UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU

Uloga Neterinog naboja u savremenim fizičkim teorijama sa aspekta funkcionalnog formalizma

-diplomski rad-

Kandidat: Nemanja Micić

Mentor: dr Slobodan Radošević

Novi Sad, septembar 2016.

Predgovor

Ovaj rad je pisan na katedri za Teorijsku fiziku pod mentorstvom profesora Slobodana Radoševića, kome dugujem zahvalnost na savetovanju i sugestijama prilikom konstrukcije, izrade i detaljnog pregledanja diplomskog rada.

Zahvaljujem se takođe ostalim članovima ove katedre, koji su me tokom studija na izbornim predmetima uputili u osnove teorijske fizike.

Na kraju, jedno veliko hvala mojoj porodici, prijateljima i kolegama, koji su bili uz mene tokom prethodne četiri godine studija i pružali mi podršku.

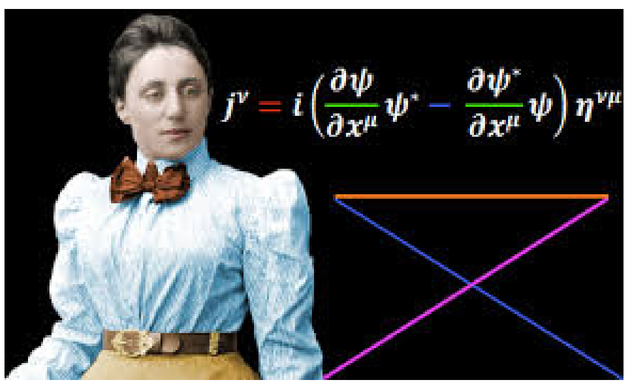
Nemanja Micić

Sadržaj

Uvod

Svoju čuvenu teoremu, Emi Neter je dokazala 1915. godine. Sam Ajnštajn, koji je pročitao njen rad, napisao je Hilbertu pismo koje je u sebi sadržalo sledeću rečenicu : "*Juče od gospođice Neter primih veoma zanimljiv rad o invarijantama. Zadivljen sam činjenicom da se takvi problemi mogu razumeti na tako opšti način.*"

Naime, teorema Emi Neter nudi jasnu vezu između simetrije datog fizičkog sistema i veličina koje se očuvavaju tokom vremena. Najpoznatije zakone, sa kojima se susrećemo tokom osnovnog školovanja, a to su: zakon održanja impulsa i energije, Neterina teorema lepo dokazuje na osnovu čisto matematičkog formalizma, a zahtevajući da dejstvo lagranževe funkcije bude invarijantno na infinitezimalne transformacije. Ova teorema, kao što će se pokazati kroz rad, doživljava svoju široku primenu ne samo u analitičkoj mehanici, nego i u klasičnoj teoriji polja, koja predstavlja osnovu ka kanonskoj kvantizaciji i prelasku na kvantnu teoriju polja, i u fizici kondenzovane materije. U poslednjem poglavlju analiziran je Hajzenbergov model fero i antiferomagnetnog uređenja i primenom ove teoreme, jasno se pokazuje koji su integrali kretanja kod ova dva sistema magnetika. Važno je napomenuti da ona svoju primenu nalazi i u teoriji elementarnih čestica, kojoj u ovom radu nije posvećena pažnja. Akcenat je stavljen na sisteme kondenzovane materije. Rad je baziran na četiri poglavlja, od kojih je u prvom posvećena pažnja funkcionalnom formalizmu i nalaženju funkcionalnih izvoda određenih funkcionala koji su korišćeni tokom pisanja rada.



Slika 1 - Emi Neter sa svojim čuvenim kvadrivektorom struje[1]

U radu su tro - vektori (trodimenzionalni vektori) označeni boldovanjem.

[1]Slika je preuzeta sa sajta *http://www.famousscientists.org/emmy-noether/*

Poglavlje 1

1 Funkcionalni formalizam.

Funkcionalni formalizam se pokazao kao krucijalan za razvoj teorijske fizike, prvenstveno zato što je olakšao uopštenje procesa kvantizacije (od kvantne mehanike, do nerelativističke i relativističke teorije polja, pa sve do teorija struna i polja u zakrivljenom prostor-vremenu), no i zato što je u jedinstveni formalizam obuhvatio dva osnovna pravca teorijske fizike: fiziku visokih energija (tj. fiziku elementarnih čestica) i fiziku kondenzovanog stanja materije, omogućivši time razmenu niza osnovnih ideja između ove dve oblasti (npr. narušenje simetrije i fazni prelazi). Funkcionalni formalizam je idealan za proučavanje simetrija neke teorije. Na primer, kod gejdž[2] teorija ovaj formalizam omogućava da na elegantan način zadržimo relativističku kovarijantnost teorije istovremeno fiksirajući kalibracioni uslov. Nešto širi krug teorija se može proučavati aproksimativno i u izvođenju raznih aproksimativnih šema je funkcionalni formalizam bio od posebne koristi. Ipak, najveći broj teorija od interesa moramo rešavati isključivo numerički, kako bismo dobili zadovoljavajuće rezultate. Ovde se vidi dodatna velika prednost funkcionalnog formalizma, pošto je definicija funkcionalnih integrala kao limesa diskretnih izraza izuzetno pogodna za numerički rad. Jedna od najvažnijih osobina funkcionalnog formalizma je činjenica da omogućava primenu moćnih numeričkih metoda, kao što je Monte Karlo, za rešavanje relevantnih fizičkih problema. Treba napomenuti, međutim, da su numeričke simulacije za računanje funkcionalnih integrala izuzetno računarski zahtevne [1, 2].

Po definiciji, funkcija je pravilo koje elementima jednog skupa M pridružuje elemente drugog skupa N:

$$\phi : x \mapsto \phi(x) \quad ; \quad x \in M \wedge \phi(x) \in N \tag{1.1}$$

Sa druge strane, funkcional je definisan kao preslikavanje sa normiranog linearnog prostora funkcija na polje realnih (kompleksnih) brojeva.

$$S : \phi(x) \mapsto S\left[\phi(x)\right] \in \mathbb{R}(\mathbb{C}) \tag{1.2}$$

Klasične jednačine kretanja dobijamo iz stacionarnosti dejstva pri infinitezimalnim transformacijama tipa:

$$\phi(x) \to \phi(x) + \delta\phi(x) \tag{1.3}$$

gde je $\delta\phi(x)$ - infinitezimalno mala funkcija, odnosno mala popravka na funkciju $\phi(x)$. Sada kada je definisana infinitezimalna transformacija tipa (1.3), možemo slično kao i u običnoj analizi, ponašanje funkcionala prilikom male promene njegovog argumenta definisati izvodom funkcionala [4]:

$$\frac{\delta S\left[\phi\right]}{\delta\phi(y)} = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\left(S\left[\phi + \epsilon\delta(x-y)\right] - S\left[\phi\right]\right) \tag{1.4}$$

[2]Gejdž ili lokalne simetrije su dinamičke simetrije koje zavise od prostorno - vremenskih koordinata[1].

gde $\epsilon\delta(x-y) = \delta\phi(x)$ igra ulogu male varijacije argumenta funkcionala lokalizovanog oko tačke y.

Gornju definiciju funkcionalnog izvoda treba dopuniti uslovom da se granična vrednost $\lim_{\epsilon\to 0}$ uzima pre svih drugih koji se mogu pojaviti u izrazu. Tako osiguravamo odsustvo problematičnih članova tipa $[\delta(x-y)]^m$, gde je $m > 1$. Važan je i uslov da varijacija funkcije $\delta\phi$ iščezava na granicama integracije. U nastavku će biti odrađeno nekoliko primera funkcionalnih izvoda zanimljivih za fiziku.

1.1 Primeri

Primer broj 1: Neka je dat funkcional: $S[f] = \int_a^b dt f^2(t)$. Naći njegov funkcionalni izvod.
Rešenje: Koristimo definiciju funkcionalnog izvoda (1.3):

$$\begin{aligned}
\frac{\delta S[f]}{\delta f(\tau)} &= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\left(S\left[f+\epsilon\delta(t-\tau)\right] - S\left[f\right]\right) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\epsilon}\left(\int_a^b dt\Big[f(t)+\epsilon\delta(t-\tau)\Big]^2 - \int_a^b dt f^2(t)\right) \\
&= \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\cancel{\epsilon}}\left(\int_a^b dt\Big[\cancel{f^2(t)} + 2f(t)\cancel{\epsilon}\delta(t-\tau) - \cancel{f^2(t)}\Big]\right) \\
&= 2\int_a^b dt f(t)\delta(t-\tau) \\
&= 2f(\tau)
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Primer broj 2: Neka je dat funkcional: $S[y] = \int_{t_0}^t dt f(y(t), \dot{y}(t))$. Od svih funkcija $y = y(t)$, pronaći onu za koju integral $S[y]$ ima minimalnu (ekstremnu vrednost).
Rešenje:

$$\frac{\delta S[y]}{\delta y(\tau)} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\left(\int_{t_0}^t dt f\left(y+\epsilon\delta(t-\tau), \frac{d}{dt}(y+\epsilon\delta(t-\tau))\right) - f(y,\dot{y})\right) \tag{1.6}$$

Razvićemo funkciju $f\left(y+\epsilon\delta(t-\tau), \frac{d}{dt}\left(y+\epsilon\delta(t-\tau)\right)\right)$ u Tejlorov red do linearnih članova:

$$f\left(y+\epsilon\delta(t-\tau), \frac{d}{dt}\left(y+\epsilon\delta(t-\tau)\right)\right) \approx f(y,\dot{y}) + \frac{\partial f}{\partial y}\epsilon\delta(t-\tau) + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\epsilon\frac{d}{dt}\delta(t-\tau) \tag{1.7}$$

Iskoristićemo (1.8) u relaciji (1.7):

$$\frac{\delta S[y]}{\delta y(\tau)} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\cancel{\epsilon}}\left(\int_{t_0}^t dt\Big[\cancel{f(y,\dot{y})} + \frac{\partial f}{\partial y}\cancel{\epsilon}\delta(t-\tau) + \frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\cancel{\epsilon}\frac{d}{dt}\delta(t-\tau) - \cancel{f(y,\dot{y})}\Big]\right) \tag{1.8}$$

$$\frac{\delta S[y]}{\delta y(\tau)} = \int_{t_0}^t dt\Big[\frac{\partial f}{\partial y}\delta(t-\tau) + \cancelto{0}{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta(t-\tau)\right)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\delta(t-\tau)\Big] \tag{1.9}$$

Član koji je u (1.9) jednak nuli, jednak je iz razloga što varijacije iščezavaju u tačkama integracije. Kako tražimo ekstremnu vrednost, izjednačićemo (1.9) sa nulom:

$$\frac{\delta S[y]}{\delta y(\tau)} = \int_{t_0}^{t} dt \delta(t-\tau)\Big[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}}\Big] = 0 \tag{1.10}$$

Iz (1.10) sledi:

$$\boxed{\frac{\delta S[y]}{\delta y(t)} = \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial \dot{y}} = 0} \tag{1.11}$$

Rešavanjem diferencijalne jednačine (1.11) dobijamo onu funkciju $y = y(t)$ za koju integral $S[y]$ ima ekstremnu (minimalnu) vrednost. Ove jednačine su poznate pod nazivom **"Ojler - Lagranževe jednačine"**

Primer broj 3:
Neka je dat funkcional: $F_x(\phi) = \phi(x)$. Naći funkcionalni izvod.
Rešenje:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_x(\phi)}{\delta \phi(y)} &= \frac{\delta \phi(x)}{\delta \phi(y)} \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\cancel{\epsilon}} \left(\cancel{\phi(x)} + \cancel{\epsilon}\delta(x-y) - \cancel{\phi(x)}\right) \\ &= \delta(x-y) \end{aligned} \tag{1.12}$$

Primer broj 4:
Neka je dat funkcional: $F_x(\phi) = \nabla_x \phi(x)$. Naći funkcionalni izvod.
Rešenje:

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_x(\phi)}{\delta \phi(y)} &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \left(\nabla_x(\phi(x) + \epsilon\delta(x-y)) - \nabla_x \phi(x)\right) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\cancel{\epsilon}} \left(\cancel{\nabla_x \phi(x)} + \cancel{\epsilon}\nabla_x \delta(x-y) - \cancel{\nabla_x \phi(x)}\right) \\ &= \nabla_x \delta(x-y) \end{aligned} \tag{1.13}$$

* *Napomena*: Ako su $\phi(x)$ i $\lambda(x)$ nezavisne promenljive, tada je:

$$\frac{\delta \phi(x)}{\delta \lambda(x)} = 0 \tag{1.14}$$

Primer broj 5:
Neka je dat funkcional $S[x,y] = \int_{t_0}^{t} f(t, x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t))dt$. Naći funkcionalni izvod po x i y komponenti.
Rešenje:

$$\frac{\delta S[x,y]}{\delta x(\tau)} = \int_{t_0}^{t} dt \left(\frac{\delta f}{\delta x(t)}\frac{\delta x(t)}{\delta x(\tau)} + \frac{\delta f}{\delta y(t)}\cancelto{0}{\frac{\delta y(t)}{\delta x(\tau)}} + \frac{\delta f}{\delta \dot{x}(t)}\cancelto{0}{\frac{\delta \dot{x}(t)}{\delta x(\tau)}} + \frac{\delta f}{\delta \dot{y}(t)}\cancelto{0}{\frac{\delta \dot{y}}{\delta x(\tau)}} \right) \tag{1.15}$$

$$\frac{\delta S[x,y]}{\delta x(\tau)} = \int_{t_0}^{t} dt \frac{\delta f}{\delta x(t)} \delta(t-\tau) = \frac{\delta f(x,y,\dot{x},\dot{y})}{\delta x(\tau)} \tag{1.16}$$

Analogno dobijamo rezultat za funkcionalni izvod po y komponenti:

$$\frac{\delta S[x,y]}{\delta y(\tau)} = \int_{t_0}^{t} dt \frac{\delta f}{\delta y(t)} \delta(t-\tau) = \frac{\delta f(x,y,\dot{x},\dot{y})}{\delta y(\tau)} \tag{1.17}$$

Traženje funkcionalnog izvoda (1.17) prema definiciji (1.4), navešće nas na oblik (1.9), te ako bismo iskoristili uslov stacionarnosti, kao rezultat dobijamo Ojler - Lagranževe jednačine, definisane relacijom (1.11).
Primer broj 6:
Neka je dat funkcional $S[y] = \int_{t_0}^{t} dt f(t, y, y', y'')$. Od svih funkcija $y = y(t)$ naći onu za koju integral $S[y]$ ima ekstremnu vrednost.
Rešenje:

$$\frac{\delta S[y]}{\delta y(\tau)} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_{t_0}^{t} dt \left(f(y+\varepsilon\delta(t-\tau), \frac{d}{dt}(y+\varepsilon\delta(t-\tau)), \frac{d^2}{dt^2}(y+\varepsilon\delta(t-\tau)) - f(y,y',y'')(\right) \tag{1.18}$$

Razvijamo funkciju $f(y+\varepsilon\delta(t-\tau), \frac{d}{dt}(y+\varepsilon\delta(t-\tau)), \frac{d^2}{dt^2}(y+\varepsilon\delta(t-\tau))$ u Tejlorov red, uz aproksimaciju do linearnih članova:

$$\begin{gathered} f(y+\varepsilon\delta(t-\tau), \frac{d}{dt}(y+\varepsilon\delta(t-\tau)), \frac{d^2}{dt^2}(y+\varepsilon\delta(t-\tau)) \approx \\ f(y,y',y'') + \frac{\partial f}{\partial y}\varepsilon\delta(t-\tau) + \frac{\partial f}{\partial y'}\varepsilon\frac{d}{dt}\delta(t-\tau) + \frac{\partial f}{\partial y''}\varepsilon\frac{d^2}{dt^2}\delta(t-\tau) \end{gathered} \tag{1.19}$$

Jednakost dobijenu razvijanjem u Tejlorov red ćemo uvrstiti u relaciju (1.18), te, tražeći ekstremnu vrednost datog funkcionala, izjednačićemo funkcionalni izvod (1.18) sa nulom.

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\cancel{\varepsilon}} \int_{t_0}^{t} dt \left(\frac{\partial f}{\partial y}\cancel{\varepsilon}\delta(t-\tau) + \frac{\partial f}{\partial y'}\cancel{\varepsilon}\frac{d}{dt}\delta(t-\tau) + \frac{\partial f}{\partial y''}\cancel{\varepsilon}\frac{d^2}{dt^2}\delta(t-\tau) \right) = 0 \tag{1.20}$$

Integral (1.20) se sastoji od tri sabirka, od kojih dva mogu da se zapišu konciznije i u formi koja je nama zgodna za dalji rad. U tom cilju, sređujemo drugi sabirak:

$$\int_{t_0}^{t} dt \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dt}\delta(t-\tau) = \int_{t_0}^{t} dt \left(\cancelto{0}{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\delta(t-\tau)\right)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'}\delta(t-\tau) \right) \tag{1.21}$$

$$\int_{t_0}^{t} dt \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{d}{dt}\delta(t-\tau) = -\int_{t_0}^{t} dt \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'}\delta(t-\tau) \tag{1.22}$$

Ostaje nam da sredimo treći član u izrazu (1.20)

$$\int_{t_0}^{t} dt \frac{\partial f}{\partial y''} \frac{d^2}{dt^2}\delta(t-\tau) = \int_{t_0}^{t} dt \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y''}\frac{d}{dt}\delta(t-\tau)\right) - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y''}\frac{d}{dt}\delta(t-\tau) \right) \tag{1.23}$$

U relaciji (1.23) prvi sabirak će analogno prethodnom članu biti jednak nuli, te ostaje samo drugi sabirak, a njega rešavamo parcijalnom integracijom, uzimajući za vrednost $u = \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y''}$, a za $dv = \frac{d}{dt}\delta(t-\tau)$, te nas to nakon trivijalnog računa dovodi do kompaktnog zapisa trećeg sabirka iz (1.20):

$$\int_{t_0}^{t} dt \frac{\partial f}{\partial y''}\frac{d^2}{dt^2}\delta(t-\tau) = \int_{t_0}^{t} dt\delta(t-\tau)\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial f}{\partial y''} \tag{1.24}$$

Dobijene rezultate (1.22) i (1.24) vraćamo u (1.20):

$$\int_{t_0}^{t} dt\delta(t-\tau)\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial f}{\partial y''}\right) = 0 \tag{1.25}$$

Te iz (1.25) sledi:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial f}{\partial y''}} = 0 \tag{1.26}$$

Relacija (1.26) predstavlja Ojler - Lagranževu jednačinu kada je funkcija oblika $f = f(y, y', y'')$. Analogno, ako je data funkcija tipa $f = f(y, y', y'', y''', ..., y^{(n)})$, opšti oblik Ojler - Lagranževe jednačine glasi [3]:

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - ... + (-1)^n\frac{d^n}{dt^n}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}} = 0} \tag{1.27}$$

ili konciznije [3]:

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d^k}{dt^k}\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}} = 0} \tag{1.28}$$

Primer broj 7:
Neka je dat funkcional $S[q] = \int_{t_0}^{t}\int_{s_0}^{s} L\left(q(s,t), \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial s}\right)$. Od svih funkcija $q = q(s,t)$ naći onu za koju integral $S[q]$ ima ekstremnu vrednost.
Rešenje:

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q(\tau,\sigma)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{t_0}^{t} dt\int_{s_0}^{s} ds\left(L(X) - L(q, \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial s})\right)\right) \tag{1.29}$$

gde je:

$$X = \begin{bmatrix} q + \varepsilon\delta(t-\tau)\delta(s-\sigma) \\ \frac{d}{dt}\left(q + \varepsilon\delta(t-\tau)\delta(s-\sigma)\right) \\ \frac{d}{ds}\left(q + \varepsilon\delta(t-\tau)\delta(s-\sigma)\right) \end{bmatrix} \tag{1.30}$$

Razvićemo funkciju $L = L(X)$ u Tejlorov red, uz aproksimaciju do linearnih članova:

$$\begin{aligned} L(X) &\approx L(q, \frac{\partial q}{\partial t}, \frac{\partial q}{\partial s}) + \frac{\partial L}{\partial q}\varepsilon\delta(t-\tau)\delta(s-\sigma) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_t q)}\varepsilon\delta(s-\sigma)\frac{d}{dt}\delta(t-\tau) \\ &+ \frac{\partial L}{\partial(\partial_s q)}\varepsilon\delta(t-\tau)\frac{d}{ds}\delta(s-\sigma) \end{aligned} \tag{1.31}$$

Ako sada izraz (1.31) uvrstimo u (1.29) nakon sređivanja dobijamo izraz:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S[q]}{\delta q(\tau,\sigma)} &= \int_{t_0}^{t} dt \int_{s_0}^{s} ds(\frac{\partial L}{\partial q}\varepsilon\delta(t-\tau)\delta(s-\sigma) + \frac{\partial L}{\partial(\partial_t q)}\varepsilon\delta(s-\sigma)\frac{d}{dt}\delta(t-\tau) \\ &+ \frac{\partial L}{\partial(\partial_s q)}\varepsilon\delta(t-\tau)\frac{d}{ds}\delta(s-\sigma)) \end{aligned} \tag{1.32}$$

U izrazu (1.32) trebamo dovesti drugi i treći sabirak na koncizan zapis, te kao i u prethodnim primerima, bez detaljnijeg izvođenja kažemo da se izraz (1.32) svodi, uzimajući u obzir da varijacije iščezavaju u granicama integracije, kao i da tražimo ekstremnu vrednost funkcionala $L(q)$ na oblik:

$$\frac{\delta S[q]}{\delta q(\tau,\sigma)} = \int_{t_0}^{t} dt \int_{s_0}^{s} ds \left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial(\partial_t q)} - \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial(\partial_s q)} \right) \delta(t-\tau)\delta(s-\sigma) = 0 \tag{1.33}$$

Iz (1.33) sledi:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial(\partial_t q)} - \frac{d}{ds}\frac{\partial L}{\partial(\partial_s q)} = 0} \tag{1.34}$$

Na rezultate dobijene u prethodnim primerima ćemo se pozivati u narednim poglavljima.

Poglavlje 2

2 Hamiltonov princip u Analitičkoj Mehanici.

Posmatrajmo stvarno kretanje čestica bez ili sa idealnim holonomnim vezama i potencijalnim silama. Definišimo Hamiltonovo dejstvo:

$$S\Big[q_i(t)\Big] = \int_{t_0}^{t} dt L\left(q_i(t), \dot{q}_i(t)\right); \quad i = 1, 2, 3, \ldots, N \tag{2.1}$$

Kretanje se vrši tako da je dejstvo minimalno, odnosno:

$$\frac{\delta S[q_i(t)]}{\delta q_i(\tau)} = 0 \tag{2.2}$$

"Stvarno kretanje sistema čestica bez veza ili sa idealnim holonomnim vezama i potencijalnim silama se vrši tako da Hamiltonovo dejstvo duž pravog puta ima stacionarnu vrednost u odnosu na vrednosti dejstva svih zaobilaznih puteva."[5]

Korišćenjem definicije funkcionalnog izvoda, lako se može naći eksplicitan oblik funkcionalnog izvoda Hamiltonovog dejstva. Ovaj izvod je izračunat, a kao rezultat je dobijena relacija (1.11). Formalnom smenom:

$$y(t) \to q_i(t) \;\; ; \;\; \dot{y}(t) \to \dot{q}_i(t) \;\; ; \;\; f[y, \dot{y}] \to L[q_i, \dot{q}_i]$$

Dobijamo:

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0} \tag{2.3}$$

Diferencijalne jednačine (2.3) su tzv. **Ojler - Lagranževe jednačine** za varijacioni princip [5].

Hamiltonov princip predstavlja jedan opšti integralni princip mehanike, jer je formulisan u vidu uslova koji mora zadovoljavati dejstvo zadato u integralnom obliku. Analizom se može pokazati da se $\delta^2 S[q]$ za dovoljno mali vremenski interval uvek svodi na minimum dejstva[5]. Hamiltonov princip i Ojler - Lagranževe jednačine su ekvivalentni međusobno, tj. Ojler - Lagranževe jednačine određuju upravo one funkcije $q_i(t)$ za koje Hamiltonovo dejstvo pri dovoljno malom vremenskom intervalu (t_i, t_f) ima minimalnu vrednost[5].

Stav: Sve Lagranževe funkcije koje se razlikuju totalnim izvodom po vremenu ma kakve funkcije položaja i vremena su međusobno ekvivalentne, tj. daju iste Ojler - Lagranževe jednačine.

Dokaz: Neka je data Lagranževa funkcija $L'(q_i, \dot{q}_i, t)$ koja se razlikuje od prvobitne Lagranževe funkcije totalnim izvodom po vremenu bilo kakve funkcije vremena i koordinata:

$$L'(q_i, \dot{q}_i, t) = L(q_i, \dot{q}_i, t) + \frac{d}{dt} f(q_i, t) \tag{2.4}$$

Kako su Lagranževe jednačine ekvivalentne Hamiltonovom principu, potražimo dejstvo Lagranževe funkcije $L'(q_i, \dot{q}_i, t)$:

$$\begin{aligned} W' &= \int_{t_0}^{t} dt L(q_i, \dot{q}_i, t) + \int_{t_0}^{t} dt \frac{d}{dt} f(q_i, t) \\ &= W + \int_{t_0}^{t} df(q_i, t) \\ &= W + f(q, t) - f(q_0, t_0) \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pri variranju dejstva W' drugi i treći član rezultuju nulom, jer varijacije iščezavaju u granicama integracije. Dobija se kao rezultat:

$$\delta W = \delta W' = 0 \tag{2.6}$$

time je stav dokazan.

Hamiltonov integralni princip, kao tipičan predstavnik varijacionog principa, pokazuje izvesnu moć koncepcije varijacionog računa. On u kompaktnoj formi sadrži svu mehaniku sistema sa potencijalnim silama i holonomnim vezama i u njemu figurišu veličine koje nisu vezane posebnim sistemom koordinata, te kažemo s toga da je ovaj princip invarijantan na bilo kakve transformacije generalisanih koordinata [5].

2.1 Teorema Emi Neter u analitičkoj mehanici

Neka je mehanički sistem opisan Lagranžijanom L i dejstvom S:

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L\left(q(t), \dot{q}(t), t\right) dt \tag{2.7}$$

Svi zakoni održanja su posledica simetrije fizičkog sistema. Ispitivanje simetrije sistema svodi se na ispitivanje ponašanja dejstva pri simetrijskim transformacijama. Pri kontinualnim transformacijama, generalisane koordinate i vreme prelaze u nove, primovane generalisane koordinate i primovano vreme prema:

$$t \to t'(t) \qquad ; \qquad q_i(t) \to q_i'(t') \tag{2.8}$$

Ograničimo se na infinitezimalne transformacije:

$$t \to t' = t + \delta t(t) \tag{2.9}$$

$$q_i(t) \to q_i'(t') = q_i(t) + \delta q_i(t)$$

Sa $\delta t(t)$ smo označili infinitezimalnu promenu vremena koja može zavisiti od vremena, a sa $\delta q_i(t)$ infinitezimalnu promenu generalisanih koordinata.

Potražimo sada promenu dejstva pri transformacijama (2.9). Dejstvo se menja zbog promene koordinata i vremena. Takođe, menjaju se i granice integracije. Donja granica postaje $t_1' = t_1 + \delta t(t_1)$, slično važi i za gornju granicu. Promenu dejstva definišemo na sledeći način:

$$\delta S = S' - S = \int_{t_1'}^{t_2'} L\left(q'(t'), \dot{q}'(t'), t'\right) dt' - \int_{t_1}^{t_2} L\left(q(t), \dot{q}(t), t\right) dt \tag{2.10}$$

U dejstvu S' smenićemo promenljive; sa t' ćemo preći na t. Iz transformacije vremena, lako dobijamo tu vezu među promenljivima:

$$dt' = dt\left(1 + \frac{d(\delta t)}{dt}\right) \tag{2.11}$$

Kao i da je:

$$\begin{aligned} L\left(q'(t'), \dot{q}'(t'), t'\right) &= L\left(q'(t+\delta t), \dot{q}'(t+\delta t), t+\delta t\right) \\ &= L\left(q'(t), \dot{q}'(t), t\right) + \frac{dL\left(q'(t), \dot{q}'(t), t\right)}{dt}\delta t \end{aligned} \tag{2.12}$$

U drugom sabirku relacije (2.12) ćemo ukloniti primovane generalisane koordinate i brzine od kojih zavisi Lagranžijan, te prelazimo na neprimovane veličine, jer računamo u prvom redu po malim veličinama. Taj član je infinitezimalno mala veličina prvog reda zbog člana δt. Transformisano dejstvo S' sada ima oblik:

$$\begin{aligned} S' &= \int_{t_i}^{t_f} dt\left(1 + \frac{d(\delta t)}{dt}\right)\left(L\left(q'(t), \dot{q}'(t), t\right) + \frac{dL}{dt}\delta t\right) \\ &\simeq \int_{t_i}^{t_f} dt\left(L\left(q'(t), \dot{q}'(t), t\right) + \frac{d(L\delta t)}{dt}\right) \end{aligned} \tag{2.13}$$

sa tačnošću do prvog reda po malim veličinama. Ako uvedemo varijaciju forme koordinata sa:

$$\delta_0 q_i(t) = q_i'(t) - q_i(t) \tag{2.14}$$

onda je:

$$L\left(q'(t), \dot{q}'(t), t\right) = L\left(q(t), \dot{q}(t), t\right) + \sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\delta_0 q_i + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta_0\left(\frac{dq_i}{dt}\right) \tag{2.15}$$

Koristeći Ojler - Lagranževu jednačinu možemo izraziti:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) \tag{2.16}$$

Pa ako nju iskoristimo u relaciji (2.15) dobijamo koncizniji zapis:

$$L\left(q'(t), \dot{q}'(t), t\right) = L\left(q(t), \dot{q}(t), t\right) + \frac{d}{dt}\left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta_0 q_i\right) \tag{2.17}$$

Prema tome, infinitezimalna promena dejstva δS iznosi, nakon elementarnijeg sređivanja:

$$\delta S = \left(L\delta t + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_0 q_i \right)_{t_i}^{t_f} \tag{2.18}$$

Pretpostavimo da je dejstvo invarijatno na tranformacije, odnosno $\delta S = 0$, onda kažemo da su te trasformacije simetrija našeg modela. Tada sledi da je:

$$Q = L\delta t + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_0 q_i \tag{2.19}$$

konstanta kretanja.

Ovaj iskaz je poznat pod nazivom **Teorema Emi Neter**. Teorema Emi Neter igra veliku ulogu u klasičnoj i kvantnoj teoriji polja, kao veza između simetrijskih transformacija i zakona održanja [6].

Relacija[3] (2.20) je tačna u linearnom redu po varijacijama δt i δq_i, zato je:

$$\delta_0 q_i(t) = \delta_0 q_i(t')$$

Uopštenije, dejstvo je invarijantno ukoliko je promena Lagranžijana izvod po vremenu neke funkcije F.

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d(\delta F)}{dt} = \delta F|_{t_i}^{t_f} \tag{2.21}$$

Promena dejstva, tj. δF, nalazi se eksplicitno zamenom transformacije (2.9) u dejstvo. Ako se ispostavi da je $\delta F \neq 0$, tada je:

$$Q = L\delta t + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \delta_0 q_i - \delta F \tag{2.22}$$

konstanta kretanja[6].

2.1.1 Zakon održanja energije kao posledica vremenske translacije

Data je translacija sistema u vremenu:

$$t' = t + \tau \tag{2.23}$$

$$q_i'(t') = q_i(t)$$

[3] Varijacija forme koordinate $\delta_0 q_i(t)$ je povezana sa totalnom varijacijom koordinate $\delta q_i(t)$:

$$\delta q_i(t) = \delta_0 q_i(t) + \dot{q}_i(t)\delta t \tag{2.20}$$

gde je τ konstanta. Ako Lagranžijan ne zavisi eksplicitno od vremena, tada je $\delta F = 0$, odnosno $\delta S = 0$. Iz:

$$\delta q_i(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \delta_0 q_i(t) = -\dot{q}_i(t)\tau \tag{2.24}$$

Tada se kao integral kretanja po Teoremi Emi Neter javlja:

$$\begin{aligned} L\delta t + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\delta_0 q_i &= L\tau - \sum_i p_i \dot{q}_i \tau \\ &= -\tau(\sum_i p_i \dot{q}_i - L) \\ &= -\tau E = const. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Zanemarujući konstantu $-\tau$, prepoznajemo u (2.25) da je član u zagradi zapravo Ležandrova transformacija Lagranžijana, a to je upravo Hamiltonova funkcija, što nam kazuje da je integral kretanja energija sistema.

2.1.2 Zakon održanja momenta impulsa kao posledica rotacione invarijantnosti

Lagranžijan slobodnog izolovanog sistema čestica koje interaguju centralnim konzervativnim silama:

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i^2 - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N} U_{ij}(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|) \tag{2.26}$$

invarijantan je na rotacije:

$$t' = t \tag{2.27}$$

$$\mathbf{r}_i' = \mathbf{r}_i + \delta\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_i$$

Tako da je $\delta F = 0$. Prema teoremi Emi Neter, kao integral kretanja se javlja:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}\delta_0 \mathbf{r}_i &= \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot (\delta\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_i) \\ &= \delta\mathbf{\Omega} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \times \mathbf{r}_i \\ &= \delta\mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L} = const. \end{aligned} \tag{2.28}$$

Ugao rotacije $\delta\mathbf{\Omega}$ je konstantan, pa je moment impulsa sistema konstanta kretanja. Rotaciona simetrija daje moment impulsa kao očuvanu veličinu u toku kretanja.

2.1.3 Zakon održanja impulsa kao posledica translacione invarijantnosti

Posmatramo identičan Lagranžijan (2.26). On je invarijantan na translacije: $\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}_i + \boldsymbol{\eta}$ gde je $\boldsymbol{\eta}$ proizvoljna veličina. Posledica ove simetrijske transformacije, prema teoremi Emi Neter jeste da se kao integral kretanja javlja:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \dot{\mathbf{r}}_i \eta = \mathbf{p}\eta = const. \tag{2.29}$$

Kako je η neka konstanta, sledi da je impuls sistema konstanta kretanja. Translaciona simetrija daje impuls kao očuvanu veličinu tokom kretanja.

Poglavlje 3

3 Osnovi klasične teorije polja

Klasično polje tretiramo kao sistem sa beskonačnim brojem stepeni slobode i može se opisati funkcijom koja je definisana u svakoj tački prostora i vremena. Radi jednostavnosti, razmatraćemo realno klasično skalarno polje:

$$\phi = \phi(\mathbf{x}, t) \tag{3.1}$$

Ukoliko polje poseduje više komponenti, govorimo o vektorskim ili tenzorskim klasičnim poljima. U klasičnoj teoriji polja se uvodi i pojam unutrašnjeg stepena slobode (spin, izospin, boja, ukus ...) tako da može biti skalar u odnosu na Lorencove transformacije i istovremeno imati složeniju strukturu u odnosu na unutrašnje stepene slobode.
U teoriji polja, kako kvantnoj, tako i klasičnoj, samo polje je dinamička promenljiva. Zato je od interesa pronaći jednačine kretanja za polje. To je moguće uraditi polazeći od analogije sa mehanikom sistema čestica.

Jednačine klasične teorije polja su bitne, naročito u Hamiltonovom formalizmu, jer otvaraju put ka kanonskoj kvantizaciji polja. Takođe, jednačine klasične teorije omogućavaju ispravno tumačenje relativističkih verzija Šredingerove jednačine. Jednačine klasične teorije polja su prvo razmatrane u Lagranževoj formulaciji, jer se u tom formalizmu najlakše vrši prelaz od mehanike čestica prema teoriji polja.

Lorencova invarijantnost, jedna od fundamentalnih principa savremene fizike, najlakše se ostvaruje u Lagranževom formalizmu. Nakon kratkog osvrta na Lagranžev formalizam, uveden je Hamiltonov princip koji predstavlja osnovu za prelazak na klasičnu teoriju polja.

3.1 Varijacioni princip za klasično polje i veza sa mehanikom čestica

Za široku klasu mehaničkih sistema, dinamička evolucija je određena Hamiltonovim principom [7]. Posmatrajmo idealan holonomni sistem koji se sastoji od N čestica i u kojem deluju potencijalne sile interakcije. Kinematičko stanje tog sistema je određeno poznavanjem svih generalisanih koordinata i brzina[4] u svakom trenutku vremena i reprezentovano je tačkom u μ prostoru - prostor kinematičkih stanja.

Stanje sistema se može pratiti i u konfiguracionom prostoru u kojem su koordinate reprezentativne tačke samo $q_a(t)$. Prema Hamiltonovom principu se stvarna evolucija posmatranog sistema odvija po putanji u konfiguracionom prostoru duž koje Hamiltonovo dejstvo ima konstantnu vrednost [7]:

$$\delta S\left[\{q_a(t), \dot{q}_a(t)\}\right] = \delta \int_{t_i}^{t_f} dt L\left(\dot{q}_a(t), q_a(t), t\right) = 0 \tag{3.2}$$

Kada uradimo varijaciju Hamiltonovog dejstva i nametnemo uslov da ono mora imati ekstrem (najčešće je to minimum u pitanju), kao rezultat dobijamo Ojler - Lagranževe jednačine

[4] $\{q_a(t), \dot{q}_a(t)\}$, gde se vrednost a kreće od 1 do $3N$

višečestičnog sistema [7]:

$$\frac{\partial L}{\partial q_a} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = 0 \tag{3.3}$$

Prelazak na teoriju polja vršimo na sledeći način [8, 9, 4]:

1. Pretpostavimo da je prostor izdeljen na elemente zapremine koje prebrojava diskretni vektor **n**.

2. Neka se u svakom elementu zapremine nalazi po jedna čestica čije je stanje opisano generalisanim koordinatama i brzinama:

$$q^i_{\mathbf{n}}(t), \dot{q}^i_{\mathbf{n}}(t) \quad ; \quad i = 1, 2, 3$$

3. U graničnom slučaju, kada pomenuti elementi zapremine teže nuli (i dalje ispunjavajući ceo prostor), diskretni indeks **n** postaje kontinualni vektor položaja **x**.

4. Ako se sada za opis sistema kao nebitne mogu ispustiti dve generalisane koordinate po elementarnoj ćeliji (tj. po čestici) i njihove odgovarajuće brzine, dolazi se do pojma skalarnog polja kao funkcije definisane u svakoj tački prostora i vremena:

$$q_{\mathbf{n}}(t) \to q_{\mathbf{x}}(t) \equiv \phi(\mathbf{x}, t) \equiv \phi(x)$$

   pri čemu smo uveli oznaku x za kvadrivektor položaja

$$x = (\mathbf{x}, t) \tag{3.4}$$

Da bi $\phi(x)$ bilo skalarno polje, mora se ponašati na određeni način u odnosu na Lorencove transformacije. Neka je Λ matrica Lorencovih transformacija takva da pri prelazu $x \to \Lambda x$ za polje $\phi(x)$ kažemo da je skalarno ako važi [10]:

$$\phi(x) \to \phi^{'}(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) \tag{3.5}$$

U mehanici čestica vreme je parametar, a dinamička promenljiva je vektor položaja, odnosno impuls čestice. U teoriji polja, dinamička promenljiva je funkcija $\phi(\mathbf{x}, t)$. Prostorne koordinate $\mathbf{x}$ postaju parametar koji zajedno sa vremenom karakteriše dato polje $\phi(\mathbf{x}, t)$ u svakoj tački prostora i vremena. Od fundamentalnog značaja je pojam slobodnog polja[5]. Poznat primer toga je određivanje elektromagnetnog polja na osnovu ponašanja naelektrisanih čestica u njemu (sondiranje). Ako su poznate trajektorije naelektrisanih čestica u odsustvu polja, vektore električnog i magnetnog polja možemo naći pomoću Lorencove jednačine sile i dovoljnog broja eksperimentalnih merenja putanja naelektrisanih čestica u prostoru koji ispunjava ispitivano polje. Tada obično zanemarujemo uticaj elektromagnetnog polja koje generišu probne čestice, odnosno ispitivano polje je po pretpostavci slobodno. Slični primeri

[5] To je u principu matematička idealizacija, pogotovo u kontekstu kvantne teorije polja, jer se informacije o nekom fizičkom sistemu dobijaju uz pomoć njegove reakcije na spoljašnja pobuđivanja.

postoje i u fizici kondenzovanog stanja materije kada neke informacije o sistemu dobijamo uz pomoć odzivnih funkcija (magnetna susceptibilnost, toplotni kapacitet, itd.). Pojmu slobodnog polja odgovara sistem slobodnih čestica u mehanici. Lagranžijan takvog sistema je naprosto zbir Lagranžijana svake od pojedinih čestica.

Prilikom prelaska sa sistema čestica na polje, taj zbir lagranžijana postaje integral po prostoru u kojem se nalazi polje, te Lagranževa funkcija postaje funkcional:

$$L\left(q_a(t), \dot{q}_a(t), t\right) \to L\left[\phi(t), \dot{\phi}(t)\right] = \int_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)) \tag{3.6}$$

U gornjem izrazu, za prostorni integral usvojena je konvencija koja nudi pregledniji zapis:

$$\int d^3\mathbf{x} = \int_{\mathbf{x}} \tag{3.7}$$

Uvedena je i nova fizička veličina - gustina Lagranžijana $\mathcal{L}$. Ona je funkcija polja i njegovog izvoda po vremenu. U gustini Lagranžijana, $\dot{\phi}(\mathbf{x}, t)$ se pojavljuje kao posledica prisustva generalisanih brzina u Lagranžijanu sistema čestica. Konačan oblik gustine Lagranžijana koji se koristi u klasičnoj teoriji polja sadrži i izvode polja po prostornim koordinatama $\nabla\phi(\mathbf{x}, t)$ koji opisuju varijacije polja od tačke do tačke. Dakle, konačan oblik dat je izrazom:

$$L\left[\phi(t), \dot{\phi}(t)\right] = \int_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \nabla\phi(\mathbf{x}, t)) \tag{3.8}$$

Najčešće se koriste gustine Lagranžijana koje sadrže samo $\dot{\phi}(\mathbf{x}, t)$ i $\nabla\phi(\mathbf{x}, t)$, a ne i izvode višeg reda, kako bi jednačine kretanja polja bile diferencijalne jednačine drugog reda. U principu, mogu se pojaviti i izvodi višeg reda [11]. Gustina Lagranžijana ne zavisi ekspicitno od vremena i od vektora položaja. Kvadrivektor x se može pojaviti u gustini Lagranžijana ako se razmatra sistem koji nije zatvoren [12]. Prisustvo člana $\nabla\phi(\mathbf{x}, t)$ u (3.8) se može obrazložiti i sa stanovišta STR. Kako opis fizičkog sistema prema jednom od Ajnštajnovih postulata ne sme zavisiti od izbora inercijalnog sistema reference, prisustvo člana $\dot{\phi}(\mathbf{x}, t)$ u gustini Lagranžijana automatski povlači i postojanje $\nabla\phi(\mathbf{x}, t)$, jer se prilikom Lorencovih transformacija:

$$\partial_t \phi \equiv \partial_0 \phi \tag{3.9}$$

polje ponaša kao komponenta kvadrivektora (ako je ϕ skalarna funkcija).

Lorencove transformacije mešaju komponente kvadrivektora tako da gustina Lagranžijana napisana u proizvoljnom inercijalnom sistemu reference mora sadržati izvode po sve četiri koordinate [8]. Ovaj zaključak važi i za polja složenije strukture (npr. vektorski elektromagnetni potencijal), jer su Lorencove transformacije linearne, te se izrazi tipa $\partial_\alpha A^\beta$ transformišu kao mešoviti kvadritenzori.

Dejstvo polja definišemo analogno dejstvu Lagranžijana u mehanici čestica:

$$S\left[\phi(t)\right] = \int_{t_i}^{t_f} dt L\left[\phi(t), \dot{\phi}(t)\right] = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_{\mathbf{x}} \mathcal{L}\left[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}, t), \nabla\phi(\mathbf{x}, t)\right] \tag{3.10}$$

Slično uopštavamo i Hamiltonov varijacioni princip koji tvrdi da će polje evoluirati u prostoru i vremenu na taj način da dejstvo ima ekstremnu (najčešće minimalnu) vrednost [8, 4, 11]:

$$\delta S[\phi] = 0 \tag{3.11}$$

Pretpostavlja se i dalje da varijacija polja na granicama integracije iščezava. Za dalja razmatranja u Lagranževom formalizmu, pogodno je uvesti kovarijantni kvadrivektor gradijenta:

$$(\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z) \equiv (\partial_0, \partial_1, \partial_2, \partial_3) = \partial_\mu \tag{3.12}$$

Relativistički invarijantan element zapremine u 4D:

$$d^4x = dtd^3\mathbf{x} \tag{3.13}$$

$$S[\phi] = \int d^4x\mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu(x)) = \int_x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) \tag{3.14}$$

Gde je, opet, usvojena konvencija:

$$\int d^4x = \int_x \tag{3.15}$$

Te u konciznijem zapisu Hamiltonov princip postaje:

$$\delta \int_x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) = 0 \tag{3.16}$$

Značajna osobina funkcionala dejstva $S[\phi]$ je da se sve informacije o dinamici sistema upravo nalaze u funkciji gustine Lagranžijana $\mathcal{L}$. Zbog toga se jednačine kretanja mogu izraziti pomoću parcijalnih, a ne pomoću funkcionalnih izvoda [13].

3.2 Ojler - Lagranževe jednačine klasične teorije polja

Jednačine kretanja za klasično polje se dobijaju traženjem ekstremuma funkcionalnog izvoda Hamiltonovog dejstva. Sličan rezultat je već dobijen (poglavlje 1, primer broj 2), s tim, što ovde kod formalnog izvođenja moramo voditi računa da je delta funkcija data kao $\delta(x-y) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y})\delta(t-\tau)$. Takođe, treba ukazati i na momenat u traženju ekstremne vrednosti funkcionalnog izvoda Hamiltonovog dejstva, gde se pojavljuje integral tipa:

$$\int_x \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\mu\delta(x-y) = \int_x \left(\partial_\mu \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(x-y)\right) - \partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(x-y)\right)$$

Prvi sabirak predstavlja integral po zapremini divergencije kvadrivektora $\mathcal{L}$. On je pravi Lorencov skalar, a može se prevesti u površinski integral 4D varijantom Gausove teoreme. Ovaj sabirak nestaje, te od izraza preostaje:

$$\frac{\delta S[\phi]}{\delta\phi(y)} = \int_x \delta(x-y)\left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right] = 0 \tag{3.17}$$

Te iz relacije (3.17) dobijamo Ojler - Lagranževe jednačine klasične teorije polja:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 0} \tag{3.18}$$

ili, razdvajanjem prostornih i vremenske koordinate, gornja jednačina dobija oblik:

$$\boxed{\nabla \frac{\mathcal{L}}{\partial(\nabla \phi)} + \partial_t \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_t \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0} \tag{3.19}$$

Kao što je napomenuto ranije, jednačine kretanja za klasično polje se zaista mogu izraziti samo pomoću gustine Lagranžijana $\mathcal{L}$. Gornja jednačina je izvedena za slučaj skalarnog polja. Ukoliko skalarno polje ima više komponenti ϕ^i, povezanih sa unutrašnjim stepenima slobode, Ojler - Lagranževe jednačine postaju:

$$\boxed{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^i} - \partial_\mu \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^i)} = 0} \tag{3.20}$$

gde $i = 1, 2, 3, ..., n$

Postavlja se pitanje: "Na koji način odabrati gustinu Lagranžijana $\mathcal{L}$ da bi se dobila korektna teorija polja?" Savremene teorije polja daju odgovor na to pitanje u vidu dodatnih simetrija koje trebamo nametnuti funkciji $\mathcal{L}$ i funkcionalu Hamiltonovog dejstva, a one su:

- Gustina Lagranžijana $\mathcal{L}$ mora biti Lorencov skalar. Tada je Ojler - Lagranževa jednačina invarijantna u odnosu na Lorencove transformacije [11].
- Dejstvo mora biti realna funkcija, čime se obezbeđuje jednak broj jednačina i komponenti polja [11].

Dodatna ograničenja na izbor gustine Lagranžijana nameću tzv. "kalibracione simetrije" [8, 10, 11, 12]. Lagranžev formalizam u teoriji polja ima prednost da prostorne i vremenska koordinata ulaze simetrično u jednačine kretanja, tako da je u ovom formalizmu Lorencova invarijantnost lako vidljiva. Hamiltonov formalizam je pogodniji za uvođenje jednačina kvantnih polja, a i više se koristi u fizici kondenzovane materije, jer tu simetrija između prostornih i vremenske koordinate, kao ni Lorencova invarijantnost nisu toliko bitni. Pokazuje se da se Lorencova rotaciona invarijantnost u kristalnim sistemima može primeniti samo kao niskotemperaturska (dugotalasna) aproksimacija. Na kraju, treba zabeležiti još jedan oblik jednačina kretanja za polje u Lagranževom formalizmu.
ϕ i $\dot{\phi}$ se smatraju nezavisnim promenljivim, važi [4]:

$$\frac{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta \phi(\mathbf{y}, t)} = \frac{\delta \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)}{\delta \dot{\phi}(\mathbf{y}, t)} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{3.21}$$

Zatim, možemo potražiti funkcionalni izvod Lagranžijana $L[\phi(x), \dot{\phi}(x)]$ po polju $\phi(y)$. Kako je postupak gotovo jednak prethodnom, kao rezultat proizilazi novi oblik Ojler - Lagranževih jednačina za polje:

$$\boxed{\partial_t \frac{\delta L[\phi, \dot{\phi}]}{\delta \dot{\phi}} - \frac{\delta L[\phi, \dot{\phi}]}{\delta \phi} = 0} \tag{3.22}$$

Ovaj oblik Ojler - Lagranževih jednačina kretanja ima važnu ulogu prilikom formulisanja zakona kretanja u Hamiltonovom formalizmu. Osim toga, Ojler - Lagranževe jednačine napisane na ovaj način najviše podsećaju na jednačine kretanja sistema čestica iz kojih dobijamo gore navedene jednačine za fizičko polje formalnom zamenom [9]:

$$q_\alpha(t) \to \phi(\mathbf{x}, t) \qquad \partial \to \delta$$

3.3 Hamiltonov formalizam

Slično mehanici sistema čestica [7], prvi korak prilikom prelaska sa Lagranževog na Hamiltonov formalizam u teoriji polja je definisanje impulsa kanonski konjugovanog polju. U teoriji polja, njegova definicija se dobija formalnom zamenom običnog izvoda sa funkcionalnim [4, 10]:

$$\pi(x) = \frac{\delta L[\phi, \dot{\phi}]}{\delta \dot{\phi}(x)} \tag{3.23}$$

Gornja relacija se može uprostiti korišćenjem definicije izvoda funkcionala, pri čemu treba voditi računa da su u Lagranževom formalizmu ϕ i $\dot{\phi}$ nezavisne promenljive. Kao rezultat se dobija:

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)} \tag{3.24}$$

Kada je definisan kanonski impuls, Ležandrovom transformacijom se uvodi gustina hamiltonijana $\mathcal{H}$ [4, 8, 11]:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{x}, t) &= \mathcal{H}\left(\phi(\mathbf{x}, t), \nabla\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t), \nabla\pi(\mathbf{x}, t)\right) \\ &= \pi(\mathbf{x}, t)\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) - \mathcal{L}\Big(\phi(\mathbf{x}, t), \nabla\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}, t)\Big) \end{aligned} \tag{3.25}$$

Tada je hamiltonijan sistema dat funkcionalom:

$$H\left[\phi(t), \pi(t)\right] = \int_{\mathbf{x}} \mathcal{H}\left(\phi(\mathbf{x}, t), \nabla\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}, t), \nabla\pi(\mathbf{x}, t)\right) \tag{3.26}$$

U Hamiltonovom formalizmu, nezavisne promenljive su polja $\phi(\mathbf{x}, t)$ i impulsi $\pi(\mathbf{x}, t)$, te:

$$\frac{\delta\phi(\mathbf{x}, t)}{\delta\pi(\mathbf{y}, t)} = 0 \qquad \frac{\delta\phi(\mathbf{x}, t)}{\delta\phi(\mathbf{y}, t)} = \frac{\delta\pi(\mathbf{x}, t)}{\delta\pi(\mathbf{y}, t)} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{3.27}$$

Zbog toga se u definiciji gustine Hamiltonijana implicitno pretpostavlja da su u gustini Lagranžijana veličine $\dot{\phi}(\mathbf{x}, t)$ izražene preko kanonskog impulsa $\pi(\mathbf{x}, t)$.

Jednačine kretanja u Hamiltonovom formalizmu dobijaju se variranjem hamiltonijana u odnosu na $\phi(\mathbf{x}, t)$ i $\pi(\mathbf{x}, t)$ [11]. Pozivajući se na funkcionalni izvod dat primerom 5 (poglavlje 1), dobijamo Hamiltonove jednačine u teoriji polja:

$$\frac{\delta H[\phi, \pi]}{\delta\pi(\mathbf{x}, t)} = \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) \qquad \frac{\delta H[\phi, \pi]}{\delta\phi(\mathbf{x}, t)} = -\dot{\pi}(\mathbf{x}, t) \tag{3.28}$$

Kako je Hamiltonijan izražen pomoću zapreminskog integrala gustine Hamiltonijana, varijacije iz (3.28) se mogu sprovesti do kraja, a kao rezultat se dobija:

$$\begin{aligned} \frac{\delta H[\phi(t),\pi(t)]}{\delta\phi(\mathbf{x},t)} &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi(\mathbf{x},t)} - \nabla\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\phi(\mathbf{x},t))} \\ \frac{\delta H[\phi(t),\pi(t)]}{\delta\pi(\mathbf{x},t)} &= \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\pi(\mathbf{x},t)} - \nabla\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\nabla\pi(\mathbf{x},t))} \end{aligned} \tag{3.29}$$

Primećujemo da u Hamiltonovim jednačinama (3.28) i (3.29) prostorne koordinate ne ulaze ravnopravno sa vremenskom, tako da Lorencova invarijantnost ovako formulisane teorije nije očigledna. Međutim, ovaj prilaz je mnogo pogodniji u fizici kondenzovane materije.

3.4 Teorema Emi Neter u teoriji polja

Razmatrajmo slučaj da se integral dejstva ne menja ako koordinate x_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3)$ podležu kontinualnoj transformaciji. Uslov neprekidnosti neophodan je kako bi se mogle tretirati samo infinitezimalne transformacije. Dovoljno je posmatrati infinitezimalnu transformaciju tipa [4]:

$$x'_\mu = x_\mu + \delta x_\mu \tag{3.30}$$

gde je δx_μ mala popravka na koordinatu.

Odgovarajuća promena polja $\phi_r(x)$ biće:

$$\phi'_r(x') = \phi_r(x) + \delta\phi_r(x) \tag{3.31}$$

Date promene rezultuju promenom gustine lagranžijana:

$$\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x) \tag{3.32}$$

Radi preglednosti i konciznijeg zapisa, smatramo je gustina lagranžijana funkcija sledećih promenljivih [4]:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}\left(\phi(x), \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu}(x)\right) \tag{3.33}$$

Važno je shvatiti da se prethodne varijacije zapravo sastoje od dva procesa:

- transformacija koordinata kvadrivektora $x \to x'$
- promena oblika funkcije polja usled promene koordinata kvadrivektora $\phi(x) \to \phi'(x')$

Kao primer, zamislimo da vektorsko polje promeni svoj pravac usled rotacije koordinatnog sistema. Korisno je definisati modifikovanu, tzv. *totalnu varijaciju* koja čuva vrednost komponenti kvadrivektora x i uzima u obzir samo promenu oblika funkcije polja $\phi \to \phi'$ [4]:

$$\widetilde{\delta}\phi_r(x) = \phi'_r(x) - \phi_r(x) \tag{3.34}$$

Ove dve vrste varijacija su povezane preko sledeće relacije:

$$\begin{aligned}\widetilde{\delta}\phi_r(x) &= \phi'_r(x) - \phi'_r(x') + \phi'_r(x') - \phi_r(x) \\ &= \delta\phi_r(x) - (\phi'_r(x') - \phi'_r(x)) \\ &\simeq \delta\phi_r(x) - \frac{\partial\phi'_r(x)}{\partial x_\mu}\delta x_\mu \\ &\simeq \delta\phi_r(x) - \frac{\partial\phi_r}{\partial x_\mu} \end{aligned} \tag{3.35}$$

Prilikom dobijanja ove relacije, dodali smo i oduzeli član $\phi'_r(x')$, a u trećem redu smo iskoristili razvoj funkcije $\phi'_r(x')$ u Tejlorov red, pri čemu smo se zadržali na linearnim članovima po izvodima u prvoj aproksimaciji, te smo nakon te aproksimacije izvršili još jednu, smatrajući u prvom redu $\phi'_r(x) \to \phi_r(x)$, respektivno.

Tako ova jednačina, kao i ostale koje iz nje proizilaze su validne u prvom redu varijacija. Rešenja su zadovoljavajuća sve dok radimo sa infinitezimalnim transformacijama. Modifikovana varijacija komutira sa izvodom te im smemo zameniti redosled [4]:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\widetilde{\delta}\phi_r(x) = \widetilde{\delta}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi_r(x) \tag{3.36}$$

a to se svakako vidi iz relacije (3.34), od koje ćemo sada potražiti gradijent po koordinatama kvadrivektora x_μ, respektivno:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\delta\phi_r(x)\right) = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi'_r(x') - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi_r(x) \tag{3.37}$$

Opet koristimo "trik" da jednačini (3.37) dodamo i oduzmemo član $\frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'_\mu}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\delta\phi_r(x)\right) &= \left(\frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'_\mu} - \frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_\mu}\right) + \frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'_\mu} \\ &= \delta\left(\frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_\mu}\right) + \frac{\partial x'^\nu}{\partial x_\mu}\frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'_\nu} - \frac{\partial\phi'_r(x')}{\partial x'_\mu}\end{aligned} \tag{3.38}$$

Upotrebićemo sledeći identitet koji važi u prvoj aproksimaciji:

$$\frac{\partial x'^\nu}{\partial x_\mu} = g^{\nu\mu} + \frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x_\mu}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_\mu}\left(\delta\phi_r(x)\right) &= \delta\left(\frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_\mu}\right) + \frac{\partial\phi'_r(x')\partial\delta x^\nu}{\partial x'^\nu\partial x_\mu} \\ &= \delta\left(\frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_\mu}\right) + \frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x^\nu}\frac{\partial\delta x^\nu}{\partial x_\mu}\end{aligned} \tag{3.39}$$

Kako infinitezimalne transformacije koje smo upotrebili ostavljaju integral dejstva intvarijantnim sledi:

$$\delta W = 0 = \int_{\Omega'} d^4x'\mathcal{L}'(x') - \int_\Omega d^4x\mathcal{L}(x) \tag{3.40}$$

gde je Ω' ista zapremina kao i Ω samo je opisana novim koordinatama x'.

$$\delta W = \int_{\Omega'} d^4x'\delta\mathcal{L}(x) + \int_{\Omega'} d^4x'\mathcal{L}(x) - \int_{\Omega} d^4x\mathcal{L}(x) \tag{3.41}$$

Transformacija elementa zapremine d^4x' vrši se preko Jakobijeve determinante, što nas u prvoj aproksimaciji dovodi do:

$$d^4x' = \left| \frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}} \right| d^4x = \begin{vmatrix} 1+\frac{\partial\delta x^0}{\partial x^0} & \frac{\partial\delta x^0}{\partial x^1} & \frac{\partial\delta x^0}{\partial x^2} & \frac{\partial\delta x^0}{\partial x^3} \\ \frac{\partial\delta x^1}{\partial x^0} & 1+\frac{\partial\delta x^1}{\partial x^1} & \frac{\partial\delta x^1}{\partial x^2} & \frac{\partial\delta x^1}{\partial x^3} \\ \frac{\partial\delta x^2}{\partial x^0} & \frac{\partial\delta x^2}{\partial x^1} & 1+\frac{\partial\delta x^2}{\partial x^2} & \frac{\partial\delta x^2}{\partial x^3} \\ \frac{\partial\delta x^3}{\partial x^0} & \frac{\partial\delta x^3}{\partial x^1} & \frac{\partial\delta x^3}{\partial x^2} & 1+\frac{\partial\delta x^3}{\partial x^3} \end{vmatrix} d^4x \tag{3.42}$$

$$d^4x' = \left(1 + \frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}}\right) d^4x$$

Zanemarili smo sve članove koji sadrže varijacije višeg reda, te u prvom redu aproksimacije dobijamo:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{\Omega} d^4x\mathcal{L}(x) + \int_{\Omega} d^4x\mathcal{L}(x)\frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \\ &= \int_{\Omega} d^4x\left(\widetilde{\delta}\mathcal{L}(x) + \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial x^{\mu}\delta x^{\mu}}\right) + \int_{\Omega} d^4x\mathcal{L}(x)\frac{\partial\delta x^{\mu}}{\partial x^{\mu}} \\ &= \int_{\Omega} d^4x\left(\widetilde{\delta}\mathcal{L}(x) + \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\mathcal{L}(x)\delta x^{\mu}\right)\right) \end{aligned} \tag{3.43}$$

Sada ćemo izraziti totalnu varijaciju gustine lagranžijana:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{L}}(x) &= \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\phi_r}\widetilde{\delta}\phi_r(x) + \frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_{\mu}\phi_r)}\widetilde{\delta}\left(\frac{\partial\phi_r(x)}{\partial x_{\mu}}\right) \\ &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial\phi_r}\widetilde{\delta}\phi_r(x) - \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial x^{\mu}\delta x^{\mu}}\widetilde{\delta}\phi_r(x)\right) \\ &= \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_r} - \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_{\mu}\phi_r)}\right)\widetilde{\delta}\phi_r + \frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left(\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_{\mu}\phi_r)}\widetilde{\delta}\phi_r(x)\right) = 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Prvi sabirak u jednačini (3.44) predstavlja tzv. Ojler - Lagranževe jednačine koje naše zadato polje zadovoljava, a po definiciji je ceo prvi sabirak tada jednak nuli, dok nam preostaje:

$$\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}\left[\frac{\partial\mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_{\mu}\phi_r)}\left(\delta\phi_r(x) - \frac{\partial\phi_r}{\partial x_{\nu}}\delta x_{\nu}\right) + \mathcal{L}(x)\delta x_{\mu}\right] = 0 \tag{3.45}$$

Ova jednačina predstavlja *jednačinu kontinuiteta za vektorsko polje* [4]:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x_{\mu}}j_{\mu}(x) = 0} \tag{3.46}$$

gde je:

$$j_\mu(x) = \frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu \phi_r)}\delta\phi_r(x) - \left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial(\partial_\mu \phi_r)}\frac{\partial \phi_r}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}(x)\right)\delta x^\nu \tag{3.47}$$

kvadrivektor gustine Neterine struje.

Kao što je poznato, jednačina kontinuteta je jedan od oblika zapisa zakona održanja zapisan u diferencijalnoj formi. Ovo postaje očigledno ako jednačinu (3.46) integralimo u trodimenzionalnom prostoru i iskoristimo Gausovu teoremu [4]:

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial x_\mu} j_\mu(x) &= \int_V d^3x \frac{\partial}{\partial x_0} j_0(x) + \int_V d^3x \nabla \cdot \mathbf{j}(x) \\ &= \frac{d}{dx_0}\int_V d^3x j_0(x) + \oint_{\partial V} d\mathbf{O} \cdot \mathbf{j}(x) \end{aligned} \tag{3.48}$$

Vrednost površinskog integrala ∂V jednaka je nuli posto pretpostavljamo da polje i izvodi polja opadaju veoma brzo u beskonačnosti. Dakle, ostaju nam veličine:

$$\boxed{Q = \int_V d^3x j_0(x)} \tag{3.49}$$

kao konstante kretanja (vrednosti im se ne menjaju sa vremenom), a koje se često nazivaju Neterini naboji [4].

Ovo je esencijalni rezultat Neterine teoreme koja glasi:
"Neka je dejstvo W invarijantno na transformacije tipa (3.30), (3.31) i (3.32). Tada je moguće definisati Neterin kvadrivektor gustine struje $j_\mu(x)$ prema (3.47) tako da $\partial_\mu j_\mu(x) = 0$, a veličine $Q = \int_V d^3x j_0(x)$ su konstante kretanja i čine Neterine naboje." [4]
Sledeći podnaslovi biće posvećeni nekim važnijim primenama Neterine teoreme.

3.4.1 Invarijantnost usled translacije. Simetrizacija tenzor energije - impulsa

Neka je data infinitezimalna translacija tipa:

$$x'^\mu = x^\mu + \eta^\mu \tag{3.50}$$

koja diktira homogenost prostor - vremena. Pretpostavimo da se oblik polja ne menja usled translacije, odnosno [4]:

$$\phi_r'(x') = \phi_r(x) \tag{3.51}$$

Lokalna varijacija išezava, tj. $\delta\phi_r = 0$, te će kvadrivektor gustine Neterine struje imati jednostavan oblik. Diferencijalni oblik zakona održanja (3.46) sada glasi:

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu}\Theta_{\mu\nu} = 0 \tag{3.52}$$

gde $\Theta_{\mu\nu}$ predstavlja tzv. kanonski tenzor energije - impulsa dat izrazom [4]:

$$\boxed{\Theta_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \phi_r)}\frac{\partial \phi_r}{\partial x^\nu} - g_{\mu\nu}\mathcal{L}} \tag{3.53}$$

Zbog $\nu = 0, 1, 2, 3$, ispostavlja se da imamo četiri očuvane veličine, od kojih je jedna energija E, a druga vektor impulsa $\mathbf{P}$ polja. U četvorodimenzionalnoj notaciji:

$$P^\nu = \begin{bmatrix} \frac{E}{c} \\ P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{c} \int_V d^3x \Theta^{0\nu}(x) = const. \tag{3.54}$$

Važno je naglasiti da tenzor $\Theta_{\mu\nu}$ definisan preko (3.53) u nekim slučajevima nije simetričan. Moguće je, svakako, preći na simetričan tenzor energije - impulsa $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ dodavanjem pogodnog člana koji nestaje primenjujući 4 - divergenciju. Novi tenzor takođe zadovoljava zakone održanja (3.52) i daje iste vrednosti kvadrivektora P^μ. [4]

Definišimo modifikovan tenzor relacijom [4]:

$$T_{\mu\nu} = \Theta_{\mu\nu} + \partial^\sigma \chi_{\sigma\mu\nu} \tag{3.55}$$

gde je tenzor $\chi_{\sigma\mu\nu}$ proizvoljan, osim u slučaju permutacije prva dva indeksa, kada pokazuje osobinu antisimetrije, respektivno [4]:

$$\chi_{\sigma\mu\nu} = -\chi_{\mu\sigma\nu} \tag{3.56}$$

Ovako uveden tenzor zadovoljava jednačinu kontinuiteta:

$$\begin{aligned} \partial^\mu T_{\mu\nu} &= \partial^\mu \Theta_{\mu\nu} + \partial^\mu \partial^\sigma \chi_{\sigma\mu\nu} \\ &= \partial^\mu \Theta_{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu \partial^\sigma (\chi_{\sigma\mu\nu} + \chi_{\mu\sigma\nu}) \\ &= \partial^\mu \Theta_{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Svakako, totalna energija i impuls se ne takođe ne menjaju uvodeći modifikovan tenzor:

$$\widetilde{P}_\nu = \int_V d^3x T_{0\nu} = \int_V d^3x (\Theta_{0\nu} + \partial^0 \chi_{00\nu} + \partial^k \chi_{0k\nu}) = \int_V d^3x \Theta_{0\nu} = P_\nu \tag{3.58}$$

$\chi_{00\nu}$ iščezava zbog (3.56), a $\chi_{0k\nu}$ opada dovoljno brzo na velikim rastojanjima, tako da je osigurano da površinski integral koji dobijamo Gausovom teoremom može biti zanemaren. [4]

Naravno, ovako konstruisan tenzor energije - impulsa $T_{\mu\nu}$ je simetričan na permutovanje indeksa, tj.:

$$\boxed{T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}} \tag{3.59}$$

Svakako, tenzor energije - impulsa konstruisan je na način koji pruža jednostavniju formulaciju zakona održanja za ugaoni moment. Definišimo modifikovani tenzor ugaonog momenta [4]:

$$\widetilde{M}_{\mu\nu\lambda} = T_{\mu\lambda} x_\nu - T_{\mu\nu} x_\lambda \tag{3.60}$$

Pokažimo da ovako formulisan tenzor zadovoljava jednačinu kontinuiteta:

$$\partial^\mu \widetilde{M}_{\mu\nu\lambda} = (\partial^\mu T_{\nu\lambda}) x_\nu + g^\mu_\nu T_{\nu\lambda} - (\partial^\mu T_{\mu\nu}) x_\lambda - g^\nu_\lambda T_{\mu\nu} = T_{\nu\lambda} - T_{\lambda\nu} = 0 \tag{3.61}$$

gde je iskorišćena osobina simetrije tenzora $T_{\mu\nu}$. Tenzor $\widetilde{M}_{\mu\nu\lambda}$ može se predstaviti preko kanonskog tenzora ugaonog momenta $M_{\mu\nu\lambda}$ [4]:

$$\widetilde{M}_{\mu\nu\lambda} = M_{\mu\nu\lambda} + \partial^{\sigma}\xi_{\sigma\mu\nu\lambda} \tag{3.62}$$

gde ξ iskazuje osobinu antisimetrije na permutaciju prva dva indeksa:

$$\xi_{\sigma\mu\nu\lambda} = -\xi_{\mu\sigma\nu\lambda} \tag{3.63}$$

3.4.2 Lorenc - invarijantnost

Četvorodimenzionalan (4D) prostor - vreme između ostalog ispoljava osobinu homogenosti usled translacija i izotropnosti usled rotacija. Ono što je bitno, jeste invarijantnost usled primenjenih Lorencovih transformacija na sistem koordinata.

Lorencove transformacije su one linearne transformacije koordinata $x' = \Lambda x$, gde je Λ realna 4×4 matrica, koje ne menjaju kvadrat dužine kvadrivektora, tj. za koje važi $x'^2 = x^2$. Matrica Lorencovih transformacija data je sa [14]:

$$\begin{bmatrix} x'_0 \\ x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \tag{3.64}$$

Matrični zapis se može zapisati na elegantniji način:

$$\boxed{x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}}$$

Dakle, Lorencove transformacije možemo tretirati kao uopštenje rotacije 3D koordinatnog sistema na rotaciju 4D koordinatnog prostor - vreme sistema, gde se pored tri vremenske komponente uključuje i vreme koje više nije samo parametar, kako su predviđale transformacije galilejevskog tipa [14]. Zarad toga, posmatrajmo opštu infinitezimalnu rotaciju datu na sledeći način:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta\omega^{\mu\nu} x_{\nu} \tag{3.65}$$

Matrica $\delta\omega^{\mu\nu}$ zavisi od uglova rotacije u četiri dimenzije i ona je antisimetrična:

$$\delta\omega^{\mu\nu} = -\delta\omega^{\nu\mu} \tag{3.66}$$

Ovako data rotacija obezbeđuje da dužina kvadrivektora x^{μ}, merena respektivno Minkowski metrici, ostane invarijantna usled transformacija. Dokažimo datu tvrdnju.

Napravimo skalarni proizvod:

$$\begin{aligned} x'^{\mu} x'_{\mu} &= (x^{\mu} + \delta\omega^{\mu\sigma} x_{\sigma})(x_{\mu} + \delta\omega^{\tau}_{\mu} x_{\tau}) \\ &\approx x^{\mu} x_{\mu} + \delta\omega^{\mu\sigma} x_{\sigma} x_{\mu} + \delta\omega^{\tau}_{\mu} x^{\mu} x_{\tau} + O(\omega^2) \\ &\approx x^{\mu} x_{\mu} + 2x_{\mu} x_{\nu} \delta\omega^{\mu\nu} \approx x^{\mu} x_{\mu} + x_{\mu} x_{\nu} (\delta\omega^{\mu\nu} + \delta\omega^{\nu\mu}) + O(\omega^2) \\ &\approx x^{\mu} x_{\mu} + O(\omega^2) \end{aligned} \tag{3.67}$$

čime je tvrdnja dokazana i tačna je u najnižoj aproksimaciji, gde smo zanemarili sve članove višeg reda od linearnog.

Transformisana funkcija polja $\phi'_r(x')$ daće linearnu zavisnost od uglova rotacije i od vrednosti polja $\phi_r(x)$. Opisaćemo ovu zavisnost preko opšteg pristupa:

$$\phi'_r(x') = \phi_r(x) + \frac{1}{2}\delta\omega_{\mu\nu}\left(I^{\mu\nu}\right)_{rs}\phi_s(x) \tag{3.68}$$

Veličine $I^{\mu\nu}$ nazivaju se infinitezimalni generatori Lorencovih transformacija. Fizička polja ϕ_r transformisaće se prema ireducibilnim reprezentacijama Lorencove grupe. Dakle, $\left(I^{\mu\nu}\right)_{rs}$ su elementi matrice reprezentacije koje korespondiraju infinitezimalnom generatoru rotacija. One opisuju mešanje komponenti višekomponentnog polja (npr. spinorno, vektorsko, itd.). Infinitezimalni Lorencovi generatori mogu biti izabrani tako da budu antisimetrični respektivno Lorencovim indeksima μ i ν, $I^{\mu\nu} = -I^{\nu\mu}$, jer simetrični deo ne doprinosi (3.68), zbog (3.66). Prema tome, postoje šest nezavisnih generatora. To su, respektivno oznaci (μ,ν), sledeći generatori: $(1,2)$,$(1,3)$,$(2,3)$,$(0,1)$,$(0,2)$ i $(0,3)$, koji opisuju Lorencove *boost − ove*. Zbog kompletnosti, napomenućemo da generatori Lorencovih transformacija zadovoljavaju sledeće komutacione relacije [4]:

$$\boxed{\left[\hat{I_{\mu\nu}}, \hat{I_{\sigma\tau}}\right] = +g_{\nu\sigma}\hat{I_{\mu\tau}} + g_{\mu\tau}\hat{I_{\nu\sigma}} - g_{\nu\tau}\hat{I_{\mu\sigma}} - g_{\mu\sigma}\hat{I_{\nu\tau}}} \tag{3.69}$$

Lijeva algebra definiše strukuru Lorencove grupe, i ona je validna u ma kojoj reprezentaciji. Matrični elementi $r, s, \cdots$ u gornjem komutatoru nisu pisani, zbog preglednosti zapisa.

Relacije za transformaciju koordinata (3.65) i za polje (3.68) sada mogu biti ubačeni u Neterinu teoremu. Dobijamo izraz za gustinu Neterine struje:

$$j_\mu(x) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_r)}\frac{1}{2}\delta\omega_{\nu\lambda}(I^{\nu\lambda}_{rs}\phi_s(x) - \Theta_{\mu\nu}\delta\omega^{\nu\lambda}x_\lambda) \tag{3.70}$$

gde je $\Theta_{\mu\nu}$ već pomenuti tenzor energije impulsa dat relacijom (3.53). Ako iskoristimo antisimetrično svojstvo $\delta\omega^{\nu\lambda}$, poslednji član u gornjoj relaciji možemo zapisati kao:

$$\Theta_{\mu\nu}\delta\omega^{\nu\lambda}x_\lambda = \frac{1}{2}\delta\omega^{\nu\lambda}\left(\Theta_{\mu\nu}x_\lambda - \Theta_{\mu\lambda}x_\nu\right) \tag{3.71}$$

tada Neterina gustina struje dobija oblik:

$$j_\mu(x) = \frac{1}{2}\delta\omega^{\nu\lambda}M_{\mu\nu\lambda}(x) \tag{3.72}$$

sa uvedenom oznakom:

$$M_{\mu\nu\lambda}(x) = \Theta_{\mu\lambda}x_\nu - \Theta_{\mu\nu}x_\lambda + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi_r)}\frac{1}{2}(I^{\nu\lambda}_{rs}\phi_s(x) \tag{3.73}$$

Odgovarajuća konstanta, odnosno, odgovarajući Neterin naboj koji se očuvava u toku vremena jeste sledeći antisimetričan tenzor:

$$M_{\nu\lambda} = \int_V d^3x\left[\Theta_{0\lambda}x_\nu - \Theta_{0\nu}x_\lambda + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^0\phi_r)}\frac{1}{2}(I^{\nu\lambda}_{rs}\phi_s(x)\right] \tag{3.74}$$

Ovde $M_{\nu\lambda}$ igra ulogu tenzor angularnog, odnosno ugaonog momenta [4]. Ovo postaje očigledno za prostorne rotacije, odnosno, kada za Lorencove indekse ν i λ uzimamo vrednosti 1,2,3 , respektivno. Tada (3.74) postaje zbir dva člana:

$$\boxed{M_{nl} = L_{nl} + S_{nl}} \tag{3.75}$$

gde:

$$L_{nl} = \int_V d^3x(x_n\Theta_{0l} - x_l\Theta_{0n}) = \int_V d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0\phi_r)} \left(x_n \frac{\partial}{\partial x^l} - x_l \frac{\partial}{\partial x^n} \right) \phi_r(x) \tag{3.76}$$

a

$$S_{nl} = \int_V d^3x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^0\phi_r)} (I^{nl})_{rs} \phi_s(x) \tag{3.77}$$

Prvi deo, L_{nl}, predstavlja vektorski proizvod između vektora položaja i vektora impulsa, tako da on predstavlja orbitalni moment impulsa, ortogonalan kvadrivektorima x_n i x_l [4]. Drugi član, S_{nl}, sadrži matrice Lorencovih generatora transformacija, te on predstavlja spinski angularni, odnosno ugaoni moment, koji ima veoma komplikovanu formu za skalarna, spinorna ili vektorska polja [4].

Prostorne komponente tenzora angularnog momenta, M_{ln}, imaju tri nezavisne komponente, koje se mogu opisati trodimenzionalnim vektorom ugaonog momenta $\mathbf{J}$. Ovo se postiže kontrakcijom antisimetričnog tenzora [4]:

$$M_{nl} = \epsilon_{nlk}\mathbf{J}^k \tag{3.78}$$

Dekartove komponente vektora $\mathbf{J}$ su tada date kao:

$$J^x = M_{yz} \qquad J^y = M_{zx} \qquad J^z = M_{xy} \tag{3.79}$$

ili zapisane u konciznoj formi:

$$\boxed{J^m = \frac{1}{2}\epsilon_{mnl}M_{nl}} \tag{3.80}$$

Ovu relaciju dobijamo pravilom kontrakcije totalno antisimetričnog tenzora III ranga, tzv. Levi - Čivita tenzora [4]:

$$\epsilon_{nlk}\epsilon_{nlm} = 2\delta_{km} \tag{3.81}$$

3.4.3 Zakon održanja naelektrisanja kao posledica unutrašnje U(1) simetrije kod kompleksnog (skalarnog) polja

Neka skalarno polje ima dve realne komponente, ϕ_1 i ϕ_2, respektivno [12].

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2) \\ \phi^* &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 - i\phi_2) \end{aligned} \tag{3.82}$$

Lagranževa funkcija je zadata u sledećoj formi [12]:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi)(\partial^\mu \phi^*) - m^2 \phi^* \phi \tag{3.83}$$

Ako tretiramo ϕ i ϕ^* kao vremenski nezavisna polja, Ojler - Lagranževe jednačine daće dve Klajn - Gordonove jednačine [12]:

$$\left(\Box + m^2\right)\phi = 0 \qquad \left(\Box + m^2\right)\phi^* = 0 \tag{3.84}$$

Lagranžijan je očito invarijantan na transformacije tipa:

$$\phi \to e^{-i\lambda}\phi \qquad \phi^* \to e^{i\lambda}\phi^* \tag{3.85}$$

gde je λ realna konstanta.

Ova transformacija je poznata kao *gejdž transformacija prve vrste.* U infinitezimalnoj formi ova transformacija (3.85) ima oblik [12]:

$$\delta\phi = -i\lambda\phi \qquad \delta\phi^* = i\lambda\phi^* \qquad \delta(\partial_\mu\phi) = -i\lambda\partial_\mu\phi \qquad \delta(\partial_\mu\phi^*) = +i\lambda\partial_\mu\phi^* \tag{3.86}$$

Neterina teorema daje očuvanu struju:

$$j^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}(-i\phi) + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi^*)}(i\phi^*) \tag{3.87}$$

Ubacivanjem (3.83) u (3.88) dobijamo:

$$j^\mu = i\left(\phi\partial^\mu\phi - \phi\partial^\mu\phi^*\right) \tag{3.88}$$

Iz (3.84) neposredno sledi da primenom 4-D divergencije na relaciju (3.88), rezultat će dati nulu, odnosno $\partial_\mu j^\mu = 0$, što je već poznat rezultat, a kao korespondirajuća očuvana veličina javlja se [12]:

$$Q = \int_V j^0 dV = i\int_V \left(\phi^*\frac{\partial\phi}{\partial t} - \phi\frac{\partial\phi^*}{\partial t}\right) dV = 0 \tag{3.89}$$

ova fizička veličina može se identifikovati sa naelektrisanjem, odnosno električnim nabojem [12], te relacija:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = 0 \tag{3.90}$$

predstavlja zakon održanja naelektrisanja [12].

Kada je polje realno, tada je $\phi = \phi^*$ te je odgovarajuća gornja očuvana veličina jednaka nuli. [12]

Gejdž transformaciji (3.85) možemo pružiti i adekvantnu geometrijsku interpretaciju. Ako polje zapišemo u obliku:

$$\boldsymbol{\phi} = \phi_1\mathbf{e}_x + \phi_2\mathbf{e}_y \tag{3.91}$$

odnosno kao vektor u dvodimenzionalnom prostoru razložen prema svojim ortonormiranim bazisnim vektorima $\mathbf{e}_x$ $\mathbf{e}_y$. Lagranžijan sada ima oblik:

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \boldsymbol{\phi})(\partial^\mu \boldsymbol{\phi}) - m^2 \boldsymbol{\phi} \cdot \boldsymbol{\phi} \tag{3.92}$$

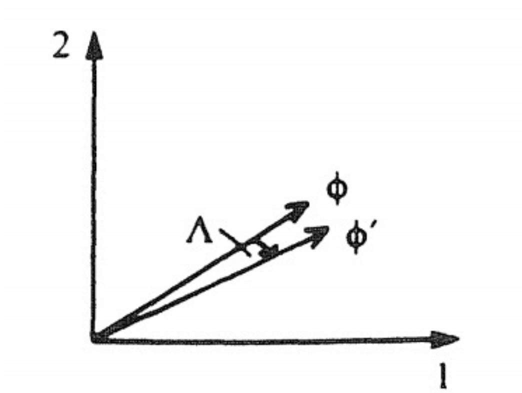
Gejdž transformacija se može zapisati u obliku:

$$\begin{aligned} \phi_1^{'} + i\phi_2^{'} &= e^{-i\lambda}(\phi_1 + i\phi_2) \\ \phi_1^{'} - i\phi_2^{'} &= e^{-i\lambda}(\phi_1 - i\phi_2) \end{aligned} \tag{3.93}$$

što je ekvivalentno sa:

$$\begin{aligned} \phi_1^{'} &= \phi_1 \cos\lambda + \phi_2 \sin\lambda \\ \phi_2^{'} &= -\phi_1 \sin\lambda + \phi_2 \cos\lambda \end{aligned} \tag{3.94}$$

Ove relacije predstavljaju čistu rotaciju u (1,2) ravni vektora $\boldsymbol{\phi}$ za ugao λ (slika 2) [12].



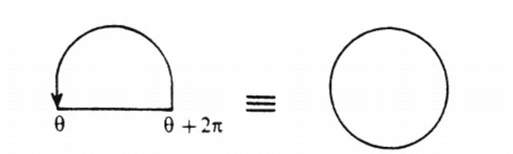
Slika 2 - rotacija polja $\vec{\phi}$ u unutrašnjem prostoru[6]

Rotacija u 2D prostoru odgovara grupi $SO(2)$ [12]. Sa druge strane, kako su transformacije reprezentovane preko $e^{i\lambda}$, što predstavlja jednodimenzionalnu unitarnu matricu:

$$e^{i\lambda} \left(e^{i\lambda}\right)^* = 1 \tag{3.95}$$

te se radi o grupi U(1) [12].

Lako je videti da su ove dve grupe iste: svaki element u SO(2) je dat preko ugla θ - ugla koji predstavlja rotaciju vektora u ravni. Prostor grupe je onda prostor vrednosti θ. Ako identifikujemo θ sa $\theta + 2\pi$,$\theta + 4\pi$ itd. , svima njima odgovara ista rotacija. Prostor grupe je tada *krug* (slika 3). Grupa U(1), je, sa druge strane, grupa svih brojeva forme $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i \sin\alpha$. Sve dok važi $\cos^2\alpha + i\sin^2\alpha = 1$ prostor ove grupe je takođe krug [12].



Slika 3 - prostor grupe SO(2)[7]

[6] Slika je preuzeta iz [12]
[7] Slika je preuzeta iz [12]

Dakle, zaključujemo da je posledica unutrašnje U(1) simetrije kod kompleksnog skalarnog polja, odnosno gejdž transformacija koja ostavlja dejstvo invarijantnim dala kao rezultujuću očuvanu vrednost naelektrisanje (električni naboj) Q [12].

3.5 Poasonove zagrade u teoriji polja. Tenzor energije - impulsa

U Hamiltonovim jednačinama polje i konjugovani impuls, $\phi(x)$ i $\pi(x)$, ne nastupaju simetrično, respektivno. Ovaj prilaz, kao ni Lagranžev, ne omogućava da se direktno nađe vremenska evolucija proizvoljnog funkcionala $F[\phi, \pi]$. Ovi problemi se u teoriji polja rešavaju slično kao i u mehanici, uvođenjem tzv. Poasonovih zagrada.

Posmatrajmo funkcional $F(t) \equiv F[\phi(t), \pi(t)]$. Ukoliko ne postoji eksplicitna zavisnost od vremena, jednačina kretanja za ovu veličinu je data sa:

$$\dot{F}(t) = \int_{\mathbf{x}} \left(\frac{\delta F(t)}{\delta \phi(\mathbf{x}, t)} \dot{\phi}(\mathbf{x}, t) + \frac{\delta F(t)}{\delta \pi(\mathbf{x}, t)} \dot{\pi}(\mathbf{x}, t) \right) \tag{3.96}$$

Ako upotrebimo Hamiltonove jednačine (3.28), jednačina kretanja za $F(t)$ postaje:

$$\dot{F}(t) = [F, H]_{PZ} \tag{3.97}$$

pri čemu je iskorišćena definicija Poasonovih zagrada dva funkcionala (argument t kod ϕ i π je ispušten radi preglednosti):

$$[F, G]_{PZ} = \int_{\mathbf{x}} \left(\frac{\delta F(t)}{\delta \phi(\mathbf{x})} \frac{\delta G(t)}{\delta \pi(\mathbf{x})} - \frac{\delta F(t)}{\delta \pi(\mathbf{x})} \frac{\delta G(t)}{\delta \phi(\mathbf{x})} \right) \tag{3.98}$$

Dakle, uvođenjem Poasonovih zagrada se direktnim putem rešava problem dinamičke zavisnosti proizvoljnog funkcionala $F[\phi, \pi]$.

Što se tiče nesimetrije Hamiltonovih jednačina u odnosu na polje i konjugovani impuls, prvo treba primetiti da je:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), H(t)]_{PZ} = \int_{\mathbf{y}} \left(\frac{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta \phi(\mathbf{y}, t)} \frac{\delta H(t)}{\delta \pi(\mathbf{y}, t)} - \frac{\delta \phi(\mathbf{x}, t)}{\delta \pi(\mathbf{y}, t)} \frac{\delta H(t)}{\delta \phi(\mathbf{y}, t)} \right) = \frac{\delta H(t)}{\delta \pi(\mathbf{x}, t)} \tag{3.99}$$

pri čemu smo iskoristili jednačine (3.27). Sličnu jednačinu dobijamo i za konjugovani impuls, tako da Hamiltonove jednačine izražene pomoću Poasonovih zagrada glase:

$$\dot{\phi}(\mathbf{x}, t) = [\phi(\mathbf{x}, t), H(t)]_{PZ} \quad ; \quad \dot{\pi}(\mathbf{x}, t) = [\pi(\mathbf{x}, t), H(t)]_{PZ} \tag{3.100}$$

U jednačinama (3.97), kao i u (3.100), $H(t)$ predstavlja Hamiltonijan sistema, a (3.100) je tražena forma jednačina u kojoj polje i konjugovani impuls ulaze simetrično. Konačno, od interesa je Poasonova zagrada samog polja i konjugovanog impulsa. Nije teško pokazati da se kao rezultat dobija:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{y}, t)]_{PZ} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \tag{3.101}$$

pri čemu treba obratiti pažnju da se, shodno (3.27), i polje i konjugovani impuls uzimaju u istom trenutku vremena. Ako polje poseduje više komponenti, jednačina (3.101) tada postaje:

$$[\phi_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{y}, t)]_{PZ} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\delta_{ij} \tag{3.102}$$

gde δ_{ij} predstavlja Kronekerov simbol, respektivno.

Takođe, nije teško pokazati da važi i:

$$[\phi_i(\mathbf{x},t),\phi_j(\mathbf{y},t)]_{PZ} = [\pi_i(\mathbf{x},t),\pi_j(\mathbf{y},t)]_{PZ} = 0 \tag{3.103}$$

Jednačine (3.97), (3.100) i (3.101) će omogućiti prelazak sa klasične na kvantnu teoriju polja metodom kanonske kvantizacije, slično kao što se sa klasične mehanike prelazi na kvantnu mehaniku [9].

U skladu sa osnovnim idejama Specijalne Teorije Relativnosti, informacije o energiji i impulsu se mogu objediniti uvođenjem tzv. tenzora energije - impulsa. Njegove komponente su definisane relacijom [11]:

$$T^{\mu}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\partial_\nu\phi \tag{3.104}$$

Kao što je poznato, očuvanje komponenti tenzora energije - impulsa je posledica invarijantnosti dejstva u odnosu na vremensku i prostorne translacije. Uvođenjem tenzora energije - impulsa, moguće je definisati i kvadrivektor impulsa kao [11, 4, 12, 10]:

$$P_\nu = \int_{\mathbf{x}} T^0_\nu(\mathbf{x}) \equiv (-P_0, P_1, P_2, P_3) \tag{3.105}$$

Lako je videti da je:

$$P_0(t) = \int_{\mathbf{x}} \left(\delta^0_0\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}\partial_0\phi\right) = \int_{\mathbf{x}} \Big(\mathcal{L} - \pi(\mathbf{x})\dot{\phi}(\mathbf{x})\Big) = -H\left[\phi(t),\pi(t)\right] \tag{3.106}$$

pri čemu je iskorišćena definicija kanonskog impulsa (3.24). Takođe, pošto za prostorne komponente kvadrivektora važi $P_i = P^i$ iz (3.105) sledi:

$$P_i = \int_{\mathbf{x}} \left(\delta^0_i\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)}\partial_i\phi\right) = -\int_{\mathbf{x}} \pi(\mathbf{x})\partial_i\phi(\mathbf{x}) \tag{3.107}$$

Odnosno, impuls pridružen polju je:

$$\mathbf{P}(t) = -\int_{\mathbf{x}} \pi(\mathbf{x},t)\nabla\phi(\mathbf{x},t) \tag{3.108}$$

Izrazi (3.25), (3.26), odnosno (3.106) i (3.108) igraju važnu ulogu prilikom interpretacije kvantovanih polja, odnosno operatora u drugoj kvantizaciji.

Važno je naglasiti da je osnovni uslov koji se nameće na Hamiltonijan slobodnog polja taj da ono bude pozitivno definisana veličina.

Poglavlje 4

4 Primena Neterine teoreme u fizici kondenzovanog stanja materije. Spontano narušenje simetrije.

U prethodna dva poglavlja bilo je reči o Neterinoj teoremi, odnosno, pojavi integrala kretanja usled postojanja kontinualne simetrije, sa osvrtom na mehaniku čestica, kao i teoriju polja. Neterina teorema, pored primene u teoriji elementarnih čestica, svoju primenu nalazi i u fizici kondenzovane materije. U ovom radu, pažnja će biti posvećena magnetnim sistemima uređenja tipa feromagnetika i antiferomagnetika, opisani Hajzenbergovim modelom. Usled simetrije Hamiltonijana, kao i simetrija osnovnih stanja na određene grupe rotacija, uočiće se da li je osnovno stanje feromagneta, odnosno antiferomagneta invarijantno na kompletnu grupu rotacija $G = O(3)$, ili samo na podgrupu grupe G, $H = O(2)$.

Diskusiju je najkonzistentnije započeti od pojma Goldstonovih bozona.

4.1 Goldstonovi bozoni

Goldstonovi bozoni su bezmasene čestice koje se javljaju pri niskim energijama u sistemima gde dolazi do spontanog narušenja globalne simetrije (konkretno narušenja simetrije osnovnog stanja). Neke od njihovih osobina su [15]:

- jedni od Goldstonovih bozona jesu magnoni čija energija teži nuli kada talasni vektor $\mathbf{k} \to 0$.
- za njihovo nastajanje potrebna je izuzetno mala količina energije.

Nambu je 1960. godine pokazao da se ove kvazičestice pojavljuju u magnetnim čvrstim telima, kada usled primene magnetnog polja dolazi do narušenja rotacione invarijantnosti [17].

Goldstonova teorema u nerelativističkom slučaju relevantna je za fiziku kondenzovanog stanja materije, jer predviđa kolektivne ekscitacije sa energijskim gepom ravnim nuli. Važi u odsustvu spinske anizotropije, te ako je ona prisutna, simetrija $\hat{H}$ postaje ekvivalentna simetriji osnovnog stanja sistema, te prestaje važenje Goldstonove teoreme. To dovodi do pojavljivanja gepa u centru Briluenove zone [15].

4.2 Analiza integrala kretanja Hajzenbergovog modela fero- i antiferomagneta

Hajzenbergov model opisuje magnetne sisteme sa lokalizovanim spinovima koji "sede" na čvorevima kristalne rešetke i dat je Hamiltonijanom $\hat{H}$:

$$\hat{H} = \frac{J}{2} \sum_{n,\lambda} \hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{S}}_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\lambda}} \qquad J = const. \tag{4.1}$$

gde je $\hat{\mathbf{S}}_{\mathbf{n}}$ vektorski operator spina na čvoru rešetke $\mathbf{n}$. Sumacija se vrši po najbližim susedima čvorova kristalne rešetke.

Hajzenbergov model je uspešno primenljiv za izučavanje ponašanja ekscitacija u okolini osnovnog stanja, konkretno za izučavanje spinskih talasa i njegovih kvanata - magnona.
U fizici kondenzovane materije, spontano narušenje simetrije se uspešno razmatra i rešava metodom efektivne teorije polja.

Invarijantnost Hajzenbergovog hamiltonijana $\hat{H}$, respektivno Lijevoj grupi $G = O(3)$, odnosno invarijantnost na rotacionu simetriju, što će reći rotacijom svih spinova za isti ugao dobijamo isti hamiltonijan, okarakterisan je generatorima naboja Q_i:

$$\left[\hat{Q}_i, \hat{H}\right] = 0 \tag{4.2}$$

što daje očuvane veličine, tzv. Neterine naboje (opisane u poglavlju 3):

$$\hat{Q}_i = \int d^3x \hat{J}_i^0(\mathbf{x}) \tag{4.3}$$

Ovi generatori zadovoljavaju komutacione relacije:

$$\left[\hat{Q}_i, \hat{Q}_j\right] = i\epsilon_{ijk}\hat{Q}_k \tag{4.4}$$

Konkretna simetrija $G = O(3)$ spontano je narušena na $H = O(2)$, ali treba napomenuti da je Hajzenbergova teorija invarijantna u celom domenu grupe G, ali osnovno stanje je invarijantno samo u podgrupi H.

Za mikroskopski opis feromagnetika, generator grupe simetrije jeste suma operatora spina po svim čvorovima rešetke, tačnije, ukupan spin sistema:

$$\hat{Q}_i = \sum_{\mathbf{n}} \hat{S}_{\mathbf{n}}^i \tag{4.5}$$

i važe komutacione relacije u opštem slučaju:

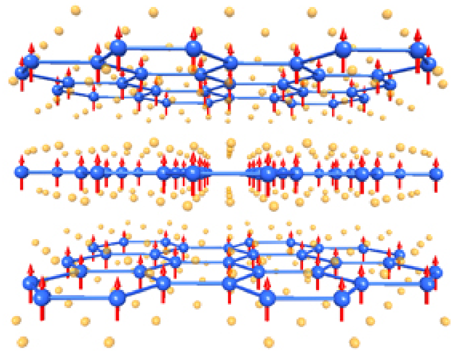
$$\left[\hat{S}_{\mathbf{n}}^i, \hat{S}_{\mathbf{m}}^j\right] = i\delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}}\epsilon_{ijk}\hat{S}_{\mathbf{m}}^k \tag{4.6}$$

gde je pored klasične relacije koja se sreće na kursu kvantne mehanike vezane za spinske komutacione relacije dodat i kronekerov simbol, jer posmatrajući kristalnu rešetku, dva operatora spina na različitim čvorevima rešetke komutiraju.
Korisno je zapisati hamiltonijan feromagnetika u sledećem obliku:

$$\hat{H} = \frac{J}{2}\sum_{n,\lambda}\left(\hat{S}_{\mathbf{n}}^z\hat{S}_{\boldsymbol{n+\lambda}}^z + \frac{1}{2}\left(\hat{S}_{\boldsymbol{n}}^+\hat{S}_{\boldsymbol{n+\lambda}}^- + \hat{S}_{\boldsymbol{n}}^-\hat{S}_{\boldsymbol{n+\lambda}}^+\right)\right) \tag{4.7}$$

Pomoću ovako zapisanog hamiltonijana, lako je uočiti da je osnovno stanje feromagnetika zapravo ono u kome su svi spinovi orijentacije ”up”[8].

[8] po konvenciji, bira se stanje ”up” kao osnovno stanje feromagnetika



Slika 4 - magnetno uređenje feromagnetika[9]

Generator rotacije spinova reprezentovan je unitarnom transformacijom [19] :

$$\hat{U}(\boldsymbol{\theta}) = exp\left(i\hat{\mathbf{S}}\cdot\boldsymbol{\theta}\right) \tag{4.8}$$

gde je $\boldsymbol{\theta}$ ugao rotacije, te:

$$\hat{U}(\boldsymbol{\theta})\hat{H}U^{\dagger}(\boldsymbol{\theta}) = \hat{H} \tag{4.9}$$

jasno uočavamo da je hamiltonijan feromagnetika zapravo invarijantan na rotaciju spinova, što ga čini invarijantnim respektivno Lijevoj grupi O(3).

Osnovno stanje feromagnetika, sa druge strane, kod koga su svi spinovi usmereni u istom smeru, navodi na to da duž treće ose (recimo z - osa) u spinskom prostoru je invarijantno samo na grupu $H = O(2)$. Ako bismo izvršili rotaciju osnovnog stanja, dobili bismo novo osnovno stanje koje je ortogonalno na već originalno osnovno stanje. Preciznije:

$$\hat{U}(\boldsymbol{\theta})|up\rangle \neq |up\rangle \tag{4.10}$$

te sistem poseduje spontano narušenje simetrije, jer osnovno stanje spontano bira orijentaciju spinova "up". Ako se u atomima koji "sede" na čvorovima kristalne rešetke nalazi jedan nespareni elektron u stanju $\uparrow$, tada će usled elektrostatičkog kulonovskog odbijanja između elektrona prostorna talasna funkcija biti antisimetrična, a kako ukupna talasna funkcija mora biti antisimetrična, tada spinska talasna funkcija mora biti simetrična, te nekuplovani spinovi u čvorevima kristalne rešetke poprimaju orijentaciju "up". Tada nam se kao očuvani naboji javljaju vrednosti:

$$\hat{Q}_z = \sum_{\mathbf{n}} \hat{S}^z_{\mathbf{n}} \tag{4.11}$$

te nam je očuvana veličina po definiciji:

$$\sum_{\mathbf{n}} \hat{S}^z_{\mathbf{n}} = \int d^3x \hat{J}^0_z \tag{4.12}$$

[9]Slika je preuzeta sa sajta: $https://www.ornl.gov/content/thin-magnetic-crystals-are-path-ferromagnetic-graphene$

Ako gornju jednačinu usendvičimo između osnovnog stanja $|up\rangle$ dobijamo:

$$NS = V\langle up|\hat{J}_z^0|up\rangle \tag{4.13}$$

gde N predstavlja ukupan broj čvoreva kristalne rešetke, S je maksimalna srednja vrednost spinskog operatora $S_{\vec{n}}^z$, a V je ukupna zapremina kristala.

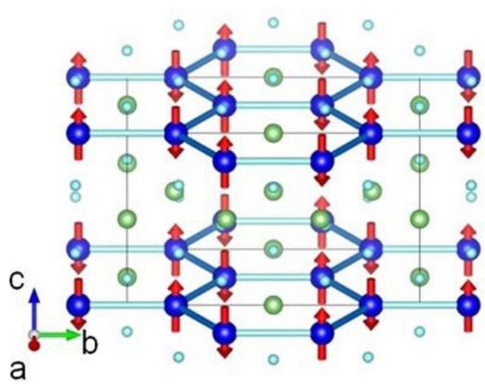
Prema tome, očuvana vrednost z - komponente operatora Neterine struje u osnovnom stanju je različita od nule:

$$\boxed{\langle up|J_i^0|up\rangle = \delta_i^z \frac{NS}{V} = \delta_i^z \Sigma} \tag{4.14}$$

gde Σ predstavlja spontanu magnetizaciju.

Ova veličina predstavlja parametar uređenja feromagnetika, te različitost od nule ove veličine je direktni ukazatelj na spontano narušenje simetrije. Ako bi osnovno stanje feromagnetika bilo simetrično respektivno grupi $O(3)$, nijedan od operatora $\hat{J}_i^0$, koji se transformiše netrivijalno u grupi $O(3)$ ne bi dao očekivanu vrednost u stanju $|up\rangle$ različitu od nule. Činjenica da se ovo ne događa sa komponentom $\hat{J}_z^0$, direktno ukazuje da osnovno stanje feromagnetika nije invarijantno respektivno grupi O(3), već je ono invarijantno respektivno podgrupi $H = O(2)$, te nam $\langle up|\hat{J}_z^0|up\rangle \neq 0$ nudi kvantitativno merljivu veličinu kao ukazatelj spontanog narušenja simetrije [18].

Antiferomagnet je sistem koji se sastoji od dve ili više podrešetki, tako da najbliži susedi pripadaju različitim podrešetkama. Neka spinovi u podrešetki a budu usmereni $\uparrow$, a spinovi u podrešetki b u smeru $\downarrow$. Time zaključujemo da je spontana magnetizacija antiferomagnetika jednaka nuli.



Slika 5 - magnetno uređenje antiferomagneta[10]

Hamiltonijan, nakon uvođenja operatora podizanja i spuštanja $\hat{S}^+$ i $\hat{S}^-$, respektivno, postaje:

$$\hat{H} = \frac{J}{2}\sum_{\boldsymbol{n}\in a,\boldsymbol{\lambda}} \left(\hat{S}_{\boldsymbol{n}}^z(a)\hat{S}_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\lambda}}^z(b) + \frac{1}{2}\left(\hat{S}_{\boldsymbol{n}}^+(a)\hat{S}_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\lambda}}^-(b) + \hat{S}_{\boldsymbol{n}}^-(a)\hat{S}_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\lambda}}^+(b)\right)\right) \tag{4.15}$$

[10]Slika je preuzeta sa sajta: $http://images.iop.org/objects/jio/labtalk/3/11/5/figure1.jpg$

pri čemu se sumiranje vrši po najbližim susedima.
Stanje u kome svi spinovi a podrešetke bivaju u $\uparrow$ orijentaciji, a oni iz podrešetke b u $\downarrow$ orijentaciji, predstavlja osnovno stanje klasičnog antiferomagneta i naziva se Nelovo stanje [13]:

$$|Nel\rangle = \prod_{\boldsymbol{n}\in a} |S, S^z = +S\rangle_{\mathbf{n}} \prod_{\boldsymbol{m}\in b} |S, S^z = -S\rangle_{\mathbf{m}} \tag{4.16}$$

Analiza antiferomagneta u okviru teorije spinskih talasa zahteva postojanje jedinstvene ose kvantizacije. Kako ovde imamo spinove u fazi "up" i "down", ovaj problem rešavamo tako što npr. podrešetku b rotiramo oko x - ose za 180°[20, 21], odnosno zamenom:

$$\hat{S}^{\pm}_{\mathbf{m}}(b) \to +\hat{S}^{\mp}_{\mathbf{m}}(b) \qquad \hat{S}^{z}_{\mathbf{m}}(b) = -\hat{S}^{z}_{\mathbf{m}}(b) \tag{4.17}$$

ako sada (4.17) iskoristimo u (4.15) dobija se:

$$\hat{H} = \frac{J}{2}\sum_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{\lambda}} \left(-\hat{S}^z_{\boldsymbol{n}}(a)\hat{S}^z_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\lambda}}(b) + \frac{1}{2}\left(\hat{S}^+_{\boldsymbol{n}}(a)\hat{S}^+_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\lambda}}(b) + \hat{S}^-_{\boldsymbol{n}}(a)\hat{S}^-_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\lambda}}(b)\right)\right) \tag{4.18}$$

Dok se za Nelovo stanje dobija:

$$|Nel\rangle = \prod_{\boldsymbol{n}\in a} |S, S^z = +S\rangle_{\mathbf{n}} \prod_{\mathbf{m}\in b} |S, S^z = +S\rangle_{\mathbf{m}} \tag{4.19}$$

U novom, tzv. lokalnom koordinatnom sistemu, Nelovo stanje izgleda kao feromagnetno. Takođe, jasno je da zbog člana $\hat{S}^-_{\boldsymbol{n}}(a)\hat{S}^-_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\lambda}}(b)$ nije osnovno stanje Hajzenbergovog antiferomagneta. Pravo osnovno stanje antiferomagneta odlikuje se kvantnim fluktuacijama (odstupanjima od Nelovog stanja), koje se, usled strukture hamiltonijana (4.15) prenose kroz celu rešetku [16].
Kvantne fluktuacije snižavaju vrednost magnetizacije podrešetke u osnovnom stanju. Hamiltonijan nakon bozonizacije Holštajn - Primakov reprezentacijom[11], uz aproksimaciju linearne teorije spinskih talasa, zanemarivanjem proizvoda četiri boze operatora[12], kao i konačnom dijagonalizacijom hamiltonijana Bogoljubovljevom transformacijom, dobija se hamiltonijan u aproksimaciji spinskih talasa:

$$\hat{H}_{SW} = \sum_{\alpha}\sum_{\mathbf{k}} \omega^{\alpha}(\mathbf{k})\mathcal{N}^{\alpha}_{\mathbf{k}} + const. \tag{4.20}$$

Osnovno stanje opisano je kao vakuum boze čestica ($\mathcal{N}^{\alpha}_{\mathbf{k}} = 0$). Elementarne ekscitacije sistema (kvantni tzv. spinskih talasa) nazivaju se magnonima, sa energijama jednakim $\omega^{\alpha}(\mathbf{k})$. Pri zagrevanju magnetika, toplotni kvant smanjuje projekciju spina na jednom čvoru kristalne rešetke za jedinicu, usled čega spin počinje da precesira oko svoje nove srednje vrednosti. Ovaj poremećaj se zbog interakcije izmene prenosi na ostale čvorove magnetne rešetke usled čega se pojavljuje talas "zaljuljanih" spinova, tzv. spinski talas [23].

[11]Furijeova transformacija nije kanonska za spinske operatore, a jeste za bozonske, te zato vršimo bozonizaciju hamiltonijana. Furijeova transformacija predstavlja alat za prelazak u recipročni prostor koji daje potpunu informaciju o simetriji nekog kristala [22].

[12]Zanemarivanjem ovog proizvoda zanemarujemo zapravo magnon - magnon interakciju, što je dozvoljena aproksimacija na niskim temperaturama, gde magnone tretiramo kao neinteragujuće čestice [16].

Slika 6 - Spinski talas[13]

Pritom, vakuumu sistema odgovara $\langle \hat{n}^{\alpha}_{\mathbf{k}} \rangle_0 \neq 0$, što govori o postojanju kvantnih fluktuacija u osnovnom stanju sistema, što rezultuje smanjenjem magnetizacije podrešetke na $T = 0K(\langle \hat{S}^z(\alpha) \rangle_0 < S)$, koje je, uzgred, eksperimentalno potvrđeno [16]. Parametar uređenosti kvantnog antiferomagneta je Nelov vektor:

$$\hat{\mathbf{N}} = \sum_{\boldsymbol{n} \in a} \hat{\mathbf{S}}_{\boldsymbol{n}}(a) - \sum_{\boldsymbol{m} \in b} \hat{\mathbf{S}}_{\boldsymbol{m}}(b) \tag{4.21}$$

Dakle, već je napomenuto da pravo osnovno stanje antiferomagneta, u oznaci $|\Omega\rangle$ odlikuje se kvantnim fluktuacijama za razliku od Nelovog stanja, $|Nel\rangle$. Nelov vektor definiše preferirani pravac u spinskom prostoru i osnovno stanje antiferomagneta je invarijantno u odnosu na rotaciju oko tog pravca. Nelov vektor nije integral kretanja, što uzrokuje velike posledice na osnovno stanje Hajzenbergovog modela antiferomagneta, nego ono zadovoljava komutacione relacije [15]:

$$\left[\hat{\mathbf{N}}, \hat{H}\right] = -2i \sum_{\boldsymbol{n},\boldsymbol{\lambda}} \hat{\mathbf{S}}_{\boldsymbol{n}}(a) \times \hat{\mathbf{S}}_{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{\lambda}}(b) \qquad \left[\hat{S}_i, \hat{N}_i\right] = i\epsilon_{ijk}\hat{N}_k \tag{4.22}$$

Radi poređenja sa eksperimentalnim rezultatima, pogodno je Nelov vektor izabrati da leži duž z - ose.

Tada se za parametar uređenja, koji karakteriše antiferomagnetnu fazu, koristi magnetizacija podrešetke (srednja magnetizacija obračunata po čvoru kristalne rešetke) $\alpha = a, b$, definisana kao [15, 16]:

$$\langle \hat{S}^z(\alpha) \rangle = \frac{1}{N_\alpha} \sum_{\mathbf{n} \in \alpha} \langle \hat{S}^z_{\mathbf{n}}(\alpha) \rangle \tag{4.23}$$

gde je N_α broj čvorova podrešetke.

Dakle, za slučaj feromagnetnog uređenja parametar uređenja je ukupni spin sistema, definisan relacijom (4.5), koji komutira sa operatorom Hajzenbergovog hamiltonijana, predstavlja integral kretanja, te se u osnovnom stanju ne javljaju kvantne fluktuacije, dok se kod antiferomagneta kao parametar uređenja uzima magnetizacija podrešetke, a kako Nelov vektor ne komutira sa operatorom Hajzenbergovog hamiltonijana, jasno je da kod osnovnog stanja antiferomagneta dolazi do kvantnih fluktuacija.

[13]Slika je preuzeta sa sajta: $https : //i.ytimg.com/vi/pWQ3r - 2Xjeo/hqdefault.jpg$

5 Zaključak

U radu je predstavljena teorema Emi Neter. Videli smo da usled invarijantnosti dejstva pri kontinualnoj transformaciji koordinata datom fizičkom sistemu pripisujemo integral kretanja (veličinu koja se očuvava u toku vremena). Upravo vezu između simetrije sistema i tzv. zakona održanja u analitičkoj mehanici diktira Neterina teorema. Naime, usled translacione, rotacione i vremenske invarijantnosti, primenom Neterine teoreme dobili smo zakone održanja impulsa, momenta impulsa i energije, respektivno. U teoriji polja, gde se primenjuje relativistička mehanika i zahtev da lagranžijan bude Lorencov skalar, kako se ne bi menjao prilikom primene Lorencovih transformacija, formulisan je Neterin 4 - vektor, čija vremenska komponenta usled integracije u 3D prostoru daje konstantnu kretanja - tzv. Neterini naboji (naelektrisanja). Sledeći analogiju sa klasičnom, u relativističkoj mehanici se usled translacione invarijantnosti javlja kao integral tenzor energije - impulsa, a usled rotacione invarijantnosti se kao integral kretanja javlja tenzor ugaonog momenta. Ako sistem poseduje tzv. U(1) simetriju, tada se neposredno primenom Neterine teoreme javlja kao integral kretanja naelektrisanje. U poslednjem poglavlju primenjena je Neterina teorema na fizičke sisteme fero - i antiferomagnetnih materijala opisanih Hajzenbergovim modelom. Kao integrali kretanja javljaju se ukupan spin sistema (feromagnet), odnosno magnetizacija podrešetke (antiferomagnet).

Reference

[1] A. Balaž, Magistarski rad: *Nova rekurzivna formula za funkcionalni integral u kvantnoj mehanici: analitičke i numeričke osobine*, Univerzitet u Beogradu - Fizički fakultet , Beograd (2004.)

[2] D. Stojiljković, Diplomski rad: *Metod efikasnog računanja energetskog spektra u funkcionalnom formalizmu*, Univerzitet u Beogradu - Fizički fakultet , Beograd (2005.)

[3] R. Courant, R; D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics. Vol. I (First English edition)*, New York (1953.)

[4] W. Greiner, J. Reinhardt, *Field Quantization*, Springer - Verlag, Berlin (1996.)

[5] Đ. Mušicki, *Uvod u teorijsku fiziku - Teorijska mehanika*, IRO "Građevinska knjiga", Beograd (1980.)

[6] V. Radovanović, *Teorijska mehanika - Lagranževa i Hamiltonova mehanika*, Fizički fakultet, Beograd (2015.)

[7] B. S. Milić, *Njutnova mehanika*, Studentski trg, Beograd (1997.)

[8] N. Zovko, *Osnovi relativističke kvantne fizike*, Školska knjiga, Zagreb (1987.)

[9] L. I. Šif, *Kvantna Mehanika*, Vuk Karadžić, Beograd (1968.)

[10] M. E. Peskin, D. V. Schroder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison - Wesley (1995.)

[11] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields I*, Cambrigde University Press (2008.)

[12] L. H. Ryder, *Quantum Field Theory*, Cambridge University Press, (1996.)

[13] Alexander Atland, Ben Simons, *Condesed Matter Field Theory*, Cambridge University Press, (2006.)

[14] V. Radovanović, *Specijalna teorija relativnosti*, Univerzitet u Beogradu, Beograd (2015.)

[15] S. Radošević, Doktorska disertacija: *Termodinamička svojstva složenih antiferomagnetnih sistema opisanih Hajzenbergovim modelom*, Univerzitet u Novom Sadu - Prirodno - matematički fakultet, Novi Sad (2012.)

[16] S. Radošević, Master rad: *Magnetne osobine antiferomagnetnih halogenida mangana*, Univerzitet u Novom Sadu - Prirodno - matematički fakultet, Novi Sad (2009.)

[17] M. Kachelrieß, *From the Hubble to the Planck Scale: An Introduction to Quantum Fields*, Department of Physics - NTNU TRONDHEIM, Norway (2016.)

[18] C. Hofmann, *Spin-wave scattering in the effective Lagrangian perspective*, Department of Physics, University of California at San Diego, San Diego (1998.)

[19] R. White, T. Geballe, *Long Range Order in Solids: Solid State Physics*,

[20] A. Auerbach, *Interacting Electrons and Quantum Magnetism*, Springer-Verlag, (1994.)

[21] D. C. Mattis, *Theory of Magnetism I*, Springer - Verlag, Berlin (1988.)

[22] P. Mali, Diplomski rad: *Primena samousaglašene aproksimacije u analizi slojevitih antiferomagnetika*, PMF Novi Sad, (2011.)

[23] M. Manojlović, Diplomski rad: *"Spinske ekscitacije i termodinamičke osobine antiferomagnetika tipa* La_2CuO_4 *sa interakcijama prvih i drugih suseda"*, PMF Novi Sad, (2002.)

6 Kratka biografija kandidata

Nemanja Micić je rođen 8.12.1993. godine u Zrenjaninu. Osnovnu školu "Servo Mihalj" u Zrenjaninu završava školske 2008/09. godine i iste upisuje Tehničku školu u Zrenjaninu, smer: Mašinski tehničar za kompjutersko upravljanje. Akademske 2012/13. godine upisuje osnovne studije na Prirodno matematičkom fakultetu, Univerziteta u Novom Sadu, modul diplomirani profesor fizike, gde sve ispite predviđene planom i programom polaže u roku sa prosečnom ocenom 9.54 i time stiče pravo na odbranu diplomskog rada i sticanje stručnog zvanja diplomirani profesor fizike. Tokom studija, Nemanja učestvuje na manifestacijama promocije fizike poput: Festival nauke, Festival svetlosti i Noć istraživača. Svoje iskustvo u radu sa učenicima Osnovne škole stiče u Udruženju građana Futog, gde dve godine volontira i priprema učenike završnih razreda za polaganje maturskog ispita iz fizike i matematike, a iskustvo u radu sa učenicima srednje škole stiče na stručnoj praksi u Gimnaziji "Jovan Jovanović Zmaj" pod mentorstvom prof. dr Maje Stojanović.

U Novom Sadu, 14.9.2016.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj:
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Diplomski rad
VR
Autor: Nemanja Micić
AU
Mentor: doc.dr Slobodan Radošević
MN
Naslov rada: Uloga Neterinog naboja u savremenim fizičkim teorijama sa aspekta funkcionalnog formalizma
NR
Jezik publikacije: srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: srpski/engleski
JI
Zemlja publikovanja: Republika Srbija
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2016.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA
Fizički opis rada: 4 poglavlja/41 strana/23 reference/4 slike
FO
Naučna oblast: Fizika
NO
Naučna disciplina: Teorijska fizika kondenzovane materije
ND
Predmetna odrednica/ ključne reči: Teorema Emi Neter, kontinualna simetrija
PO

UDK
Čuva se: Biblioteka departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu
ČU
Važna napomena: nema
VN
Izvod: U radu je analizirana teorema Emi Neter kroz tri poglavlja savremene fizike: analitička mehanika, klasična teorija polja i fizika kondenzovane materije. Ispostavlja se da ako neki fizički sistem poseduje kontinualnu simetriju, prema teoremi Emi Neter, sistem poseduje integral kretanja. U radu su za svaku od navedenih oblasti analizirani jedni od najvažnijih primena Neter Teoreme.
IZ
Datum prihvatanja teme od NN veća: Novembar, 2015.
DP
Datum odbrane: 26.9.2016.
DO
Članovi komisije:
KO

Predsednik:	prof. dr Milan Pantić, redovni profesor
član:	prof. dr Slobodan Radošević, docent
član:	prof. dr Maja Stojanović, vanredni profesor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph publication
DT
Type of record: Textual printed material
TR
Content code: Final paper
CC
Author: Nemanja Micić
AU
Mentor: doc.dr Slobodan Radošević
MN
Title: The importance of Noether charge in modern physical theories from the aspect of functional formalism
TI
Language of text: srpski (latinica)
LT
Language of abstract: English
LA
Contry of publication: Republika Srbija
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2016.
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publication place: Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
PP
Physical description: 4 chapters/41 pages/23 references/4 pictures
PD
Scientific field: Physics
SF
Scientific discipline: Theoretical condensed matter physics
SD
Subject/Key words: Noether's theorem, Continuous symmetry

SKW
UDK
Holding data: Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4
HD
Note: none
N
Abstract: Emmy Noether's theorem is examined through three fields of modern physics: analytical mechanics, classical field theory and condensed matter physics. It turns out that, if the system possesses continuous symmetry, according to Noether's theorem, it also possesses integral of motion. Most significant uses of Noether's theorem were examined for each of the fields.
AB
Accepted by the Scientific Board: November, 2015.
ASB
Defended on: 26.9.2016.
DO
Thesis defend board:
DB
President: prof. dr Milan Pantić, Full professor
Member: prof. dr Slobodan Radošević, Docent
Member: prof. dr Maja Stojanović, Assistant professor