

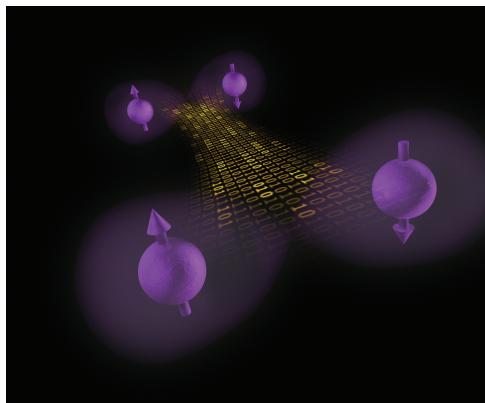


UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
DEPARTMAN ZA FIZIKU



Kvantni entanglement u dvokubitnom anizotropnom Hajzenbergovom modelu

-master rad-



Kandidat: Nemanja Micić

Mentor: prof. dr Milan Pantić

Novi Sad, 2017.

Predgovor



"It's the time you spent on your rose that makes your rose so important."

Antoine de Saint-Exupery

Još od malena smo upoznati sa Egziperijevim delom "Mali Princ". Mnogim učenicima se ovo delo utisne kao jedno od omiljenih. Čitajući ga iznova i iznova, u različitim razdobljima našeg života, uvek se može izvući neka nova poruka i delo sagledati na drugačiji način, iz nekog drugog ugla. Jedna od njih poručuje da vreme koje smo uložili u našu ružu čini našu ružu toliko važnom. Percepcija pojma ruže u ovom delu je relativna stvar. Odrastanjem opažamo da pojam ruže možemo vezati za nama bitne stvari u životu. Ukoliko ružu identifikujuemo sa porodicom, prijateljima, pa i sa obrazovanjem, tada je uloženo vreme, između ostalog, jedan od ključnih faktora uspeha. Ulažući ga u svaki bitan segment života, sve dobija svoj smisao i svrhu.

Ovaj master rad napisan je na katedri za Teorijsku fiziku kondenzovane materije, pod mentorstvom profesora Milana Pantića. Mentoru bih se, ovom prilikom, iskreno zahvalio, ne samo na mentorstvu ovog rada, već i na sveukupnom doprinosu tokom studiranja, počevši od mnogih diskusija vezanih za teorijsku fiziku uopšte, a potom i na detaljnem pregledanju i konstruktivnim kritikama i sugestijama koje mi je upućivao tokom pisanja, a koje su znatno doprinele kvalitetu finalne verzije rada. Svakako, pored njega, saradnici ove katedre pružali su mi veliku podršku tokom studiranja i dobrim delom su zaslužni za moje opredeljenje prilikom upisivanja master studija, te im se ovom prilikom zahvaljujem na svakom vidu pomoći ukazanoj tokom studiranja.

Ništa manje bitan faktor u realizaciji studija tokom proteklih pet godina bili su moji najuži članovi porodice - roditelji i sestre, čija me je podrška bezbrižno vodila do samog cilja. Ne mogu, a da ne spomenem i svoje najbliže prijatelje iz detinjstva i sa fakulteta, koji su svojom pozitivnom energijom svaki vid treme pred usmeni, pismani ispit ili odbranu seminarskog rada sveli na minimum. Posebno bih istakao, među svim kolegama, osobu koja je zajedno sa mnom nastavila studije na teorijskoj fizici, Sonju, te bih joj se ovim putem zahvalio na svakom vidu iskrene pomoći, saradnji, rešavanju zajedničkih zadataka koji su nam bili dodeljivani tokom studija, kao i na uspešnoj saradnji i konferenciji koja nas je pratila u tekućoj godini.

Smatram da je izuzetno bitno pored Egziperijevog faktora vremena, koji je u ovom poslu neminovan, u životu imati podršku od strane najblžih.

U Zrenjaninu, 19.9.2017.

Nemanja Micić

Sadržaj

1 Osnovni kvantnomehanički pojmovi	6
1.1 Pojam kubita i skalarnog proizvoda	6
1.2 Hilbertov prostor i merne veličine. Pojam ermitskog i Adamarovog operatora	8
1.3 Belov bazis. Kvantni entanglement	12
1.4 Svojstveni problem. Normalni operator i spektralna dekompozicija	15
1.5 Čista i mešana stanja u kvantnoj mehanici. Matrica gustine ρ	16
1.6 Redukovana matrica gustine ρ	18
1.7 Mera kvantnog entanglementa - konkurenčnost	20
2 Osnovi kvantne informatike	22
2.1 Uvod u kvantnu informatiku	22
2.2 Nemogućnost kloniranja kvantnih bitova	23
2.3 EPR eksperiment	25
2.4 Razlikovanje neortogonalnih stanja - komuniciranje brže od brzine svetlosti?	27
2.5 Kvantna teleportacija	28
2.6 Belova nejednakost	30
3 Entanglement u dvokubitnom anizotropnom Hajzenbergovom modelu	32
3.1 XXZ model	32
3.1.1 XXZ model sa D_x interakcijom	32
3.1.2 XXZ model sa D_y interakcijom	38
3.1.3 XXZ model sa D_z interakcijom	38
3.1.4 XXZ model - komparacija D_x vs D_z	43
3.2 XYZ model	43
3.2.1 XYZ model sa D_x interakcijom	43
3.2.2 XYZ model sa D_y interakcijom	50
3.2.3 XYZ model sa D_z interakcijom	54
3.3 Hajzenbergov XYZ model u nehomogenom magnetnom polju	61
4 Termodinamička analiza dvokubitnog Hajzenbergovog modela	68
4.1 Termodinamička analiza "XXZ" modela	68
4.1.1 "XXZ" model sa interakcionim parametrom D_x	68
4.1.2 "XXZ" model sa interakcionim parametrom D_z	70
4.2 Termodinamička analiza "XYZ" modela	73
4.2.1 "XYZ" model sa interakcionim parametrom D_x	73
4.2.2 "XYZ" model sa interakcionim parametrom D_y	75
4.2.3 "XYZ" model sa interakcionim parametrom D_z	77
4.2.4 "XYZ" model sa interakcionim parametrom D_z i spoljašnjim nehomogenim magnetnim poljem	79

Uvod

Jedan od najintrigantnijih fenomena čije postojanje predviđa kvantna mehanika jeste spletenost (engl. entanglement). Ovaj pojam je uveo Šredinger [1] za neobične kvantne korrelacije koje se pojavljuju u čuvenom misaonom eksperimentu Ajnštajna, Podolskog i Rozena (EPR-ksperiment) [2]. U ovom misaonom eksperimentu autori su pokazali (na osnovu formalizma kvantne mehanike) postojanje nelokalnih kvantnih objekata, koji se sastoje od dva ili više delova, što je dovelo do sumnje u odnosu na doslednost same kvantne mehanike. Put ka rešenju nastalog paradoksa (EPR-paradoks) ukazao je Bel [3]. On je predložio svoje znamenite statističke nejednakosti koje su zadovoljene za bilo koju lokalnu teoriju i ne zadovoljavaju nelokalne teorije. Na taj način, Bel je preveo rešenje pitanja o važenju kvantomehaničkog opisa u oblast eksperimenta [3]. Eksperimenti postavljeni za proveru Belovih nejednakosti i izvedenih do sada [4, 5, 6], nalaze se u skladu sa predviđanjima kvantne mehanike. Na taj način je "entanglement" postao fizička realnost koja ne može biti modelirana bilo kakvom klasičnom teorijom.

Takođe, novu bujicu interesa za problem entanglementa pojavio se sa nastankom kvantne teorije informacija [7] i u vezi sa time kvantnog računanja. Ideja kvantnog računanja se aktivno razmatra u svetu od 1982. godine, posle publikovanja rada američkog fizičara-teoretičara R. Fajnmana [8]. On je obratio pažnju na to da svako stanje kvantnog sistema od L dvonivoskih kvantnih elemenata (kasnije oni su dobili naziv kvantni biti - kubiti (qubits)), za razliku od klasičnog sistema sa istim brojem klasičnih bitova, može predstavljati proizvoljnu koherentnu superpoziciju od $2L$ bazičnih stanja. Inače se stanje kvantnog sistema karakteriše vektorom stanja u $2L$ -dimenzionalnom Hilbertovom prostoru. Za opis takve kvantne superpozicije na klasičnom računaru potrebno je zadati $2L$ kompleksnih brojeva. Već za $L=100$ njihov broj je veoma veliki - reda $10^{30}!$, što je praktično neizvodivo klasičnim računarom. Međutim, ovo se može efikasno ostvariti korišćenjem kvantnih operacija koje deluju u $2L$ -dimenzionalnom Hilbertovom prostoru stanja. Ovaj rad je preteča kvantnih kompjutera. Mnogi eksperimentalni "kompjuteri" koji uspešno funkcionišu stvaraju se iz dana u dan. Može se reći da je ovo trenutno jedna od najživljih oblasti nauke.

Entanglirana stanja su postala osnovna komponenta u takvim pojavama kao što su kvantna teleportacija [9], kvantna kriptografija [10], itd. Takođe, saglasno savremenim idejama entanglement jest jedan od osnovnih izvora ubrzanja u kvantnim izračunavanjima kao i u prenosu odnosno predaji podataka [11]. Na taj način, postalo je jasno da entanglement nije samo predmet filozofskih debata u odnosu na početak kvantne teorije, već i novi kvantni resurs za rešavanje problema koji ne mogu biti rešeni pomoću ma kog klasičnog uređaja [12]. Uloga spletenosti kao resursa dala je dodatni veliki impuls za nova, kako eksperimentalna tako i teorijska istraživanja ove pojave [12, 13]. U današnje vreme, zbog toga što se teorija entangliranih stanja bazira na najfundamentalnijim idejama kvantne mehanike, istraživanje spletenih stanja zahvata skoro sve oblasti savremene fizike: atomsku fiziku, kvantu optiku, fiziku čvrstog stanja, spektroskopiju nuklearne i elektronske magnetne rezonance, fiziku superprovodnika i druge.

Ispostavlja se da su danas veoma perspektivni sistemi za razvoj kvantne teorije informacija spinski sistemi pri niskim temperaturama [14]. Važni rezultati su dobijeni za jednodimenzione anizotropne modele [13] gde se entanglement javlja među susednim spinovima.

Entanglement je proučavan mnogo godina, izučava se i danas, a sve u cilju otkrovenja prirode koju nosi sa sobom čudesan svet kvantne mehanike. Pojam entanglementa, kao što ćemo steći uvid u teorijskom delu rada, igra ključnu ulogu u formalizmu kvantomehaničke obrade informacija. Kvantni entanglement u fizici čvrstog stanja pronalazi svoje mesto kroz analizu spinskih lanaca, koji su dobri kandidati za primenu u savremenoj kvantnoj informatici [14].

U cilju karakterizacije, kako kvalitativno tako i kvantitativno, sistema kondenzovane materije i primene istih u teoriji kvantne informatike, formalizam temperaturskog entanglementa implementiran je u Hajzenbergov anizotropan model, spina $S = \frac{1}{2}$, zaključno sa Đalošinski - Morija interakcijom (u daljem izlaganju, koristiće se skraćenica DM) koji je, u nekoj meri, detaljno analiziran u ovom radu. Hajzenbergovi lanci spinova su dobra osnova za izgradnju kvantnih računara.

Kao kvantitativna mera entangliranosti sistema uzeta je u obzir veličina - **konkurenost** (engl. concurrence) C [14]. Konkurenost ima osobenost da se njena vrednost kreće između 0 i 1, odnosno za $C = 0$ reč je o totalno raspletrenom stanju, a za $C = 1$ govori se o maksimalno entangliranom (spletrenom) stanju, respektivno. Za mešana stanja matrice ρ , konkurenost stanja data je kao $C(\rho) = \max\{2\lambda_{\max} - \sum_{i=1}^4 \lambda_i, 0\}$, gde su λ_i kvadratni korenji svojstvenih vrednosti matrice $R = \rho S \rho^* S$, gde je pak sa S označena matrica $S = \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y$. Veliki značaj takođe ima i magnetno polje koje omogućava adresiranje kubita, a videćemo u radu šta se dešava sa grafičkom zavisnosti konkurenциje od relevantnih parametara, kada se sistem Hajzenbergovih spinova nalazi u spoljašnjem magnetnom polju [15] a šta kada se sistem Hajzenbergovih spinova nalazi van spoljašnjeg magnetnog polja [14].

Prvo poglavlje ima zadatak da čitaoca upozna sa neophodnim kvantnomehaničkim pojmovima, relevantnim za dalji tok rada. Između ostalog, ističe se pojam kubita, potom Belovog bazisa, entanglementa, matrice gustine, čistih i mešanih stanja, kao i ostalih bitnih pojmoveva koje je neophodno usvojiti da bi se uopšte pratio dalji tok rada. U drugom poglavlju biće reči o osnovnim postavkama kvantne teorije informacija, gde se opet pravi osvrt na kubitne sisteme, potom na čuvenu teoremu o nemogućnosti kloniranja kvantnih bitova, zatim se daje kratak pregled EPR eksperimenta, kao i objašnjenje o (ne)mogućnosti komuniciranja brzinom većom od brzine svetlosti. Koristeći sve ove pojmove, u radu se može saznati nešto više o pojmu kvantne teleportacije, njenoj fizičkoj realizaciji, a napisetku je predstavljena fundamentalna za ovu oblast, Belova teorema, koja čisto matematički daje odgovore na pitanja koja su mučila trojicu fizičara, a to su osnivači EPR eksperimenta.

U trećem poglavlju biće predstavljeni praktični proračuni vršeni na dvokubitnom Hajzenbergovom modelu, sa različitim anizotropijama, koji je frustriran interakcijom tipa Đalošinski - Morija. Takođe, posebno će biti razrađen sistem koji se nalazi u nehomogenom magnetnom polju, kao i sistem koji se nalazi van magnetnog polja. Rezultati koji će biti predstavljeni u dobroj meri definišu kvalitativnu i kvantitativnu meru entanglementa ovog sistema.

U četvrtom, ujedno i poslednjem poglavlju ovog rada, biće izvršena termodinamička analiza dvokubitnog Hajzenbergovog modela sa različitim anizotropijama, gde, poznavajući Hamiltonijan sistema, partitionu funkciju i matricu gustine, možemo koristeći termodinamičke relacije proračunati neke od osnovnih termodinamičkih funkcija poput: unutrašnje energije, topotognog kapaciteta, entropije i drugih. Biće data kratka diskusija u poređenju tzv. kritične temperature na kojoj nestaje entanglement u sistemu i Nelove temperature.

Rezultati koji će biti prikazani mogu biti od velike važnosti u daljem toku fizičke realizacije kvantnih računara.

1 Osnovni kvantnomehanički pojmovi

1.1 Pojam kubita i skalarnog proizvoda

Kvantna mehanika predstavlja fundamentalnu granu teorijske fizike, koja je uspešno zamjenila klasičnu mehaniku i klasičnu elektrodinamiku pri opisivanju atomskih i subatomskih pojava. Ona predstavlja teorijsku podlogu mnogih disciplina fizike i hemije kao što su: fizika kondenzovane materije, atomska fizika, molekulska fizika, računarska hemija, fizička hemija, kvantna hemija, fizika elementarnih čestica i nuklearna fizika. Zajedno sa specijalnom i opštom teorijom relativnosti, kvantna mehanika predstavlja jedan od stubova savremene fizike. Kvantna mehanika se bazira na četiri postulata [16] koji opisuju svet subatomskih čestica:

1. Stanja fizičkog sistema su reprezentovana vektorima u Hilbertovom prostoru.
2. U kvantnoj mehanici merne veličine reprezentovane su ermitskim operatorima. Ovaj uslov omogućava uslov realnosti dobijenih eksperimentalnih merenja.
3. Kvantno stanje može biti izmereno korišćenjem seta ortogonalnih projekcija. Ako je $|\Phi_1\rangle, \dots, |\Phi_k\rangle$ set ortogonalnih stanja, tada se kvantno stanje $|\Psi\rangle$ može izmeriti korišćenjem ovog seta stanja, prevodeći ga u jedno od stanja $|\Phi_i\rangle$ sa verovatnoćom $|\langle\Phi_i|\Psi\rangle|^2$.
4. Ma kakva promena u kvantnom sistemu koja nije merljiva može se tretirati kao dejstvo unitarnog operatora. Merenja su, u opštem kvantnom smislu, ireverzibilni procesi kojima se dobijaju neke informacije o kvantnom sistemu.

Na osnovu ovih postulata biće opisane osnovne postavke kvantne teorije informacija. To je interdisciplinarna oblast nauke koja kombinuje osnovne principe kvantne mehanike i nauke o računarima. Ona je doživela veoma buran razvoj u novije vreme. Najpre ćemo uvesti osnovne pojmove, kao što su bit, njegova kvantna generalizacija q-bit (qubit) [10]. Takođe definisaćemo Belova stanja dva q-bit-a, nelokalna stanja od velike važnosti za čitavu oblast kvantne teorije informacija. Zatim ćemo uvesti pojam svojstvenog problema operatora [16]. Bitno je ponoviti još jednom da se fizičkim veličinama u kvantnoj mehanici pripisuju odgovarajući ermitski operatori (npr. impulsu se pridružuje operator impulsa). Rešavanjem svojstvenog problema dobijamo svojstvene vrednosti datog operatora. Ukoliko su to ermitski operatori, tada su svojstvene vrednosti realni brojevi, što je od presudnog značaja budući da su svojstvene vrednosti operatora zapravo vrednosti date fizičke veličine koje merimo eksperimentom, a to su svakako realni brojevi. Bitna fizička veličina u kvantnim sistemima jeste matrica gustine, koja svoj analogon sa klasičnom fizikom nalazi ako je usporedimo sa funkcijom raspodele.

Ključni pojam u klasičnoj teoriji informacija je bit [17]. Reč bit potiče iz engleskog rečnika (binary digit) i predstavlja najmanju jedinicu informacije [17]. U slučajevima kada razmatramo bilo kakvu veličinu koja može imati samo jednu od dve vrednosti (npr. uključeno ili isključeno svetlo, da li je parking mesto slobodno ili zauzeto itd.), tada znanje o tome sadrži jedan bit informacije. Dakle, klasični bitovi, po definiciji, postoje u jednom od dva različita stanja u svakom datom trenutku, kao nula (0), ili jedan (1).

Sa kvantnom mehanikom počinju da važe njeni zakoni. Tada nam je dopušteno da imamo $0 \rightarrow |0\rangle$ i $1 \rightarrow |1\rangle$ istovremeno prisutne u jednom fizičkom sistemu¹. U stvari, dopušteno nam je da imamo beskrajan raspon stanja između nule $|0\rangle$ i $|1\rangle$ - što smo nazvali kubitom. Uobičajeno je da u kvantnom slučaju bit bude predstavljen sa jednim od dva stanja baze:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

bilo kakvog kvantnog sistema sa dva stanja (na primer jedna spin $S = \frac{1}{2}$ čestica u miru). Ova dva stanja (1.1), koja čine bazu u Hilbertovom prostoru \mathcal{H}_2 , mogu biti izabrana za kodiranje informacija [17]. Bitna razlika u odnosu na klasičan slučaj je da kvantni sistem može biti u proizvoljnoj linearnej kombinaciji dva stanja koja služe za predstavljanje 0 ili 1 klasičnog bita:

$$|\Psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1 \quad (1.2)$$

Informacija koju sadrže ovakva čista stanja kvantnog sistema sa dva stanja se naziva q-bit [10]. Jedan q-bit sadrži beskonačan iznos informacije (zaista, on je specifikovan sa dva kompleksna broja koji su ograničeni samo sa uslovom normiranja (1.2)). Na primer, dva spinska stanja jednog elektrona mogu poslužiti za čuvanje jednog q-bit-a.

Stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$ su normirana i ortogonalna. Ovakva talasna funkcija reprodukuje superpoziciju dva elektronska spina:

$$|\Psi\rangle = \alpha|up\rangle + \beta|down\rangle \quad (1.3)$$

gde je sa $|up\rangle$ označeno stanje elektrona spina "gore", a sa $|down\rangle$ stanje elektrona spina "dole". Takođe, ista talasna funkcija reprodukuje foton u superpoziciji dve različite polarizacije (horizontalna i vertikalna):

$$|\Psi\rangle = \alpha|H\rangle + \beta|V\rangle \quad (1.4)$$

ovo stanje je tzv. dvodimenziono kvantno stanje. Ono može biti, u opštem slučaju, n -dimenziono, a forma takvog stanja je [16]:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i|i\rangle \quad (1.5)$$

U matričnoj reprezentaciji, dato stanje se prikazuje kao vektor kolone:

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

U ortonormiranom bazisu stanja važi:

$$\langle i|j\rangle = \delta_{i,j} \quad (1.7)$$

¹Ovde i nadalje koristimo dirakovsku notaciju

Bitna veličina u kvantnoj mehanici je skalarni proizvod dva kvantna stanja [16]:

$$|\Psi\rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i |i\rangle, \quad |\Phi\rangle = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j |j\rangle$$

i definiše se na sledeći način:

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^* \alpha_i \langle j | i \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \beta_i^* \alpha_i \quad (1.8)$$

gde je uzeta ortogonalnost ovih stanja, što je rezultovalo u proizvodu (1.8) da je $\langle j | i \rangle = \delta_{i,j}$, te u konačnom ishodu skalarnog proizvoda dva vektora stanja dobijamo kao rezultat broj (skalar). Za skalarno množenje dva ista vektora stanja, kao rezultat dobija se pozitivan broj, koji se naziva norma vektora [18]. Norma vektora u kvantnoj mehanici obično je jedinična, tj. $\langle \Psi | \Psi \rangle = 1$.

1.2 Hilbertov prostor i merne veličine. Pojam ermitskog i Adamarovog operatora

Neophodno je sada opisati i prostor stanja kojim operiše kvantna mehanika. Kvantni prostor stanja je apstraktan prostor stanja, i naziva se Hilbertov beskonačnodimenzionalni prostor - u oznaci \mathcal{H}_n . Potreban nam je način da stanja reprezentujemo brojevima i pri tome dozvoljavamo da se stanja reprezentuju kompleksnim brojevima. Za reprezentaciju stanja potreban je bazis. Jedan od postulata kvantne mehanike govori da se svakoj fizičkoj veličini u kvantnoj mehanici pripisuje ermitski operator. Ono što je bitno je da ermitski operatori imaju realne svojstvene vrednosti i ortonormirani svojstveni bazis. To znači da postoji proces kojim je svaki ermitski operator jednoznačno povezan sa nekim realnim brojevima i skupom nekih vektora koji su međusobno ortogonalni i jedinične dužine, što proizilazi iz uslova normiranja. Ovo navodi na sledeće: u kvantnoj mehanici su sve fizičke veličine, tj. observable, predstavljene ermitskim linearnim operatorima koji deluju u prostoru stanja. Pritom, svojstvene vrednosti predstavljaju moguće rezultate merenja fizičke veličine čijem operatoru te svojstvene vrednosti pripadaju.

Kako je Hilbertov prostor beskonačno dimenijski prostor, to u njemu možemo kreirati beskonačno mnogo ortonormiranih sistema. Bilo koji neortonormirani bazis može se prevesti u ortonormirani specijalnim tehnikama (Gram - Šmitov postupak ortogonalizacije) [19]. Jedan ortonormirani sistem čini kompletan skup talasnih funkcija te proizvoljnu talasnu funkciju u njemu možemo predstaviti kao njihovu linernu kombinaciju (superpoziciju), analogno predstavljanju 3D vektora pomoću zbiru 3 nezavisna (ortogonalna) vektora. Odavde sledi još jedna osobina talasne funkcije: ako dve talasne funkcije opisuju stanje sistema, onda bilo koja njihova linearna kobilacija opisuje stanje tog sistema. Ovo je poznati princip superpozicije stanja u kvantnoj mehanici.

Hilbertov prostor je kompletan kompleksni vektorski prostor. Kompleksan vektorski prostor V je set koji za bilo koje vektore $|\Psi\rangle, |\Phi\rangle, |\chi\rangle \in V$ i za proizvoljne kompleksne brojeve α, β, \dots iz polja u ovom prostoru važe sledeća pravila [17]:

$$|\Psi\rangle + |\Phi\rangle = |\Phi\rangle + |\Psi\rangle \quad (1.9)$$

$$(|\Psi\rangle + |\Phi\rangle) + |\chi\rangle = |\Psi\rangle + (|\Phi\rangle + |\chi\rangle) \quad (1.10)$$

$$0 + |\Psi\rangle = |\Psi\rangle \quad (1.11)$$

$$|\Psi\rangle - |\Psi\rangle = |0\rangle \quad (1.12)$$

$$\alpha(\beta|\Psi\rangle) = (\alpha\beta)|\Psi\rangle \quad (1.13)$$

$$(\alpha + \beta)|\Psi\rangle = \alpha|\Psi\rangle + \beta|\Psi\rangle \quad (1.14)$$

$$1|\Psi\rangle = |\Psi\rangle \quad (1.15)$$

Skalarni proizvod zadovoljava sledeća pravila:

$$(\alpha\langle\Psi| + \beta\langle\Psi|)|\Phi\rangle = \alpha\langle\Psi|\Phi\rangle + \beta\langle\Psi|\Phi\rangle \quad (1.16)$$

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \langle\Phi|\Psi\rangle^* \quad (1.17)$$

$$\langle\Psi|\Psi\rangle \geq 0 \quad (1.18)$$

specijalno, $\langle\Psi|\Psi\rangle = 0$ ako i samo ako je $|\Psi\rangle = 0$. Za dati Hilbertov prostor \mathcal{H}_n , set stanja $\{|\Psi_i\rangle\}_{i=1}^n$ se naziva linearno nezavisno ako za ma koji set od n kompleksnih brojeva $\{|\alpha_i\rangle\}_{i=1}^n$ važi [17]:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i |\Psi_i\rangle = 0 \quad (1.19)$$

što će reći da je linearna nezavisnost zadovoljena ako je $\alpha_i = 0, \forall i$. Smisao linearne nezavisnosti vektora stanja leži u činjenici da ne postoji vektor $|\Psi_j\rangle$ u setu linearno nezavisnih vektora takav da se može predstaviti kao linearna kombinacija ostalih vektora tog seta, odnosno [19]:

$$|\Psi_j\rangle \neq \sum_{i \neq j} \alpha_i |\Psi_i\rangle, \quad \forall \alpha_i \quad (1.20)$$

Ukoliko se granica postavi na dve dimenzije, tada je broj linearno nezavisnih vektora dva, dok bilo koji treći vektor sigurno je linearna kombinacija ova dva vektora. Za trodimenzionalni prostor, analogno, postoji tri linearne nezavisne vektore, dok bi četvrti sigurno bio linearne kombinacija prethodna tri nezavisna itd. [19]. U opštem slučaju \mathcal{H}_n , dimenziju vektorskog prostora određuje broj linearne nezavisnih vektora u tom prostoru. Skup od n linearne nezavisnih vektora $\{|\Psi_1\rangle, \dots, |\Psi_n\rangle\}$ u n -dimenzionom prostoru \mathcal{H}_n naziva se **bazisom** u \mathcal{H}_n . Pojam linearne nezavisnosti vektora sada može biti opisan u sledećoj formi: bazinski vektor ne može biti predstavljen kao linearna kombinacija ostalih baziskih vektora

[19].

Skup $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ baza je za sve kubitne sisteme, ali je isto tako baza i $|0\rangle + |1\rangle, |0\rangle - |1\rangle$. Dakle, izbor baze je u opštem slučaju nejednoznačan.

Neka je dato stanje:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (1.21)$$

Ukoliko je $\alpha = 1$ i $\beta = 0$, tada se sistem nalazi u stanju $|0\rangle$ i obrnuto, za $\alpha = 0$ i $\beta = 1$, sistem se nalazi u stanju $|1\rangle$. Ukoliko su oba parametra, pak, različita od nule, tada se sistem nalazi u superpoziciji dva kvantna stanja. U prvom slučaju (jednoznačno određeno stanje $|0\rangle$ ili $|1\rangle$) reč je o tzv. klasičnom nekvantovanom bitu, dok se u drugom slučaju (superpozicija stanja [18] $|0\rangle$ i $|1\rangle$) govori o kvantnim kubitnim sistemima. Stanje kubita $|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ može biti izmereno, odnosno, mogu se odrediti verovatnoće da se sistem zatekne u nekom od ova dva stanja. Verovatnoća da se sistem nađe u stanju $|0\rangle$ iznosi $|\alpha|^2$, dok u stanju $|1\rangle$ ta verovatnoća iznosi $|\beta|^2$. Nameće se uslov koji nalaže da kvadратi modula (u opštem slučaju, to su kompleksni brojevi) koeficijenata ispred određenih stanja u svom zbiru u konačnom ishodu daju 1 [16]:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \quad (1.22)$$

što će reći:

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \quad (1.23)$$

U praksi se često koristi Adamarov bazis stanja [17] koji se definiše na sledeći način:

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) \quad (1.24)$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle) \quad (1.25)$$

Ova stanja se nazivaju i stanja kvantnih novčića, jer svako od njih nakon merenja rezultuje verovatnoćom detekcije od 50%. Adamarova stanja su ortogonalna stanja, što ima za posledicu:

$$\langle + | - \rangle = 0 \quad (1.26)$$

što se lako da pokazati.

Definišimo sada projekcioni operator:

$$P_n = |n\rangle \langle n| \quad (1.27)$$

On je ermitski ($P_n^\dagger = P_n$) i idempotentan ($P_n^2 = P_n$) [17]. Ima osobinu da kada se primeni na neko stanje, to stanje projektuje na stanje $|n\rangle$. Na primer, neka je:

$$P = |0\rangle \langle 0|, \quad (1.28)$$

tada je:

$$P|+\rangle = |0\rangle\langle 0| \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle + |1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle \quad (1.29)$$

Ovde je iskorišćena osobina ortogonalnosti stanja $\langle 0|1\rangle = 0$ [17]. Ukoliko se potraži kvadrat koeficijenta ispred stanja $|0\rangle$ u relaciji (1.29) dobija se verovatnoća detekcije stanja, što u ovom slučaju iznosi 50%.

Kao što znamo, ermitski operatori igraju bitnu ulogu u svetu kvantne fizike. Svojstvene vrednosti ermitskog operatora su realni brojevi, a kako se prema jednom od postulata kvantne mehanike fizičkim veličinama pripisuju ermitski operatori, jasno je da su njihove svojstvene vrednosti eksperimentalno merljive [18].

Za neka dalja razmatranja uvodimo Adamarov operator [17] na sledeći način:

$$\mathcal{H} = |+\rangle\langle 0| + |-\rangle\langle 1| \quad (1.30)$$

Dejstvo ovog operatora na stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$ je sledeće:

$$\mathcal{H}|0\rangle = |+\rangle \quad \mathcal{H}|1\rangle = |-\rangle \quad (1.31)$$

gde vidimo da dejstvom Adamarovog operatora na stanja $|0\rangle$ ili $|1\rangle$ prevode nas u Adamarov bazis stanja $|+\rangle$ ili $|-\rangle$, dok dejstvo Adamarovog operatora na Adamarova stanja rezultuje:

$$\mathcal{H}|+\rangle = |0\rangle \quad \mathcal{H}|-\rangle = |1\rangle \quad (1.32)$$

Adamarova stanja favorizuju prelaz u tačno određeno stanje ($|0\rangle$ ili $|1\rangle$) nakon izvršenog merenja [17].

Ovde se može istaći razlika između klasičnog i kvantnog računara. Naime, klasičan računar koristi klasične (nekvantovane) bitove, te se N -bitni računar može naći u nekom od 2^N stanja. Kvantni računar, pak, operiše sa kvantnim bitovima (kubiti). Stanje N -kubitnog kvantnog računara je ma koja linearna superpozicija 2^N stanja koja odgovaraju bazisnim vektorima Hilbertovog prostora [20].

Klasičan računar se može naći u 2^N različitim stanja i merenjem (očitavanjem) stanja računara, njegovo stanje ostaje isto. U slučaju kvantnog računara, koji se može naći u beskonačnom skupu stanja (linearna superpozicija 2^N stanja), merenjem stanja dobija se neko od 2^N stanja računarske baze, a sam računar prelazi upravo u to stanje. To znači da se merenjem nedvosmisleno menja kvantno stanje računara [20].

1.3 Belov bazis. Kvantni entanglement

Entanglement (spletjenost) je jedan od najintrigantnijih fenomena kvantne mehanike. Naime, korelacioni sistemi, kakvi se mahom izučavaju u fizici kondenzovane materije, nailaze na stranputnicu prilikom potrage objašnjenja svog postojanja u svetu klasične mehanike. Stanje kvantnog sistema koji se sastoji od dva sistema se mogu razmatrati kao kompozicija samo ukoliko se izvrši tenzorski proizvod tih vektora stanja [17]. Za dva Adamarova stanja $|+\rangle$ i $|-\rangle$:

$$|+\rangle \otimes |-\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle + |1\rangle) \otimes (|0\rangle - |1\rangle) = \frac{1}{2}(|00\rangle + |01\rangle + |01\rangle + |11\rangle) \quad (1.33)$$

ovde je \otimes oznaka za tenzorski proizvod i često se u praksi izostavlja, a podrazumeva se.

Razmotrimo sada detaljnije slučaj dve čestice spina $S = \frac{1}{2}$. One mogu biti u jednom od četiri stanja: $|0\rangle \otimes |0\rangle \equiv |00\rangle$, $|0\rangle \otimes |1\rangle \equiv |01\rangle$, $|1\rangle \otimes |0\rangle \equiv |10\rangle$ i $|1\rangle \otimes |1\rangle \equiv |11\rangle$. U ovim stanjima smo očigledno kodirali informaciju koja sadrži dva klasična bita. Tako, na primer, drugo od ovih stanja opisuje situaciju u kojoj prvi bit ima vrednost 0, dok drugi bit ima vrednost 1 itd. Ova četiri stanja odgovaraju klasičnom kodiranju pomoću dva bita, sa četiri mogućnosti 00, 01, 10, 11. Međutim, kvantna mehanika pruža mogućnost potpuno drugačijeg kodiranja informacije pomoću dva kubita, pošto je u principu moguće konstruisati superpoziciju gore spomenutih stanja [10]. Specijalno, u kvantnoj teoriji informacija se široko koriste četiri Belova stanja i ona čine bazis u Hilbertovom prostoru $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_2$, za dve čestice spina $S = \frac{1}{2}$.

Belov bazis [21] čini skup entangliranih vektora. Neka je dat tenzorski proizvod $V_1 \otimes V_2$, gde su V_1 i V_2 dvodimenzionalni kompleksni vektorski prostori čestica spina $S = \frac{1}{2}$.

Razmatrimo stanje:

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) \quad (1.34)$$

Jasno je da se ovde radi o entangliranom kvantnom stanju. Štaviše

$$\langle \Phi^+ | \Phi^+ \rangle = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 \quad (1.35)$$

stanje je normirano. Kako se nakon tenzorskog proizvoda dobija četvorodimenzionalni prostor stanja, potrebna su još tri entanglirana bazisna stanja. Ona su redom:

$$|\Psi^+\rangle = 1 \otimes \sigma_1 |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (1.36)$$

$$|\Psi^+\rangle = 1 \otimes \sigma_2 |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle + |1\rangle|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \quad (1.37)$$

$$|\Psi^-\rangle = 1 \otimes \sigma_3 |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|1\rangle - |1\rangle|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) \quad (1.38)$$

$$|\Phi^-\rangle = 1 \otimes \sigma_3 |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle|0\rangle - |1\rangle|1\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \quad (1.39)$$

Stanje $|\Phi^+\rangle$ ortogonalno je na ostala tri stanja [21]. Pokazaćemo na jednom primeru, dok se preostali slučajevi dokazuju analogno:

$$\begin{aligned}\langle \Phi^+ | \Psi^+ \rangle &= \frac{1}{2}(\langle 0 | \langle 0 | + \langle 1 | \langle 1 |)(|0\rangle |0\rangle + |1\rangle |1\rangle) \\ &= \frac{1}{2}(\langle 0 | 1 \rangle + \langle 1 | 0 \rangle) = 0\end{aligned}\quad (1.40)$$

Ovde je iskorišćena ortogonalnost vektora $|0\rangle$ i $|1\rangle$, tj. $\langle 1 | 0 \rangle = \langle 0 | 1 \rangle = 0$.

Jasno je, dakle, da stanja definisana relacijama (1.36) - (1.39) čine ortonormirani bazis. To ćemo dokazati formiranjem skalarnog proizvoda dva stanja Belovog bazisa:

$$\begin{aligned}\langle \Psi^i | \Psi^j \rangle &= \langle \Phi^+ | (1 \otimes \sigma_i)(1 \otimes \sigma_j) | \Phi^+ \rangle \\ &= \langle \Phi^+ | 1 \otimes (1\delta_{i,j} + i\varepsilon_{ijk}\sigma_k) | \Phi^+ \rangle \\ &= \delta_{i,j} \langle \Phi^+ | 1 \otimes 1 | \Phi^+ \rangle + i\varepsilon_{ijk} \langle \Phi^+ | 1 \otimes \sigma_k | \Phi^+ \rangle \\ &= \delta_{i,j} + i\varepsilon_{ijk} \langle \Phi^+ | \Phi^k \rangle = \delta_{i,j}\end{aligned}\quad (1.41)$$

Nije bilo teško pokazati da Belov bazis zaista čini entanglirani ortonormirani bazis. Stari, neentanglirani bazis se može izraziti pomoću Belovih stanja, respektivno:

$$|00\rangle = |0\rangle |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle + |\Phi^-\rangle)\quad (1.42)$$

$$|11\rangle = |1\rangle |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^+\rangle - |\Phi^-\rangle)\quad (1.43)$$

$$|01\rangle = |0\rangle |1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle - i|\Psi^-\rangle)\quad (1.44)$$

$$|10\rangle = |1\rangle |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Psi^+\rangle + i|\Psi^-\rangle)\quad (1.45)$$

Sada ćemo pokazati važenje entangliranosti stanja. Neka se stanje $|\Psi^+\rangle$ može izraziti kao stanje dva kubita $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle + \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$. Tada:

$$|00\rangle \otimes |11\rangle = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) = \alpha\gamma|00\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\delta|11\rangle\quad (1.46)$$

Izjednačavanjem leve i desne strane gornjeg izraza, sledi da je $\alpha\gamma = \beta\delta = 1$, $\beta\gamma = \alpha\delta = 0$. Rezultat $\beta\gamma = \alpha\delta = 0$ implicira na to da jedan od faktora svakako mora biti jednak nuli, a kako bi istovremeno moralo važiti $\alpha\gamma = \beta\delta = 1$, sledi da je ta jednakost nemoguća.

Kao zaključak sledi da je Belov bazis zaista entangliran, sa nemogućnošću razdvajanja na stanja prostih bitova [21]. Još opštije; čisto kvantno stanje je zamršeno i ne može biti izraženo kao tensorski proizvod stanja dva sistema [17].

U kvantnomehaničkom formalizmu postoje separabilna i neseparabilna stanja. Po definiciji, separabilno stanje je bilo koje stanje iz prostora $V_1 \otimes V_2$ čiji razvoj po baznim vektorima

može biti razložen u proizvod dva člana od kojih svaki sadrži vektore samo jednog potprostora V_1 ili V_2 [17]:

$$\Psi_{12} = \Psi_1 \otimes \Psi_2 \quad (1.47)$$

Sa druge strane, neseparabilno (entanglirano) stanje je bilo koje stanje iz $V_1 \otimes V_2$ za koje ne važi gornja relacija [17]. Takvo stanje se ne može svesti na proizvod dva člana koji sadrže stanja iz samo jednog potprostora V_1 ili V_2 .

$$\Psi_{12} \neq \Psi_1 \otimes \Psi_2 \quad (1.48)$$

Bitno je napomenuti razliku između separabilnog i neseparabilnog stanja. Naime, ukoliko posmatramo par čestica koji se nalazi u entangliranom stanju, tada nijedna od tih čestica nema jasno definisanu osobinu [10]. Šta podrazumevamo pod tim? Pa, ukoliko razmatramo dva elektrona spina $s = \frac{1}{2}$, a poznato je da se oni kuplju takо da jedan zauzima pravac $+\frac{1}{2}$, a drugi $-\frac{1}{2}$, ne možemo sa sigurnošću reći koji elektron od ova dva ima jasno definisan pravac vektora spina. Ovo je posledica spletenosti stanja [17], što će reći da ovakvo stanje pre merenja nema nikakvu osobinu. Poznat primer spletenog stanja je stanje Šredingerove mačke [22]. U ovom misaonom eksperimentu mačku zatvorimo u čeličnu komoru, zajedno sa odgovarajućim uređajem (koji mora biti osiguran od direktnog kontakta sa mačkom) - neka to bude Gajger - Milerov brojač. U Gajgerovom brojaču se nalazi malo radioaktivne supstance, te se može desiti da se u toku jednog sata atom može dovesti do raspadanja, ali i sa jednakom verovatnoćom da se to ne desi. U slučaju da se to desi, cev Gajgerovog brojača se prazni i kroz relej otpušta čekić koji razbija bočicu cijanovodonicične kiseline. Ako se ovaj sistem prepusti samom sebi na jedan sat, moglo bi se reći da je mačka još živa ukoliko u međvremenu nije došlo do raspada nijednog atoma. Stanje Šredingerove mačke se prikazuje u obliku superpozicije, gde znamo da se mačka sa verovatnoćom koja iznosi 50% nalazi u živom, a sa preostalih 50% u mrtvom stanju. Svakako, problem na koji se ovde želi ukazati jeste realnost prilikom merenja, što će reći da dok se kutija ne otvori, mi ne možemo sa sigurnošću tvrditi da li je mačka prezivila ili nije. Fizički preciznije, stanje mačke nalazi se u kvantnom entangliranom stanju. Naime, pojам vezan za situaciju da mačka pre merenja (u ovom slučaju otvaranja kutije) nema svoju 100% osobenost, dovodi u pitanje tzv. realnost merenja, koja je sveprisutna u klasičnom svetu. Kao primer se može navesti merenje mase zelenih jabuka. Osoba koja izmeri određenu masu jabuka se sigurno neće zapitati da li se stanje jabuka nakon merenja promenilo. Odnosno, ona zna da ako su jabuke bile zelene pre merenja, neće u procesu merenja promeniti boju, te je stanje jabuke neposredno pre i posle merenja određeno sa 100% verovatnoćom. Za divno čudo, tako nešto u kvantnom svetu ne važi. Ukoliko se objekat nalazi u kvantnoj superpoziciji stanja, tek nakon što se izvrši merenje, tada objekat jednoznačno dobija svoje osobine [17].

Entangliranost se javlja i između dva prostorno razdvojena sistema na velikim razdaljama. Ova osobina će se u daljem izlaganju rada iskoristiti u smislu mogućnosti komuniciranja Alise i Boba pomoću entangliranih stanja [20]. Biće pojašnjen pojам kvantne teleportacije, odnosno, kako Alisa može teleportovati Bobu kvantno stanje slanjem klasičnih bitova.

1.4 Svojstveni problem. Normalni operator i spektralna dekompozicija

Važna svojstva operatora jesu svojstveni vektori i svojstvene vrednosti. Svojstveni vektor operatora O je svaki vektor $|\Psi\rangle$ koji zadovoljava [17]:

$$O|\Psi\rangle = \lambda|\Psi\rangle \quad (1.49)$$

U gornjoj relaciji λ predstavlja svojstvenu vrednost operatora O . Ta jednačina je poznata pod nazivom **svojstveni problem operatora O** [17].

Neka je dat operator $\sigma_x = |0\rangle\langle 1| + |1\rangle\langle 0|$. Tada je:

$$\begin{aligned} \sigma_x|+\rangle &= |+\rangle \\ \sigma_x|-\rangle &= -|-\rangle \end{aligned} \quad (1.50)$$

Vektori $|+\rangle$ i $|-\rangle$ su svojstveni vektori operatora σ_x , sa svojstvenim vrednostima ± 1 . Uopšteno, ukoliko su $|\Phi_1\rangle$ i $|\Phi_2\rangle$ svojstveni vektori operatora O i ako oni imaju istu svojstvenu vrednost λ , tada i njihova linearana kombinacija ima istu svojstvenu vrednost, tj. [17]:

$$O(\alpha|\Phi_1\rangle + \beta|\Phi_2\rangle) = \alpha O|\Phi_1\rangle + \beta O|\Phi_2\rangle = \lambda(\alpha|\Phi_1\rangle + \beta|\Phi_2\rangle) \quad (1.51)$$

Normalni operator naziva se svaki operator za koji važi $N^\dagger N = NN^\dagger$ [17]. U ove operatore se, između ostalog, ubrajaju ermitski i unitarni operatori sa kojima se u kvantnoj mehanici neizbežno barata. Neka je σ_x normalan operator, sa svojstvenim vektorima $|+\rangle$ i $|-\rangle$. Tada se može predstaviti kao:

$$\sigma_x = |+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| \quad (1.52)$$

Ovaj pojam je izuzetno bitan zato što svaki normalni operator ima dekompoziciju [17]. Normalni operator se razlaže u spektar prema definiciji:

$$O = \sum_i \lambda_i |\Phi_i\rangle\langle\Phi_i| \quad (1.53)$$

Ovde su $|\Phi_i\rangle$ svojstveni vektori operatora O , a sa λ_i odgovarajuće svojstvene vrednosti operatora O . Ova forma naziva se dijagonalna forma, iz razloga što operator u svojstvenom bazisu ima formu dijagonalne matrice [19]. Tada:

$$OO^\dagger = \sum_i \lambda_i |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| \sum_j \lambda_j^* |\Psi_j\rangle\langle\Psi_j| = \sum_i |\lambda_i|^2 |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| = O^\dagger O \quad (1.54)$$

Ukoliko se sa f obeleži funkcija, a sa O normalni operator, tada se svaka funkcija operatora $f(O)$ može razložiti u spektralnu dekompoziciju [17]:

$$f(O) = \sum_i f(\lambda_i) |\Psi_i\rangle\langle\Psi_i| \quad (1.55)$$

Ova izuzetno korisna forma u praksi, koristiće se u daljem toku rada prilikom razvijanja matrice gustine kojoj je posvećena sledeća sekcija.

1.5 Čista i mešana stanja u kvantnoj mehanici. Matrica gustine ρ

Osnovni zadatak kvantne mehanike jeste nalaženje verovatnoća da se sistem prilikom merenja registruje u datom kvantnom stanju [23]. Čisto stanje u kvantnoj mehanici opisano je sa jednim vektorom stanja $|\varphi\rangle$, za koji se prepostavlja da je normiran. Međutim, u kvantnoj mehanici postoje stanja koja ne mogu biti opisana jednim vektorom stanja. Ova stanja se nazivaju mešana stanja i ona se opisuju pomoću operatora (matrice) gustine oblika [23]:

$$\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \quad (1.56)$$

gde su p_i verovatnoće da se sistem nađe u i-tom stanju $|\varphi_i\rangle$ posmatranog ansambla. Stanja $|\varphi_i\rangle$ su normirana, tj. $\langle\varphi_i|\varphi_i\rangle = 1$, ali ne i nužno ortogonalna. Ove verovatnoće zadovoljavaju sledeće:

$$0 \leq p_i \leq 1, \quad \sum_i p_i = 1, \quad \sum_i p_i^2 = 1 \quad (1.57)$$

Matricu gustine su u kvantnu mehaniku uveli, nezavisno jedan od drugog, Landau i Fon Nojman, 1927. godine [23]. U slučaju kada je $p_i = \delta_{i,j}$ tada matrica gustine ima oblik:

$$\rho = |\varphi_j\rangle\langle\varphi_j| \quad (1.58)$$

i tada govorimo o čistim stanjima, odnosno dobija se matrica gustine čistog stanja koja ima smisao projektora na stanje $|\varphi_j\rangle$. Ukoliko to nije slučaj, stanje je mešano i matrica gustine je prosto suma projekcionih operatora po kvantnom ansamblu, sa verovatnoćom kao težinskim faktorom [23].

Uvodeći kompletan ortonormirani bazis $\{\chi_n\}$, gde se može iskoristiti kompletnost skupa - razlaganje jedinice ($I = \sum_n |\chi_n\rangle\langle\chi_n|$), i-ti član ansambla se može zapisati kao:

$$|\varphi_i\rangle = \sum_n |\chi_n\rangle\langle\chi_n|\varphi_i\rangle = \sum_n c_n^{(i)} |\chi_n\rangle \quad (1.59)$$

gde je $c_n^{(i)} = \langle\chi_n|\varphi_i\rangle$. Relacija (1.59) naziva se koherentna superpozicija koja nema analogon u klasičnoj fizici [23]. Važno je naglasiti da mešovito stanje nije koherentna superpozicija, jer da jeste, za njegov opis bi bio dovoljan jedan vektor stanja. U koherentnu superpoziciju ulaze različita stanja sa, u opštem slučaju, kompleksnim koeficijentima i pritom je bitna informacija o relativnim fazama tih koeficijenata. Matrični element ρ između stanja $|\chi_n\rangle$ i $|\chi_{n'}\rangle$ je:

$$\langle\chi_n|\rho|\chi_{n'}\rangle = \sum_i p_i c_n^{(i)} c_{n'}^{(i)*} \quad (1.60)$$

Veličine $\langle \chi_n | \rho | \chi_{n'} \rangle$ formiraju matrične elemente matrice gustine ρ . Uslov normiranja matrice gustine:

$$\begin{aligned}
Tr(\rho) &= Tr \left[\sum_i p_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i| \right] \\
&= \sum_i p_i Tr [|\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|] = \sum_i p_i \sum_n \langle \varphi_n | (|\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|) | \varphi_n \rangle \\
&= \sum_i p_i \sum_n \langle \varphi_n | \varphi_i \rangle \langle \varphi_i | \varphi_n \rangle \\
&= \sum_{n,i} p_i \langle \varphi_n | \varphi_i \rangle \delta_{i,n} = \sum_i W_i = 1
\end{aligned} \tag{1.61}$$

Ovaj uslov ekvivalentan je uslovu normiranja funkcije raspodele u klasičnoj statističkoj fizici. U slučaju kada je kvantni sistem opisan matricom gustine koja sadrži samo jedan član, $i = 1$, tada je:

$$\hat{\rho} = |\varphi\rangle \langle \varphi| \tag{1.62}$$

To znači da se on nalazi u čistom stanju $|\varphi\rangle$, jer ne postoje druga stanja koja su pomešana. Lako se proverava da za čisto stanje važi:

$$\rho^2 = |\varphi\rangle \langle \varphi| |\varphi\rangle \langle \varphi| = |\varphi\rangle \langle \varphi| = \rho \tag{1.63}$$

Ova relacija služi kao kriterijum na osnovu koga se utvrđuje da li se sistem, opisan operatorom ρ , nalazi u čistom ili u mešanom stanju [23]. Ako je $\rho^2 = \rho$, sistem je u čistom, a ako je $\rho^2 \neq \rho$, sistem je u mešanom stanju.

Dalje, bez dokazivanja nekih, navodimo najvažnije osobina operatora gustine [23]. To su:

- ermitovost: $\rho^\dagger = \rho$
- jediničnost traga: $Tr(\rho) = 1$
- pozitivna definitnost: $\langle \varphi_n | \rho | \varphi_{n'} \rangle \geq 0$ (u bilo kojoj bazi $\{|\varphi_n\rangle\}$)
- trag njegovog kvadrata je manji od 1: $Tr(\rho^2) < 1$.

$$Tr(\rho^2) = \sum_n \langle \varphi_n | \rho^2 | \varphi_n \rangle = \sum_{n,n'} \langle \varphi_n | \rho | \varphi_{n'} \rangle \langle \varphi_{n'} | \rho | \varphi_n \rangle = \sum_{n,n'} |\langle \varphi_n | \rho | \varphi_{n'} \rangle|^2 \leq 1 \tag{1.64}$$

Kako u gornjoj relaciji faktor $|\langle \varphi_n | \rho | \varphi_{n'} \rangle|^2$ ima fizički smisao verovatnoće, to je sigurno da kvadrat verovatnoće sigurno mora biti manji ili jednak jedinici, čime je relacija dokazana.

Prema principu korespondencije, fon Nojman uvodi kvantnomehaničku entropiju kao srednju vrednost operatora $-k_B \ln \rho$ [17]:

$$S = -k_B Tr(\rho \ln \rho) \tag{1.65}$$

koja se posle proračuna traga svodi na Šenonovu klasičnu definiciju entropije:

$$S = -k_B \sum_i p_i \ln p_i \quad (1.66)$$

Lako je uveriti se iz gornje relacije da je za čisto stanje, kada postoji samo jedno stanje i njegova verovatnoća je jednaka jedinici ($p = 1$), entropija jednaka nuli [23]. Ovaj rezultat ima smisla iz razloga što čisto stanje u sebi nosi maksimalnu moguću informaciju o kvantnom sistemu. Nasuprot čistom, kada je reč o mešanom stanju, tada je entropija mešovitog stanja različita od nule. I ova činjenica je opravdana, jer ako entropiju definišemo kao meru neuređenosti sistema, a znamo da mešovito stanje sa sobom ne nosi maksimalnu moguću informaciju o kvantnom sistemu, tada je lako zaključiti da za mešana stanja govorimo o entropiji koja je različita od nule.

1.6 Redukovana matrica gustine ρ

Kao zaključak prvog poglavlja rada, nakon definisanja pojma entangliranosti u kvantnom sistemu i matrice gustine u prethodnim podsekcijama, u istom duhu nastavljamo sa još detaljnijim opisom entangliranosti sistema, sada pomoću pojma redukovane matrice gustine [17].

Još jednom je korisno naglasiti da kvantni entanglement predstavlja jedan od najintrigantnijih pojmova kvantne mehanike, jer pored kvantne neodređenosti, postulirane putem Hajzenbergovih relacija neodređenosti, u sistem unosi dodatnu neodređenost - nepostojanje stanja podsistema [17]. Diskusiju nastavljamo uvođeći dvočestično stanje superpozicije:

$$|\varphi_{12}\rangle = C_1|\varphi_1^{(1)}\rangle \otimes |\varphi_2^{(2)}\rangle + C_2|\varphi_2^{(1)}\rangle \otimes |\varphi_1^{(2)}\rangle \quad (1.67)$$

gde je sa $|\varphi_j^{(i)}\rangle$ označeno stanje i-te čestice u j-tom stanju. Jedan od primera ovakvog stanja koje srećemo u fizici je spinsko singletno stanje [10]. Za stanje (1.67) kažemo da je entanglirano (spletено) stanje jer se ni u jednom bazisu stanja ono ne može zapisati kao proizvod stanja dva podsistema:

$$|\varphi_{12}\rangle \neq |\chi^{(1)}\rangle |\xi^{(2)}\rangle \quad (1.68)$$

Matrica gustine stanja (1.67) data je izrazom:

$$\begin{aligned} \rho_{12} &= |\varphi_{12}\rangle\langle\varphi_{12}| = |C_1|^2|\varphi_1^{(1)}\rangle\langle\varphi_1^{(1)}| \otimes |\varphi_2^{(2)}\rangle\langle\varphi_2^{(2)}| + C_1 C_2^* |\varphi_1^{(1)}\rangle\langle\varphi_2^{(1)}| \otimes |\varphi_2^{(2)}\rangle\langle\varphi_1^{(2)}| \\ &+ C_2 C_1^* |\varphi_2^{(1)}\rangle\langle\varphi_1^{(1)}| \otimes |\varphi_1^{(2)}\rangle\langle\varphi_2^{(2)}| + |C_2|^2 |\varphi_2^{(1)}\rangle\langle\varphi_2^{(1)}| \otimes |\varphi_1^{(2)}\rangle\langle\varphi_1^{(2)}| \end{aligned} \quad (1.69)$$

Sada definišemo redukovani matricu gustine [17] za česticu 1 (uzimanjem traga ρ_{12} tj. integracije po stepenima slobode drugog sistema (čestice 2)):

$$\rho_{12}^{(1)} = Tr_2 \rho_{12} = |C_1|^2 |\varphi_1^{(1)}\rangle\langle\varphi_1^{(1)}| + |C_2|^2 |\varphi_2^{(1)}\rangle\langle\varphi_2^{(1)}| \quad (1.70)$$

odnosno redukovana matrica gusine za česticu 2, analogno:

$$\rho_{12}^{(2)} = Tr_1 \rho_{12} = |C_1|^2 |\varphi_1^{(2)}\rangle\langle\varphi_1^{(2)}| + |C_2|^2 |\varphi_2^{(2)}\rangle\langle\varphi_2^{(2)}| \quad (1.71)$$

Dakle, kada se jedna čestica razmatra bez razmatranja druge, ona je generalno u mešanom stanju [17]. Tako se stepen spletenosti može razmotriti prema čistoći bilo kog podsistema, te ukoliko se dobije da je trag kvadrata redukovanog operatora gustine jednak jedinici, tada čestice nisu u kvantnom entangliranom stanju, a ako je rezultat manji od jedinice, tada se čestice nalaze u entangliranom stanju i stanje sistema se ne može izraziti kao proizvod stanja dva podsistema [17].

Štaviše, podsistemske jednočestične matrice gustine $\rho_{12}^{(1,2)}$ (redukovane matrice gustine) nisu stanja podistema 1 i 2, već su to tzv. "mešavine druge vrste" [17], jer za njih važe nejednakosti:

$$|\varphi_{12}\rangle \neq \rho^{12} \neq \rho^{(1)} \otimes \rho^{(2)} \quad (1.72)$$

gde je sa $\rho^{(12)}$ predstavljena matrica gustine mešanog dvočestičnog stanja:

$$\rho^{(12)} = |C_1|^2 |\varphi_1^{(1)}\rangle\langle\varphi_1^{(1)}| \otimes |\varphi_2^{(2)}\rangle\langle\varphi_2^{(2)}| + |C_2|^2 |\varphi_2^{(1)}\rangle\langle\varphi_2^{(1)}| \otimes |\varphi_1^{(2)}\rangle\langle\varphi_1^{(2)}| \neq \rho_{12} \quad (1.73)$$

Znači, kvantna neseparabilnost ne samo da poznaje "kvantnu neodređenost" na nivou celine 1+2 (u smislu relacija neodređenosti), već unosi dodatnu neodređenost nepostojanje stanja podistema (iako je ukupni sistem 1+2 u čistom stanju za koje važi nulta entropija) [20]. U osnovi, za složene kvantne sisteme, kvantna neseparabilnost je pre pravilo, nego što bi bio izuzetak [17]. Tako, nepostojanje stanja podistema (postojanje kvantnih korelacija) dovodi do kvantne neseparabilnosti objekta i aparata, odnosno kvantne neseparabilnosti sistema i okruženja. Kvantna neseparabilnost je svojstvo kvantnih sistema [20].

1.7 Mera kvantnog entanglementa - konkurentnost

Kao što je već rečeno, fenomen entangliranosti postoji je u kvantnoj mehanici u sistemima nelokalnih korelacija. Prvi od zadataka je nalaženje metoda kojim bismo utvrdili da li je određeno stanje složenog kvantnog sistema, koji se sastoji od dva ili više podsistema, entanglirano ili nije. Ukoliko je stanje entangirano, prelazimo na drugi zadatak. Drugi zadatak se sastoji u tome da pronađemo veličinu kojom bismo opisali kvantitativnu meru entangliranosti. U cilju određivanja mere kvantne entangliranosti uvodimo fizičku veličinu koja se naziva **konkurentnost** [24].

Kada govorimo o čistim stanjima, konkurentnost predložena od strane Beneta i saradnika 1986. godine dala je najprihvatljiviju meru entangiranosti složenih kvantnomehaničkih sistema i ovako definisana konkurentnost široko je bila prihvaćena od strane mnogih naučnika koji su se bavili ovom problematikom [25]. Međutim, za meru entangliranosti mešanih stanja ne postoji opšti metod [25]. Problem, odnosno težina određivanja mere kvantne entangiranosti mešanih stanja zavisi od dekompozicije mešanih na čista stanja. To nam govori da je glavna poteškoća naći minimalizaciju po svim dekompozicijama mešanih u čista stanja [25]. Za pojedine slučajeve, minimalizacija se može sprovesti analitički, međutim, analitička minimalizacija nije moguća u opštem slučaju. Za slučaj dvokubitnih sistema Vuters i Hil predlažu čuvenu formulu za konkurentnost [25].

Razmatramo sledeće dvokubitno kvantno stanje u najopštijoj formi

$$|\varphi\rangle = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle \quad (1.74)$$

čiji uslov normiranja navodi na

$$|a|^2 + |b|^2 + |c|^2 + |d|^2 = 1 \quad (1.75)$$

Ovo stanje je separabilno stanje ukoliko važi jednakost $ad = bc$ [25]. Ukoliko ova jednakost nije ispunjena, tada govorimo o entangiranom (neseparabilnom) stanju. Za stanje $|\varphi\rangle$, konkurentnost $C(\varphi)$ definisana je formulom [25]:

$$C(\varphi) = |\langle\varphi|\tilde{\varphi}\rangle| = 2|ad - bc| \quad (1.76)$$

gde je $|\tilde{\varphi}\rangle = (\sigma_y \otimes \sigma_y)|\varphi^*\rangle$. Kokurentnost je u direktnoj vezi sa entropijom entanglementa $E(\varphi)$ putem jednačine [25]:

$$E(\varphi) = \xi(C(\varphi)) \quad (1.77)$$

gde je

$$\xi(C) = H\left(\frac{1 + \sqrt{1 - C^2}}{2}\right) \quad (1.78)$$

a u ovoj izrazu uvedena je funkcija

$$H(x) = -x \ln x - (1 - x) \ln(1 - x) \quad (1.79)$$

Funkcija $\xi(C)$ je monotono rastuća funkcija i ima opseg između 0 i 1. U istom opsegu se kreće i funkcija $C(\varphi)$ [25].

U slučaju mešanih stanja, pogodnije je sistem opisati pomoću matrice gustine, definisane sa [25]:

$$\rho = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i| \quad (1.80)$$

gde $\{|\varphi_i\rangle\}$ predstavlja normirani bazis koji nije u opštem slučaju ortogonalan [17]. Ova stanja su čista stanja dvokubitnog sistema, a p_i predstavljaju pozitivno definisane realne brojeve, koji u svom zbiru rezultuju jedinicom. Već smo napomenuli da je stanje opisano matricom gustine ρ separabilno ukoliko se ona može napisati kao superpozicija tenzorskih proizvoda $\rho = \sum_i p_i \rho_i^R \otimes \rho_i^{R'}$, gde su $\rho_i^{R,R'}$ redukovane matrice gustine date sa $\rho_i^{R,R'} = Tr_{(R',R)} |\varphi_i\rangle\langle\varphi_i|$ [17]. Konkurentnost mešanog stanja ρ može biti definisana kao srednja konkurentnost čistih stanja minimizovana po svim dekompozicijama matrice gustine ρ [25]:

$$C(\rho) = \inf \sum_i p_i C(\varphi_i) \quad (1.81)$$

gde je $C(\varphi_i)$ konkurentnost čistih stanja $|\varphi_i\rangle$. Vuters i Hil predlažu eksplicitnu formulu za nalaženje konkurentnosti $C(\rho)$ i ona je oblika [25]:

$$C(\rho) = \max\{\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4, 0\} \quad (1.82)$$

gde su λ_i kvadratni koreni svojstvenih vrednosti neermitske matrice $R = \rho \sigma_y \otimes \sigma_y \rho^* \sigma_y \otimes \sigma_y$ poređani u opadajućem nizu [24].

Konkurentnost je, kao što će biti dokazano u numeričkim proračunima, monotono opadajuća funkcija temperature, te postoji kritična temperatura T_C za koju je $C(\rho) = 0$ [24]. Bitno je istaći da u slučaju kada je:

- $C(\rho) = 0$ - govorimo o neentangliranim stanjima
- $C(\rho) = 1$ - govorimo o maksimalno entangliranim stanjima
- $0 < C(\rho) < 1$ - entanglement je u kvantnomehaničkom složenom sistemu prisutan u manjoj ili većoj meri, respektivno vrednosti $C(\rho)$ (sa porastom $C(\rho)$ "jača" i entangliranost stanja) [25].

2 Osnovi kvantne informatike

2.1 Uvod u kvantnu informatiku

Ttokom druge polovine dvadesetog veka, razvoj kompjuterskih nauka implicira revidiranje dotadašnje percepcije fizike - u opštem slučaju, fizički sistem se može tretirati kao računar koji obrađuje podatke [20]. Početno stanje fizičkog sistema se tretira kao ulazni podatak računara, da bi daljom evolucijom fizičkog sistema pogodnim proračunima bio preveden u konačno stanje - što predstavlja izlazni podatak računara [17].

Novi način rezonovanja navodi na pomisao tretmana atributa fizičkih sistema kao vid informacije koje sadrži sistem. Sa druge strane, kako su fizika i proračuni, u neku ruku sinonimi, može se doći do konstatacije da se zakon obrade informacija u potpunosti oslanja na zakonitosti fizike.

Klasična teorija informacija prepostavlja da informacija evoluira respektivno zakonima klasične (njutnovske) fizike [17]. Šenon je 1948. uspešno razvio teoriju informacija. Centralnu ulogu u njegovoj priči igra Šenonova definicija entropije [17].

Informacija i sam pojam informacije se često definiše kao kvantitativni apstraktni skup, a koji pak u fizici ima svoj značaj. Ukoliko se priča o fizičkom sistemu, tada informacije moraju biti kodirane respektivno njemu, a obrada informacija vrši se putem dobro poznatih zakona fizike [17].

Interpretacija informacije na ovaj način pripisana je Landaueru, te se deduktivno iz nje može izvesti tvrdjenje da svako ograničenje u obradi informacija potiče od ograničenosti osnovnih zakona fizike.

U samom uvodu prepostavka je bila da se modelovanje i obrada informacija odvija putem zakona klasične fizike, koja i nije morala biti uvedena - leži u opisu samog bita [17]. Kvantna mehanika nudi tačan opis mikroskopskog sveta u odnosu na klasičnu mehaniku. Kvantna informacija, koja evoluira respektivno zakonima kvantne mehanike nudi tačniji opis teorije kvantne informatike [10].

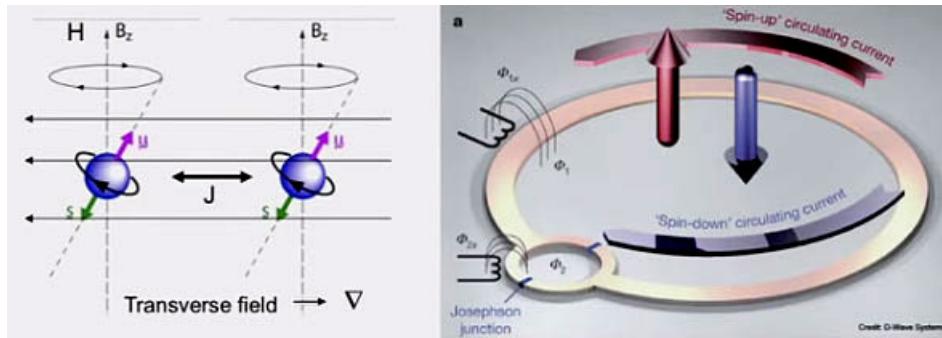
Kako sami zakoni kvantne mehanike nude potpuno novi aspekt sagledavanja subatomskog sveta, očekuje se i drugačiji tip same obrade informacija ukoliko je alat kojim se barata u obradi baš kvantna mehanika.

Naravno, kako i u određenom limitu kvantni opis prelazi u klasičan opis sistema, tako je i ovde za očekivati da kvantna informacija u određenom limitu poprimi klasičan karakter [17]. Da ovog limita nema, ispostavilo bi se da pojam kvantne informatike nudi mnogo opštiji i stroži koncept no što jeste sam po sebi, te da nema svoj klasičan analogon, što se u fizičkom svetu ne sme dešavati [17]. Zato je korisno istaći da je klasična teorija samo konačan limit kvantne teorije informacija [17].

Dok klasičan računar reprezentuju bitovi, kvantni računar reprezentuju kubiti. Kubit osim stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$ poseduje i superpoziciju stanja $|0\rangle$ i $|1\rangle$. Naime, kubit se može istovremeno nalaziti u oba stanja [10].

Postoji više varijanti realizacije makroskopskih kubita, a primer sa magnetnim dipolom je trenutno najzastupljeniji (Slika 2.1). Situacija se odvija u izolovanim kućištima, u stanju vakuma i na temperaturi od svega $4mK$, koja je znatno niža od temperature neophodne za realizaciju superprovodnog efekta. Razlog za ovako nisku temperaturu je srođenje uticaja termalnog kretanja atoma po površini čipa na minimum. Posebnim uređajima se za pedeset

hijada puta umanjuje uticaj magnetnog polja Zemlje, kako bi okolni nepoželjni šum bio eliminisan.



Slika 2.1 - Fizička realizacija kubita. Preuzeto sa²

Kroz dipol se indukuje struja usled magnetnog fluksa Φ_1 . Ako se struja kreće u smeru kazaljke na satu, onda generiše magnetni moment u smeru "up", a ako se kreće u smeru suprotnom od kazaljke na satu, tada stvara magnetni moment naniže. U određenom vremenskom intervalu, preko Džozefsonovog spoja napaja se dipol poprečnim fluksom Φ_2 , te struja u istovremeno teče i u jednom i u drugom smeru, i magnetni moment postoji u oba stanja. Takođe spin može da tuneluje iz jednog u drugo stanje. Ređajući dipole u niz, kubiti mogu izvoditi međusobne interakcije i izvoditi kvantna računanja.

2.2 Nemogućnost kloniranja kvantnih bitova

U ovoj sekciji ispitaćemo da li je moguće vršiti kloniranje kvantnih bitova i kakve to posledice ima pri daljem razvoju kvantne teorije informacija. Jedna od najzanimljivijih oblasti u aktuelnim istraživanjima, vezanih za pojam kvantne informatike, svakako je kvantna kriptografija. Kvantna kriptografija koristi prirodnu neodređenost kvantne mehanike. Pomoću nje se može uspostaviti komunikacioni kanal koji nije moguće prisluškivati bez ometanja prenosa, tj. dva korisnika koja međusobno komuniciraju mogu otkriti prisustvo treće strane koja pokušava saznati ključ [20]. Takođe, osoba koja prisluškuje ne može kopirati nepoznate kvantne bitove - kubite, tj. nepoznata kvantna stanja, zbog teoreme o zabrani kloniranja, koju su prvi dokazali Wootters i Zureck.

Akt merenja sastavni je deo kvantne mehanike. Generalno, merenje nepoznatog kvantnog stanja promeniće to stanje. Posledica promene stanja proizilazi iz rezultata Hajzenbergove relacije neodređenosti, kao i iz teoreme o zabrani kloniranja [20]. To se može iskoristiti kako bi se detektoovali pokušaji prisluškivanja komunikacionog kanala. Može se reći da sigurnost komunikacije zavisi od verodostojnosti važenja teoreme o zabrani kloniranja [17].

Korišćenjem kvantne superpozicije i kvantnog entanglementa, te ukoliko se šalju informacije u vidu kvantnih stanja, može se implementirati komunikacijski deo koji otkriva napadača.

U klasičnoj teoriji informacija koristi se operacija COPY [20]. Njome se kopira, tj. klonira, stanje sistema kojim se obrađuju informacije. Sada ćemo proveriti da li je ovu

²<http://www.seoexpert.rs/blog/wp-content/uploads/2014/07/Kvantni-kjubit.jpg>

operaciju moguće izvesti i u sistemima kojima upravlja kvantna teorija? Neka je dato proizvoljno nepoznato stanje kubita:

$$|\Psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (2.1)$$

Ovo stanje je u mogućnosti posedovanja dve kopije: $|\Psi\rangle|\Psi\rangle$ i sebe samo - $|\Psi\rangle$, a bez poznavanja vrednosti koeficijenata α i β . Ovo proizilazi iz osobine linearnosti.

Kako su početno i finalno stanje kloniranja jedinične norme, zaključujemo da ove transformacije odgovaraju unitarnim operacijama u prostoru stanja. Pretpostavlja se da je moguće jednom mašinom koja formalno operiše kao unitarni operator, klonirati dva različita neortogonalna stanja [20]:

$$U|0\rangle = |00\rangle \quad (2.2)$$

$$U|1\rangle = |11\rangle \quad (2.3)$$

$$U|\Psi\rangle = \alpha|00\rangle + \beta|11\rangle \quad (2.4)$$

Svakako, ako bi U bio u stanju da klonira stanje $|\Psi\rangle$, tada bi važilo:

$$U(|\Psi\rangle) = |\Psi\rangle|\Psi\rangle = \alpha^2|00\rangle + \alpha\beta|01\rangle + \beta\alpha|10\rangle + \beta^2|11\rangle \quad (2.5)$$

Očigledno, poredeći poslednje dve relacije lako se da ustanoviti da to nisu identiteti, što ima za posledicu da je kloniranje proizvoljnih nepoznatih kvantnih stanja nemoguće [20].

Nemogućnost kloniranja je moćan alat u kvantnoj informatici. Ukoliko bi se uspelo klonirati nepoznato kvantno stanje, tada bi se moglo, u suštini, kreirati nebrojeno mnogo kopija tog istog stanja na osnovu kojih bi se vršili eksperimenti i zaljučivalo bi se o kakvom stanju je reč. Kako je ovo nemoguće, samim tim se zaključuje da postoji ograničena količina informacija koja se može doznati iz nepoznatog kvantnog stanja [20].

Ovo je u totalnoj suprotnosti sa zaključcima koje nudi klasična fizika. U svetu klasične fizike se uvek može doznati (sve?) o klasičnom sistemu, čak iako se poseduje jedna kopija. Klasična merenja su neinvazivna i ne uništavaju stanje merenog sistema. Grubi primer ovoga bio bilo bi fotokopiranje dokumenta - ukoliko neko fotokopira dokument, time ne uništava njegovu sadržinu [20]. U svetu kvantnih kompjutera ova osobina kazuje da se u sred kvantnog računanja ne može napraviti "back up" kopija.

Ovu teoremu treba još malo precizirati. Naime, zabrana kloniranja važi za proizvoljna, nepoznata stanja. Kako bi se ovo dokazalo, najlakše je pretpostaviti suprotno [20]. Za dva neortogonalna stanja važi:

$$\langle \Psi_i | \Phi_j \rangle \neq \delta_{i,j} \quad (2.6)$$

Međutim, ukoliko se pretpostavi da je kloniranje neortogonalnih stanja moguće, tada bi mašina koja formalno operiše kao unitarni operator mogla klonirati dva različita neortogonalna stanja. Opisano kloniranje, ako se prikaže matematički, oblika je:

$$U|\Psi_A\rangle|0\rangle_B = |\Psi\rangle_A|\Psi\rangle_B \quad (2.7)$$

$$U|\Phi\rangle_A|0\rangle_B = |\Phi\rangle_A|\Phi\rangle_B \quad (2.8)$$

Međutim, skalarnim množenjem levih i desnih strana dolazi se do sledeće relacije:

$$\langle\Psi|\Phi\rangle = \langle\Phi|\Psi\rangle^2 = \langle\Psi_i|\Phi_j\rangle = \delta_{i,j} \quad (2.9)$$

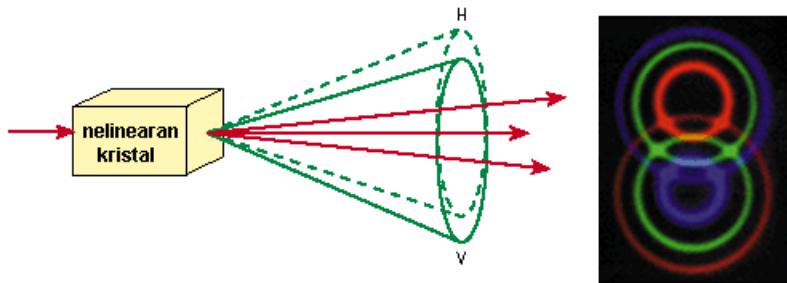
Ovo je u suprotnosti sa polaznom pretpostavkom. Iz dokaza sledi da nema zabrane kloniranja za dva međusobno ortogonalna stanja, kao ni za trivijalni slučaj $|\Psi\rangle = |\Phi\rangle$. Fizički smisao leži u nemogućnosti konstrukcije takve mašine koja bi bila univerzalni kloner stanja, ali je pak moguće konstruisati mašinu koja bi klonirala stanja iz nekog posebnog unapred zadatog bazisa [20]. Dakle, ne postoji univerzalan unitarni operator koji će klonirati proizvoljno, nepoznato stanje iz Hilbertovog prostora stanja sistema [20].

Ako se ide još detaljnije i kaže da ukoliko je moguća različivost neortogonalnih stanja, tada je moguće i kloniranje. Ovim se da zaključiti da klasična operacija **COPY** nije primenljiva u kvantnoj informatici [20].

2.3 EPR eksperiment

Već 1935. godine trojica fizičara koji su verovali u nekompletност kvantne teorije - Ajnštajn, Podolski i Rozen [2], razvijaju misaoni eksperiment, poznat pod nazivom "EPR paradoks". Ovaj eksperiment imao je za cilj da pokaže nekompletnost kvantne mehanike [2].

Kako se u ovom eksperimentu koristi EPR par fotona ili dva entanglirana fotona [6], prvo ćemo opisati kako se dobijaju dva takva fotona i šta je to što ih čini entangliranim, odnosno spletenim. Uočeno je da kada se kroz neki kristal sa nelinearnim optičkom karakteristikom [6] propusti UV svetlost postoji mala verovatnoća da dođe do cepanja jednog fotona u dva fotona sa većim talasnim dužinama. Takođe, za ta dva fotona se zna da će imati suprotne polarizacije tj. da će jedan foton biti horizontalno polarizovan, a drugi vertikalno polarizovan [6]. Ti fotoni se emituju u obliku dva konusa koji su simetrični u odnosu na pravac početnog UV fotona. Bitna karakteristika je to da jedan konus sadrži sve fotone sa horizontalnom polarizacijom a drugi sve fotone sa vertikalnom polarizacijom. Moguće je izvesti eksperiment tako da se ta dva konusa seku i njihov poprečni presek je prikazan na slici 2.3.

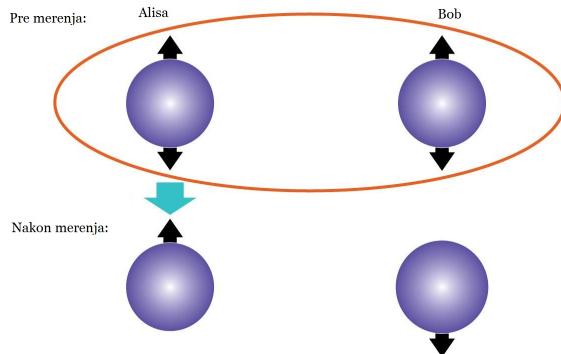


Slika 2.3.1 - Proces dobijanja EPR fotona. Preuzeto sa [6]

U presečnim tačkama ta dva konusa nalaze se fotoni koji sigurno imaju suprotne polarizacije ali kako ne možemo znati kom konusu koji foton pripada, njihove pojedinačne polarizacije ostaju nam nepoznate [6]. Dakle, sve što znamo o tim fotonima je da imaju suprotne polarizacije. Takva dva fotona čine EPR par. Uopšte, EPR par mogu biti bilo koje

dve čestice koje su povezane nekom sumarnom osobinom kao što su dva elektrona suprotnih spinova, dva atoma istih impulsa itd. Bitno je da pojedinačni spinovi, odnosno impulsi, nisu poznati, tj. preciznije, da informacija o njima ne postoji nigde u univerzumu. Ono što se matematički ispostavi za ove čestice je da merenje izvršeno na jednoj od njih trenutno utiče na drugu česticu. Stanje ovakvog entangliranog para opisuje se pomoću jednog iz seta Belovog bazisa.

Cilj trojice fizičara je ukazivanje na nekompletност kvantne teorije [?]. Oni se nisu mogli pomiriti sa činjenicom da se u konceptu kvantne teorije ne podrazumeva pojam realnosti i lokalnosti. Šta se pod tim podrazumeva? Ako govorimo o pojmu realnosti, tada je, prema njihovom zastupanju, bilo neshvatljivo da kvantni objekat pre merenja nema svoju pripadnu osobinu. Konkretno, ukoliko se govori singletnom stanju dva elektrona, nemoguće je da se neposredno pre akta merenja ne zna koji elektron se nalazio u stanju "up", a koji u stanju "down" (Slika 2.3.2) [26]. Tok pošto se izvrši akt merenja, tada se sa sigurnošću može utvrditi koji elektron se nalazi u stanju "up", a koji u stanju "down". [26]



Slika 2.3.2 - Vizuelno predstavljanje stanja dva korelisana elektrona pre i nakon merenja

Svakako, jedan od tipičnih primera je primer Šredingerove mačke [22] iz prethodno opisanog eksperimenta. Pre akta merenja, mi ne znamo da li će mačku zateći živu ili mrtvu. Tačnije rečeno, tek posredstvom merenja mi stanje superpozicije prevodimo u neko od konačnih stanja, sa određenom verovatnoćom [17]. Što se nelokalnosti tiče, u kvantnu mehaniku je uvedena pod svojstvom da se nelokalni događaji odvijaju istovremeno između fizičkih objekata odvojenih u prostor-vremenu [20]. U tom slučaju, vreme nije uključeno između uzroka i posledice procesa. To je u suštini suprotnosti sa Ajnštajnovom teorijom, prema kojoj ništa u Svetliru ne može imati veću brzinu od brzine svetlosti. Kvantno entanglirane čestice reaguju kao jedan sistem, naizgled nerazdvojeno [26]. Zašto? U prethodnom poglavljiju bilo je reči da entanglirano stanje nema odvojena stanja podsistema, već samo sistema kao celine. Ukoliko se merenjem ispostavi da prvi elektron ima spin "up", to istovremeno znači da se drugi elektron nalazi u stanju "down". Da bi se to dogodilo, potrebna je trenutna komunikacija između dve čestice, drugim rečima, nelokalna, jer ove čestice, teorijski gledano, mogu biti udaljene na velika rastojanja (npr. rastojanje Zemlja - Mesec) [17].

Ono što je kvantna mehanika uspela da održi jeste pojam nelokalnosti i pojam kvantne nerealnosti. Dakle, Ajnštajn, Podolski i Rozen su želeli po svaku cenu da prenesu Njutnov princip determinističke realnosti, ali bezuspešno.

Dokaz o nelokalnosti i kvantnom pristupu pojma realnosti iznosi 1964. iznosi Džon Bel

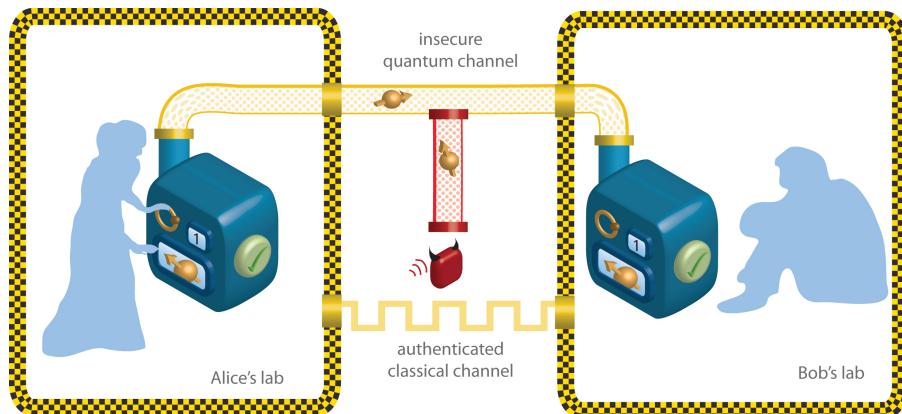
[3], koji je teorijski dokazao stvarnost nelokalnog dejstva kvantno entangliranih čestica, što je postalo poznato pod nazivom Belova teorema (Belova nejednakost).

2.4 Razlikovanje neortogonalnih stanja - komuniciranje brže od brzine svetlosti?

U ovoj sekciji biće reči o mogućnosti da se uspostavi komunikacija između dva objekta, a da brzina komunikacije bude viša od najviše ostvarive brzine predviđene teorijom relativnosti - brzine svetlosti. Kako bi se ovaj fenomen pojasnio, uvođe se tipični akteri u ovoj priči, a to su Alisa i Bob [17]. Ova dva lika najčešće korišćeni likovi u oblastima kvantne informatike, specijalno u kvantnoj kriptografiji [20]. Osnovni cilj kvantne kriptografije bazira se na bezbednoj komunikaciji između dve osobe, koristeći kvantna entanglirana stanja, tako da treća osoba nema uvid o kom kvantnom stanju je reč.

Neka Alisa i Bob dele par sistema u entangliranom stanju:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_1 |1\rangle_2 + |1\rangle_1 |0\rangle_2) \quad (2.10)$$



Slika 2.4 - Alisina i Bobova laboratorijska postavka. Preuzeto sa³

Ako Alisa meri svoj (pod)sistem u bazisu $\{|0\rangle_1, |1\rangle_1\}$ tada i Bob automatski i istovremeno dobija svoj sistem u istom bazisu, i to svako stanje iz bazisa sa verovatnoćom od po 50%. Međutim, komunikacija podrazumeva kontrolisani (nestohastički) izlaz od strane pošiljaoca (Alise u ovom slučaju) [20]. Tako, u ovoj postavci, ne dolazi do komunikacije iz razloga što Alisa ne može kontrolisati izlaz (rezultat merenja) sa verovatnoćom od 100%. Međutim, ako Bob može razlikovati neortogonalna stanja, komunikacija brža od brzine svetlosti je moguća [20].

Naime, stanje $|\Psi^+\rangle$ se može zapisati u obliku:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_1 |-\rangle_2 + |-\rangle_1 |+\rangle_2) \quad (2.11)$$

gde je

$$|\pm\rangle_i = \frac{1}{\sqrt{2}} (|0\rangle_i \pm |1\rangle_i), \quad i = 1, 2 \quad (2.12)$$

³<http://www.proselex.net/siteimages/alice%20and%20bob.jpg>

Sada Alisa može poslati svoju poruku sačinjenu od bitova 0 i 1, tako da ove bitove kodira merenjima na sledeći način: ako meri u bazisu stanja $\{|0\rangle_1, |1\rangle_1\}$, tada šalje bit 0, a ako vrši merenje u bazisu $\{|+\rangle_1, |-\rangle_1\}$, tada šalje bit 1. Naravno, ako je Alisa poslala bit 1, tada je Bobovo konačno stanje jedno iz bazisa $\{|+\rangle_2, |-\rangle_2\}$.

Poenta je u sledećem: ukoliko je Bob u mogućnosti da razlikuje stanja iz skupa neortogonalnih stanja $\{|+\rangle_2, |-\rangle_2, |0\rangle_2, |1\rangle_2\}$, odnosno, da razlikuje Alisina merenja, tada bi jednoznačno primio bit Alisine poruke [17]. Poruka Alise zbog kvantne nelokalnosti stiže trenutno - te čim se završi merenje njenog sistema, stanje njenog sistema uspostavljeno je istovremeno kada i stanje Bobovog sistema - brže od bilo kog fizičkog dejstva - čijim merenjem Bob utvrđuje koji bit dobija od Alise. Ukoliko Bob utvrdi da je njegov sistem u stanju $|0\rangle_2$, zna da meri u bazisu $\{|0\rangle_1, |1\rangle_1\}$, čime bi zaključio da je Alisa poslala bit 0. Naravno, kako Bob nije u mogućnosti da razlikuje neortogonalna stanja, sledi da ni komunikacija brža od brzine svetlosti nije moguća [20].

2.5 Kvantna teleportacija

Zabrana kloniranja kvantnih **nepoznatih** stanja je ozbiljan hendiček u poređenju sa klasičnom informatikom [10]. Uspešno procesiranje informacija zahteva uspešan prenos neizmenjenih informacija kroz prenos fizičkih stanja u neizmenjenom obliku. Klasično, ovaj postupak je trivijalan: izmeri se stanje sistema i ta informacija se implementira kao stanje drugog sistema - **COPY** [20]. Upravo to merenje stanja pojedinačnih kvantnih sistema je nemoguće - zahvaljujući teoremi o zabrani kloniranja. Odatle se, na prvi pogled, čini da se ovim uspostavlja ozbiljna prepreka u procesu obrade informacija unutar kvantnih sistema. Međutim, pronađen je kvantni pandan klasičnog kopiranja putem tzv. **kvantne teleportacije** [20].

Po pravilu, informatički protokoli imaju zahtev aktivnosti dva člana u komunikaciji. U ovom primeru to su Alisa i Bob. U protokolu kvantne teleportacije oni dele jedan jedini (pojedinačni) par kvantnih čestica koje su kvantno spletene. Svako od učesnika može, na svojoj čestici, tj. na svom kubitu, obavljati proizvoljna lokalna merenja [17]. Pod pojmom lokalnosti misli se na merenja na paru kubita, jer ako nema drugih kubita, onda su merenja nelokalna. Alisa raspolaže i trećom kvantnom česticom koja ima svoje, nepoznato kvantno stanje. To stanje je kvantna informacija koju treba u nepromenjenom sadržaju preneti Bobu [20].

Neka je nepoznato stanje prve čestice, koje treba teleportovati do Boba, dato sa

$$|\Psi\rangle_1 = \alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1 \quad (2.13)$$

i neka je stanje para čestica 2 + 3 (entanglirano):

$$|\Psi\rangle_{23} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_2|0\rangle_3) \quad (2.14)$$

Stanje ukupnog sistema dobija se tenzorskim proizvodom ova dva stanja:

$$|\Psi\rangle_{123} = (\alpha|0\rangle_1 + \beta|1\rangle_1) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_2|1\rangle_3 - |1\rangle_2|0\rangle_3) \quad (2.15)$$

Sređivanjem gornjeg izraza, on postaje:

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle_{123} &= \frac{1}{2}|\Psi^-\rangle_{12}(-\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3) + \frac{1}{2}|\Psi^+\rangle_{12}(-\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) \\ &+ \frac{1}{2}|\Phi^+\rangle_{12}(\beta|0\rangle_3 + \alpha|1\rangle_3) + \frac{1}{2}|\Phi^-\rangle_{12}(-\beta|0\rangle_3 + \alpha|1\rangle_3) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Već se iz ove relacije može uočiti kuplovanost stanja čestica 1 i 2 (Alisine čestice), što će reći da su to korelisana stanja. Međutim, nije teško primetiti, percepcijom jednačine (2.14) da su u ovom stanju korelisana stanja čestica 2 i 3. Ovo prebacivanje korelacija, odnosno entangliranost sa para 2+3 na par 1+2 naziva se entangliranom zamenom [20, 17], ili poznatije u literaturi kao *entanglement swapping*[20, 17]. U izrazu (2.16) uvedena su stanja korelacija čestica 1 i 2 kao:

$$|\Psi^\pm\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|1\rangle_2 \pm |1\rangle_1|0\rangle_2) \quad (2.17)$$

$$|\Phi^\pm\rangle_{12} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_1|0\rangle_2 \pm |1\rangle_1|1\rangle_2) \quad (2.18)$$

Ova stanja su uvedena u prethodnom poglavlju i predstavljaju Belov bazis. Definišimo sada opservablu sistema 1+2, čija su ovo svojstvena stanja, na sledeći način:

$$B_{12} = \beta_1|\Psi^+\rangle\langle\Psi^+| + \beta_2|\Psi^-\rangle\langle\Psi^-| + \beta_3|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| + \beta_4|\Phi^-\rangle\langle\Phi^-| \quad (2.19)$$

gde su β_i , $i = 1, 2, 3, 4$ svojstvene vrednosti ove opservable.

Iz izraza (2.16) uočavamo da merenje veličine B_{12} obavlja samo Alisa, te se uspostavlja jednoznačno, poznato konačno stanje složenog sistema 1 + 2 + 3 [20]. Tako, na primer, dobijanjem vrednosti β_2 ukupni sistem nalazi se u konačnom stanju $|\Psi^-\rangle_{12}(-\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3)$ u kojem oba podsistema, a misli se na 1+2 i 3, imaju određeno stanje $|\Psi^-\rangle_{12}$ i $(-\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3)$.

Međutim, ovo rezonovanje ima značajnu posledicu. Da se primetiti da su stanja treće čestice (koja ima posle merenja ima svoje stanje - a nije kvantno korelisana ni sa jednim kubitom) povezana sledećim unitarnim transformacijama sa početnim stanjem $|\Psi\rangle$ na sledeće načine [20]:

$$I(-\alpha|0\rangle_3 - \beta|1\rangle_3) = |\Psi\rangle_3 \quad (2.20)$$

$$U_1(-\alpha|0\rangle_3 + \beta|1\rangle_3) = |\Psi\rangle_3 \quad (2.21)$$

$$U_2(\beta|0\rangle_3 + \alpha|1\rangle_3) = |\Psi\rangle_3 \quad (2.22)$$

$$U_3(-\beta|0\rangle_3 - \alpha|1\rangle_3) = |\Psi\rangle_3 \quad (2.23)$$

pri čemu su matrične reprezentacije ovih operatora date sa

$$U_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad U_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.24)$$

Od suštinskog je značaja da unitarni operatori, predstavljeni matričnim reprezentacijama (2.24), ne zavise od konstanti α i β [20]. Iz ovog sledi da unitarni operatori ne zavise od početnog stanja $|\Psi\rangle$ koje treba teleportovati. Pritom, ovi operatori su preko stanja na koja deluju u jednoznačnoj vezi sa rezultatima merenja. Otuda je jasno: ako bi Bob znao koji je rezultat merenja dobila Alisa (neki iz skupa $\beta_i, i = 1, 2, 3, 4$), trebao bi samo da primeni jedan od unitarnih operatora (2.24) i da shodno relacijama (2.20-2.23) prevede stanje trećeg kubita u njemu nepoznato stanje $|\Psi\rangle$.

Sada je lako formulisati protokol kvantne teleportacije (Slika 2.4): Alisa na svom paru kubita 1+2 meri opservablu B_{12} [20]. O tome, klasičnim protokolom obaveštava Boba. Bob na osnovu dobijenog rezultata klasičnim protokolom primenjuje određenu transformaciju na svom, trećem kubitu i konačno stanje njegovog trećeg kubita je $|\Psi\rangle_3$. Tako je nepoznato stanje prvog kubita teleportovano na treći kubit, koji se nalazi kod Boba. Obično se transformacija stanja usled merenja naziva kvantnim kanalom. Klasična veza kojom Alisa obaveštava Boba o rezultatu svog merenja naziva se klasičnim kanalom [17].

Na prvi pogled moglo bi se zaključiti da je ovom procedurom izvršeno kloniranje prvog kubita. Međutim, to nije slučaj. Kloniranje podrazumeva klasično umnožavanje stanja, tačnije, uvećanje broja kubita u istom stanju. U našem slučaju broj kubita ostaje isti. U željenom **nepoznatom** stanju $|\Psi\rangle$ nalazi se samo treći kubit, jer se sistem 1+2 nalazi u entangliranom stanju, te nijedan podsistem nema svoje stanje (pri tome, u realnim eksperimentima, obično prva dva kubita nestaju - na njima se vrše neponovljiva merenja, te čak ni kubitovi kod Alise ne postoje više fizički) [17].

2.6 Belova nejednakost

Neka je dat par čestica, u oznaci 1 i 2. Neka se čestice nalaze udaljene jedna od druge i na svakoj od njih se mogu lokalno meriti proizvoljne jednočestične merne veličine: Q_1, R_1 i S_2, T_2 . Neka su jedine moguće vrednosti mernih veličina +1, odnosno -1. Uvodi se veličina [20]:

$$QS + RS + RT - QT \quad (2.25)$$

Smatra se da su ovo klasične merne veličine. Tada se može pokazati važenje Belove nejednakosti [3]:

$$\langle QS \rangle + \langle RS \rangle + \langle RT \rangle - \langle QT \rangle \leq 2 \quad (2.26)$$

Da bismo gornju nejednakost dokazali, polazimo od izomorfognog izraza oblika:

$$(Q + R)S + (R - Q)T \quad (2.27)$$

te, ukoliko se akcenat stavi na moguće vrednosti mernih veličina, tada sledi da je ili $Q + R = 0$ ili da je $R - Q = 0$. Odatle je

$$QS + RS + RT - QT = \pm 2 \quad (2.28)$$

Ako nisu poznate srednje vrednosti ovih veličina, tada se mora potražiti srednja vrednost:

$$\begin{aligned}
 \langle QS + RS + RT - QT \rangle &= \langle QS \rangle + \langle RS \rangle + \langle RT \rangle - \langle QT \rangle \\
 &= \sum_{q,r,s,t=\pm 1} p(q, r, s, t) (qs + rs + rt - qt) \\
 &\leq \sum_{q,r,s,t=\pm 1} p(q, r, s, t) \cdot 2 = 2
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

faktor $p(q, r, s, t)$ ponderiše merne varijable.

Pretpostavke koje su uvedene kako bi ova nejednakost važila su [20]:

1. Klasična realnost (neuslovljeno postojanje) vrednosti svih varijabli oba podsistema, u svakom trenutku
2. Lokalnost - izvršeno merenje na jednoj čestici, neće remetiti merenje na drugoj čestici

Ono što je zanimljivo jeste da se za čista kvantna stanja složenog kvantnog sistema zna da ove pretpostavke (realnost, lokalnost) ne važe. Postavlja se pitanje: "Važi li uopšte Belova nejednakost u kvantnim sistemima?"

Posao se svodi na to da se prvo pređe na kvantne opservable i iskoristi se jedno stanje iz etalona. Neka to bude spleteno stanje EPR para $|\Psi^-\rangle_{12} = (|0\rangle_1|1\rangle_2 - |1\rangle_1|0\rangle_2)$. Uvode se sledeće merne veličine [20]:

$$Q = \sigma_z, \quad S = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_z + \sigma_x), \quad R = \sigma_z, \quad T = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sigma_z - \sigma_x) \tag{2.30}$$

Prilikom usrednjavanja veličina po stanju $|\Psi^-\rangle_{12}$ važi sledeća jednakost

$$\langle Q \otimes S \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} = \langle R \otimes S \rangle = \langle R \otimes T \rangle = -\langle Q \otimes T \rangle \tag{2.31}$$

Elementarnim ubacivanjem ovih vrednosti u Belovu nejednakost (2.26) sledi [3]:

$$\langle QS \rangle + \langle RS \rangle + \langle RT \rangle - \langle QT \rangle = 2 \cdot \sqrt{2} > 2 \tag{2.32}$$

Fakat da je u kvantnoj mehanici moguća veća korelacija među podsistemima, koja je nedostižna u klasičnom svetu, proveren je i potvrđen u celom nizu eksperimenata [3]. Na taj način, nivo korelacija među podsistemima 1 i 2 koji se nalaze u entangliranom kvantnom stanju previšava nivo korelacija koji se određuje na osnovu ma kog fizičkog zakona koji opisuje ponašanje čestica pomoću klasičnih promenljivih, a ne kvantnih stanja.

Posledica nevaženja nejednakosti (2.26) u kvantnim sistemima, je da tada ne važi jedna od pretpostavki uvedenih prilikom dokazivanja Belove nejednakosti [20, 17]. Svakako, ono što je od ranije bilo poznato jeste da se kod kvantnih merenja ne podrazumeva klasična lokalnost i realnost. Međutim, Belova nejednakost ovo tvrdi na izuzetno elegantan način - svega putem jedne jednačine, odnosno nejednačine [3]. Da stvar bude opštija, ova nejednakost predstavlja jedan od kvantitativnih kriterijuma kvantne nelokalnosti i entangliranosti stanja - ukoliko je Belova nejednakost narušena, tada se sistem nalazi u entangliranom stanju.

Dakle, kvantna mehanika svojim postojanjem uvodi dve vrste neodređenosti [20]:

- Kvantna neodređenost - opšta karakteristika svih čistih stanja (ma kako prostih ili složenih) sistema. Ova neodređenost nije posledica nedovoljnog poznavanja (manjak znanosti klasičnih informacija) - posledica je relacija neodređenosti i iskazuje se postojanjem kvantnog informatičkog limita.
- Kvantna neseparabilnost (entanglement stanja) - odlika stanja složenih kvantnih stanja. Pod ovim pojmom misli se na nepostojanje stanja i vrednosti observable podsistema koji čine složeni sistem, izraženo putem određenih kvantnih korelacija i kvantne nelokalnosti.

3 Entanglement u dvokubitnom anizotropnom Hajzenbergovom modelu

U ovom poglavlju ćemo sprovesti detaljnu analizu entangliranosti u dvokubitnom anizotropnom Hajzenbergovom modelu [14, 24]. Pažnju posvećujemo XXZ [14] i XYZ [24] modelu, gde je prisutna interakcija Đalošinski - Morija. Najpre ćemo Hamiltonian prevesti u matrični oblik, potom potražiti njegove svojstvene energije rešavanjem svojstvenog problema Hamiltonijana i ujedno odrediti normirana svojstvena stanja. Sledeća bitna stvar je naći particionu funkciju sistema, a koristeći spektralnu dekompoziciju normalnog operatora [17], nalazimo oblik matrice gustine. Pomoću matrice gustine i matrice S koja je definisana tenzorskim proizvodom dve σ^y Pauli matrice, nalazimo odgovarajuću matricu R koja nam je neophodna iz razloga što će koreni njenih svojstvenih vrednosti definisati konkurentnost sistema. Konkurentnost sistema [25], je bitna fizička veličina jer nudi kvantitativnu meru entangliranosti sistema. Ispitaćemo kako konkurentnost zavisi od temperature, kao i od parametra Đalošinski - Morija interakcije koja će biti definisana u sva tri pravca. Kad uključimo u razmatranje i magnetno polje [15, 27], ispitaćemo zavisnost konkurentnosti od jačine magnetnog polja [15, 27], kao i od parametra nehomogenosti magnetnog polja [15, 27]. Analizu započinjemo sa trivijalnijim modelom, a to je XXZ anizotropni dvokubitni Hajzenbergov model [14].

3.1 XXZ model

3.1.1 XXZ model sa D_x interakcijom

Razmatrajmo dvokubitni anizotropni Hajzenbergov XXZ lanac spinova propagiran DM interakcijom, okarakterisanom parametrom D_x . Hamiltonian je oblika [14]:

$$H_{D_x} = J\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x + J\sigma_1^y \otimes \sigma_2^y + J_z\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z + D_x(\sigma_1^y \otimes \sigma_2^z - \sigma_1^z \otimes \sigma_2^y) \quad (3.1)$$

gde su u relaciji sa J i J_z označeni integrali izmene, a σ_i^j ($i = 1, 2$, $j = x, y, z$) prestavljaju Paulijeve spinske matrice u reprezentaciji 2×2 . U standardnom bazisu $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$ Hamiltonian raspisujući potrebne tenzorske proizvode:

$$\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

$$\sigma_1^y \otimes \sigma_2^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

$$\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

$$\sigma_1^y \otimes \sigma_2^z = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$\sigma_1^z \otimes \sigma_2^y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

može se zapisati u formi:

$$H_{D_x} = \begin{pmatrix} J_z & iD_x & -iD_x & 0 \\ -iD_x & -J_z & 2J & iD_x \\ iD_x & 2J & -J_z & -iD_x \\ 0 & -iD_x & iD_x & J_z \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

Svojstvena stanja Hamiltonijana su:

$$|\Psi_1\rangle = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$|\Psi_2\rangle = b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

$$|\Psi_3\rangle = c \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{J+J_z-w}{2iD_x} \\ -\frac{J+J_z-w}{2iD_x} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

$$|\Psi_4\rangle = d \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{J+J_z+w}{2iD_x} \\ -\frac{J+J_z+w}{2iD_x} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

gde je:

$$w = \sqrt{(J+Jz)^2 + 4D_x^2} \quad (3.12)$$

Kako su ova stanja ortonormirana ($\langle \Psi_i | \Psi_j \rangle = \delta_{i,j}$), konstante (a,b,c,d) dobijaju se normiranjem talasnih funkcija. Tako se za vrednosti ovih konstanti dobijaju izrazi:

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.13)$$

odnosno

$$c = \frac{i}{\sqrt{2}} \sin(\phi) \quad (3.14)$$

$$d = \frac{i}{\sqrt{2}} \sin(\varphi) \quad (3.15)$$

gde su argumenti ϕ i φ [14]:

$$\phi = \arctan \left(\frac{2D_x}{J+J_z-w} \right) \quad (3.16)$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{2D_x}{J+J_z+w} \right) \quad (3.17)$$

Neophodno je definisati standardni bazis $\{|00\rangle, |01\rangle, |10\rangle, |11\rangle\}$:

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

$$|00\rangle = |0\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

$$|01\rangle = |0\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.20)$$

$$|10\rangle = |1\rangle \otimes |0\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

$$|11\rangle = |1\rangle \otimes |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Te u ovom bazisu, normirane talasne funkcije $|\Psi_1\rangle, |\Psi_2\rangle, |\Psi_3\rangle, |\Psi_4\rangle$ oblika su:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle) \quad (3.23)$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle + |11\rangle) \quad (3.24)$$

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-i \sin(\phi)|00\rangle + \cos(\phi)|01\rangle - \cos(\phi)|10\rangle + i \sin(\phi)|11\rangle) \quad (3.25)$$

$$|\Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (-i \sin(\varphi)|00\rangle + \cos(\varphi)|01\rangle - \cos(\varphi)|10\rangle + i \sin(\varphi)|11\rangle) \quad (3.26)$$

Svojstvene energije Hamiltonijana poređane u opadajućem nizu:

$$E_4 = -J + w, E_2 = 2J - J_z, E_1 = J_z, E_3 = -J - w \quad (3.27)$$

Zbog konvencije u radu, pretpostavlja se da je $J_z \leq J$, tj. preferiramo ravansku anizotropiju [14]. Slični rezultati dobijaju se i za $J \leq J_z$ [14]. Činjenica je da su sva četiri stanja entanglirana. Stanje $|\Psi_3\rangle$ odgovara stanju minimuma energije, čija je konkurentnost $C(|\Psi_3\rangle) = 1$. Bitna karakteristika sistema je svakako particona funkcija Z :

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta H}) = \langle \Psi_1 | e^{-\beta H} | \Psi_1 \rangle + \langle \Psi_2 | e^{-\beta H} | \Psi_2 \rangle + \langle \Psi_3 | e^{-\beta H} | \Psi_3 \rangle + \langle \Psi_4 | e^{-\beta H} | \Psi_4 \rangle \quad (3.28)$$

gde smo sa Tr označili trag operatora $e^{-\beta H}$, a $\beta = \frac{1}{T}$, sa usvojenom konvencijom $k_B = 1$.

$$\begin{aligned} Z &= e^{-\beta J_z} + e^{-\beta(2J-J_z)} + e^{-\beta(-J+w)} e^{-\beta(-J-w)} \\ &= 2(e^{-\beta J} \cosh(\beta(J - J_z)) + e^{\beta J} \cosh(\beta w)) \end{aligned} \quad (3.29)$$

Koristeći spektralnu dekompoziciju opisanu u prvom poglavlju [17], za matricu gustine dobijamo sledeću relaciju:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{z} \sum_{j=1}^4 e^{-\beta E_j} |\Psi_j\rangle \otimes \langle \Psi_j| \\ &= \frac{1}{Z} (e^{-\beta J_z} |\Psi_1\rangle \otimes \langle \Psi_1| + e^{-2\beta J + \beta J_z} |\Psi_2\rangle \otimes \langle \Psi_2| + e^{\beta J - \beta w} |\Psi_3\rangle \otimes \langle \Psi_3| \\ &\quad + e^{\beta J + \beta w} |\Psi_4\rangle \otimes \langle \Psi_4|) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Raspisujemo detaljno tenzorske proizvode u relaciji (3.29):

$$|\Psi_1\rangle \otimes \langle \Psi_1| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi_2\rangle \otimes \langle \Psi_2| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} |\Psi_3\rangle \otimes \langle \Psi_3| &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ -\cos(\phi) \\ i \sin(\phi) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -i \sin(\phi) \\ \cos(\phi) \\ -\cos(\phi) \\ i \sin(\phi) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin^2(\phi) & -i \sin(\phi) \cos(\phi) & i \sin(\phi) \cos(\phi) & \sin^2(\phi) \\ i \sin(\phi) \cos(\phi) & \cos^2(\phi) & -\cos^2(\phi) & -i \sin(\phi) \cos(\phi) \\ -i \sin(\phi) \cos(\phi) & -\cos^2(\phi) & \cos^2(\phi) & i \sin(\phi) \cos(\phi) \\ -\sin^2(\phi) & i \sin(\phi) \cos(\phi) & -i \sin(\phi) \cos(\phi) & \sin^2(\phi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\Psi_4\rangle \otimes \langle \Psi_4| &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -i \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \\ i \sin(\varphi) \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -i \sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ -\cos(\varphi) \\ i \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin^2(\varphi) & -i \sin(\varphi) \cos(\varphi) & i \sin(\varphi) \cos(\varphi) & \sin^2(\varphi) \\ i \sin(\varphi) \cos(\varphi) & \cos^2(\varphi) & -\cos^2(\varphi) & -i \sin(\varphi) \cos(\varphi) \\ -i \sin(\varphi) \cos(\varphi) & -\cos^2(\varphi) & \cos^2(\varphi) & i \sin(\varphi) \cos(\varphi) \\ -\sin^2(\varphi) & i \sin(\varphi) \cos(\varphi) & -i \sin(\varphi) \cos(\varphi) & \sin^2(\varphi) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Matrica gustine u ovoj reprezentaciji ima oblik:

$$\rho = \frac{1}{2z} \begin{pmatrix} \mu_+ & -\xi & \xi & \mu_- \\ \xi & \nu_+ & \nu_- & -\xi \\ -\xi & \nu_- & \nu_+ & \xi \\ \mu_- & \xi & -\xi & \mu_+ \end{pmatrix} \quad (3.31)$$

gde su:

$$\begin{aligned} \mu_{\pm} &= e^{\beta J_z} \pm (e^{\beta(J-w)} \sin^2(\phi) + e^{\beta(J+w)} \sin^2(\varphi)) \\ \nu_{\pm} &= e^{\beta(J_z-2J)} \pm (e^{\beta(J-w)} \cos^2(\phi) + e^{\beta(J+w)} \cos^2(\varphi)) \\ \xi &= i(e^{\beta(J-w)} \sin(\phi) \cos(\phi) + e^{\beta(J+w)} \sin(\varphi) \cos(\varphi)) \end{aligned} \quad (3.32)$$

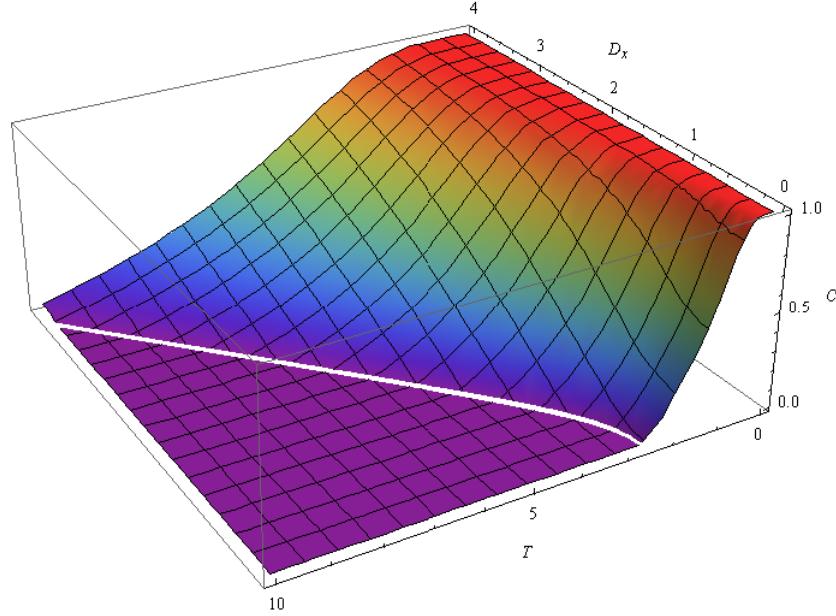
Sada tražimo $R = \rho S \rho^* S$ [14], gde je $S = \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y$ matrica koja je već izračunata i data je obrascem (3.3) [14]. Dobili smo odgovarajuće kvadratne korene svojstvenih vrednosti matrice R , a oni su redom:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{Z} e^{\beta(J_z - 2J)} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{Z} e^{\beta J_z} \\ \lambda_3 &= \frac{1}{Z} e^{\beta J} \left(\cosh(\beta w) + \sqrt{\cosh^2(\beta w) - 1} \right) \\ \lambda_4 &= \frac{1}{Z} e^{\beta J} \left(\cosh(\beta w) - \sqrt{\cosh^2(\beta w) - 1} \right)\end{aligned}\quad (3.33)$$

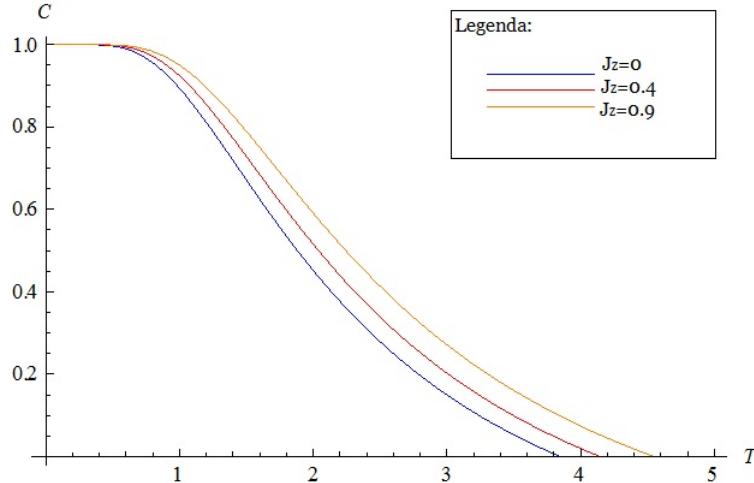
Ukoliko je $J_z \leq J$, kao što smo i prepostavili, tada za konkurenost dobijamo sledeću relaciju[14]:

$$\begin{aligned}C(\rho(T)) &= \max\left\{ \frac{1}{Z} \left| e^{\beta J} \left(\cosh(\beta w) + \sqrt{\cosh^2(\beta w) - 1} \right) - e^{-\beta J_z} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{\beta J} \left(\cosh(\beta w) - \sqrt{\cosh^2(\beta w) - 1} \right) - e^{\beta(J_z - 2J)} \right), 0 \right\}\end{aligned}\quad (3.34)$$

Analiziramo slučaj $D_x > 0$, $J_z > 0$ i $J > 0$



Slika 3.1.1.1 - Konkurentnost u funkciji T i D_x za vrednosti $J = 1$ i $J_z = 0.2$



Slika 3.1.1.2 - Konkurentnost u funkciji temperature za različite vrednosti J_z i $D_x = 1, J = 1$

Na slici 3.1.1.1 data je grafička zavisnost konkurenčije u funkciji T i D_x , kada su vrednosti $J = 1$ i $J_z = 0.2$. Sa grafika je evidentno da sa porastom temperature funkcija konkurenčije opada, što će reći da se entangliranost sistema smanjuje, sve do neke kritične temperature T_c , kada konačno pada na nulu. Kritična temperatura se može dobiti numerički iz uslova $C = 0$ za date parametre. Na slici 3.1.1.2 nacrtan je grafik funkcionalne zavisnosti konkurenčnosti od temperature, ali sada za različite vrednosti parametara J_z , koji u ovom slučaju uzimaju vrednosti 0,0.4 i 0.9, respektivno. Sa grafika je lako uočiti da sa porastom J_z dolazi do porasta kritične temperature i porasta entangliranosti na fiksnoj temperaturi, za određene vrednosti J_z . Takođe, što je viša vrednost parametra DM interakcije D_x to je veća entangliranost sistema. Analizom ova dva grafika zaključujemo da parametri D_x i J_z imaju efikasnu kontrolu entangliranosti.

3.1.2 XXZ model sa D_y interakcijom

Hamiltonian ovakve postavke modela dat je jednačinom [14]:

$$H_{D_y} = J\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x + J\sigma_1^y \otimes \sigma_2^y + J_z\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z + D_y(\sigma_1^z \otimes \sigma_2^x - \sigma_1^x \otimes \sigma_2^z)$$

Naime, kako se radi o anizotropiji tipa "XXZ", tada je za očekivati da ćemo dobiti isti rezultat kao i u slučaju razmatranja ovog modela sa D_x interakcijom. Jasna razlika se uočava prilikom razmatranja anizotropije "XYZ", odnosno anizotropije najopštijeg tipa, kada je $J_x \neq J_y \neq J_z$.

3.1.3 XXZ model sa D_z interakcijom

Hamiltonian dvokubitnog anizotropnog Hajzenbergovog "XXZ" lanca sa DM interakcionim parametrom D_z je oblika [14]:

$$H_{D_z} = J\sigma_1^x \otimes \sigma_2^x + J\sigma_1^y \otimes \sigma_2^y + J_z\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z + D_z(\sigma_1^x \otimes \sigma_2^y - \sigma_1^y \otimes \sigma_2^x) \quad (3.35)$$

Tenzorski proizvodi u (3.34) su poznati, osim oni koje množi D_z parametar. Oni su redom:

$$\sigma_1^x \otimes \sigma_2^y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.36)$$

$$\sigma_1^y \otimes \sigma_2^x = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

te Hamiltonian zapisan u vidu matrice ima oblik:

$$H_{D_y} = \begin{pmatrix} J_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -J_z & 2J + 2iD_z & 0 \\ 0 & 2J - 2iD_z & -J_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

Svojstvena stanja ovog Hamiltonija su:

$$|\Psi_1\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

$$|\Psi_2\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.40)$$

$$|\Psi_3\rangle = a \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{iw}{D_z+iJ} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.41)$$

$$|\Psi_4\rangle = b \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{-iw}{D_z+iJ} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.42)$$

gde je $w = \sqrt{D_z^2 + J^2}$.

Normiranjem talasnih funkcija za konstante (a,b,c,d) dobijamo sledeće izraze:

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.43)$$

Naravno, kao i u slučaju D_x interakcije i ovde je zgodno uvesti odgovarajuće relacije koje će pojednostaviti izraz. Tako smo uveli sledeće korisne relacije u proračunima [14]:

$$\theta = \frac{D_z}{J} \quad (3.44)$$

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta) \quad (3.45)$$

$$\sin(\arctan(x)) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \quad \cos(\arctan(x)) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (3.46)$$

$$e^{i\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{D_z^2}{J^2}}} + \frac{\frac{iD_z}{J}}{\sqrt{1+\frac{D_z^2}{J^2}}} = \frac{J+iD_z}{\sqrt{D_z^2+J^2}} \quad (3.47)$$

Kako je:

$$\frac{iw}{D_z+iJ} \cdot \frac{D_z-iJ}{D_z-ij} = \frac{J+iD_z}{\sqrt{D_z^2+J^2}} \quad (3.48)$$

konačan oblik talasnih funkcija dvokubitnog Hajzenbergovog modela sa XXZ anizotropijom i DM interakcijom D_z je:

$$|\Psi_1\rangle = |00\rangle \quad (3.49)$$

$$|\Psi_2\rangle = |11\rangle \quad (3.50)$$

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\theta} |01\rangle + |10\rangle) \quad (3.51)$$

$$|\Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\theta} |01\rangle - |10\rangle) \quad (3.52)$$

Svojstvene energije Hamiltonijana (3.37) su:

$$E_1 = E_2 = J_z, \quad E_3 = -J_z + 2w, \quad E_4 = -J_z - 2w \quad (3.53)$$

a particiona funkcija sistema je

$$\begin{aligned} Z &= Tr(e^{-\beta H}) = \langle \Psi_1 | e^{-\beta H} | \Psi_1 \rangle + \langle \Psi_2 | e^{-\beta H} | \Psi_2 \rangle + \langle \Psi_3 | e^{-\beta H} | \Psi_3 \rangle + \langle \Psi_4 | e^{-\beta H} | \Psi_4 \rangle \\ &= 2e^{-\beta J_z} (1 + e^{2\beta J_z} \cosh(2\beta w)) \end{aligned} \quad (3.54)$$

Matricu gustine tražimo u bazisu:

$$\{|00\rangle, |01\rangle\} = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\theta} (|\Psi_3 + \Psi_4\rangle), \quad |\Psi_3 + \Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi_3\rangle + |\Psi_4\rangle), \quad |\Psi_3 - \Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\Psi_3\rangle - |\Psi_4\rangle)$$

$$\rho(T) = \frac{1}{z} \begin{pmatrix} \langle 00|e^{-\beta H}|00\rangle & \langle 00|e^{-\beta H}|01\rangle & \langle 00|e^{-\beta H}|10\rangle & \langle 00|e^{-\beta H}|11\rangle \\ \langle 01|e^{-\beta H}|00\rangle & \langle 01|e^{-\beta H}|01\rangle & \langle 01|e^{-\beta H}|10\rangle & \langle 01|e^{-\beta H}|11\rangle \\ \langle 10|e^{-\beta H}|00\rangle & \langle 10|e^{-\beta H}|01\rangle & \langle 10|e^{-\beta H}|10\rangle & \langle 10|e^{-\beta H}|11\rangle \\ \langle 11|e^{-\beta H}|00\rangle & \langle 11|e^{-\beta H}|01\rangle & \langle 11|e^{-\beta H}|10\rangle & \langle 11|e^{-\beta H}|11\rangle \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

Ove matrične elemente nije teško naći, jer je poznato koje su svojstvene vrednosti ukoliko operator $e^{-\beta H}$ deluje na ma koje zadato stanje iz standardnog bazisa. Kao rezultat se dobija:

$$\rho(T) = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-\beta J_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & ve^{i\theta} & 0 \\ 0 & ve^{-i\theta} & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\beta J_z} \end{pmatrix} \quad (3.56)$$

gde je:

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2}(1 + e^{4\beta w})e^{\beta J_z - 2\beta w} \\ v &= \frac{1}{2}(1 - e^{4\beta w})e^{\beta J_z - 2\beta w} \end{aligned} \quad (3.57)$$

U nastavku teksta razmatraćemo kvantitativnu meru entangliranosti dvokubitnog sistema, koji se nalazi u stanju opisanim matricom gustine $\rho(T)$, odnosno razmatramo konkurentnost sistema koja je definisana u prethodnom delu rada [14, 25]. Već smo napomenuli da za traženje konkurenčnosti $C(\rho(T))$ neophodno je prvo pronaći matricu $R = \rho S \rho^* S$, gde je $S = \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y$ [14]. Kao rezultat konačno dobijamo:

$$R = \frac{1}{Z^2} \begin{pmatrix} e^{-2\beta J_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u^2 + v^2 & 2uve^{i\theta} & 0 \\ 0 & 2uve^{-i\theta} & u^2 + v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2\beta J_z} \end{pmatrix} \quad (3.58)$$

Kvadratni koreni svojstvenih vrednosti matrice R su:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = \lambda_2 &= \frac{1}{Z} e^{-\beta J_z} \\ \lambda_{3,4} &= \frac{1}{Z} e^{\beta(J_z \pm 2w)} \end{aligned} \quad (3.59)$$

te je konkurenčnost oblika:

$$C(\rho(T)) = \max\left\{\frac{e^{\beta J_z}}{Z}(|e^{2\beta w} - e^{-2\beta J_z}| - e^{-2\beta w} - e^{-2\beta J_z}), 0\right\} \quad (3.60)$$

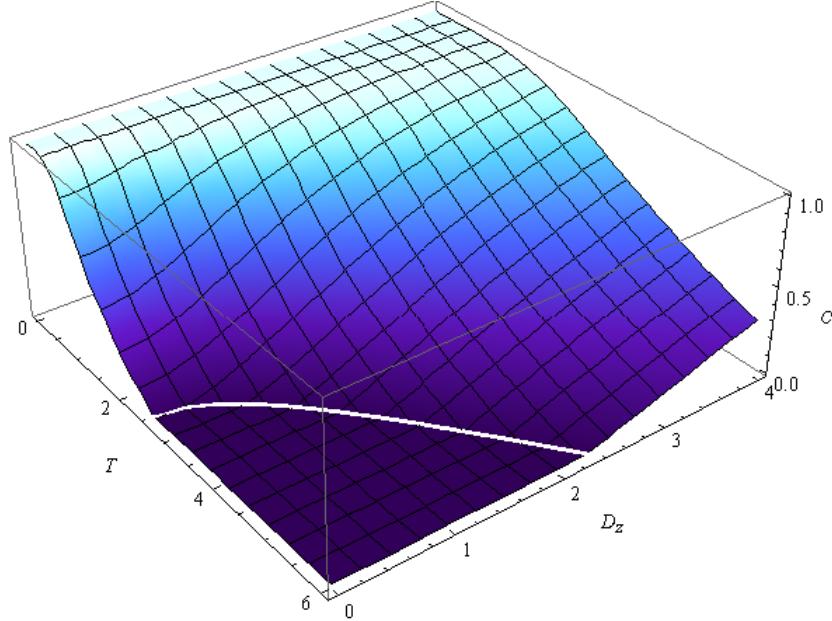
Konkurenčnost je invarijantna na zamene $J \rightarrow -J$ i $D_z \rightarrow -D_z$ [14], te zahtevajmo $J > 0$ i $D_z > 0$ bez gubljenja na opštosti dobijenih rezultata [14]. Konkurenčnost se kreće u intervalu $[0, 1]$ s tim što minimalna konkurenčnost indicira na odsustvo entangliranosti sistema, dok njega maksimalna vrednost ukazuje na maksimalnu entangliranost sistema [14, 25].

Ukoliko je $J_z > -w$ i $T = 0$, sistem se nalazi u osnovnom stanju [14]. Lako je zaključiti da od četiri svojstvene energije koje smo dobili rešavajući svojstveni problem Hamiltonijana,

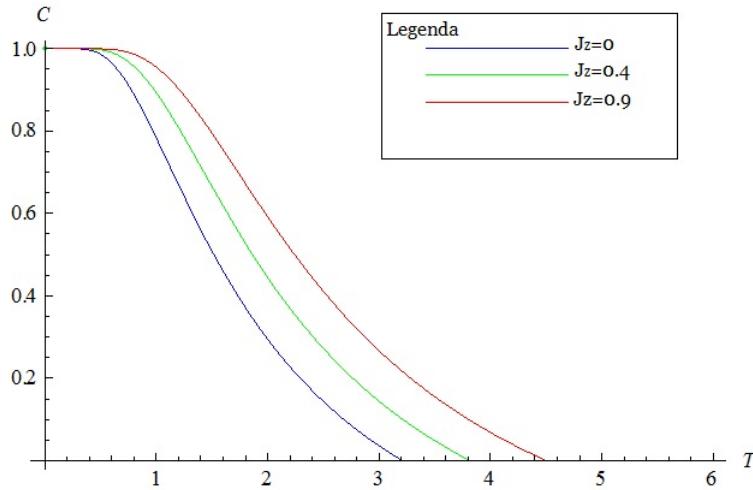
energija koja odgovara minimumu konfiguracije je E_4 .

Tako, osnovno stanje je disentanglirano stanje $|\Psi_1\rangle$ ili $|\Psi_2\rangle$ kada je $J_z < -w$, iz razloga što je tada konkurentnost jednaka nuli, ali kada govorimo o situaciji $J_z > -w$, osnovno stanje je entanglirano i zadato je vektorom $|\Psi_4\rangle$ i tom stanju odgovara maksimalna konkurentnost ($C(|\Psi_4\rangle) = 1$).

Sa porastom temperature u priču se uključuju i termalne fluktuacije, kada se entanglement odvija u kombinacijama osnovnog i pobuđenih stanja [14]. Kada je $T > T_c$, tada je konkurentnost jednaka nuli. Tada kažemo da je izvršen kvantni fazni prelaz [14].



Slika 3.1.3.1 - Konkurentnost u funkciji T i D_z za vrednosti $J = 1$ i $J_z = 0.2$



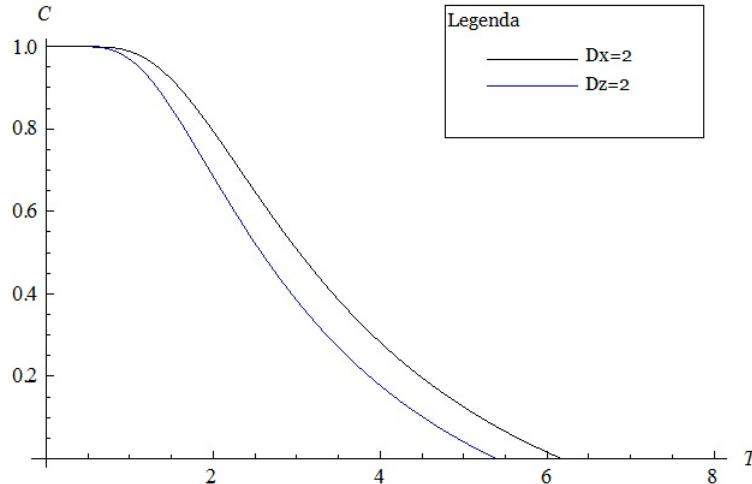
Slika 3.1.3.2 - Konkurentnost u funkciji temperature za različite vrednosti J_z i $D_z = 1, J = 1$

Sa slikama 3.1.3.1 i 3.1.3.2 uočavamo da sa porastom temperature dolazi do opadanja entangliranosti sistema. Razlog je mešanje maksimalno entangliranih stanja sa ostalim stanjima. Lako je uočiti da se sa porastom interakcionog DM parametra D_z javlja i porast entangliranosti sistema. Na slici 8 može se uočiti da sa porastom J_z dolazi do porasta kritične

temperature i porasta entangliranosti na fiksnoj temperaturi.

3.1.4 XXZ model - komparacija D_x vs D_z

Sada ćemo na jednom grafiku objediniti konkurenčije vezane za parametre DM interakcije D_x i D_z . Uzećemo da DM parametri imaju iste vrednosti $D_x = D_z = 2$, a potom za određene parametre $J = 1$ i $J_z = 0.2$ uporedićemo ove dve krive. Rezultat proračuna konkurenčnosti za ova dva sistema prikazan je na slici ispod:



Slika 3.1.4.1 - Poređenje konkurenčnosti za jednake DM parametre $D_x = D_z = 2$

Na osnovu slike 3.1.4.1 zaključujemo da parametar D_x i D_z ne kontrolišu entanglement u jednakoj mjeri. Primećujemo da za iste vrednosti DM interakcionih parametara, "jače" entanglirano stanje je ono u čijem sistemu je prisutna D_x interakcija, dok je za istu tu vrednost parametra $D_z = 2$ sistem u "slabije" entangliranom stanju.

No, sumarno, Hajzenbergov model sa "XXZ" tipom anizotropije frustriran DM interakcijom može se koristiti u izgradnji kvantnih računara, gde bi kontrolni parametri u ovom sistemu svakako bili integrali izmene J i J_z , kao i parametri koji karakterišu Čalošinski - Morija interakciju - D_x i D_z .

U narednoj sekciji, pokazaćemo da kod Hajzenbergovog modela sa anizotropijom tipa "XYZ" dolazi do razlike prilikom analize D_x i D_y komponente DM vektora interakcije, što ovde nije slučaj, ali smo tako nešto, obzirom na "XXZ" anizotropiju, svakako očekivali.

3.2 XYZ model

3.2.1 XYZ model sa D_x interakcijom

Razmatrajmo Hajzenbergov Hamiltonian sa anizotropijom tipa "XYZ" i prisutnom DM interakcijom, opisanom parametrom D_x [24]:

$$H_{D_x} = J_x \sigma_1^x \otimes \sigma_2^x + J_y \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y + J_z \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z + D_x (\sigma_1^y \otimes \sigma_2^z - \sigma_1^z \otimes \sigma_2^y) \quad (3.61)$$

Hamiltonijan u matričnoj formi ima oblik:

$$H_{D_x} = \begin{pmatrix} J_z & iD_x & -iD_x & J_x - J_y \\ -iD_x & -J_z & J_x + J_y & iD_x \\ iD_x & J_x + J_y & -J_z & -iD_x \\ J_x - J_y & -iD_x & iD_x & J_z \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

Svojstvena stanja Hamiltonijana (3.61) su:

$$|\Psi_1\rangle = a \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.63)$$

$$|\Psi_2\rangle = b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.64)$$

$$|\Psi_3\rangle = c \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{i(J_y+J_z+w)}{2D_x} \\ \frac{i(J_y+J_z+w)}{2D_x} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.65)$$

$$|\Psi_4\rangle = d \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{i(-J_y-J_z+w)}{2D_x} \\ \frac{-i(-J_y-J_z+w)}{2D_x} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.66)$$

gde je $w = \sqrt{4D_x^2 + (J_x + J_y)^2}$. Koristeći ortonormiranost talasnih funkcija, dobili smo sledeće vrednosti konstantni:

$$a = b = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.67)$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2D_x}{(J_y + J_z + w) + 4D_x^2} \quad (3.68)$$

$$d = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{2D_x}{(-J_y - J_z - w) + 4D_x^2} \quad (3.69)$$

Uvođenjem [24]:

$$\varphi = \arctan \left(\frac{2D_x}{W + J_y + J_z} \right) \quad (3.70)$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{2D_x}{W - J_y - J_z} \right) \quad (3.71)$$

normirana stanja su:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle) \quad (3.72)$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \quad (3.73)$$

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(\varphi)|00\rangle + i \cos(\varphi)|01\rangle - i \cos(\varphi)|10\rangle - \sin(\varphi)|11\rangle) \quad (3.74)$$

$$|\Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin(\phi)|00\rangle - i \cos(\phi)|01\rangle + i \cos(\phi)|10\rangle - \sin(\phi)|11\rangle) \quad (3.75)$$

Svojstvene energije Hamiltonijana (3.62):

$$E_1 = J_x + J_y - J_z, \quad E_2 = J_x - J_y + J_z, \quad E_4 = -J_x + w, \quad E_3 = -J_x - w \quad (3.76)$$

Particiona funkcija ovakvog sistema je

$$\begin{aligned} Z = Tr(e^{-\beta H}) &= \langle \Psi_1 | e^{-\beta H} | \Psi_1 \rangle + \langle \Psi_2 | e^{-\beta H} | \Psi_2 \rangle + \langle \Psi_3 | e^{-\beta H} | \Psi_3 \rangle + \langle \Psi_4 | e^{-\beta H} | \Psi_4 \rangle \\ &= 2e^{-\beta J_x} \cosh(\beta(J_y - J_z)) + 2e^{\beta J_x} \cosh(\beta w) \end{aligned} \quad (3.77)$$

Matricu gustine $\rho(T)$ dobili smo koristeći spektralnu dekompoziciju [17]:

$$\begin{aligned} \rho(T) &= \frac{1}{Z} \sum_{j=1}^4 e^{-\beta E_j} |\Psi_j\rangle \otimes \langle \Psi_j| \\ &= \frac{1}{Z} (e^{-\beta(J_x+J_y-J_z)} |\Psi_1\rangle \otimes \langle \Psi_1| + e^{-\beta(J_x-J_y+J_z)} |\Psi_2\rangle \otimes \langle \Psi_2| + e^{\beta(J_x+w)} |\Psi_3\rangle \otimes \langle \Psi_3| \\ &\quad + e^{-\beta(J_x+w)} |\Psi_4\rangle \otimes \langle \Psi_4|) \end{aligned} \quad (3.78)$$

gde su:

$$|\Psi_1\rangle \otimes \langle \Psi_1| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi_2\rangle \otimes \langle \Psi_2| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\Psi_3\rangle \otimes \langle \Psi_3| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin^2(\varphi) & -i \sin(\varphi) \cos(\varphi) & i \sin(\varphi) \cos(\varphi) & -\sin^2(\varphi) \\ i \sin(\varphi) \cos(\varphi) & \cos^2(\varphi) & -\cos^2(\varphi) & -i \sin(\varphi) \cos(\varphi) \\ -i \sin(\varphi) \cos(\varphi) & -\cos^2(\varphi) & \cos^2(\varphi) & i \sin(\varphi) \cos(\varphi) \\ -\sin^2(\varphi) & i \sin(\varphi) \cos(\varphi) & -i \sin(\varphi) \cos(\varphi) & \sin^2(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$|\Psi_4\rangle \otimes \langle \Psi_4| = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sin^2(\phi) & i \sin(\phi) \cos(\phi) & -i \sin(\phi) \cos(\phi) & -\sin^2(\phi) \\ -i \sin(\phi) \cos(\phi) & \cos^2(\phi) & -\cos^2(\phi) & i \sin(\phi) \cos(\phi) \\ i \sin(\phi) \cos(\phi) & -\cos^2(\phi) & \cos^2(\phi) & -i \sin(\phi) \cos(\phi) \\ -\sin^2(\phi) & -i \sin(\phi) \cos(\phi) & i \sin(\phi) \cos(\phi) & \sin^2(\phi) \end{pmatrix}$$

Konačno, relacija za matricu gustine postaje:

$$\rho(T) = \begin{pmatrix} m_1 & q & q^* & m_2 \\ q^* & n_1 & n_2 & q \\ q & n_2 & n_1 & q^* \\ m_2 & q^* & q & m_1 \end{pmatrix} \quad (3.79)$$

gde su:

$$m_{1,2} = \frac{1}{2Z} (e^{-\beta E_2} \pm e^{-\beta E_3} \sin^2(\varphi) \pm e^{-\beta E_4} \sin^2(\phi))$$

$$n_{1,2} = \frac{1}{2Z} (e^{-\beta E_1} \pm e^{-\beta E_3} \cos^2(\varphi) \pm e^{-\beta E_4} \cos^2(\phi))$$

$$q = \frac{i}{2Z} (e^{-\beta E_3} \sin(\varphi) \cos(\varphi) - e^{-\beta E_4} \sin(\varphi) \cos(\varphi)) \quad (3.80)$$

Izračunali smo matricu $R = \rho S \rho^* S$, gde je $S = \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y$. Njene svojstvene vrednosti, kao i koreni svojstvenih vrednosti su:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{Z} e^{\beta(J_x \pm w)} \quad (3.81)$$

$$\lambda_{3,4} = \frac{1}{Z} e^{\beta(-J_x \pm J_y \mp J_z)} \quad (3.82)$$

Sada tražimo konkurentnost sistema, u cilju kvantitativnog određivanja entangliranosti sistema. Konkurentnost, sada, razlikuje dva slučaja [24]:

- Kada je $J_y > J_z$ [24]:

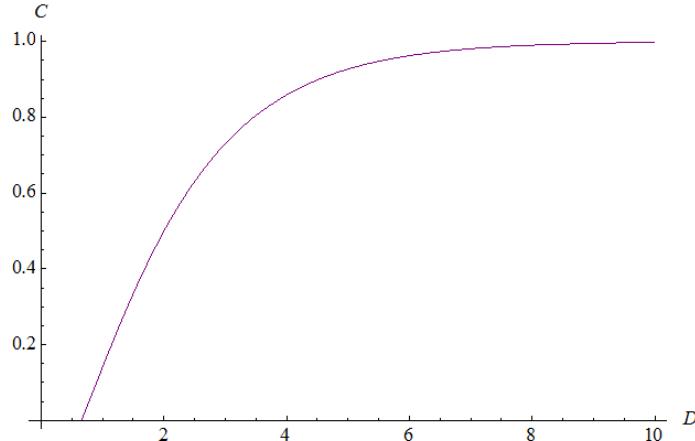
$$C(\rho(T)) = \max\left\{\frac{1}{Z} \left(|e^{\beta(J_x+w)} - e^{\beta(-J_x+J_y-J_z)}| - e^{\beta(J_x-w)} - e^{\beta(-J_x-J_y+J_z)} \right), 0 \right\} \quad (3.83)$$

- Kada je $J_y \leq J_z$ [24]:

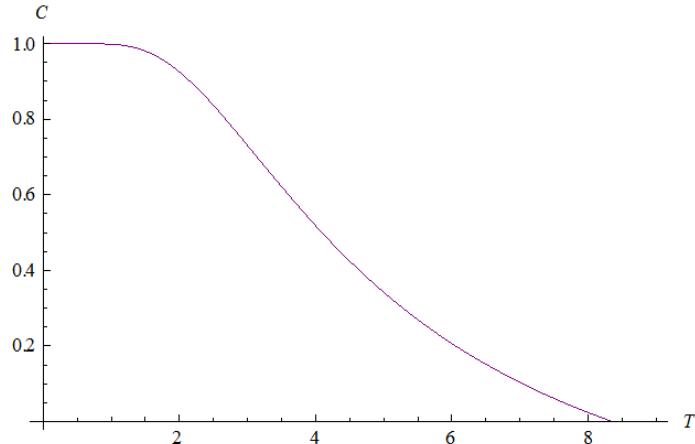
$$C(\rho(T)) = \max\left\{\frac{1}{Z} \left(|e^{\beta(J_x+w)} - e^{\beta(-J_x-J_y+J_z)}| - e^{\beta(J_x-w)} - e^{\beta(-J_x+J_y-J_z)} \right), 0 \right\} \quad (3.84)$$

Bitno je svakako naglasiti, kada je reč o anizotropiji tipa "XYZ", tada je za očekivati $J_x \neq J_y \neq J_z$. Specijalan slučaj kada je $J_x = J_y$ ovu diskusiju svodi na tumačenje Hajzenbergovog modela anizotropije "XXZ", te se gornji rezultati svode na već obrađene u ovom radu [14].

U antiferomagnetnom Hajzenbergovom "XYZ" modelu, gde je $J_y > J_z$, dobili smo sledeće rezultate:



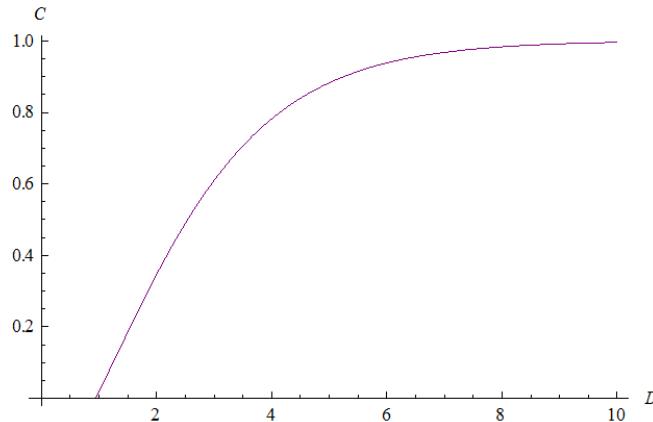
Slika 3.2.1.1 - Konkurentnost u funkciji DM parametra D_x za $T = 3, J_x = 1, J_y = 0.5$ i $J_z = 0.2$



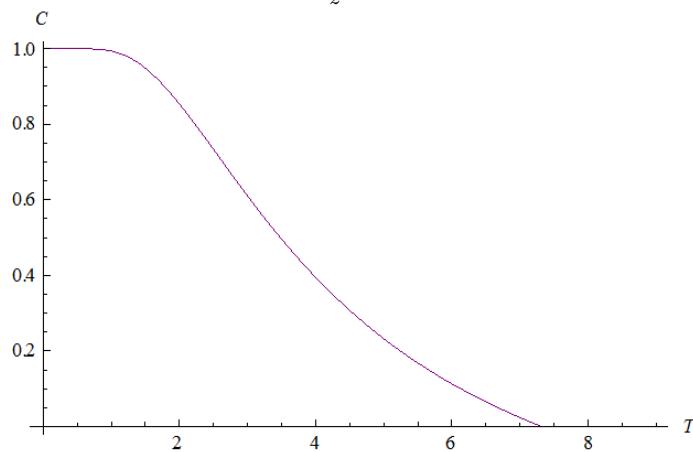
Slika 3.2.1.2 - Konkurentnost u funkciji temperature za $D_x = 3, J_x = 1, J_y = 0.5$ i $J_z = 0.2$

Slike 3.2.1.1 i 3.2.1.2 svedoče o pojavi koja je pratila ovaj rad i do sad. Naime, sa porastom DM interakcionog parametra, dolazi do porasta entangliranosti stanja, dok sa porastom temperature dolazi do opadanja entangliranosti, što za neku $T = T_c$ rezultuje nultom konkurentnošću.

U antiferomagnetnom slučaju kada je $J_x < J_z$, dobili smo sledeće rezultate:



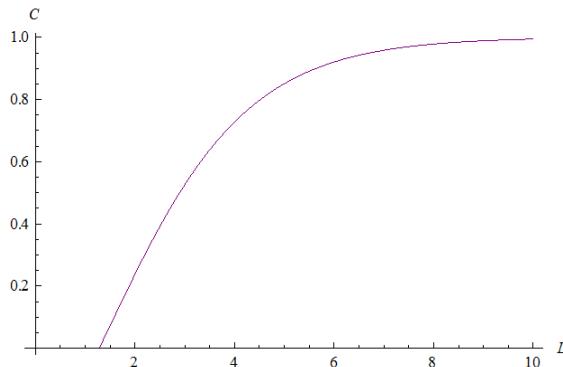
Slika 3.2.1.3 - Konkurentnost u funkciji DM parametra D_x za $T = 3, J_x = 0.2, J_y = 0.5$ i $J_z = 1$



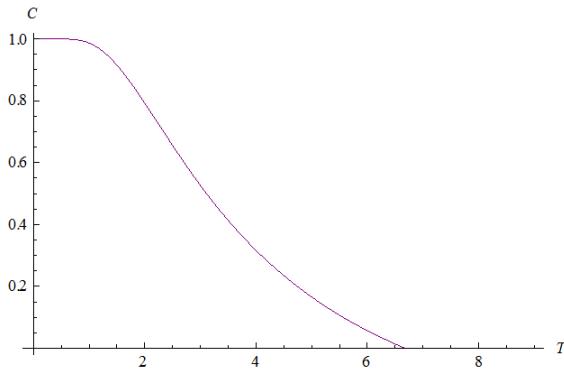
Slika 3.2.1.4 - Konkurentnost u funkciji temperature za $D_x = 3, J_x = 0.2, J_y = 0.5$ i $J_z = 1$

Sa slike 3.2.1.3 i 3.2.1.4 zapažamo identičan trend kao i u slučaju slika 10 i 11, ali je evidentno da je u ovom slučaju kritična temperatura niža, kao i da se pojava konkurentnosti javlja za više vrednosti parametra D_x .

U feromagnetnom Hajzenbergovom XYZ modelu, gde je $J_x > J_z$, dobili smo sledeće rezultate:

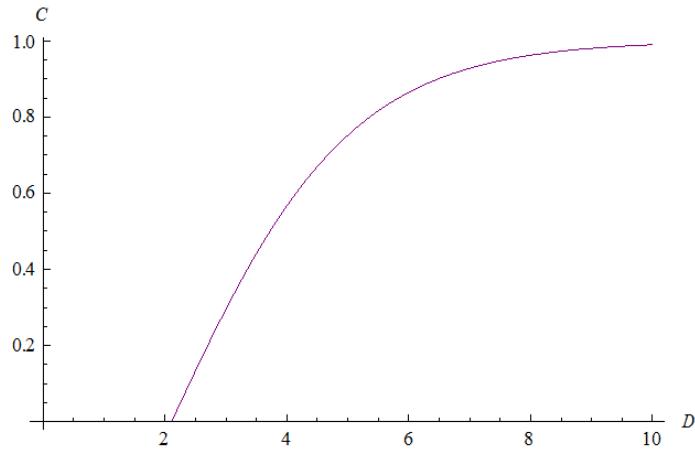


Slika 3.2.1.5 - Konkurentnost u funkciji DM parametra D_x za $T = 3, J_x = -0.2, J_y = -0.5$ i $J_z = -1$

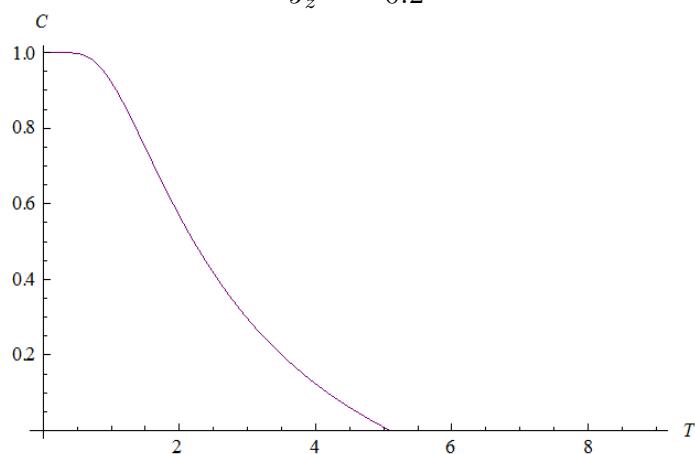


Slika 3.2.1.6 - Konkurentnost u funkciji temperature za $D_x = 3$, $J_x = -0.2$, $J_y = -0.5$ i $J_z = -1$

U feromagnetnom Hajzenbergovom XYZ modelu, gde je $J_x < J_z$, dobili smo sledeće rezultate:



Slika 3.2.1.7 - Konkurentnost u funkciji DM parametra D_x za $T = 3$, $J_x = -1$, $J_y = -0.5$ i $J_z = -0.2$



Slika 3.2.1.8 - Konkurentnost u funkciji temperature za $D_x = 3$, $J_x = -1$, $J_y = -0.5$ i $J_z = -0.2$

U feromagnetskoj fazi dobili smo isti trend, s tim što uočavamo višu kritičnu temperaturu za antiferomagnetsku fazu u odnosu na feromagnetsku fazu. Takođe je potreban veći intenzitet

DM interakcije u feromagnetnoj fazi kako bi se sistem preveo u entangliranu fazu.

3.2.2 XYZ model sa D_y interakcijom

Hamiltonian ovakve postavke modela dat je jednačinom [24]:

$$H_{D_y} = J_x \sigma_1^x \otimes \sigma_2^x + J_y \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y + J_z \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z + D_y (\sigma_1^z \otimes \sigma_2^x - \sigma_1^x \otimes \sigma_2^z) \quad (3.85)$$

U matričnoj formi on je oblika

$$H_{D_y} = \begin{pmatrix} J_z & D_y & -D_y & J_x - J_y \\ D_y & -J_z & J_x + J_y & D_y \\ -D_y & J_x + J_y & -J_z & -D_y \\ J_x - J_y & D_y & -D_y & J_z \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

Svojstvena stanja ovakovog Hamiltonijana su:

$$|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|01\rangle + |10\rangle) \quad (3.87)$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|00\rangle - |11\rangle) \quad (3.88)$$

$$|\Psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin(\phi)|00\rangle - \cos(\phi)|01\rangle + \cos(\phi)|10\rangle + \sin(\phi)|11\rangle) \quad (3.89)$$

$$|\Psi_4\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\sin(\varphi)|00\rangle - \cos(\varphi)|01\rangle + \cos(\varphi)|10\rangle + \sin(\varphi)|11\rangle) \quad (3.90)$$

gde su [24]:

$$\begin{aligned} \phi &= \arctan \left(\frac{2D_y}{J_x + J_z + w} \right) \\ \varphi &= \arctan \left(\frac{2D_y}{J_x + J_z - w} \right) \\ w &= \sqrt{4D_y^2 + (J_x + J_z)^2} \end{aligned} \quad (3.91)$$

Svojstvene energije Hamiltonijana (3.85):

$$E_1 = J_y + J_x - J_z, \quad E_2 = J_y - J_x + J_z, \quad E_4 = -J_y + w, \quad E_3 = -J_y - w \quad (3.92)$$

Particiona funkcija:

$$\begin{aligned} Z &= Tr(e^{-\beta H}) = \langle \Psi_1 | e^{-\beta H} | \Psi_1 \rangle + \langle \Psi_2 | e^{-\beta H} | \Psi_2 \rangle + \langle \Psi_3 | e^{-\beta H} | \Psi_3 \rangle + \langle \Psi_4 | e^{-\beta H} | \Psi_4 \rangle \\ &= 2e^{-\beta J_y} \cosh(\beta(J_x - J_z)) + 2e^{\beta J_y} \cosh(\beta w) \end{aligned} \quad (3.93)$$

Iz spektralne dekompozicije [17] matrice gustine dobijamo izraz za matricu gustine:

$$\begin{aligned}\rho &= \frac{1}{Z} \sum_{j=1}^4 e^{-\beta E_j} |\Psi_j\rangle \otimes \langle \Psi_j| \\ &= \frac{1}{Z} (e^{-\beta(J_y+J_x-J_z)} |\Psi_1\rangle \otimes \langle \Psi_1| + e^{-\beta(J_y-J_x+J_z)} |\Psi_2\rangle \otimes \langle \Psi_2| + e^{-\beta(-J_y-w)} |\Psi_3\rangle \otimes \langle \Psi_3| \\ &\quad + e^{-\beta(-J_y+w)} |\Psi_4\rangle \otimes \langle \Psi_4|)\end{aligned}\quad (3.94)$$

Matrica gustine ovog sistema je:

$$\rho = \begin{pmatrix} m_1 & -q & q & m_2 \\ -q & n_1 & n_2 & -q \\ q & n_2 & n_1 & q \\ m_2 & -q & q & m_1 \end{pmatrix} \quad (3.95)$$

gde su:

$$\begin{aligned}m_{1,2} &= \frac{1}{2Z} (\pm e^{-\beta E_2} + e^{-\beta E_3} \sin^2(\phi) + e^{-\beta E_4} \sin^2(\varphi)) \\ n_{1,2} &= \frac{1}{2Z} (\pm e^{-\beta E_1} + e^{-\beta E_3} \cos^2(\phi) + e^{-\beta E_4} \cos^2(\varphi)) \\ q &= \frac{1}{2Z} (e^{-\beta E_3} \sin(\phi) \cos(\phi) + e^{-\beta E_4} \sin(\varphi) \cos(\varphi))\end{aligned}\quad (3.96)$$

Vršimo identičnu proceduru kao kod svakog prethodnog slučaja: u cilju kvantitativne detekcije konkurentnosti, tražimo matricu $R = \rho S \rho^* S$, gde je matrica S definisana kao $S = \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y$ [14, 24]. Koreni svojstvenih vrednosti matrice R su:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{Z} e^{\beta(-J_y+J_x-J_z)} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{Z} e^{\beta(-J_y-J_x+J_z)} \\ \lambda_3 &= \frac{1}{Z} e^{\beta(J_y+w)} \\ \lambda_4 &= \frac{1}{Z} e^{\beta(J_y-w)}\end{aligned}\quad (3.97)$$

Konkurentnost $C(\rho(T))$ razmatramo odvojeno za dva slučaja [24]:

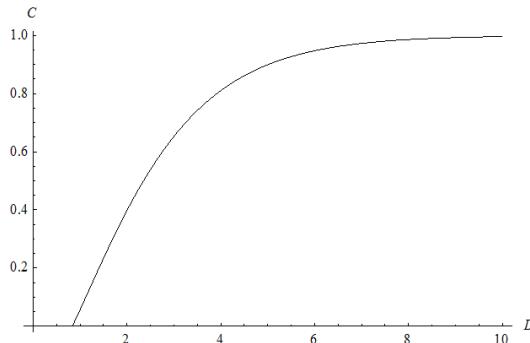
- Za $J_x > J_z$ [24]:

$$C(\rho(T)) = \max\left\{\frac{1}{Z} \left(|e^{\beta(-J_y+J_x-J_z)} - e^{\beta(J_y+w)}| - |e^{\beta(-J_y-J_x+J_z)} - e^{\beta(J_y-w)}| \right)\right\} \quad (3.98)$$

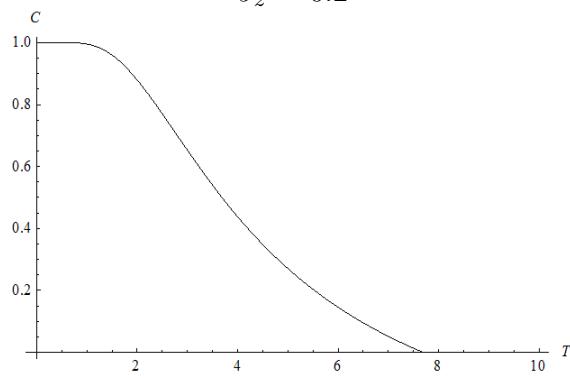
- Za $J_x \leq J_z$ [24]:

$$C(\rho(T)) = \max\left\{\frac{1}{Z} \left(|e^{-\beta(-J_y-J_x+J_z)} - e^{\beta(J_y+w)}| - |e^{\beta(-J_y+J_x-J_z)} - e^{\beta(J_y-w)}| \right)\right\} \quad (3.99)$$

U antiferomagnetskom Hajzenbergovom XYZ modelu sa DM interakcionim parametrom D_y , gde je $J_x > J_z$, dobili smo sledeće rezultate:

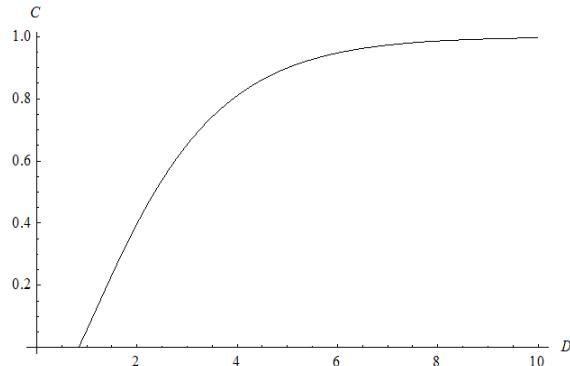


Slika 3.2.2.1 - Konkurentnost u funkciji DM parametra D_y za $T = 3, J_x = 1, J_y = 0.5$ i $J_z = 0.2$

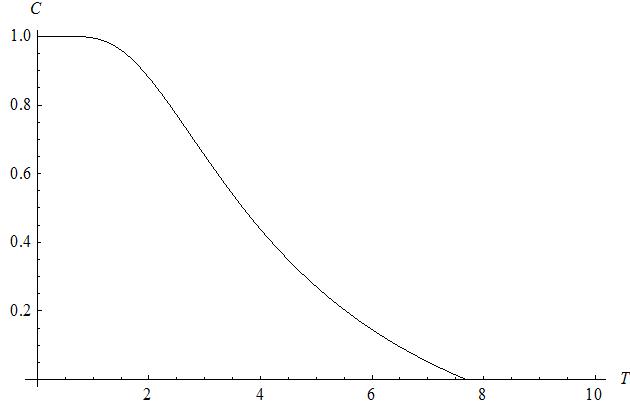


Slika 3.2.2.2 - Konkurentnost u funkciji temperature za $D_y = 3, J_x = 1, J_y = 0.5$ i $J_z = 0.2$

Ukoliko je, pak, $J_x < J_z$, dobili smo sledeće rezultate:



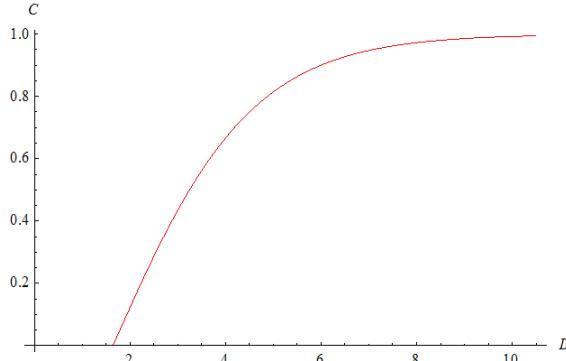
Slika 3.2.2.3 - Konkurentnost u funkciji DM parametra D_y za $T = 3, J_x = 0.2, J_y = 0.5$ i $J_z = 1$



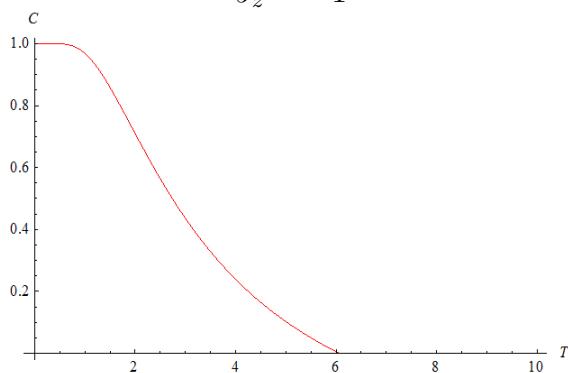
Slika 3.2.2.4 - Konkurentnost u funkciji temperature za $D_y = 3, J_x = 0.2, J_y = 0.5$ i $J_z = 1$

Evidentno je analizom grafika 3.2.2.1, 3.2.2.2, 3.2.2.3 i 3.2.2.4 da se, nezavisno od situacije da li je duž x ili z anizotropija jača, dobijaju iste vrednosti. Ovo je i za očekivati, jer DM interakcija deluje duž y pravca, a kako se anizotropija duž te ose drži konstantnom, dobijen je i očekivani rezultat, a to je da nema promene u kritičnoj temperaturi i u intenzitetu DM parametra, kako bi entanglement nestao, odnosno nastupio. Ukoliko razmatramo feromagnetnu fazu ovog modela, gde su su članovi izmenske interakcije negativni, u tom slučaju smo dobili sledeće rezultate:

Ukoliko je $J_x > J_z$:

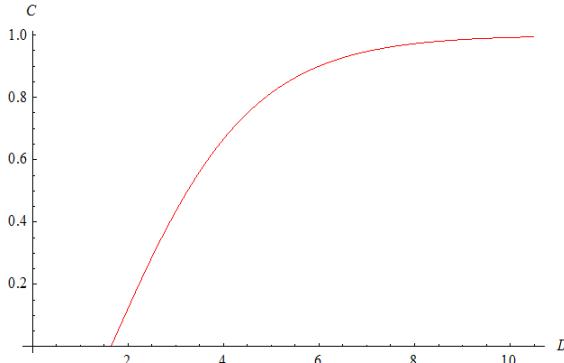


Slika 3.2.2.5 - Konkurentnost u funkciji DM parametra D_y za $T = 3$ $J_x = -0.2, J_y = -0.5$ i $J_z = -1$

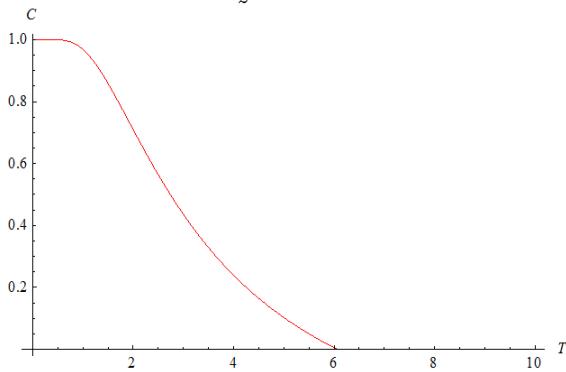


Slika 3.2.2.6 - Konkurentnost u funkciji temperature za $D_y = 3, J_x = -0.2, J_y = -0.5$ i $J_z = -1$

Ukoliko je $J_x < J_z$:



Slika 3.2.2.7 - Konkurentnost u funkciji DM parametra D_y za $T = 3$, $J_x = -1$, $J_y = -0.5$ i $J_z = -0.2$



Slika 3.2.2.8 - Konkurentnost u funkciji temperature za $D_y = 3$, $J_x = -1$, $J_y = -0.5$ i $J_z = -0.2$

Kao što možemo videti sa prethodna četiri grafika, ista situacija dobijena je i u feromagnetskoj fazi. Naime, nije došlo do promene kvantitativnih vrednosti kritične temperature entanglementa, kao ni do promene minimalnog parametra DM interakcije kako bi nastupio entanglement. I kod ovog modela, primećeno je da se u slučaju antiferomagnetne faze dobija viša kritična temperatura nego u slučaju feromagnetne faze. Takođe, kada se sistem nalazi u feromagnetskom uređenju, potreban je veći intenzitet DM parametra kako bi se sistem preveo u entangliranu fazu.

3.2.3 XYZ model sa D_z interakcijom

Hamiltonian ovakve postavke modela dat je jednačinom [24]:

$$H_{D_z} = J_x \sigma_1^x \otimes \sigma_2^x + J_y \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y + J_z \sigma_1^z \otimes \sigma_2^z + D_z (\sigma_1^x \otimes \sigma_2^y - \sigma_1^y \otimes \sigma_2^x) \quad (3.100)$$

Matrični oblik ovog Hamiltonijana dat je izrazom:

$$H_{D_z} = \begin{pmatrix} J_z & 0 & 0 & J_x - J_y \\ 0 & -J_z & J_x + J_y + 2iD_z & 0 \\ 0 & J_x + J_y - 2iD_z & 0 & 0 \\ J_x - J_y & 0 & 0 & J_z \end{pmatrix} \quad (3.101)$$

Svojstvena stanja ovog Hamiltonijana su:

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle) \\ |\Psi_2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle) \\ |\Psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi|01\rangle - |10\rangle) \\ |\Psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi|01\rangle + |10\rangle) \end{aligned} \quad (3.102)$$

gde je:

$$\chi = \frac{J_x + J_y - 2iD_z}{\sqrt{(J_x + J_y)^2 + 4D_z^2}} \quad (3.103)$$

Svojstvene energije dobijene rešavanjem svojstvenog problema Hamiltonijana (3.100) su:

$$\begin{aligned} E_{1,2} &= \pm J_x \mp J_y + J_z \\ E_{4,3} &= -J_z \pm w \end{aligned} \quad (3.104)$$

gde je [24]:

$$w = \sqrt{4D_z^2 + (J_x + J_y)^2} \quad (3.105)$$

Particiona funkcija ovog sistema dobijena je iz sledeće relacije:

$$\begin{aligned} Z &= Tr(e^{-\beta H}) = \langle \Psi_1 | e^{-\beta H} | \Psi_1 \rangle + \langle \Psi_2 | e^{-\beta H} | \Psi_2 \rangle + \langle \Psi_3 | e^{-\beta H} | \Psi_3 \rangle + \langle \Psi_4 | e^{-\beta H} | \Psi_4 \rangle \\ &= 2e^{-\beta J_z} \cosh(\beta(J_x - J_y)) + 2e^{\beta J_z} \cosh(\beta w) \end{aligned} \quad (3.106)$$

Matrica gustine dobijena je koristeći definiciju spektralne dekompozicije normalnog operatora [17]:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{Z} \sum_{j=1}^4 e^{-\beta E_j} |\Psi_j\rangle \otimes \langle \Psi_j| \\ &= \frac{1}{Z} (e^{-\beta(J_x - J_y + J_z)} |\Psi_1\rangle \otimes \langle \Psi_1| + e^{-\beta(-J_x + J_y + J_z)} |\Psi_2\rangle \otimes \langle \Psi_2| + e^{-\beta(-J_z - w)} |\Psi_3\rangle \otimes \langle \Psi_3| \\ &\quad + e^{-\beta(-J_z + w)} |\Psi_4\rangle \otimes \langle \Psi_4|) \end{aligned} \quad (3.107)$$

Matrica gustine ovog sistema:

$$\rho = \frac{1}{Z} \begin{pmatrix} m & 0 & 0 & k \\ 0 & p & -\chi n & 0 \\ 0 & -\chi^* n & p & 0 \\ k & 0 & 0 & m \end{pmatrix} \quad (3.108)$$

gde je:

$$\begin{aligned} m &= 2e^{-\beta J_z} \cosh(\beta(J_x - J_y)) \\ k &= e^{-\beta(J_x - J_y + J_z)}(1 - e^{2\beta J_z}) \\ p &= 2e^{\beta J_z} \cosh(\beta w) \\ n &= 2e^{\beta J_z} \sinh(\beta w) \end{aligned} \quad (3.109)$$

U cilju kvantitativne detekcije konkurentnosti, tražimo matricu $R = \rho S \rho^* S$, gde je matrica S definisana kao $S = \sigma_1^y \otimes \sigma_2^y$ citekinezi1,kinezi2. Koreni svojstvenih vrednosti matrice R su:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{1}{Z} e^{\beta(J_z \pm w)} \\ \lambda_{3,4} &= \frac{1}{Z} e^{\beta(\mp J_x \pm J_y - J_z)} \end{aligned} \quad (3.110)$$

Konkurentnost $C(\rho(T))$, razmatramo odvojeno za dva slučaja [24]:

- Za $J_x > J_y$ [24]:

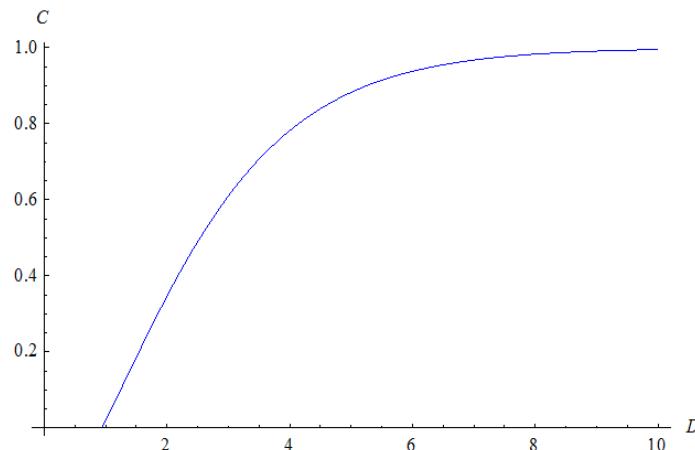
$$C(\rho(T)) = \max\{|\lambda_1 - \lambda_4| - \lambda_2 - \lambda_3, 0\} \quad (3.111)$$

- Za $J_x \leq J_y$ [24]:

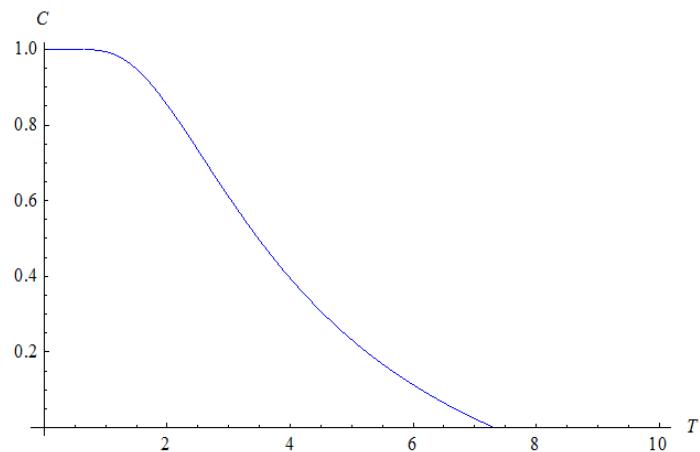
$$C(\rho(T)) = \max\{|\lambda_1 - \lambda_3| - \lambda_2 - \lambda_4, 0\} \quad (3.112)$$

Ukoliko razmatramo antiferomagnetno uređenje, tada su dobijeni sledeći rezultati:

Za $J_x > J_y$:

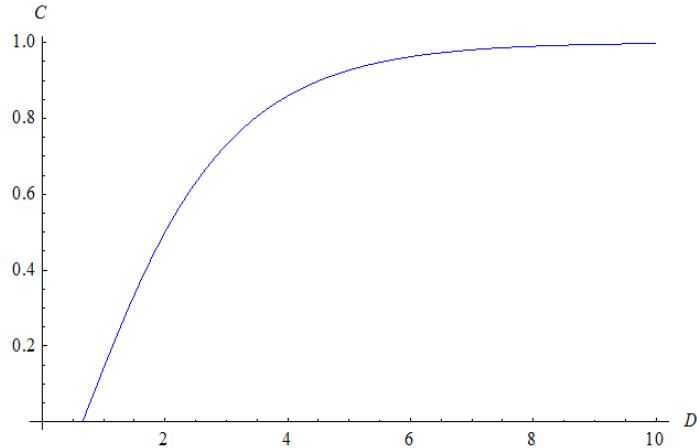


Slika 3.2.3.1 - Konkurentnost u funkciji DM parametra D_z za $T = 3$ $J_x = 1, J_y = 0.5$ i $J_z = 0.2$

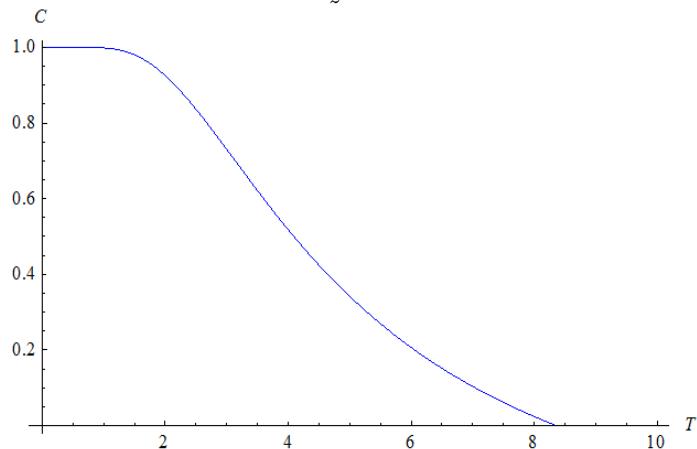


Slika 3.2.3.2 - Konkurentnost u funkciji temperature za $D_z = 3, J_x = 1, J_y = 0.5$ i $J_z = 0.2$

Za $J_x < J_y$:



Slika 3.2.3.3 - Konkurentnost u funkciji DM parametra D_z za $T = 3$, $J_x = 0.2$, $J_y = 0.5$ i $J_z = 1$

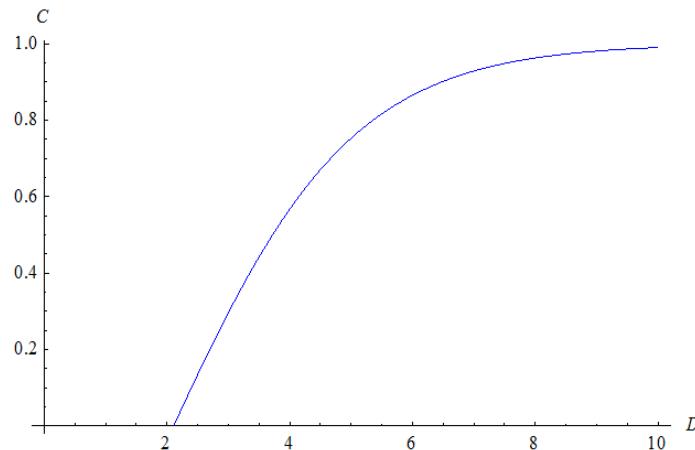


Slika 3.2.3.4 - Konkurentnost u funkciji temperature za $D_z = 3$, $J_x = 0.2$, $J_y = 0.5$ i $J_z = 1$

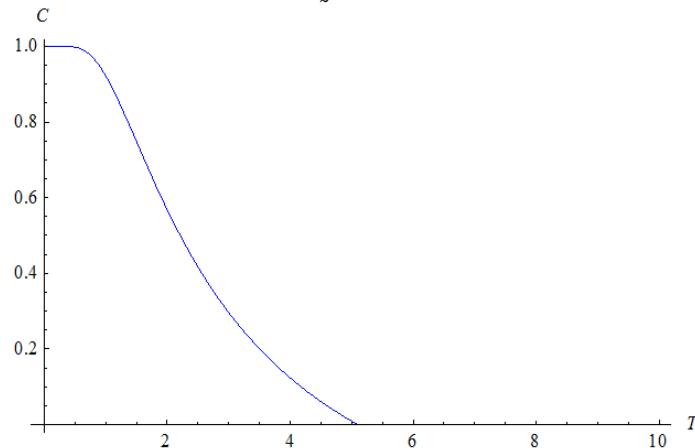
Kao što se može primetiti sa slika 3.2.3.1, 3.2.3.2, 3.2.3.3 i 3.2.3.4 kada operišemo sa DM interakcionim parametrom D_z , a menjamo izmenski član J_z , dolazi do kvantitativno različitih rezultata. U prethodnoj sekciji, bilo je reči o parametru D_y , a izmenska interakcija J_y držala se konstantna, te su se dobijene vrednosti kvantitativno slagale. Ukoliko je izmenska interakcija duž z ose jača, tada se dobija viša kritična temperatura entanglementa. Može se takođe uočiti da za višu vrednost izmenske interakcije J_z je neophodan manji intenzitet D_z parametra, kako bi se sistem preveo u entanglirano stanje.

Analizom feromagnetskog uređenja ovakve postavke modela, dobijeni su sledeći rezultati:

Za $J_x > J_y$:

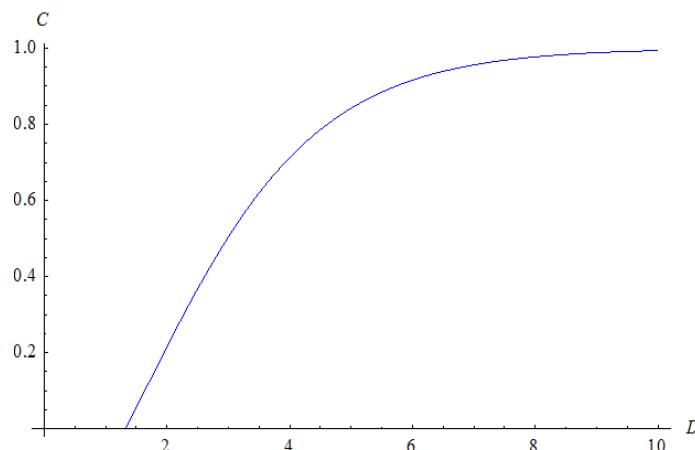


Slika 3.2.3.5 - Konkurentnost u funkciji DM parametra D_z za $T = 3, J_x = -0.2, J_y = -0.5$ i $J_z = -1$

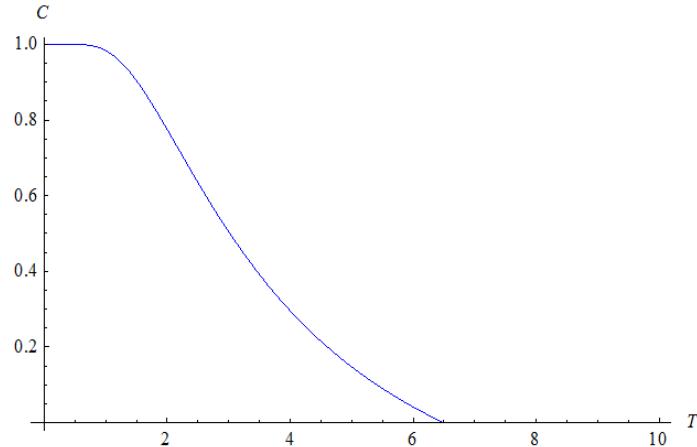


Slika 3.2.3.6 - Konkurentnost u funkciji temperature za $D_z = 3, J_x = -0.2, J_y = -0.5$ i $J_z = -1$

Za $J_x < J_y$:



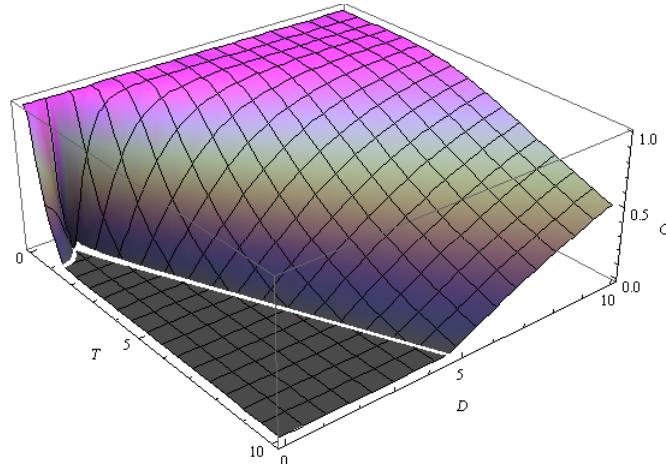
Slika 3.2.3.7 - Konkurentnost u funkciji DM parametra D_z za $T = 3, J_x = -1, J_y = -0.5$ i $J_z = -0.2$



Slika 3.2.3.8 - Konkurentnost u funkciji temperature za $D_z = 3, J_x = -1, J_y = -0.5$ i $J_z = -0.2$

Analizom slika 3.2.3.5, 3.2.3.6, 3.2.3.7 i 3.2.3.8 dolazimo do sličnih zaključaka kao i kod antiferomagnetcog uređenja. Naime, sa porastom izmenske interakcije J_z , dolazi do povišenja kritične temperature entanglementa, kao i do pojave sniženja intenziteta DM interakcionog parametra u cilju uspostavljanja entangiranog stanja. Naravno, kao što se i očekivalo, u feromagnetcnoj fazi javlja se niža kritična temperatura nego u antiferomagnetcnoj fazi, čemu svedoče gore priloženi rezultati.

Inače, iz analize XYZ modela može se uočiti da je funkcionalna zavisnost konkurentnosti od temperature i interakcionog parametra DM interakcije kvalitativno ista za sva tri slučaja (D_x, D_y, D_z), za oba tipa magnetnog uređenja (FM, AFM). Zbog obimnosti, biće predstavljen jedan trodimenzionalni grafik na kom se jasno vidi kvalitativna i kvantitativna funkcionalna zavisnost konkurentnosti od temperature i parametra DM interakcije D_z , u slučaju feromagnetcog uređenja, za $J_x < J_y$:



Slika 3.2.3.9 - Konkurentnost u funkciji T i D_z za vrednosti parametara $J_x = -1, J_y = -0.5, J_z = -0.2$

Svi rezultati, u slučaju kada je $J_x = J_y$, svode se na rezultate predviđene Hajzenbergovim XXZ modelom. U narednoj sekciji u priču uključujemo nehomogeno magnetno polje, te ćemo videti da li će doći do kvalitativne izmene funkcionalne zavisnosti od temperature, DM

interakcije. Takođe ćemo analizirati zavisnost konkurentnosti od magnetnog polja odnosno od parametra nehomogenosti polja.

3.3 Hajzenbergov XYZ model u nehomogenom magnetnom polju

U prethodnim sekcijama analiziran je XXZ i XYZ Hajzenbergov model u prisustvu Đalošinski - Morija interakcije [14, 24, 15, 27]. Korisno je istaći činjenicu da je kontrola entangliranosti sistema putem parametra izmenske interakcije J_i , ($i = x, y, z$) eksperimentalno gotovo nemoguća [14, 24, 15, 27]. Razlog leži u činjenici da se parametri izmenske interakcije J_x, J_y i J_z ne mogu kontrolisati zasebno i stoga se ovi parametri ne mogu proizvoljno podešavati u cilju kontrole entangliranosti spinskih sistema. Dakle, studije entanglementa za različite tipove anizotropija su veoma zanimljive iz teorijskog aspekta [14, 24, 15, 27], pogotovo ako razmatramo beskonačno dugačke spinske lance, u cilju detekcije kvantnih faznih prelaza, te nemaju veliku praktičnu primenu u fizičkoj realizaciji kubita [15].

U sistemima kondenzovane materije, poput Hajzenbergovih spinskih lanaca, uvek je moguće ostvariti nehomogeno zemanovsko kuplovanje [15]. Heterostrukture sistema kondenzovane materije su obično nehomogene, uz prisustvo magnetnih nesavršenosti, kao i defekata. Jedan od glavnih izazova jeste da se u ovim sistemima realizuju identični kubiti [17, 10]. Konstrukcija približno istih sistema u poluprovodničkoj tehnologiji je uvek bila teška, još uvek je, ali oni su izuzetno bitni u kvantnoj tehnologiji [28].

U ovom delu rada, razmatramo dvokubitni sistem u nehomogenom magnetnom polju [15, 27], kao i svojstva entanglementa ovog sistema. Na ekstremno niskim temperaturama, pretpostavljamo da se ovaj kubitni sistem nalazi u osnovnom stanju [15]. Stoga, proučavamo osobine entangliranosti osnovnog stanja. Naravno, realni fizički sistem uvek se nalazi na konačnoj temperaturi i sastoji se od mešavine entangliranih i neentangliranih stanja, koja zavise od temperature [27, 15]. Kako se radi o spinskom sistemu koji se sastoji od dva spina, rezultati koji će biti prikazani relevantniji su za problem konstrukcije kvantnih računara [28, 15], ali ne i za tumačenje problema kvantnih faznih prelaza [27, 15] što zahteva tretman beskonačno dugačkog spinskog lanca, sa kojim se ne operiše u ovom radu.

Među brojnim konceptima razmatranim u cilju realizacije kubitnih sistema, pristup zasnovan na poluprovodničkim kvantnim tačkama nudi veliku prednost u izradi minijaturnih verzija kvantnog računara [29, 30]. Kvantne tačke su veoma male čestice u sastavu poluprovodnika [32]. Otkrivene su u sistemima kondenzovane materije 1980. godine od strane ruskog fizičara Alekseja Ekimova [32]. To su kristali veličine svega nekoliko nanometara i predstavljaju centralnu temu nanotehnologija (Slika 3.3.1) [33].



Slika 3.3.1 - Prikaz kvantnih tačaka u poluprovodničkom kristalu CdS . Preuzeto sa⁴

Imaju sposobnost emisije svetlosti određene frekvencije ukoliko se na njih primeni električna struja ili svetlost od strane spoljašnjih izvora [28, 32]. Primenom niskih napona na elektrode, može se stvoriti struja koja protiče kroz kvantne tačke i time se mogu napraviti precizna merenja u spinskim sistemima [29, 30]. Sa nekoliko entangliranih kvantnih tačaka (u našem slučaju kubita), možemo dobiti fleksibilan način za vršenje kvantnih operacija, proračuna i na taj način u mogućnosti smo konstruisati fleksibilan kvantni računar [28, 15].

Razmatrajmo dvokubitni sistem sačinjen od dva elektrona ograničena pomoću dve kvantne tačke (QD) [15]. Ako se kubit predstavi jednim elektronom u kvantnoj tački, on može biti manipulisan i očitan od strane spoljašnjih uređaja [15]. Hajzenbergov model (najjednostavniji model za izučavanje svojstava spinskih lanaca) zgodan je za modelovanje dvokubitnih sistema koji uključuju spin - orbitalnu interakciju (SO interakciju) [15]. SO interakcija u nanostrukturama izučava se pomoću metoda kvantne optike. Ova interakcija izaziva novi tip anizotropije i naziva se spin - orbitalna anizotropija [15, 27]. Efekat SO interakcije dvokubitnog XX sistema u odsustvu magnetnog polja izučavana je od strane brojne grupe fizičara [15, 27]. Pokazano je da se kritična temperatura entanglementa povećava sa porastom absolutne vrednosti parametra koji karakteriše SO interakciju. Takođe, ispostavlja se da je termalni entanglement u ovako definisanom sistemu isti za feromagnetno i antiferomagnetno uređenje [15, 27].

U ovom radu, SO interakcija koja uključuje SO kuplovanje drugog reda nije uzeta u razmatranje, već samo SO interakcija prvog reda koja je proporcionalna sa kuplovanjem putem izmenske interakcije [27]. Interakcija putem koje se vrši SO kuplovanje prvog reda je interakcija Đalošinski - Morija.

⁴https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_dot

Hamiltonijan ovako definisanog modela dat je sledećim izrazom [15]:

$$\begin{aligned} H = & \frac{1}{2} (J_x \sigma_1^x \sigma_2^x + J_y \sigma_1^y \sigma_2^y + J_z \sigma_1^z \sigma_2^z) + \mathbf{B}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_1 + \mathbf{B}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \\ & + \mathbf{D} \cdot (\boldsymbol{\sigma}_1 \times \boldsymbol{\sigma}_2) + \delta \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \bar{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2 \end{aligned} \quad (3.113)$$

U ovoj relaciji, σ_i^j , ($i = 1, 2$), ($j = x, y, z$) predstavljaju Paulijeve spinske matrice, $\bar{\Gamma}$ predstavlja simetrični tenzor SO interakcije drugog reda [15], $\mathbf{B}_{1,2} = B_{1,2} \mathbf{e}_z = B \pm b$ predstavlja magnetno polje, b je parametar koji karakteriše nehomogenost magnetnog polja i $\mathbf{D} = J_z D \mathbf{e}_z$ predstavlja vektor Đalošinski - Morija interakcije, koji zajedno sa parametrom δ predstavljaju bezdimenzijsne parametre.

Naglasili smo, a istaći ćemo da se u ovom radu zanemaruje SO interakcija drugog reda [15, 27], što će reći da se u Hamiltonijanu (3.112) zanemaruje član $\delta \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \bar{\Gamma} \cdot \boldsymbol{\sigma}_2$ [15, 27]. Nakon što smo precizno definisali sve parametre, Hamiltonian se može zapisati u sledećoj formi:

$$H = \frac{1}{2} (J_x \sigma_1^x \sigma_2^x + J_y \sigma_1^y \sigma_2^y + J_z \sigma_1^z \sigma_2^z) + \frac{B+b}{2} \sigma_1^z + \frac{B-b}{2} \sigma_2^z + \frac{J_z D}{2} (\sigma_1^x \sigma_2^y - \sigma_1^y \sigma_2^x) \quad (3.114)$$

Sada ćemo iz gornje relacije eleminisati operatore $\sigma^{x,y}$ uvođenjem novih operatora, σ^+ i σ^- sledećom relacijom:

$$\sigma^\pm = \frac{1}{2} (\sigma^x \pm i\sigma^y) \quad (3.115)$$

Kako je

$$\begin{aligned} \sigma_1^+ \sigma_2^- &= \frac{1}{4} (\sigma_1^x + i\sigma_1^y)(\sigma_2^x - i\sigma_2^y) \\ &= \frac{1}{4} (\sigma_1^x \sigma_2^x - i\sigma_1^x \sigma_2^y + i\sigma_1^y \sigma_2^x + \sigma_1^y \sigma_2^y) \end{aligned} \quad (3.116)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \sigma_1^- \sigma_2^+ &= \frac{1}{4} (\sigma_1^x - i\sigma_1^y)(\sigma_2^x + i\sigma_2^y) \\ &= \frac{1}{4} (\sigma_1^x \sigma_2^x + i\sigma_1^x \sigma_2^y - i\sigma_1^y \sigma_2^x + \sigma_1^y \sigma_2^y) \end{aligned} \quad (3.117)$$

Ukoliko od (3.115) oduzmemo (3.116) i izrazimo željeni član kojeg se želimo rešiti u Hamiltonijanu, dobijamo:

$$\sigma_1^x \sigma_2^y - \sigma_1^y \sigma_2^x = 2i(\sigma_1^+ \sigma_2^- - \sigma_1^- \sigma_2^+) \quad (3.118)$$

Ukoliko saberemo i oduzmemo operatore $\sigma_{1,2}^+$ i $\sigma_{1,2}^-$ dobijamo:

$$\begin{aligned} \sigma_1^+ + \sigma_1^- &= \sigma_1^x \\ \sigma_2^+ + \sigma_2^- &= \sigma_2^x \end{aligned} \quad (3.119)$$

odnosno

$$\begin{aligned} \frac{1}{i} (\sigma_1^+ - \sigma_1^-) &= \sigma_1^y \\ \frac{1}{i} (\sigma_2^+ - \sigma_2^-) &= \sigma_2^y \end{aligned} \quad (3.120)$$

Koristeći (3.118), konačno Hamiltonijan (3.113) postaje [15]:

$$\begin{aligned}
 H &= J\gamma(\sigma_1^+\sigma_2^+ + \sigma_1^-\sigma_2^-) + J(\sigma_1^+\sigma_2^- + \sigma_1^-\sigma_2^+) \\
 &+ \frac{J_z}{2}\sigma_1^z\sigma_2^z + \frac{B+b}{2}\sigma_1^z + \frac{B-b}{2}\sigma_2^z + iJ_zD(\sigma_1^+\sigma_2^- - \sigma_1^-\sigma_2^+) \\
 &= J\gamma(\sigma_1^+\sigma_2^+ + \sigma_1^-\sigma_2^-) + (J + iJ_zD)\sigma_1^+\sigma_2^- + (J - iJ_zD)\sigma_1^-\sigma_2^+ \\
 &+ \frac{J_z}{2}\sigma_1^z\sigma_2^z + \frac{B+b}{2}\sigma_1^z + \frac{B-b}{2}\sigma_2^z
 \end{aligned} \tag{3.121}$$

Ovde su uvedene sledeće konstante: $J = \frac{J_x+J_y}{2}$ predstavlja srednju ravansku anizotropnu izmensku konstantu kuplovanja XY, a $\gamma = \frac{J_x-J_y}{J_x+J_y}$ daje meru anizotropije i ($-1 \leq \gamma \leq 1$) [15, 27]. Sada je neophodno, pre samih proračuna preći na matrični zapis i raspisati neophodne tenzorske proizvode u ovom Hamiltonijanu. Naime,

$$\sigma^+ = \frac{1}{2}(\sigma^x + i\sigma^y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.122}$$

$$\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.123}$$

$$\sigma^- = \frac{1}{2}(\sigma^x - i\sigma^y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.124}$$

$$\sigma_1^- \otimes \sigma_2^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.125}$$

$$\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^+ + \sigma_1^- \otimes \sigma_2^- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.126}$$

$$\sigma_1^+ \otimes \sigma_2^- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.127}$$

$$\sigma_1^- \otimes \sigma_2^+ = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.128}$$

$$\sigma_1^z \otimes \sigma_2^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.129)$$

$$\sigma_1^z \otimes 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.130)$$

$$1 \otimes \sigma_2^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.131)$$

Hamiltonijan, nakon uvrštanja ovih tenzorskih proizvoda postaje:

$$H = \begin{pmatrix} \frac{J_z}{2} + B & 0 & 0 & J\gamma \\ 0 & -\frac{J_z}{2} + b & J + iJ_zD & 0 \\ 0 & J - iJ_zD & -\frac{J_z}{2} - b & 0 \\ J\gamma & 0 & 0 & \frac{J_z}{2} - B \end{pmatrix} \quad (3.132)$$

Svojstvena stanja ovog hamiltonijana su:

$$\begin{aligned} |\Psi_1\rangle &= M^- \left(\frac{B - \eta}{\gamma J} |00\rangle + |11\rangle \right) \\ |\Psi_2\rangle &= M^+ \left(\frac{B + \eta}{\gamma J} |00\rangle + |11\rangle \right) \\ |\Psi_3\rangle &= N^- \left(\frac{b - \xi}{J - iJD_z} |01\rangle + |10\rangle \right) \\ |\Psi_4\rangle &= N^+ \left(\frac{b + \xi}{J - iJD_z} |01\rangle + |10\rangle \right) \end{aligned} \quad (3.133)$$

gde su:

$$\eta = \sqrt{B^2 + (J\gamma)^2}$$

$$M^\pm = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{B \pm \eta}{J\gamma}\right)^2}} N^\pm = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(b \pm \xi)^2}{J^2 + (J_z D)^2}}} \xi = \sqrt{b^2 + J^2 + (J_z D)^2} \quad (3.134)$$

Pripadne svojstvene energije su date izrazima:

$$\begin{aligned} E_{1,2} &= \frac{J_z}{2} \mp \eta \\ E_{4,3} &= -\frac{J_z}{2} \pm \xi \end{aligned} \quad (3.135)$$

Particiona funkcija ovog sistema je izrazom:

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr}(e^{\beta H}) = e^{-\beta(\frac{J_z}{2}-\eta)} + e^{-\beta(\frac{J_z}{2}+\eta)} + e^{-\beta(\frac{J_z}{2}-\xi)} + e^{-\beta(\frac{J_z}{2}+\xi)} \\ &= 2e^{\frac{\beta J_z}{2}} (\cosh(\beta\xi) + e^{-\beta J_z} \cosh(\beta\eta)) \end{aligned} \quad (3.136)$$

Koristeći spektralnu dekompoziciju matrice gustine [17], dobija se sledeća relacija za ρ

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{Z} \sum_{j=1}^4 e^{-\beta E_j} |\Psi_j\rangle \otimes \langle \Psi_j| \\ &= \frac{1}{Z} (e^{-\beta(\frac{J_z}{2}-\eta)} |\Psi_1\rangle \otimes \langle \Psi_1| + e^{-2\beta(\frac{J_z}{2}+\eta)} |\Psi_2\rangle \otimes \langle \Psi_2| + e^{\beta(-\frac{J_z}{2}-\xi)} |\Psi_3\rangle \otimes \langle \Psi_3| \\ &\quad + e^{\beta(\frac{J_z}{2}+\xi)} |\Psi_4\rangle \otimes \langle \Psi_4|) \end{aligned} \quad (3.137)$$

Nakon nalaženja odgovarajućih tensorskih proizvoda u prethodnoj relaciji, dobijamo konačni izraz za matricu gustine:

$$\rho = \begin{pmatrix} \mu_+ & 0 & 0 & \nu \\ 0 & w_1 & z & 0 \\ 0 & z^* & w_2 & 0 \\ \nu & 0 & 0 & \mu_- \end{pmatrix} \quad (3.138)$$

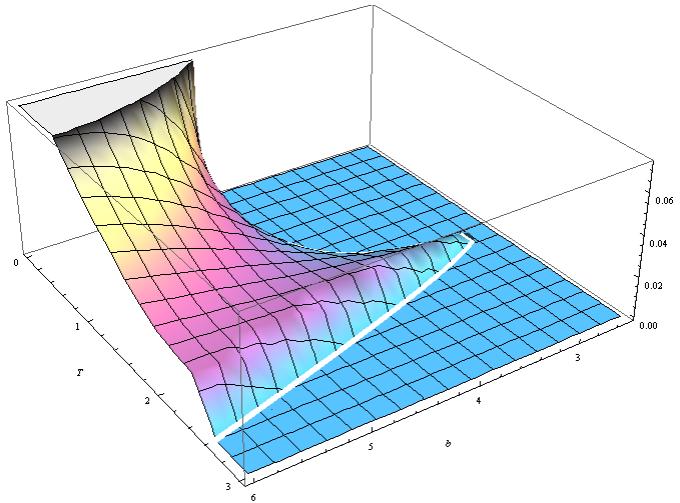
U ovoj matrici je, zbog konciznijeg zapisa, uvedena sledeća notacija [15]:

$$\begin{aligned} \mu_{\pm} &= \frac{e^{-\beta\frac{J_z}{2}}}{Z} \left(\cosh(\beta\eta) \mp \frac{B}{\eta} \sinh(\beta\eta) \right) \\ w_{1,2} &= \frac{e^{\beta\frac{J_z}{2}}}{Z} \left(\cosh(\beta\xi) \mp \frac{b}{\eta} \sinh(\beta\xi) \right) \\ \nu &= -\frac{J\gamma e^{-\beta\frac{J_z}{2}}}{Z\eta} \sinh(\beta\eta) \\ z &= -\frac{(J+iJ_zD)e^{\beta\frac{J_z}{2}}}{Z\xi} \sinh(\beta\xi) \end{aligned} \quad (3.139)$$

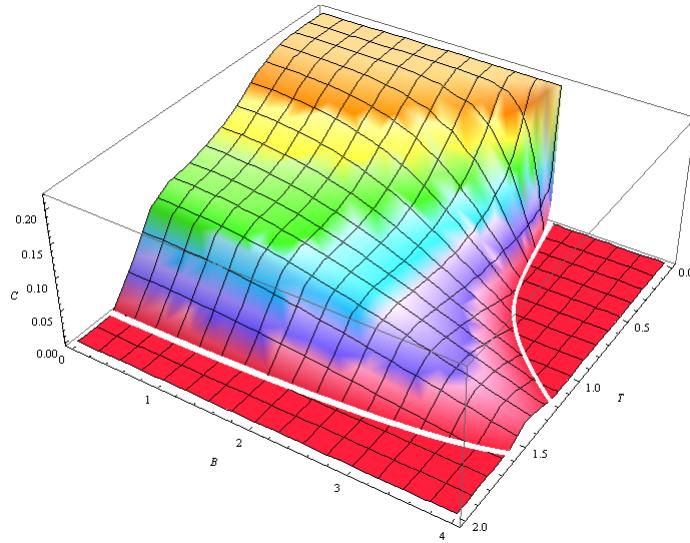
U cilju ispitivanja konkurentnosti ovog sistema [25], određena je neophodna matrica $R = \rho S \rho^* S$, gde je sa S označena matrica $S = \sigma^y \otimes \sigma^y$. Koreni svojstvenih vrednosti ove matrice su:

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= |\sqrt{w_1 w_2} \pm |z|| \\ \lambda_{3,4} &= |\sqrt{\mu_1 \mu_2} \mp \nu| \end{aligned} \quad (3.140)$$

Bez gubljenja na opštosti, možemo pretpostaviti da je $J > 0$ i $\gamma > 0$, sve dok je formula za konkurentnost sistema invarijantna na zamenu $J \rightarrow -J$ i $\gamma \rightarrow -\gamma$ [15]. Analiziranjem specijalnog slučaja kada je $D = 0$ dobijamo rezultate kao što je prikazano u referenci [27]. Kako sada u analizu uključujemo i polje, kao i parametar nehomogenosti polja, od interesa nam je da ispitamo kako ovi parametri utiču na entanglement sistema [15].



Slika 3.3.2 - Konkurentnost u funkciji temperature T i parametra nehomogenosti b za vrednosti parametara $J = 1, J_z = 0.5, B = 5, D = 3, \gamma = 0.3$



Slika 3.3.3 - Konkurentnost u funkciji temperature T i jačine magnetnog polja B za vrednosti parametara $J = 1, J_z = 0.5, b = 2, D = 3, \gamma = 0.3$

Prema slikama 3.3.2 i 3.3.3 možemo zaključiti da kako parametar nehomogenosti, tako i jačina magnetnog polja mogu biti kontrolni parametri entanglementa sistema. Naravno, za očekivati je bilo da i u ovom slučaju konkurentnost opada sa porastom temperature. Takođe, ona opada sa porastom jačine magnetnog polja, ali raste sa porastom parametra nehomogenosti polja. Naravno, ova tri parametra (T, B, b) su parametri koji se eksperimentalno mogu menjati, dok smo već na samom početku naglasili da je kontrola entanglementa pomoću izmenskih integrala gotovo nemoguća, jer je tim parametrima teško upravljati u eksperimentalnim uslovima. Kontrola entanglementa od strane izmenske interakcije je čisto teorijskog karaktera.

4 Termodinamička analiza dvokubitnog Hajzenbergovog modela

U ovom delu rada, analiziraćemo termodinamičke aspekte dvokubitnog Hajzenbergovog modela. Sračunaćemo pojedine termodinamičke funkcije poput: slobodne energije, entropije, unutrašnje energije, potom nacrtati njihove grafičke zavisnosti od temperature. Svakako, kad u priču budemo ubacili polje, tada možemo naći i srednju vrednost z - komponente spina, koja će samo u prisustvu polja biti različita od nule. Pomoću nje, možemo dalje naći magnetnu susceptibilnost ovako definisanog sistema. Centralni deo ovog poglavlja zauzimaće traženje termodinamičke i entanglirane entropije, kao i prikaz njihove grafičke zavisnosti od temperature, u cilju uočavanja postojanja kvalitativnih i kvantitativnih karakteristika ove dve vrste entropije.

4.1 Termodinamička analiza "XXZ" modela

4.1.1 "XXZ" model sa interakcionim parametrom D_x

Hamiltonian ovog modela definisan je relacijom (3.7), partiona funkcija relacijom (3.27), a matrica gustine relacijom (3.30). Pomoću ovih parametara, potražićemo adekvatne termodinamičke funkcije. Prvo tražimo srednju vrednost z - komponente spina. Za očekivati je da van magnetnog polja ova veličina bude jednaka nuli. Zaista:

$$S_1^z = S_1^z \otimes 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

$$\rho S_1^z = \frac{1}{2Z} \begin{pmatrix} \mu_+ & -\xi & \xi & \mu_- \\ \xi & \nu_+ & \nu_- & -\xi \\ -\xi & \nu_- & \nu_+ & \xi \\ \mu_- & \xi & -\xi & \mu_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_+ & -\xi & -\xi & -\mu_- \\ \xi & \nu_+ & -\nu_- & \xi \\ -\xi & \nu_- & -\nu_+ & -\xi \\ \mu_- & \xi & \xi & -\mu_+ \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

$$\langle S_1^z \rangle = Tr(\rho S_1^z) = Tr \left(\frac{1}{2Z} \begin{pmatrix} \mu_+ & -\xi & -\xi & -\mu_- \\ \xi & \nu_+ & -\nu_- & \xi \\ -\xi & \nu_- & -\nu_+ & -\xi \\ \mu_- & \xi & \xi & -\mu_+ \end{pmatrix} \right) = 0 \quad (4.3)$$

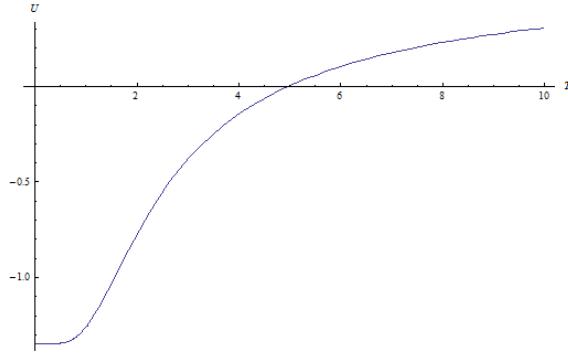
direktnim računom potvrdili smo tvrdnju da je srednja vrednost z - komponente spina, u slučaju isključenog magnetnog polja, jednaka nuli.

Unutrašnja energija sistema:

$$U = \langle H \rangle = Tr(\rho H) = \frac{1}{2Z} \begin{pmatrix} \mu_+ & -\xi & \xi & \mu_- \\ \xi & \nu_+ & \nu_- & -\xi \\ -\xi & \nu_- & \nu_+ & \xi \\ \mu_- & \xi & -\xi & \mu_+ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_z & iD_x & -iD_x & 0 \\ -iD_x & -J_z & 2J & iD_x \\ iD_x & 2J & -J_z & -iD_x \\ 0 & -iD_x & iD_x & J_z \end{pmatrix} \quad (4.4)$$

Nakon množenja matrica i traženja traga novodobijene matrice, izraz za unutrašnju energiju je:

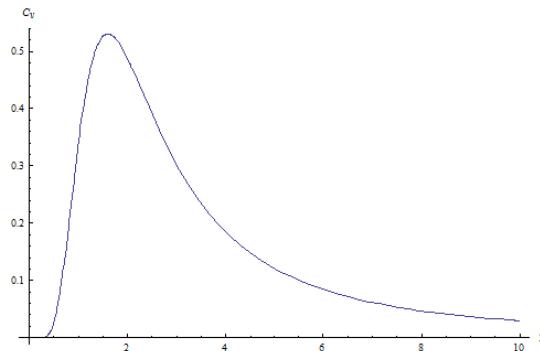
$$U = \frac{1}{Z} (\mu_+ J_z + 4i\xi D_x - J_z \nu_+ + 4J\nu_-) \quad (4.5)$$



Slika 4.1.1.1 - Funkcionalna zavisnost unutrašnje energije sistema od temperature, za parametre $J = 1$, $J_z = 0.2$, $D_x = 1$

Specifični topotni kapacitet dobijamo ukoliko potražimo parcijalni izvod unutrašnje energije po temperaturi:

$$c_v = \frac{\partial U}{\partial T} \quad (4.6)$$

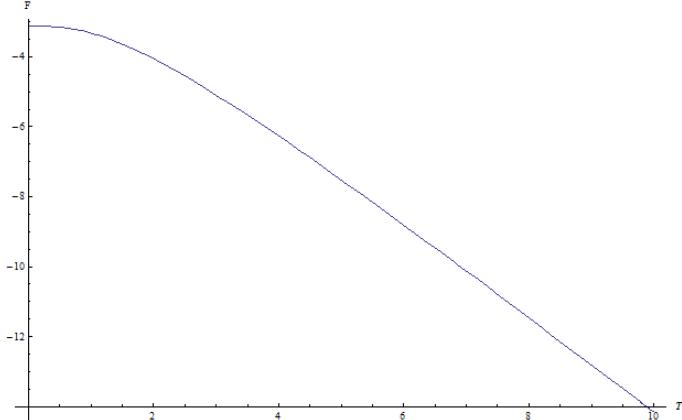


Slika 4.1.1.2 - Funkcionalna zavisnost specifičnog topotnog kapaciteta od temperature, za parametre $J = 1$, $J_z = 0.2$, $D_x = 1$

Sa grafika je interesantno uočiti da je temperatura faznog prelaza iz antiferomagnetne u paramagnetnu fazu (Nelova temperatura) ovog sistema procenjena na $T_N \approx 1.5K$, dok je kritična temperatura na kojoj se dešava kvantni fazni prelaz procenjena na $T_C \approx 4K$, što je približno 62.5% viša temperatura od Nelove. To sugerije na činjenicu da čak iako povisimo temperaturu sistema, toliko da se magnetizacija svede na nulu i nastane paramagnetsko okruženje, temperatura još uvek nije dovoljna kako bi se sistem preveo u neentanglirano stanje. Svakako, govorimo o vrlo niskim eksperimentalno dostupnim temperaturama, ali svakako je od značaja istaći ovo svojstvo sistema.

Sledeća bitna termodinamička veličina je slobodna energija sistema:

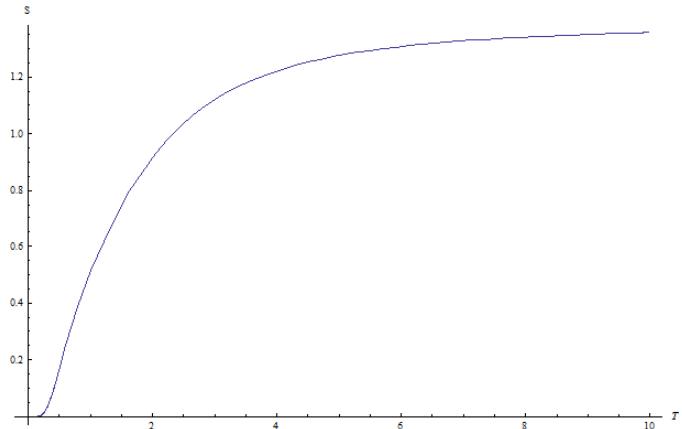
$$F = -k_B T \ln(Z) = -k_B T \left(\ln(4) + \ln \left(\cosh \left(\frac{J - J_z}{k_B T} \right) \cosh \left(\frac{w}{k_B T} \right) \right) \right) \quad (4.7)$$



Slika 4.1.1.3 - Funkcionalna zavisnost slobodne energije od temperature, za parametre
 $J = 1, J_z = 0.2, D_x = 1$

Termodinamička entropija sistema:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\partial F}{\partial T} = k_B \ln(4) + k_B \ln \left(\cosh \left(\frac{J - J_z}{k_B T} \right) \cosh \left(\frac{w}{k_B T} \right) \right) - \frac{J - J_z}{T} \tanh \left(\frac{J - J_z}{T} \right) \\ &\quad - \frac{w}{T} \tanh \left(\frac{w}{k_B T} \right) \end{aligned} \quad (4.8)$$



Slika 4.1.1.4 - Funkcionalna zavisnost entropije sistema od temperature, za parametre
 $J = 1, J_z = 0.2, D_x = 1$

Sa slike 4.1.1.4 uočavamo tipično ponašanje entropije u funkciji temperature. Vidimo da se ovaj grafik (do na konstantu) slaže sa onim koji predviđa definicija Fon Nojmanove entropije. Što se tiče XXZ modela sa D_y parametrom, dobijaju se identični rezultati, te prelazimo odmah na analizu XXZ modela sa D_z interakcijom.

4.1.2 "XXZ" model sa interakcionim parametrom D_z

Hamiltonian ovog modela definisan je relacijom (3.38), particiona funkcija relacijom (3.54), a matrica gustine relacijom (3.56). Prva veličina koju želimo izračunati je srednja

vrednost z - komponente spina $\langle S^z \rangle$.

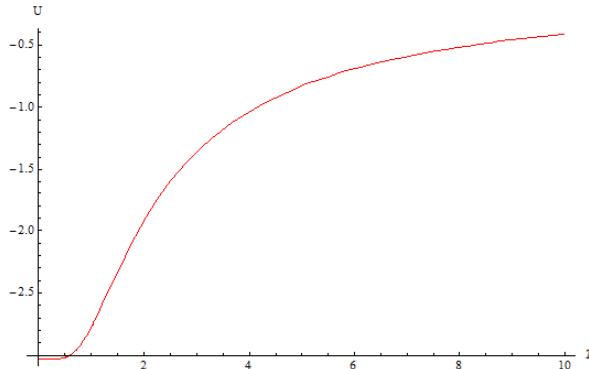
$$\begin{aligned} \langle S^z \rangle &= Tr(\rho S^z) = Tr \left(\frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-\beta J_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & ve^{i\theta} & 0 \\ 0 & ve^{-i\theta} & u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-\beta J_z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \\ &= Tr \left(\frac{1}{Z} \begin{pmatrix} e^{-\beta J_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & u & -ve^{i\theta} & 0 \\ 0 & ve^{-i\theta} & -u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-\beta J_z} \end{pmatrix} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Unutrašnja energija sistema:

$$\begin{aligned} U &= \langle H \rangle = Tr(\rho H) \\ &= Tr \left(\frac{1}{Z} \begin{pmatrix} J_z e^{-\beta J_z} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -u J_z + 2v e^{i\theta} (J - i D_z) & 2u(J + i D_z) - J_z v e^{i\theta} & 0 \\ 0 & -J_z v e^{-i\theta} + 2u(J - i D_z) & 2v e^{-i\theta} (J + i D_z) - J_z u & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_z e^{-\beta J_z} \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

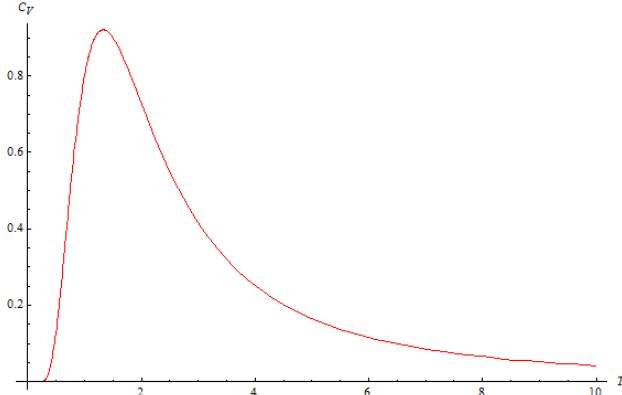
Nakon računanja traga gornjeg izraza, elementarnijim sređivanjem dolazimo do relacije za unutrašnju energiju:

$$U = \frac{2}{Z} (J_z e^{-\beta J_z} - u J_z + 2v(J \cos(\theta) + D_z \sin(\theta))) \quad (4.10)$$



Slika 4.1.2.1 - Funkcionalna zavisnost unutrašnje energije sistema od temperature, za parametre $J = 1$, $J_z = 0.2$, $D_z = 1$

Specifični toplotni kapacitet dobijamo tako što tražimo parcijalni izvod unutrašnje energije po temperaturi. Kako je izraz izuzetno dugačak, neće biti prikazan u radu, već je ovaj izvod odraden na računaru i potražena je funkcionalna zavisnost specifičnog toplotnog kapaciteta od temperature.

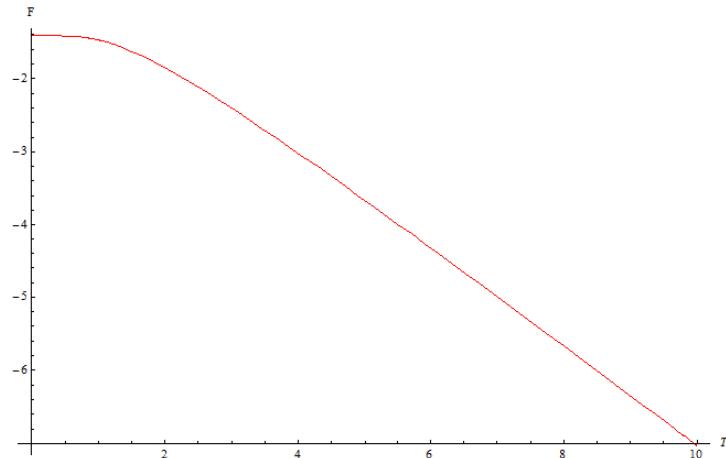


Slika 4.1.2.2 - Funkcionalna zavisnost specifičnog toplotnog kapaciteta od temperature, za parametre $J = 1$, $J_z = 0.2$, $D_z = 1$

Kritična temperatura faznog prelaza očitana sa gornjeg grafika (Nelova temperatura) procenjena je na $T_N \approx 1.35K$. Kritična temperatura entanglementa ovog sistema za iste parametre procenjena je na $T_C \approx 2.6K$, što je približno 50% viša temperatura od Nelove. Ovde se javlja, kao i kod "XXZ" modela sa $D_{x,y}$ interakcijom situacija da iako se izvrši fazni prelaz u paramagnetsku fazu, ovaj magnetnik zadržava svojstvo entangliranih stanja.

Slobodna energija sistema:

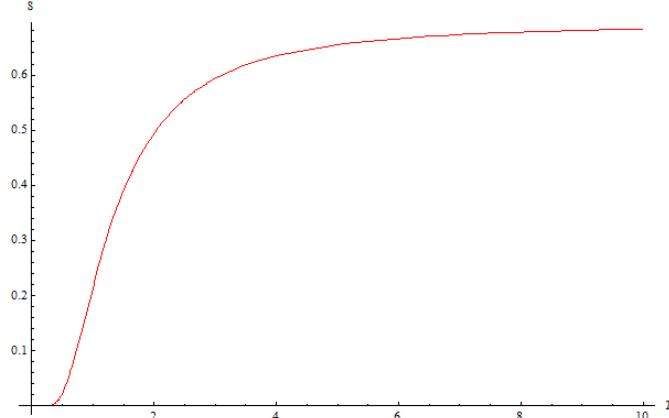
$$F = -k_B T \ln(Z) = -k_B T (\ln(2) - k_B T \ln \left(\cosh \left(\frac{2w}{k_B T} \right) \right)) \quad (4.11)$$



Slika 4.1.2.3 - Funkcionalna zavisnost slobodne energije sistema od temperature, za parametre $J = 1$, $J_z = 0.2$, $D_z = 1$

Termodinamička entropija sistema definisana je izrazom:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = k_B \left(\ln(2) + \ln \left(\cosh \left(\frac{2w}{k_B T} \right) \right) \right) - \frac{w}{T} \tanh \left(\frac{w}{k_B T} \right) \quad (4.12)$$



Slika 4.1.2.4 - Funkcionalna zavisnost entropije sistema od temperature, za parametre
 $J = 1, J_z = 0.2, D_z = 1$

Takođe, vidimo tipično ponašanje koje se dobija ukoliko bi se nacrtao grafik funkcije entropije prema definiciji Fon Nojmana. Svakako, to je i za očekivati, jer je entropija fizička veličina definisana do na konstantu.

4.2 Termodinamička analiza "XYZ" modela

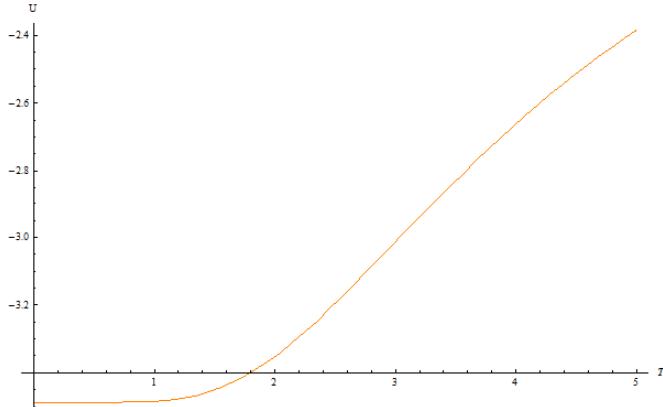
4.2.1 "XYZ" model sa interakcionim parametrom D_x

Hamiltonijan ovakve postavke modela dat je izrazom (3.62), particiona funkcija opisana je relacijom (3.77) a matrica gustine data je izrazom (3.79). Najpre tražimo srednju vrednost z - komponente spina $\langle S^z \rangle$

$$\begin{aligned}
 \langle S^z \rangle &= Tr(\rho S_z) = Tr \left(\begin{pmatrix} m_1 & q & q^* & m_2 \\ q^* & n_1 & n_2 & q \\ q & n_2 & n_1 & q^* \\ m_2 & q^* & q & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right) \\
 &= Tr \left(\begin{pmatrix} m_1 & q & -q^* & -m_2 \\ q^* & n_1 & -n_2 & -q \\ q & n_2 & -n_1 & -q^* \\ m_2 & q^* & -q & -m_1 \end{pmatrix} \right) = 0
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

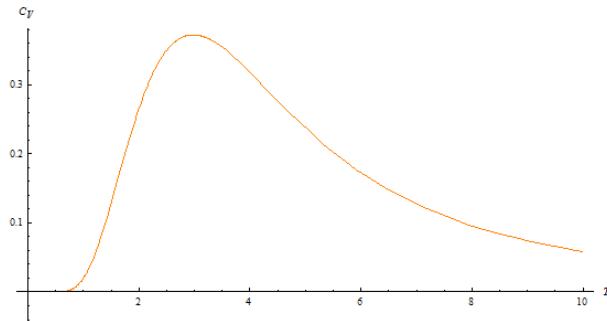
Unutrašnja energija sistema:

$$U = \langle H \rangle = 2(J_z(m_1 - n_1) + 2iD_x(q^* - q) + m_2(J_x - J_y) + n_2(J_x + J_y)) \tag{4.14}$$



Slika 4.2.1.1 - Funkcionalna zavisnost unutrašnje energije sistema od temperature, za parametre $J_x = 1$, $J_y = 0.5$, $J_z = 0.2$, $D_x = 3$

Specifični topotni kapacitet dobijamo tako što vršimo diferenciranje unutrašnje energije po parametru temperature.

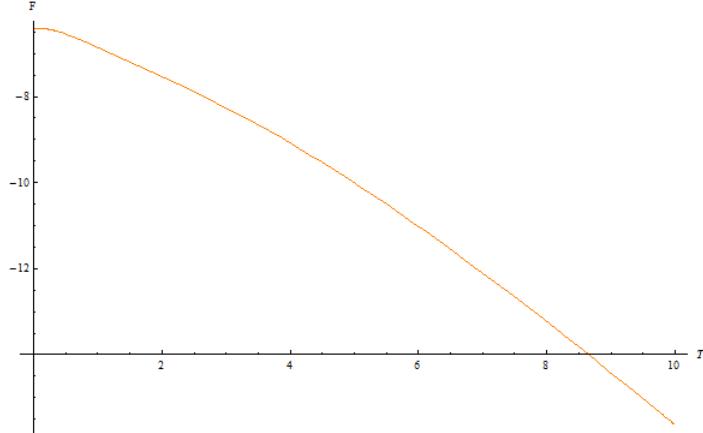


Slika 4.2.1.2 - Funkcionalna zavisnost specifičnog topotnog kapaciteta od temperature, za parametre $J_x = 1$, $J_y = 0.5$, $J_z = 0.2$, $D_x = 3$

Fazni prelaz iz antiferomagnetske u paramagnetsku fazu u ovom sistemu uočava se na $T_N \approx 3.2K$, dok je kritična temperatura entanglementa za iste parametre procenjena na $T_C \approx 8.2K$. Poredeći ove dve temperature, entanglirana temperatura je viša za oko 60%, a ovu situaciju smo već imali i u prethodnim situacijama, te sledi isto objašnjenje.

Slobodna energija sistema:

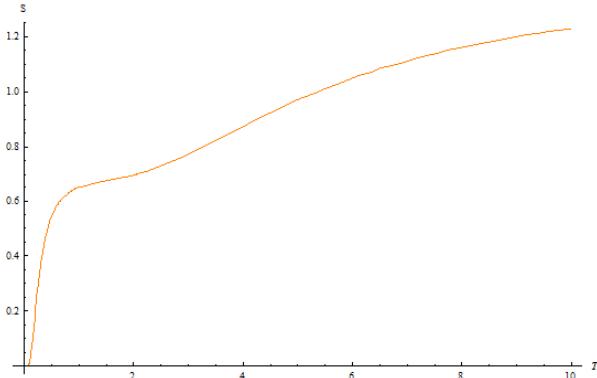
$$F = -k_B T \ln(z) = -k_B T \left(\ln(4) + \ln \left(\cosh \left(\frac{J_y - J_z}{k_B T} \right) \cosh \left(\frac{w}{k_B T} \right) \right) \right) \quad (4.15)$$



Slika 4.2.1.3 - Funkcionalna zavisnost slobodne energije sistema od temperature, za parametre $J_x = 1, J_y = 0.5, J_z = 0.2, D_x = 3$

Termodinamička entropija:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\partial F}{\partial T} = k_B \left(\ln(4) + \ln \left(\cosh \left(\frac{J_y - J_z}{k_B T} \right) \cosh \left(\frac{w}{k_B T} \right) \right) \right) \\ &+ \frac{J_y - J_z}{k_B T} \tanh \left(\frac{J_y - J_z}{k_B T} \right) + \frac{w}{k_B T} \tanh \left(\frac{w}{k_B T} \right) \end{aligned} \quad (4.16)$$



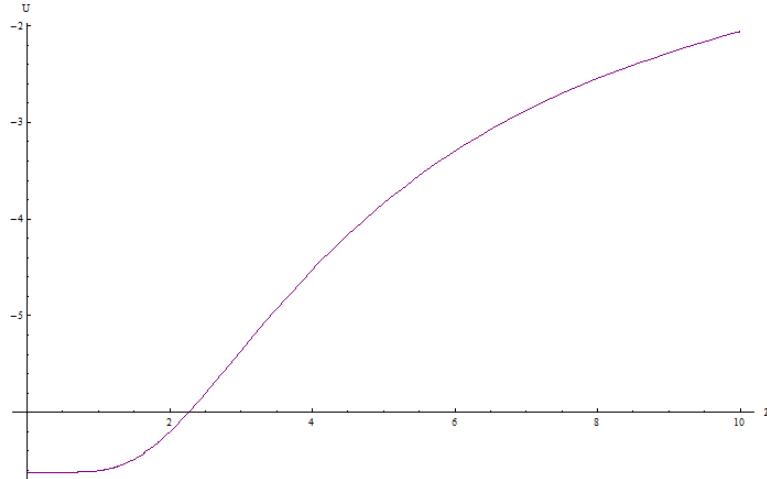
Slika 4.2.1.4 - Funkcionalna zavisnost entropije sistema od temperature, za parametre $J_x = 1, J_y = 0.5, J_z = 0.2, D_x = 3$

I na ovom grafiku se uočava tipično ponašanje definisano Fon Nojmanovom definicijom entropije.

4.2.2 "XYZ" model sa interakcionim parametrom D_y

Hamiltonian XYZ modela sa DM interakcionim parametrom D_y dat je izrazom (3.86). Particiona funkcija definisana je obrascem (3.93), dok je matrica gustine data izrazom (3.95). Kao i u svim prethodnim slučajevima, ispostavlja se da je srednja vrednost z -komponente spina jednaka nuli. Ova srednja vrednost biće različita od nule u slučaju kada u analizu modela uključimo spoljašnje magnetno polje. Unutrašnja energija definisana je izrazom:

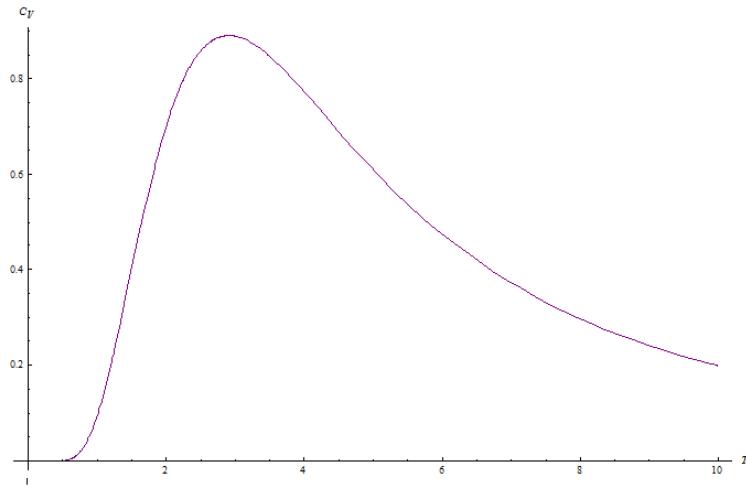
$$U = Tr(\rho H) = 2m_1 J_z - 8qD_y + 2m_2(J_x - J_y) + 2n_2(J_x + J_y) - 2n_1 J_z \quad (4.17)$$



Slika 4.2.2.1 - Funkcionalna zavisnost unutrašnje energije sistema od temperature, za parametre $J_x = 1$, $J_y = 0.5$ $J_z = 0.2$, $D_y = 3$

Specifični topotni kapacitet:

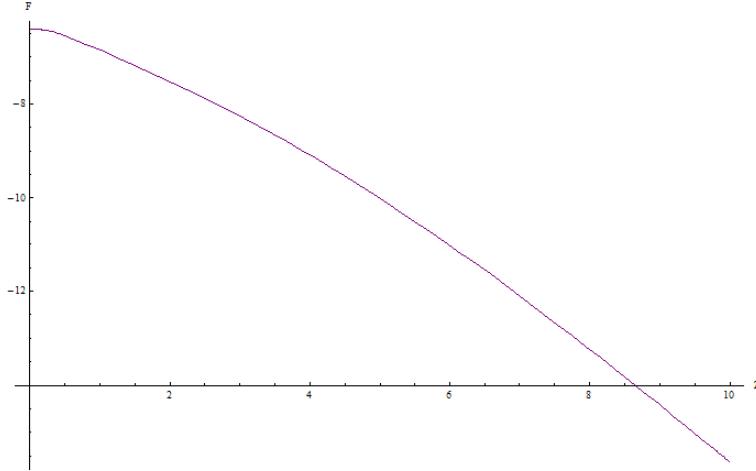
$$C_V = \frac{\partial U}{\partial T} \quad (4.18)$$



Slika 4.2.2.2 - Funkcionalna zavisnost specifičnog topotnog kapaciteta od temperature, za parametre $J_x = 1$, $J_y = 0.5$ $J_z = 0.2$, $D_y = 3$

Sa grafika funkcionalne zavisnosti specifičnog topotnog kapaciteta od temperature procenjujemo Nelovu temperaturu na $T_N \approx 3K$, dok je za iste parametre kritična temperatura entanglementa procenjena na $T_C \approx 7.7K$. Ukoliko uporedimo ove dve temperature, zaključujemo da je kritična temperatura entanglementa oko 61% viša od Nelove. Ovo je situacija koja je pratila ovaj rad i do sada, te isti komentar važi kao i za prethodne situacije. Slobodna energija sistema:

$$F = -k_B T \ln(Z) = -k_B T (\ln(4) + \ln(\cosh(\beta(J_x - J_z))) \cosh(\beta w)) \quad (4.19)$$

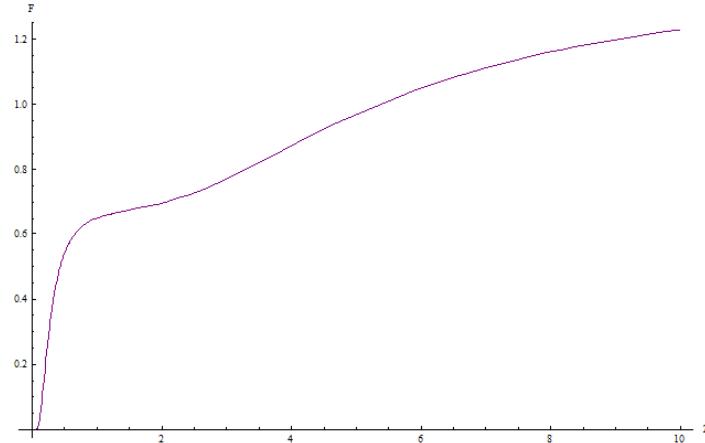


Slika 4.2.2.3 - Funkcionalna zavisnost slobodne energije sistema od temperature, za parametre $J_x = 1, J_y = 0.5, J_z = 0.2, D_y = 3$

Termodinamička entropija:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} \quad (4.20)$$

$$= k_B(\ln(4) + \ln(\cosh(\beta(J_x - J_z))) \cosh(\beta w)) + \frac{J_x - J_y}{k_B T} \tanh(\beta(J_x - z)) + \frac{w}{k_B T} \tanh(\beta w) \quad (4.21)$$



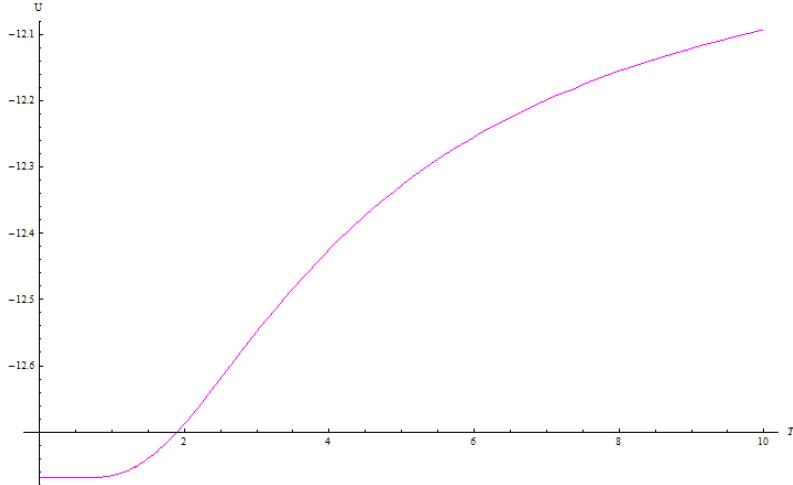
Slika 4.2.2.4 - Funkcionalna zavisnost entropije sistema od temperature, za parametre $J_x = 1, J_y = 0.5, J_z = 0.2, D_y = 3$

Potvrđena je funkcionalna zavisnost Fon Nojmanove definicije entropije od temperature. Naravno, rezultat je definisan do na konstantu, kako i jeste definisana sama entropija.

4.2.3 "XYZ" model sa interakcionim parametrom D_z

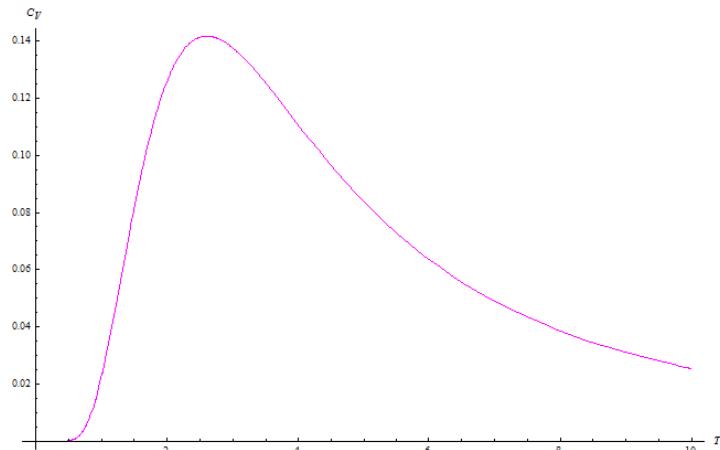
Hamiltonian ovog modela opisan je relacijom (3.100), particiona funkcija data je jednačinom (3.106) i matrica gustine zadana je relacijom (3.108). Unutrašnja energija sistema:

$$U = Tr(\rho H) = 2mJ_z + 2k(J_x - J_y) - 2pJ_z - n(J_x + J_y)(\chi + \chi^*) + 2iD_z(\chi - \chi^*) \quad (4.22)$$



Slika 4.2.3.1 - Funkcionalna zavisnost unutrašnje energije sistema od temperature, za parametre $J_x = 1, J_y = 0.5, J_z = 0.2, D_z = 3$

Specifični topotni kapacitet dobijamo ukoliko izvršimo izvod unutrašnje energije po temperaturi.

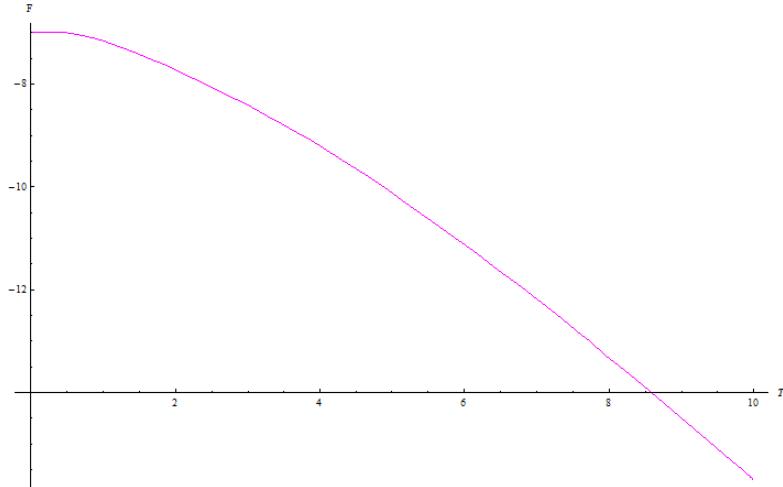


Slika 4.2.3.2 - Funkcionalna zavisnost specifičnog topotnog kapaciteta od temperature, za parametre $J_x = 1, J_y = 0.5, J_z = 0.2, D_z = 3$

Kod Hajzenbergovog "XYZ" modela sa interakcionim parametrom D_z procenjujemo Nelovu temperaturu na $T_N \approx 2.7K$, dok je za iste parametre kritična temperatura entanglementa procenjena na $T_C \approx 7.4K$. Kao što možemo uočiti, kritična temperatura entanglementa viša je za oko 63%, kao što je dobijeno i u prethodnim situacijama, što će reći da čak iako se naruši antiferomagnetsko uređenje kristalne rešetke, sistem će ostati u entangliranom, odnosno spletrenom stanju, sve do temperature od $7.4K$.

Slobodna energija sistema:

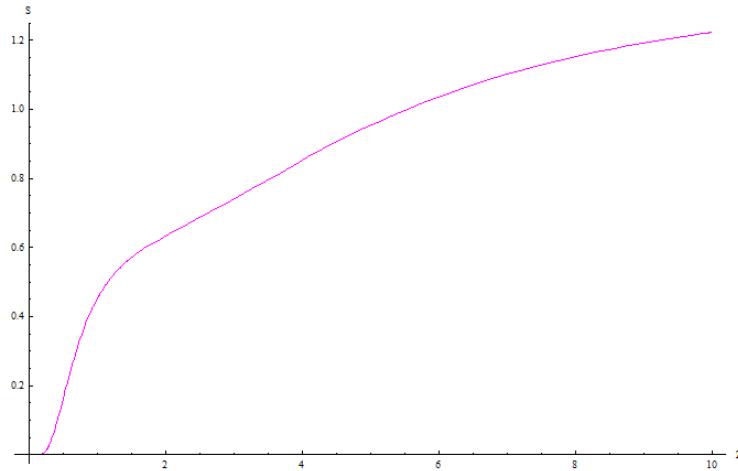
$$F = -k_B T \ln(Z) = -k_B T (\ln(4) + \ln(\cosh(\beta(J_x - J_y)) \cosh(\beta w))) \quad (4.23)$$



Slika 4.2.3.3 - Funkcionalna zavisnost slobodne energije sistema od temperature, za parametre $J_x = 1, J_y = 0.5, J_z = 0.2, D_z = 3$

Entropiju dobijamo tako što tražimo parcijalni izvod slobodne energije po temperaturi, sa predznakom minus

$$\begin{aligned} S &= -\frac{\partial F}{\partial T} = k_B(\ln(4) + \ln(\cosh(\beta(J_x - J_y)) \cosh(\beta w))) - \frac{J_x - J_y}{T} \tanh(\beta(J_x - J_y)) \\ &\quad - \frac{w}{T} \tanh(\beta w) \end{aligned} \quad (4.24)$$



Slika 4.2.3.4 - Funkcionalna zavisnost entropije sistema od temperature, za parametre $J_x = 1, J_y = 0.5, J_z = 0.2, D_z = 3$

Kao što se može videti, i u ovom slučaju dobijena je funkcionalna zavisnost ista ona koju predviđa i Fon Nojmanova definicija entropije.

4.2.4 "XYZ" model sa interakcionim parametrom D_z i spoljašnjim nehomogenim magnetnim poljem

Hamiltonijan "XYZ" modela sa interakcionim parametrom D_z i nehomogenim spoljašnjim magnetnim poljem, okarakterisanim jačinom magnetnog polja B i parametrom nehomogenosti

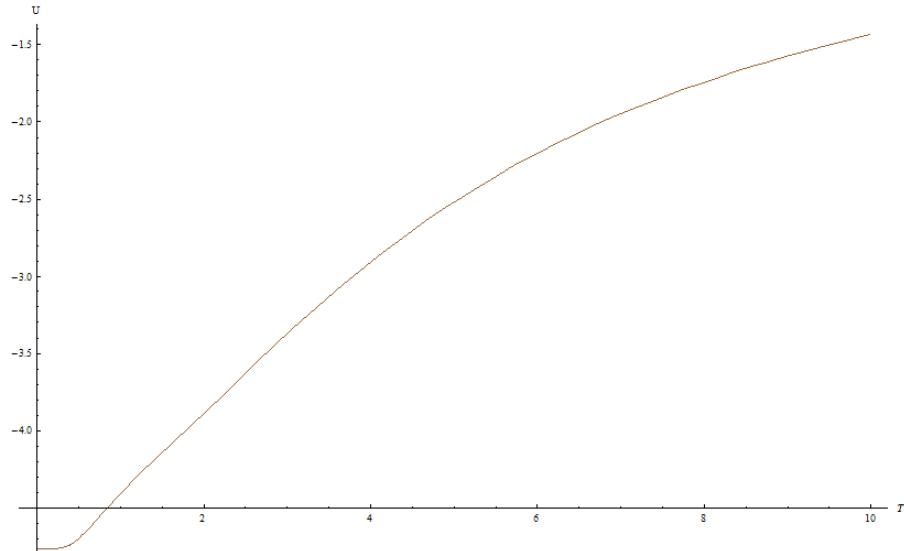
b dat je relacijom (3.132). Particiona funkcija ovog sistema data je relacijom (3.136), dok je matrica gustine opisana izrazom (3.138). U ovom momentu zgodno je potražiti srednju vrednost z - komponente spina, jer smo više puta naglasili da očekujemo da će ista biti različita od nule kada je polje uključeno.

$$\langle S_z \rangle = \text{Tr}(\rho S_z) = (\mu_+ - \mu_-) - (w_1 - w_2) \quad (4.25)$$

Dakle, direktnim proračunom je potvrđena pretpostavka da će ova srednja vrednost biti različita od nule kada je u sistemu prisutno spoljašnje magnetno polje. Isto tako, lako se možemo uveriti da ukoliko u relaciju za $\langle S_z \rangle$ uvrstimo $B = b = 0$ i srednja vrednost će biti jednaka nuli, što je i za očekivati.

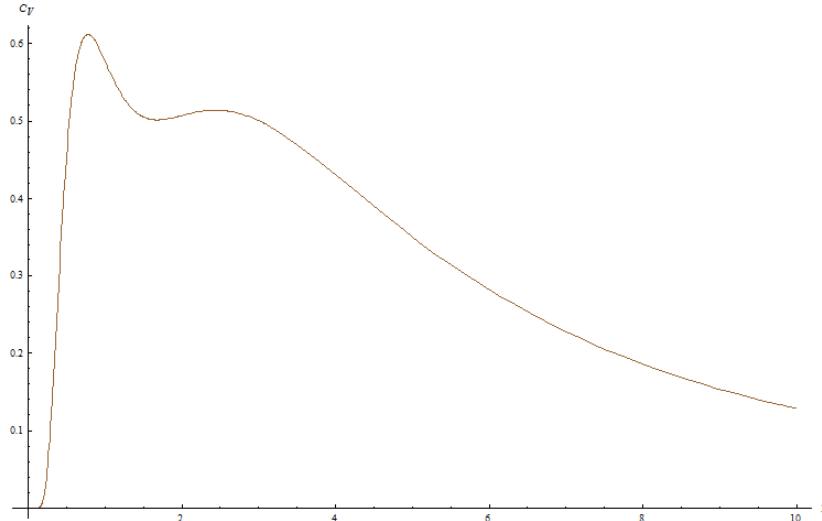
Unutrašnja energija sistema

$$\begin{aligned} U &= \text{Tr}(\rho H) \\ &= \mu_+ \left(\frac{J_z}{2} + B \right) + 2\nu J \gamma - \frac{J_z}{2}(w_1 + w_2) + b(w_1 - w_2) + J(z + z^*) + i J_z D(z^* - z) \\ &+ \mu_- \left(\frac{J_z}{2} - B \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$



Slika 4.2.4.1 - Funkcionalna zavisnost unutrašnje energije sistema od temperature, za parametre $J = 1$, $\gamma = 0.3$, $J_z = 0.5$, $B = 5$, $b = 2$ i $D_z = 3$

Specifični topotni kapacitet opisanog sistema u spoljašnjem magnetnom polju sračunat je putem računara i prikazujemo njegovu funkcionalnu zavisnost od temperature na slici ispod.

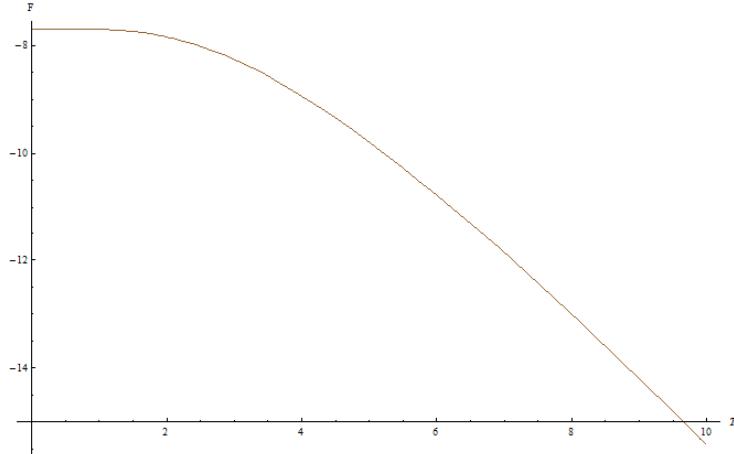


Slika 4.2.4.2 - Funkcionalna zavisnost specifičnog topotnog kapaciteta od temperature, za parametre $J = 1$, $\gamma = 0.3$ $J_z = 0.5$, $B = 5$, $b = 2$ i $D_z = 3$

Ono što je novina u odnosu na dosadašnje grafičke zavisnosti specifičnog topotnog kapaciteta od temperature svakako je ta što se pojavljuju dva pika na slici 4.2.4.2. Postojanje dva pika pripisujemo tzv. Kagoma klasterima [31] i ova pojava se javlja u velikom broju antiferomagnetskih jedinjenja. Naime, pik na nižoj temperaturi posledica je nemagnetskih ekscitacija koje se javljaju oko samog energijskog gepa [31]. Naravno, bitno je napomenuti da prisustvo Čalošinski - Morija interakcije ne menja opštu strukturu značajno, već unosi nezнатну promenu u temperaturskoj zavisnosti topotnog kapaciteta [31]. Za nas je bitan drugi pik, koji odgovara faznom prelazu sistema iz antiferomagnetskog u paramagnetsko uređenje [31]. Nelova temperatura ovog prelaza iznosi $T_N \approx 2.5K$, dok entanglirana temperatura za ovaj slučaj iznosi $T_C \approx 1.7K$. Po svemu sudeći, ovde dobijamo obrnutu situaciju u odnosu na onu koju smo imali do sada. Naime, kritična temperatura na kojoj isčezava antiferomagnetsko uređenje je viša za oko 32%. Iz ovoga možemo zaključiti da će prvo sistem preći u neentanglirano stanje, pa tek povišenjem temperature do otp. $2.5K$ dolazi i do rušenja antiferomagnetskog uređenja. Ono što je bitno istaći je da se situacija bitno obrnula ukoliko u analizu uključimo i magnetno polje. Naravno, temperature na kojima se dešavaju ovi fazni prelazi izuzetno su niske, ali svakako ovaj model predstavlja najrealniji eksperimentalni model, zato što magnetnim poljem možemo lako kontrolisati entanglement, što se ne može reći za situaciju u kojoj je kontrolni parametar entanglementa samo izmenska interakcija.

Slobodna energija sistema:

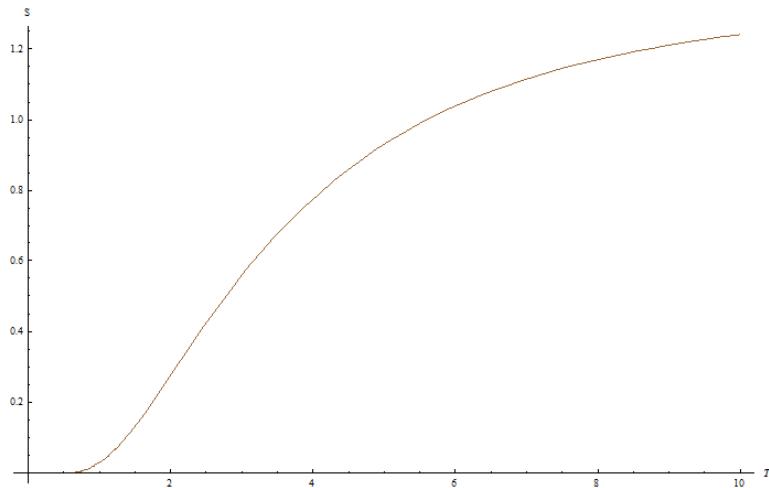
$$F = -k_B T \ln(Z) = -k_B T (\ln(4) + \ln(\cos(\beta\xi) \cos(\beta\eta))) \quad (4.27)$$



Slika 4.2.4.3 - Funkcionalna zavisnost slobodne energije sistema od temperature, za parametre $J = 1$, $\gamma = 0.3$ $J_z = 0.5$, $B = 5$, $b = 2$ i $D_z = 3$

Entropija sistema:

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = k_B(\ln(4) + \ln(\cos(\beta\xi) \cos(\beta\eta)) - \frac{\xi}{T} \tanh(\beta\xi) - \frac{\eta}{T} \tanh(\beta\eta)) \quad (4.28)$$



Slika 4.2.4.4 - Funkcionalna zavisnost entropije sistema od temperature, za parametre $J = 1$, $\gamma = 0.3$ $J_z = 0.5$, $B = 5$, $b = 2$ i $D_z = 3$

U analizi "XYZ" modela sa D_z interakcionim parametrom, a koji se nalazi u spoljašnjem nehomogenom magnetnom polju, dobijena je ista funkcionalna zavisnost entropije koju smo dobijali i dosad, a ona takođe potvrđuje Fon Nojmanovu funkcionalnu zavisnost entropije od temperature.

Zaključak

U ovom radu analiziran je dvokubitni anizotropni Hajzenbergov model. Rad smo koncipirali u četiri poglavlja. U prvom poglavlju opisan je kvantnomehanički alat i neophodni teorijski minimum koji je potreban kako bi se pratio dalji tok rada. Između ostalog, navode se kvantnomehanički postulati, definisan je pojam kubita koji nas prati do samog kraja rada i definisan je Belov bazis koji predstavlja bazu entangliranih stanja. Takođe, prvo poglavlje nas je uvelo detaljnije u sam pojam entanglementa, šta on predstavlja i odakle potiče. Kako bismo mogli uopšte pričati o ovoj temi, neophodno je što jasnije dati definiciju čistih i mešanih kvantnomehaničkih stanja, a odmah zatim definisati pojam matrice gustine. Matrica gustine ima izuzetno bitan značaj, jer ona sadrži veliki broj informacija o kvantnom sistemu, zajedno sa particionom funkcijom sistema. Naravno, kada pričamo o mešanim stanjima, bitan je i pojam redukovane matrice gustine, koja je takođe opisana u ovom poglavlju. U praktičnom delu rada, za meru entanglementa uzeta je fizička veličina konkurentnost, koja nam daje kvantitativni opis entanglementa, te je upoznavanje sa ovom fizičkom veličinom takođe obrađeno u prvom poglavlju rada.

Drugo poglavlje rada bazira se na modernoj grani savremene nauke, a to je kvantna informatika. Sama tematika kvantne informatike opisana je u uvodnom delu ovog poglavlja, a potom su definisane novine koje nosi ova disciplina poput: kloniranja kvantnih bitova, EPR eksperimenta, komuniciranje brže od brzine svetlosti, kao i kvantna teleportacija. Poslednja sekcija ovog poglavlja posvećuje se Belovoj nejednakosti koja jasno predviđa entanglement u kvantnim sistemima i definiše je kao nužnu posledicu važenja kvantnomehaničkih zakona.

Treće i četvrto poglavlje ovog rada predstavljaju praktične rezultate. U trećem poglavlju detaljno je analiziran entanglement u dvokubitnom anizotropnom Hajzenbergovom modelu, za različite vrednosti anizotropije i DM interakcionog parametra. Videli smo da parametri koji mogu kontrolisati entanglement su: DM interakcija, izmenska interakcija, jačina magnetnog polja, parametar nehomogenosti polja, i ništa manje bitna temperatura. Najbitniji za praksu je naravno model koji u sebi uključuje interakciju sa spoljašnjim magnetnim poljem, bilo homogenim, bilo nehomogenim. Ovde je realizovano nehomogeno polje, tako što je na jednom čvoru kristalne rešetke polje pojačano za vrednost parametra b , a na drugom je smanjeno za isti iznos.

Četvrto poglavlje je posvećeno termodinamičkoj analizi dvokubitnog Hajzenbergovog modela, sa različitim anizotropijama i DM interakcionim parametrima. U radu je gotovo svuda ispraćen trend da se prvo narušava magnetno uređenje antiferomagnetskog tipa, a tek nakon toga, daljim povišavanjem temperature i entanglement sistema. Jedino u slučaju kada sistem ima interakciju sa spoljašnjim magnetnim poljem, tada se javlja obrnuta situacija, gde magnetno uređenje ima višu kritičnu temperaturu faznog prelaza od kritične temperature entanglementa.

Ovaj rad nudi teorijski uvid u fizičko tumačenje entanglementa u sistemima kondenzovane materije. Povezanost ovog rada sa poljima istraživanja kvantne informatike je veoma bliska. Naime, u budućnosti, planirano je da Hajzenbergovi spinski lanci budu sistemi koji će se koristiti u fizičkoj realizaciji kvantnog entanglementa, te ovaj rad nudi detaljniju fizičku analizu i mogućnost realizacije entanglementa i njegove kontrole u ovakvim sistemima, te predstavlja koristan materijal za one koji planiraju da se bave tematikom kvantne infor-

matike, ili za ljudе koје саm поjam entanglementa i kvantne informatike zanima uopšte.

Reference

- [1] E. Schrödinger, Naturwissenschaften **23**, 807, 823, 844 (1935); (Schrödinger E, Proc. Am. Phil. Soc. 124, 323 (1980) Translated into English).
- [2] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete? Phys. Rev. **47**, 777 (1935).
- [3] J. S. Bell J. S. n the Einstein Podolsky Rosen paradox, Physics **1**, 195 (1964).
- [4] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, Experimental Tests of Realistic Local Theories via Bell's Theorem, Phys. Rev. Lett. **47**, 460 (1981).
- [5] A. Aspect, P. Grangier, and G. Roger, Experimental Test of Bell's Inequalities Using TimeVarying Analyzers, Phys. Rev. Lett. **49**, 1804 (1982).
- [6] P. Kwiat, K. Mattle, H. Weinfurter et. al., New High-Intensity Source of Polarization-Entangled Photon Pairs, Phys. Rev. Lett. **75**, 4337 (1995).
- [7] Michael A. Nielsen & Isaac L. Chuang, Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press 2010.
- [8] R. Feynman, Simulating Physics with Computers, Inter. Jour. Theor. Phys. **21**, 467-488 (1982).
- [9] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crepeau et. al., Teleporting an unknown quantum state via dual classical and Einstein-Podolsky-Rosen channels, Phys. Rev. Lett. **70**, 1895 (1993).
- [10] C. Macchiavello, G. M. Palma, Anton Zeilinger, Quantum Computation and Quantum Information Theory, World Scientific 2001.
- [11] H. Chung, The Study of Entangled States in Quantum Computation and Quantum Information Science: PhD thesis, arxiv: quant-ph/08.08.1546.
- [12] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki et.al., Quantum entanglement, arxiv:quant-ph/0702225.
- [13] L. Amico, R. Fazio, A. Osterloh et.al., Entanglement in many-body systems, Rev. Mod. Phys. **80**, 517-576 (2008).
- [14] D.C. Li, X.P. Wang, Z.L. Cao, Thermal entanglement in the anisotropic Heisenberg XXZ model with the Dzyaloshinskii Moriya interaction, J. Phys.: Condens. Matter **20**, 1-5 (2008).

- [15] F. Kheirandish, S. J. Akhtarshenas, H. Mohammadi, Effect of spin - orbit interaction on entanglement of two - qubit Heisenberg XYZ systems in an inhomogeneous magnetic field, *Physical Review A* **77**, 042309-1 - 042309-9 (2008).
- [16] D. Griffiths, *Introduction to Quantum Mechanics*, Prentice Hall, (1995).
- [17] V. Vedral, *Introduction to Quantum Information Science*, Oxford University Press, (2006).
- [18] A.S. Davydov, *Quantum Mechanics*, Oxford Pergamon Press, (1965).
- [19] Đ. Mušicki, B. Milić, *Matematičke osnove teorijske fizike*, Naučna knjiga Beograd, (1975).
- [20] M. Dugić, *Osnove kvantne informatike i kvantnog računanja*, Univerzitet u Kragujevcu, (2009).
- [21] B. Zwiebach, *Quantum Physics II Fall 2013*, MIT OpenCourseWare, (2013).
- [22] J. Gribbin, *In Search of Schrödinger's Cat*, Bantam Books, (1984).
- [23] M. Pantić, *Savremena teorijska fizika - kvantna i statistička fizika - koncept sa predavanja*, PMF Novi Sad, (2017).
- [24] L. Da-Chuang, C. Zhuo-Liang, Thermal Entanglement in the Anisotropic Heisenberg XYZ Model with Different Dzyaloshinskii Moriya Couplings, *CHIN. PHYS. LETT.* Vol. **26**, 020309-1 (2009).
- [25] K. Berrada, A. Chafik, H. Eleuch, Y. Hassouni, Concurrence in the framework of coherent states, *Quantum Information Processing* 2010 Vol. **9**, 14-24, (2009).
- [26] M. Kaku, *Parallel Worlds*, Doubleday, (2005).
- [27] G.H. Yang, W.B. Gao, L. Zhou, H.S. Song, The Entanglement in Anisotropic Heisenberg XYZ Chain with inhomogeneous magnetic field, arXiv:quant-ph/0602051
- [28] D. Lossa, D. P. DiVincenzo, Quantum Computation with Quantum Dots, arXiv:cond-mat/9701055
- [29] R. C. Ashoori, Electrons in artificial atomsm, *Nature* **379** (6564), 413-419, (1996).
- [30] M.A. Kastner, Artificial Atoms, *Physics Today* **46** (1), 2431, (1993.)
- [31] A. V. Syromyatnikov, S. V. Maleyev, Double peak specific heat feature in frustrated antiferromagnetic clusters, arXiv:cond-mat/0304572
- [32] Nanosys Quantum Dot Pioneers, Quantum Dots, <http://www.nanosysinc.com/what-we-do/quantum-dots/>, (2015).
- [33] https://en.wikipedia.org/wiki/Quantum_dot

Kratka biografija kandidata

Nemanja Micić je rođen 8.12.1993. u Zrenjaninu. Osnovne akademske studije fizike na Univerzitetu u Novom Sadu upisuje 2012. godine, koje u roku završava 26.9.2016. godine sa prosečnom ocenom 9.54. Iste godine upisuje master akademske studije fizike na istom univerzitetu, a opredeljuje se za užu naučnu oblast - Teorijska fizika kondenzovane materije. Sve ispite predviđene planom i programom polaže u roku sa prosečnom ocenom 10, čime stiče pravo na odbranu master rada. Tokom osnovnih i master studija dobitnik je stipendija Ministarstva prosvete, kao i Fonda za mlade talente "Dositej". Učesnik je brojnih manifestacija koje se bave promocijom i popularizacijom fizike kao nauke. Tokom master studija, Nemanja je bio učesnik Internacionalne konferencije studenata fizike ICPS, u Italiji, gde je izložio rad sa naslovom "*Applications of ac+dc driven Frenkel - Kontorova model*". U prethodnoj školskoj godini, bio je angažovan na radnom mestu profesora fizike u Gimnaziji "Jovan Jovanović Zmaj" u Novom Sadu, a nakon toga, pa i danas, angažovan je na mestu profesora fizike u nekoliko osnovnih škola u rodnom gradu.



**UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA**

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada: Master rad

VR

Autor: Nemanja Micić

AU

Mentor: prof. dr Milan Pantić

MN

Naslov rada: Kvantni entanglement u dvokubitnom anizotropnom Hajzenbergovom modelu

NR

Jezik publikacije: srpski (latinica)

JP

Jezik izvoda: srpski/engleski

JI

Zemlja publikovanja: Republika Srbija

ZP

Uže geografsko područje: Vojvodina

UGP

Godina: 2017.

GO

Izdavač: Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa: Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

MA

Fizički opis rada: 4 poglavlja/90 strana/34 reference/63 slike

FO

Naučna oblast: Fizika

NO

Naučna disciplina: Kvantna informatika, Teorijska fizika kondenzovane materije

ND

Predmetna odrednica/ ključne reči: Entanglement, konkurentnost, entropija

PO

UDK

Čuva se: Biblioteka departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu

ČU

Važna napomena: nema

VN

Izvod: U radu je izvršena teorijska analiza entanglementa u Hajzenbergovom dvokubitnom modelu frustriranim Đalošinski - Morija interakcijom. Analizirana je, između ostalog, fizička veličina konkurentnost, koja predstavlja kvantitativnu meru zamršenosti sistema. Rezultati koji su dobijeni u velikoj meri mogu pomoći u daljem razvitu kvantne informatike.

IZ

Datum prihvatanja teme od NN veća: Septembar, 2017.

DP

Datum odbrane: 27.9.2017.

DO

Članovi komisije:

KO

Mentor: prof. dr Milan Pantić, redovni profesor

Predsednik: prof. dr Slobodan Radošević, docent

Član: prof. dr Petar Mali, docent

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type: Monograph publication

DT

Type of record: Textual printed material

TR

Content code: Final paper

CC

Author: Nemanja Micić

AU

Mentor: Milan Pantić, Ph.D, Full professor

MN

Title: Quantum entanglement in Heisenberg two-qubit anisotropic model

TI

Language of text: Serbian (Latin)

LT

Language of abstract: English

LA

Country of publication: Republic of Serbia

CP

Locality of publication: Vojvodina

LP

Publication year: 2017.

PY

Publisher: Author's reprint

PU

Publication place: Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

PP

Physical description: 4 chapters/90 pages/34 references/63 pictures

PD

Scientific field: Physics

SF

Scientific discipline: Quantum Informatics, Theoretical condensed matter physics

SD

Subject/Key words: Entanglement, concurrence, entropy

SKW

UDK

Holding data: Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4

HD

Note: none

N

Abstract: In this paper, theoretical analysis of Heisenberg two-qubit model, frustrated by Dyaloshinskii-Moria interaction is carried out. The most important part involves analyzing concurrence of the system, which represents a quantitative measure of the entanglement of the system is analysed. The obtained results can help in the further development of quantum informatics.

AB

Accepted by the Scientific Board: September, 2017.

ASB

Defended on: 27.9.2017.

DO

Thesis defend board:

DB

President: Slobodan Radošević, Ph.D, Docent

Mentor: Milan Pantić, Ph.D, Full professor

Member: Petar Mali, Ph.D, Docent