UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET

KOHERENTNA SPINSKA STANJA I SOLITONI U KOMPRESIBILNOM FEROMAGNETNOM LANCU

- DIPLOMSKI RAD -

RAUŠ MILUTIN

Novi Sad, jun 1988.

Zahvaljujem se Dr Mariju Škrinjaru na
nesebičnoj pomoći i strpljenju, kao i
Dr Darku Kaporu na sugestijama

Rauš Milutin

SADRŽAJ

I. UVOD

Još 1824 godine J.S. Russel je opisao prostiranje neobičnog talasa (solitary wave) na vodi u jednom kanalu, koji je zadržavao oblik i konstantnu brzinu tokom kretanja. Objašnjenje ove pojave leži u sledećem. Predpostavimo da se u nekoj sredini formirao talasni paket tako da se svi njegovi djelovi kreću istom brzinom (tj. nema disperzije), uz zanemarljivo trenje. Takav talasni paket bi se prostirao bez promjene oblika i brzine. To je moguće u sredinama bez disperzije i trenja i čija svojstva ne zavisi od stanja sredine (tj. važe linearne jednačine kretanja). U opštem slučaju realne materijalne sredine posjeduju gornje osobine a i osobinu nelinearnosti, tj. da svojstva sredine zavise od stanja sredine. Posmatramo sada sredinu koja ima samo osobinu disperzije (pojava zavisnosti brzine talasa od njegove talasne dužine). U takvoj sredini došlo bi do promjene oblika talasnog paketa tj. on bi se rasplinuo. Slično bi se desilo ako bi sredina posjedovala samo nelinearnost. Međutim, ako se talasni paket kreće u sredini u kojoj postoji disperzija i nelinearnost uz zanemarljivo trenje, tada on može da se prostire bez promjene oblika i brzine. Ovaj slučaj se javlja kada je disperzija kompezovana nelinearnošću i ovakav talas se naziva solitonom. Eksitacije solitonskog tipa javlju se u drugim sredinama (osim u vodi) kao na primer u: poluprovodnicima; superpro- vodnicima; feromagneticima, itd. Gledano sa matematičke strane solitoni su rješenja različitih nelinearnih talasnih jednačina i posjeduju niz interesantnih osobina. Spomenuli smo već da zadržavaju oblik i brzinu, a svakako najinteresantnija je osobina da pri uzajamnom sudaru solitoni ne menjaju oblik ni brzinu (već samo fazu u onim slučajevima kad su solitonska rješenja data kompleksnim funkcijama).

Sve gore navedene osobine podsjećaju na osobine elementarnih čestica pa zbog toga i termin soliton. Detaljnije o osobinama solitona u različitim sredinama kao i njihovoj ulozi u tumačenju mnogih fenomena može se naći u literaturi (npr. |1| i reference citirane u tim knjigama).

U ovom radu ćemo posmatrati solitone u anizotropnom Hajzenbergovom lancu, čiji je hamiltonijan sistema u aproksimaciji interakcije najbližih suseda dat u obliku:

$$H = -J \sum_n \vec{S}_n \vec{S}_{n+1} - \mu\varkappa \sum_n S^z_n - J\tau \sum_n S^z_n S^z_{n+1} \qquad (1.1.)$$

gdje je: J integral izmjene; $\tau = \frac{J-J_z}{J}$ koeficijent anizotropije; μ je spoljašnje magnetno polje; $\vec{S}_n$ -operatori spina na čvoru n. Zbog prisustva fonona (oscilacija rešetke) integral izmene se menja, što dovodi do spin-fonon interakcije. U linearnoj aproksimaciji po fononskim pomerajima dobijemo:

$$J(n-m) \to J(n+U_n-m-U_m) \cong J(n-m) + (U_n-U_m) \left.\frac{\partial J}{\partial(n-m)}\right|_{U=0}^{+} =$$

$$= J(n-m) + g(U_n-U_m)$$

za $R = n-m > 0$; $\frac{\partial J}{\partial R} = g$

Koristeći navedeni razvoj, hamiltonijan dobije sledeći oblik:

$$H = \sum_n \frac{P_n^2}{2M} + \frac{\varkappa}{2} \sum_n (U_{n+1}-U_n)^2 - J \sum_n \vec{S}_n \vec{S}_{n+1} - J\tau \sum_n \vec{S}_n \vec{S}_{n+1} -$$

$$- \sum_n (U_{n+1}-U_n) \vec{S}_n \vec{S}_{n+1} - g\tau \sum_n (U_{n+1}-U_n) S^z_n S^z_{n+1} - \mu\varkappa \sum_n S^z_n$$

Ako uzmemo da je osnovno stanje sistema dato sa $S^z = S$, možemo pisati:

$$H = \sum_n \frac{p_n^2}{2M} + \frac{\varkappa}{2}\sum_n (U_{n+1}-U_n)^2 - \mu\varkappa \sum_n (S_n^z - S) - J\sum_n (\vec{S}_n \vec{S}_{n+1} - S^2) -$$
$$- JNS^2 - \mu\varkappa NS - J\tau \sum_n (S_n^z S_{n+1}^z - S^2) - J\tau NS^2 - g\sum_n (U_{n+1}-U_n)\,\cdot$$
$$\cdot(\vec{S}_n\vec{S}_{n+1} - S^2) - g\tau \sum_n (U_{n+1}-U_n)(S_n^z S_{n+1}^z - S^2) - g\sum_n (U_{n+1}-U_n)S^2$$
$$- g\tau\sum_n (U_{n+1}-U_n)S^2 \qquad (1.2.)$$

Sume poslednja dva člana su jednaki nuli pri periodičnim graničnim uslovima, i energija osnovnog stanja je data kao:

$$E_0 = -\mu\varkappa NS - J(1+\tau)S^2N$$

Međutim u slučaju kada u sistemu postoje solitonska pobuđenja posljednja dva člana nisu jednaki nuli jer fononski pomjeraj ima oblik kinka, tako da ti članovi doprinose energiji sistema. Zbog toga je pogodno hamiltonijan napisati u obliku:

$$\hat{H} = E_0 + \hat{H}_{ph} + \hat{H}_s + \hat{H}_{int} - g(1+\tau)S^2 \sum_n (U_{n+1}-U_n) \qquad (1.3.)$$

gdje su: $\hat{H}_{ph} = \sum_n \frac{p_n^2}{2M} + \frac{\varkappa}{2}\sum_n (U_{n+1}-U_n)^2$ - hamiltonijan fononskog podsistema,

$$\hat{H}_s = -\mu\varkappa \sum_n (S_n^z - S) - J\sum_n (\vec{S}_n\vec{S}_{n+1} - S^2) - J\tau\sum_n (S_n^z S_{n+1}^z - S^2) -$$

- hamiltonijan spinskog podsistema

$$\hat{H}_{int} = -g\sum_n (U_{n+1}-U_n)\cdot(\vec{S}_n\vec{S}_{n+1} - S^2) - g\tau\sum_n (U_{n+1}-U_n)(S_n^z S_{n+1}^z - S^2) -$$

-hamiltonijan spin -fonon interakcije

U sledećoj glavi, koristeći specijalnu unitarnu transformaciju, pokazaćemo kako se može uračunati doprinos posljednjeg člana u hamiltonijanu (1.3).

II. GLAVA

Unitarna transformacija Hamiltonijana sistema sa spin-fonon interakcijom i prelaz na kontinuum.

Da bi smo mogli vidjeti koliki je doprinos poslednjeg člana u hamiltonijanu (1.3.), energiji sistema izvršićemo unitarnu trnsformaciju hamiltonijana.

$\hat{H}_{eq} = \hat{U}^{-1}\hat{H}\hat{U}$ gde je $\hat{U} = e^{-i/\hbar \sum_n \hat{p}_n \beta_n}$; β_n - realan broj

Koristeći osobinu da $\hat{U}$ komutira sa svim operatorima osim $\hat{U}_n$ i s obzirom na relaciju:

$$\hat{U}^{-1} U_n \hat{U} = U_n + \beta_n$$

dobijamo:

$$\hat{H}_{eq} = E_0 + \hat{H}_{ph} + \hat{H}_s + \hat{H}_{int} - g(1+\tau)S^2 \sum_n (U_{n+1} - U_n) + g \sum_n (\beta_{n+1} - \beta_n) \cdot$$

$$\cdot (U_{n+1} U_n) - g \sum_n (\beta_{n+1} - \beta_n)(\vec{S}_n \vec{S}_{n+1} - S^2) - g\tau \sum_n (\beta_{n+1} - \beta_n) \cdot$$

$$\cdot (S_n^z S_{n+1}^z - S^2) + \frac{\varkappa}{2} \sum_n (\beta_{n+1} - \beta_n)^2 - g(1+\tau)S^2 \sum_n (\beta_{n+1} - \beta_n) \tag{2.1.}$$

Ako stavimo:

$$\beta_{n+1} - \beta_n = \frac{g(1+\tau)S^2}{\varkappa}$$

dobijamo:

$$\hat{H}_{eq} = E_0 - J_R \sum_n (\vec{S}_n \vec{S}_{n+1} - S^2) - \tau J_R \sum_n (S_n^z S_{n+1}^z - S^2) + \hat{H}_{int} + H_{ph}$$

gde je:

$$\hat{E}_0 = E_0 - \frac{g^2(1+\tau)}{2\varkappa} S^4 \cdot N \qquad J_R = J\left(1 + \frac{g^2(1+\tau)S^2}{J\varkappa}\right)$$

Kao što vidimo unitarna transformacija dovodi do renomalizacije integrala izmjene i smanjenje energije osnovnog stanja. Pošto svaki sistem teži stanju sa što nižom energijom, ovom transformacijom smo u stvari stabilizovali hamiltonijan sistema. U daljem radu koristićemo transformisani hamiltonijan u obliku.

$$H = H_{eq} - \hat{E}_0 = -J_R \sum_n (\vec{S}_n \vec{S}_{n+1} - S^2) - \tau J_R \sum_n (S_n^z S_{n+1}^z - S^2) -$$

$$- g \sum_n (U_{n+1} U_n) \left[(\vec{S}_n \vec{S}_{n+1} - S^2) + \tau (S_n^z S_{n+1}^z - S^2) \right] + H_{ph} \qquad (2.2.)$$

Da bi dobili klasičnu hamiltonovu funkciju vršimo usrednjavanje hamiltonijana (2.2.) po proizvodu spinskih koherentnih i fononskih stanja.

$$|\psi\rangle = |\alpha\rangle|\beta\rangle = \prod_m |\alpha_m\rangle \cdot \prod_n |\beta_n\rangle \qquad (2.3.)$$

gde je za spin S=1/2

$$|\alpha_m\rangle = \frac{e^{\alpha_m(t)\hat{S}^-_m}}{(1+|\alpha_m|^2)^{1/2}} |0\rangle = \frac{1}{(1+|\alpha_m|^2)^{1/2}} (|0\rangle + \alpha_m |1\rangle) \qquad (2.4.)$$

$$\text{i} \quad |\beta_n\rangle = e^{-i/\hbar \sum_n (\hat{p}_n U_n - \hat{H}_{ph} t)} |0\rangle \qquad (2.5)$$

Pri prelazu na kontinuum koristimo sledeće razvoje:

$$\vec{S}_n \vec{S}_{n+1} \cong S^2 + \vec{S} \left(a \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 \vec{S}}{\partial x^2} + \frac{a^3}{3!} \frac{\partial^3 \vec{S}}{\partial x^3} + \ldots \right)$$

$$U_{n+1} - U_n \cong a \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{a^3}{3!} \frac{\partial^3 U}{\partial x^3}$$

i prelazimo sa sume na integral po pravilu $\sum_n = \frac{1}{a}\int dx$, jednostavnim (ali dugačkim) računom za hamiltonovu funkciju u kontinualnoj aproksimaciji dobijamo:

$$H = \frac{J_R a^2}{2}\int(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x})^2 dx - J_R\tau\int(S^{z^2}-S^2)dx + \frac{J_R\tau a^2}{2}\int(\frac{\partial S^z}{\partial x})dx +$$

$$+ \frac{ga^3}{2}\int\frac{\partial U}{\partial x}(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x})^2 dx - g\tau a\int\frac{\partial U}{\partial x}(S^{z^2}-S^2)dx -$$

$$- \frac{g\tau a^3}{3}\left\{\int\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial^2 S^z}{\partial x^2}S^z - \frac{1}{2}\frac{\partial U}{\partial x}(\frac{\partial S^z}{\partial x})^2\right\}dx + H_{ph} \qquad (2.6.)$$

Ako (2.3.) napišemo u obliku

$$H = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\mathcal{H}\, dx$$

za gustinu hamiltonijana dobijemo:

$$\mathcal{H} = -\mu\varkappa(S^z-S) + \frac{J_R a^2}{2}(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x})^2 - J_R\tau(S^{z^2}-S^2) + \frac{J_R\tau a^2}{2}(\frac{\partial S^z}{\partial x}) +$$

$$+ \frac{ga^3}{2}\frac{\partial U}{\partial x}(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x})^2 - g\tau a\frac{\partial U}{\partial x}(S^{z^2}-S^2) - \frac{g\tau a^3}{2}\frac{\partial U}{\partial x}\left[S^z\frac{\partial^2 S^z}{\partial x^2} - \frac{1}{2}(\frac{\partial S^z}{\partial x})^2\right] +$$

$$+ \frac{p^2}{2M} + \frac{Mv_0^2}{2}(\frac{\partial U}{\partial x})^2 \qquad (2.7.)$$

Koristeći hamiltonijan (2.4.) možemo dobiti klasične jednačine kretanja |2| (jednačine Landau-Lifšica), za konjugovane kanonske promenjive (ϕ, $S_z = s\cos\Theta$):

$$S^z = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\phi}\ , \quad \phi = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial S^z} = \frac{1}{S}\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial(\cos\theta)},$$

kao i hamiltonove jednačine kretanja za fononske promenjive ($U(x,t)$, $p(x,t)$).

S obzirom da je cilj ovog rada ispitivanje osobina magnetnog lanca u prisustvu solitonskog pobuđenja (tzv. stacionarno stanje), ne ćemo ovde navesti eksplicitno gornje jednačine, već ćemo problem razmatrati u Lagranževom formalizmu. Razlog zašto to radimo je praktične prirode, jer je jednostavnije odrediti Lagranževu funkciju stacionarnog stanja sistema (u prisustvu solitona) nego hamiltonovu funkciju, jer da bi odredili ovu poslednju moramo izvršiti kanonsku transformaciju hamiltonove funkcije na nove kanonske promenjive, što je mnogo komplikovanije (videti nap. |2|, |3|).

III. GLAVA

3.1. Efektivni lagranžijan sistema u stacionarnom stanju

Lagranžijan sistema definišemo relacijom (videti |4|):

$$L = \frac{i\hbar}{2} \langle\psi|\overleftrightarrow{\frac{\partial}{\partial t}}|\psi\rangle - \langle\psi|H|\psi\rangle$$

gdje je $|\psi\rangle$ ranije definisana funkcija koherentnih stanja (2.3.).

Koristeći analogni postupak kao u predhodnoj glavi, u kontinualnoj aproksimaciji dobijamo:

$$L = \frac{1}{a}\int \mathcal{L}\, dx$$

gde je gustina Lagranžijana sistema:

$$\mathcal{L} = (S^z - S)\dot{\phi} + \frac{1}{2}U_t^2 - \frac{Mv^2}{2} U_x^2 - \frac{J_R a^2}{2} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^2 + J_R \tau \left({S^z}^2 - S^2\right) -$$

$$- \frac{J_R \tau a^2}{2} \left(\frac{\partial S^z}{\partial x}\right) - \frac{ga^3}{2} \frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^2 + g\tau a \frac{\partial U}{\partial x} \left({S^z}^2 - S^2\right) +$$

$$+ \frac{g\tau a^3}{3} \frac{\partial U}{\partial x} \left[S^z \cdot \frac{\partial^2 S^z}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial S^z}{\partial x}\right)\right] \qquad (3.1.)$$

Iz gustine Lagranžijana naćićemo jednačine kretanja za fononske pomjeranje:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_t}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}\right) = 0$$

tako da dobijemo:

$$MU_{tt} - Mv_0^2 U_{xx} = - ga\tau \frac{\partial}{\partial x}\left({S^z}^2 - S^2\right) + \frac{ga^3}{2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+ \frac{g\tau a^3}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left[S^z - \frac{\partial^2 S^z}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^2\right] \qquad (3.2.)$$

Opšte rješenje gornje jednačine može se napisati u obliku:

$$U(x,t) = U_1(x - v_0 t) + U_2(x + v_0 t) + U_3(x - vt)$$

Rješenje homogenog dela jednačine (prva dva člana) opisuje talase koji se kreću u suprotnim smjerovi (lijevo i desno) u odnosu na lanac. Ako je brzina tih talasa v_0 (brzina zvuka) mnogo veća od brzine solitona (v) oni se brzo udaljavaju od solitona. U tom slučaju ostaje samo soliton, koji se kreće brzinom v duž lanca, što znači da pretpostavljamo da u stacionarnom stanju postoji samo rješenje $U_s(x-vt)$.

Iz (3.2.) u tom slučaju dobijamo, koristeći granične uslove $\rho_s(\pm\infty) = 0$, $S_z(\pm\infty) = S$:

$$\frac{\partial U_s}{\partial x} = \rho_s(x-vt) = \frac{-ga\tau}{Mv_0^2(1-\nu^2)}(S^{z^2}-S^2) + \frac{ga^2\tau}{3Mv_0^2(1-\nu^2)} \cdot \left[S^z\frac{\partial^2 S^z}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{ga^3}{2Mv_0(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 \tag{3.3.}$$

gdje je: $\nu = \frac{v}{v_0}$.

Mi ćemo u daljem radu detaljno analizirati slučaj izotropnog feromagnetnog lanca tj. kada je $\tau=0$. Tada izraz (3.3.) dobija oblik:

$$\frac{\partial U_s}{\partial x} = -\frac{ga^3}{Mv_0^2(1-\nu^2)}\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 \tag{3.4.}$$

Ako (3.4.) zamjenimo u (3.1.) dobijemo efektivni Lagranžijan sistema, koji je funkcija samo spinskih kordinata. Imajući u vidu da je $U_t = -v\cdot U_x$, dobijamo:

$$\mathcal{L}_s = (S^z-S)\dot{\phi} - \frac{Mv_0^2}{8}\frac{g^2a^6}{M^2v_0^4(1-\nu^2)^2}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^4 - \frac{J_R a^2}{2}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 + \frac{g^2a^6}{4}\frac{1}{Mv_0^2(1-\nu^2)}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^4 \tag{3.5}$$

Pošto ćemo u daljem računu zadržati kontinualnu aproksimaciju do trećeg stepena po konstanti rešetke tj. a^3 iz (3.5.) dobijamo:

dobijamo:

$$\mathcal{L}_s = (S^z - S)\dot{\phi} - \frac{J_B a^2}{2}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 + O(a^4) \qquad (3.6.)$$

tako da je gustina energije stacionarnog stanja:

$$\mathcal{H}_s = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi} - \alpha, \qquad \text{(dodamo Zemanov term)}$$

$$\mathcal{H}_s = -\mu\varkappa\,(S^z - S) + \frac{J_B a^2}{2}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2 \qquad (3.7.)$$

Iz (3.7.) vidimo da se u ovoj aproksimaciji jedini doprinos spin-fonon interakcije ogleda u renormalizaciji integrala izmjene.

3.2. JEDNAČINE KRETANJA I SOLITONSKA RJEŠENJA

Da bi dobili jednačine kretanja za kanonski konjugovane promenjive ($S_z = S\cos\Theta$ i ϕ) uvodimo novu promenjivu y:

$\cos\Theta = y \qquad (a=1)$

Koristeći relacije:

$$y_\xi = -\sin\Theta\cdot\Theta_\xi \qquad \Theta_\xi^2 = \frac{y_\xi^2}{1-y^2} \qquad \Theta_\xi = -\frac{y_{\xi\xi}}{(1-y^2)^{1/2}} - \frac{y y_\xi^2}{(1-y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \to \frac{\partial}{\partial\xi}, \qquad \frac{\partial S^{z^2}}{\partial\xi} = S^2 2 y y_\xi$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial\xi}\right)^2 = S^2(\Theta + \sin^2\Theta\phi^2) \qquad \frac{\partial^2}{\partial\xi^2}(S^{z^2}) = 2S^2(y_\xi^2 + y y_{\xi\xi})$$

hamiltonijan (3.7.) dobija oblik:

$$\mathcal{H}_s = -\mu\varkappa S\,(y-1) + \frac{J_B}{2}\left[\frac{S^2}{1-y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + S^2(1-y)\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2\right] \qquad (3.8.)$$

Na osnovu ovog hamiltonijana formiramo jednačine kretanja za y(x,t) i ϕ(x,t):

$$\dot{y} = \frac{1}{S}\left[\frac{\partial\mathcal{H}_s}{\partial\phi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{H}_s}{\partial\phi_x}\right)\right]$$

$$\mathring{y} = J_R S \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-y^2)\frac{\partial \phi}{\partial x}\right] \tag{3.9.}$$

$$\mathring{\phi} = \frac{1}{S}\left[\frac{\partial \mathscr{H}_a}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathscr{H}_a}{\partial y_x}\right)\right]$$

$$\frac{\partial \mathscr{H}_a}{\partial y} = -\mu \varkappa S - \frac{J_R}{2}\left[\frac{-2yS^2}{(1-y^2)^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 - 2S^2 y\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2\right]$$

$$\frac{\partial \mathscr{H}_a}{\partial y_x} = J_R \frac{S^2}{1-y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

$$\mathring{\phi} = -\mu\varkappa - J_R S\left[\frac{y}{(1-y^2)^2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + y\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2\right] - J_R\frac{S^2}{1-y^2}\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) \tag{3.10.}$$

Ako jednačinu (3.10.) pomnožimo sa $\sqrt{1-y^2}$, vratimo se na promenjive Θ i ϕ dobijamo:

$$\sin\Theta \frac{\partial \phi}{\partial t} = -\mu\varkappa \sin\Theta + J_R S\left[\Theta \quad - \sin\Theta\cos\Theta\phi^2 x\right] \tag{3.11.}$$

dok jednačina (3.9.) ima sad oblik

$$\frac{\partial}{\partial t}\cos\Theta = J_R S \frac{\partial}{\partial x}\left[\sin^2\Theta \frac{\partial \phi}{\partial x}\right] \tag{3.12.}$$

Da bi mogli integraliti jednačine (3.11.) i (3.12.) definisaćemo amplitudu Θ_0 solitona uslovom:

za $\quad \xi=0 \quad \Theta = (S,\ z\text{-ose}) = \Theta_0 \qquad \Theta_\xi(0)=0$

Θ_0 - maksimalni ugao skretanja spina.

za $\quad \xi=\pm\infty \quad \Theta=0 \qquad \Theta_\xi=0 \quad \sin\Theta=0 \quad \cos\Theta=1$

imajući u vidu da je :

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\xi}{dt} = \frac{d}{d\xi} = -v\frac{d}{d\xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}$$

jednačina (3.12.) daje:

$$-v\frac{\partial}{\partial \xi}\cos\Theta = J_R S\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\sin^2\Theta \frac{\partial \phi}{\partial \xi}\right)$$

odnosno poslje integracije:

$$\phi_\xi = \frac{V}{1 + \cos\Theta} \tag{3.13.}$$

gdje je:

$V=\frac{v}{J_R S}$ redukovana brzina prostiranja pobuđenja

Da bi integralili jednačinu (3.11.) uvodimo smjenu

$\phi=\Omega t+\tilde{\phi}(\xi)$, što daje:

$$\Gamma\sin\Theta-\frac{V^2\sin\Theta}{1+\cos\Theta}-\Theta_{\xi\xi}+\sin\Theta\cos\Theta\,\frac{V^2}{(1+\cos\Theta)^2}\qquad(3.14.)$$

gdje je: $\Gamma=\frac{\Omega+\mu\varkappa}{J_R S}$

Integraleći jednačinu (3.14.) dobijamo:

$$-\Gamma\cos\Theta+\frac{V^2\cos\Theta}{1+\cos\Theta}-\frac{1}{2}\Theta_\xi^2+c=0$$

Konstantu c određujemo iz graničnih uslova $\Theta_\xi=0$ $\Gamma-\frac{V^2}{2}=c$,

što daje:

$$\Theta_\xi^2=4\Gamma\,\frac{1-\cos\Theta}{1+\cos\Theta}\left[\frac{1+\cos\Theta}{2}-\frac{V^2}{4\Gamma}\right]\qquad(3.15.)$$

Da bi smo rješili jednačinu (3.15.) pogodno je uvesti promenljivu β relacijom:

$\Theta=2\beta$ $\Theta_0=2\beta_0$

$\beta_\xi=0$ za $\xi=0$

Jednačina (3.15.) sada prelazi u:

$$\beta_\xi^2=\Gamma\,\frac{1-\cos 2\beta}{1+\cos 2\beta}\left[\frac{1+\cos 2\beta}{2}-\frac{V^2}{4}\right]$$

odnosno:

$$\beta_\xi^2=\Gamma\,\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\left[\cos^2\beta-\frac{V^2}{4}\right]\qquad(3.16.)$$

Za $\xi=0$; $\beta=0$, dobijamo amplitudu $\theta_0=2\beta_0$

$$\frac{V^2}{4\Gamma}=\cos^2\beta_0=\frac{1+\cos\theta_0}{2}\qquad(3.17.)$$

Jednačina (3.16.) sada dobija oblik:

$$\beta_\xi^2=\Gamma\,\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\left[\cos^2\beta-\cos^2\beta_0\right]\qquad(3.18.)$$

Da bi integrisali jednačinu (3.18.) napisaćemo je u obliku:

$$\frac{d(\sin\beta)}{d\xi} = \pm\, \Gamma^{1/2} \sin\beta \sqrt{\cos^2\beta - \frac{V^2}{4\Gamma}} \tag{3.19}$$

Uvodeći smjenu $\sin^2\beta = \phi^2$ dobijamo:

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \pm\phi \sqrt{(1-\phi^2)\Gamma - \frac{V^2}{4}}$$

odnosno

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \pm\phi^3 \sqrt{(\frac{1}{\phi^4} - \frac{1}{\phi^2})\Gamma - \frac{V^2}{4}\frac{1}{\phi^4}}$$

Nakon nove smjene $\varphi = \frac{1}{\phi^2}$ $d\varphi = -\frac{2d\phi}{\phi^3}$ dobijamo:

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \pm 2 \sqrt{\Gamma\left[(1-\frac{V^2}{4\Gamma})\varphi^2 - \varphi\right]}$$

što možemo napisati u obliku:

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \pm 2\sqrt{\Gamma}\,(a\varphi^2-\varphi)^{1/2} \tag{3.20.}$$

Izraz pod korjenom transformiraćemo smjenom

$$z = \sqrt{a}\,\varphi - \frac{1}{2\sqrt{a}}\ ; \quad B^2 = \frac{1}{4a} \quad \text{gdje je} \quad a = 1 - \frac{V^2}{4\Gamma}$$

$$z = \sqrt{a}\,\frac{1}{\sin\beta^2} - \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

Integralenjem (uz korišćenje početnih uslova) dobijemo:

$$\phi = \frac{\phi_0}{\mathrm{cha}\Gamma^{1/2}\xi} \quad \text{gdje je} \quad \phi_0^2 = 1-\cos^2\beta_0 = 1-\frac{V^2}{4\Gamma}$$

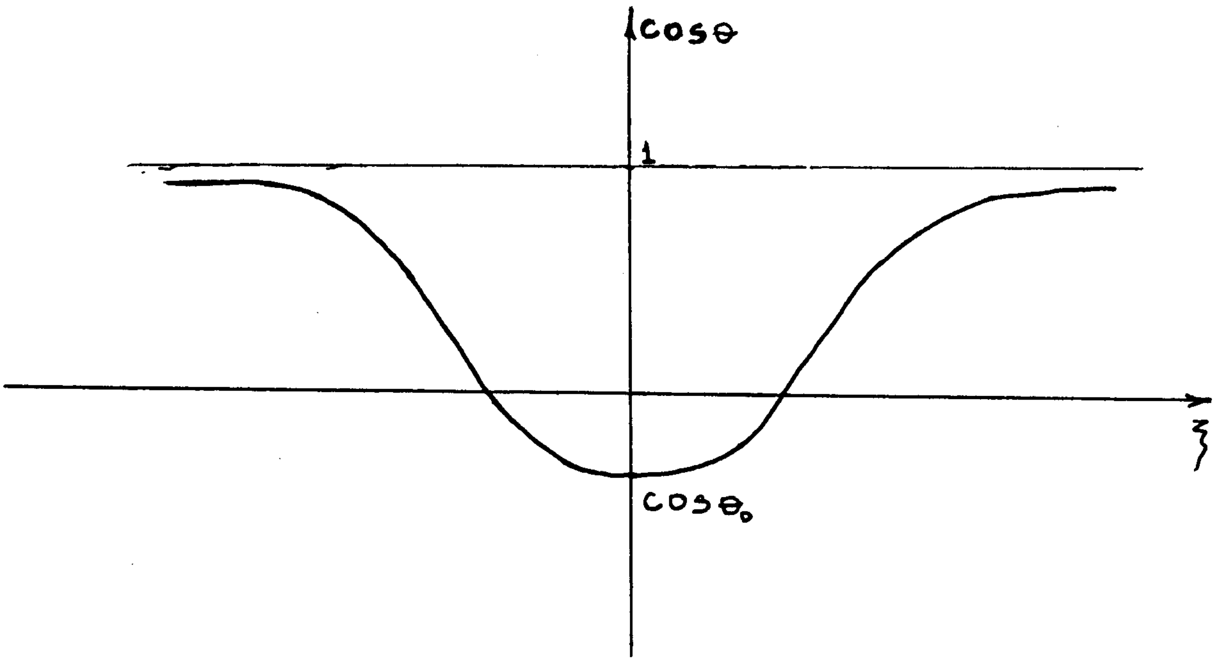
odnosno:

$$\sin\beta = \frac{\sin\beta_0}{\mathrm{ch}^2\left[\sqrt{\Gamma}\,\sin\beta_0\xi\right]}$$

ili

$$\cos\Theta = 1 - \frac{2\sin^2\beta_0}{ch^2\left[\sin\beta_0\sqrt{\Gamma}\sin\beta_0\xi\right]} \qquad (3.21.)$$

Izraz (3.21.) opisuje solitonsko rješenje jednačine (3.16.), koje je grafički prikazan na slici 1. za proizvoljno odabrane vrednosti β_ξ i Γ.



sl. 1.

IV. GLAVA

ENERGIJA, IMPULS I MAGNETIZACIJA LANCA U PRISUSTVU SOLITONA

Izrazi za energiju, impuls i magnetizaciju lanca mogu se izvesti pomoću Lagranževe funkcije, ali mi ćemo samo navesti konačne oblike |5|:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}\, d\xi \tag{4.1}$$

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\partial \phi}{\partial x}\, (1-\cos\Theta) \tag{4.2}$$

$$M_z = S\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\, (1-\cos\Theta) \tag{4.3}$$

Pri izračunavanju gore navedenih integrala, integraciju po ξ zamenjujemo integracijom po β.

Iz (3.16) imamo:

$$\beta_\xi^2 = \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\left(\cos^2\beta - \frac{V^2}{4\Gamma}\right),$$ odnosno ako uvedemo oznaku

$$B^2 = \cos^2\beta - \frac{V^2}{4\Gamma}$$

$$B_\xi^2 = \Gamma\, \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\, B^2 \tag{4.4}$$

$$d\xi = \frac{d\xi}{d\beta}\, d\beta = d\beta\, \frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\, \frac{\cos\beta}{\sin\beta}\, \frac{1}{B}$$

Koristeći izraz (3.13)

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{V}{2}\, \frac{1}{\cos^2\beta} \qquad \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{V}{2}\, \frac{1}{\cos^2\beta} \tag{4.4.a.}$$

za impuls dobijamo:

$$P = 2VS \int_0^\infty d\xi \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = 2S \frac{V}{\sqrt{\Gamma}} \int_0^\infty d\beta \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \frac{1}{B}$$

koristeći izraz (3.17.) impuls tada ima oblik

$$P = 4S\cos\beta_0 \int_0^\infty \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \frac{1}{B} d\beta$$

Transformisani izraz za magnetizaciju je:

$$M_z = \frac{4S}{\sqrt{\Gamma}} \int_0^\infty \cos\beta\sin\beta \frac{1}{B} d\beta \tag{4.5}$$

Da bi izračunali energiju polazimo od gustine hamiltonijana:

$$\mathcal{H}_s = \mu\varkappa S (1-\cos\Theta) + \frac{J_R S^2}{2} (\Theta_\xi^2 + \sin^2\Theta\phi_\xi) \tag{4.6}$$

uvodeći smenu:

$$\Theta = 2\beta$$

i korišćenjem izraza (4.4.) i (4.4.a.) hamiltonijan dobija oblik:

$$\mathcal{H}_s = 2\mu\varkappa S \sin^2\beta + \frac{J_R S^2}{2} \left[4\Gamma \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} B^2 + \frac{V^2\sin^2\beta}{\cos^2}\right] \tag{4.7.}$$

tako da za energiju dobijamo:

$$E = 2\int_{-\infty}^{\infty} \left\{2\mu\varkappa S \sin^2\beta + \frac{J_R S^2}{2} 4\Gamma \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} B^2 + \frac{J_R S^2}{2} \frac{V^2\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\right\} \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \frac{\cos\beta}{\sin\beta} d\beta$$

$$E = \mu\varkappa M_z + 4J_R S^2\sqrt{\Gamma} \int_0^{\beta_0} \sin\beta \cos\beta \frac{1}{B} d\beta \tag{4.8.}$$

odnosno:

$$E = \mu\varkappa M_z + 4J_R S^2\sqrt{\Gamma} \int_0^{\beta_0} \frac{\sin\beta \cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \frac{V^2}{4\Gamma}}} d\beta$$

Koristeći smjenu $U=\cos^2\beta$ dobijamo posle integracije:

$$E = \mu\varkappa M_z + 2J_R S^2 \sqrt{4\Gamma - V^2} \tag{4.9.}$$

$$M_z = \frac{4S}{\sqrt{\Gamma}} \sqrt{1 - \frac{V^2}{4\Gamma}} = \frac{4S}{\sqrt{\Gamma}} \sin\beta_0 \tag{4.10.}$$

dok za impuls dobijamo:

$$P = 2S \left\{\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{V^2}{2\Gamma} - 1\right)\right\} \tag{4.11.}$$

odnosno:

$$\sin\frac{P}{4S} = \sqrt{1 - \frac{V^2}{4\Gamma}} = \sin\beta_0 \tag{4.12.}$$

Koristeći dobijene razultate za energiju, magnetizaciju i impuls solitona, možemo napisati energiju kao funkciju magnetizaciju i impulsa solitona.

$$E = \mu\varkappa M_z + J_z S\Gamma M_z \tag{4.13.}$$

Imajući u vidu da se magnetizacija može napisati u obliku:

$$M_z = \frac{4S}{\sqrt{\Gamma}} \sin\beta_0 = \frac{4S}{\sqrt{\Gamma}} \sin\frac{P}{4S} \tag{4.14.}$$

iz (4.14.) sljedi:

$$\Gamma = \frac{16S^2 \sin^2\frac{P}{4s}}{M_z^2}$$

što poslje zamjene u (4.13.) daje:

$$E = \mu\varkappa M_z + \frac{16J_R S^3}{M_z} \sin^2\frac{P}{4S} \tag{4.15.}$$

koristeći izraz (4.12.) za brzinu dobijamo:

$$\sqrt{1-\frac{V^2}{4\Gamma}} = \sin\frac{P}{4S} \rightarrow \cos^2\frac{P}{4S} = \frac{V^2}{4\Gamma}$$

$$V^2 = 4\Gamma\cos^2\frac{P}{4S} = \frac{64S^2}{M_z^2}\sin^2\frac{P}{4S}\cos^2\frac{P}{4S}$$

odnosno

$$V = \frac{8S}{M_z}\sin\frac{P}{4S}\cos\frac{P}{4S} = \frac{4S}{M_z}\sin\frac{P}{2S} \tag{4.16.}$$

Diferencirajući izraz za energiju (4.15.) za P dobijamo grupnu brzinu.

$$v = \frac{\partial E}{\partial P} = \frac{4J_R S^2}{M_z}\sin\frac{P}{2S} \tag{4.17.}$$

Znajući da je $V=\frac{v}{J_R S}$ vidimo da su izrazi (4.16.) i (4.10.) identični, što je i trebalo očekivati.

Ako dimenziju solitona d definišemo na sledeći način:

$\cos\Theta = 1 - \frac{2\sin^2\beta_0}{\mathrm{ch}\,\frac{2}{d}\,\xi}$, na osnovu rješenja (3.21.) dobijamo:

$$d = \frac{2}{\sqrt{\Gamma}\,\sin\beta_0} = \frac{M_z}{2S}\,\frac{1}{\sin^2\frac{P}{4S}} \tag{4.18.}$$

Posmatrajući izraze za: dimenziju, amplitudu, energiju i brzinu solitona možemo izvući sledeće zaključke:

a) spin-fonon interakcija ne dovodi do promjene amplitude solitona, već je ona određena impulsom:

$$\sin\beta_0 = \sin\frac{P}{4S}$$

(ne zavisi od renormalizovanog integrala izmjene J_R)

b) dejstvo spin-fonon interakcije ne menja dimenzije solitona

$$d = \frac{M_z}{2S}\,\frac{1}{\sin^2\frac{P}{4S}}$$

(ne zavisi od renormalizovanog integrala izmjene J_R)

c) spin-fonon interakcije mjenja energiju sistema:

$$\frac{E_{s-ph}}{E_{is}} = \frac{J_R}{J} = (1 + \frac{gS^2}{J\varkappa}) > 0$$

d) dejstvo spin-fonon interakcije i brzina se mjenja:

$$v = \frac{4JS^2}{M_z} \sin \frac{P}{4S} (1 + \frac{g^2S^2}{J\varkappa}) = v_{is} \cdot (1 + \frac{g^2S^2}{J\varkappa})$$

Na kraju ćemo izračunati fononski pomjeraj u stacionarnom stanju. Polazeći od izraza (3.4.) imamo da je:

$$\frac{\partial U_s}{\partial x} = - \frac{g}{2Mv_0^2(1-v^2)} (\frac{\partial \vec{S}}{\partial x})^2 \tag{4.19.}$$

znajući da je:

$$(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x})^2 = S^2(\Theta^2 x + \sin^2\Theta\phi_x^2)$$

koristeći (3.13.) i (3.15.) imamo:

$$\phi_x = \frac{V}{1+\cos\Theta} \quad \text{i} \quad \Theta_x^2 = 4\Gamma \frac{1-\cos\Theta}{1+\cos\Theta} \left[\frac{1+\cos\Theta}{2} - \frac{V^2}{4\Gamma}\right]$$

tako da je

$$(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x})^2 = 2\Gamma S^2(1-\cos\Theta)$$

Iz (4.19.) dobijemo da je:

$$U_s = - \frac{g}{2Mv_0^2(1-\nu^2)} \int_{-\infty}^{x} 2\Gamma S^2(1-\cos\Theta)\, dx \tag{4.20.}$$

Koristeći rješenje (3.21.) dobijemo:

$$1-\cos\Theta = \frac{2\sin^2\beta_0}{\mathrm{ch}^2 \frac{2}{d} \xi} \quad \text{i} \quad \Gamma = \frac{16S^2\sin^2\beta_0}{M_z{}^2}$$

odnosno:

$$U_s = - \frac{64S^4\sin^4\beta_0\chi}{2Mv_0^2M_z{}^2(1-\nu^2)} \int_{-\infty}^{x} \frac{dx'}{\mathrm{ch}\, \frac{2}{d}(x'-vt)} \qquad (\xi = x-vt)$$

Koristeći smjenu:

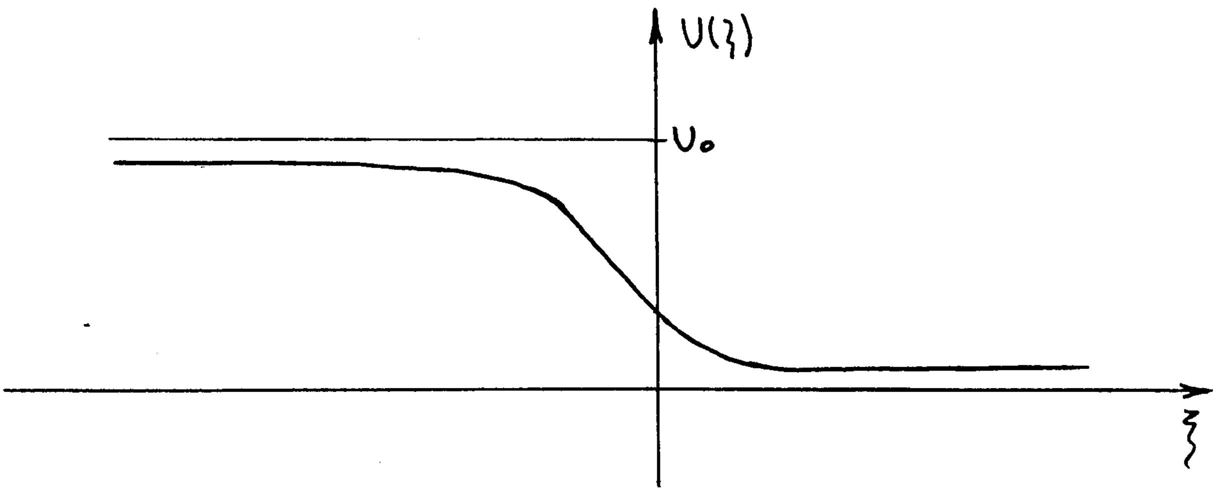
$$\frac{2}{d}(x'-vt)=k \qquad \frac{2}{d}dx'=dk$$

dobijamo konačno ($s=\frac{1}{2}$):

$$U_s(x,t) = \frac{U_o}{2}\left[1 - th\,\frac{2}{d}(x-vt)\right], \tag{4.21.}$$

gdje je:

$$U_o = \frac{2\sin^4\beta_o\chi}{Mv_o^2(1-\nu^2)\cdot M_z^2}\cdot d \tag{4.22.}$$



Slika 2.

Kao što se vidi sa slike 2. $U_{(s)}$ ima oblik kinka

ZAKLJUČAK

U ovom radu analizirali smo solitone u izotropnom Hajzenbergovom lancu sa spin-fonon interakcijom. Pokazali smo da je glavni doprinos spin-fonon interakcije u renormalizaciji integrala izmjene, što važi i u opštijem slučaju anizotropnog feromagnetnog lanca. Ispitivanje osobina feromagnetnog lanca vršili smo u prisustvu solitonskog pobuđenja (stacionarno stanje) i problem smo razmatrali u Lagranževom formalizmu. Koristeći jednosolitonsko rješenje, dobili smo izraze za energiju, impuls i magnetizaciju sistema. Pokazali smo da pod dejstva spin-fonon interakcije dolazi do promjene brzine i energije solitona, dok amplituda i dimenzija solitona ostaju nepromjenjene za dati impuls magnetnog sistema. Na kraju rada izračunali smo i fononski pomjeraj u stacionarnom stanju. Potrebno je još napomenuti da u ovom radu nismo razmatrali pitanje da li je dato koherentno stanje rješenje Šredingerove jednačine ili drugim rečima da li će sistem ostati u koherentnom stanju u svakom trenutku $t>t_0$ ako se u trenutku t_0 nalazio u tom stanju. Mi smo u stvari predpostavili da je sistem dovoljno dugo u koherentnom stanju tako da ima smisla razmatrati solitonska pobuđenja. Ovo je uobičajena predpostavka u literaturi, a analiza koliko je ona tačna prelazi okvire ovog diplomskog rada.

LITERATURA

1. V.N. Gubankov: Solitony, kvant,11 str2, (popul.časopis) Moskva (1983)

   P.M. Bullough and P.J. Caudrey: Solitons, Springer-Verlay Berlin, Heidelberg, New York (1980)

2. Đ. Mušicki: Uvod u teorijsku fiziku I, Šip «Srbija» Beograd (1973)

3. M.J. Škrinjar, S.D. Stojanović and D.V. Kapor: J.Phys C: Solid State Phys:<u>19</u> 5885-5893 (1986)

4. L.R. Mead and N. Papanicolau, Phys. Rev.B <u>28</u> 1633 (1983)

5. J. Tjon, J. Wright: Phys. Rev.B <u>26</u> (7) 3470 (1977)