

UNIVERSITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
Katedra za fiziku



Novakov Milorad

ANOMALNA DISPERZIJA SVETLOSTI

Diplomski rad

Diplomski rad je branjen 21.6.1973.

pred konservom: dr Ivan Jović (mentar).

dr Miroslav Pavlović

dr Božidar Đorđević

Koncept i ocenjivo je izdavan pedagogom
Zo očekujem. Nam (8)

Milorad Novakov

NOVI SAD - 1973

Zahvaljujem se vanrednom profesoru
Dr Ivanu Janiću na predloženoj temi i
korism savetima u toku njene reali-
zacije,kao i svim nastavnicima i asi-
stentima,koji su mi korisnim savetima
pomogli pri realizaciji ovog rada.



S A D R Ž A J

1. Uvod.....	1
2. Prelamanje svetlosti.....	7
3. Indeks prelamanja.....	10
4. Klasična teorija disperzije.....	13
5. Fzna i grupna brzina.....	20
6. Prelaz sa klasične na kvantnu teoriju disperzije...	23
7. Eksperimentalni deo.....	28
8. Zaključak.....	38
9. Literatura.....	39

U V O D /3,7,8,9 i 16/

Razlaganje svetlosti u spektar javlja se pri prelamanju, difrakciji, ili interferenciji svetlosti. Ova pojava se naziva disperzija svetlosti. Poznato je da se pri dvostrukom prelamanju kroz prizmu složena svetlost razlaže u spektar. Po opštoj definiciji, optičkim spektrom se naziva potpun skup elektromagnetskih zračenja svih talasnih dužina (polihromatsko zračenje), koje čine neko složeno zračenje. Pri prolasku kroz prizmu složeno zračenje se razlaže prema talasnim dužinama. To znači da svetlosni zraci različitih talasnih dužina, odnosno različitih frekvencija, skreću za različite uglove. Odavde se može izvesti zaključak da se pod disperzijom svetlosti podrazumevaju pojave uslovljene zavisnošću indeksa prelamanja sredine od talasne dužine svetlosti; možemo reći da za svaku datu sredinu indeks prelamanja n predstavlja određenu funkciju talasne dužine

$$n = f(\lambda)$$

Svetlosni zraci iste talasne dužine čine monohromatsku svetlost. Ona predstavlja deo spektra i ne može se više razlagati jer je sastavljena od fotona iste energije

$$\epsilon = h\nu$$

Ako razloženo zračenje po izlasku iz prizme naiđe na zastor (ekran, foto-ploča) na njemu će se pojaviti slika koja se takođe naziva spektar.

Deo spektra dostupan čovečjem oku naziva se vidljivi spektar i on se nalazi u granicama izmedju 4000 i 8000 Å.

Na strani većih talasnih dužina nastavlja se infracrveni deo, a na strani kraćih talasnih dužina ultraljubičasti deo spektra.

Spektri mogu biti emisioni i apsorpcioni. Kod emisionih spektara razlikujemo tri vrste i to: linijski, trakasti i kontinualni.

Linijski spektri, koje daju usijani gasovi i pare potiču od atoma i atomskih jona.

Trakaste spektre emituju višeatomni molekuli usijanih gasova i para, čija temperatura nije dovoljno visoka da bi se svi molekuli disocirali u atome i jone. Linije, koje čine trake, mogu biti zbijene, ili pak dovoljno udaljene jedna od druge, tako da ponekad



imaju izgled linijskih spektara.

Kontinualni spektri nastaju zračenjem usijanih čvrstih i tečnih tela. Smatra se da su sastavljeni iz beskonačnog broja spektralnih linija, koje se međusobno delimično preklapaju, tako da daju utisak kontinualnosti.

Apsorpcioni spektar neke supstance čini ukupno zračenje, koje supstanca apsorbuje iz kontinualnog spektra kada ovaj prolazi kroz nju. Gašenje nekih talasnih dužina u kontinualnom spektru zapazio je Wollaston oko 1800 godine.

Posebno ispitivanje Sunčevog spektra vršio je Fraunhofer i u njemu pronašao niz tamnih linija, koje se prema njemu i nazivaju Fraunhoferove tamne linije.

Apsorpcija svetlosti se ponaša po Kirchhoff-ovom zakonu iz 1859 godine prema kome "svaki element apsorbuje svetlost samo onih talasnih dužina koje i sam emituje". Kao i emisioni i apsorpcioni spektri su karakteristični za svaku supstancu.

U oblasti spektra gde materija jako apsorbuje svetlost dolazi do pojačane disperzije svetlosti, a u apsorpcionim trakama zapaža se obrnuti tok disperzije, tj. smanjenje indeksa prelamanja sa povećanjem frekvencije svetlosti. Ova pojava naziva se anomalna disperzija svetlosti.

Pojavu anomalne disperzije svetlosti prvi je zapazio Le Roux 1862 godine i dao joj ovaj naziv, koji se zadržao i danas. On je posmatrao prelamanje svetlosti kroz prizmu, koja je bila ispunjena parama joda i zapazio da se plavi deo spektra prelama manje od crvenog, što je u suprotnosti sa normalnom disperzijom svetlosti. Prilikom izvidjenja eksperimenta prizma je bila zagrejana do temperature od 700°C .

Eksperimentišući 1870 godine Christiansen je upotrebio šuplju prizmu ispunjenu alkoholnim rastvorom fuksina (anilinske boje) i zapazio oštru apsorpcionu traku u zelenom delu spektra.

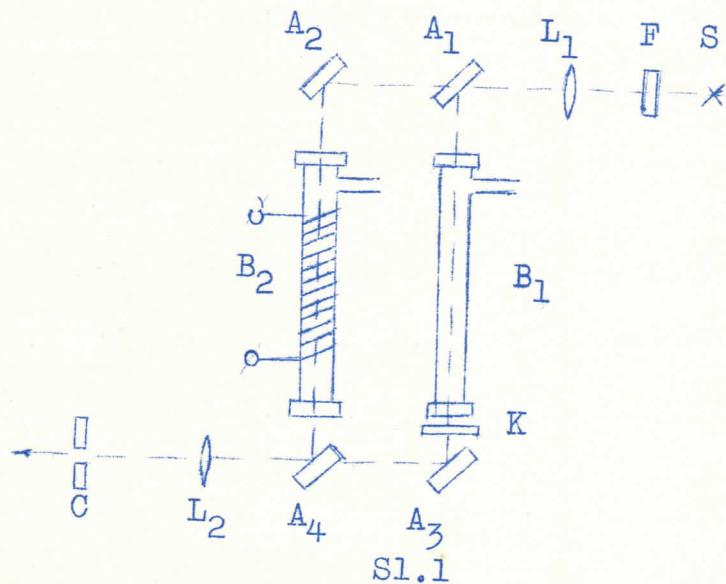
Dalja sistematska proučavanja anomalne disperzije vršio je Kundt 1871 godine koristeci Newton-ov metod "ukrštenih prizmi". Ova i dalja sistematska proučavanja dovela su do zaključka prema kome je pojava anomalne disperzije tesno vezana za apsorpciju svetlosti. Pojava anomalne disperzije može se zapaziti i pri propuštanju svetlosti kroz vrlo tanku prizmu od cijanina. Prizma mora biti vrlo tanka jer je u debljem sloju cijanin neprovidan i ne propušta dovoljnu količinu svetlosti.

1904 godine Robert W.Wood je ispitivao anomalnu disperziju u oblasti natrijumovog dubleta koristeći natrijumsku prizmu. U eksperimentu je korišćen Newton-ov metod "ukrštenih" prizmi. Prva prizma je bila od natrijumovih para dobijena u horizontalnoj cevi na taj način što se u cev stavljalno malo parče metalnog natrijuma.

Cev je sa obe strane bila zatvorena providnim prozorčićima, delimično evakuisana, a onda sa donje strane grejana, a sa gornje hladjena. Dobio se heterogeni stub natrijumove pare gušći pri dnu, a redji pri vrhu, koji se ponašao kao trostrana prizma čija je osa normalna na osu cevi. Druga prizma je bila prizma spektrograфа sa vertikalnom osnovom, koja je ukrštena sa natrijumovom prizmom i u zajednici sa njom činila Newton-ov metod "ukrštenih" prizmi.

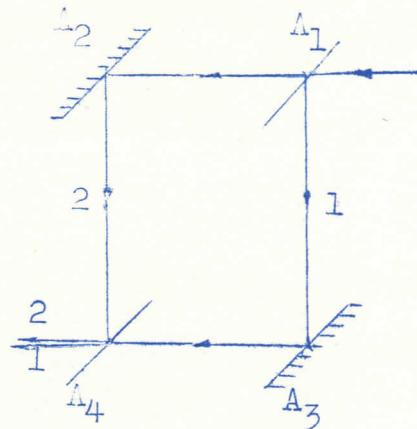
Zahvaljujući anomalnom karakteru disperzije natrijumovih para spektar nije bio ravnomerno savijen, već je ispoljio karakteristične prekidne prevoje u blizini talasnih dužina λ_1 i λ_2 natrijumovog dubleta.

Tačnija merenja je izvršio Roždestvenski koristeći modifikovan Jamin-ov interferometar. Interferometar je tako podešen da prvi i drugi svetlosni snop mogu biti razdvojeni za nekoliko santimetara. Uredjaj Roždenstvenskog dat je sledećom šemom:



S je svetlosni izvor, F filter. A_1 i A_4 su polupropustljiva, a A_2 i A_3 potpuna ogledala. Pri odbijanju od ogledala A_1 i A_2 svetlosni snopovi se razdvajaju, a zatim se sakupljaju pomoću ogledala A_3 i A_4 i dovode do interferencije.

Put svetlosnih zraka, koji odgovara putu svetlosnih zraka kod Jamin-ovog interferometra, dat je šemom koja je prikazana na sledećoj slici (Sl.2).

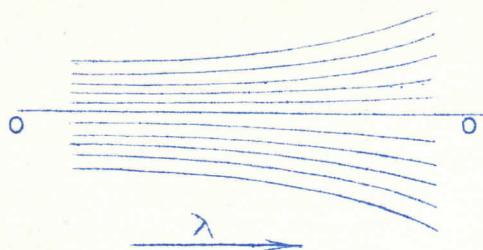


Sl.2

U obe grane interferometra Roždstvenskog uvode se dve cevi B_1 i B_2 jednake dužine. Cev B_2 je tako podešena da se u nju može uvesti ispitivani metal. Obezbedjeno je i grejanje cevi električnim putem do temperature dovoljne da se u njoj dobije para metala na potrebnom pritisku. Cev B_1 je kompenzaciona, a uvodi se u sistem da bi pre zagrevanja cevi B_2 obezbedila iste uslove pri prolasku svetlosti na delu puta jednakom njenoj dužini.

Obe cevi su povezane sa rotacionom vakuum pumpom pomoću koje se iz njih može evakuisati vazduh. Pritisak u cevima B_1 i B_2 je jednak jer su one preko zajedničke cevi vezane sa vakuum sistemom.

Kad se iz izvora svetlosti S propušta svetlost kroz interferometar nastaja interferenciona slika, koja se pomoću sočiva L_2 projektuje na pukotinu spektrograфа. Najbolji rezultati se dobiju metodom "ukrštanja" spektralnih aparata pri čemu je jedan od njih Jamin-ov interferometar, a drugi običan spektrograf sa prizmom, ili difrakcionom rešetkom. Neka interferometar daje na vertikalnoj pukotini spektrograфа horizontalne interferencione pruge, tada će neprekidni spektar, koji daje spektrograf, biti presečen tamnim prugama. Rastojanje medju njima biće veće ako je veća talasna dužina svetlosti. To znači da će se sistem tamnih pruga širiti idući od ljubičastog ka crvenom delu spektra. Pri tome se sistem aparata reguliše tako da nulta tamna pruga bude pravolijska i normalna na pravac pukotine spektrograфа. Ona se uzima za apscisnu osu (Sl.3).



Sl.3

Ordinata m -te pruge biće proporcionalna odgovarajućoj putnoj razlici $m\lambda$ i za tu prugu iznosiće

$$y = am\lambda$$

gde je a veličina koja zavisi od konstanti upotrebljenih aparatova.

Ako se u jednu granu interferometra na put svetlosnih zraka uvede sloj materijala debljine h i indeksa prelamanja $n = f(\lambda)$ onda će se pojaviti dopunska putna razlika, koja iznosi $h(n-1)$. Usled ovoga interferencione pruge će pokazati odgovarajuća pomeranja duž pukotine spektrografa, a nulta pruga, koja je ranije zadovoljavala uslov $y = 0$ (apscisna osa) dobiće novi oblik, koji odgovara jednačini

$$y = a(n-1)h$$

i u određenoj razmeri u zavisnosti $(n-1)$ od λ davaće neposrednu krivu disperzije.

Na osnovu opisane pojave Roždestvenski je u jednu granu svoga aparata uveo sloj para ispitivanog metala na taj način što je zagrevao cev B_2 dok se u njoj nisu pojavile pare datog metala, čiji je stub stvarao dodatnu putnu razliku i interferencione pruge su se pomerile proporcionalno toj dodatnoj putnoj razlici. Pri datoј dužini stuba pare, putna razlika je proporcionalna veličini $n-1$.

Pojava putne razlike izaziva pomeranje interferencionih pruga u spektrografu čime se neposredno reproducuje tok disperzije u celoj posmatranoj oblasti.

Ako se u posmatranoj oblasti nadje apsorpciona linija interferencione pruge će se prelamati oko nje i njihov oblik će očigledno predstavljati tok promene indeksa prelamanja u blizini apsorpcine linije. Ovaj metod proučavanja disperzije svetlisti Roždestvenski je usavršio do te mere da je mogao vršiti tačna kvantitativna merenja. Ovaj metod se na ruskom naziva metod "krjukov" (krjuk-kuka), kod nas se prevodi sa metod "kuka", ili,

se prema prevodu D.Ivanovića,A.Milojevića i M.Cerinea naziva i metod "prelomnih prevoja".

Po ovoj metodi Roždestvenski je u jednu granu aparata između ogledala A_3 i kompenzacione cevi B_1 uveo staklenu (kvarcnu) pločicu potpuno odredjene debljine i tada su se interferencione pruge deformisale i u blizini apsorpcione linije obrazovale karakteristične "prelomne prevoje". To su u stvari "krjuki-kuke, ili prelomni prevoji" Roždestvenskog. U koliko je staklena pločica deblja prelomni prevoji su oštriji. U zavisnosti od uslova pri eksperimentisanju debljina pločice može iznositi i nekoliko milimetara.

Kako se u ispitivanoj supstanci u blizini apsorpcione linije disperzija vrlo jako menja, to se uvek može naći takva vrednost λ za koju će dejstvo staklene pločice biti kompenzovano dejstvom ispitivanog materijala, tako da nagib interferencione pruge prolazi kroz nulu. Levo od vrednosti λ krive (interferencione pruge) se spuštaju, a desno od nje podižu obrazujući prelomne prevoje (krjuki), čiji se položaj temena može odrediti na skali.

Ako sa h_1 označimo debljinu uvedene staklene pločice, sa n_1 njen indeks prelamanja, tada će jednačina koja opisuje oblik interferencione pruge, nastale disperzijom para ispitivanog metala i disperzijom staklene pločice, imati oblik:

$$y = a[(n-1)h - (n_1-1)h_1]$$

Ekstremne vrednosti "prelomnih prevoja" dobićemo ako stavimo da je

$$\frac{dy}{d\lambda} \equiv 0$$

tj.

$$\frac{dy}{d\lambda} = a\left(\frac{dn}{d\lambda}h - \frac{dn_1}{d\lambda}h_1\right) = 0 \Rightarrow$$

odakle dobijamo

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{h_1}{h} \cdot \frac{dn_1}{d\lambda}$$

To znači da ako se za staklenu pločicu znaju vrednosti (h_1 , $\frac{dn_1}{d\lambda}$) i debljina ispitivanog sloja h (dužina cevi B_2) može se odrediti disperzija ispitivanog materijala za vrednost λ koja odgovara položaju temena "prelomnog prevoja". Rastojanje medju "prelomnim prevojima" ne zavisi samo od svojstava spektralnog aparata, nego i od promene indeksa prelamanja u blizini apsorpcione linije, koja je i prikazana datom krivom. Ovaj metod Roždestvenskog potpuno je ušavršen od autora i njegovih sledbenika i mnogo se koristi pri proučavanju disperzije.

PRELAMANJE SVETLOSTI /8 i 9/

Pojava prelamanja svetlosti bila je poznata još starogrčkim filozofima. O njoj govori Aristotel 350. godine pre naše ere, a poznati astronom Ptolomej oko 120 godine naše ere vršio je merenja upadnog i prelomnog ugla i dobio vrlo tačne podatke.

Tačnu formulaciju zakona prelamanja dao je Snellius (1591-1626) u jednom neobjavljenom delu, prema kome odnos kosekansa upadnog i prelomnog ugla ostaje konstantan. Skoro u isto vreme Descartes je proučavao isti fenomen i 1637 u svojoj "Dioptrici" dao sa-vremenu formulaciju zakona prelamanja svetlosti do koga je došao 1630 godine. Nema podataka o tome da li je Descartes prilikom svoga rada znao za proučavanja Snelliusa. Zakon odbijanja je zabeležen u Euklidovoj "Optici". Zakoni odbijanja i prelamanja svetlosti predstavljaju osnovne zakone geometrijske optike.

Osnovni zakoni optike su postavljeni, ali se oko njih i dalje vodila polemika.

Polazeći od svojstva svetlosti da se prostire pravolinijski Newton je zastupao teoriju o svetlosnim česticama, koje se kreću pravolinijski prema zakonima mehanike (zakon inercije).

On je kao i Descartes objasnio prelamanje na taj način da sredina u kojoj se vrši prelamanje privlači čestice svetlosti, zbog čega se menja brzina svetlosti pri prelazu iz prve u drugu sredinu. Prema ovoj Newton-ovoј teoriji izlazi da je odnos

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_2}{v_1} = n$$

konstantan, ne zavisi od upadnog ugla, pošto pčetne brzine v_1 i v_2 ne zavise od pravca prostiranja svetlosti, ali zavise od boje.

Iz njegovih detaljnijih razmatranja izlazi i pogrešan zaključak da je brzina svetlosti veća u gušćoj od brzine u redjoj sredini. Proveravanje ove teorije omogućeno je tek pošto je izmerena brzina svetlosti u gušćim sredinama i dokazano da je u njima npr. u vodi, brzina svetlosti manja nego u vazduhu, a indeks prelamanja pri prelasku svetlosti iz vazduha u vodu ima veću vrednost od jedinice i iznosi $n = 1,33$. Ovim je dokazano da je Newton-ovo tumačenje indeksa prelamanja bilo nepravilno.

Huygens je koristeći analogiju izmedju akustičkih i optičkih pojava predpostavio da svetlosnu perturbaciju treba shvatiti

kao elastične impulse koji se prostiru u specijalnoj sredini-etru.

Tu svoju drugu teoriju o svetlosti napisao je 1678 godine u knjizi "Traktat o svetlosti". Ovi njegovi radovi doveli su do rasprosranjenog mišljenja da je Huygens tvorac potpuno obradjene talasne teorije svetlosti, koja se može postaviti nasuprot Newton-ovoj korpuskularnoj teoriji, no ovo se ne može uzeti kao tačno, jer je u vreme Hugensa i Newton-a talasna teorija bila samo šematski naglašena.

Konačno su Maxwell-ova teorijska ispitivanja pokazala, da promene elektromagnetskog polja ne ostaju lokalizovane u prostoru, već se prostiru i u vakuumu brzinom, koja je jednaka brzini svetlosti. Ovaj Maxwell-ov zaključak je potvrdio Hertz 1888 godine.

Maxwell je 1865 godine izveo zaključak da je svetlost elektromagnetska pojava. Njegovim jednačinama je opisano nastajanje i prostiranje elektromagnetnih talasa. Prema njemu je

$$\frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon \mu}$$

Kako je $\frac{c}{v} = n$ (indeks prelamanja) možemo napisati da je

$$n = \sqrt{\epsilon \mu}$$

gde je c brzina prostiranja svetlosti u vakuumu, a v brzina prostiranja u sredini dielektrične konstante ϵ i magnetnog permeabiliteta μ .

Navedene relacije ne dovode do zaključka da je n funkcija talasne dužine λ , tj. $n=f(\lambda)$.

Uzajamna veza medju ovim veličinama uspostavljena je tek pošto je Lorentz 1896 godine stvorio elektronsku teoriju prema kojoj elektroni koji ulaze u sastav atoma mogu da vrše oscilovanja sa određenom periodom. Ovo je omogućilo objašnjenje pojave emisije i apsorpcije od strane neke supstance. Postala je shvatljiva i pojava disperzije svetlosti, jer se sa elektronskog stanovišta ispostavilo da je dielektrična konstanta ϵ funkcija frekvencije elektromagnetskog polja, odnosno talasne dužine λ . Ovim je uspostavljena zavisnost n od λ tj. $n = f(\lambda)$.

Celokupna razmatranja o talasnoj prirodi svetlosti pa i Maxwell-ova elektrodinamika, zasnivala su se na etru kao nosiocu svih elektromagnetnih pojava. Ovo je posledica verovanja da se sve fizičke pojave mogu svesti na mehaničke i u tom cilju je uvedena hipoteza etra, nevidljive supstance, koja ispunjava ceo prostor i prožima sva tela ne utičući na stanje njihovog kretanja.

Michelson je pošao od shvatanja etra kao nepokretne sredine i pokušao da ga uzme kao sistem reference, jer ako po predpostavci etar apsolutno miruje u prostoru onda su etar i apsolutni prostor identični. Ovim je htio da odredi apsolutno kretanje Zemlje pri njenom kretanju kroz prostor. Kako je dobro poznato eksperiment nije uspeo te se hipoteza etra više nije mogla održati.

Lorentz-ova elektronska teorija s kraja prošlog veka, koja se tada zasnivala i na postojanju etra, nije mogla da da zadovoljava vajuće rešenje problema raspodele energije po talasnim dužinama pri zračenju usujanog crnog tela. To je navelo Planck-a da 1900 i 1901 godine stvori teoriju kvanta, koja je uklonila poteškoće u problemima emisije zračenja od strane zagrejanih tela. Planck je pokazao, da spektar apsolutno crnog tela može biti objašnjen, ako se predpostavi da se emisija i apsorpcija zračenja ne vrši kontinualno, nego u odvojenim paketima-kvantima, čija energija zavisi od frekvencije svetlosnih oscilacija. Dakle svetlosni fluks poseduje diskontinualnu strukturu. Einstein je objasnio zakonomjerost fotoefekta, uvodeći predstavu o svetlosnum česticama- "kvantima svetlosti", ili "fotonima", čija je energija data jednačinom

$$\mathcal{E} = h\nu$$

gde je $h = 6,624 \cdot 10^{-27}$ erg.sec. Odavde se može zaključiti da je energija fotona utoliko veća u koliko je veća frekvencija zračenja.

Lorentz-ovu elektrodinamiku smenila je elektrodinamička teorija relativnosti.

Tokom razvoja optike odvijala se borba izmedju talasne i korpuskularne predstave o prirodi svetlosti. Ovaj proces još nije završen iako se pokazalo da svetlost poseduje jednovremeno i korpuskularna i talasna svojstva.

INDEKS PRELAMANJA /6,8 i 9/

Da bi smo došli do zakona odbijanja i prelamanja svetlosti polazimo od opšteg shvatanja da se osobine svetlosti poklapaju sa osobinama elektromagnetskih talasa i da su odredjene opštim zakonima elektrodinamike.

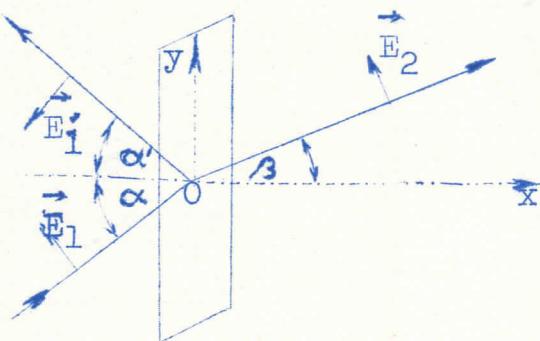
Posmatra se monochromatski ravan talas koji se kreće u proizvoljnom pravcu, koji je određen jediničnim vektorom \vec{n}_o , duž neke pomoćne x' ose pa za ma koju tačku napišimo da je

$$\vec{E} = A \cdot e^{i(\omega t - kx')} = A \cdot e^{i(\omega t - k\vec{r} \cdot \vec{n}_o)}$$

Ako se kosinusim vektora \vec{n}_o , označe sa α , β i γ jačina elektročnog polja ovog talasa imaće oblik

$$\vec{E} = A \cdot e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} = A \cdot e^{i(\omega t - k\alpha x - k\beta y - k\gamma z)}$$

Ako ovakav talas padne na graničnu površinu dveju sredina različite optičke gustine doći će do odbijanja i prelamanja talasa. Tačku upada O na slici 4 uzmimo za koordinatni početak



Sl.4

U ravni XOY odgovarajuće komponente vektora \vec{E} upadnog, odbijenog i premljenog talasa možemo napisati:

$$\vec{E}_1 = A_1 e^{i(\omega_1 t - k_1 \cos \alpha x - k_1 \sin \alpha y)}$$

$$\vec{E}_1' = A_1' e^{i(\omega_1' t - k_1' \cos \alpha' x - k_1' \sin \alpha' y)}$$

$$\vec{E}_2 = A_2 e^{i(\omega_2 t - k_2 \cos \beta x - k_2 \sin \beta y)}$$

Zbog odsustva površinskih nanelektrisanja i struja granični uslovi iz elektrodinamike svode se za tangencijalne komponente na

$$E_{2t} = E_{1t}$$

pa za $x=0$ dobijamo da je

$$E_{lt} + E'_{lt} = E_{2t}$$

odakle

$$A_{lt} e^{i(\omega_1 t - k_1 \sin \alpha y)} + A'_{lt} e^{i(\omega'_1 t - k'_1 \sin \alpha' y)} = A_{2t} e^{i(\omega_2 t - k_2 \sin \beta y)}$$

da bi ova jednakost važila za svako t i y , odgovarajući koeficijenti u eksponentima moraju biti jednaki.

$$\omega_1 = \omega'_1 = \omega_2 \quad \text{i} \quad k_1 \sin \alpha = k'_1 \sin \alpha' = k_2 \sin \beta$$

Zajedničku frekvenciju označimo sa ω jer nam to dozvoljava prvi obrazac prema kome se pri odbijanju i prelamanju svetlosti frekvencije ne menjaju.

Pošto je talasni broj $k = \frac{2\pi v}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$ možemo drugo obrazac napisati u obliku

$$\frac{\omega}{v_1} \sin \alpha = \frac{\omega}{v_1} \sin \alpha' ; \quad \frac{\omega}{v_1} \sin \alpha = \frac{\omega}{v_2} \sin \beta$$

odakle dobijamo

$$\alpha = \alpha' \quad \text{i} \quad \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

Prvi obrazac predstavlja zakon odbijanja, a drugi zakon prelamanja svetlosti.

Odnos brzina prostiranja svetlosti u dve optički različite sredine naziva se indeks prelamanja n pa zakon prelamanja možemo napisati u obliku:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = n \quad \text{jer je} \quad \frac{v_1}{v_2} = n$$

Indeksi prelamanja koji pokazuju odnos brzine svetlosti u vakuumu i posmatranoj sredini nazivaju se absolutni indeksi prelamanja, ili se jednostavno zovu indeksi prelamanja date sredine.

Odnos indeksa prelamanja dveju sredina naziva se relativni indeks prelamanja. Relativni indeks prelamanja prve sredine u odnosu na drugu je $n_{12} = \frac{n_1}{n_2}$, a n_{21} je relativni indeks prelamanja druge sredine u odnosu na prvu. Poredjenjem dobijamo vezu između ova dva indeksa.

$$n_{12} = \frac{1}{n_{21}}$$

Pošto je brzina prostiranja svetlosti u vazduhu (v) pri normalnim uslovima približno jednaka brzini prostiranja svetlosti u vakuumu (c) može se aproksimativno uzeti da je $v=c$, tj. da je

indeks prelamanja vazduha praktično jednak jedinici. Tačnije za ljubičastu svetlost ($\lambda = 4359 \text{ Å}^0$) iznosi 1,0002957, a za crvenu svetlost ($\lambda = 6563 \text{ Å}^0$) iznosi 1,0002914.

Iz ova dva primera zaključujemo da možemo uzeti da je za vazduh $n \approx 1$.

U tabeli su navedene vrednosti indeksa prelamanja nekih materija za žutu natrijumovu svetlost talasne dužine $\lambda = 5890 \text{ Å}^0$

Vazduh	1
Voda	1,333
Staklo	1,46-1,96
Etilalkohol	1,361
Kvarc	1,544
Natrijum hlorid	1,544
Dijamant	2,419

Ugavnom se srećemo sa indeksom prelamanja većim od jedinice, međutim postoji i indeks prelamanja manji od jedinice.

Pojava indeksa prelamanja manjeg od jedinice nastupa napr. pri prelasku x-zraka kroz dijamant.

U uvodu je navedeno da je $n=f(\lambda)$, a to znači da indeks prelamanja n predstavlja odredjenu funkciju talasne dužine.

Veličina koja pokazuje zavisnost promene indeksa prelamanja od promene talasne dužine naziva se disperzija sredine. Napr. talasnim dužinama λ_1 i λ_2 odgovaraju indeksi prelamanja n_1 i n_2 pa na delu dužine talasa od λ_1 do λ_2 disperzija sredine se može dati izrazom:

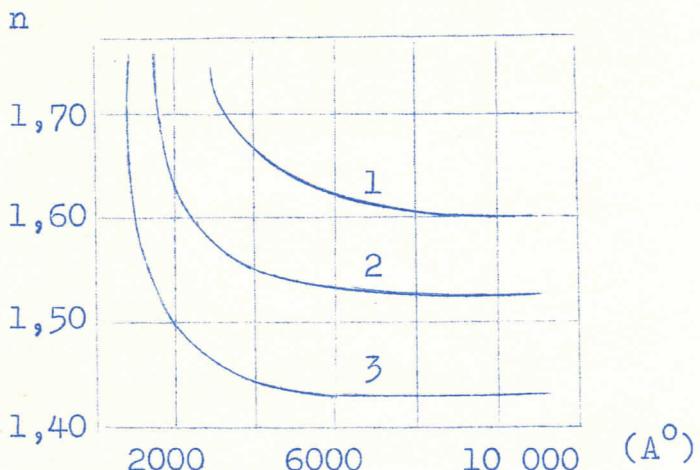
$$\frac{\Delta n}{\Delta \lambda} = \frac{n_2 - n_1}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

Ako ograničimo razmatranja na beskonačno mali interval talasne dužine, tada se vrednost disperzije sredine u blizini talasne dužine λ prikazuje izvodom indeksa prelamanja n po talasnoj dužini λ .

$$\frac{dn}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} f(\lambda)$$

U prvidnim sredinama indeks prelamanja n ravnomerno opada sa povećanjem talasne dužine svetlosti λ . To znači da indeksi prelamanja supstanci, od kojih su sačinjene ove sredine, brojno rastu sa smanjenjem talasne dužine.

Na Sl.5 data je zavisnost indeksa prelamanja n od dužine talasa za 1-staklo (laki flint), 2-kvarc i 3-fluorit.



Sl.5

Ova različita lomljivost zraka, pri prolasku kroz prizmu, sa promenom talasne dužine omogućila je Newton-u da 1672 godine razloži zrak Sunčeve svetlosti u razvučenu obojenu traku na zastoru, koju je on nazvao spektar. Newton je svojim eksperimentom započeo proučavanje disperzije svetlosti, koje i danas traje.

KLASIČNA TEORIJA DISPERZIJE /6,7,8,9,11,13 i 14/

U osnovi klasične teorije zračenja, koja se zasniva na atomističkom tumačenju, postoji shvatanje prema kome elektroni u atomima i molekulima vrše oscilatorna kretanja oko svojih ravnotežnih položaja, kao harmonijski oscilatori pod uticajem neke kvazielastične sile. Električno polje upadne svetlosti igra ulogu prinudne sile.

Pri pomeranju elektrona iz ravnotežnog položaja javlja se sila, koja teži da ga vrati u ravnotežni položaj. Njen dejstvo je prema Hooke-ovom zakonu proporcionalno pomeranju. Pod dejstvom te kvazielastične sile elektron vrši elastične oscilacije sa nekom kružnom frekvencijom ω_0 (njegovih sopstvenih oscilacija) pa je kao i u mehanici možemo napisati u obliku $-m\omega_0^2x$.

Električna sila, koja igra ulogu prinudne sile, zbog malog udaljavanja elektrona od ravnotežnog položaja, za slučaj ravnih harmonijskih talasa približno iznosi $F_e = eE_0 e^{i\omega t}$, jer je $x \ll 0$.

Znajući ove sile možemo napisati diferencijalnu jednačinu kretanja elektrona.

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + eE_0 e^{i\omega t}$$

Rešenje ove jednačine možemo tražiti u obliku

$$x = A e^{i\omega t}$$

Prvo nalazimo izvod ovog partikularnog integrala po vremenu

$$\dot{x} = i\omega A e^{i\omega t}; \quad \ddot{x} = -\omega^2 A e^{i\omega t}$$

smenjujući dobijene vrednosti u početnu jednačinu dobijamo:

$$-m\omega^2 A e^{i\omega t} = -m\omega_0^2 A e^{i\omega t} + eE_0 e^{i\omega t} / ; m e^{i\omega t}$$

$$(\omega_0^2 - \omega^2)A = \frac{eE_0}{m}, \text{ odakle nalazimo } A$$

$$A = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

pa zamenom dobijamo rešenje u vidu partikularnog integrala, koje glasi:

$$x = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t}$$

Ovaj partikularni integral nam pokazuje da elektron opet osciluje harmonijski pod dejstvom spoljašnjeg električnog polja, ali sa kružnom frekvencijom upadne svetlosti.

Pomeranjem elektrona iz ravnotežnog položaja, napr. u pravcu x-ose, javlja se električni moment oblika

$$p = ex = \frac{e^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} e^{i\omega t} = \frac{e^2 E}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} ; E = E_0 e^{i\omega t}$$

pa ako sa N označimo broj dipola po jedinici zapremine i pomnožimo ga sa \vec{p} dobićemo jačinu električne polarizacije P .

$$\vec{P} = N \vec{p} = \frac{N e^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E}$$

Njene komponente su $P_x = N p_x$; $P_y = P_z = 0$

Za određivanje indeksa prelamanja poslužićemo se vezom između jačina električnog polja E , vektora električne indukcije D i vektora polarizacije P .

Poznato je iz elektromagnetne teorije da je $n = \dots$, a za

sve providne dielektrične magnetni permeabilitet μ praktično je jednak jedinici pa je stoga $\Sigma = n^2$ te možemo napisati:

$$\vec{D} = \Sigma \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P}$$

$$4\pi \vec{P} = (\Sigma - 1) \vec{E} = (n^2 - 1) \vec{E}$$

odakle dobijamo da je

$$\vec{P} = \frac{n^2 - 1}{4\pi} \vec{E}$$

Poredjenjem ove vrednosti sa ranije dobijenom vrednošću za \vec{P} dobijamo:

$$\frac{n^2 - 1}{4\pi} \vec{E} = \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E} ; \quad \frac{n^2 - 1}{4\pi} = \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

pa za indeks prelamanja dobijamo formulu

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Ako se uzme u obzir da postoje elektroni sa različitim kružnim frekvencijama sopstvenih oscilacija $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k, \dots$ možemo napisati opštiji oblik formule

$$n^2 = 1 + \frac{4\pi e^2}{m} \sum_k \frac{N_k}{\omega_k^2 - \omega^2}$$

N_k je broj elektrona u jedinici zapremine, koji osciluju frekvencijom ω_k .

U oblasti frekvencije ω dalje od apsorpcione linije mogu nastupiti dva slučaja:

Za oblast frekvencije $\omega \ll \omega_0$ indeks prelamanja može se smatrati konstantnom veličinom, a nalazi se iz dobijene relacije

$$\frac{n^2 - 1}{4\pi} \approx \frac{Ne^2}{m\omega_0^2}$$

Za oblast frekvencije $\omega \gg \omega_0$ indeks prelamanja može se odrediti relacijom

$$\frac{n^2 - 1}{4\pi} \approx - \frac{Ne^2}{m\omega^2}$$

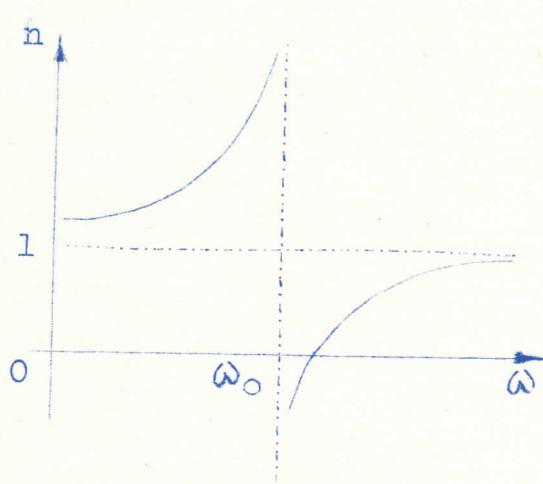


Za $\omega \ll \omega_0$ indeks prelamanja biće konstantna veličina i veća od jedinice, a za $\omega \gg \omega_0$ on će biti manji od jedinice, ali će se približavati jedinici kad $\omega \rightarrow \infty$.

Sva dosadašnja razmatranja su se odnosila na tzv. NORMALNU DISPERZIJU SVETLOSTI, jer je na svako povećanje frekvencije dolazilo odgovarajuće povećanje indeksa prelamanja.

Medjutim u oblasti frekvencije ω bliske frekvenciji ω_0 indeks prelamanja se po apsolutnoj vrednosti neograničeno povećava dobijajući prekid za $\omega = \omega_0$.

Na osnovu ovog razmatranja zaključujemo da matematička vrednost indeksa prelamanja sledi tok grana hiperbole kao na Sl.6



Sl.6

koja predstavlja zavisnost indeksa prelamanja n od frekvencije.

Ovo odgovara realnosti za deo krive dalje od rezonantne frekvencije ω_0 , sa isključenjem oblasti bliske frekvenciji ω_0 , gde u tački $\omega = \omega_0$ funkcija ima prekid.

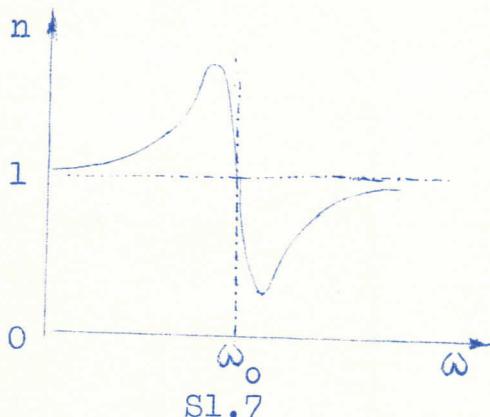
Prekid ne odgovara fizičkoj realnosti jer u dosadašnjem razmatranju nismo uzeli u obzir silu radijacionog trenja elektrona (reakcionu silu zračenja)

$$F_{tr} = \frac{2 \cdot e^2}{3 c^3} \ddot{x}$$

Ova sila radijacionog trenja, koja dejstvuje na elektron u kretanju, predstavlja dejstvo sopstvenog polja elektrona na sam taj elektron.

Ako se sila radijacionog trenja uvede u jednačinu kretanja elektrona dobiće se kriva zavisnosti indeksa prelamanja od frekvencije, čiji će tok u oblasti $\omega \sim \omega_0$ biti prikazan neprekidnom linijom Sl.7. Ova oblast bliska frekvenciji ω_0 naziva se

oblast ANOMALNE DISPERZIJE jer u njoj pri povećavanju frekvencije vrednost indeksa prelamanja opada.



Oscilovanje elektrona u atomu možemo prikazati jednačinom:

$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x + \frac{2e^2}{3c^3} \dot{x}^3 + eE_0 e^{i\omega t}$$

Rešenje tražimo u obliku partikularnog integrala

$$x = Ae^{i\omega t}$$

čiji su izvodi po vremenu

$$\dot{x} = i\omega A e^{i\omega t} ; \quad \ddot{x} = -\omega^2 A e^{i\omega t} ; \quad \dddot{x} = -i\omega^3 A e^{i\omega t}$$

uvodjenje ovih vrednosti u početnu jednačinu dobijamo:

$$-m\omega^2 A e^{i\omega t} = -m\omega_0^2 A e^{i\omega t} - \frac{2e^2}{3c^3} i\omega^3 A e^{i\omega t} + eE_0 e^{i\omega t} / : e^{i\omega t}$$

$$Am(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{2e^2\omega^3}{3mc^3}) = eE_0$$

Ako stavimo da je $\gamma = \frac{2e^2\omega^2}{3mc^3}$ dobijamo

$$A = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

pa rešenje u obliku partikularnog integrala dobija oblik:

$$x = \frac{eE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} e^{i\omega t}$$

Rešenjem je pokazano da elektron opet osciluje harmonijski sa kružnom frekvencijom upadne svetlosti, ali sa kompleksnom am -

plitudom i zbog toga ima pomerenu fazu u odnosu na spoljašnje električno polje, tj. nije više u fazi sa spoljašnjim električnim poljem.

Potražimo opet indeks prelamanja, koji je ovde kompleksna veličina, polazeći od formule $n' = \sqrt{\epsilon'}$ i dalje koristeći vezu iz elektrodinamike

$$\sqrt{\epsilon'} = n - i\beta$$

Ovom formulom uspostavljena je veza izmedju kompleksne relativne dielektrične konstante, indeksa prelamanja i koeficijenta apsorpcije pa imamo

$$n' = n - i\beta$$

$$\vec{D} = \vec{\epsilon}' \vec{E} = \vec{E} + 4\pi \vec{P} \text{ odakle je } \vec{P} = \frac{n'^2 - 1}{4\pi} \vec{E}; \vec{P} = N \vec{p}$$

$$p = ex = \frac{e^2 E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} e^{i\omega t}$$

$$\vec{P} = N \vec{p} = \frac{Ne^2 \vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

$$\frac{n'^2 - 1}{4\pi} = \frac{Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

$$n'^2 = 1 + \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}$$

sad smenjujemo vrednost za n' i vadimo kvadratni koren vraćajući se na indeks prelamanja n .

$$n - i\beta = \sqrt{1 + \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)}}$$

Ovu formulu ćemo razviti u red i zaustaviti se na drugom članu

$$n - i\beta = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{4\pi Ne^2}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + i\gamma\omega)} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}$$

i konačno sredjivanjem dobijamo:

$$n - i\alpha = 1 + \frac{2\pi Ne^2}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

Ako izjednačimo realne i imaginarnе delove na obema stranama dobićemo:

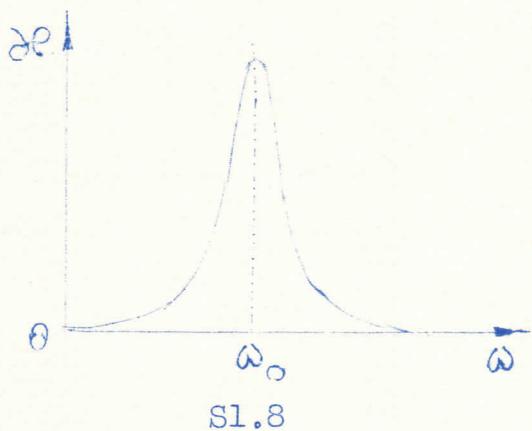
$$n = 1 + \frac{2\pi Ne^2}{m} \cdot \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$$\alpha = \frac{2\pi Ne^2}{m} \cdot \frac{\gamma\omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

Poslednja dva obrasca određuju indeks prelamanja i koeficijent apsorpcije kao funkcije frekvencije svetlosti.

U blizini ω_0 indeks prelamanja će se smanjivati sa porastom frekvencije. Ova pojava karakteriše anomalnu disperziju svetlosti.

Koeficijent apsorpcije α , koji predstavlja meru apsorpcije svetlosti biće znatan u okolini frekvencije ω_0 , a za $\omega = \omega_0$ imaće izrazit maksimum Sl.8, iz čega zaključujemo da je anomalna di-



sperzija praćena intenzivnom apsorpcijom svetlosti.

FAZNA I GRUPNA BRZINA /5,6,7,8,9,10,11,14 i 15/

Pri proučavanju talasnih procesa mora se uočiti razlika izmedju prostiranja monohromatskih talasa i složenih, nemonohromatskih talasa.

Monohromatski talas se karakteriše faznom brzinom v , koja označava brzinu pomeranja faze, a impuls se karakteriše grupnom brzinom u , koja označava brzinu pomeranja amplitude (energije).

Da bi se odredio fizički smisao fazne brzine v treba poći od talasne jednačine prostiranja ravnog talasa

$$y = a \cdot \sin(\omega(t - \frac{x}{v}))$$

koja predstavlja pomeranje jedne tačke duž puta x za vreme t .

Brzina pomeranja faze dobija se diferenciranjem ove jednačine po vremenu

$$\frac{dy}{dt} = a\omega \cos(\omega(t - \frac{x}{v}))$$

Vrednost faze određena je sa:

$$\varphi = \omega(t - \frac{x}{v}) = \omega t - \frac{\omega x}{v} = \omega t - kx$$

Faznu brzinu nalazimo polazeći od uslova konstantnosti faze $\omega t - kx = \text{const}$

Izvod konstantne faze mora biti jednak nuli, odakle dobijamo da je

$$\omega dt - kdx = 0 ; \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = v$$

pa se zbog toga v naziva fazna brzina talasa.

Fazna brzina nadjena na ovaj način karakteriše monohromatski talas, tj. neograničenu sinusoidu beskonačnog trajanja. Međutim ovakav talas se ne može realizovati, već imamo manje, ili više složen impuls ograničen u prostoru i vremenu.

Pošto se sredina, sem vakuma, obično karakteriše disperzijom naš impuls predstavlja skup beskonačno velikog broja monohromatskih talasa bliske frekvencije.

Brzina pomeranja impulsa razlikovaće se od fazne brzine ma koje od komponenata. Za izračunavanje ove brzine ograničićemo se na dva talasa bliskih frekvencija i istih amplituda.

$$y_1 = a \cdot \sin(\omega_1 t - k_1 x) \quad i \quad y_2 = a \cdot \sin(\omega_2 t - k_2 x)$$

Talasne dužine i frekvencije se međusobno malo razlikuju, te

$$\text{je: } \omega_1 = \omega_0 + \delta\omega \quad \text{i} \quad \omega_2 = \omega_0 - \delta\omega$$

$$k_1 = k_0 + \delta k \quad \text{i} \quad k_2 = k_0 - \delta k$$

Svetlosni impuls y , koji je u stvari grupa talasa, predstavlja zbir komponenata y_1 i y_2 , tj.

$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 = a \cdot \sin(\omega_1 t - k_1 x) + a \cdot \sin(\omega_2 t - k_2 x) = \\ &= 2a \cdot \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t - \frac{k_1 - k_2}{2}x\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x\right) = \\ &= 2a \cdot \cos(t \cdot \delta\omega - x \cdot \delta k) \sin(\omega_0 t - k_0 x) \end{aligned}$$

Ako se prvi izraz obeleži sa $A = 2a \cdot \cos(t \cdot \delta\omega - x \cdot \delta k)$ onda se impuls može napisati u obliku

$$Y = A \cdot \sin(\omega_0 t - k_0 x)$$

gde je A veličina promenljiva u prostoru i vremenu.

Da bismo našli grupnu brzinu moramo napisati uslov konstantnosti amplitude

$$t \delta\omega - x \delta k = \text{Const}$$

odakle diferenciranjem dobijamo

$$\delta\omega dt - \delta k dx = 0, \text{ ili}$$

$$u = \frac{dx}{dt} = \frac{\delta k}{\delta\omega}$$

Brzina pomeranja faze okarakterisana je faznom brzinom $v = \frac{\omega}{k}$ a brzina pomeranja amplitude (energije) okarakterisana je grupnom brzinom $u = \frac{d\omega}{dk}$.

Pomoću formule za faznu brzinu $v = \frac{\omega}{k}$ možemo izračunati grupnu brzinu

$$u = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(\omega k)}{dk} = v$$

Ovaj slučaj nastupa kad nema disperzije i tada je grupna brzina jednaka faznoj.

Ako je $v = f(k)$ onda dobijamo

$$u = \frac{d}{dk}(vk) = v + k \frac{dv}{dk}$$

Pošto je $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ onda je $dk = -\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda$. Uvedimo ove vrednosti u drugi član dobijene formule pa ćemo dobiti:

$$k \frac{dv}{dk} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{dv}{-\frac{2\pi}{\lambda^2}d\lambda} = -\lambda \frac{dv}{d\lambda}, \text{ odakle je smenom}$$

$$u = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda}$$

ovo je Rayleigh - ova formula.

Kod normalne disperzije je $\frac{dv}{d\lambda} > 0$ pa je $u < v$. U oblasti anomalne disperzije je $\frac{dv}{d\lambda} < 0$ pa je $u > v$. U oblasti gde nema disperzije (u vakuumu) je $\frac{dv}{d\lambda} = 0$ pa je grupna brzina jednaka faznoj.

Prema Einstein-ovoj teoriji c predstavlja najveću brzinu prostiranja svetlosnog signala.

Za faznu brzinu v može se reći sledeće:

"Fazna brzina v unutar signala može biti, u zavisnosti od dispergujuće sredine, vrlo različita i čak prevazilaziti veličinu c."

Sa indeksom prelamanja date sredine vezana je samo fazna brzina

$$v = \frac{c}{n}$$

Zbog toga je pri anomalnoj disperziji unutar apsorpcione trake sasvim moguća vrednost indeksa prelamanja n, manja od jedinice. Pri tom je fazna brzina $v > c$, ali brzina prostiranja potpunog signala u celosti i njegove energije ne prelazi brzinu prostiranja svetlosti u vakuumu" /11/.

PRELAZ SA KLASIČNE NA KVANTNU TEORIJU DISPERZIJE

/5,7,8,i 15/

U osnovi kvantne teorije svetlosti nalazi se formula

$$W = h\nu$$

koja povezuje energiju W svetlosnog kvanta-fotona sa frekvencijom elektromagnetskih oscilacija ν svetlosnog talasa.

Prema kvantnoj teoriji umesto frekvencije oscilacija atomskog oscilatora, koji se ponaša po zakonima klasične mehanike, uvođi se frekvencija atomskih prelaza odredjena uslovom

$$\nu_{nm} = \frac{W_n - W_m}{h}$$

gde su W_m i W_n energetski nivoi atoma u nekom m -tom, odnosno n -tom kvantnom stanju,

Emisija kvanta frekvencije ν_{nm} odgovara slučaju kad je $W_n > W_m$ (u daljem izlaganju smatraćemo da je uvek $W_n > W_m$, sem ako se suprotno izričito naglasi), a pri prelazu iz m -tog u n -to kvantno stanje, energija se ne smanjuje nego se povećava. U ovom slučaju svetlost ne biva emitovana, već apsorbovana od strane atoma.

Pojam sile oscilatora, koji u klasičnoj fizici određuje ulogu datog oscilatora u obrazovanju veličine indeksa prelamanja, ili koeficijenta apsorpcije date frekvencije u kvantnoj teoriji odgovara verovatnoći prelaza iz n -tog u m -to kvantno stanje.

Sila oscilatora je proporcionalna intenzivnosti apsorpcione linije, koja se javlja pri datom apsorpcionom prelazu i iznosi

$$f_{mn} = \frac{2}{\hbar c^2} \omega_{mn} |\vec{D}_{mn}|^2$$

gde je $|\vec{D}_{mn}|$ - matrični element dipolnog momenta prelaza sa frekvencijom

$$\omega_{mn} = \frac{W_n - W_m}{h}$$

Ovde je frekvencija pozitivna i odgovara apsorpcionom prelazu sa nivoa W_m na W_n .

Pri obratnom prelazu - emisiji fotona

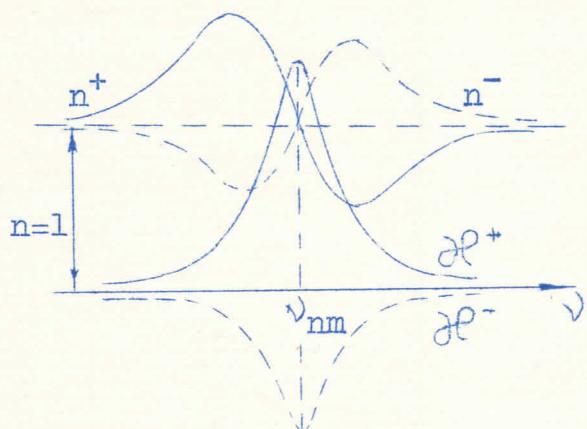
$$\omega_{nm} = \frac{W_m - W_n}{\hbar}$$

frekvencija je negativna pa imamo

$$\omega_{mn} = -\omega_{nm}$$

Odavde sledi da je pri apsorpciji $W_m \rightarrow W_n$ sila oscilatora $f_{mn} > 0$, a pri emisiji $W_n \rightarrow W_m$ je $f_{nm} < 0$.

Na osnovu ovoga sledi da prelazi sa nižeg na viši nivo, dove do pozitivne disperzije i apsorpcije, dok prelazi pod uticajem zračenja, indukovani prelazi, sa višeg na niže nivoe dove do negativne disperzije i apsorpcije Sl. 9.



Sl. 9

Ovo je vrlo važna razlika kvantnih rezultata od klasičnih, koja nema analogije u klasičnoj fizici.

Pojavu negativne disperzije eksperimentalno je konstatovao Ladenburg. On je pratio disperziju u gasovima kroz koje su prolazile jako nanelektrisane čestice i uspeo da dobije uticaj negativne disperzije pa je na taj način potvrdio zaključke kvantne teorije.

Polazeći od rezultata klasične teorije disperzije može se na osnovu kvantne teorije, umesto ω_0 uvesti ω_{nm} , a umesto N može u formule za indeks prelamanja i koeficijent apsorpcije uvesti N_m i

N_n , gde je N_m broj atoma u jedinici zapremine na nivou W_m , a N_n na nivou W_n .

Formula koja određuje indeks prelamanja može se napisati u obliku

$$n = 1 + \frac{2\pi e^2}{m} \cdot \frac{(N_m - N_n)(\omega_{nm}^2 - \omega^2)}{(\omega_{nm}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \delta_{mn}^2}$$

Ako su energetski nivoi W_n i W_m degenerisani, a njihove odgovarajuće statističke težine g_n i g_m tada umesto razlike $(N_m - N_n)$ u navedene formule treba uvesti veličinu $(N_m - \frac{g_m}{g_n} N_n)$.

Kvantni izrazi za indeks prelamanja mogu se dobiti množeći njem klasičnih vrednosti silom oscilatora.

Ako se uzmu u obzir prelazi sa emisijom i apsorpcijom opšti oblik formule za indeks prelamanja u kvantnoj teoriji dobija oblik

$$n = 1 + \frac{2\pi e^2}{m} \sum_{mn} \frac{(f_{mn} N_m + f_{nm} N_n)(\omega_{nm}^2 - \omega^2)}{(\omega_{nm}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \delta_{mn}^2}$$

U ovoj formuli je klasična širina linije δ zamenjena kvantnom δ_{mn} , koja je sa δ vezana relacijom

$$\delta_{mn} = f_{mn} \delta$$

Uzimajući u obzir da su veličine f_{mn} i f_{nm} vezane relacijom

$$g_n f_{nm} = - g_m f_{mn}$$

odakle je

$$f_{nm} = - \frac{g_m}{g_n} f_{mn}$$

pa uvodeći ove vrednosti u zadnju formulu, disperziona formula dobija konačan oblik:

$$n = 1 + \frac{2\pi e^2}{m} \sum_{mn} \frac{f_{mn} (N_m - \frac{g_m}{g_n} N_n) (\omega_{nm}^2 - \omega^2)}{(\omega_{nm}^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \delta_{mn}^2}$$

U ovoj formuli javlja se izraz $N_n - \frac{g_m}{g_n} N_n$, koji se može označiti sa ΔN_{nm} . Ovaj izraz je u direktnoj vezi sa tokom krivih

prikazanih na Sl.9.

Pri $\Delta N_{nm} > 0$ dolazido pozitivne disperzije n^+ i apsorpcije \mathcal{D}^+ ,koje su na Sl.9 prikazane punom linijom. Njihov tok je objasnjen pri razmatranju klasične teorije disperzije.

Kada je $\Delta N_{nm} < 0$ dolazi do negativne disperzije n^- i apsorpcije \mathcal{D}^- ,koje su na Sl.9 prikazane isprekidanom linijom. Pri negativnoj disperziji indeks prelamanja opada sa povećanjem frekvencije sve do oblasti bliske frekvenciji ν_{nm} ,koja odgovara oblasti anomalne disperzije. U oblasti anomalne disperzije indeks prelamanja raste sa povećanjem frekvencije,a dalje u oblasti normalne disperzije ponovo opada. Koeficijent apsorpcije \mathcal{D}^- ima u oblasti frekvencije ν_{nm} izrazit minimum pa stoga u ovoj oblasti ne dolazi do apsorpcije nego do pojačanja svetlosti. Na taj način sredina sa negativnim koeficijentom apsorpcije biva pojačavač svetlosti.

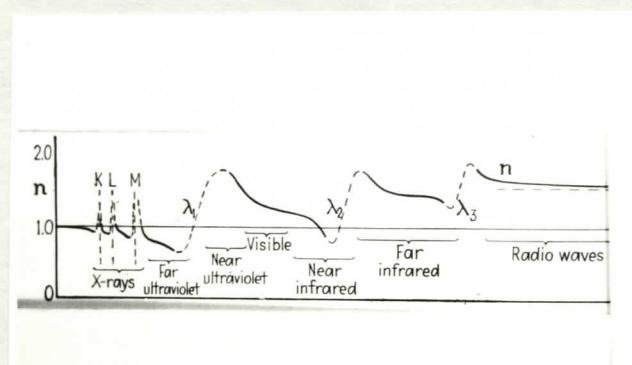
Ovakvo stanje materije moguće je samo pri specijalnom pobudjenju kada je $\Delta N_{nm} < 0$.

Rezultati kvantne teorije,koji su proizašli iz dosadašnjih razmatranja bitno se razlikuju od rezultata klasične teorije.

Dok se prema klasičnoj teoriji anomalna disperzija javlja u oblasti sopstvene mehaničke frekvencije oscilovanja elektrona, dotle se prema kvantnoj teoriji ona javlja u oblasti frekvencija, koje odgovaraju dozvoljenim prelazima.

Ovaj zaključak sledi iz činjenice da u disperzionoj formuli bitnu ulogu igra sila oscilatora f_{mn} ,koja je definisana pomoću frekvencije ω_{mn} i matričnog elementa D_{mn} ,koji karakteriše moguće prelaze.

Šematski prikaz jedne kompletne disperzije krive n u funkciji od λ ,tj. $n = f(\lambda)$,polazeći od $\lambda = 0$,dat je na Sl.10.



Sl.10

Na ovoj krivoj su prikazane i oblasti frekvencija, koje odgovaraju dozvoljenim prelazima. Na njoj se jasno uočavaju oblasti normalne i anomalne disperzije.

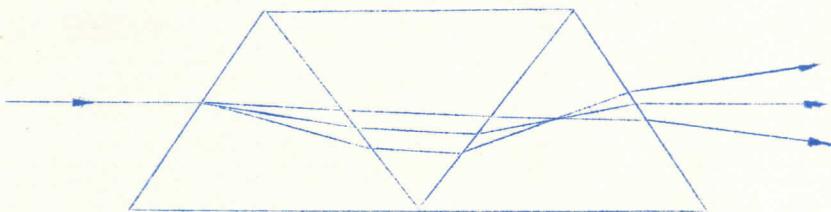
EKSPERIMENTALNI DEO /1,2,4,7,8,9,12 i 17/

Do sada su vršena teoretska razmatranja normalne i anomalne disperzije, koja treba potvrditi eksperimentom.

Polazeći od činjenice da je za svoja sistemetska ispitivanja Kundt koristio Newton-ov metod ukrštenih prizmi morao se pre glavnog eksperimenta ispitati ovaj metod. Metod se sastoji u tome da svetlost sukcesivno prolazi kroz dve prizme, čije su prelамajuće ivice postavljene normalno jedna na drugu.

Prilikom eksperimenta, koji je vršen u Zavodu za fiziku i matematiku Univerziteta u Novom Sadu, kao prva prizma korišćena je Geradsichtprisma ("prizma à vision directe" Amicijevog tipa) firme "Leybold", dok je druga prizma bila od flint stakla.

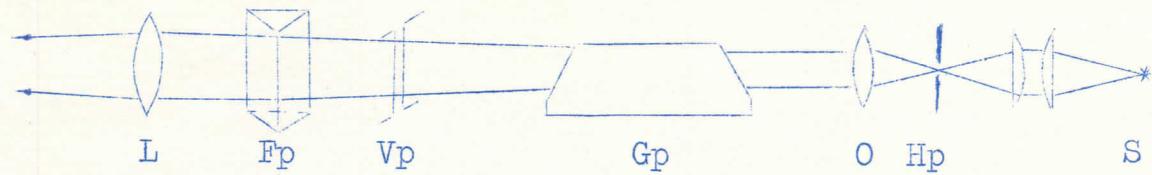
Kod Geradsichtprisme spektar se posmatra u pravcu upadnog snopa svetlosti koji se razlaže. Kod prizme firme "Leybold" prema osnovi skreće crvena boja, a ljubičasta boja skreće na suprotnu stranu. Ova prizma je sastavljena iz tri dela, a prikazana je na Sl.11.



Sl.11

Ona ima spoljašnje prizme od kron-stakla, a centralna je od flint-stakla.

Šema aparature data je na slici 11.

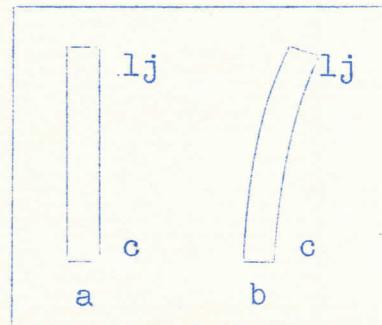


Sl.12

Kao izvor svetlosti korišćena je lučna lampa S sa ručnim podešavanjem luka. Hp je horizontalna pukotina, O -objektiv jačine 1:3,5 i fokusne daljine $f = 15\text{cm}$, Gp -Geradsichtprisma firme "Lebold", Vp -vertikalna pukotina, Fp -flint-prizma i L sočivo. Iza sočiva nalazi se zaklon.

Kad se propusti snop bele svetlosti da prodje kroz Geradsichtprismu, a iz datog uredjaja odstrani flint-prizma, na zaklonu se dobija spektar kod koga se talasne dužine menjaju po vertikalnom pravcu tako da se povećavaju idući naniže, Sl.13a.

Kad se flint-prizma uvede u sistem, spektar biva otklonjen sa prvobitnog mesta i to tako da najviše skrene ljubičasta, a najmanje crvena boja. Isto tako i svako drugo mesto spektra pomera se utoliko više ukoliko je veći indeks prelamanja za talasnu dužinu, koja odgovara tom mestu spektra. Ceo spektar biva savijen i pokazuje tok disperzije flint-prizme, Sl.13b.



Sl.13

Pojava prikazana na slici 13 predstavlja tzv. normalnu disperziju kod koje pri smanjivanju talasne dužine dolazi do povećanja indeksa prelamanja.

Eksperiment za dokazivanje anomalne disperzije vršen je primenom metoda ukrštenih prizmi pri čemu je prva prizma bila od natrijumovih para, a umesto druge korišćen je spektrograf "Officine Galileo". Ovaj metod pomoću natrijumove prizme i spektrograфа zove se "metod Kundt-a i Wood-a". Kundt je prvi izvršio ovaj eksperiment 1871 godine, a usavršio ga je Wood 1904 godine.

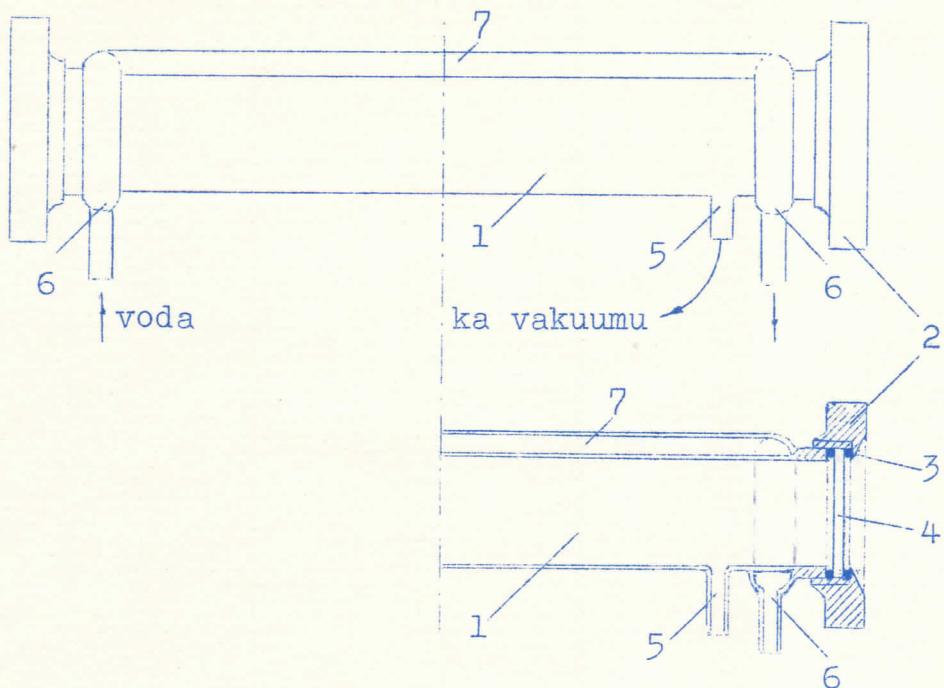
Korišćen je elementaran natrijum iz dva razloga. Prvi razlog je taj što je elementaran natrijum lako isparljiv, a drugi se sastoji u tome da pare natrijuma u vidljivoj oblasti spektra, u žutom delu, imaju dublet, koji se sastoji iz dve vrlo oštре absorpcione linije. Pri normalnim uslovima natrijum se topi na temperaturi od $97,8^{\circ}\text{C}$, a ključa na 883°C . Snižavanjem pritiska može mu se tačka ključanja nešto sniziti.

Iz termske šeme natrijuma, vidi se da navedene linije D_1 i D_2 , koje se nalaze na medjusobnom rastojanju od 6 \AA^0 pripadaju glavnoj seriji. One sačinjavaju žuti dublet, koji je naročito intenzivan, zbog čega u vidljivom delu natrijumovog spektra provlađuje žuta svetlost. Prema spomenutoj termskoj šemi talasne dužine ovih linija su sledeće: Prva D_1 linija ima talasnu dužinu $5895,930 \text{ \AA}$, a druga D_2 talasnu dužinu $5889,963 \text{ \AA}$.

Za realizaciju prizme od natrijumovih para, pored sopstvenih, korišćena su i zapažanja opisana u knjigama 1, 2, 9 i 12/.

Prizma od natrijumovih para može se pod specijalnim uslovima realizovati u sudu cevastog oblika, koji je po sopstvenoj konstrukciji izradjen u radionici Zavoda za fiziku i matematiku Univerziteta u Novom Sadu.

Izgled suda dat je na Sl. 14. To je gvozdena cev (1) dugačka 20cm , unutrašnjeg prečnika $2,9\text{cm}$ i debljine zida $0,6\text{mm}$. Na oba kraja cevi nalaze se navrtke (2) sa središnjim otvorom, koji je jednak unutrašnjem prečniku gvozdene cevi.



Sl.14

Na otvore, izmedju dva gumena prstenasta zaptivača (3), postavljeni su prozorčići od ravnog providnog stakla debljine 2mm (4) i čvrsto pritegnuti spomenutim navrtkama. Prozorčići su tako podešeni da se mogu skidati radi unošenja metalnog natrijuma pri vršenju eksperimenta. Skidanje prozorčića se vrši jednostavnim odvijanjem navrtke pri atmosferskom pritisku, a pod vakuumom ova operacija nije izvodljiva.

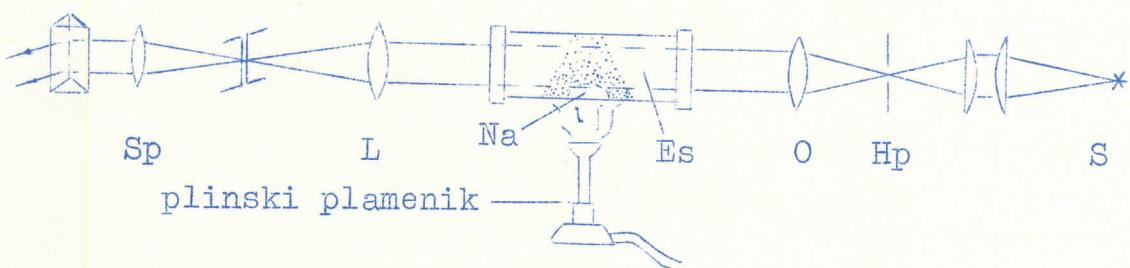
Preko cevi (5) sud je u vezi sa vakuum pumpom.

U blizini krajeva suda nalaze se dve cevi (6) sa izvodima za dovod i odvod vode. One su zavarene za sud, osnovnu gvozdenu cev koju obuhvataju, a preko cevi (7), koja je takođe zavarena za gornji deo suda, spojene su medju sobom. Pri izradi i postavljanju ovih cevi vodilo se računa da dodirna površina izmedju suda i vode, koja protiče kroz cevi, bude dovoljno velika.

Prilikom zagrevanja suda sa donje strane plinskim plamenikom u evakuisanom sudu natrijum ispari, a hladjenje krajeva i gornjeg dela suda daje oblaku natrijumovih para prizmatičan oblik.

Ovim postupkom sprečeno je kondenzovanje natrijumovih para na krajevima, a time je onemogućena metalizacija prozorčića. Ako se sud ne hlađi vodom, staklene pločice, koje čine prozorčice, se metalizuju i time se sprečava prolaz potrebnih svetlosnih zraka kroz njega.

Uredjaj za dokazivanje anomalne disperzije sastavljen je prema šemsi prikazanoj na Sl.15.



Sl.15

S je lučna lampa sa ručnim podešavanjem luka, Hp-hORIZONTALNA pu-kotina, O-objektiv jačine 1:3,5 i fokusne daljine $f = 15\text{cm}$, Es-e-vakuisani sud potreban za realizaciju prizme od natrijumovih para. L je sabirno sočivo fokusne daljine $f = 33,3\text{cm}$, Sp-spektrograf "Officine Galileo", koji je tako konstruisan da može služiti i kao spektroskop i kao spektrograf. Za individualno posmatranje spektra na njega se postavlja durbin i tada služi kao spektroskop, a za snimanje spektra skida se durbin i na njegovo mesto postavlja kamerna cev. Kamera je tako konstruisana da se u nju mogu uvlačiti kasete sa filmom. Pri snimanju spektra kasetu se u kameri može pomerati po vertikali, što omogućava realizaciju više snimaka na istom filmu. Pored nabrojanih delova opisanom uredjaju pripada i rotaciona vakuum pumpa firme "Leybold" spojena vakuum crevom sa sudom za evakuaciju. Crevo se na jednom mestu račva da bi se po potrebi moglo spojiti sa manometrom. Manometar služi za me-

renje pritiska u evakuisanom sudu. Ispod suda Es nalazi se plinski plamenik, čiji je izlazni otvor proširen u obliku rešetke.

Eksperiment se izvodi na sledeći način.

Prvo se odvije navrtka sa jedne strane suda Es, skine prozorčić i u sud unese 15-30mg čistog natrijuma. Natrijum se stavi na sredinu suda pa se sud zatvori prozorčićem, koji se dobro pritegne navrtkom. Potom se otvori slavina na vakuum crevu i sud Es dovede u vezu sa vakuum pumpom. Može se po potrebi uspostaviti i veza sa manometrom radi merenja pritiska vazduha u sudu. Uključi se vakuum pumpa i evakuacija vrši na sobnoj temperaturi.

Uporedjivanjem većeg broja eksperimenata pokazalo se da se najbolji rezultati dobijaju ako se evakuacija suda Es vrši više od 10 minuta. Za ovo vreme se pomoću rotacione vakuum pumpe marke "Leybold" u sudu uspostavi pritisak od oko 2mm Hg, koji u potpunosti odgovara zahtevima ovog eksperimenta.

Za vreme rada vakuum pumpe vrše se dalja podešavanja celokupnog uredjaja. Uključi se lučna lampa i luk podesi tako da svetlost simetrično pada na horizontalnu pukotinu, čiji je otvor podešen na razmak od 0,1mm. Propuštena svetlost se pomoću objektiva O usmeri, u obliku približno paralelnog snopa, kroz sud Es. Svetlost koja prodje kroz sud sabira se pomoću sočiva L tako da se na vertikalnoj ulaznoj pukotini spektrograфа obrazuje oštar lik horizontalne pukotine. Preciznije podešavanje vrši se na samoj kameri spektrograфа.

U kameru se uveče kaseta sa mutnim stakлом na kome se obrazuje kontinualni spektar u obliku uske horizontalne linije. Spektar se posmatra pomoću lupe, a sočivo L pomera sve dotle dok se u potpunosti ne izoštare ivice spektra. Potom se isključi lučna lampa da se ohladi, a kroz sistem cevi oko suda Es pusti da protiče

voda iz vodovoda, koja treba da protiče sve do kraja eksperimenta. U kameri spektrografa se kaseta sa mutnim stakлом zameni kasetom u koju je stavljen film. Kasete su punjene filmom "ORWO" osetljivosti 20 Dina.

Pošto su izvršene sve pripreme pristupa se posmatranju, ili snimanju spektra.

Uključi se lučna lampa i podesi jačina svetlosti, a zatim se zatvaranjem slavine na vakuum crevu isključi vakuum pumpa. Pusti se plin u plamenik i zapali. Plamenik treba da je podešen tako da se sagorevanje plina vrši pri skoro maksimalno otvorenim otvorima za dovodjenje vazduha.

Paljenjem plina eksperiment je počeo da se odvija.

Usled zagrevanja donjeg dela suda Es natrijum je ispario, a usled hladjenja gornjeg dela suda u sudu se obrazovao heterogeni stub natrijumove pare koji se ponaša kao trostrana prizma sa prelomnom ivicom na vrhu. Anomalni karakter disperzije natrijumovih para utiče na skretanje upadnih svetlosnih zraka i stvaranje karakterističnih prekidnih prevoja u blizini linija natrijumovog dubleta. Prema R.W.Wood-u proces počinje da se odvija pri temperaturi od 644°C . Pri ovom eksperimentu je pomoću optičkog pirometra izmerena temperatura donjeg dela suda Es, koja je iznosila 660°C .

Praćenje eksperimenta može da se vrši na dva načina i to, individualnim posmatranjem pomoću durbina, ili snimanjem pomoću kamere.

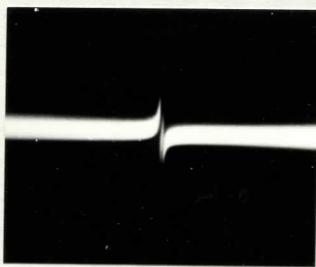
Pri individualnom posmatranju prvo se na mestu natrijumovog dubleta pojave apsorpcione linije i stope u apsorpcionu traku, koja se naglo širi prekrivajući dublet. Širina trake je nekoliko puta veća od razmaka dubleta.

Pri najvećoj gustini natrijumovih para, uz apsorpcionu traku, spektar sa crvene strane skreće naviše, a sa ljubičaste strane naniže. Izmedju ova dva bočna prevoja nalazi se tamno polje Sl.16



Sl.16

Kad se gustina natrijumovih para malo smanji, kondenzovanjem na gornjem delu evakuisanog suda Es, pojavi se u unutrašnjosti tamnog polja i preostali deo spektra u obliku karakteristične krive Sl.17.



Sl.17

Dužina ovog dela spektra po horizontali iznosi 6 \AA , koliko iznosi razmak izmedju linija D_1 i D_2 natrijumovog dubleta.

U spektroskopu, ili spektrografu ova dužina je povećana u zavisnosti od moći razlaganja aparata.

Opisani proces traje vremenski 1-2 minuta. Nakon ovog vremena gustina natrijumovih para se još više smanji kondenzacijom. Prevoji spektra se nešto skrate i ako je plamen plinskog plamenika pogodno podešen proces se može posmatrati 10 i više minuta.

Ukoliko se želi snimanje spektra proces se u svemu mora ponoviti, ali na aparat mora biti postavljena kamera i podešena onako, kako je u ranijem tekstu opisano.

Snimanje treba otpočeti 5 sec. posle paljenja plina i za-

vršiti u roku od jednog minuta, jer su tada prevoji spektra najviše izraženi.

Pri eksperimentima, koji su vršeni u Zavodu za fiziku i matematiku Univerziteta u Novom Sadu, svaki pojedinačni eksperiment snimljen je devet puta sa eksponažom od 1sec.

Slike 16 i 17 predstavljaju originalne snimke koji su ovde načinjeni. Slabija oštRNA u oblasti prelomnih prevoja spektra dolazi od nekorigovabog sočiva L iz šeme sa Sl.15. Ovo sočivo je bilo najbolje od svih sočiva kojima se raspolagalo.

Snimci (Sl.16 i 17) su i pored navedenih teškoća dobri jer se na njima mogu jasno uočiti oblasti normalne i anomalne disperzije za obe linije žutog natrijumovog dubleta.

Pri raznatranju ovih snimaka mora se voditi računa o obrtanju lika kod sabirnih sočiva. Na šemi Sl.15 iza evakuisanog suda Es nalaze se dva sabirna sočiva; prvo je sočivo L, a drugo se nalazi u kolimatorskoj cevi spektrografa.

Sočivo L obrće lik, a drugo ga ponovnim obrtanjem ispravlja pa možemo zaključiti da su gornja i donja strana sninka pravilno orijentisane. Međutim, spektrograf "Officine Galileo" daje spektar na kome se sa leve strane nalazi crvena, a sa desne ljubičasta boja.

Ako se želi dobiti fotografija spektra, koji bi pratio povećanje talasne dužine u pozitivnom sneru apscisne ose, onda negativ treba postaviti tako, u aparatu za izradu fotografija, da dobijeno pozitive, koji su odnosu na Sl.16 i 17 obrnuti samo oko vertikalne ose. Naprimer prema Jenkins-u /2/ snimci su tako i postavljeni Sl.18.

Uzimajući u obzir Sl.10 sa koje se jasno vidi da je u vidljivom delu spektra $n > 1$ i Sl.16,17 i 18 moženo zaključiti da za talasne dužine ne mnogo manje od rezonantnih može biti $n \leq 1$,

prema tome je u tom delu fazna brzina $v > c$.



Sl.18

Ovaj zaključak sledi iz činjenice da je sa indeksom prelamanja prema formuli $n = \frac{c}{v}$ vezana fazna brzina.

Ovu činjenicu smo konstatovali na sledeći način: Posmatranjem položaja spektra pomoću končanice durbina nije se vizuelno moglo konstatovati njegovo pomeranje po vertikali u oblasti normalne disperzije za talasne dužine znatno manje i veće od rezonantnih u slučaju kad je prizma od natrijumovih para bila formirana i bez nje. Međutim, u oblasti rezonantnih talasnih dužina prelomni prevoji su bili vrlo oštro izraženi pokazujući da je za talasne dužine ne mnogo manje od rezonantnih indeks prelamanja manji od jedinice. I probni snimci načinjeni na istom negativu potvrđuju ova razmatranja. Spektar je snimljen pre dejstva natrijumovih para, a zatim je svetlost propuštena kroz prizmu od natrijumovih para i snimak ponovljen na istom mestu negativa.

Vizuelnim posmatranjem pojave anomalne disperzije uočavaju se mnogo veća odstupanja indeksa prelamanja od jedinice (produžavanje prelomnih prevoja) nego što se to može registrovati snimkom (Sl.16 i 17). Ovo nastaje kao posledica veće osetljivosti oka od upotrebljenog filma.

Z A K L J U Č A K

Zadatak se sastojao u tome da se objasni, realizuje i snimi pojava normalne i anomalne disperzije.

Rad se sastoji iz dva dela; teorijskog i eksperimentalnog.

U teorijskom delu dat je hronološki osvrt na pojavu prelamanja i definisan indeks prelamanja, a zatim se prešlo na klasičnu teoriju disperzije. Matematički je dokazano da, prema klasičnoj teoriji disperzije, u oblasti normalne disperzije indeks prelamanja raste sa povećanjem frekvencije, a u oblasti anomalne opada.

Pošto je sa indeksom prelamanja vezana fazna brzina objašnjena je razlika izmedju fazne i grupne brzine i njihovo prostiranje. Zatin se sa klasične prešlo na kvantnu teoriju disperzije u kojoj je pokazano da pored pozitivne može postojati i negativna disperzija i apsorpcija.

U eksperimentalnom delu uspešno je potvrđen Wood-ov ogled i snimljen spektar, koji prikazuje karakteristične prelomne prevoje u oblasti žutog natrijumovog dubleta, tj. oblasti frekvencija koje odgovaraju dozvoljenim prelazima.

Pomoću dobijenih snimaka dokazano je da za talasne dužine vrlo malo manje od rezonantnih prostiranje fazne brzine kroz materiju može prevazilaziti brzinu prostiranja svetlosti u vakuumu.

Ovaj zaključak ne protivureči teoriji relativnosti, jer se Einstein-ova teorija o ograničenju brzine odnosi na grupnu, a ne na faznu brzinu.

Literatura:

- 1.R.W.Wood-Physical Optics, New York 1952; str.118-123 i 492-503
- 2.Jenkins and White-Fundamentals of Optics, New York-Toronto-London 1950; str.462-477
- 3.Dr Ivan Janić-Vežbe iz atomske fizike I deo, Novi Sad 1971; str.1-7
- 4.Dr Ivan Janić-Vežbe iz atomske fizike II, Novi Sad 1973; str.18-21
- 5.F.A.Korolev-Teoretičeskaja optika, Moskva 1966; str.288-348
- 6.Dr.Dj.Mušicki-Uvod u teorijsku fiziku II, Beograd 1965; str.171-179
- 7.N.I.Kaliteevskij-Volnovaja optika, Moskva 1971; str.303-326
- 8.G.S.Lansberg-Optika, Beograd 1967; str.290-295 i 388-408
- 9.Friš i Timorjeva-Kurs opšte fizike III, Beograd 1970; str.132-142
- 10.E.V.Špoljskij-Atomska fizika I, Beograd 1963; str.320-322
- 11.G.A.Zisman O.M.Godes-Kurs obšće fiziki III, Moskva 1968; str.38-46
- 12.R.W.Pohl-Optika i atomnaja fizika, Moskva 1966; str.283-287
- 13.A.N.Matveev-Elektrodinamika i teorija otnositeljnosti, Moskva 1968; str.239-245
- 14.I.V.Saveljev-Kurs obšće fiziki III, Moskva 1968; str.177-184
- 15.Dr A.Milojević-Talasna optika, Beograd 1971; str.285-302
- 16.Harrison,Lord i Loofbourow-Praktična spektroskopija, Beograd 1962; str.1-8
- 17.Sears-Optika, Beograd 1963; str.128