju jedne forme kretanja materije u drugu.
Pomoću Ajnštajnovog misaonog eksperimenta relacija se može slikovito predstaviti i fizički dokazati. U eksperimentu se koristi kutija koja se nalazi na glatkoj površini. Za kutiju je pričvršćen laser (na levom bočnom zidu). Laser emituje svetlost. Ovaj mlaz fotona ima impuls $p = E/c$, usled čega će kutija dobiti impuls u suprotnom smeru i početi da se kreće. Zbog odsustva delovanja spoljnih sila ukupan impuls sistema mora ostati konstantan.

$$p_k = -p_s = -E/c$$

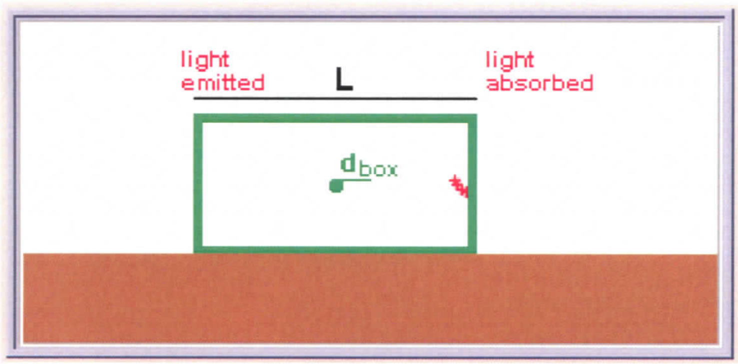
Sledi da je:

$$v_k = E/Mc,$$

gde je M masa kutije. Kretanje kutije unazad trajaće sve dok svetlost ne stigne do naspramne strane kutije i tamo se ne apsorbije. Vreme koje je potrebno svetlosti da dodje do naspramne strane je približno L/c (vreme je ustvari kraće zato što se kutija kreće suprotno od svetlosti, ali ovde se ova činjenica zanemaruje). Rastojanje za koje se kutija pomera u levo je:

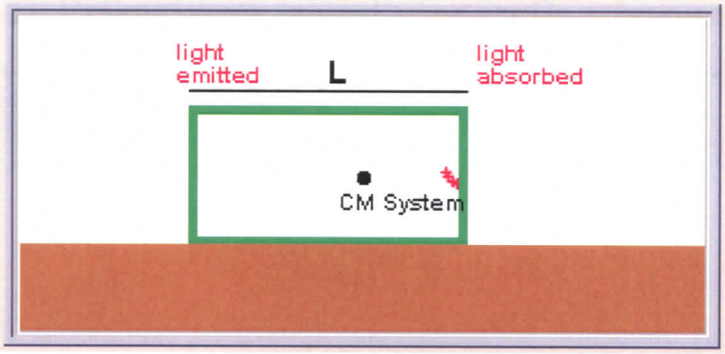
$$d_k = v_k t = EL/Mc^2$$

.



Sl.24: Centar mase kutije

Iz predhodnog sledi da se centar mase celokupnog sistema (kutija + svetlost) pomerio sa desna na levo za d_k bez delovanja spoljašnjih sila, što protivreči zakonima klasične fizike.



Sl.25: Centar mase sistema

Da bi centar masa ostao fiksiran, mora se predpostaviti da se sa energijom pomerio sa leva na desno i višak mase.

$$\Delta x_c = 0$$

Sledi da je:

$$Md_k = mL,$$

ili

$$MEL/Mc^2 = mL.$$

Dobija se da je:

$$m = E/c^2.$$

12.3 Primer: Prikaz veze izmedju energije i impulsa

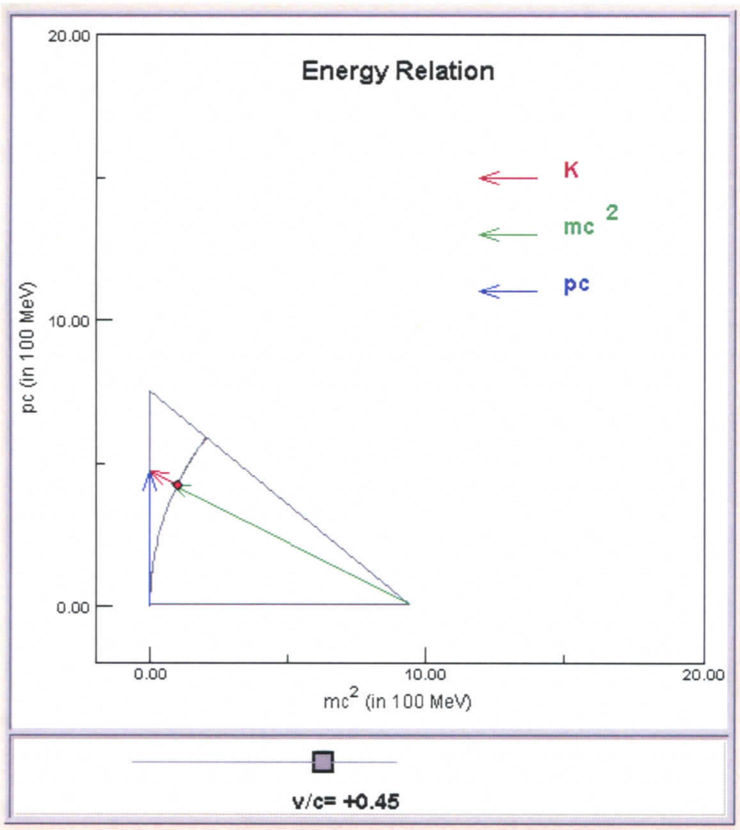
U ovom primeru slikovito je predstavljena veza izmedju energije, impulsa i mase (energija je data u MeV, impuls u MeV/c i masa u MeV/c^2:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4,$$

gde je

$$E = mc^2 + T.$$

Na slici (animaciji) hipotenuza predstavlja energiju čestice, dok katete predstavljaju masu i impuls. Klizač omogućava kontrolisanje brzine na crtežu.



Sl.26: Grafički prikaz energije i impulsa

13 Zakon održanja kvadrivektora impulsa

Jedna od najvažnijih eksperimentalnih potvrda STR su reakcije u nuklearnoj fizici za koje važe zakoni održanja relativističkog impulsa i energije. U reakciji izmedju dve čestice, za izolovan sistem može se pisati:

$$\begin{aligned} \vec{p_1} + \vec{p_2} &= \vec{p_1'} + \vec{p_2'}, \\ E_1 + E_2 &= E_1' + E_2' \end{aligned} \tag{45}$$

Ova dva zakona se zamenjuju zakonom održanja kvadrivektora impulsa:

$$P_1^\mu + P_2^\mu = P_1'^\mu + P_2'^\mu, \tag{46}$$

gde su sa (') označene odgovarajuće veličine posle sudara. Neelastičan sudar dve čestice jednakih masa m, koje se kreću u susret jedna drugoj brzinama jednakih intenzitet i suprotnog smera i koje se u procesu sudara spajaju u jednu česticu mase M može se posmatrati:

1) Nerelativistički:

Ukupni impuls i masa sistema se održavaju. Ukupna kinetička energija se ne održava, deo energije se pretvara u toplotu ili neke druge oblike unutrašnje energije.

2) Relativistički:

Ukupni kvadrivektor impulsa sistema se održava:

$$P_1^\mu + P_2^\mu = P^\mu, \tag{47}$$

gde su $P_1^\mu = (E/c, \vec{p})$ i $P_2^\mu = (E/c, -\vec{p})$ kvadrivektori impulsa čestica pre sudara, a $P^\mu = (2E/c, 0)$ kvadrivektor nastale čestice.

Ako se relacija (47) kvadrira i iskoristi invarijantnost intenziteta kvadrivektora impulsa:

$$P^\mu P_\mu = m^2 c^2, \tag{48}$$

može se dobiti [2]:

$$2E = Mc^2.$$

Pošto je:

$$E = T + mc^2,$$

dobija se da je:

$$M - 2m = 2T/c^2.$$

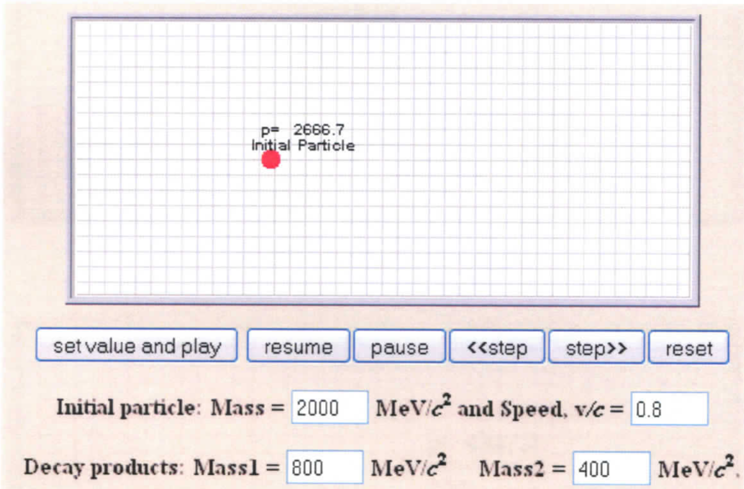
Da bi se čestice pre sudara kretale, sistemu je saopšten priraštaj energije $\Delta E = 2T$ iz čega se dobija da je:

$$\Delta E = (M - 2m)c^2.$$

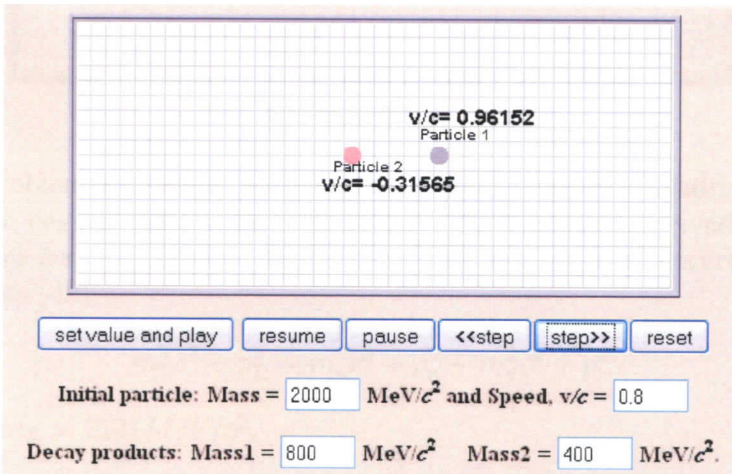
Iz poslednje relacije se vidi da se kod neelastičnog sudara kinetička energija pretvara u unutrašnju energiju produkata sudara koja je proporcionalana masi produkata sudara. Osim kinetičke energije, i energija mirovanja može se transformisati prilikom nastajanja novih čestica (npr. spontani nuklearni raspadi).

14 Primer: Raspad čestice

U primeru je prikazan raspad jedne čestice, pri čemu nastaju dve čestice. Impuls je dat u MeV/c, a masa u MeV/c^2. Ako je čestica koja se raspada nepoznate mase, a produkti imaju poznatu masu i impuls, pomoću zakona održanja kvadrivektora impulsa može se izračunati masa prvobitne čestice.
U animaciji postoji mogućnost biranja mase čestice koja se spontano raspada i mase novonastalih čestica. Takodje animacija ispunjava zakon održanja kvadrivektora impulsa, tako da mase koje se biraju ne mogu biti potpuno proizvoljne. Npr. ne može se uzeti da je ukupna masa produkata veća od mase inicijalne čestice.



Sl.27: Inicijalna čestica

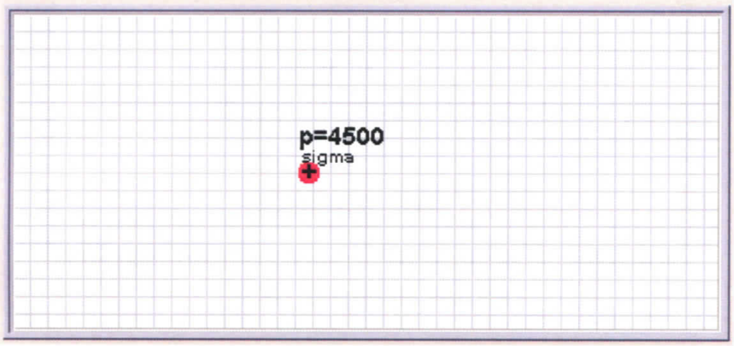


Sl.28: Produkti raspada

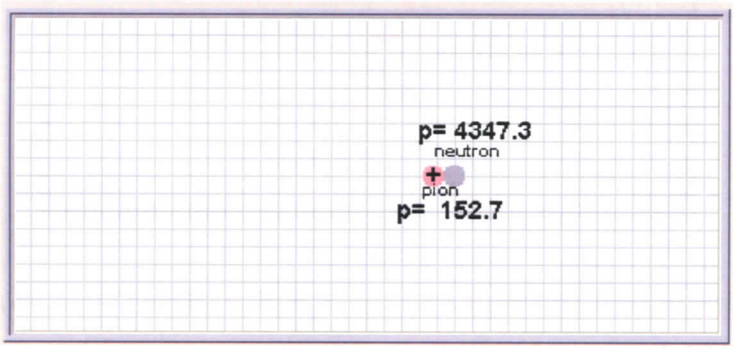
15 Problemi

15.1 Problem 1

Σ^+ čestica raspada se u neutron i pion (π^+). Odrediti masu Σ^+ čestice. Masa neutrona je $940MeV/c^2$, a masa piona je $140MeV/c^2$. Impulsi čestica su dati u animaciji i oni iznose $p_\Sigma = 4500MeV/c^2$, $p_n = 4347,3MeV/c^2$ i $p_\pi = 152,7MeV/c^2$.



Sl.29: Inicijalna čestica



Sl.30: Produkti raspada

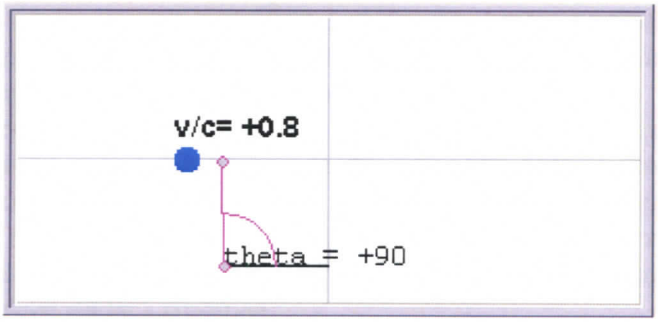
Odgovor je: Problem se rešava korišćenjem zakona održanja kvadrivektora impulsa. Pošto su impulsi čestica dati, vidimo da se prve tri komponente kvadrivektor impulsa održavaju. Masu čestice možemo dobiti iz zakona održanja za četvrtu komponentu i pomoću jednačine (43):

$$m_\Sigma^2 c^2 + p_\Sigma^2 = m_n^2 c^2 + p_n^2 + m_\pi^2 c^2 + p_\pi^2$$

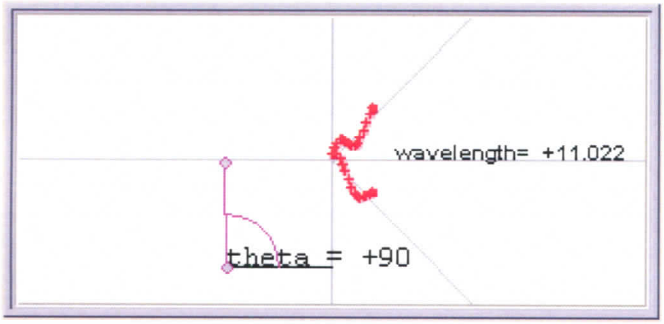
Dobija se da je $m_\Sigma = 1191MeV/c^2$.

15.2 Problem 2

Nepoznata čestica se raspada na dva fotona čija je talasna dužina data. Brzina čestice u animaciji može da se menja. Ako je dat ugao pod kojim foton skreće u odnosu na pravac kretanja čestice, treba izračunati masu nepoznate čestice i odrediti ugao u zavisnosti od β



Sl.31: Inicijalna čestica



Sl.32: Produkti raspada

Odgovor je: Za rešavanje problema koristi se zakon održanja kvadrivektora impulsa.

$$\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = 2\cos\theta\frac{h}{\lambda},$$

gde je $\frac{mv}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ impuls čestice koja se raspada, a $\frac{h}{\lambda}$ impuls jednog fotona. Odavde se može izračunati masa čestice.

Da bi se dobila zavisnost ugla od β može se napisati:

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = 2\frac{hc}{\lambda},$$

gde je $\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ energija čestice, a $\frac{hc}{\lambda}$ energija jednog fotona. Ako ovu jednačinu podelimo sa prethodnom, dobija se da je

$$\theta = \arccos\beta.$$

16 Zaključak

Specijalna teorija relativnosti otkriva nam novu sliku prostora, vremena, kauzalnosti i proširuje horizonte. Zasnovana je na pretpostavkama koje su u saglasnosti sa eksperimentom. Pomoću matematike iz tih pretpostavki izvedena je teorija. Od nivoa znanja matematike, zavisi i nivo razumevanja ove teorije. Medjutim, možda je moguće shvatiti neke osnovne ideje, krajnje rezultate i zaključke putem analogija i slika. Mnogi matematičari i fizičari smatraju da je to teško ili nemoguće, dok su drugi napisali veliki broj članaka i knjiga pokušavajući da približe STR nefizičarima.
Iako je STR daleko od svakodnevnog iskustva i u sebi nosi veliki stepen apstrakcije, mnogo ljudi danas zna neke osnovne pojmove ove teorije. Principi teorije relativnosti uče se i u gimnazijama. U ovom radu dat je drugačiji pristup teoriji korišćenjem animacija. Prvi deo rada odnosi se na kinematiku STR i teži da predstavi osnovne relativistike efekte, dok drugi deo razmatra osnove dinamike STR. Ovakav prikaz ima za cilj da objasni ili bar zainteresuje buduće djake i slušaoce.

KRATKA BIOGRAFIJA

Rodjena sam 13. 02. 1982. u Novom Sadu. Završila sam Gimnaziju 'Isidora Sekulić', prirodno-matematički smer. Posle toga sam upisala Prirodno - matematički fakultet, smer diplomirani fizičar.

Novi Sad, 13. 08. 2008. Nevena Ljuština

Literatura

[1] Dr. Djordje Mušicki, *Uvod u teorijsku fiziku III - 1, Elektrodinamika sa teorijom relativnosti*, Beograd, 1981.

[2] Dr. Vida J. Žigman, *Specijalna teorija relativnosti - Mehanika*, Beograd, 1997.

[3] Mario Belloni, Wolfgang Christian, Anne J. Cox, *Physlet Quantum Phusics, An Interactive Indroduction*, Upper Saddle River, New Jersy 07458

[4] Milan Pantić, *Uvod u Ajnštajnovu teoriju gravitacije*, Novi Sad, 2005.

[5] Harald Frič, *Formula koja je promenila svet (Njutn, Ajnštajn i teorija relativnosti), Matematička gimnazija*, Beograd,2004

[6] Rodžer Penrouz, *Carev novi um*, Beograd, 2004

[7] Leopold Infeld, *Albert Ajnštajn*, Beograd,1979.

[8] *en.wikipedia.org.wiki.Special relativity*

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj: **RBR**	
Identifikacioni broj: **IBR**	
Tip dokumentacije: **TD**	Monografska dokumentacija
Tip zapisa: **TZ**	Tekstualni štampani materijal
Vrsta rada: **VR**	Diplomski rad
Autor: **AU**	Nevena Ljuština
Mentor: **MN**	Milica Pavkov - Hrvojević
Naslov rada: **NR**	Savremen pristup specijalnoj teoriji relativnosti
Jezik publikacije: **JP**	srpski (latinica)
Jezik izvoda: **JI**	srpski/engleski
Zemlja publikovanja: **ZP**	Srbija i Crna Gora
Uže geografsko područje: **UGP**	Vojvodina
Godina: **GO**	2008
Izdavač: **IZ**	Autorski reprint
Mesto i adresa: **MA**	Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Fizički opis rada: **FO**	16/45/32/1/0/0
Naučna oblast: **NO**	Fizika
Naučna disciplina: **ND**	Teorija relativnosti
Predmetna odrednica/ ključne reči: **PO** **UDK**	Kinematika specijalne teorije relativnosti, Dinamika specijalne teorije relativnosti
Čuva se: **ČU**	Biblioteka departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu
Važna napomena: **VN**	nema
Izvod: **IZ**	
Datum prihvatanja teme od NN veća: **DP**	
Datum odbrane: **DO**	
Članovi komisije: **KO**	
Predsednik:	Milan Pantić
član:	Srdjan Rakić
član:	Milica Pavkov - Hrvojević

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: **ANO**	
Identification number: **INO**	
Document type: **DT**	Monograph publication
Type of record: **TR**	Textual printed material
Content code: **CC**	Final paper
Author: **AU**	Nevena Ljuština
Mentor/comentor: **MN**	Milica Pavkov - Hrvojević
Title: **TI**	Modern Approach to Special Theory of Relativity
Language of text: **LT**	Serbian (Latin)
Language of abstract: **LA**	English
Country of publication: **CP**	Serbia and Montenegro
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2008
Publisher: **PU**	Author's reprint
Publication place: **PP**	Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Physical description: ***PD***	16/45/32/1/0/0
Scientific field: **SF**	Physics
Scientific discipline: **SD**	Special Theory of Relativity
Subject/ Key words: **SKW** **UC**	Relativistic Kinematics, Relativistics Dynamics
Holding data: **HD**	Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4
Note: **N**	none
Abstract: **AB**	
Accepted by the Scientific Board: **ASB**	
Defended on: **DE**	
Thesis defend board: **DB**	
President:	Milan Pantić
Member:	Srdjan Rakić
Member:	Milica Pavkov - Hrvojević