



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ  
ДЕПАРТМАН ЗА ФИЗИКУ



# **Решавање рачунских задатака при обради наставне теме:**

## **„Закони одржања у механици“**

- мастер рад -

Ментор:  
проф. др Маја Стојановић

Кандидат:  
Милка Веселиновић

Нови Сад, 2013.

*Захваљујем се ментору проф. др Маји Стојановић  
на саветима, сугестијама, мотивацији, безусловној помоћи и подршци.  
Захваљујем се и члановима комисије проф. др Соњи Скубан и проф. др Душану Мрђи.*

# Садржај

|       |                                                                       |    |
|-------|-----------------------------------------------------------------------|----|
| 1     | УВОД.....                                                             | 3  |
| 2     | МЕТОДИЧКИ ПРИСТУП НАСТАВИ ФИЗИКЕ .....                                | 4  |
| 3     | ЗАДАЦИ У НАСТАВИ.....                                                 | 7  |
| 3.1   | Подела задатака .....                                                 | 8  |
| 3.2   | Значај решавања задатака .....                                        | 10 |
| 3.3   | Методика решавања физичких задатака .....                             | 11 |
| 4     | ЗАКОНИ ОДРЖАЊА У НАСТАВНОМ ПЛАНУ И ПРОГРАМУ .....                     | 15 |
| 5     | ЗАКОНИ ОДРЖАЊА У МЕХАНИЦИ .....                                       | 17 |
| 5.1   | Закон одржања импулса .....                                           | 20 |
| 5.1.1 | Примена закона одржања импулса - Узмак .....                          | 24 |
| 5.2   | Закон одржања механичке енергије .....                                | 26 |
| 5.2.1 | Примери очувања енергије.....                                         | 29 |
| 5.2.2 | Примена закона одржања енергије и имулса: Судари.....                 | 30 |
| 5.2.3 | Демонстрација закона одржања импулса и енергије - Њутново клатно..... | 33 |
| 5.3   | Закон одржања момента импулса .....                                   | 35 |
| 5.3.1 | Демонстрација закона одржања момента импулса – Прантлова столица..... | 36 |
| 6     | ПОДЕЛА ЗАДАТАКА ПРЕМА УСЛОВИМА ЗАДАТКА – ПРИМЕРИ .....                | 37 |
| 7     | РЕШАВАЊЕ РАЧУНСКИХ (КВАНТИТАТИВНИХ) ЗАДАТАКА .....                    | 40 |
| 7.1   | Прва група задатака .....                                             | 40 |
| 7.1.1 | Једноставни задаци.....                                               | 40 |
| 7.1.2 | Сложени задаци .....                                                  | 44 |
| 7.1.3 | Комбиновани задаци .....                                              | 50 |
| 7.2   | Друга група задатака.....                                             | 56 |
| 7.2.1 | Закон одржања импулса .....                                           | 56 |
| 7.2.2 | Закон одржања енергије .....                                          | 59 |
| 7.2.3 | Закон одржања момента импулса .....                                   | 62 |
| 7.3   | Трећа група задатака .....                                            | 65 |
| 8     | ЗАКЉУЧАК.....                                                         | 71 |
| 9     | ЛИТЕРАТУРА.....                                                       | 72 |

# 1 УВОД

Да би настава била успешна, при планирању, организацији, извођењу и верификацији наставног процеса треба обезбедити рационалан и ефикасан рад, најбоља решења образовних и васпитних задатака.

Наставни програм, како по садржају, тако и по обиму, мора бити прилагођен психофизичким могућностима ученика. Сталним обнављањем најважнијих делова из целокупног градива постиже се да стечено знање буде трајније и да ученик боље уочава повезаност разних области физике. Истовремено се обезбеђује да ученик по завршетку школе задржи у памћењу све основне појмове и законе физике, као и основну логику и методологију која се користи у физици при проучавању физичких појава у природи.

Добро познавање психологије ученика, циља који се жели постићи, услова организовања наставе као и ангажовање ученика на школском часу неопходни су да би знање било трајније и сигурније, да би се развијале позитивне особине ученикове личности: упорност, систематичност, смисао за самостални рад и решавање проблема.

У настави физике неопходно је повезати теорију и праксу. Практична примена знања огледа се у извођењу експеримената и решавању рачунских задатака.

При решавању рачунских задатака да би се дошло до резултата потребно је применити претходно стечено знање, правилно уочити проблем, одвојити познате од непознатих величина.

У процесу учења физике различити типови задатака имају различито значење и намену. Способност решавања задатака одређује степен разумевања и овладавања основним физичким законима.

У овом раду одређено је место методике наставе физике у сложенем образовном систему. Указано је на значај задатака у настави. Извршена је класификација задатака и дат је општи методички пут за њихово решавање. Такође је дат теоријски увод за област „Закони одржања у механици“. Наведени су примери решених задатака из ове области који у оквиру одговарајуће класификације илуструју доследно спровођење правила решавања задатака.

## 2 МЕТОДИЧКИ ПРИСТУП НАСТАВИ ФИЗИКЕ

Процес **образовања**, као део јединственог процеса едукације ученика, поред стицања теоријског знања обухвата и стицање практичног умећа примењивања тог знања у пракси, односно решавања разноврсних проблема.

**Процес учења** обухвата контакт ученика са чињеницама односно информацијама које треба усвојити и властиту активност ученика на градиву које треба усвојити, односно примену. Битно је да ученици разумеју оно што су научили. Ученици ће све лакше схватити ако им се објасни каква је корист од тога у свакодневном животу и ако се садржаји појединих предмета међусобно повезују.

**Наставни процес** има два основна циља - образовни и васпитни. *Образовни циљ* се огледа у стицању знања и вештина на основу којих се формира поглед на свет. Овај циљ се остварује кроз наставне предмете који се прожимају и допуњавају тако да се на крају добија целовит поглед и схватање света који нас окружује. *Васпитни циљ* је да се развијају особине неопходне сваком члану друштвене заједнице у којој живи, а која се карактерише одређеним правилима понашања.

Наставни процес организује се тако да се ученицима обезбеди да стичу повезане и у логичком систему дате научне истине. Систематизована и логички повезана знања се лакше уче, применљивија су и трајнија. Свако гомилање чињеница у свести, без система и разумевања тог система, доводи до формализма у знању ученика. Постепено усвајање знања је један од важних задатака наставе. Усвојити знање значи располагати њиме и користити га у даљим проучавањима и пракси.

Наставни процес је комплексан тј. мора се водити рачуна о више фактора истовремено. Знање ученика, које је основни резултат наставног процеса, је функција следећих основних параметара: ученик, наставник, опрема, план, програм, методе.

**Настава** је организован облик поучавања (делатност наставника) и учења (делатност ученика). Наставу је потребно водити тако да ученици темељно усвајају основну грађу свих наставних предмета, да су у стању да је увек репродукују и да се њоме служе, како за наставне тако и за практичне циљеве. У наставном раду захтева се темељитост, лакоћа и брзина учења, јасноћа и разумљивост садржаја који се уче.

Наставу треба прилагодити узрасту ученика јер ученици у различитој доби имају различите способности. Мора се наћи начин да за сваки узраст излагање буде научно тачно. На млађем школском узрасту градиво се учи у мањем обиму и дубини, али се са старијим ученицима исти садржаји проширују и интензивирају.

**Наставник** је стратег, организатор, усмеривач наставног процеса, идентификатор, дијагностичар и сарадник који прати развој ученика и прилагођава захтеве њиховим индивидуалним могућностима и способностима. Потребно је да се разред, одељење, посматра као наставни колектив, да се остваре услови за активан рад свих ученика, да се ученицима у исто време индивидуално прилази са циљем да се сваки ученик успешно учи. Треба допринети бољим постигнућима ученика од оних најслабијих до најспособнијих.

У одабирању **наставног програма** који ће дати целовиту слику света на одређеном нивоу, важно је да се одвоје битне од мање битних чињеница. То су основни појмови који се повезују на одређен начин. Шта ће бити основни појмови и колико ће их бити, зависи од ступња извођења наставе.

**Педагогија** је наука о васпитању, образовању и настави. Уже педагошке дисциплине су општа педагогија, дидактика и методика.

**Методика** је наука о методама уопште. У вези са наставом не разматрају се само методе, него и други фактори без којих нема наставе (циљеви, задаци, наставни програм, средства). Методика, или посебна дидактика, бави се проблемима наставе појединих предмета или области. То је педагошка научна дисциплина која се бави теоријском разрадом и практичном применом општих дидактичких, педагошких и психолошких законитости у домену наставе конкретне струке датог школског предмета.

**Наставна метода** је поступање наставника и ученика у току наставе, приликом савладавања одређеног градива и развијања одговарајућих способности васпитаника.

Реч **метод** (*methodos*) грчког је порекла и значи пут или начин остваривања одређених циљева и задатака. Методе, саме по себи, нису ни добре ни лоше, да би биле делотворне, неопходно је да буду у складу са планираним садржајима, постављеним циљевима и очекиваним исходима.

Задатак школе је да упозна ученике са основама науке. Циљ наставе **природних наука** је да омогући ученицима да стекну широко и опште разумевање важних идеја и општих оквира тумачења свега око нас, да разумеју поступке научних истраживања који су од суштинског значаја за комплетно људско материјално окружење и за општу културу сваког појединца и да увек када се укаже прилика или потреба за тим, прошире своја знања и стекну нова, било због личне заинтересованости или због захтева посла.

**Физика** као наука представља стално растући низ сазнања о природним појавама. Садржај и обим се стално шири и развија. Пошто физика сама од себе демонстрира и материјализам и дијелектику, настава физике има посебну улогу у образовању.

Физика, као наставни предмет, по свом садржају није еквивалентна са садржајем физике као науке, али мора бити у складу са њом. Одатле би следило да је физика као наставни предмет ужи део, по обиму и садржају, физике као науке.

У настави физике све чињенице морају бити научно тачне, морају се објаснити у оној мери у којој се то могуће на датом ступњу наставе, сва објашњења морају бити у сагласности са гледиштем савремене науке, сви закони морају бити тачно формулисани, наглашена узрочно – последична веза, употребљена терминологија коректна, мора бити остварено јединство теорије и праксе. Никаква импровизација или популарни начин излагања у настави није дозвољен. Треба избегавати сувопарно вежбање памћења.

Редослед излагања појединих области у настави не прати логику развоја физике као науке, већ мора поштовати одређене дидактичке принципе. Један затворен круг наставе мора се организовати тако да ученици стекну заокружено знање, које касније могу сами проширивати и у њега уклапати нова сазнања.

Да би одговорили на на питања: Зашто је потребно учити физику? Чему треба поучавати ученике у настави физике? Како треба поучавати ученике? Извођење наставе физике мора бити у складу са: задацима и циљевима наставе физике, наставним програмом, организацијом наставе физике, методама и средствима извођења наставе.

Задаци наставе физике се разликују од задатака физике као науке.

#### **Задаци наставе физике:**

- Систематско упознавање ученика са физичким појавама и законитостима
- Стицање основне научне писмености
- Оспособљавање за уочавање и распознавање физичких појава у свакодневном животу
- Доприношење формирању научног погледа на свет
- Развијање вештине и способности да се стечено знање из физике може применити у свакодневном животу и раду
- Оформљивање основа научног метода
- Оспособљавање ученика да самостално уочавају, истражују и решавају физичко-техничке проблеме
- Утицај на општи развој ученика
- Обогаћивање животног искуства ученика

**Методика наставе физике** је релативно млада наука и она још увек тешко успева да прати брзи и буран развој физике као науке. Она истражује законитости, путеве и средства васпитања и образовања у процесу организованог изучавања физике. Развој физике поставио је последњих деценија озбиљне проблеме пред методику физике. Брзина којом се раније стицало знање постала је недовољна у садашњим условима. Постоје два основна правца развоја којима се ови проблеми покушавају превазићи. Један је увођење и примена техничких помагала, а други радикалне измене планова и програма, па и самих поступака изучавања физике.

### 3 ЗАДАЦИ У НАСТАВИ

Задатак у наставном процесу може имати смисла само онда ако се у њему подразумева и одређено питање, ако се у њему од ученика тражи да нешто ураде, да дају одговор – реше постављени задатак.

Имајући у виду да је мисаоно активирање ученика у наставном процесу основна претпоставка за успешно оспособљавање ученика за самостални интелектуални рад, можемо све задатке груписати у основне две групе:

- задаци којима се развија памћење (репродуктивна)
- задаци којима се развијају перцепције, представе, мишљење и машта (продуктивна)

Ученик нешто зна или не зна репродуковати, у зависности да ли је неко градиво запамтио или није. Задаци репродуктивног карактера су они на којима се увежбава одређена радња, усмерени су ка неговању памћења ученика и неопходни су у настави. Ученици неке чињенице и генерализације треба и да памте, али са разумевањем. Ипак, овакав начин стицања нових знања не треба да преовладава.

Продуктивни задаци од ученика траже да за одговорима трагају – истражују у одређеним изворима знања, да посматрају, анализирају, компарирају, синтезирају, уопштавају, закључују. При трагању за решењима оваквих задатака, ученици морају бити мисаоно активни, не могу решити задатак само на основу већ стеченог знања. Зато су продуктивни задаци погоднији за мисаони развој ученика, јер не само да памте нова знања него и до нових чињеница или генерализација долазе властитом интелектуалном активношћу.

❖ У задацима којима се развија памћење тражи се:

- репродукција градива (правила, закона, образаца, дефиниција, и сл.)
- примена већ усвојених знања при вежбању
- дословно репродуковање чењеница сазнатих од наставника или из уџбеника
- понављање описа природе, догађаја, предмета, живих бића

❖ У задаци којима се негује мишљење тражи се:

- да ученици самостално, без узора, описују предмете, појаве, жива бића, пририду
- да проналазе нове идеје
- да уоче међусобну везу између узрока и последице



- компарација
- да сами дефинишу, закључују, класификују
- мисаоно анализирају и синтезирају
- да користе аналогiju у процесу учења
- да ученици нешто процењују, вреднују, заузимају став
- да остваре корелацију са другим наставним предметима
- да трагају за хипотезама при решавању одређених задатака, проблема
- да графички представе оно што уче
- да самостално запишу сопствено размишљање
- да у одређеном извору знања трагају за решењем постављеног задатка
- да сами образложе неку појаву или догађај

### 3.1 Подела задатака

❖ **Према условима задатка**, све задатке из физике могу се поделити на:

1. текстуалне
2. експерименталне
3. графичке

1) Најбољу примену у наставном процесу имају **текстуални задаци**. То су такви задаци код којих се услов задатка даје у виду текста и који садржи све неопходне податке осим физичких константи.

У зависности од карактера и метода проучавања одређених појава, текстуалне задатке могу се поделити на:

- квалитативне (задаци - питања)
- квантитативне (рачунски задаци)

а) **Квалитативни задаци** су они чије решење не захтева рачунске операције, већ је оно у виду одговора који се обавезно мора образложити. Њима се утврђује зависност између физичких величина. Приликом њиховог решавања, по правилу, нису потребне никакве нумеричке вредности. До решења ових задатака се долази применом физичких закона и анализом појава о којима се говори у задацима. Треба разликовати квалитативни задатак од питања за проверу формалног знања где се одговор на оваква питања (нпр. Како гласи Омов закон?) налази готов у уџбенику у неизмењеном облику и ученик треба да се само присети одговора. У квалитативном задатку поставља се такво питање на које се не налази готов одговор у уџбенику. Овакви задаци повећавају заинтересованост ученика, развијају логичко мишљење и подстичу креативно и апстрактно размишљање.

б) **Квантитативни задаци** су задаци чијим решавањем се добијају бројне вредности које повезују одређене физичке величине. Одговор на постављени проблем (питање) не може се дати без примене одговарајућих формула, обављања низа математичких (рачунских) операција и нумеричког израчунавања. У почетној фази решавања таквих задатака јавља се квалитативна анализа, која се затим разрађује квантитативном анализом бројних вредности. Највише су заступљени у настави физике.

- 2) Графички задаци – ако задатак на било који начин укључује коришћење или израду одговарајућег графика.
  - 3) Експериментални задаци подразумевају задатке у којима се тражи да се решење експеримента провери и да је најмање један податак експериментално одређен. Могу бити квалитативни и квантитативни експериментални задаци.
- ❖ Према степену тежине задатке из физике могу се поделити на:
1. једноставне
  2. сложене
  3. комбиноване (проблемске)
- 1) Најједноставнији задаци су они код којих се до траженог решења долази уврштавањем бројних вредности у познати образац (формулу) који повезује дате и тражене физичке величине.
  - 2) Сложенији задаци су они код којих се до решења не може доћи непосредним уврштавањем бројних вредности, већ се до решења долази након мисаоних процеса који подразумевају добро познавање физичких појава уз коришћење сложенијег математичког апарата.
  - 3) У најсложенију категорију задатака спадају проблемски задаци који подстичу ученике на креативно размишљање.

## 3.2 Значај решавања задатака

Чисто теоријско знање је апстрактно, формално и пасивно. Теоријско знање је само први корак ка правом знању. Стечено знање постаје наша својина тек када га применимо у конкретним случајевима у освајању новог сазнања или практично у свакодневном животу. Да би теоријско знање постало конкретно, активно и применљиво, треба га поткрепити решавањем рачунских задатака, експериментима и лабораторијским вежбама.

Решавање задатака је прилика да се теоријско знање понови, утврди, продуби и провери. Коришћењем појмова и формула физичких величина и закона приликом решавања задатака, повећава се и трајност знања. Решавањем рачунских задатака применом теоријских знања, стичу се дубља и потпуна знања.

У настави физике задатак игра веома битну улогу. Добро осмишљен проблем може заинтересовати ученике, подстаћи на размишљање и примену стеченог знања, као основног циља сваког наставног процеса. Такође, задатак је саставни део готово сваког наставног часа јер се на конкретним примерима и проблемима многе појаве у физици могу много боље објаснити и разумети.

Решавање задатака омогућава:

- да се честим коришћењем појмова и формула утврди знање о физичким величинама и законима и трајно запамти
- да се анализирањем постављеног проблема боље уоче повезаности појава, чиме се знање продубљује, проширује, постаје "квалитетније"
- да се решавањем конкретних примера из свакодневне праксе сагледа значај физике и потреба за њеним учењем
- развој способности мишљења, повезивања, закључивања, што је битно не само у физици него у свакој животној ситуацији
- оспособљавање за самосталан рад којим се развија оригиналност
- да се успешним решавањем тежих задатака стекне самопоуздање, да се заволи физика и да се пробуди жеља за напретком код ученика, да раде и више од оног што захтева обавезан школски програм.

### 3.3 Методика решавања физичких задатака

Решавање задатака не треба посматрати као замењивање симбола бројевима, прелиставање књиге док се не нађе образац који изгледа да може да се употреби или неког урађеног примера који личи на задатак.

Задаци имају сврху да омогуће да ученици установе да ли разумеју одређено градиво након што су чули предавање и проучили текст уџбеника. Пре него што се прихвате задатака морају научити градиво, а не само прочитати толико да би могли да раде задатке. Немогуће је очекивати да ће се решавањем одређеног броја задатака покрити свака важна чињеница.

За решавање задатака потребно је познавање претходно савладаног градива. Ученици, нпр. неће моћи да реше проблем апсолутно еластичног судара два тела, ако се претходно нису упознали са појмом закона одржања импулса и енергије.

Сваки задатак садржи у себи један или више општих физичких закона или дефиниција. Након што прочитају задатак, ученици треба да се запитају који су то закони и дефиниције и да буду сигурни да их знају, односно да их себи формулишу јасно и експлицитно, а не да се задовоље угодним осећањем да разумеју други Њутнов закон иако га не могу формулисати својим речима.

Многи задаци из физике представљају неку апстракцију реалне проблемске ситуације. Карактеристика таквих задатака је у томе да се код њих занемарују небитни детаљи и на тај начин се олакшава решавање задатка. При решавању задатака се најчешће користе мисаони (идеализовани) модели (материјална тачка, идеални гас, апсолутно црно тело, и други).

При решавању задатака мора бити правилно коришћен математички апарат. Да би се успешно решавали неки задаци из физике неопходна су знања из математике. Ако тај део градива из математике није обрађен и усвојен, садржај физике се неће разумети.

Решавање задатака мора бити поступно и систематично. Систематичност и поступност у решавању задатака обезбеђују се поштовањем следећих правила:

1. од ближег ка даљем
2. од једноставног ка сложеном
3. од лакшег ка тежем
4. од познатог ка непознатом

Полази се од једноставних и иде ка сложенијим, од квалитативних ка квантитативним, комбинованим и задацима са техничким садржајем. Треба утврдити циљ употребе одређеног задатка.

Поступно руковођење радом ученика омогућава повезивање теорије са праксом, односно примену стечених знања у решавању практичних задатака како би побољшали квалитет свог знања.

Треба имати у виду да научна једноставност није адекватна и психолошкој једноставности ученика. Оно што је са научне тачке гледишта веома једноставно, за ученике може бити веома сложено.

Задатак из физике се најчешће састоји из услова и захтева. Између датих услова и тражених величина постоје унутрашњи односи, зависности, које карактеришу структуру задатка. На решење било којег задатка утичу два фактора: структурне карактеристике задатка (његове компоненте) и способност онога који га решава. Са психолошке тачке гледишта, решење задатка подразумева налажење ових односа, узрока и последица који се не спомињу у задатку.

Најчешће се стратегија решавања задатака из физике састоји из три дела: проучавања услова задатка и његова анализа, формирање мишљења, решење задатка и његова провера.

Постављање проблема - наставник излаже задатак, даје смернице у тражењу решења, ученици уочавају проблем, покушавају да га реше на основу раније стечених знања.

Често ученици не владају навикама логичког мишљења и износе претпоставку на основу интуитивног мишљења. Такав пут решавања не треба одбацити. Напротив, треба темељно размотрити сваки предлог, сваку физичку идеју решења задатка и доказати његову примењивост или неоснованост. Том приликом ће се развити дискусија која ће допринети развоју логичког и физичког начина размишљања ученика.

Један од најбољих начина да установе да ли разумеју законе који се користе у одређеном задатку јесте да израде задатак у обрнутом смеру или да се запитају како би се резултат променио ако би дати услови били нешто другачији.

*Основни задаци методике решавања задатака:*

1. Упознавање услова задатака, анализа физичких појава и процеса који сачињавају садржај задатка.
2. Користе се помоћне слике, скице и схеме.
3. Решење треба увек довести до коначног резултата.
4. Обавезна је анализа добијеног резултата.

5. Поштовање одређеног начина рада: уписивање података, уједначавање система јединица, цртање слика и схема и израда задатка.
6. У анализи решења задатка мора се указати на физички смисао. Математика је само помоћно средство у физици, а не циљ.

### Методe решавања задатака

- ♦ Аналитичке - полази се од релације која садржи тражену величину и онда се потребне величине изражавају преко величина датих у задатку.
- ♦ Синтетичке - користе се познате релације у којима фигуришу дате величине у задатим, да би се таквим поступком дошло до тражене величине.

### Поступак за решавање задатака

Ученицима који тек почињу да уче физику решавање задатака може представљати велики проблем. Сваки задатак је целина за себе, третира посебну појаву и не постоји јединствен модел или шаблон којим би се могао решити сваки задатак. Ипак, има неколико "правила" којих се треба придржавати у сваком задатку како би се лакше дошло до резултата.

1. Пажљиво читање (и више пута) - да би се схватила суштина и смисао задатка тј. уочио проблем. Разумети задатак значи схватити о којој се физичкој појави (или закону) ради, које величине су познате и које треба одредити.
2. Поставка задатка - записати задате и тражене величине, и оне величине или односи који нису задати, али се могу одредити из текста задатка. За означавање физичких величина користе се одговарајући симболи.
3. Усклађивање - претварање јединица. Све јединице у којима су дате вредности физичких величина претворити у јединице СИ система. Ослободити се префикса из ознаке за јединицу. Свести све јединице на основне у СИ систему.
4. Ако је могуће нацртати скицу која илуструје суштину задатка. Помоћу слике се лакше могу уочити односи (везе) између величина у задатку. На слици означити све познате физичке величине и неке допунске, које се уклапају у смисао задатка, помоћу њихових општих ознака.
5. Писање одговарајуће формуле за израчунавање непознате физичке величине. Математичким формулама изражавају се одговарајући процеси, по могућству се користе најједноставније релације. Из добијеног израза израчунава се бројна вредност и мерна јединица тражене величине. Препорука је да ученици при

решавању задатака сваку формулу пишу у новом реду. Тако је прегледније, уредније и боље се прати "ток мисли"

6. Замењивање бројних вредности познатих физичких величина. Општи бројеви се замењују бројним вредностима задатих величина са одговарајућим мерним јединицама. Могу се сабирати или одузимати само вредности истородних величина и оне које су изражене истим мерним јединицама.
7. Изражавање резултата и бројем и мерном јединицом. Решење треба увек довести до коначног резултата. Коначан резултат може да се провери посредством одговарајућих мерних јединица и димензија.
8. Проверавање решења задатка. Оценити вредност добијеног резултата. Видети има ли физичког смисла, како за добијену бројну вредност, тако и за добијену јединицу.

Овај начин решавања задатака усађује навику логичког мишљења, анализе физичких појава, израде плана решавања, учи повезивању података и услова задатка са садржајем познатих физичких закона и извлачењу закључака.

## 4 ЗАКОНИ ОДРЖАЊА У НАСТАВНОМ ПЛАНУ И ПРОГРАМУ

Како је тема овог рада израда рачунских задатака из области Закона одржања потребно је имати увид у годишњи план наставе физике за први разред гимназије.

Закони одржања заступљени су са 21 часом, које чине часови обраде новог градива (11) и часови намењени за остале облике рада (10). На крају обрађене теме ради се писмена провера знања која обухвата сразмеран број како квалитативних тако и квантитативних задатака.

Литература која се углавном користи су препоручени уџбеник и пратећа збирка задатака, коју наставник користи по избору.

Табела 4.1 Закони одржања - део наставног плана из физике за први разред средње школе

| Број часа | Наставна јединица                                           | Тип часа                    | Облик рада                      | Наставне методе                        | Место рада и наставна средства |
|-----------|-------------------------------------------------------------|-----------------------------|---------------------------------|----------------------------------------|--------------------------------|
| 1.        | Закон одржања имулса                                        | обрада                      | фронтални, индивидуални, групни | монологшка, дијалогшка, демонстрациона | учионица, табла, лаб.опрема    |
| 2.        | Ракетно кретање                                             | обрада                      | фронтални, индивидуални         | монологшка, дијалогшка                 | учионица, табла                |
| 3.        | Центар масе и кретање центра масе                           | обрада                      | фронтални, индивидуални         | монологшка, дијалогшка                 | учионица, табла                |
| 4.        | Нумерички задаци                                            | утврђивање                  | фронтални, индивидуални         | дијалогшка, текстуална                 | учионица, табла                |
| 5.        | Кинетичка енергија и рад силе. Снага                        | обрада                      | фронтални, индивидуални         | монологшка, дијалогшка                 | учионица, табла                |
| 6.        | Понављање градива                                           | утврђивање, систематизација | фронтални, индивидуални         | дијалогшка                             | учионица, табла                |
| 7.        | Потенцијална енергија гравитационе силе и силе еластичности | обрада                      | фронтални, индивидуални, групни | монологшка, дијалогшка, демонстрациона | учионица, табла, лаб.опрема    |
| 8.        | Потенцијал гравитационог поља                               | обрада                      | фронтални, индивидуални         | монологшка, дијалогшка                 | учионица, табла                |
| 9.        | Нумерички задаци                                            | утврђивање                  | фронтални, индивидуални,        | дијалогшка, текстуална                 | учионица, табла                |
| 10.       | Конзервативне силе                                          | обрада                      | фронтални, индивидуални         | монологшка, дијалогшка                 | учионица, табла                |
| 11.       | Понављање градива                                           | утврђивање, систематизација | фронтални, индивидуални         | дијалогшка                             | учионица, табла                |
| 12.       | Нумерички задаци                                            | утврђивање                  | фронтални, индивидуални         | дијалогшка, текстуална                 | учионица, табла                |
| 13.       | Закон одржања енергије у механици. Примена                  | обрада                      | фронтални, индивидуални,        | монологшка, дијалогшка,                | учионица, табла,               |



|     |                                                  |            |                                       |                                            |                                   |
|-----|--------------------------------------------------|------------|---------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------------|
|     |                                                  |            | групни                                | демонстрациона                             | лаб.опрема                        |
| 14. | Нумерички задаци.<br>Понављање закона<br>одржања | утврђивање | фронтални,<br>индивидуални            | дијалошка,<br>текстуална                   | учионица,<br>табла                |
| 15. | Еластичан и нееластичан<br>судар                 | обрада     | фронтални,<br>индивидуални,<br>групни | монолошка,<br>дијалошка,<br>демонстрациона | учионица,<br>табла,<br>лаб.опрема |
| 16. | Мртва петља                                      | обрада     | фронтални,<br>индивидуални            | монолошка,<br>дијалошка                    | учионица,<br>табла                |
| 17. | Нумерички задаци                                 | утврђивање | фронтални,<br>индивидуални            | дијалошка,<br>текстуална                   | учионица,<br>табла                |
| 18. | Закон одржања момента<br>импулса                 | обрада     | фронтални,<br>индивидуални,<br>групни | монолошка,<br>дијалошка,<br>демонстрациона | учионица,<br>табла,<br>лаб.опрема |
| 19. | Лаб. вежба: Провера<br>закона одржања.           | обрада     | групни                                | дијалошка,<br>демонстрациона               | лабораторија,<br>лаб. опрема      |
| 20. | Лаб. вежба: Провера<br>закона одржања.           | обрада     | групни                                | дијалошка,<br>демонстрациона               | лабораторија,<br>лаб. опрема      |
| 21. | Контролни задатак                                | утврђивање | индивидуални                          | монолошка,<br>дијалошка                    | учионица,<br>табла                |

### Оперативни циљеви:

Ученици треба да:

- разумеју појам изолованог система
- формулишу општи облик закона одржања
- знају закон одржања импулса
- знају закон одржања енергије
- знају закон одржања момента импулса
- разумеју појам судара, апсолутно еластичног и апсолутно нееластичног судара
- примењују закон одржања импулса код анализе реактивног кретања
- примењују закон одржања импулса, енергије и момента импулса у решавању задатака различитих сложености
- решавају рачунске задатке и препознају примере у којима фигуришу закон одржања импулса, закон одржања енергије и закон одржања момента импулса

### Активности:

- ученици слушају излагање и бележе основне појмове
- користећи литературу проналазе занимљиве задатке и самостално или уз помоћ наставника их решавају
- анализирају кретање ракете као пример реактивног кретања

- самостално проналазе примере закона одржања механичке енергије, закона одржања импулса као и закона одржања момента импулса
- проналазе примере апсолутно нееластичних судара и самостално их анализирају
- одрађују уз помоћ наставника лабораторијску вежбу у којој се потврђује закон одржања импулса
- припремају и изводе лабораторијске вежбе: провера закона одржања механичке енергије, балистичко клатно

## 5 ЗАКОНИ ОДРЖАЊА У МЕХАНИЦИ

У физици постоје закони који имају опште значење. То су закони одржања вредности неких физичких величина:

- Закон одржања енергије
- Закон одржања масе
- Закон одржања количине наелектрисања
- Закон одржања импулса
- Закон одржања момента импулса
- Закон одржања угаоног момента

Закони одржања су фундаментални закони природе, а последица су основних особина времена, простора као и особина симетрије васионе. Простор је хомоген и изотопан, а време је хомогено. Материја и енергија се не могу уништити ни створити ни из чега, они само мењају форму и облик, непрестано прелазе из једне у другу, трансформишу се из једног стања у друго. Не постоји ни једна појава за коју би ови закони били нарушени. Према Ајнштајновој теорији релативности, енергија и материја су једно те исто, они се не појављују једна без друге. Ово се односи на било коју промену облика кретања или форму.

$$E = mc^2$$

Физички систем је скуп два или више тела која могу узајамно да делују, али и да узајамно делују и са телима изван тог система.

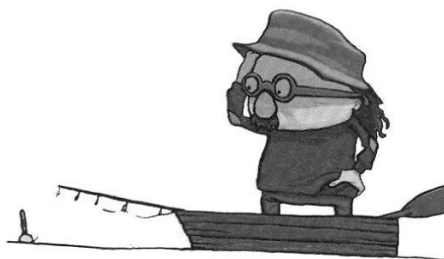
У зависности од сила које делују на њих, системи могу бити затворени (изоловани) и отворени.

- Код затворених система се јављају само унутрашње силе, тј. силе међусобног деловања тела које чине тај систем.
  - Силе које делују између тела унутар система називају се унутрашње силе, оне имају свој извор у систему.

- Код отвореног система, поред унутрашњих, присутне су и спољашње силе на тела која образују тај систем.
  - Спољашње силе су оне којима тела система узајамно делују са телима изван система.

Сви закони одржања важе само у изолованим (затвореним) системима.

Један систем је изолован ако тела у оквиру њега интерагују само између себе, било каквим и било коликим силама, али ниједно тело не може деловати са неким телом ван овог система, а ако постоји интеракција са спољашњим честицама систем је неизолован. У изолованом систему делују само унутрашње силе тј. на њега не делују никакве спољашње силе или је резултанта спољашњих сила једнака нули или су те силе много слабије од унутрашњих сила. Закони одржања су функције само стања система, не говоре ништа о одвијању процеса, већ само о крајњим стањима. Не зависе од облика пута, процеса који се дешавају, нити од карактеристика сила које делују у природном процесу, па се могу примењивати и када силе нису познате. Инваријантни су на координатне трансформације па се најчешће примењују за објашњења и испитивања новооткривених природних појава.

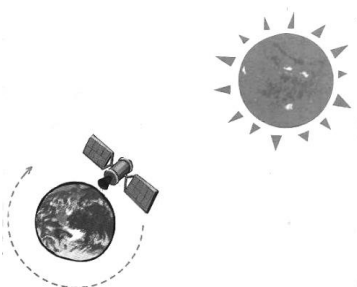


Слика 5.1 – Изолован систем (човек – чамац)

У природи не постоји идеални затворени систем, али су у неким случајевима спољашње силе (импулси сила) знатно мање од унутрашњих, па се могу занемарити. Стога се са одређеним степеном тачности такав систем сматра затвореним.

Такав систем је човек у чамцу на мирној површини воде (слика 5.1)

Може се узети као пример и да су Земља и њен вештачки сателит изолован систем у коме постоји унутрашња сила: гравитациона сила којим Земља делује на сателит. Гравитациона сила Сунца у овом случају је спољашња сила која делује на систем Земља-сателит (слика 5.2).



Слика 5.2 – Систем: Земља – сателит

Закони одржања важе у изолованом систему као целини, али не важе у деловима, подсистемима изолованог

система. Ако се вредност неке величине, која се одржава, повећа у неком делу датог изолованог система, вредност те величине ће се смањити у “остатку” система за ту вредност. При том се укупна вредност те величине за цео изолован систем не мења, остаје стална.

Закони одржања су поуздан критеријум исправности физичке теорије и сваке теоријске претпоставке.

На основу закона кретања могу се решавати задаци механике, ако су познате силе. Кретање сложена функција положаја честица и времена. За потпуни опис механичког стања система потребне су положаји тј. координате и брзине (или импулси) у сваком тренутку. Међутим, у многим случајевима законе механике није могуће користити за решавање задатака баш зато што нису познате силе које узрокују то кретање. На пример, при судару два тела тешко је одредити вредност силе. Овде делују силе еластичности. Али деформација у тим случајевима веома је сложена, није једноставна као код еластичних опруга. Уз то, време деловања силе приликом судара тела је веома кратко. У овом случају је тешко доћи до решења помоћу Њутнових закона. Некада се овај проблем може јакo закомпликовати, код неких појава, процеса, законитости је механичко стање система компликовано, функције су непознате и сложене, честица има пуно, процеси су повезани и условљени. Тада је практично немогуће добити детаљан опис, коначне једначине кретања или се добија превише информација што опет није практично. Овакве проблеме је могуће лако решити применом закона одржања.

Закон одржања може се формулисати на више начина:

- ❖ Укупна вредност дате физичке величине у изолованом систему тела не мења се без обзира на промене унутар тог система.
- ❖ Не постоји процес који би у изолованом систему довео до промене укупне вредности дате физичке величине.

Неке величине чије се вредности одржавају под одређеним условима су скаларне, док су друге векторске величине. Код скаларних величина одржава се њихова вредност, а код векторских величина поред интензитета одржавају се њихов правац и смер.

Закони одржања се могу посматрати и као принципи забране. Појаве у природи за које не важи ни један закон одржања не могу се одвијати. Могуће су само оне појаве које не нарушавају ниједан закон одржања. Ови закони имају многобројне практичне примене у техници, свакодневном животу, конструисани су разни уређаји, инструменти чији се рад заснива на овим законима.

На основу закона одржања енергије се закључује да је немогуће направити машину Перпетуум мобиле I врсте, машину која би бесконачно дуго вршила користан рад, без довођења спољашње енергије.

На основу закона одржања момента импулса се заснива конструкција хеликоптера (слика 5.3).

Овај закон има посебан значај код ротација изолованих тела јер они теже да задрже сталну осу ротације, што може бити практично искоришћено. Чигре се примењују код



Слика 5.3 - хеликоптер

жироскопа (слика 5.4) и то као жироскопи и служе за стабилизацију кретања тела. Њима се одржава унапред одређен курс кретања, нпр ракета, торпеда, а служе и за навигацију кретања авиона, бродова, космичких бродова, робота..



Слика 5.4 - жироскоп

Свако избачено зрно из ватреног оружја постаје чигра. Олуци на пушчаним и топовским цевима служе да зрна добију одређени момент количине кретања који се неће мењати током кретања чиме је њихово кретање правилније (прецизније) дефинисано.

Жироскоп је неупоредиво стабилнији, прецизнији и поузданији инструмент од магнетног компаса. Моментом импулса се изражава кретање тела по орбити (кружење Земље око Сунца) тако и ротација тела око сопственог центра масе (ротација Земље око сопствене осе).

## 5.1 Закон одржања импулса

У физици се ознака импулса обично записује малим словом  $\vec{p}$ . **Импулс** је једнак производу масе тела  $m$  и његове брзине  $\vec{v}$ .

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

По Интернационалном систему јединица за импулс је  $kg \frac{m}{s}$ .

Бројна вредност импулса који неко тело поседује зависи од две физичке величине: масе и брзине покретног тела у одређеном систему референције.

Пошто је брзина неког тела одређена њеним интензитетом правцем и смером, а импулс зависи од брзине, онда и импулс, такође поседује интензитет, правац и смер, као и све друге векторске величине.

У општем случају импулс неког тела концептуално се може схватити као настојање тог тела да настави кретање у истом правцу и смеру, уколико на њега не делује нека спољашња сила. У складу с тиме, он је природна последица Њутнових закона кретања.

Када се неко тело креће у било којем референтном систему, оно у том систему има одређени импулс. Важно је уочити импулс зависи од референтног система, што значи да исто тело може да има одређени импулс у једном систему референције, а у другом систему неки други импулс који се разликује од првог.

Концепт импулса је уведен у класичну механику захваљујући већем броју великих мислилаца и експериментатора као што су Рене Декарт, Галилео Галилеј, Исак Њутн, Готфрид Лајбниц и други.

### Импулс система тела (честица)

Укупан импулс неког механичког система тела је векторски збир импулса свих појединачних тела у систему:

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 + \dots + m_n \vec{v}_n$$

Где је:  $\vec{p}$  импулс,  $m$  маса,  $\vec{v}$  брзина, а  $n$  број тела у систему.

Према Другом Њутновом закону, сила је једнака промени импулса у јединици времена (први извод импулса по времену):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Када је маса тела константна примењује се уобичајена једначина за силу (основна једначина динамике,  $\vec{F} = m\vec{a}$ ).

Када је систем у равнотежи, тада је промена импулса у јединици времена (сила која делује на систем) једнака 0.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = 0$$

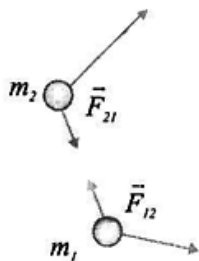
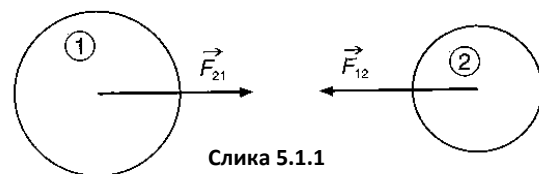
### Закон одржања импулса

Импулс је конзервисана (одржана) величина, што значи да укупан импулс било којег изолованог система (који није под утицајем спољашњих сила) не може да се промени.

На основу Њутнових закона динамике у принципу може да се реши сваки задатак механике, опише сваки облик механичког кретања тела.

Међутим, постоје велике групе практичних задатака који не захтевају познавање свих детаља при описивању механичког кретања тела. За решавање тих задатака довољно је одредити само коначно стање кретања на основу познавања почетног стања. Другим речима, потребно је одредити коначни резултат деловања силе.

Посматра се, једноставности ради, изолован систем два тела у инерцијалном систему, која само узајамно интерагују (слика 5.1.1).



Слика 5.1.2

Маса првог тела је  $m_1$ , брзина пре дејства  $\vec{v}_1$ , а након дејства  $\vec{v}_1'$ . Маса другог тела је  $m_2$ , брзина пре дејства  $\vec{v}_2$ , а након дејства  $\vec{v}_2'$ . Одговарајући импулси тела су  $\vec{p}_1$  и  $\vec{p}_2$ . Услед деловања сила, после временског интервала  $\Delta t$  импулси тела биће промењени:  $\vec{p}_1'$  и  $\vec{p}_2'$ .

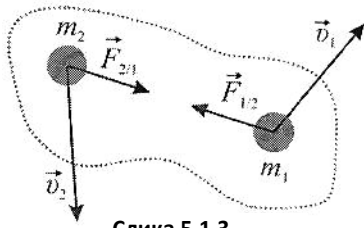
Према Другом Њутновом закону за узајамно дејство ових тела (слика 5.1.2) важи:

$$\begin{aligned}\vec{F}_{12}\Delta t &= m_1\vec{v}_1' - m_1\vec{v}_1 \\ \vec{F}_{21}\Delta t &= m_2\vec{v}_2' - m_2\vec{v}_2\end{aligned}$$

односно,

$$\frac{\vec{p}_1' - \vec{p}_1}{\Delta t} = \vec{F}_{21} \quad \text{и} \quad \frac{\vec{p}_2' - \vec{p}_2}{\Delta t} = \vec{F}_{12},$$

где је  $\vec{F}_{12}$  сила којом прво тело делује на друго, а  $\vec{F}_{21}$  сила којом друго тело делује на прво (слика 5.1.3).



Слика 5.1.3

Како је према Трећем Њутновом закону:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}, \text{ па је:}$$

$$\frac{\vec{p}_1' - \vec{p}_1}{\Delta t} = -\frac{\vec{p}_2' - \vec{p}_2}{\Delta t},$$

$$\text{односно: } \vec{p}_1' - \vec{p}_1 = -\vec{p}_2' + \vec{p}_2,$$

и коначно:

$$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2.$$

На основу горњих једначина се може извести закон одржања количине кретања који, уопштен на систем од  $n$ -тела, има следећи облик:

$$\begin{aligned}m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + \dots + m_n\vec{v}_n &= const \\ \sum_{i=1}^n m_i\vec{v}_i &= const.\end{aligned}$$

Укупан импулс 2 тела у изолованом систему у инерцијалном референтном систему у току времена се не мења (исти је у тренутку  $t + \Delta t$ , као и у тренутку  $t$ ). Ово тврђење важи и за систем састављен од произвољно много тела.

Укупан импулс изолованог система тела у инерцијалном референтном систему током времена се не мења:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_n = const, \text{ или } \sum_{i=1}^n \vec{p} = const, \text{ за } \vec{F}_{sp} = 0$$

Деловањем унутрашњих сила изолованог система могу да се мењају импулси појединих делова система, али само тако да укупан импулс система остаје сталан, непромењен. Вредности укупног импулса могу да промене само спољашње силе ако систем није изолован.

Први Њутнов закон динамике може се сматрати и последицом Закона одржања импулса. Ако у инерцијалном систему постоји изолован систем који се састоји само из једног тела масе  $m$  које се креће брзином  $\vec{v}$ , онда се импулс тога тела одржава:

$$\vec{p} = m\vec{v} = \text{const}, \text{ за } \vec{F}_{sp} = 0, \text{ где је } \vec{F}_{sp} \text{ резултанта свих спољашњих сила.}$$

Како је у класичној механици маса тела стална, има непромењену вредност, може да се напише:

$$\vec{v} = \frac{\text{const}}{m} = \text{const}$$

Ово је израз Првог Њутновог закона динамике.

*Општа формула Закона одржања импулса гласи:*

Укупан импулс изолованог система у инерцијалном референтном систему не мења се у току времена, има сталну вредност:

$$\vec{p} = \text{const}, \text{ за } \vec{F}_{sp} = 0, \text{ где је } \vec{F}_{sp} \text{ резултанта спољашњих сила.}$$

Принцип **одржања импулса** дат је тврђењем да се укупан импулс свих тела у свемиру (или импулс неког изолованог система) не мења (константан је). Једна од последица овога је да центар масе било ког система тела увек наставља да се креће истом брзином док нека спољашња сила не делује на њега.

Одржање импулса је последица хомогености простора, односно чињенице да у простору не постоје истакнуте тачке, него су све тачке у простору еквивалентне или равноправне. Такође важи и обрнуто. Односно, ако би неко тело у некој тачки простора променило своју брзину (свој импулс) без утицаја спољашње силе, тада би закључили да је та тачка по нечему другачија од других тачака простора, или краће речено, да је истакнута тачка, што би значило да овакав простор није хомоген.

У неком изолованом систему (у којем не делују спољашње силе) укупан импулс је константан, што је у складу са Њутновим законом инерције. Трећи Њутнов закон (закон акције и реакције) који тврди да су силе узајамног деловања два тела исте јачине и правца, а супротног смера, такође је у сагласности са законом одржања импулса.



### 5.1.1 Примена закона одржања импулса - Узмак

Узмак је појава која је последица дејства унутрашњих сила излованог система.

➤ Два клизача стоје на леду (слика 5.1.1.1). Један од њих одгурне рукама другог клизача. Одгурнути клизач добија брзину  $v_1$ , али и други клизач добија брзину  $v_2$  у супротном смеру. Та појава се назива узмак или реактивни трзај. Импулси клизача износе:

$$\vec{p}_1 = m_1 \vec{v}_1 \text{ и } \vec{p}_2 = m_2 \vec{v}_2.$$

Укупан импулс на почетку је био једнак нули,

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0,$$

одакле је  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$ ,

односно:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = 0;$$

$$m_1 \vec{v}_1 = -m_2 \vec{v}_2$$

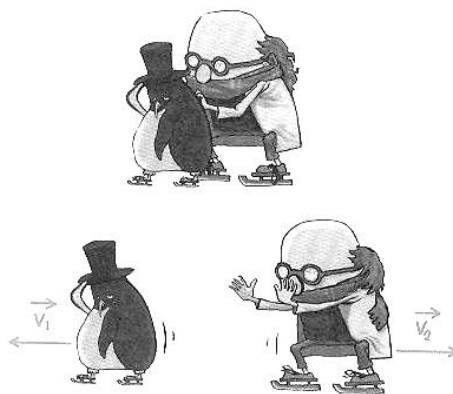
Одавде се добија однос интензитета брзина клизача:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{m_2}{m_1}.$$

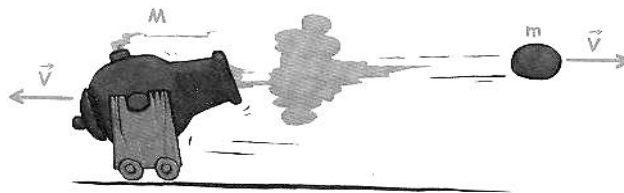
➤ Узмак се дешава и приликом дејства ватреног оружја. На пример, приликом опаљивања пиштоља, пушке, тешког оруђа, осећа се трзај уназад преко кондукта или постоља топа (слика 5.1.1.2). При томе је импулс зрна (пројектила)  $m\vec{v}$  по интензитету

и правцу једнак импулсу пиштоља, пушке  $M\vec{V}$ , а супротног је смера.

Када се испали метак из пушке, чини се да је укупан импулс овог система порастао у односу на претходно стање. Међутим, импулс метка у једном смеру једнак је по интензитету, али супротног знака, од импулса пушке која се креће у супротном смеру. Сабирањем импулса метка и импулса пушке на тај начин добијамо нулу, што је



Слика 5.1.1.1 – Узмак или реактивни трзај тела



Слика 5.1.1.2 – Појава узмака (реактивног трзаја)

једнако такође нултом импулсу који је систем пушка-метак поседовао пре него што је метак почео да се креће.

Зато се кундак пушке држи прислоњен уз раме па се тако маса система повећава, а брзина узмак (трзај уназад) кундак-тело човека смањује.

- Ово важи и за ракете јер је импулс ракете нагоре једнак импулсу гасова насталих сагоревањем горива а усмерен је надоле.



Слика 5.1.1.3 – Реактивни трзај човека и чамца

- Може се навести и пример човека који се стоји у чамцу на површини мирне воде језера и баца тело на обалу у хоризонталном правцу, а чамца добија импулс уназад (слика 5.1.1.3) у складу са релацијом:

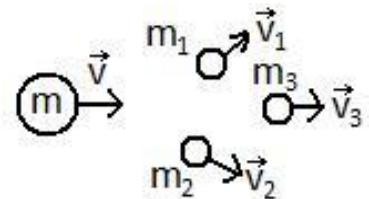
$$m_t \vec{v}_t = -m_c \vec{v}_c$$

где су  $m_t$  и  $\vec{v}_t$  - маса и брзина избаченог тела, а  $m_c$  и  $\vec{v}_c$  - маса чамца и човека и њихова брзина уназад.

- У микросвету при распаду атомских језгара или елементарних честица, такође, откривена је појава узмака која се одвија у складу са Законом одржања импулса.

Распад је процес при коме се тело масе  $m$  и брзине  $\vec{v}$  дели на 2 или више тела чији је збир маса једнак  $m$ .

Када се неко тело под дејством унутрашњих сила (нпр. при експлозији) распадне на више делова, на њих се може применити закон одржања импулса, јер су унутрашње силе знатно јаче од спољашњих (гравитациона, сила трења и сл.).



Слика 5.1.1.4 – Распад тела на три дела

Ако је посматрано тело пре дејства унутрашњих сила мировало, и ако се у једном тренутку раздвојило на три дела (слика 5.1.1.4), маса  $m_1, m_2$  и  $m_3$ , које се крећу брзинама  $\vec{v}_1, \vec{v}_2$  и  $\vec{v}_3$ , онда је према закону одржања импулса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3 = 0$$

## 5.2 Закон одржања механичке енергије

**Енергија** се дефинише као способност вршења рада. Она може бити хемијска, топлотна, механичка, електрична, нуклеарна. Међутим, сви облици енергије могу бити посматрани или као кинетичка или као потенцијална енергија. На пример топлотна енергија је суштински кинетичка енергија атома и молекула, хемијска енергија може бити замишљена као потенцијална енергија атома унутар молекула, електрична енергија се може схватити као потенцијална и кинетичка енергија електрона, нуклеарна енергија се на сличан начин може посматрати као потенцијална енергија субатомских честица унутар атомског језгра. У многим појавама се јављају више врста енергије које непрестано прелазе једна у другу.

- Потенцијална енергија: енергија положаја који објект има у односу на друге објекте;
- Кинетичка енергија: енергија кретања тела;
- Хемијска енергија: која је последица хемијских веза међу атомима супстанце
- Електрична енергија: која је последица присуства наелектрисаних честица
- Топлотна енергија: потиче од загрејаности тела
- Нуклеарна енергија: последица нестабилности атомских језгара
- Електромагнетна енергија: енергија зрачења електромагнетних таласа

Јединица за енергију је  $J$  (џул) према интернационалном систему јединица СИ.

$$J = N \cdot m = \frac{kg \cdot m^2}{s^2}$$

Један џул једнак је производу њутн метра, дефинише се као рад који изврши сила од  $1N$  при померању тела на путу од  $1m$ , а при томе су сила и померај истог смера.

Јединица за енергију у нуклеарној физици је  $eV$  (електрон волт), где је  $e$  елементарно наелектрисање честица, једна од основних физичких константи природе, а износи:

$$e = 1.602 \cdot 10^{-19} C$$

### Енергија механичког кретања

Кретање је неутуђиво својство материје, оно се одвија непрестано, па тако свака честица располаже неком енергијом као мером њеног кретања. Као што је познато, узрок промене стања кретања честице, а према томе и њене енергије је сила која карактерише узајамно дејство те честице са другим честицама. Промена енергије се одвија на одређеном путу.

## Кинетичка енергија

Енергија коју има честица услед кретања је кинетичка енергија (слика 5.2.1).

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

Кинетичка енергија транслаторног кретања зависи од масе и брзине посматране честице и директно је пропорционална са овим величинама. Она не може имати негативну вредност, то би било контрадикторно са физичким смислом  $E_k \geq 0$ . Кинетичка енергија је адитивна величина, а то значи да за систем од више честица, укупна кинетичка енергија се добија као збир појединачних кинетичких енергија сваке честице.

## Потенцијална енергија

Енергија услед положаја (у неком пољу) је потенцијална енергија (слика 5.2.1).

$$E_p = mgh$$



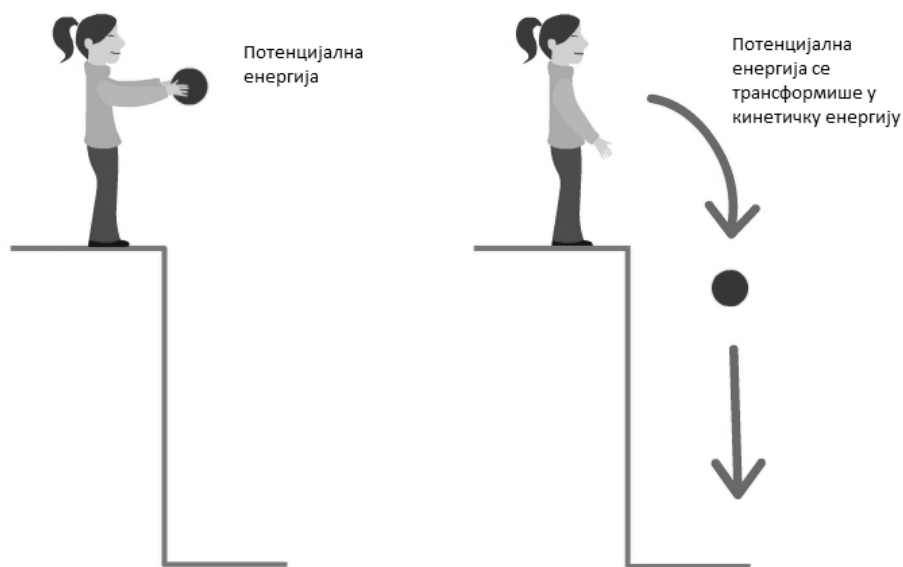
Слика 5.2.1

То је енергија која зависи само од положаја честице у односу на честицу (тело) са којом интерагује. Физички смисао има само разлика потенцијалне енергије честице за два положаја. Потенцијална енергија мери се радом силе интеракције да уочену честицу премести из неке тачке поља у неку другу тачку поља без промене њене брзине.

Тело које се налази на висини  $h$  изнад површине Земље нема кинетичку енергију, али поседује потенцијалну енергију  $mgh$ . Ако тело почне да пада, брзина му, почев од нуле, расте што значи да му се потенцијална енергија смањује, док кинетичка почиње да расте (слика 5.2.2).

Збир кинетичке и потенцијалне енергије се назива **укупна механичка енергија**.

$$E = E_k + E_p$$



Слика 5.2.2

### Закон одржања механичке енергије

Ако су све унутрашње силе конзервативне, механичка енергија изолованог система тела је константна.

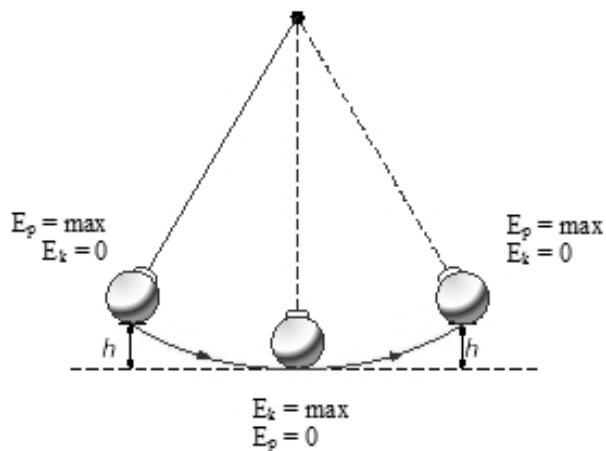
$$E = \text{const}$$

Збир кинетичке и потенцијалне енергије у изолованом систему је константан, али свака од тих енергија понаособ је променљива.

$$E_k + E_p = \text{const}$$

Закон одржања укупне механичке енергије је последица симетричности времена.

Овај закон се може објаснити на конкретном примеру ако се посматра клатно које се састоји од нерастегљиве нити и мале куглице (слика 5.2.3). За референтни ниво, нулти положај бирамо положај кад куглица мирује, тада је  $h = 0$ , у сваком другом положају  $h \neq 0$  па је и потенцијална енергија  $E_p \neq 0$ .



Слика 5.2.3

Укупна механичка енергија куглице остаје константа и не мења се током времена, мењају се само вредности кинетичке и потенцијалне

енергије за различите положаје куглице, али не и њихов збир.

Када се куглица изведе из равнотежног положаја до неке висине  $x$ , саопштена јој је одређена потенцијална енергија. Ако се куглица пусти, она ће осциловати.

У том почетном положају потенцијална енергија је максимална, а кинетичка је нула јер куглица мирује. Када је куглица пуштена, потенцијална енергија ће опадати јер се висина смањује, а кинетичка ће да расте, односно куглица ће повећавати своју брзину. У тренутку проласка кроз равнотежни положај, брзина је максимална, па тако и кинетичка енергија, а потенцијална је нула јер је то нулти положај, односно висина је једнака нули. Даље, брзина ће се смањивати, а висина повећавати, а у крајњем положају потенцијална енергија ће опет бити максимална, а кинетичка ће бити нула.

Енергија не може бити ни створена ни уништена, она може само да прелази из једног облика у други. Укупна енергија изолованог система остаје константна.

Ако се генерализује овај исказ може се рећи да се укупна енергија Универзума одржава. Ако је у једном делу Универзума енергија порасла, то обавезно значи да је остатак Универзума остао без тачно толиког износа енергије.

### 5.2.1 Примери очувања енергије

#### 1. математичко клатно

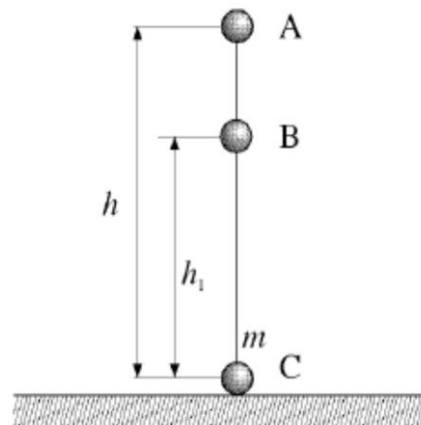
У највишем положају кинетичка енергија је нула, а потенцијална гравитациона енергија је максимална. На свом најнижем положају кинетичка енергија је максимална и једнака је максималној вредности потенцијалне енергије која је достигнута у амплитудуном положају. Ако се посматра идеалан случај и сматра да не постоји трење и отпор ваздуха клатно би се клатило заувек.

#### 2. слободан пад

Положај *A*: Тело масе  $m$  док је на некој висини  $h$  има само потенцијалну енергију (слика 5.2.1.1).

Укупна енергија:  $E = mgh$

Положај *B*: Кад почне падати, висина се смањује а расте брзина, тј. смањује се потенцијална, на рачун повећања кинетичке енергије.



Слика 5.2.1.1 – Слободан пад

$$\text{Укупна енергија: } E = \frac{1}{2}mv^2 + mgh_1$$

Положај C: Непосредно пре удара о тло, потенцијана енергија се трансформисала у кинетичку енергију.

$$\text{Укупна енергија: } E = \frac{1}{2}mv_1^2, \text{ где је } v_1 \text{ брзина тела непосредно пре удара.}$$

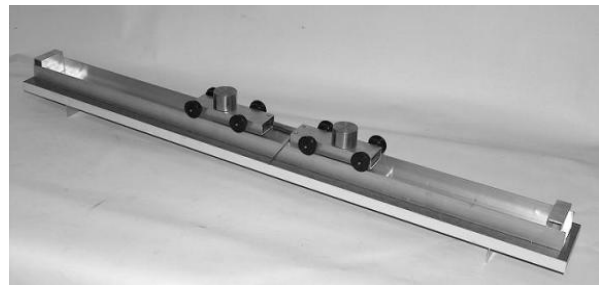
Из  $mgh = \frac{1}{2}mv^2$  добија се да је брзина у тачки В:  $v = \sqrt{2g(h - h_1)}$  а у тачки С:  $v_1 = \sqrt{2gh}$ . Ако се ови изрази замене у одговарајуће изразе за укупну енергију, добија се да су оне једнаке енергији коју је тело имало на висини  $h$ .

Дакле, укупна енергија у било којој тачки путање остаје иста.

### 5.2.2 Примена закона одржања енергије и имулса: Судари

Импулс има специјално својство да се у изолованим системима одржава чак и приликом судара тела у систему. Под сударом се подразумева сусрет два тела који траје веома кратко. У тачкама додира тела јављају се унутрашње силе чије је интензитет знатно већи од интензитета спољашњих сила због чега можемо занемарити дејство спољашњих сила и проблем свести на судар два тела у затвореном систему.

Уобичајени проблем у физици који захтева коришћење ове чињенице је судар два тела или честице (слика 5.2.2.1). Пошто се импулс одржава његов закон одржања обично се и користи да би се израчунале (предвиделе) брзине тела након судара. Пошто се импулс увек одржава сума импулса честица пре судара мора да буде једнака суми импулса после судара:



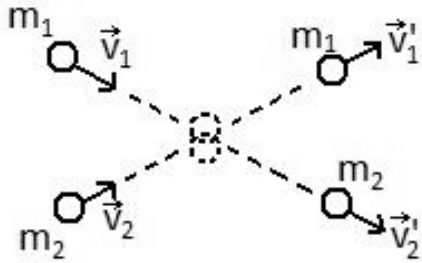
Слика 5.2.2.1 – Судар два тела

$$m_1\vec{v}_{1,i} + m_2\vec{v}_{2,i} = m_1\vec{v}_{1,f} + m_2\vec{v}_{2,f}$$

(У овој једначини коришћене су ознаке: "i" (иницијално или почетно) за брзине тела пре судара и "f" (финално или крајње) за брзине тела после судара. Најчешће ми познајемо импулсе тела само пре или само после судара, тако да је потребно наћи и оне друге импулсе (после или пре судара). Исправно решење овог проблема захтева и познавање врсте судара који се одиграо. Постоје две основне врсте судара, при чему обе ове врсте конзервишу (одржавају) импулс, а то су:

1. Еластични судари у којима се одржава кинетичка енергија и укупан импулс тела пре и после судара
2. Нееластични судари у којима се не одржава кинетичка енергија, али је укупан импулс одржан пре и после судара.

### Еластични судари



Слика 5.2.2.2

Судар између две билијарске кугле је добар пример за скоро потпуно еластични судар (слика 5.2.2.2). Осим што је импулс у овоме судару одржан, и збир кинетичких енергија кугли пре судара мора бити једнак збиру кинетичких енергија после судара.

Једначине које одређују кретање куглица пре и после судара:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

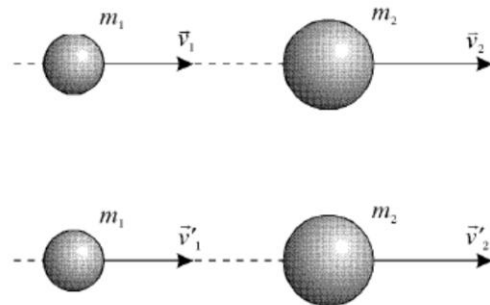
Тела могу при судару међусобно да размене енергију, али укупна кинетичка енергија система остаје иста.

**Савршено еластичан централни судар** – када се центри две куглице крећу дуж једне праве (слика 5.2.2.3).

Из горњих израза за брзине кретања куглица после судара:

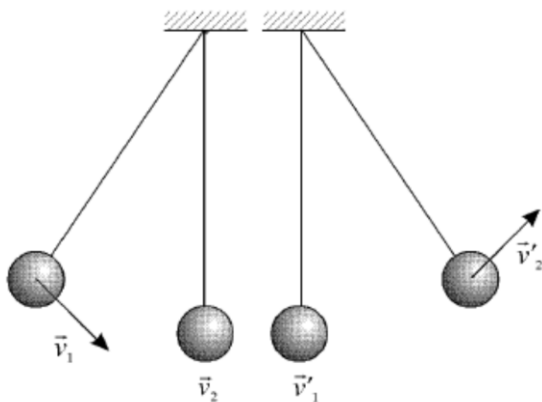
$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}$$

$$v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$



Слика 5.2.2.3



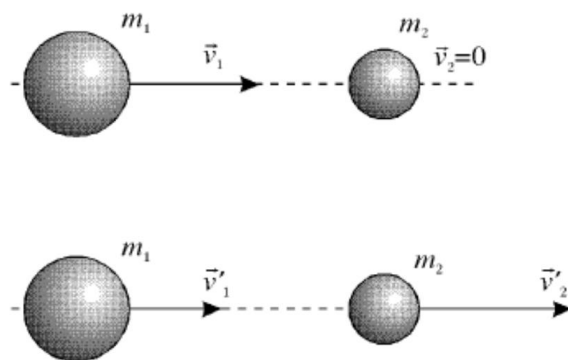


Слика 5.2.2.4

Савршено еластичан судар куглица једнаких маса: ако је друга куглица мировала, после судара прва куглица се зауставља, а друга се креће истом брзином којом се кретала прва куглица пре судара (слика 5.2.2.4).

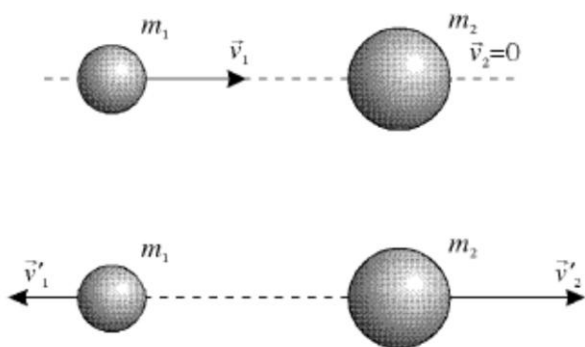
$$m_1 = m_2, v_2 = 0: v_1' = 0, v_2' = v_1$$

Савршено еластичан судар када је маса прве куглице већа од масе друге куглице: прва куглица продужава да се креће у истом смеру као и пре судара, али са мањом брзином; друга куглица која се пре судара налазила у стању мировања, после судара има већу брзину од брзине прве куглице после судара (слика 5.2.2.5).



Слика 5.2.2.5

$$m_1 > m_2, v_2 = 0: v_1' < v_1, v_2' > v_1'$$

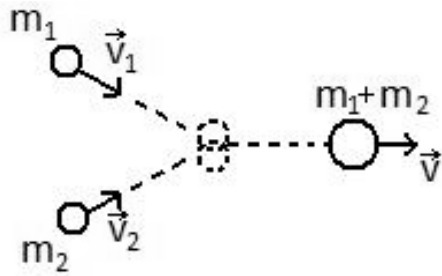


Слика 5.2.2.6

Савршено еластичан судар када је маса прве куглице мања од масе друге куглице: смер кретања прве куглице после судара се мења; друга куглица која се пре судара налазила у стању мировања, после судара се креће у истом смеру у којем се кретала прва куглица пре судара, али са мањом брзином (слика 5.2.2.6).

$$m_1 < m_2, v_2 = 0: v_2' < v_1$$

## Нееластични судари



Слика 5.2.2.7

Укупна кинетичка енергија система није очувана, јер се један њен део претвара у друге облике енергије, на пример топлоту. Пример нееластичног судара могао би да буде судар две грудве снега које се сударе и “слеplјене” наставе заједно да се крећу после тога (слика 5.2.2.7). Следећа једначина описује одржање импулса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}$$

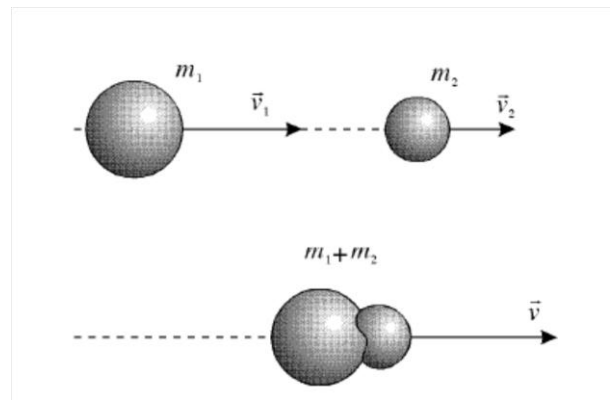
Ова једначина може се даље применити за израчунавање непознатих величина у проблемима нееластичних судара ове или сличне врсте.

**Савршено нееластичан судар** - када се куглице крећу у у истом смеру (слика 5.2.2.8).

Заједничка брзина куглица после судара је:

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

У случају да је  $m_1 = m_2$ :  $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$



Слика 5.2.2.8

### 5.2.3 Демонстрација закона одржања импулса и енергије - Њутново клатно

Њутново клатно је справа која демонстрира законе одржања импулса и енергије. Измислио ју је Симон Пребл 1967. године и назвао по физичару Исаку Њутну.

Ова справа је конструисана помоћу серије клатана (обично од 5 до 7) која се ослањају једно на друго. Свако клатно је закачено за оквир помоћу две нерастегљиве нити једнаке дужине под истим углом према оквиру. Овакав распоред нити ограничава клатна да се крећу само у једној, истој, равни. Металне куглице треба да буду правилног сферног облика, исте величине и масе, да се једва додирују, и да буду постављене тако да се њихови центри налазе у једној хоризонталној линији. Занемарује се отпор ваздуха, трење,

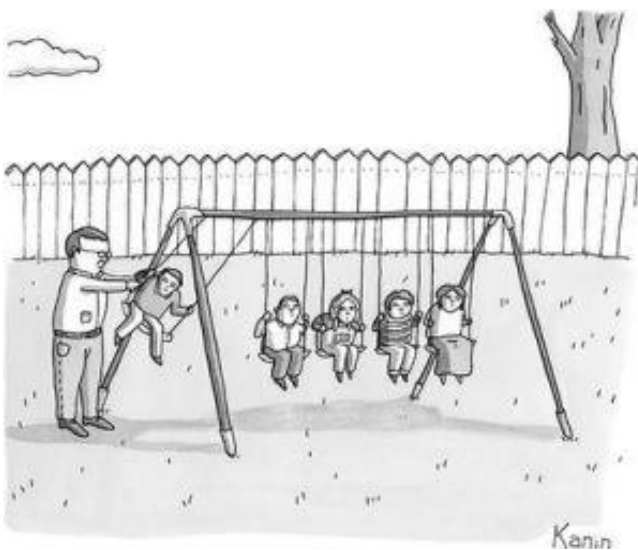
претпоставља се да су судари идеално еластични. У оваквом идеалном случају све кугле би се кретале истом брзином, а овај систем, једном изведен из равнотежног положаја би се клатио бесконачно.



Слика 5.2.3.1 – Њутнова колевка

Када се прва куглица изведе из равнотежног положаја и пусти, она ће при судару своју укупну енергију и импулс предати следећој куглици, а сама остати да мирује. Иако се не види сваки појединачни судар суседних куглица, куглице између делују као да потпуно мирују све време, свака куглица прими и одмах преда укупан импулс и енергију следећој. Импулс и енергија коју има прва куглица су исти и код последње куглице. Кад једна куглица удара остале, види се кретање само код последње. Ако се две куглице изведу из равнотежног положаја, две последње куглице ће бити избачене из равнотежног положаја итд.

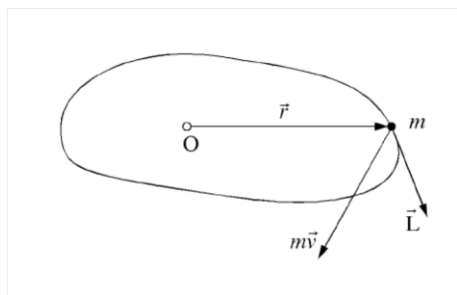
Поставља се питање да ли је могућа појава да две куглице са почетка избију једну куглицу са краја која би се дупло брже кретала, или прва куглица изазове померање две куглице али са мањом брзином. Ово је немогуће јер у том случају би важио само закон одржања момента, али не и закон одржања енергије.



Слика 5.2.3.2

## 5.3 Закон одржања момента импулса

**Момент импулса** (познат и као момент количине кретања или угаони момент) је физичка величина којом се мери настојање материјалног тела да настави да ротира.



Слика 5.3.1

Формално се дефинише као векторски производ вектора положаја тела мереног од изабране референтне тачке и његовог импулса, односно производ момента инерције и угаоне брзине (слика 5.3.1) .

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L = I\omega$$

СИ јединица за момент импулса је  $\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$  (килограм метар на квадрат у секунди) .

Момент импулса је векторска величина, дакле, поседује интезитет, правац и смер. Правац вектора момента импулса је нормалан на раван орбите тела (паралелан са осом ротације) и поклапа се са правцем вектора угаоне брзине.

Моментом импулса се изражава како кретање тела по орбити (кружење Земље око Сунца) тако и ротација тела око сопственог центра масе (ротација Земље око своје осе).

### Закон одржања момента импулса

У изолованом систему момент импулса система се одржава (константан је).

Када тело ротира око непокретне осе, промена момента импулса у јединици времена једнака је резултујућем моменту силе који на тело делује:

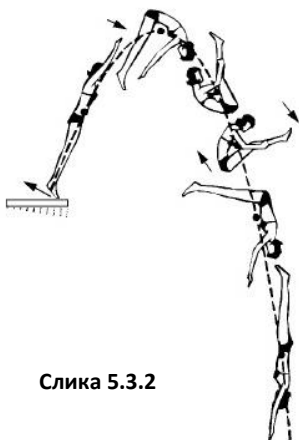
$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = M$$

Отуда је јасно да: ако је  $M = 0$ , онда је и  $\Delta L = 0$ , односно  $L = \text{const}$ .

Момент импулса тела које ротира око непокретне осе је константан ако је резултујући момент сила које делују на то тело једнак нули.

Конзервација момента импулса објашњава и угаоно убрзање у примеру клизања на леду, када клизачи примичу своје руке и ноге ближе вертикалној оси ротације. Пошто је момент импулса производ момента инерције и угаоне брзине ( $L = I\omega$ ), његовим одржањем значило би да повећавањем момента инерције смањује се угаона брзина, и обрнуто. Примицањем делова масе свога тела ближе оси ротације они смањују момент инерције свога тела. Пошто је момент импулса константан у одсуству спољашњег момента силе, као што је то у овоме случају, угаона брзина (брзина ротације) клизача се повећава.

На основу закона одржања момента импулса се заснива конструкција хеликоптера. Овај закон има посебан значај код ротација изолованих тела јер они теже да задрже сталну осу ротације, што може бити практично искоришћено. Чигре се примењују код жироскопа и то као жирокомпаси и служе за стабилизацију кретања тела. Њима се одржава курс кретања, нпр. ракета, а служе и за навигацију кретања авиона, бродова.

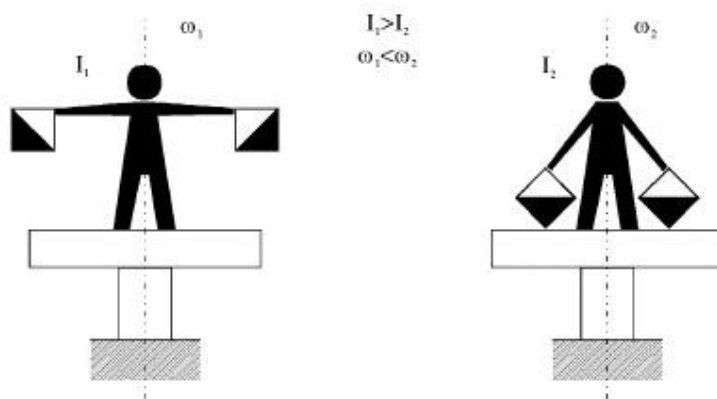


Слика 5.3.2

Закон одржања момента импулса важи и за случај скакача у воду (слика 5.3.2). Скакач у моменту одвајања од одскочне даске има одређену вредност момента импулса. Ако жели да направи неколико обртаја у ваздуху, он савије ноге и руке, тако да му се момент инерције смањује, а угаона брзина повећава. Непосредно пре пада у воду, скакач испружа руке и ноге, што доводи до повећања момента инерције и смањења угаоне брзине. Момент инерције се у овом случају повећава приближно 3,5 пута.

### 5.3.1 Демонстрација закона одржања момента импулса – Прантлова столица

Човек стоји на столици која може да ротира без трења око вертикалне осе (Прантлова столица). Првобитно у раширеним рукама држи заставице и обрће се заједно са столицом, затим спусти руке (слика 5.3.1.1).



Слика 5.3.1.1 – Прантлова столица

Када у раширеним рукама држи заставице и обрће се заједно са столицом угаоном брзином  $\omega_1$ , човек поседује момент импулса  $I_1 \omega_1$ , који се одржава.

Када спусти руке, човеков момент инерције се смањује, а угаона брзина повећава, тако да је нови момент импулса  $I_2 \omega_2$ , исти као за случај раширених руку:

$$I_1 \omega_1 = I_2 \omega_2$$

Према томе, у овом случају важи закон одржања момента импулса.

## 6 ПОДЕЛА ЗАДАТАКА ПРЕМА УСЛОВИМА ЗАДАТКА – ПРИМЕРИ

### ❖ Пример квалитативног задатка

#### Задатак:

Неколико једнаких челичних куглица висе о нитима, тако да се додирују, чинећи један праволинијски низ. Ако се крајња куглица подигне па пусти, после удара у непокретне куглице она се зауставља, а последња куглица на другом крају низа при томе одскаче. Ако се подигну и пусте прве две куглице из низа истовремено, по удару ће такође, две куглице одскочити са другог краја, док се оне прве заустављају. Зашто не одскачу у првом случају две или три куглице, а у другом само једна са много већом брзином?

#### Решење:

Удар прве куглице је еластичан и централан. Она предаје куглици коју удара сву кинетичку енергију и импулс јер су масе куглица једнаке. Тако се удар преноси од једне до друге куглице низа, те последња одскаче. У првом случају не могу одскочити две куглице мањим брзинама, јер би тада њихова укупна кинетичка енергија била већа од почетне, иако би укупан импулс био очуван. У другом случају имамо два узастопна удара који се преносе кроз низ куглица. Када први удар наиђе на крајњу куглицу низа, ова одскаче. Одмах затим наилази други удар услед којег одскаче претпоследња куглица. Дакле, постоји кашњење у ударима, што је узрок одскакања две куглице. Једна куглица не може да одскочи два пута већом брзином јер би тада њена кинетичка енергија била два пута већа од укупне почетне кинетичке енергије двеју куглица које ударају у низ.

### ❖ Пример квантитативног задатка

#### Задатак:

Два тела, чије су масе  $8\text{ kg}$  и  $2\text{ kg}$ , крећу се дуж исте праве линије брзином  $8\text{ m/s}$  и  $3\text{ m/s}$ . Коликом брзином ће се оне кретати после апсолутно нееластичног централног судара ако:

- а) прва кугла сустиже другу
- б) кугле се крећу у сусрет једна другој?

#### Решење:

а)  $m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

б)  $m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 5,8 \text{ m/s}$$

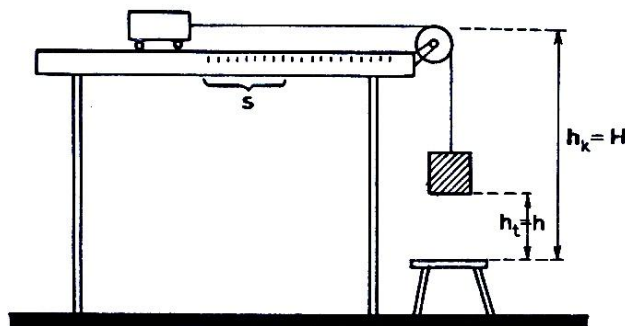
❖ Пример експерименталног задатка: Провера закона одржања енергије

Потребан материјал:

- колица, тег са концем, метарска трака, хронометар

Припрема експеримента:

На столу се налазе колица која су концем преко котура повезана са тегом, који може слободно да пада (слика 6.1). Пре вежбе потребно је проверити да ли је сто хоризонталан. Испод тега постави се столица која му дозвољава да падне само за висину  $h$ . После тога колица се крећу равномерно праволинијски. За нулти ниво потенцијалне енергије узима се раван у којој се налази површина столице.



Слика 6.1

Познате су маса колица и тега. Пре вежбе мора се поставити нулти ниво потенцијалне енергије, тј. одредити висина колица  $H$ . У току вежбе неколико пута мења се висина тега  $h$  и мере се одговарајуће брзине колица  $v$ . На основу тога рачунају се енергије система тег + колица пре пуштања тега и у тренутку заустављања тега.

Подаци се уписују у табелу:

| Број мерења | Висина тега $h[m]$ | Брзина тега $v[m/s]$ | $E_1[J]$ | $E_2[J]$ | $E_1 - E_2[J]$ |
|-------------|--------------------|----------------------|----------|----------|----------------|
|             |                    |                      |          |          |                |

Објашњење:

У почетном тренутку, пре пуштања тега да слободно пада, брзина колица и брзина тега су нула, а потенцијалне енергије колица и тега су редом:  $m_k g H$  и  $m_t g h$ , тако да је укупна енергија тега и колица:

$$E_1 = m_k g H + m_t g h$$

У тренутку када се тег после падања заустави на столици, колица и тег имају исту брзину  $v$ . Потенцијална енергија тега је 0, а колица  $m_k g H$ , тако да је у том тренутку укупна енергија система

$$E_2 = \frac{m_k v^2}{2} + \frac{m_t v^2}{2} + m_k g H$$

Брзина колица мери се тако што се у тренутку удара тега у столицу пусти хронометар и мери време за које колица пређу познати пут  $S$ ; брзина је у том случају:

$$v = \frac{S}{t}$$

На основу разлике израчунатих одговарајућих вредности за енергију ( $E_1 - E_2$ ) долази се до релације која важи за закон одржања енергије:

$$\frac{1}{2} m v^2 + m g h = \text{const}$$

#### ❖ Пример графичког задатка

##### Задатак:

Санке се крећу по залеђеном хоризонталном путу. Док се крећу по леду, брзина санки је  $6 \text{ m/s}$ . Колики пут ће до заустављања, да пређу санке ако са леда наиђу на асфалт? Дужина салница је  $2 \text{ m}$ , а коефицијент трења између њих и асфалта је 1.

Задате величине:  $v = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}, L = 2 \text{ m}, k = 1$

Тражене величине: пут који санке, до заустављања, пређу по асфалту  $l$

##### Решење:

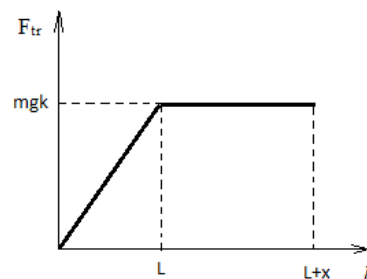
Зависност силе трења од пређеног пута по асфалту приказана је на слици 6.2. Површина испод графика једнака је раду силе трења, па је:

$$\frac{m v^2}{2} = m g k \cdot \frac{L}{2} + m g k x$$

$$\text{Одавде је } x = \frac{1}{2} \left( \frac{v^2}{g k} - L \right)$$

Убацавањем бројних вредности добија се да је  $x = 0,84 \text{ m}$ .

Пут који санке, до заустављања, пређу по асфалту је  $l = L + x = 2,84 \text{ m}$ .



Слика 6.2



## 7 РЕШАВАЊЕ РАЧУНСКИХ (КВАНТИТАТИВНИХ) ЗАДАТАКА

Прва група задатака – наведени су примери једноставних, сложених и комбинованих задатака из области закона одржања у механици.

Друга група задатака – у оквиру сваког појединачног закона: закона одржања импулса, закона одржања енергије и закона одржања момента импулса, дат је пример једноставног, сложеног и комбинованог задатка.

Трећа група задатака – у оквиру исте физичке појаве наведени су примери који прате усложњавање проблема, од једноставног, преко сложеног до комбинованог задатка.

### 7.1 Прва група задатака

#### 7.1.1 Једноставни задаци

**Једноставни задаци** су они код којих се до траженог решења долази уврштавањем бројних вредности у познати образац (формулу) који повезује дате и тражене физичке величине.

- ❖ *Примери једноставних задатака у којима се до решења долази помоћу познатих формула за закон одржања енергије и закон одржања импулса. У првом случају ради се о централно еластичном судару, а у другом је судар апсолутно нееластичан. Изражавањем непознате величине из одговарајуће формуле и уврштавањем бројних вредности датих величина долази се до резултата.*

1. Тело масе 1 kg креће се брзином 4 m/s и судара се са телом масе 2 kg које мирује. Сматрајући судар централним и еластичним, наћи брзине тела после судара.

Задате величине:  $m_1 = 1\text{ kg}$ ,  $v = 4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $m_2 = 2\text{ kg}$

Тражене величине: брзине тела после судара  $v_1$ ,  $v_2$

Решење:

Код централног судара тела се крећу дуж истог правца. За еластичан судар важи и закон одржања импулса и закон одржања кинетичке енергије:

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

Следи:

$$m_1(v - v_1) = m_2 v_2$$

$$m_1(v - v_1)(v + v_1) = m_2 v_2^2$$

Дељењем последња два израза добија се  $v + v_1 = v_2$ .

То се може заменити у закону одржања импулса:  $m_1 v = m_1 v_1 + m_2(v + v_1)$   
а одатле

$$v_1 = \frac{(m_1 - m_2)v}{m_1 + m_2} \text{ и } v_2 = \frac{2m_1 v}{m_1 + m_2}$$

Према подацима датим у задатку добија се  $v_1 = -\frac{4}{3} \text{ m/s}$  (што значи да се тело креће у супротном смеру од првобитног) и  $v_2 = \frac{8}{3} \text{ m/s}$ .

Резултат: Прво тело ће се кретати у супротном смеру од првобитног брзином  $\frac{4}{3} \text{ m/s}$ , а друго тело ће наставити да се креће у истом смеру брзином  $\frac{8}{3} \text{ m/s}$ .

2. Тело масе 3 kg креће се брзином 4 m/s и судара се апсолутно нееластично са телом исте масе које мирује. Колика је релативна промена кинетичке енергије система при овом судару?

Задате величине:  $m_1 = m_2 = 3 \text{ kg}$ ,  $v_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $v_2 = 0 \text{ m/s}$

Тражене величине: релативна промена кинетичке енергије система при судару

Решење:

Укупна кинетичка енергија система пре судара једнака је збиру кинетичких енергија првог и другог тела:

$$E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2}$$

$$E_{k1} = 24 \text{ J}$$

Према закону одржања импулса за нееластичан судар када је  $v_1 > v_2$  важи:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2)v$$

па се одатле добија:

$$v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 2 \text{ m/s}$$

Укупна кинетичка енергија система после судара је:

$$E_{k2} = \frac{(m_1 + m_2)v^2}{2}$$

Убацивањем бројних вредности добија се:  $E_{k2} = 12 \text{ J}$

Релативна промена кинетичке енергије система при овом судару је:

$$\frac{E_{k1} - E_{k2}}{E_{k1}} \cdot 100\% = 50\%$$

Резултат: При овом судару релативна промена кинетичке енергије је 50%.

❖ У наредна два примера до резултата се долази на основу одговарајућих релација за закон одржања импулса и закон одржања енергије у које је потребно уврстити дате односе физичких величина.

3. Колику брзину добије ракета у односу на Земљу ако је маса тренутно избачених гасова пет пута мања од масе непокретне ракете (са гасовима), а њихова брзина је 1 km/s?

Задате величине:  $v_g = 1 \text{ km/s}$ ,  $m = \frac{M}{5}$

Тражене величине: брзина ракете у односу на Земљу  $v$

Решење:

$$\begin{aligned} m &= \frac{M}{5} \\ mv_g &= (M - m)v \\ v &= \frac{m}{M - m} v_g = \frac{1}{M/m - 1} v_g = \frac{1}{4} v_g \\ v &= 250 \text{ m/s} \end{aligned}$$

Резултат: Ракета се у односу на Земљу креће брзином 250 m/s.

4. При централном еластичном судару већа кугла пре судара мирује, а након судара има  $\frac{3}{4}$  укупне кинетичке енергије. Наћи однос маса кугли.

Задате величине:  $E_{k1} = \frac{1}{4} E_k$ ,  $E_{k2} = \frac{3}{4} E_k$

Тражене величине: однос маса велике и мале кугле.

Решење:

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &= \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} \\ \frac{mv^2}{2} &= \frac{3}{4} \frac{mv^2}{2} + \frac{1}{4} \frac{Mv^2}{2} \end{aligned}$$

Ако већа кугла има  $3/4$  укупне енергије, мања има  $1/4$ .

Ако је  $E_k = \frac{mv^2}{2}$  укупна енергија, онда је:

$$E_{k1} = \frac{1}{4} E_k, E_{k1} = \frac{1}{4} \frac{mv^2}{2}, \frac{mv_1^2}{2} = \frac{1}{4} \frac{mv^2}{2}$$
$$E_{k2} = \frac{3}{4} E_k, E_{k2} = \frac{3}{4} \frac{mv^2}{2}, \frac{Mv_2^2}{2} = \frac{3}{4} \frac{mv^2}{2}$$

одакле се добија:

$$v_1 = \frac{v}{2} \text{ и } v_2 = \frac{v}{2} \sqrt{\frac{3m}{M}}$$

Према закону одржања импулса је  $mv = Mv_2 - mv_1$ , па је:

$$mv = M \frac{v}{2} \sqrt{\frac{3m}{M}} - m \frac{v}{2}$$

Сређивањем се добија  $M = 3m$ .

Резултат: маса велике и мале лопте односе се као 3:1.

- ❖ *Примери у којима нема конкретних бројних вредности, тражи се промена одговарајуће физичке величине. У првом случају тражи се промена импулса као последица промене кинетичке енергије, док се у другом случају тражи промена механичке енергије при апсолутно нееластичном судару.*

5. Лопта се креће брзином  $v_1$ , одбија се од зида и након тога креће у супротном смеру брзином  $v_2$ . Кинетичка енергија лопте се, притом, променила за  $\Delta E_k$ . Одредити промену импулса лопте.

Задате величине: брзина лопте  $v_1$ , брзина лопте у супротном смеру  $v_2$ , промена кинетичке енергије  $\Delta E_k$

Тражене величине: промена импулса  $\Delta p$

Решење:

Промена импулса лопте је:  $\Delta p = mv_2 - mv_1 = -m(v_2 + v_1)$

Кинетичка енергија променила се за:

$$\Delta E_k = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \frac{1}{2} m(v_2^2 - v_1^2)$$

Одавде је:

$$\Delta E_k = \frac{1}{2} m(v_2 + v_1)(v_2 - v_1) = -\frac{1}{2} m(v_2 + v_1)(v_1 - v_2)$$

односно:  $\Delta E_k = \frac{1}{2} \Delta p (v_1 - v_2)$

и најзад:

$$\Delta p = \frac{2\Delta E_k}{v_1 - v_2}$$

Резултат: Импулс се промени за  $\Delta p = \frac{2\Delta E_k}{v_1 - v_2}$ .

6. Колики део механичке енергије прелази у унутрашњу, при апсолутно нееластичном судару два тела?

Тражене величине: промена механичке енергије

Решење:

Укупна кинетичка енергија до судара је:  $E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

након судара укупна кинетичка енергија је:  $E_{k2} = \frac{1}{2} M v^2$ , где је  $M = m_1 + m_2$

а на основу закона одржања импулса  $v(m_1 + m_2) = m_1 v_1 + m_2 v_2$

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

па је  $E_{k2} = \frac{m_1 + m_2}{2} \left( \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \right)^2$

На основу свега овога, коначно се добија:

$$E_{k1} - E_{k2} = \frac{m_1 m_2 (v_2 - v_1)^2}{2(m_1 + m_2)}$$

Резултат: део механичке енергије који прелази у унутрашњу енергију при апсолутно нееластичном судару је  $\frac{m_1 m_2 (v_2 - v_1)^2}{2(m_1 + m_2)}$ .

### 7.1.2 Сложени задаци

**Сложени задаци** су они код којих се до решења не може доћи непосредним уврштавањем бројних вредности, већ се до решења долази након мисаоних процеса који подразумевају добро познавање физичких појава уз коришћење сложенијег математичког апарата.

- ❖ *Примери у којима је поред закона одржања потребно знати појам рада силе да би се решио задатак. У првом случају важи закон одржања енергије, а у другом закон одржања момента импулса.*

7. Камен масе  $50\text{ g}$ , бачен брзином од  $18\text{ m/s}$  укосо са терасе на висини  $20\text{ m}$ , падне на Земљу брзином од  $24\text{ m/s}$ . Колики рад изврши камен против силе отпора ваздуха?

Задате величине:  $m = 50\text{ g}$ ,  $v_1 = 18\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $h_1 = 20\text{ m}$

Тражене величине: рад који изврши камен против силе отпора ваздуха  $A$

Решење:

У почетном тренутку камен је на висини  $h_1 = 20\text{ m}$  и има брзину  $v_1 = 18\frac{\text{m}}{\text{s}}$ , па је његова механичка енергија у том тренутку:

$$E_1 = mgh_1 + \frac{mv_1^2}{2} = 17,9\text{ J}$$

У тренутку када стиже на Земљу камен има механичку енергију:

$$E_2 = \frac{mv_2^2}{2} = 14,4\text{ J}$$

На камен делују сила теже и сила отпора ваздуха:

Сила теже је унутрашња и конзервативна.

Сила отпора ваздуха је спољашња и њен рад је једнак промени енергије камена:

$$A_{ot} = E_2 - E_1 = -3,5\text{ J}$$

Рад силе отпора је негативан јер та сила делује у супротном смеру од смера кретања камена. Савлађујући силу отпора камен изврши исто толики рад, али је његов рад позитиван:

$$A = -A_{ot} = 3,5\text{ J}$$

Резултат: Камен против силе отпора ваздуха изврши рад од  $3,5\text{ J}$ .

8. Два диска момента инерције  $3\text{ kgm}^2$  и  $2\text{ kgm}^2$  ротирају око заједничке осе угаоним брзинама  $4\text{ rad/s}$  и  $5\text{ rad/s}$ . Дискови се доведу у контакт. Услед трења након неког времена престаје проклизавање једног диска у односу на други. Коликом угаоном брзином ће тада ротирати дискови? Колики рад је извршен против сила трења?

Задате величине:  $I_1 = 3\text{ kgm}^2$ ,  $I_2 = 2\text{ kgm}^2$ ,  $\omega_1 = 4\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ ,  $\omega_2 = 5\frac{\text{rad}}{\text{s}}$

Тражене величине: угаона брзина ротирања дискова када престане проклизавање једног диска у односу на други  $\omega$ , рад извршен против сила трења  $|A_{tr}|$

Решење:

По закону одржања момента импулса је:

$$I_1\omega_1 + I_2\omega_2 = (I_1 + I_2)\omega$$

па је

$$\omega = \frac{I_1\omega_1 + I_2\omega_2}{I_1 + I_2} = 4,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Рад силе једнак је разлици крајње и почетне кинетичке енергије, односно промени кинетичке енергије тела.

Почетна кинетичка енергија система је  $E_1 = \frac{I_1\omega_1^2}{2} + \frac{I_2\omega_2^2}{2}$

а крајња  $E_2 = \frac{(I_1 + I_2)\omega^2}{2}$

па је

$$|A_{tr}| = E_1 - E_2 = \frac{I_1 I_2 (\omega_2 - \omega_1)^2}{2(I_1 + I_2)} = 0,6 \text{ J}$$

Резултат: угаона брзина ротирања дискова када престане проклизавање једног диска у односу на други је  $4,4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , а рад извршен против сила трења је  $0,6 \text{ J}$ .

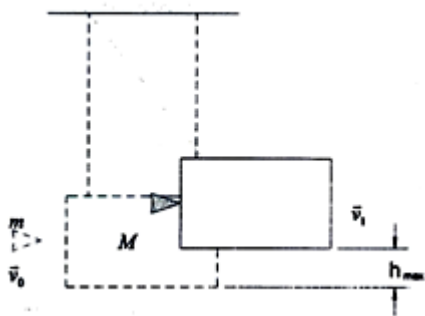
❖ У наредна два примера примењују се закони одржања на систем метак + тело. За први случај ученици морају знати шта је балистичко клатно, а за други потребно им је претходно стечено знање о еластичности опруге.

9. У балистичко клатно масе  $5 \text{ kg}$  зарије се метак масе  $10 \text{ g}$ , услед чега се клатно подигне на висину  $10 \text{ cm}$ . Наћи брзину метка.

Задате величине:  $M = 5 \text{ kg}, m = 10 \text{ g}, h_{\text{max}} = 10 \text{ cm}$

Тражене величине: брзина метка  $v_0$

Решење:



Слика 7.1.2.1

Балистичко клатно је физичко клатно које после нееластичног судара са пројектилом који улеће у њега почиње да осцилује (слика 7.1.2.1). Брзина пројектила може се одредити применом закона одржања импулса и енергије.

Пројектил се испаљује из “топа” са опругом, при чему се променом степена сабијања опруге може мењати почетна брзина пројектила. Пројектил се испаљује хоризонтално, јер би постојање вертикалне компоненте брзине у потпуности променило ситуацију. Пројектил на свом врху има иглу којом се забија у клатно, чиме се постиже да

се они после судара крећу заједно. Клатно је обешено о четири паралелне нити што омогућује да се тело после судара подиже тако да увек остаје у хоризонталном положају и тиме је олакшано читавање висине подизања клатна. Клатно има облик паралелопипеда тако да је најбоље посматрати подизање доње или горње ивице.

Физичко клатно које има масу  $M$  мирује у свом равнотежном положају. На њега налеће пројектил масе  $m$  тако да оба тела после судара настављају да се крећу заједно истом брзином  $v_1$ .

Применом закона одржања импулса, добија се релација:

$$mv_0 = (m + M)v_1$$

јер је брзина клатна пре судара једнака нули. Одавде је почетна брзина пројектила:

$$v_0 = \frac{m + M}{m} v_1$$

Брзина  $v_1$  система клатно+пројектил после нееластичног судара одређује се коришћењем закона одржања енергије примењеног на клатно после удара пројектила у њега. Ако се са  $h_{max}$  означи максимална висина до које се систем клатно+пројектил пење после судара (висина на којој се систем зауставља), при чему долази до потпуне трансформације почетне кинетичке енергије система у потенцијалну, добија се израз:

$$\frac{(m + M)v_1^2}{2} = (m + M)gh_{max}$$

одакле следи да је:

$$v_1 = \sqrt{2gh_{max}}$$

Заменом израза за  $v_1$  у релацију за почетну брзину добија се, коначно, за почетну брзину пројектила:

$$v_0 = \frac{m + M}{m} \sqrt{2gh_{max}}$$

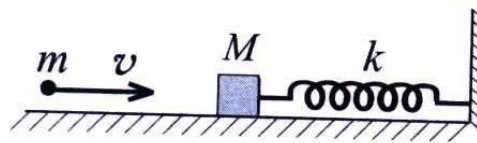
Убацивањем бројних вредности добија се:

$$v_0 = \frac{10g + 5000g}{10g} \sqrt{2 \cdot \frac{9,81m}{s^2} \cdot 0,1m} = 701,7 \frac{m}{s}$$

Резултат: Брзина метка је  $701,7 \frac{m}{s}$ .



10. У тело масе  $M$ , везано за опругу коефицијента еластичности  $k$ , улеће метак масе  $m$ , брзином  $v$  (слика 7.1.2.2). За колико ће се максимално сабити опруга ако метак остаје у телу?



Слика 7.1.2.2

Задате величине: тело масе  $M$ , коефицијент еластичности  $k$ , маса метка  $m$ , брзина метка  $v$

Тражене величине: максимално сабијање опруге  $x$ .

Решење:

За судар метка и тела важи закон одржања импулса, а за кретање система после судара важи и закон одржања енергије.

Дакле

$$mv = (M + m)v_0$$

$$v_0 = \frac{mv}{M + m}$$

Према закону одржања енергије кинетичка енергија система тело+метак једнака је потенцијалној енергији силе еластичности опруге, која је једнака полупроизводу коефицијента еластичности и квадрата промене дужине опруге.

$$\frac{(M + m)v_0^2}{2} = \frac{kx^2}{2}$$

Када се у горњу једначину уврсти  $v_0 = \frac{mv}{M+m}$  добијамо:  $\frac{m^2v^2}{M+m} = kx^2$

коначно се добија:  $x = mv \sqrt{\frac{1}{k(M+m)}}$

Резултат: Максимално сабијање опруге је  $x = mv \sqrt{\frac{1}{k(M+m)}}$ .

- ❖ *Примери у којима се примењују закони одржања код ротационог кретања тела. За њихово решавање потребно је знати чему је једанка ротациона енергија и величине које је описују.*

11. На ваљак масе  $5 \text{ kg}$  и полупречника  $20 \text{ cm}$  намотано је уже на чијем слободном крају је обешен тег масе  $1 \text{ kg}$ . Тег се пусти да пада. Колика ће бити угаона брзина ваљка кад се тег спусти за  $30 \text{ cm}$ ? Уже не проклизава преко ваљка.

Задате величине:  $M = 5 \text{ kg}, r = 20 \text{ cm}, m = 1 \text{ kg}, h = 30 \text{ cm}$ .

Тражене величине: угаона брзина ваљка  $\omega$

Решење:

На рачун смањења потенцијалне енергије тела, тег и ваљак су добили кинетичке енергије. По закону одржања енергије је:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \text{ тј. } mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{Mr^2\omega^2}{4}$$

Како нема проклизавања, то је  $v = r\omega$ , па је  $mgh = \frac{r^2\omega^2}{2} \left(m + \frac{M}{2}\right)$

$$\text{Одатле је } \omega = \frac{2}{r} \sqrt{\frac{mgh}{M+2m}} = 6,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Резултат: Угаона брзина ваљка је  $6,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ .

12. На заједничкој осовини насађени су замајак, момента инерције  $0,86 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$  и цилиндар, полупречника  $5 \text{ cm}$ , чију масу занемарујемо (види слику 7.1.2.3). На цилиндар је намотана нит о коју је окачен тег масе  $6 \text{ kg}$ . За које време се тег спусти за  $1 \text{ m}$ ? Колика му је коначна брзина?

Задате величине:  $I = 0,86 \text{ kg} \cdot \text{m}^2, r = 5 \text{ cm}, m = 6 \text{ kg}, h = 1 \text{ m}$

Тражене величине: време за које се спусти тег  $t$ , коначна брзина тега  $v$

Решење:

При спуштању тега, његова потенцијална енергија претвара се у кинетичку енергију тела и у ротациону енергију замајца.

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}$$

Замајак и цилиндар обрћу се истом угаоном брзином  $\omega = \frac{v}{r}$  па је

$$2mgh = v^2 \left(m + \frac{I}{r^2}\right)$$

односно:

$$v = \sqrt{\frac{2mgh}{m + \frac{I}{r^2}}}$$

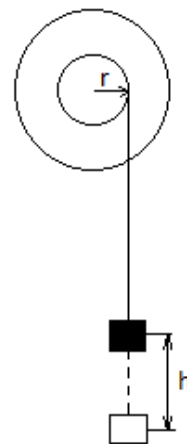
$$\text{Из } v^2 = 2ah \text{ и } v = at \text{ следи } t = \frac{v}{a} = \frac{2h}{v}$$

Остаје да се замене бројне вредности, а након тога добија се:

$$v = 58 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$t = 3,5 \text{ s}$$

Резултат: Коначна брзина тега је  $58 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , а за време од  $3,5 \text{ s}$  се спусти за  $1 \text{ m}$ .



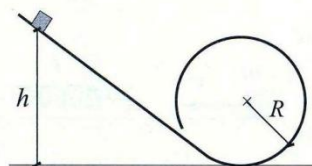
Слика 7.1.2.3

### 7.1.3 Комбиновани задаци

У најсложенију категорију задатака спадају **комбиновани (проблемски) задаци** који подстичу ученике на креативно размишљање.

- ❖ *Примери у којима се примењују закони одржања на кружно кретање при чему се у првом случају мора узети у обзир сила притиска на подлогу, а у другом силе затезања.*

13. Тело масе  $30\text{ g}$  пусти се да клизи низ мртву петљу полупречника  $R$  са висине  $3R$  (слика 7.1.3.1). Колика је сила притиска тела на подлогу у највишој тачки кружног дела петље? Трење је занемарљиво.



Слика 7.1.3.1

Задате величине:  $m = 30\text{ g}, h = 3R$

Тражене величине: сила притиска тела на подлогу у највишој тачки кружног дела петље

Решење:

Тело се неће одвојити од петље ако у највишој тачки има одговарајућу брзину (слика 7.1.3.2).

У том положају на тело вертикално наниже делују сила теже и сила реакције подлоге, па по Другом Њутновом закону важи:

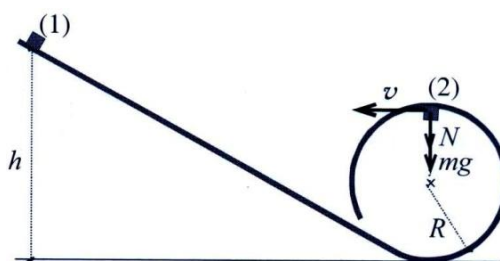
$$ma_{cp} = mg + N$$

односно:

$$m \frac{v^2}{R} = mg + N$$

Одатле се добија брзина тела у највишој тачки:

$$v = \sqrt{Rg + \frac{RN}{m}}$$



Слика 7.1.3.2

Како нема трења, важи закон одржања енергије, па је за положаје 1 и 2:  $E_1 = E_2$

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + mg \cdot 2R$$

Следи:  $h = \frac{v^2}{2g} + 2R$

Из једначина  $v = \sqrt{Rg + \frac{RN}{m}}$  и  $h = \frac{v^2}{2g} + 2R$  добија се:  $h = \frac{R}{2} + \frac{RN}{2mg} + 2R$

одакле можемо коначно изразити:

$$N = \frac{mg}{R}(2h - 5R) = \frac{mg}{R}R = mg$$

Убацавањем бројних вредности добија се:  $N = mg = 0,3N$

Резултат: сила притиска тела на подлогу у највишој тачки кружног дела петље је  $0,3N$ .

14. Камен масе  $m$ , везан о неистегљив конац, гурне се тако да се потом креће по кружници у вертикалној равни. За колико је сила затезања конца у најнижој тачки путање камена већа него у највишој тачки.

Задате величине: маса камена  $m$

Тражене величине: разлика силе затезања конца у највишој и најнижој тачки путање камена  $\Delta T$

Решење:

Центрипетално убрзање камену обезбеђује резултујућа сила у правцу полупречника, усмерена ка центру кружне путање. И у највишој и у најнижој тачки путање полупречника  $l$  на камен дуж полупречника делују сила теже и сила затезања конца (слика 7.1.3.3).

У тачки 1 резултанта, усмерена ка центру је:

$$F_{cp1} = T_1 - mg$$

па за најнижи положај камена важи:

$$\frac{mv_1^2}{l} = T_1 - mg$$

У тачки 2 резултанта је:

$$F_{cp2} = T_2 + mg$$

па за највиши положај камена важи:

$$\frac{mv_2^2}{l} = T_2 + mg$$

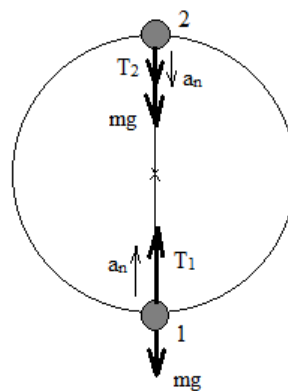
Ако од прве једначине одузмемо другу, добија се:

$$T_1 - T_2 = \frac{m(v_1^2 - v_2^2)}{l} + 2mg$$

Према закону одржања енергије:

$$\begin{aligned} \frac{mv_1^2}{2} &= \frac{mv_2^2}{2} + mg \cdot 2l \\ v_1^2 - v_2^2 &= 4gl \\ T_1 - T_2 &= 6mg \end{aligned}$$

Резултат: Сила затезања конца у најнижој тачки путање камена већа је него у највишој тачки за  $6mg$ .



Слика 7.1.3.3

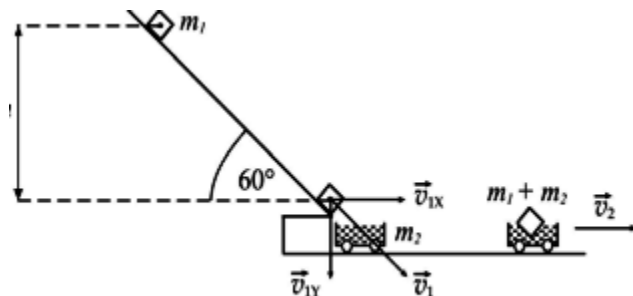
- ❖ *Примери у којима се закони одржања примењују у односу на кретање тела на стрмој равни. Да би разматрање било ваљано кретање тела се посматра у различитим правцима.*

15. Тело масе  $15kg$  почиње да клизи са врха стрме равни чији је нагиб  $60^\circ$ . На дну стрме равне се налазе колица са песком масе  $90kg$  која мирују на хоризонталној подлози у које падне тело. Ако је висинска разлика тела и колица у почетном положају  $10m$ , одредити брзину којом ће се систем колица и тело кретати. Трење занемарити.

Задате величине:  $m_1 = 15kg$ ,  $\alpha = 60^\circ$ ,  $m_2 = 90kg$ ,  $h = 10m$

Тражене величине:  $v_2$  – брзина кретања система колица + тело

Решење:



Слика 7.1.3.4

За овај систем важи закон одржања енергије и закон одржања импулса. У овом примеру кинетичка енергија система је једнака потенцијалној енергији тела на врху стрме равни.

$$m_1gh = \frac{(m_1 + m_2)v_2^2}{2}$$

Потенцијална енергија се претвара у кинетичку енергију кретања:

$$m_1gh = \frac{m_1v_1^2}{2}$$

Брзина тела на дну стрме равни ће бити:  $v_1 = \sqrt{2gh}$

Импулс тела на дну стрме равни ће бити  $p = m_1v_1$ .

Овај импулс може се раставити на две компоненте, компоненту у правцу кретања колица  $m_1v_{1x}$  и компоненту нормалну на овај правац  $m_1v_{1y}$ . Ова друга компонента није очувана.

Применом закона одржања импулса за прву компоненту добија се:

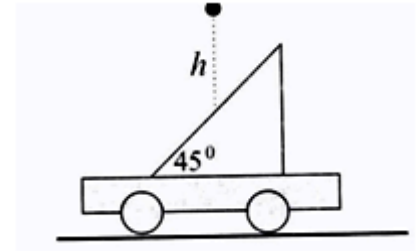
$$m_1v_{1x} = (m_1 + m_2)v_2$$

Како је  $v_{1x} = v_1 \cos \alpha$  добија се да је:  $v_2 = v_1 \cos \alpha \frac{m_1}{m_1 + m_2}$

Заменом бројних вредности добија се вредност брзине:  $v_2 = 1 \frac{m}{s}$ .

Резултат: Систем колица + тело кретаће се брзином  $1 \frac{m}{s}$ .

16. Куглица масе  $10g$  слободно падне са висине  $2m$  на призму учвршћену на колицима (слика 7.1.3.5) и еластично се одбије од ње. Маса колица са призмом је  $90g$  а нагиб стрме равни призме је  $45^\circ$ . Коликом брзином ће се кретати колица после судара са куглицом?



Слика 7.1.3.5

Задате величине:  $m = 10g, h = 2m, M = 90g, \alpha = 45^\circ$

Тражене величине: брзина кретања колица после судара са куглицом

Решење:

Непосредно пре судара са призмом куглица има вертикалну брзину  $v = \sqrt{2gh}$ .

Непосредно после еластичног судара куглица има хоризонталну брзину  $v_1$  (одбија се од призме под истим углом под којим је пала). Закон одржања импулса важи у хоризонталном правцу:

$$0 = mv_1 - Mu$$

$$v_1 = \frac{Mu}{m}$$

За еластичан судар важи и закон одржања кинетичке енергије:

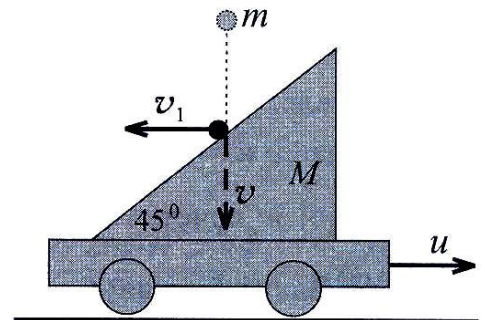
$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mu^2}{2}$$

$$mv^2 = m\left(\frac{Mu}{m}\right)^2 + Mu^2$$

Следи:

$$mv^2 = Mu^2 \left(\frac{M}{m} + 1\right)$$

$$\text{тј. } u = \sqrt{\frac{mv^2}{M\left(\frac{M}{m} + 1\right)}} = \sqrt{\frac{2mgh}{M\left(\frac{M}{m} + 1\right)}}$$



Слика 7.1.3.6

Убацавањем бројних вредности добија се:  $u = 0,67 \text{ m/s}$

Резултат: после судара са куглицом колица се крећу брзином  $0,67 \text{ m/s}$

❖ *Примери у којима се тражи извођење брзина тела након судара, на основу закона одржања импулса и енергије, да би се на основу тога извршила анализа проблема.*

17. Два новчића стоје један поред другог, а трећи новчић је на неком растојању у односу на ова два. Ако прстом ударимо трећи новчић тако да погоди један од два новчића, одредити брзине новчића после судара.

Решење:

Услед еластичног судара долази до преноса импулса и енергије са новчића на новчић, редом.

Уводе се ознаке:  $v_1, v_1'$  – брзина новчића којим се удара пре и после судара;  $v_2, v_2'$  – брзина новчића који је ударен пре и после судара;  $m_1, m_2$  – масе новчића.



Слика 7.1.3.7

На основу закона одржања импулса:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

и енергије:

$$\frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2^2 = \frac{1}{2} m_1 \vec{v}_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \vec{v}_2'^2$$

записаних у скаларном облику:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \\ m_1(v_1 - v_1') &= m_2(v_2' - v_2) \\ m_1(v_1^2 - v_1'^2) &= m_2(v_2'^2 - v_2^2) \end{aligned}$$

и дељењем последње две једначине добија се:

$$\begin{aligned} (v_1 - v_1')(v_2'^2 - v_2^2) &= (v_2' - v_2)(v_1'^2 - v_1'^2) \\ (v_1 - v_1')(v_2' - v_2)(v_2' + v_2) &= (v_2' - v_2)(v_1 - v_1')(v_1 + v_1') \\ (v_2' + v_2) &= (v_1 + v_1') \\ v_1 - v_2 &= v_2' - v_1' = -(v_1' - v_2') \\ v_1' &= v_2' - v_1 + v_2 \end{aligned}$$

Добијени израз уврсти се у једначину:  $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$  и добија се:

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_2' - m_1 v_1 + m_1 v_2 + m_2 v_2' \\ 2 m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1) &= v_2'(m_1 + m_2) \\ v_2' &= \frac{2 m_1 v_1 + v_2(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} \end{aligned}$$

Из  $v_1 - v_2 = v_2' - v_1'$  изрази се  $v_2' = v_1' + v_1 - v_2$

Добијени израз се уврсти у једначину:  $m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$  и добија се:

$$2 m_2 v_2 + v_1(m_1 - m_2) = v_1'(m_1 + m_2)$$

$$v_1' = \frac{2 m_2 v_2 + v_1 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

добија се:

$$v_1' = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2v_2}{m_1 + m_2}; \quad v_2' = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}$$

Новчићи имају исту масу, па је  $v_1' = v_2 = 0$  као и  $v_2' = v_1$ , односно цео импулс и комплетна енергија се преносе током судара са новчића на новчић. Погођен новчић остаје на месту а новчић до њега (последњи) нема коме да преда импулс и енергију бива одбачен као из катапулта.

- 18.** Када две лопте, једна велика и једна мала, постављене једна на другу тако да се мала налази изнад велике лопте, а тежишта им леже у истој линији, подигнемо рукама што више можемо и пустимо да заједно падају, мала лопта ће одскочити више. Објасни зашто. Ако је маса веће лопте десет пута већа од масе мале лопте, колико пута ће више одскочити мања од веће лопте?

Решење:

Лопте падају под утицајем силе Земљине теже. Обзиром да падају са убрзањем које је једнако гравитационом убрзању, до Земље стижу у исто време, слепљене као што су постављене у почетном тренутку. У току пада лопте се налазе у бестежинском стању.

Са  $m_1$  обележи се маса веће лопте, са  $m_2$  маса мање лопте,  $v_1$  брзина веће лопте пре судара,  $v_2$  брзина мање лопте пре судара,  $v_1'$  брзина веће лопте после судара,  $v_2'$  брзина мање лопте после судара. На основу закона одржања импулса и енергије, може се писати:



Слика 7.1.3.8

$$\begin{aligned} m_1 v_1 + m_2 v_2 &= m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 &= m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 \end{aligned}$$

Коришћењем крајњих израза из претходног задатка:

$$v_2' = \frac{2 m_1 v_1 + v_2 (m_2 - m_1)}{m_1 + m_2}, \quad v_1' = \frac{2 m_2 v_2 + v_1 (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

Дељењем једначина са  $m_1$  добија се:

$$v_2' = \frac{2v_1 + (q - 1)v_2}{(1 + q)}, \quad q = \frac{m_2}{m_1}$$



$$v_1' = \frac{2qv_2 + (1-q)v_1}{(1+q)}, \quad q = \frac{m_2}{m_1}$$

Судар доње лопте са Земљом није идеално еластичан. Она губи један део кинетичке енергије на рад силе трења, при удару у Земљу, други део се предаје мањој лопти, а трећи део претвара у сопствену потенцијалну енергију. Зато она одскочи само мало од Земље.

Горња мања лопта приликом удара о Земљу, претрпи идеално еластичан судар са великом лоптом. Њена кинетичка енергија приликом удара се претвори у потенцијалну. Поред своје кинетичке енергије, она прими део кинетичке енергије доње веће лопте, тако да одскочи знатно више.

Ако се замени:  $v_1 = -v_2 = v$  за брзину мање, односно веће лопте после судара, добија се:

$$v_2' = \frac{(3-q)}{(1+q)}v; \quad v_1' = \frac{(1-3q)}{(1+q)}v, \quad q = \frac{m_2}{m_1}$$

Када лопте додирну Земљу, велика лопта остане на Земљи, или мало одскочи, а мала одскочи далеко више. Висина на коју ће одскочити зависи од односа маса лопти.

Ако је  $m_1 = 10m_2$ ,  $q = \frac{1}{10}$ , добија се однос брзина:  $v_2' = 4,1 v_1'$

$$\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{m_2 v_2'^2}{m_1 v_1'^2} = 1,7$$

Како је кинетичка енергија мање лопте већа 1,7 пута од кинетичке енергије веће лопте, тако ће и висина до које мања лопта одскочи бити 1,7 пута већа.

## 7.2 Друга група задатака

### 7.2.1 Закон одржања импулса

- У првом примеру се до решења долази помоћу познате формуле за закон одржања импулса, која повезује дате и тражене физичке величине. Изражавањем непознате величине из одговарајуће формуле и уврштавањем бројних вредности датих величина долази се до резултата. У следећем примеру примењује се закон одржања импулса на распад тела. Последњи задатак је сложенији у односу на претходни јер се закон мора применити дуж хоризонталне и вертикалне осе што захтева сложенији математички апарат и примену Питагорине теореме за израчунавање тражене величине.

1. Вагон масе  $1000\text{ kg}$  креће се по хоризонталној прузи брзином  $3\text{ m/s}$ . У сусрет њему креће се други вагон масе  $1500\text{ kg}$ . Коликом брзином и у ком смеру ће се кретати вагони после спајања ако је други вагон пре тога имао брзину:

а)  $1\text{ m/s}$

б)  $2\text{ m/s}$

в)  $3\text{ m/s}$

Задате величине:  $m_1 = 1000\text{ kg}$ ,  $v_1 = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $m_2 = 1500\text{ kg}$ ,  $v_2 = 1\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $v_2' = 2\frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $v_2'' = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Тражене величине: брзине  $v, v', v''$  и смерови којим ће се кретати вагони после спајања

Решење:

Вектори импулса вагона пре спајања су супротно усмерени па је укупан импулс (по интензитету) једнак разлици импулса вагона. Након спајања вагони ће се кретати у смеру вагона са већим импулсом.

а)

$$p_1 = m_1 v_1 = 3000\text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}, p_2 = m_2 v_2 = 1500\text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Како је  $p_2 < p_1$  укупан импулс је у смеру кретања првог вагона – у том смеру ће се кретати вагони после спајања.

При томе је:

$$p_1 - p_2 = (m_1 + m_2)v, \text{ тј. } v = \frac{p_1 - p_2}{m_1 + m_2}$$

Замењивањем бројних вредности добија се  $v = 0,6\text{ m/s}$

б)

$$p_1 = m_1 v_1 = 3000\text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}, p_2' = m_2 v_2' = 3000\text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Укупан импулс је нула, па следи да ће се при спајању вагони зауставити.

в)

$$p_1 = m_1 v_1 = 3000\text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}, p_2'' = m_2 v_2'' = 4500\text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Како је  $p_2'' > p_1$  укупан импулс је у смеру кретања другог вагона – у том смеру ће се кретати вагони после спајања.

При томе је:

$$p_2'' - p_1 = (m_1 + m_2)v'', \text{ тј. } v'' = \frac{p_2'' - p_1}{m_1 + m_2}$$

Замењивањем бројних вредности добија се  $v'' = 0,6\text{ m/s}$

Резултат:

Када други вагон има брзину  $1\text{ m/s}$  после спајања вагони ће се кретати у смеру првог вагона брзином  $0,6\text{ m/s}$ .

Када други вагон има брзину  $2\text{ m/s}$  после спајања вагони ће се зауставити.

Када други вагон има брзину  $3\text{ m/s}$  после спајања вагони ће се кретати у смеру другог вагона брзином  $0,6\text{ m/s}$ .

2. Проектил масе  $5\text{ kg}$  лети брзином  $200\text{ m/s}$ . У једном тренутку пројектил се распадне на два дела. Један од њих, масе  $2\text{ kg}$ , после распада продужава да се креће у истом смеру као и пројектил пре распада, али већом брзином:  $300\text{ m/s}$ . Одредити брзину и правац кретања другог комада.

Задате величине:  $m = 5\text{ kg}, v = 200\text{ m/s}, m_1 = 2\text{ kg}, v_1 = 300\text{ m/s}$

Тражене величине: брзина кретања другог комада –  $v_2$ .

Решење:

На основу закона одржања импулса, импулс пројектила пре распада једнак је збиру импулса делова пројектила после распада:

$$mv = m_1v_1 + m_2v_2$$

где је маса другог комада  $m_2 = m - m_1$

Брзина другог дела је из горње једначине:

$$v_2 = \frac{mv - m_1v_1}{m_2} = \frac{mv - m_1v_1}{m - m_1}$$

Убацавањем бројних вредности

$$v_2 = \frac{5\text{ kg} \cdot 200\text{ m/s} - 2\text{ kg} \cdot 300\text{ m/s}}{5\text{ kg} - 2\text{ kg}}$$

добива се:

$$v_2 = -133,3\text{ m/s}$$

Резултат: Брзина кретања другог комада  $133,3\text{ m/s}$  у смеру супротном у односу на кретање пројектила пре распада.

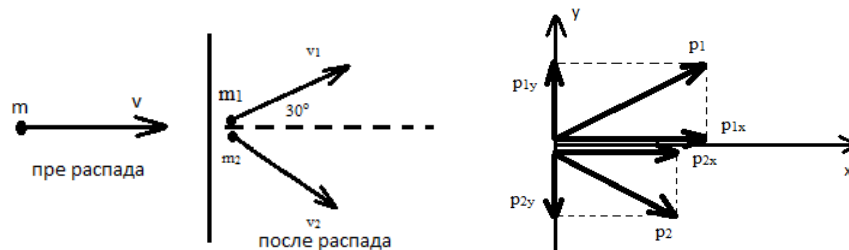
3. Граната масе  $10\text{ kg}$  у највишој тачки путање, где има хоризонталну брзину  $300\text{ m/s}$ , распадне се на два дела маса  $4\text{ kg}$  и  $6\text{ kg}$ . Мањи део одлети под углом  $30^\circ$  према хоризонту брзином  $200\text{ m/s}$ . Колика је брзина другог дела непосредно после распада?

Задате величине:  $m = 10\text{ kg}, v = 300\frac{\text{m}}{\text{s}}, m_1 = 4\text{ kg}, v_1 = 200\text{ m/s}, m_2 = 6\text{ kg}$ .

Тражене величине: Брзина другог дела гранате непосредно после распада  $v_2$

Решење:

Слика 7.2.1.1



У овом случају треба применити закон одржања по хоризонтали (x-оса) и по вертикали (y-оса).

По x-оси је:  $mv = p_{1x} + p_{2x}$

$p_{1x}$  - компонента импулса првог дела дуж x осе,  $p_{1x} = m_1 v_{1x}$

$p_{2x}$  - компонента импулса другог дела дуж x осе,  $p_{2x} = m_2 v_{2x}$

Како је између брзине  $v_1$  и x-осе угао од  $30^\circ$  брзина  $v_{1x}$  се може изразити као висина једнакостраничног троугла чија је страница  $v_1$ :  $v_{1x} = v_1 \frac{\sqrt{3}}{2}$ , односно  $p_{1x} = m_1 v_1 \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

па се добија:  $mv = m_1 v_1 \frac{\sqrt{3}}{2} + m_2 v_{2x}$

Одатле је:

$$v_{2x} = \frac{2mv - m_1 v_1 \sqrt{3}}{2m_2} = 384,67 \frac{m}{s}$$

По y-оси је  $0 = p_{1y} - p_{2y}$

$p_{1y}$  - компонента импулса првог дела дуж y осе,  $p_{1y} = m_1 v_{1y}$

$p_{2y}$  - компонента импулса другог дела дуж y осе,  $p_{2y} = m_2 v_{2y}$

Како између брзине  $v_1$  и y-осе угао од  $60^\circ$  брзина  $v_{1y}$  се може изразити као половина странице  $v_1$  једнакостраничног троугла:  $v_{1y} = \frac{v_1}{2}$ , односно  $p_{1y} = m_1 \frac{v_1}{2}$ .

па се добија:  $mv = m_1 \frac{v_1}{2} + m_2 v_{2y}$

Одатле је:

$$v_{2y} = \frac{m_1 v_1}{2m_2} = 66,67 \frac{m}{s}$$

Са слике се види да су  $v_{2x}$  и  $v_{2y}$  катете правоуглог троугла чија је хипотенуза  $v_2$ , па се њена вредност може добити применом Питагорине теореме:

$$v_2^2 = v_{2x}^2 + v_{2y}^2$$

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = 390 \text{ m/s}$$

Резултат: Брзина другог дела гранате непосредно после распада је  $390 \text{ m/s}$ .

### 7.2.2 Закон одржања енергије

- У првом примеру се до решења долази помоћу познате формуле за закон одржања енергије, која повезује дате и тражене физичке величине. Изражавањем непознате величине из одговарајуће формуле и уврштавањем бројних вредности датих величина долази се до резултата. У следећем примеру поред закона одржања енергије примењује се Други Њутнов закон. У последњем задатку морају се поред закона одржања и Другог Њутновог закона узети у обзир и силе затезања што захтева сложенији математички апарат.

4. Коликом брзином треба бацити лопту вертикално наниже са висине  $2\text{ m}$  да би она одскочила до висине  $4\text{ m}$ ? Сматрати да се при судару са подлогом не мења механичка енергија лопте.

Задате величине:  $h_1 = 2\text{ m}, h_2 = 4\text{ m}$

Тражене величине: почетна брзина лопте  $v_0$

Решење:

У почетном положају лопта има кинетичку и потенцијалну енергију па је укупна енергија једнака:  $E_1 = \frac{mv_0^2}{2} + mgh_1$ .

На максималној висини  $h_2 = 4\text{ m}$ , кинетичка енергија се претвара у потенцијалну па лопта има енергију  $E_2 = mgh_2$ .

Из  $E_1 = E_2$  следи  $\frac{mv_0^2}{2} + mgh_1 = mgh_2$ , тј.

$$v_0 = \sqrt{2g(h_2 - h_1)} = 6,3\text{ m/s}$$

Резултат: Почетна брзина лопте је  $6,3\text{ m/s}$ .

5. Коликом брзином треба лансирати тело са површине Земље да би оно постало њен сателит који кружи по орбити полупречника  $\frac{3}{2}R$ ? ( $R = 6400\text{ km}, g = 9,81\text{ m/s}^2$ )

Задате величине:  $r = \frac{3}{2}R, R = 6400\text{ km}, g = 9,81\text{ m/s}^2$

Тражене величине: брзина лансирања тела са површине Земље  $v_1$

Решење:

$E_1$  је укупна енергија у тренутку лансирања тела са Земљине површине:  $E_1 = E_{k_1} + E_{p_1}$ .

$E_{k_1}$  - кинетичка енергија тела:  $E_{k_1} = \frac{mv_1^2}{2}$

$E_{p_1}$  - потенцијална енергија тела масе  $m$  на растојању  $R$ :  $E_{p_1} = -\gamma \frac{Mm}{R}$

$E_2$  - укупна енергија тела на орбити по којој тело кружи око Земље:  $E_2 = E_{k_2} + E_{p_2}$

$E_{k_2}$  - кинетичка енергија тела:  $E_{k_2} = \frac{mv_2^2}{2}$

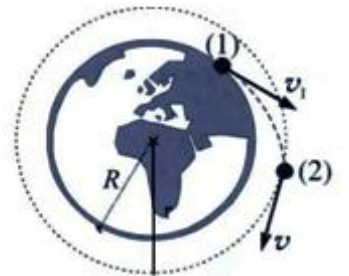
$E_{p_2}$  - потенцијална енергија тела масе  $m$  на растојању  $r$ :  $E_{p_2} = -\gamma \frac{Mm}{r}$

По закону одржања енергије је:  $E_1 = E_2$

$$\begin{aligned} E_{k_1} + E_{p_1} &= E_{k_2} + E_{p_2} \\ \frac{mv_1^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{R} &= \frac{mv_2^2}{2} - \gamma \frac{Mm}{r} \end{aligned}$$

где је  $r = \frac{3}{2}R$ .

По Другом Њутновом закону је  $F = ma = \frac{mv_2^2}{r} = \gamma \frac{Mm}{r^2}$



Слика 7.2.2.1

Из тих једначина добија се

$$v_1^2 = \frac{4\gamma M}{3R}$$

како је:  $g = \gamma \frac{M}{R^2}$ , добија се:

$$v_1^2 = \frac{4Rg}{3}$$

$$v_1 = 2\sqrt{\frac{Rg}{3}} = 9,15 \frac{km}{s}$$

Резултат: Да би тело лансирано са површине Земље постало њен сателит који кружи по орбити полупречника  $\frac{3}{2}R$  мора имати брзину  $9,15 \frac{km}{s}$ .

6. Куглица масе  $0,5 \text{ kg}$  обешена је за неистегљив конац. Конац се отклони од вертикале за  $30^\circ$  и пусти. Колика ће бити сила затезања нити када куглица буде пролазила кроз равнотежни положај?

Задате величине:  $m = 0,5 \text{ kg}$ ,  $\alpha = 30^\circ$

Тражене величине: сила затезања нити  $T$

Решење:

Свака затегнута нит делује на тело за које је везана. Сила затезања има правац нити, а усмерена је тако да вуче тело на које делује.

У положају 1: кинетичка енергија је максимална, а потенцијална енергија је једнака нули.

У положају 2: потенцијална енергија је маскимална, а кинетичка енергија је једнака нули.

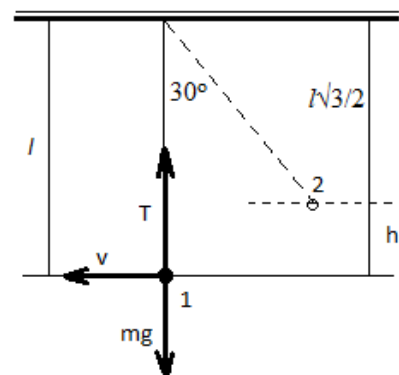
Применом закона одржања енергије на положаје 1 и 2 (слика 7.2.2.1) добија се  $mgh = \frac{mv^2}{2}$ .

Са слике видимо да се висина  $h$  добија када се од дужине конца  $l$  одузме дужина висине једнакостраничног троугла странице  $l$  ( $\alpha = 30^\circ$ )

$$h = l - \frac{l\sqrt{3}}{2} = l\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$mgl\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{mv^2}{2}$$

На куглицу делују сила земљине теже и сила затезања нити које су супротно усмерене. Куглица има центрипетално убрзање па на основу Другог Њутновог закона:



Слика 7.2.2.2

$$ma = F$$

за положај 2 важи:

$$\frac{mv^2}{l} = T - mg$$

Из датих једначина добија се

$$T = mg(3 - \sqrt{3}) = 6,3N$$

Резултат: сила затезања нити је  $6,3N$ .

### 7.2.3 Закон одржања момента импулса

- У првом примеру се до решења долази помоћу познате формуле за закон одржања момента импулса, која повезује дате и тражене физичке величине. Изражавањем непознате величине из одговарајуће формуле и уврштавањем бројних вредности датих величина долази се до резултата. У следећем примеру примењује се закон одржања момента импулса, али је потребно извести и израз за момент инерције штапа у односу на осу која пролази кроз један његов крај. У последњем задатку дат је систем обртне столице и човека који окреће штап у руци, због чега је задатак сложенији.

7. У центру хоризонталне платформе која ротира фреквенцијом  $2\text{ s}^{-1}$  стоји човек који у раширеним рукама држи по један тег масе  $5\text{ kg}$ . Распон руку човека је  $1,5\text{ m}$ . Колика ће бити фреквенција обртања платформе кад човек спусти руке? Платформа је у облику диска полупречника  $1\text{ m}$  и масе  $100\text{ kg}$ . Промену момента инерције човека услед спуштања руку занемарити као и распон његових спуштених руку.

Задате величине:  $\omega_1 = 2\text{ s}^{-1}$ ,  $m = 5\text{ kg} + 5\text{ kg} = 10\text{ kg}$ ,  $R = 1,5\text{ m}$ ,  $r = 1\text{ m}$ ,  $M = 100\text{ kg}$ .

Тражене величине: фреквенција обртања платформе кад човек спусти руке  $\omega_2$

Решење:

По закону одржања момента импулса важи:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Како је момент инерције једнак производу масе тела и квадрату растојања тела од осе ротације добија се:

$$\begin{aligned} I_1 &= mR^2 + Mr^2 \\ I_2 &= (m + M)r^2 \\ (mR^2 + Mr^2)\omega_1 &= ((m + M)r^2)\omega_2 \end{aligned}$$

Одатле је

$$\omega_2 = \frac{(mR^2 + Mr^2)\omega_1}{(m + M)r^2} = 2,2\text{ s}^{-1}$$

Резултат: Фреквенција обртања платформе кад човек спусти руке је  $2,2\text{ s}^{-1}$ .

8. Горњи крај хомогеног штапа масе  $900\text{ g}$  и дужине  $1\text{ m}$  је учвршћен тако да штап може да ротира у вертикалној равни. У доњи крај штапа улеће метак масе  $10\text{ g}$  хоризонталном брзином  $400\text{ m/s}$ . Коликом угаоном брзином ће почети да ротира штап кад метак улети у њега? (Метак остаје у штапу.)

Задате величине:  $M = 900\text{ g}, l = 1\text{ m}, m = 10\text{ g}, v = 400\frac{\text{m}}{\text{s}}$

Тражене величине: угаона брзина којом ће да ротира штап кад метак улети у њега  $\omega$

Решење:

Момент инерције штапа у односу на осу кроз центар масе је:  $I_C = \frac{1}{12}Ml^2$

Момент инерције штапа масе  $M$  и дужине  $l$  у односу на осу која пролази кроз један његов крај и нормална је не штап, добија се када се у горњи израз уврсти растојање од осе која пролази кроз центар масе до осе која пролази кроз крај штапа:

$$d = \frac{1}{2}l$$

Момент импулса штапа у односу на ову другу осу је:

$$\begin{aligned} I &= I_C + Md^2 \\ I &= \frac{1}{12}Ml^2 + M\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}Ml^2 + \frac{1}{4}Ml^2 \\ I &= \frac{1}{3}Ml^2 \end{aligned}$$

Како је полупречник метка много мањи од дужине штапа, сматра се материјалном тачком. Метак је од осе удаљен за растојање  $l$ , па је момент импулса метка:  $I_2 = ml^2$

Пре судара метка и штапа момент импулса система штап – метак је  $L_1 = pl = mvl$ . Непосредно након судара је

$$L_2 = (I_1 + I_2)\omega = \left(\frac{1}{3}Ml^2 + ml^2\right)\omega = l^2\left(\frac{M}{3} + m\right)\omega$$

Из  $L_1 = L_2$  добија се

$$\omega = \frac{3mv}{(M + 3m)l}$$

Убацивањем бројних вредности коначно се добија:

$$\omega = 11,8\text{ rad/s}$$

Резултат: Угаона брзина којом ће почети да ротира штап кад метак улети у њега је  $11,8\text{ rad/s}$ .



9. На обртној столици, која ротира без трења око своје вертикалне осе фреквенцијом  $0,5 \text{ s}^{-1}$ , стоји човек и држи у рукама хоризонтални танки штап масе  $12 \text{ kg}$  и дужине  $2 \text{ m}$ . Оса ротације столице пролази кроз центар масе штапа. Ако човек брзо окрене штап и постави га у вертикалан положај (дуж осе ротације столице), столица ротира фреквенцијом  $1 \text{ s}^{-1}$ . Одредити момент инерције човека ако се зна да је момент инерције столице  $1 \text{ kgm}^2$ . Колики рад је извршио човек окрећући штап?

Задате величине:  $f_1 = 0,5 \text{ s}^{-1}, m = 12 \text{ kg}, l = 2 \text{ m}, f_2 = 1 \text{ s}^{-1}, I_2 = 1 \text{ kgm}^2$

Тражене величине: момент инерције човека  $I_1$  и рад који је извршио човек окрећући штап  $A$

Решење:

Момент импулса система „човек – столица – штап“ је константан.

Нека је  $I_1$  момент инерције човека,  $I_2$  момент инерције столице, а  $I_3$  момент инерције штапа у почетном положају.

Након окретања штапа у вертикални положај промениће се само његов момент инерције – како је дебљина штапа мала, момент инерције штапа постављеног дуж осе ротације једнак је нули. Дакле:

$$(I_1 + I_2 + I_3)\omega_1 = (I_1 + I_2)\omega_2$$

$$(I_1 + I_2 + I_3)2\pi f_1 = (I_1 + I_2)2\pi f_2$$

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{I_1 + I_2 + I_3}{I_1 + I_2}$$

Према датим подацима је  $f_2 = 2f_1$ , па је:

$$2 = 1 + \frac{I_3}{I_1 + I_2}$$

односно:

$$I_1 = I_3 - I_2 = \frac{ml^2}{12} - I_2 = 3 \text{ kgm}^2$$

У овом систему делују само унутрашње силе, па је рад човека при окретању штапа једнак промени кинетичке енергије система:

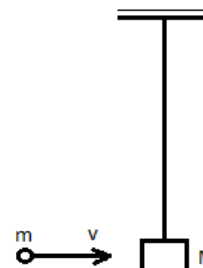
$$A = \frac{(I_1 + I_2)4\pi^2 f_2^2}{2} - \frac{(I_1 + I_3 + I_2)4\pi^2 f_1^2}{2} \approx 39 \text{ J}$$

Резултат: Момент инерције човека је  $3 \text{ kgm}^2$ , а рад који је извршио човек окрећући штап  $39 \text{ J}$ .

## 7.3 Трећа група задатака

- Наредна три задатка односе се на асполутно еластичан судар. У првом се разматра систем тело + метак, примењују се закон одржања импулса и енергије из којих треба изразити тражену величину. Други задатак односи се на систем епрувета + чеп где је потребно применити и законе хоризонталног хица. У трећем задатку дат је систем две куглице и тражи се губитак кинетичке енергије у њиховом судару што захтева сложенији математички апарат.

- У тело масе  $1990\text{ g}$ , обешено за лаку неистегљиву нит, улеће метак масе  $10\text{ g}$  брзином  $400\text{ m/s}$  (слика 7.3.1). Коликом брзином ће кренути тело после судара ако метак остане у њему? До које максималне висине ће се након тога подићи тело?



Слика 7.3.1

Задате величине:  $M = 1990\text{ g}$ ,  $m = 10\text{ g}$ ,  $v = 400\frac{\text{m}}{\text{s}}$ .

Тражене величине:  $v_0$  брзина тела са метком непосредно након судара и максимална висина тела  $h$

Решење:

Нека је  $v$  брзина метка пре судара, а  $v_0$  брзина тела са метком непосредно након судара.

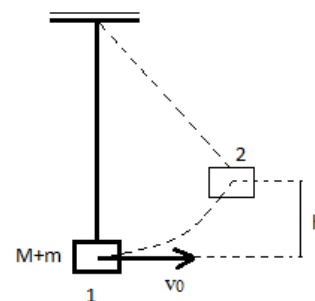
По закону одржања импулса је

$$mv = (M + m)v_0,$$

па је

$$v_0 = \frac{mv}{M+m} = 2\text{ m/s}.$$

За даље кретање тела може се применити закон одржања механичке енергије. За положаје 1 и 2 (слика 7.3.2) он даје



Слика 7.3.2

$$\frac{(M + m)v_0^2}{2} = (M + m)gh$$

Одатле се добија:

$$h = \frac{v_0^2}{2g} = 20\text{ cm}$$

Резултат: Тело после судара има брзину  $2\text{ m/s}$  и подиже се до висине од  $20\text{ cm}$ .

2. У епрувети масе  $15\text{ g}$  налази се занемарљиво мала маса воде која се загрева. Епрувета је обешена за нити о шипку и налази се на висини  $1\text{ m}$  од стола. Након довољно дугог загревања, чеп масе  $5\text{ g}$  излети из епрувете при чему се центар масе епрувете попне на висину  $3,5\text{ cm}$ . На ком растојању ће пасти чеп (од центра епрувете док је мировала)?

Задате величине:  $m_1 = 15\text{ g}, H = 1\text{ m}, m_2 = 5\text{ g}, h = 3,5\text{ cm}$

Тражене величине: растојање на ком ће чеп пасти  $l$

Решење:

Приликом загревања до одређене температуре, с обзиром да је запремина константна, нагло повећање притиска преко неке критичне вредности за дату запремину епрувете, избацује чеп из епрувете као из катапулта. На основу закона одржања импулса обзиром да је у почетном тренутку цео систем мировао импулси  $p_1$  (епрувете) и  $p_2$  (чепа) после катапултирања су једнаки, али обзиром на различите масе  $m_1$  и  $m_2$  њихове кинетичке енергије су различите:

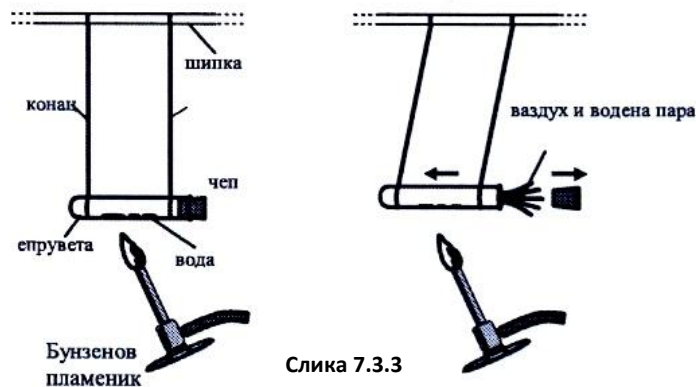
$$E_1 = \frac{p^2}{2m_1} \neq \frac{p^2}{2m_2} = E_2 \text{ у случају } m_1 \neq m_2 \text{ за } p^2 = p_1^2 = p_2^2$$

Брзина којом крене епрувета након излетања чепа је  $v_1 = \sqrt{2gh}$ .

Брзина којом излеће чеп добија се из закона одржања импулса  $m_1 v_1 = m_2 v_2$ .

Следи:

$$v_2 = \frac{m_1}{m_2} \sqrt{2gh}$$



Слика 7.3.3

Даље кретање чепа одвија се по законима хоризонталног хица:

$$H = \frac{gt^2}{2} \text{ одакле је } t = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

$$l = v_2 t \text{ па је } l = v_2 \sqrt{\frac{2H}{g}} = 2 \frac{m_1}{m_2} \sqrt{hH} = 1,12\text{ m}$$

Резултат: Чеп ће пасти на растојању  $1,12\text{ m}$

3. Две куглице од пластелина, чије се масе односе као 1:3, обешене су за неистегљиве вертикалне нити истих дужина и постављене тако да се додирују. Нити се симетрично отклоне од вертикале и пусте. До које висине ће стићи куглице ако се при судару залепе једна за другу? Колики део кинетичке енергије се изгубио у судару?

Задате величине:  $m_1 = 3m_2$  - однос маса две куглице

Тражене величине: висина до које ће доћи куглице после судара  $H$ , губитак кинетичке енергије  $\Delta E_k$

Решење:

Ако се куглице пусте са висине  $h$ , непосредно пре судара имаће исте брзине које се могу одредити помоћу закона одржања енергије:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} \text{ тј. } v = \sqrt{2gh}$$

За судар важи закон одржања импулса:

$$m_1v - m_2v = (m_1 + m_2)u$$

Како је  $m_1 = 3m_2$ , добија се  $u = \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}\sqrt{2gh}$

Максимална висина до које ће стићи куглице после судара је  $H = \frac{u^2}{2g} = \frac{1}{4}h$

Пре судара кинетичка енергија куглица је:

$$E_1 = \frac{m_1v^2}{2} + \frac{m_2v^2}{2} = (m_1 + m_2)gh$$

После судара кинетичка енергија је:

$$E_2 = \frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = \frac{1}{4}(m_1 + m_2)gh$$

Губитак енергије у судару је:

$$\Delta E_k = E_1 - E_2 = \frac{3}{4}(m_1 + m_2)gh = \frac{3}{4}E_1$$

Резултат: Ако се куглице пусте са висине  $h$  после судара ће стићи до висине  $\frac{1}{4}h$ . У судару се изгуби 75% кинетичке енергије (претвори се у топлоту).

- У последња три задатка примењује се закон одржања импулса при чему је у сваком наредном задатку сложенији систем. У првом разматра се кретање човека и колица, у другом човека и чамца а у трећем два човека и чамца.
4. Колица масе 40 kg на којима стоји човек масе 70 kg мирују на подлози. Човек крене по колицима брзином 1 m/s (у односу на подлогу). Коликом брзином ће поћи колица?

Задате величине:  $m_2 = 40\text{ kg}$ ,  $m_1 = 70\text{ kg}$ ,  $v_1 = 1\text{ m/s}$

Тражене величине: брзина којом ће поћи колица –  $v_2$

Решење:

У почетном тренутку колица и човек мирују па је укупан импулс система једнак нули. Када човек почне да се креће по колицима он има импулс  $\vec{p}_1$ , а колица се крећу и имају импулс  $\vec{p}_2$ .

На основу закона одржања импулса укупан импулс система у току кретања мора бити једнак укупном импулсу у мировању:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = 0$$

Одакле следи:  $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$  тј. импулси човека и колица имају исти правац и интензитет, а супротан смер.

Интензитет брзине колица добија се из  $m_1 v_1 = m_2 v_2$  одакле добија се  $v_2 = \frac{m_1 v_1}{m_2}$

Убацивањем бројних вредности, добија се:

$$v_2 = \frac{70\text{ kg} \cdot 1\text{ m/s}}{40\text{ kg}} = 1,75\text{ m/s}$$

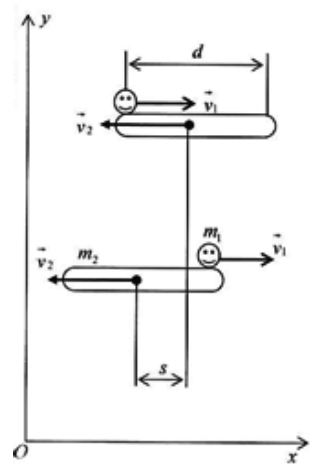
Резултат: брзина којом ће поћи колица је  $1,75\text{ m/s}$ .

5. Чамац стоји у мирној води. Човек, који се налази на чамцу, пређе са крме на прамац чамца. За колико се тада помери чамац? Маса човека је  $60\text{ kg}$ , маса чамца  $120\text{ kg}$ , а дужина чамца  $3\text{ m}$ . Отпор воде се може занемарити.

Задате величине:  $m_1 = 60\text{ kg}$ ,  $m_2 = 120\text{ kg}$ ,  $d = 3\text{ m}$

Тражене величине:  $s$  – растојање за које се чамац помери

Решење:



Слика 7.3.4

Непокретни координатни систем веже се за воду, а покретни за чамац (слика 7.3.4).

Нека је  $\vec{v}_1$  – брзина човека у односу на воду,  $\vec{v}_2$  – брзина чамца у односу на воду,  $d$  – растојање од крме до прамца.

Тада је, сагласно закону одржања импулса:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0.$$

Са  $t$  се означи време за које човек пређе са крме на прамац, а са  $\vec{V}$  – брзину човека у односу на чамац.

Тада је:  $V = \frac{d}{t}$  и  $v_2 = \frac{s}{t}$ , где је  $s$  — растојање за које се чамац помери за време  $t$ .

Према закону слагања брзина, брзина тела у односу на непокретни систем ( $\vec{v}_1$ ) једнака је збиру брзине тела у односу на покретни систем ( $\vec{V}$ ) и брзине покретног у односу на непокретни систем ( $\vec{v}_2$ ), па је:

$$\vec{v}_1 = \vec{V} + \vec{v}_2, \text{ тј. } v_1 = V - v_2$$

$$v_1 = \frac{d}{t} - \frac{s}{t} = \frac{d-s}{t}.$$

Сада се једначина закона одржања импулса може написати у облику:  $\frac{m_1(d-s)}{t} - \frac{m_2s}{t} = 0$ .

Одавде је:  $s = \frac{m_1d}{m_1+m_2} = 1m$ .

Резултат: Чамац се помери за 1 m.

6. Рибловац, масе  $m_1$ , седи на прамцу, а други, масе  $m_2$ , на крми чамца. Чамац мирује наспред језера. Маса чамца је  $M$  а дужина му је  $l$ . За колико се помери чамац у односу на воду ако риболовци замене места?

Задате величине: маса првог риболовца  $m_1$ , маса другог риболовца  $m_2$ , маса чамца  $M$ , дужина чамца  $l$ .

Тражене величине: Померање чамца у односу на воду ако риболовци замене места  $\Delta l$ .

Решење:

Кад први риболовац пређе до крме, чамац се помери за  $\Delta l_1$ , а при преласку другог риболовца с крме на прамца, чамац се помери за  $\Delta l_2$  на супротну страну, па је резултујуће померање:

$$\Delta l = \Delta l_1 - \Delta l_2$$

Када први риболовац ( $m_1$ ) прелази до крме брзина којом се креће једнака је пређеном путу  $l - \Delta l_1$  у току времена  $t$ . При томе чамац и други риболовац ( $M + m_2$ ) прелазе пут  $\Delta l_1$  за време  $t$ .

На основу закона одржања импулса за  $\Delta l_1$  добија се:

$$m_1 \frac{l - \Delta l_1}{t} = (M + m_2) \frac{\Delta l_1}{t}$$
$$\Delta l_1 = \frac{m_1 l}{M + m_1 + m_2}$$

Када други риболовац ( $m_2$ ) прелази до прамца брзина којом се креће једнака је пређеном путу  $l - \Delta l_2$  у току времена  $t$ . При томе чамац и први риболовац ( $M + m_1$ ) прелазе пут  $\Delta l_2$  за време  $t$ .

Аналогно, за  $\Delta l_2$  добија се:

$$\Delta l_2 = \frac{m_2 l}{M + m_1 + m_2}$$

Резултујуће померање је:

$$\Delta l = \Delta l_1 - \Delta l_2 = \frac{(m_1 - m_2)l}{M + m_1 + m_2}$$

Резултат: Померање чамца у односу на воду ако риболовци замене места је  $\Delta l = \frac{(m_1 - m_2)l}{M + m_1 + m_2}$ .

## 8 ЗАКЉУЧАК

Циљ наставе физике се остварује у потпуности решавањем квалитативних и квантитативних задатака, експерименталних и графичких задатака.

При решавању квантитативних (рачунских) задатака из физике, у задатку прво треба на прави начин сагледати физичке садржаје, па тек после тога прећи на математичко формулисање и израчунавање.

Методска упутства за решавање рачунских задатака могу се поделити у три етапе: физичка анализа задатка, математичко израчунавање и дискусија резултата.

У првој етапи уочавају се физичке појаве на које се односи задатак, а затим се набрајају и речима исказују закони по којима се појаве одвијају. У другој етапи се, на основу математичке форме закона, израчунава вредност тражене величине. У трећој етапи тражи се физичко тумачење добијеног резултата.

Правилан избор задатака је од великог значаја у наставном процесу физике. Потребно је водити рачуна о редоследу задатака који се презентују ученицима, кренути од најлакших примера, очигледних и по могућности свима добро познатих ствари, и ићи ка сложенијим примерима и проблемским задацима. На тај начин се теорија може много боље савладати, знања ученика су трајнија, а код ученика се развија логика, креативност и способност примене стеченог знања.

Успех извођења наставе физике зависи од тога колико су стечена знања применљива. Да би се у физици стекло применљиво, а самим тим и трајније, знање потребно је познавање физичких објеката, појава и њихових закона, али су потребне и посебне припреме и увежбавања што се постиже решавањем задатака. Управо, због великог значаја задатака у настави физике, без којих се наставни процес не може замислити, учење методологије решавања задатака је један од основних задатака сваког наставника у школи.

Да би се код ученика повећало интересовање за физику, једна од идеја је и да се текстови задатака прилагоде свакодневним и актуелним догађањима.

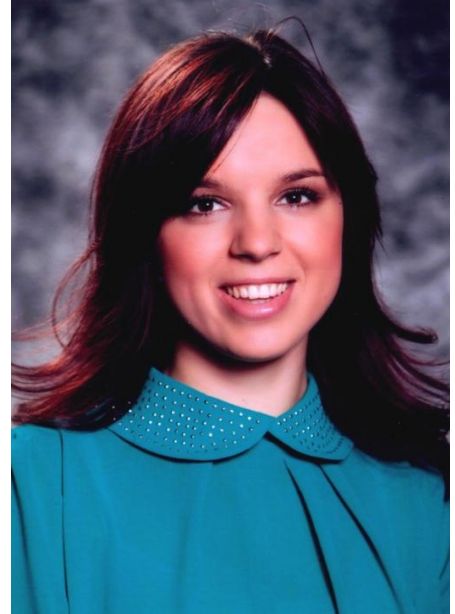


## 9 ЛИТЕРАТУРА

1. Наташа Чалуковић, *Физика за први разред гимназије*, Круг Београд, 2011
2. Наташа Чалуковић, *Збирка задатака и тестова за први разред гимназије*, Круг Београд, 2010
3. Милан О. Распоповић, *Физика за први разред гимназије*, Завод за уџбенике и наставна средства Београд, 2004
4. Милан Распоповић, Светозар Божин, Иван Васиљевић, Емило Даниловић, *Приручник из физике са збирком задатака и лабораторијским вежбама за први разред гимназије*, Завод за уџбенике и наставна средства Београд, 1994
5. др Слободан Попов, др Стипан Јукић, *Педагогија*, Нови Сад, 2006
6. др Томислав Петровић, *Дидактика физике – теорија наставе физике*, Београд, 1994.
7. Милан О. Распоповић, *Методика наставе физике*, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, 1992
8. др Душанка Ж. Обадовић, *Једноставни експерименти у настави физике*, Нови Сад, 2006/2007
9. др Душанка Ж. Обадовић, И.Ранчић, *Једноставни експерименти за предмет савремене методе у настави физике*, ауторизована скрипта, Нови Сад, 2011/2012
10. Мр Весна Дринчић, *Рачунске вежбе из физике – скрипта*, Студент Београд, 2010
11. <http://www.scribd.com/doc/114192568/Fizika-knjiga>

## БИОГРАФИЈА

Милка Веселиновић, рођена 14.07.1989. године у Прокупљу. У Новом Саду завршава основну школу „Коста Трифковић“ и гимназију „Јован Јовановић Змај“ (смер природно – математички). Носилац је Вукове дипломе. 2008. године уписује основне академске студије на Природно – математичком факултету у Новом Саду, Департману за физику (смер професор физике). 2011. године добија стипендију „Доситеја“ Фонда за младе таленте Републике Србије. Звање дипломирани професор физике стиче 2012. године. Исте године уписује мастер академске студије, на Природно – математичком факултету у Новом Саду (смер професор физике). 2013. године учествује у међународном *High school teachers* програму у ЦЕРН-у, у Швајцарској. Од 2012. године ради као професор физике у гимназији “Јован Јовановић Змај” у Новом Саду.



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ  
ПРИРОДНО - МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

**КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА**

*Редни број:*

**РБР**

*Идентификациони број:*

**ИБР**

*Тип документације:*

Монографска документација

**ТД**

*Тип записа:*

Текстуални штампани материјал

**ТЗ**

*Врста рада:*

Мастер рад

**ВР**

*Аутор:*

Милка Веселиновић

**АУ**

*Ментор:*

проф. др Маја Стојановић

**МН**

*Наслов рада:*

Решавање рачунских задатака при обради наставне теме „Закони одржања у механици“

**НР**

*Језик публикације:*

Српски (ћирилица)

**ЈП**

*Језик извода:*

српски/енглески

**ЈИ**

*Земља публикавања:*

Србија

**ЗП**

*Уже географско подручје:*

Војводина

**УГП**

*Година:*

2013

**ГО**

*Издавач:*

Ауторски репринт

**ИЗ**

*Место и адреса:*

Природно-математички факултет, Трг Доситеја Обрадовића 4  
Нови Сад

**МА**

*Физички опис рада:*

9/72/11/1/48/0/0

**ФО**

*Научна област:*

Физика

**НО**

*Научна дисциплина:*

Методика решавања рачунских задатака

**НД**

*Предметна одредница/кључне речи:*

енергија, импулс, момент импулса, одржање

**ПО**

**УДК**

*Чува се:*

Библиотека департмана за физику, ПМФ–а у Новом Саду

**ЧУ**

*Важна напомена:*

**ВН**

*Извод:*

**ИЗ**

нема

У раду је извршена класификација задатака и дат је општи методички пут за њихово решавање. Такође је дат теоријски увод за област „Закони одржања у механици“. Наведени су примери решених задатака из ове области који у оквиру одговарајуће класификације илуструју доследно спровођење правила решавања задатака. Указано је на значај задатака у настави и због чега је учење методологије решавања задатака један од основних задатака сваког наставника у школи.

*Датум прихватања теме од стране НН већа:* 18.10.2013.

**ДП**

*Датум одбране:*

25.10.2013.

**ДО**

*Чланови комисије:*

**КО**

*Председник:*

*Члан:*

*Члан:*

др Душан Мрђа, ванредни професор

др Маја Стојановић, ванредни професор

др Соња Скубан, ванредни професор

UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF SCIENCE KEY

**WORDS DOCUMENTATION**

*Accession number:*

**ANO**

*Identification umber:*

**INO**

*Document type:*

Monograph type

**DT**

*Type of record:*

Printed text

**TR**

*Contents Code:*

Master's thesis

**CC**

*Author:*

Milka Veselinović

**AU**

*Mentor:*

dr Maja Stojanović

**MN**

*Title:*

Problem solving in the treatment of the teaching theme "Energy  
Conversation in mechanics"

**XI**

*Language of text:*

Serbian (cyrillic)

**LT**

*Language of abstract:*

English

**LA**

*Country of publication:*

Serbia

**CP**

*Locality of publication:*

Vojvodina

**LP**

*Publication year:*

2013

**PY**

*Publisher:*

Author's reprint

**PU**

*Publication place:*

Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4,  
Novi Sad

**PP**

*Physical description:*

9/72/11/1/48/0/0

**PD**

*Scientific field:*

Physics

**SF**

*Scientific discipline:*

Methodology of solving arithmetic  
problems

**SD**

*Subject/key words:*

energy, momentum, angular momentum, conservation

**SKW**

**UC**

*Holding data:*

**HD**

*Note:*

**N**

*Abstract:*

**AB**

Library od Department od Physics, Trg Dositeja Obradovića 4

None

This paper presents a classification of problems and provides an overall methodical way to solve them. It also provides a theoretical introduction to the field of "Laws in the mechanics." There are also examples of solved problems in this area which in the appropriate classification illustrate the consistent implementation of rules for solving problems. The significance of solving problems is big and that's why learning Methodology of solving arithmetic problems is one of the main tasks for every teacher in school.

*Accepted by the Scientific Board on:*

18.10.2013.

**ASB**

*Defended on:*

25.10.2013.

**DE**

*Thesis defend board:*

**DB**

*President:*

dr Dušan Mrđa, associate professor

*Member:*

dr Maja Stojanović, associate professor

*Member:*

dr Sonja Skuban, associate professor