UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
GRUPA: FIZIKA

DIPLOMSKI RAD

HAJZENBERGOV FEROMAGNETIK NA NISKIM TEMPERATURAMA

MENTOR

TOŠIĆ DR. BRATISLAV

KANDIDAT

SAVIĆ MILICA

NOVI SAD 1973

Ocena rada 10 (deset).

Ocena na usmenoj odbrani 9 (devet

Ukupna ocena 9 (devet)

N. Sad, 13. X 1973.

Komisija za odbranu:

[illegible]

[illegible]

[illegible]

ZAHVALJUJEM SE TOŠIĆ
DR. BRATISLAVU NA POMOĆI
PRI IZBORU TEME I PISANJU
RADA.

SADRŽAJ

UVOD 1

I GLAVA

PREGLED NAJVAŽNIJIH TEORIJA ZA HAJZENBERGOV FEROMAGNETIK NA NISKIM TEMPERATURAMA

1. OPŠTE O MAGNETIZMU 3
2. BLOHOVA TEORIJA ZA OPŠTI SPIN 9
3. DAJSONOVA TEORIJA ZA OPŠTI SPIN 13
4. REZULTATI TJABLIKOVA 19

II GLAVA

KOREKCIJA DAJSONOVOG REZULTATA ZA MAGNETIZACIJU

1. DOBIJANJE DAJSONOVOG REZULTATA ZA $S=\frac{1}{2}$ POMOĆU EGZAKTNE BOZONSKE REPREZENTACIJE. 26
2. KOREKCIJA ZAKONA DISPERZIJE ZA MAGNETIKE 34
3. MAGNETIZACIJA SA TAČNOŠĆU DO $T^{13/2}$. 43
4. UTICAJ KOREKCIJE NA VELIČINU TAČKE PRELAZA 48

ZAKLJUČAK. 52
LITERATURA 53

UVOD

Analizi Hajzenbergovog feromagnetika posvećeno je u literaturi mnogo pažnje i to manje zbog toga što ovaj model odgovara realnoj situaciji, a više zbog nekih metodoloških pitanja koja ni do danas nisu rešena na sasvim zadovoljavajući način.

Osnovni problem sastoji se u tome što spinski operatori ne zadovoljavaju ni bozonske ni fermionske komutacione relacije, već neke treće koje su, grubo govoreći, sredina izmedju jednih i drugih. Pošto je u kristalnoj rešetci neobhodno izvršiti prelaz iz dieektne u recipročnu, a to se vrši Furie transformacijom operatora, prva teškoća nastaje zbog toga što komutacione relacije za spinske operatore nisu invarijantne u odnosu na Furie transformacije. Kao što je poznato u odnosu na ovu transformaciju invarijantne su jedino bozonske i fermionske relacije.

Na ovu teškoću nadovezuje se još jedna a to je problem statistike i spinskih operatora i njihovih Furie likova. Ovaj drugi problem može se u principu rešiti poznavanjem spektralne intenzivnosti spinskih funkcija Grina, ali s obzirom da rešavanje problema spektralne intenzivnosti u praksi uvek zahteva neku aproksimaciju, očigledno je da će tačnost statističkih formula dobijenih ovim putem zavisiti od tačnosti aproksimacije. Ove aproksimacije, koje se sastoje u dekuplovanju lanca jednačina za funkciju Grina do sada su vršene na dosta proizvoljan način i otuda ima u literaturi veoma mnogo različitih teorija za termodinamičke ponašanje Hajzenbergovog feromagneta.

Do sada je jedinu pouzdanu teoriju dao Dajson 1956 godine. Ova teorija medjutim važi u domenu niskih temperatura i to sa tačnošću do $\tau^{3/2}$ pri čemu je τ odnos date temperature i kritične temperature (feromagnetika). Treba napomenuti da je Dajsonov prilaz veoma glomazan i matematički komplikovan i, što je još važnije nije jasno kako bi se on mogao proširiti u pravcu viših temperatura.

Zvog toga je cilj ovog rada da nekom jednostavnijom procedurom nego što je Dajsonova pokažemo pre svega da njegov rezultat važi i da zatim proširimo račun u pravcu viših temperatura tj. da damo tačnu teoriju termodinamičkih katakteristika feromagnetika i za više stepene od $\tau^{3/2}$. Ovo je značajno iz dva razloga od kojih je prvi čisto metodološki-kako povišavati stepen tačnosti Dajsonovog rezultata u smeru viših temperatura, a drugi ima praktičniji značaj i to taj da se na osnovu tačnog metoda oceni veličina kritične tačke u funkciji integrala izmene. Ovde se radi o tome da na osnovu tačnog rezultata za neki interval niskih temperatura poredjenjem sa manje tačnim rezultatima, ali koji važe sve do tačke prelasa, nadjemo kojoj graničnoj vrednosti teži stvarna kritična tačka.

U ovom radu razmatraće se feromagnetik sa spinom $\frac{1}{2}$ jer u ovom slučaju matematičke komplikacije su najmanje, ali treba napomenuti da se na analogan način bez principijelnih teškoća može analizirati i feromagnetik sa proizvoljnim spinom.

I GLAVA

PREGLED NAJVAŽNIJIH TEORIJA ZA HAJZENBERGOV FEROMAGNET NA NISKIM TEMPERATURAMA

§ 1. OPŠTE O MAGNETIZMU

Čvrsta tela se u odnosu na svoja magnetna svojstva mogu podeliti na slabo magnetna (dijamagnetici i paramagnetici) i jako magnetna (feromagnetici, antiferomagnetici i ferimagnetici).

Za jako magnetne materijale karakteristična je pojava, pri odredjenim uslovima, magnetnog uredjenja u materijalu i kao posledica ovoga pojava velikog makroskopskog momenta u uzorku.

Uzrok pojave magnetizma u čvrstim telima je postojanje nepopunjenih unutrašnjih ljuski u atomima. Jak magnetizam opaža se samo u slučajevima kada u sastav kristalne rešetke ulaze atomi sa nepopunjenim unutrašnjim ljuskama.

Nepopunjene unutrašnje ljuske imaju elementi prelaznih grupa: gvoždja ($3d$ - ljuska), paladijuma ($4d$ - ljuska), platine ($5d$- ljuska), aktinijuma ($6d$ i $5f$ - ljuske) i elementi retkih zemalja ($4f$ - ljuska). Postojanje atoma sa nepopunjenim unutrašnjim ljuskama nije dovoljan uslov postojanja jakog magnetizma.

Magnetna svojstva materije zavise od rasporeda gustine elektrona nepopunjenih unutrašnjih ljuski i gustine provodnih elektrona u kristalnoj rešetki. Ali savremeno stanje teorije ne dozvoljava da formulišemo neophodne i dovoljne uslove postojanja u datoj materiji jakog magnetizma na osnovu poznavanja elektronske konfiguracije slobodnih atoma, koji sačinjavaju kristalnu rešetku razmatranog materijala.

Magnetni momenat uzorka sastoji se od sopstvenih magnetnih momenata atomskih elektrona i orbitalnih momenata. Magnetomehanički odnos g' u jedinicama $\frac{e}{2mc}$ jednak je 2 za sopstvene momente elektrona i 1 za orbitalne momente.

Rezultati merenja daju za g' vrednosti bliske vrednostima za g' slobodnih elektrona.

Iz rezultata merenja može se zaključiti da se magnetni momenti jako magnetnih materijala slažu u osnovnom sa magnetnim momentom elektrona nepopunjenih ljuski i da orbitalni momenti tih elektrona ne daju primetan doprinos.

Pretpostavlja se da se makroskopski magnetni momenat pojavljuje zbog spinskog uredjenja elektrona nepopunjene atomske ljuske. Uzrok pojave uredjenja je uzejamno dejstvo izmedju elektrona.

Tu pretpostavku prvi put su formulisali Frenkel i Hajzenberg (1928), i ona je osnova savremene kvantne teorije jakog magnetizma.

Uredjenje spinova je proizvoljno ako je temperatura niža od neke kritične. Magnetni momenat po jedinici zapremine, koji se pri tom javlja zove se spontana magnetizacija.

Veličina spontane magnetizacije zavisi od temperature i skoro ne zavisi od veličine spoljašnjeg polja. Najveća teorijski dozvoljena vrednost magnetizacije zove se magnetizacija zasićenja. Pojava jakog magnetizma u materijalima povezana je sa postojanjem kristalne rešetke. Pri datoj orijentaciji kristala magnetne karakteristike zavise od toga u kom pravcu se mere, tj. magnetni materijali imaju magnetno-kristalografsku anizotropiju.

Relativna orijentacija spinova elektrona susednih atoma odredjuje se karakterom uzajamnog dejstva izmedju elektrona. Kulanovsko uzejamno dejstvo izmedju elektrona može obezbediti pojavu uredjenosti po uzejamnom rasporedu spinova, ali se pravac njihove opšte orijentacije pri tom ne fiksira. Spin-spinsko i spin-orbitalno uzejamno dejstvo smanjuje u znatnoj meri tu degeneraciju. Kao rezultat, u kristalografskim rešetkama postoji svega nekoliko pravaca, koji raspolažu svojstvom, da termodinamički potencijal bude minimalan pri orijentaciji spinova u jednom od tih pravaca, koji se nazivaju pravci lake magnetizacije.

U proizvoljnom monokristalnom uzorku u odsustvu spoljašnjeg polja spinovi se mogu rasporediti duž bilo koje od osa lake magnetizacije. Kao energetski najpogodniji pokazuje se slučaj kada se monokristal razbija na niz oblasti u svakoj od kojih su spinovi orijentisani na svoj način. Te oblasti monokristala zovu se domeni. Veličina domena, njihov oblik i medjusoban položaj odredjeni su uslovima minimuma termodinamičkog potencijala sistema.

Pri definisanim uslovima ponašanje elektrona nepopunjenih ljuski može se opisati kao ponašanje sistema spinova, rasporedjenih u čvorovima rešetki. Koeficijent proporcionalnosti koji odredjuje intenzivnost uzejamnog dejstva medju spinovima raznih čvorova naziva se integral izmene. Smatra se da je po redu veličine integral izmene I jednak energiji izmene elektrona odgovarajućih čvorova.

Ako je μ - magnetni momenat atoma, a N - broj atoma u rešetki, tada je magnetizacija zasićena jednaka.

$$M_0 = N\mu$$

Merenja uvek daju za magnetizaciju uzorka $M < M_0$. To dolazi usled razmagnetišućeg uticaja temperaturnih oscilovanja spinskih momenata atoma, magnetno kristalografske anizotropije i uticaja krajeva uzorka.

Ako se uzorak stavi u spoljašnje magnetno polje H magnetizacija će rasti sa porastom polja. Veličina

$$\chi(H)=\frac{\partial M}{\partial H}$$

se naziva magnetna susceptibilnost. Sa porastom polja magnetni momenti skreću sa pravca ose lake magnetizacije k pravcu polja, i pri nekoj vrednosti H svi su orijentisani u pravcu polja. Dalje povećanje M sa porastom H povezano je sa prigušenjem toplotnih oscilacija spinskih momenata spoljašnjim poljem. Pri tome susceptibilnost se smanjuje sa porastom polja i pri $H\to\infty$ susceptibilnost teži nuli, a magnetizacija dostiže zasićenje.

Uredjen raspored spinova narušava se pri nekoj kritičnoj temperaturi, koju zovemo Kirijeva temperatura za feromagnetike i Neelova temperatura za antiferomagnetike. To su temperature pri kojima srednja toplotna energija postaje jednaka energiji izmenskog uzejamnog dejstva. Za tipične feromagnetike Kirijeva temperatura je reda 10^3 °K ili $kT_c\sim 10^{-13}$ erga. Energija izmenskog uzejamnog dejstva I je reda $\frac{e^2}{a}$, gde su e - naelektrisanje elektrona, a - konstanta rešetke (2-3Å), pa je $I\sim 10^{-12}$ - 10^{-13} erga. Vidimo da se ove dve procene slažu po redu veličine.

Niže će biti date osnovne karakteristike pojedinih klasa magnetika.

DIJAMAGNETICI

U grupu dijamagnetika spadaju materije sa negativnom susceptibilnošću $(\chi<0)$. Veličina susceptibilnosti je veoma mala $(\sim 10^{-6})$. Karakteristična je osobina da su njegovi atomi ili molekuli lišeni rezultujućeg magnetnog momenta.

Uzrok dijamagnetnog svojstva materije je efekat elektromagnetne indukcije elementarnih molekulskih struja, izazavanih u atomskim elektronskim ljuskama spoljašnjim magnetnim poljem. Za to je pojava dijamagnetizma univerzalna i prisutna u svim telima bez izuzetka. Ali u mnogim slučajevima ona se ne opaža jer se slab dijamagnetni efekat može maskirati jačim paramagnetnim.

Dijamagnetizam se lako opaža u svim slučajevima, kada atomi, joni ili molekuli nemaju rezultujući magnetni momenat, tj. nalaze se u S_0 ili Σ_0 - stanjima. U prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja oni gube svoju magnetnu neutralnost.

Tipični predstavnici su: inertni gasovi, skoro sva organska jedinjenja i nih soli.

PARAMAGNETICI

U grupu paramagnetika spadaju materijali sa pozitivnom susceptibilnošću $(\chi>0)$, čija je veličina takodje mala $(10^{-3}-10^{-6})$.

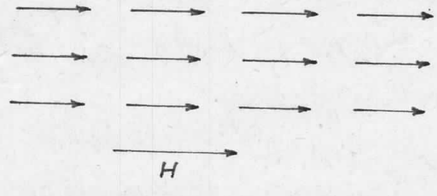
Kao karakteristično i neophodno obeležje paramagnetnog stanja javlja se postojanje, u atomima koji obrazuju materiju, stalnih magnetnih momenata nezavisnih od prisustva spoljašnjeg magnetnog polja. Ali, u opštem slučaju, u odsustvu spoljašnjeg magnetnog polja dezorijentišuće dejstvo toplotnog kretanja, ne dozvoljava obrazovanje spontane uredjene orijentacije tih konstantnih atomskim magnetnih momenata.

U paramagneticima pri spoljašnjem polju jednakim nuli rezultujuća magnetizacija tela uvek je jednaka nuli. Magnetizacija se pojavljuje i počinje da raste s uključenjem i porastom spoljašnjeg magnetnog polja. Ako polje nije jako veliko, magnetizacija raste upravo proporcionalno spoljašnjem magnetnom polju, a susceptibilnost χ ne zavisi od spoljašnjeg magnetnog polja, ali jako zavisi od temperature.

Tipični predstavnici paramagnetika su: gasovi, čiji atomi ili molekuli imaju nekompenzovan magnetni momenat (O_2, NO), niz soli retkih zemalja i elementi iz grupe gvoždja, alkalni metali i td.

FEROMAGNETICI

U feromagnetnim materijalima, pri temperaturama manjim od Kirijeve temperature, svi su spinovi u srednjem orijentisani paralelno, usled čega u materijalu postoji veliki spontani magnetni momenat. U spoljašnjem magnetnom polju matnetni monenti atoma su orijentisani u pravcu polja. U odsustvu spoljašnjeg polja pravac rezultujućeg mognetnog momenta M nije odredjen. Ali, pošto uvek postoji slaba anizotropija vektor M upravljen je duž jedne od osa lake magnetizacije.



Sa povišenjem temperature spontana magnetizacija se smanjuje i pri Kirijevoj temperaturu T_c u odsustvu spoljašnjeg polja iščezava.

Na $T \gg T_c$ feromagnetnik se ponaša kao paramagnetik. U okolini Kirijeve tačke $T \ll T_c$ spontano magnetizacija zavisi od temperature na sledeći način

$$M(T) \cong const \sqrt{1-\frac{T}{T_c}}$$

a pri $T \to 0$

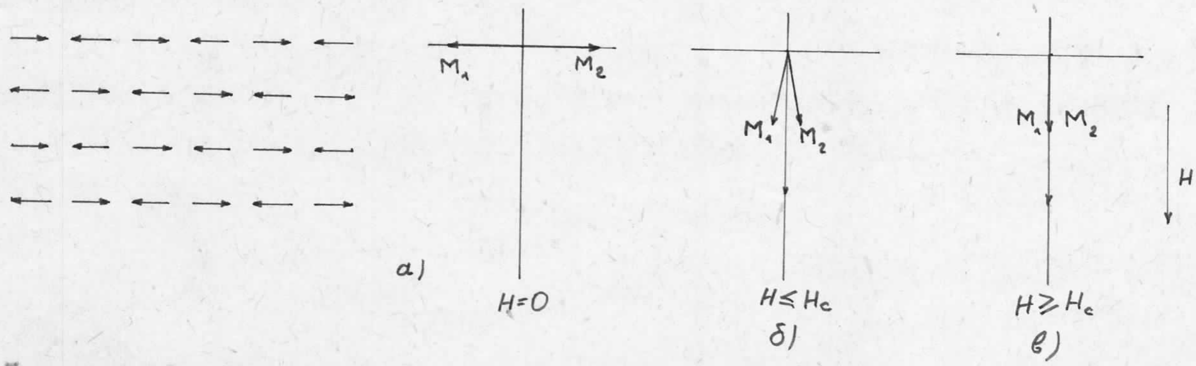
$$M(T) = M_0\left(1 - A_1 T^{3/2} - A_2 T^{5/2} - \dots\right)$$

gde su A neke konstantne, a M_o - magnetizacija zasićenja.

Tipični predstavnici feromagnetika su prelazni elementi: gvoždje, kobalt i nikal.

ANTIFEROMAGNETICI

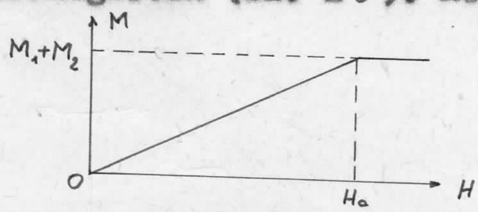
Prema hipotezi Neela antiferomagnetni raspored sponova možemo predstaviti kao skup dveju ili nekoliko feromagnetnih podrešetki, stavljenih jedne u drugu, pri čemu rezultujući momenat svih podrešetki mora biti nula. Radi jednostavnosti, posmatramo antiferomagnetik sa dve podrešetke (sl. 2.)



sl. 2. Šematski prikaz rasporeda spinova u izotropnom antiferomagnetiku

a-u odsustvu spoljašnjeg polja: б - u "slabim" poljima;
в - u jakim poljima.

H_c je neko kritično polje. Prikazujemo momente podrešetki orijentisane "na levo" i "na desno" vektorima M_1 i M_2 $(|M_1| = |M_2|)$. Pri $H=0$ rezultujuća magnetizacija je nula. Pri $H \leq H_c$ magnetni momenti su odredjeni kao na sl. 2 б. U intervalu $0 \leq H \leq H_c$ rezultujuća magnetizacija orijentisana je duž polja, a natiferomagnetik se ponaša kao feromagnetik (sl. 2 в). Rezultujuma magnetizacija u zavisnosti od veličine spoljašnjeg polja ponaša se kao na sl. 3.



Sl. 3

Pri povišenju temperature magnegizazacija podrešetki slabi i teži nuli pri temperaturi T_N (pri $H=0$).

Predstavnici antiferomagnetika su: prelazni elementi i njihove soli.

Pored ovih antiferomagnetika postoje i antiferomagnetici sa slabim feromagnetizmom.

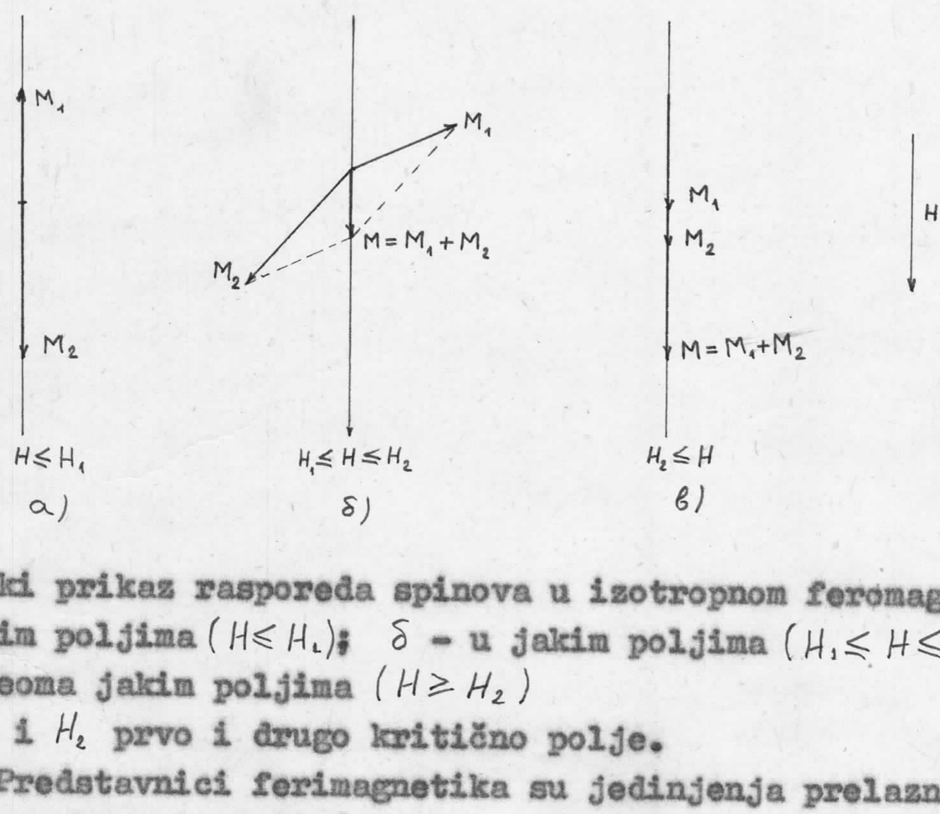
U tu grupu spadaju antiferomagnetici kod kojih zbog anizotropije magnetni momenti podrešetki nisu strogo antiparalelni, nego su zakrenuti za neki mali ugao ($\sim 1°$). Zbog nepotpune kompenzacije magnetnih momenata kod njih se opaža spontana magnetizacija. Njihovi predstavnici su: α-Fe_2O_3, $MnCO_3$, $CoCO_3$, $CuSO_4$, NiF_2, MnF_2

i td.

FERIMAGNETICI

Za ferimagnetike je karakteristično postojanje nekoliko podrešetki sa rezultujućim momentom različitim od nule, uporedivim po veličini sa spontanim momentom podrešetki. Rezultujući momenat može poticati zbog različitog broja "levih" i "desnih" čvorova i veličine spinova u njima, kao i zbog nekolinearnog rasporeda momenata podrešetki.

Pri ispitivanju ferimagnetika u spoljašnjem magnetnom polju radi jednostavnosti uzećemo da postoje samo dve podrešetke sa rezultujućim momentima M_1 i M_2 $(|M_1| < |M_2|)$, i zanemarićemo magnetnu anizotropiju. Tada u zavisnosti od jačine spoljašnjeg magnetnog polja imamo jedan od slučajeva prikazanih na slici 4.



sl. 4 Šematski prikaz rasporeda spinova u izotropnom feromagnetiku a. u slabim poljima $(H \leq H_1)$; б - u jakim poljima $(H_1 \leq H \leq H_2)$; в - u veoma jakim poljima $(H \geq H_2)$ gde su H_1 i H_2 prvo i drugo kritično polje.

Predstavnici ferimagnetika su jedinjenja prelaznih elemenata tipa kompleksnih soli ($MnO \cdot Fe_2O_3$; $3Y_2O_3 \cdot 5Fe_2O_3$) i neki drugi.

§ 2. BLOHOVA TEORIJA ZA OPŠTI SPIN

Pobudjena stanja magnetika okarakterisana su razlikom $(S-\hat{S}^z_{\vec{f}})$, gde je S maksimalna vrednost projekcije spina. A hamiltonijan ima oblik

$$H=-\sum_{\vec{f}} \mu_{\vec{f}} \mathcal{H} \hat{S}^z_{\vec{f}} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{f}_1\neq\vec{f}_2} I(\vec{f}_1,\vec{f}_2)\left(\frac{1}{2}\hat{S}^+_{\vec{f}_1}\hat{S}^-_{\vec{f}_2}+\frac{1}{2}\hat{S}^-_{\vec{f}_1}\hat{S}^+_{\vec{f}_2}+\hat{S}^z_{\vec{f}_1}\hat{S}^z_{\vec{f}_2}\right) \qquad (1)$$

gde je: $\mathcal{H}$ - spoljašnje magnetno polje, $\mu_{\vec{f}}$ magnetni momenat lokalizovan u čvoru $\vec{f}$, $\vec{f}_1$ i $\vec{f}_2$ čvorovi rešetke, $I(\vec{f}_1,\vec{f}_2)$ - integral izmene za spinove koji su lokalizovani u čvorovima $\vec{f}_1$ i $\vec{f}_2$, $\hat{S}_{\vec{f}}$ - oznaka za operator spina lokalizovan u čvoru $\vec{f}$.

Ako se u ovom hamiltonijanu izdvoji energija osnovnog stanja, može se pisati u obliku:

$$H=-N\mu\mathcal{H}S-\frac{1}{2}NS^2J(0)+(\mu\mathcal{H}+SJ(0))\sum_{\vec{f}}(S-\hat{S}^z_{\vec{f}})-\frac{1}{2}\sum_{\vec{f}_1\neq\vec{f}_2} I(\vec{f}_1,\vec{f}_2)\hat{S}^-_{\vec{f}_1}\hat{S}^+_{\vec{f}_2}-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{\vec{f}_1\neq\vec{f}_2} I(\vec{f}_1,\vec{f}_2)(S-\hat{S}^z_{\vec{f}_1})(S-\hat{S}^z_{\vec{f}_2}) \qquad (2)$$

gde je

$$J(\vec{q})=\sum_{\vec{f}_1} I(\vec{f}_1,\vec{f}_2)\exp\{i\vec{q}(\vec{f}_1-\vec{f}_2)\} \qquad (3)$$

$\vec{q}$ - talasni vektor

Prvi sabirak u formuli (2) odgovara energiji osnovnog stanjak, dok ostali sabirci treba da odgovaraju energiji pobudjenog stanja. Ako otkloni spinova nisu veliki, tj. ako nije velika razlika izmedju stvarne sopstvene vrednosti operatora $\hat{S}^z_{\vec{f}}$ i maksimalne projekcije S, na osnovu komutacionih relacija imamo sledeće približne odnose

$$\hat{S}^+_{\vec{f}_1}\hat{S}^-_{\vec{f}_2}-\hat{S}^-_{\vec{f}_2}\hat{S}^+_{\vec{f}_1}\cong 2S\Delta(\vec{f}_1-\vec{f}_2) \qquad (4)$$

$$\hat{S}^\pm_{\vec{f}_1}(S-\hat{S}^z_{\vec{f}_2})-(S-\hat{S}^z_{\vec{f}_2})\hat{S}^\pm_{\vec{f}_1}=\pm\hat{S}^\pm_{\vec{f}_1}\Delta(\vec{f}_1-\vec{f}_2) \qquad (5)$$

Pri tome se operatori $\hat{S}^+_{\vec{f}_1}$, $\hat{S}^-_{\vec{f}}$ i $S-\hat{S}^z_{\vec{f}}$ ponašaju kao kreacioni i anihilacioni Boze operatori. Vidi se ako se uvedu novi operatori:

$$\hat{B}_{\vec{f}}=\frac{1}{\sqrt{2S}}\hat{S}^+_{\vec{f}}, \quad \hat{B}^+_{\vec{f}}=\frac{1}{\sqrt{2S}}\hat{S}^-_{\vec{f}}, \quad S-\hat{S}^z_{\vec{f}}=\hat{B}^+_{\vec{f}}\hat{B}_{\vec{f}}=\hat{n}_{\vec{f}} \qquad (6)$$

da operatori $\hat{B}_{\vec{f}}$ i $\hat{B}^+_{\vec{f}}$ zadovoljavaju iste komutacione relacije kao i Boze operatori. Pomoću ovih operatora hamiltonijan možemo napisati u obliku:

$$H=E_0+(\mu\mathcal{H}+SJ(0))\sum_{\vec{f}}\hat{n}_{\vec{f}}-\sum_{\vec{f}_1\neq\vec{f}_2} SI(\vec{f}_1,\vec{f}_2)\hat{B}^+_{\vec{f}_1}\hat{B}_{\vec{f}_2}-$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{\vec{f}_1\neq\vec{f}_2} I(\vec{f}_1,\vec{f}_2)\hat{B}^+_{\vec{f}_1}\hat{B}_{\vec{f}_1}\hat{B}^+_{\vec{f}_2}\hat{B}_{\vec{f}_2} \qquad (7)$$

Zamena sponskih operatora operatorima druge kvantizacije nije tako jednostavna kao što to izgleda na osnovu relacije (6). Jer, u slučaju spinskih operatora razlika ($S - \hat{S}^{z}_{\vec{f}}$), koja se izjednačuje s operatorom $\hat{n}_{\vec{f}}$, može imati samo $(2S+1)$ sopstvenu vrednost, dok operator $\hat{n}_{\vec{f}}$, u principu može imati beskonačno mnogo karakterističnih vrednosti. Ova činjenica predstavlja glavnu prepreku pri transformaciji spinskih operatora u operatore kreacije i anihilacije. Bez obzira kakve se transformacije upotrebe prvi sabirci kod tako dobijenih hamiltonijana su isti kao prva tri sabirka u izrazu (7) dok ostali deo hamiltonijana sadrži kvadratne i članove višeg reda po $\hat{B}^{+}_{\vec{f}}\hat{B}_{\vec{f}}$.

U Blohovoj linearnoj teoriji spinskih talasa odbacuju se svi članovi u hamiltonijanu koji su višeg reda po operatoru $\hat{B}^{+}_{\vec{f}}\hat{B}_{\vec{f}}$, tako da se razmatra samo

$$H=E_{\circ}+(\mu\mathcal{H}+SJ(0))\sum_{\vec{f}}\hat{n}_{\vec{f}}-\sum_{\vec{f}_1\neq\vec{f}_2}SI(\vec{f}_1,\vec{f}_2)\hat{B}^{+}_{\vec{f}_1}\vec{B}_{\vec{f}_2} \tag{8}$$

Mogu se naći novi operatori kreacije i anihilacije $\hat{\beta}^{+}_{\vec{q}}$ i $\hat{\beta}_{\vec{q}}$ koji dijagonalizuju hamiltonijan (8), tj. koji izražen preko njih ima oblik hamiltonijana idealnog gasa čestica:

$$H=E_{\circ}+\sum_{\vec{q}}\mathcal{E}(\vec{q})\hat{\beta}^{+}_{\vec{q}}\hat{\beta}_{\vec{q}} \tag{9}$$

Operator $\hat{\beta}^{+}_{\vec{q}}\hat{\beta}_{\vec{q}}$ ima smisao broja kvazičestica sa energijom $\mathcal{E}(\vec{q})$. Srednji broj ovih čestica dat je izrazom:

$$\langle\hat{n}_{\vec{q}}\rangle=\left(\exp\left(-\frac{1}{kT}\mathcal{E}(\vec{q})\right)-1\right)^{-1} \tag{1o}$$

Ako su niske temperature sistema, onda je srednja vrednost (1o) mala veličina. Pošto postoji odredjena veza izmedju $\hat{B}^{+}_{\vec{f}}$ i $\hat{B}_{\vec{f}}$ i $\hat{\beta}^{+}_{\vec{q}}$ i $\hat{\beta}_{\vec{q}}$ to indicira da bi i srednja vrednost $\hat{B}^{+}_{\vec{f}}\hat{B}_{\vec{f}}$ bila mala veličina, pa se odgovarajući članovi u hamiltonijanu mogu zanemariti. Iz (6) se vidi da ako je $\hat{n}_{\vec{f}}$ mala veli~~ka~~čina, onda nema opasnosti da će se zamenom spinskih operatora operatorima druge kvantizacije preći u ne fizička stanja kod kojih je $S-\hat{S}^{z}_{\vec{f}}>2S$ ili $\hat{n}_{\vec{f}}>2S$, što je realno nemoguće, jer je S maksimalna projekcija spina. Iz ovog zaključujemo da su navedene transformacije operatora dozvoljene pri niskim temperaturama sistema. Interpretacija spinskih talasa pomoću reprezentacije druge kvantizacije dozvoljene je uglavnom za male talasne vektore $\vec{q}$, odnosno za velike talasne dužine.

Hamiltonijan (8) dijagonalizuje se kanonskom transformacijom operatora:

$$\hat{B}_{\vec{f}}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{q}}e^{i\vec{f}\vec{q}}\hat{\beta}_{\vec{q}}\ ,\quad \hat{B}^{+}_{\vec{f}}=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{q}}e^{-i\vec{f}\vec{q}}\hat{\beta}^{+}_{\vec{q}} \tag{11}$$

gde se sumiranje vrši po svim vrednostima $\vec{q}$ koje pripadaju redukovanoj Briluenovoj zoni. Zamenom (11) u (8) dobijamo:

$$H = E_0 + \sum_{\vec{q}} \left[\mu \mathcal{H} + S\left(J(0) - J(\vec{q})\right)\right] \hat{\beta}^{+}_{\vec{q}} \hat{\beta}_{\vec{q}} \tag{12}$$

Izotropni feromagnetik se pri niskim temperaturama ponaša isto kao i idealan gas kvazičestica-bozona koje nose energiju

$$E(\vec{q}) = \mu \mathcal{H} + S\left(J(0) - J(\vec{q})\right)$$

U tom slučaju pri računanju makroskopskih karakteristika sistema možemo se koristiti formulama za idealan gas čestica. Tako slobodnu energiju sistema možemo računati po formuli:

$$F = E_0 + kT \sum_{\vec{q}} \ln\left(1 - e^{-\frac{1}{kT}E(\vec{q})}\right) \tag{13}$$

gde je k - Bolcmakova konstanta, a T - apsolutna temperatura.

Srednja magnetizacija sistema je data izrazom:

$$M = -\frac{\partial F}{\partial \mathcal{H}} = N\mu S - \sum_{\vec{q}} \frac{\partial E(\vec{q})}{\partial \mathcal{H}} \langle \hat{n}_{\vec{q}} \rangle = M_0\left(1 - \frac{1}{S} D_s\right) \tag{14}$$

gde je $M_0 = N\mu S$ takozvana magnetizacija zasićenja, a D_s je oznaka za veličinu:

$$D_s = \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \langle \hat{n}_{\vec{q}} \rangle \; , \; \langle \hat{n}_{\vec{q}} \rangle = \left(\exp\left\{\frac{E(\vec{q})}{kT}\right\} - 1 \right)^{-1} \tag{15}$$

Radi lakšeg računa prelazimo sa sumiranja po $\vec{q}$ na integraciju po $\vec{q}$ po poznatoj formuli:

$$\frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \langle \hat{n}_{\vec{q}} \rangle \longrightarrow \frac{v}{(2\pi)^3} \int \langle \hat{n}_{\vec{q}} \rangle \, d^3\vec{q} \tag{16}$$

gde je $v = \frac{V}{N}$ zapremina po jednom čvoru.

Pošto je $E(\vec{q}) \geq 0$, to za niske temperature $\exp\left(-\frac{1}{kT} E(\vec{q})\right)$ možemo razmatrati kao malu veličinu i izraz za D_s pisati u obliku:

$$D_s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v}{(2\pi)^3} \int e^{-\frac{n}{kT} E(\vec{q})} d^3\vec{q} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n}{kT}\mu \mathcal{H}} \frac{v}{(2\pi)^3} \int e^{-\frac{n}{kT} S J(0) \mathcal{E}_{\vec{q}}} d^3\vec{q} \tag{17}$$

Pri $kT = \Theta \to 0$ osnovni doprinos u magnetizaciji daju spinski talasi sa malim talasnim vektorima, pošto se uglavnom pobudjuju spinski talasi sa malom energijom. Zato možemo razložiti $E(\vec{q})$ u red po stepenima $\vec{q}$ i ograničiti se na članovima reda zaključno sa $\vec{q}^{\,2}$. Energija $E(\vec{q})$ je parna funkcija od $\vec{q}$ i razlaganje počinje sa članom $\vec{q}^{\,2}$.

$$E(\vec{q}) \cong \mu \mathcal{H} + \frac{1}{2} S J(0) \bar{\delta}^2 \vec{q}^{\,2}$$

$$\bar{\delta}^2 = \frac{\sum_{\vec{f}} \vec{f}^{\,2} I(\vec{f})}{\sum_{\vec{f}} I(\vec{f})} \; , \quad \left(J(0) = \sum_{\vec{f}} I(\vec{f}) \right) \tag{18}$$

Stavljajući (18) u (17) i proširujući integraciju na oblast svih vrednosti $\vec{q}$ lako je izračunati približan izraz:

$$D_S \cong \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{n}{\Theta}\mu\mathcal{H}} \frac{v}{(2\pi)^3} \int e^{-\frac{n}{6\Theta} S J(0) \bar{\delta}^2 q^2} d^3\vec{q} =$$

$$= \frac{v}{(\bar{\delta}^2)^{3/2}} \left(\frac{\Theta}{\frac{2\pi}{3} S J(0)} \right)^{3/2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\frac{n}{\Theta}\mu\mathcal{H}}}{n^{3/2}} \qquad (19)$$

gde je $\Theta = kT$.

Koristeći (19) izrazu (14) možemo dati sledeći oblik:

$$\sigma_S = 1 - S^{-1} D_S \cong 1 - \frac{S^{-1} v}{(\bar{\delta}^2)^{3/2}} \left(\frac{\Theta}{\frac{2\pi}{3} S J(0)} \right)^{3/2} Z_{3/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right) \qquad (20)$$

gde je $\sigma_S = \frac{M}{M_0}$ magnetizacija po jednom čvoru i pri $\mathcal{H} = 0$ dobija oblik

$$\sigma_S = 1 - \frac{S^{-1} v}{(\bar{\delta}^2)^{3/2}} \left(\frac{\Theta}{\frac{2\pi}{3} S J(0)} \right)^{3/2} \zeta(3/2) \qquad (21)$$

gde je

$$Z_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} e^{-nx} \quad , \quad \zeta(p) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \qquad (22)$$

$\zeta(p)$ - Rimahova ceta funkcija.

Iz (21) se vidi da se pri $\mathcal{H}=0$ i niskim temperaturama magnetizacija izotropnog feromagnetika menja sa temperaturom kao $\Theta^{3/2}$.

§ 3. DAJSONOVA TEORIJA ZA OPŠTI SPIN

Pri proučavanju termodinamičkog ponašanja idealnog feromagneta veličina koja je od najvećeg praktičnog interesa je spontana magnetizacija $M(T)$ rešetke u nultom spoljašnjem polju. U linearnoj aproksimaciji Blohove teorije spinskih talasa ova magnetizacija je data formulom:

$$\frac{M(T)}{M(0)} = S - \zeta(3/2)\,\Theta^{3/2} \qquad (1)$$

gde je $\zeta(a)=\sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}$ Rimanova ceta funkcija, S -spin pojedinačnog atoma, $\Theta = \frac{3kT}{2\pi JS\gamma_0 \nu}$ bezdimenziona temperatura.

Blohova formula (1) je dobijena pod pretpostavkom da spinski talasi ne interaguju medju sobom i da je energija spinskih talasa proporcionalna λ^{-2}, gde je λ talasna dužina. Teorijska odstupanja nastaju iz tri uzroka: (a) odstupanja energetskog spektra od zakona λ^{-2}; (b) prave dinamične interakcije izmedju spinskih talasa; (c) kinematičke interakcije izmedju spinskih talasa usled činjenice da pojedini atom ne može da nosi više od $2S$ jedinica izvrnutog spina istovremeno. Efekat (a) se jednostavno izračunava, i dodaje jednačini (1) članove reda $\Theta^{5/2}$, $\Theta^{7/2}$ i td. Efekat (b) se takodje može direktno izračunati i njegov glavni član je reda Θ^{4} . Najveće teškoće problema leže u tretmanu efekta (c) .

Pokazuje se da je doprinos (c) slobodnoj energiji manji od $\exp\left[-a\,T_c/T\right]$, gde je T_c - Kirijeva temperatura, a - numerički koeficijent reda jedinice i nezavisan od temperature. Preko Kirijeve temperature definisana je bezdimenziona temperatura $\Theta=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{T}{T_c}\right)$.

Efekti (c) mada su sigurno važni u blizini Kirijeve tačke daju multi doprinos koeficijentima nisko temperaturnog razvoja slobodne energije po stepenima od Θ . Ova interakcija stvara efekte koji izgledaju kao da su veliki ali se pri detaljnijem istraživanju skoro potpuno ponište. Može se dokazati da nema termodinamičkih efekata od kinematičke interakcije spinskih talasa u bilo kojem razvoju u red od bilo kog stepena Θ . Drugim rečima, spinski talasi se mogu smatrati kao boze gas običnih čestica, koje ne podležu principu isključenja beć samo slaboj interakciji.

Da bi izračunali efekat (a) poći ćemo od izrada za slobodnu energiju

$$A=\left(\frac{E_0}{N}\right)-(\beta N)^{-1}\sum_{q}\sum_{\lambda_1,\dots,\lambda_q}\sum_{P}\sum_{n_1,n_2..}\left[\prod_i (n_i!)^{-1}\prod_{1}^{n_i}\Gamma_i(P\vec{\lambda}\cdot\vec{\lambda})\right] \qquad (2)$$

koja predstavlja virijalni razvoj slobodne energije sa samo običnim dinamičkim interakcijama. Svaka promenljiva λ_r se javlja samo dva puta medju argumentima od Γ_i, i permutacije P podležu uslovu da svaki podskup od Γ_i sadrži bar jedno λ_r čije je drugo javljanje izvan podskupa.

Virijalni koeficijenti b_n su definisani koeficijenti u redu

$$A = \left(\frac{E_0}{N}\right) - \Theta^{3/2} kT \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-n\beta L} \tag{3}$$

Tako je b_n dato direktno preko članova u jednačini (2) koji imaju $q = n$.

Glavni članovi u virijalnom razvoju (2) su oni sa $n_1 = q$, $n_i = 0$ za $i > 1$. Suma ovih članova je veličina

$$\begin{aligned} A_B &= -(\beta N)^{-1} \sum_q q^{-1} \sum_\lambda \exp\left[-q\beta(L+\epsilon_\lambda)\right] = \\ &= (\beta N)^{-1} \sum_\lambda \log\left\{1 - \exp\left[-\beta(L+\epsilon_\lambda)\right]\right\} \end{aligned} \tag{4}$$

koja predstavlja slobodnu energiju gasa spinskih talasa bez interakcije. Na niskim temperaturama značajan doprinos A_0 dolazi samo od spinskih talasa dugih talasnih dužina za koje je kvadratna relacija

$$\left(\frac{\epsilon_\lambda}{kT}\right) = \frac{\delta^2 V^{2/3}}{4\pi\Theta} \tag{5}$$

izmedju energije i impulsa dobro aproksimacija. Ako se kvadratna aproksimacija energije ϵ_λ zameni u (4) rezultat je elementarni Gausov integral koji daje slobodnu energiju proporcionalnu $T^{5/2}$. Ako razvijemo razliku izmedju ϵ_λ i kvadratne aproksimacije u stepenima od $(\delta\lambda)$, i onda zamenimo u (4) dobijemo razvoj A_0 po rastućim stepenima od T. Viši članovi u razvoju su popravke na Blohovu formulu koje nastaju usled diskretnosti rešetke ali nemaju nikakve veze izmedju interakcije spinskih talasa.

Za prva tri člana razvoja dobijamo

$$\begin{aligned} A_B = -kT \Big[& Z_{5/2}(\beta L)\Theta^{3/2} + \tfrac{3}{4}\pi\nu Z_{7/2}(\beta L)\Theta^{5/2} + \\ & + \omega\pi^2\nu^2 Z_{9/2}(\beta L)\Theta^{7/2} + O(\Theta^{9/2}) \Big] \end{aligned} \tag{6}$$

gde je

$$Z_n(x) = \sum_1^{\infty} q^{-n} e^{-qx} \tag{7}$$

ω je numerički koeficijent koji ima vrednost za tri tipa kubne rešetke: prostu, površinski centriranu i zapreminski centriranu, respektivno:

$$\omega = \frac{33}{32} \; ; \; \frac{15}{16} \; ; \; \frac{281}{288}$$

Magnetizacija po atomu je definisana sa

$$M = -\left(\frac{\partial A}{\partial H}\right) = -\left(\frac{m}{S}\right)\left(\frac{\partial A}{\partial L}\right) \qquad (8)$$

Pri nultom magnetnom polju H, za magnetizaciju dobijamo vrednost

$$M_0 = \left(\frac{m}{S}\right)\Big[S - \zeta(3/2)\,\Theta^{3/2} - \frac{3}{4}\pi\nu\,\zeta(5/2)\,\Theta^{5/2} - \omega\pi^2\nu^2\,\zeta(7/2)\,\Theta^{7/2} + O(\Theta^{9/2})\Big] \qquad (9)$$

gde je $\zeta(n) = Z_n(0)$ Rimanova ceta funkcija. Ova popravka na Blohovu formulu (1) nastaje samo od diskretnosti rešetke.

Treba još da nadjemo doprinos slobodnoj energiji koji potiče od dinamičke interakcije spinskih talasa. Suma svih doprinosa je označena sa

$$A_D = A - \left(\frac{E_0}{N}\right) - A_B \qquad (10)$$

to je suma članova u virijalnom redu (2) koji sadrži bar jedno Γ_i sa $i > 1$.

Dinamička korekcija za slobodnu energiju ima oblik

$$A_D = -(\beta N)^{-1}\sum_f \sum_{\vec{\lambda}_1,\dots,\vec{\lambda}_f}\Big[\prod_{s=1}^{f} Y(\vec{\lambda}_s)\Big]\cdot \sum_Q \sum_{n_2, n_3, \dots}\Big[\prod_i (n_i!)^{-1}\prod_{\lambda}^{n_i}\Gamma_i(Q\vec{\lambda}\cdot\vec{\lambda})\Big] \qquad (11)$$

sa

$$Y(\vec{\lambda}) = \sum_{p=0}^{\infty}\exp\left[-\beta p(L+\epsilon_\lambda)\right] = \left\{1 - \exp\left[-\beta(L+\epsilon_\lambda)\right]\right\}^{-1} \qquad (12)$$

Glavna prednost jednačine (11) nad jednačinom (2) je da je jednačina (11) red u kojem sukcesivni članovi uključuju interakciju sukcesivno većeg broja čestica. Broj nezavisno promenljivih integrala u jednačinama odredjenim sa (2) i (11) je

$$F = \sum_i (i-1)\,n_i + 1 \qquad (13)$$

Ovo F je broj nezavisnih čestica na koje se odnose interakcije koje opisuje taj odredjeni član. F je nezavisno od n_1, i stoga postoji beskonačan broj članova u jednačini (2) koji odgovaraju svakoj vrednosti F. Ali u jednačini (11) samo n_i za $i \geq 2$ se javljaju i postoji najviše konačan broj članova za dato F.

Članovi reda (11) pripadaju stepenima od T koji rastu sa F. Da bi se izračunao asimptotski razvoj slobodne energije do datog stepena T, potrebno je da se ispita samo konačan broj članova jednačine (11). Proračun je u principu direktan.

Za naš račun direktan varijalni razvoj (3) nije bio pogodan zato što parametar razvoja $\exp(-\beta L)$ postaje jedinica u graničnom slučaju nultog spoljašnjeg polja. Drugim rečima boze gas je na tački kondenzovanja za $L=0$. Koeficijent b_q sadrži efekte čisto statističkih korelacija položaja q čestica i na tački kondenzovanja su podjednako važne i za malo i za veliko q. U jednačini (11) viši članovi predstavljaju korelacije čestica koje nastaju od interakcije, a ne od statistike i kada su interakcije slabe ovi članovi su odgovarajuće mali. Za slabo interagujući boze gas na tački kondenzacije prvi virijalni koeficijent (2) konvergira vrlo slabo dok "interakcioni razvoj" konvergira dobro.

Izračunaćemo sve članove u jednačini (11) koji bi mogli dati doprinose do reda T^5. Ovo će odrediti magnetizaciju do reda T^4. Vodeći član u redu (11) je član $f=2$, $n_2=1$, $n_i=0$ za $i>2$. Ovaj član ima $F=2$, a svi drugi imaju $F\geqslant 3$. Pošto je Γ_2 simetrična funkcija dve permutacije Q u vodećem članu daje jednake doprinose i ovaj član postaje

$$A_{LO}=-2(\beta N)^{-1}\sum_{\vec{\delta}\vec{\tau}} Y(\vec{\delta})\,Y(\vec{\tau})\,\Gamma_2(\vec{\delta}\vec{\tau},\vec{\delta}\vec{\tau}) \qquad (14)$$

Član A_{LO} je direktno povezan sa drugim virijalnim koeficijentom gasa spinskih talasa. Ako ispustimo faktor $Y(\vec{\delta})\,Y(\vec{\tau})$ jednačina (14) postaje

$$A'_{LO}=-(2)\cdot(\beta N)^{-1}\sum_{\vec{\delta}\vec{\tau}}\Gamma_2(\vec{\delta}\vec{\tau},\vec{\delta}\vec{\tau})=(\beta N)^{-1}e^{-2\beta L}\times$$
$$\times \mathrm{Tr}\left[\exp(-\beta(H_1+H_2))-\exp(-\beta H_1)\right] \qquad (15)$$

gde trag označava sumu po stanjima koja sadrže samo dva spinska talasa.

Drugi virijalni koeficijent gasa spinskih talasa se može napisati u obliku

$$b_2=b_2^{\circ}+b_2' \qquad (16)$$

gde je b_2° koeficijent za edealni boze gas bez interakcije. Otuda jednačine (3) i (15) daju

$$A'_{LO}=-e^{-2\beta L}\,b_2'\,\Theta^{3/2}\,kT \qquad (17)$$

Postoji poznata formula

$$b_2'=2^{3/2}\pi^{-1}\sum_{l=0}^{\infty}(4l+1)\int_0^{\infty}\exp\left[-\beta\frac{\hbar^2k^2}{m}\right]\left(\frac{d\eta_{2l}}{dk}\right)dk \qquad (18)$$

koja povezuje b_2' sa pomerajem faze η_{2l} rasejanih stanja dve interagujuće boze čestice. Tako možemo očekivati da ćemo biti u stanju da izračunamo b_2' tačno iz rasejanih talasnih funkcija. Pošto prostor rešetke nema ni sfernu simetriju, ni Galilejevu invarijantnost jednačina (18) se ne može primeniti direktno na problem spinskih talasa. Može se izvesti analog jednačini (18) tj. jednačina

$$b_2' = -(2N)^{-1}\beta\Theta^{-3/2}\sum_{\vec{z}\vec{\tau}} \exp[-\beta(\epsilon_{\vec{z}}+\epsilon_{\vec{\tau}})]\,a_{\vec{z}\vec{\tau}} \qquad (19)$$

koja izjednačava b_2' sa integracijom po omplitudama rasejanja unapred. Ova jednačina je dobra za sistem spinskih talasa.

Predhodna analiza se može podjenako dobro primeniti i na A_{LD} dato jednačinom (14) umesto A_{LD}'.

$$A_{LD} = (2N)^{-1}\sum_{p,q=1}^{\infty}\sum_{\vec{z}\vec{\tau}} \exp[-\beta p(\epsilon_{\vec{z}}+L)-\beta q(\epsilon_{\vec{\tau}}+L)]\,a_{\vec{z}\vec{\tau}} \qquad (20)$$

Amplituda $a_{\vec{z}\vec{\tau}}$ se može izračunati vrlo jednostavno preko koeficijenta $A_{\vec{\delta}}$

$$a_{\vec{z}\vec{\tau}} = -4SJN^{-1}\sum_{\delta}\cos(\vec{\tau}\cdot\vec{\delta})\,A_{\vec{\delta}} \qquad (21)$$

Zadržavamo samo vodeći član u A_{LD} koji je reda T^5. Za ovaj stepen tačnosti dovoljno je izračunati sumu u jednačini (21) do članova četvrtog reda po $(\vec{z}\,\vec{\delta})$ i $(\vec{\tau}\,\vec{\delta})$.

$$a_{\vec{z}\vec{\tau}} = -QJN^{-1}\left[\gamma_0\,\delta^4\frac{z^2\tau^2}{36}\right] \qquad (22)$$

gde je numerički koeficienat Q definisan

$$Q = 8S(A_1X_1 + \tfrac{2}{3}A_2X_2) + \left(\frac{\alpha}{3S}\right) - \frac{1}{3} \qquad (23)$$

Posle zamene jednačine (22) u jednačinu (20) i sumiranja po $\vec{z}$ i $\vec{\tau}$ dobijamo:

$$A_{LD} = -Q\left[\frac{3\pi\nu}{4S}\right]\Theta^4 kT\left[Z_{5/2}(\beta L)\right]^2 \qquad (24)$$

Drugi virijalni koeficijent onda ima vrednost

$$b_2' = \left[\frac{3\pi\nu Q}{4S}\right]\Theta^{5/2} \qquad (25)$$

Doprinos dinamičkih interakcija spinskih talasa magnetizaciji u nultom spoljašnjem magnetnom polju iznosi

$$M_{LD} = -\left(\frac{m}{S}\right)\left[\frac{3\pi\nu Q}{2S}\right]\zeta(5/2)\,\zeta(3/2)\,\Theta^4 \qquad (26)$$

Ovo su vodeći članovi popravke koju treba dodati rezultatima linearne teorije spinskih talasa. Korekcija na magnetizaciju je negativna što ukazuje da je interakcija spisnkih talasa u srednjem privlačna

Članovi u redu (11) sa $F \geq 3$ davaće doprinos u redu T^6 i ovde se ne razmatraju.

Izraz za slobodnu energiju po atomu na temperaturi T konačno možemo pisatu u obliku

$$\begin{aligned} A = -\tfrac{1}{2}JS^2\gamma_0 - LS - kT\Big[&Z_{5/2}(\beta L)\Theta^{3/2} + C_1 Z_{7/2}(\beta L)\Theta^{5/2} + \\ &+ C_2 Z_{9/2}(\beta L)\Theta^{7/2} + C_3 S^{-1}[Z_{5/2}(\beta L)]^2\Theta^4 + O(\Theta^{9/2})\Big] \end{aligned} \qquad (27)$$

Formula za spontanu magnetizaciju po atomu u nultom spoljašnjem polju je:

$$M(T)=\left(\frac{m}{S}\right)\left[S-a_0\Theta^{3/2}-a_1\Theta^{5/2}-a_2\Theta^{7/2}-a_3S^{-1}\Theta^{4}+O(\Theta^{9/2})\right] \qquad (28)$$

gde je m - magnetni momenat svakog atoma, a

$$a_0=\zeta(3/2) \qquad = 2.612 \qquad (29)$$

$$a_1=\zeta(5/2)c_1 \qquad = 3.15,\ 3.97,\ 3.77 \qquad (30)$$

$$a_2=\zeta(7/2)c_2 \qquad = 11.5,\ 16.4,\ 15.4 \qquad (31)$$

$$a_3=2\zeta(3/2)\zeta(5/2)c_0 = 27.8,\ 28.0,\ 28.6,\quad (S=\tfrac{1}{2}) \qquad (32)$$

$$= 21.7,\ 24.2,\ 24.0,\quad (S=1) \qquad (33)$$

$$= 16.5,\ 20.7,\ 19.7,\quad (S=\infty) \qquad (34)$$

za prostu, površinski i zapreminski centriranu kubnu rešetku respektivno.

Do istih rezultata do kojih dovodi Dajsonova teorija, došli bi i primenom transformacije Holštajn - Primakova.

$$S^{+}_{\vec f}=\varphi(n_{\vec f})B_{\vec f},\quad S^{-}_{\vec f}=B^{+}_{\vec f}\varphi(n_{\vec f}),\quad S^{z}_{\vec f}=S-n_{\vec f} \qquad (35)$$

gde je

$$\varphi(n_{\vec f})=(1-n_{\vec f})^{1/2},\quad n_{\vec f}=B^{+}_{\vec f}B_{\vec f} \qquad (36)$$

§ 4. REZULTATI TJABLIKOVA

Tjablikov je izveo formulu za magnetizaciju izotrapnog feromagnetika koja aproksimativno važi u širokom intervalu temperature. Radi jednostavnosti pri izračunavanju se ograničavamo na slučaj spina $S=\frac{1}{2}$.

Hamiltonijan izotropnog feromagnetika izražen preko Pauli-operatora ima oblik:

$$\tilde{H} = \mathcal{E}_0 + H \qquad (1)$$

gde su

$$\mathcal{E}_0 = -\frac{1}{2} N \mu \mathcal{H} - \frac{1}{8} N J(0) \qquad (2)$$

$$H = \left[\mu \mathcal{H} + \frac{1}{2} J(0)\right] \sum_{\vec{f}} n_{\vec{f}} - \frac{1}{2} \sum_{\vec{f}_1, \vec{f}_2} I(\vec{f}_1 - \vec{f}_2) P^+_{\vec{f}_1} P_{\vec{f}_2} - \frac{1}{2} \sum_{\vec{f}_1, \vec{f}_2} I(\vec{f}_1 - \vec{f}_2) n_{\vec{f}_1} n_{\vec{f}_2} \qquad (3)$$

$$J(\vec{\nu}) = \sum_{\vec{f}} I(\vec{f}) e^{i \vec{f} \vec{\nu}} , \qquad I(0) = 0 \qquad (4)$$

μ - magnetni momenat, $\mathcal{H}$ - spoljašnje magnetno polje, $I(\vec{f})$ - integral izmene.

Jednačina kretanja za operator P ima oblik

$$i \frac{dP_{\vec{f}}}{dt} = \left[\mu \mathcal{H} + \frac{1}{2} J(0)\right] P_{\vec{f}} - \frac{1}{2} \sum_{\vec{f}'} I(\vec{f} - \vec{f}') P_{\vec{f}'} + \sum_{\vec{f}'} I(\vec{f} - \vec{f}') n_{\vec{f}} P_{\vec{f}'} - \sum_{\vec{f}'} I(\vec{f} - \vec{f}') P_{\vec{f}} n_{\vec{f}'} \qquad (5)$$

Ako uvedemo funkcije Grina $\langle\langle P_{\vec{f}} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle, \langle\langle n_{\vec{f}_1} P_{\vec{f}_2} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle, \ldots$ za njih dobijamo lanac jednačina

$$E \langle\langle P_{\vec{f}} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle = \frac{i \sigma_{1/2}}{2\pi} \Delta(\vec{f} - \vec{g}) + \left[\mu \mathcal{H} + \frac{1}{2} J(0)\right] \langle\langle P_{\vec{f}} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle - \frac{1}{2} \sum_{\vec{f}'} I(\vec{f} - \vec{f}') \langle\langle P_{\vec{f}'} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle + \sum_{\vec{f}'} I(\vec{f} - \vec{f}') \langle\langle n_{\vec{f}} P_{\vec{f}'} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle - \sum_{\vec{f}'} I(\vec{f} - \vec{f}') \langle\langle n_{\vec{f}'} P_{\vec{f}} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle$$

$$\sigma_{1/2} = \langle P_{\vec{f}} P^+_{\vec{f}} - P^+_{\vec{f}} P_{\vec{f}} \rangle = \langle 1 - 2 n_{\vec{f}} \rangle \qquad (6)$$

gde je $\mathfrak{z}_{1/2}$ magnetizacija na stin 1/2.

Lanac jednačina (6) se prekida pomoću aproksimativne zamene izraza za druge Grinove funkcije preko prvih:

$$\langle\langle n_{\vec{f}_1} P_{\vec{f}_2} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle \longrightarrow \langle n_{\vec{f}_1} \rangle \langle\langle P_{\vec{f}_2} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle \qquad (7)$$

Veličina $\langle n_{\vec{f}} \rangle$ ne zavisi od indeksa čvora i povezana je sa srednjom magnetizacijom po jednom čvoru, relacijom

$$\mathfrak{z}_{1/2} = \langle 1 - 2 n_{\vec{f}} \rangle = 1 - 2\bar{n} \qquad (8)$$

Za prvu funkciju dobijamo jednačinu:

$$\Big\{ E - \big[\mu\mathcal{H} + \tfrac{1}{2} J(0) \big] \Big\} \langle\langle P_{\vec{f}} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle + \sum_{\vec{f}'} \tfrac{1}{2} \mathfrak{z}_{1/2} I(\vec{f} - \vec{f}') \langle\langle P_{\vec{f}'} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle =$$
$$= \frac{i \mathfrak{z}_{1/2}}{2\pi} \Delta(\vec{f} - \vec{g}) \qquad (9)$$

Ovaj metod primenjen na teoriju feromagnetizma odgovara poboljšanju metoda približne druge kvantizacije.

U metodu približne druge kvantizacije Pauli operatori $P_{\vec{f}}, P^+_{\vec{g}}$ približno se ponašaju kao bozoni.

U skladu sa transformacionom invarijantnošću zadatka funkcija

$$G_{\vec{f}-\vec{g}}(E) = \langle\langle P_{\vec{f}} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle \qquad (10)$$

zavisi samo od razlike koordinata čvorova rešetke. Zato se jadnačina (9) lako rešava pomoću Furie transformacija:

$$G_{\vec{k}}(E) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{v}} e^{i(\vec{k}, \vec{v})} G_{\vec{v}}(E) \qquad (11)$$

za $G_{\vec{v}}(E)$ dobijamo izraz

$$G_{\vec{v}}(E) = \frac{i \mathfrak{z}_{1/2}}{2\pi} \cdot \frac{1}{E - E_{\vec{v}}} \qquad (12)$$

gde je $E_{\vec{v}}$ - energija spinskih talasa ili energija elementarnih pobudjenja.

$$E_{\vec{v}} = \mu\mathcal{H} + \tfrac{1}{2} \mathfrak{z}_{1/2} J(0) (1 - \gamma_{\vec{v}}) = \mu\mathcal{H} + \tfrac{1}{2} \mathfrak{z}_{1/2} J(0) \varepsilon_{\vec{v}} \qquad (13)$$

$$\gamma_{\vec{v}} = \left(1 - \frac{J(\vec{v})}{J(0)} \right)$$

Ograničavamo se na nultu aproksimaciju po energiji uzajamnog dejstva elementarnih pobudjenja.

Ako uporedimo izraz (13) s odgovarajućim u linearnoj teoriji spinskih talasa vidimo da se oni razlikuju po množitelju $\mathfrak{z}_{1/2}$. Pošto relativna magnetizacija zavisi od temperature, i energija $E_{\vec{v}}$ će takodje zavisiti od temperature. To je opšta karakteristika za metod funkcija Grina, do spektar elementarnih pobudjenja zavisi od temperature. U izrazu (13) ostaje nam još nepoznata veličina relativne magnetizacije $\sigma_{1/2}$. Sada tražimo jednačinu za nju.

Spektralna intenzivnost za $G_{\vec{\nu}}(E)$ je:

$$I_{\vec{\nu}}(\omega) = \sigma_{1/2} \overline{N}_{\vec{\nu}}\, \delta(\omega - E_{\vec{\nu}}) \qquad (14)$$

gde je

$$\overline{N}_{\vec{\nu}} = \left(e^{\frac{E_{\vec{\nu}}}{\Theta}} - 1\right)^{-1} \qquad (15)$$

a $\Theta = kT$, k - Bolcmanova konstanta, T - apsolutna temperatura.

Za funkciju $G_{\vec{f}-\vec{g}}(E)$ spektralna intenzivnost će imati oblik

$$I_{\vec{f}-\vec{g}}(\omega) = \frac{1}{N}\sum_{\vec{\nu}} e^{i(\vec{f}-\vec{g},\vec{\nu})} I_{\vec{\nu}}(\omega) = \frac{\sigma_{1/2}}{N}\sum_{\vec{\nu}} e^{i(\vec{f}-\vec{g},\vec{\nu})}\overline{N}_{\vec{\nu}}\, \delta(\omega - E_{\vec{\nu}}) \qquad (16)$$

Sada srednja vrednost proizvoda dvaju operatora preko spektralne intenzivnosti ima oblik:

$$\langle P^+_{\vec{g}} P_{\vec{f}} \rangle = \frac{\sigma_{1/2}}{N}\sum_{\vec{\nu}} e^{i(\vec{f}-\vec{g},\vec{\nu})}\overline{N}_{\vec{\nu}} \qquad (17)$$

a za $\vec{g} = \vec{f}$ dobijamo

$$\overline{n} = \frac{\sigma_{1/2}}{N}\sum_{\vec{\nu}} \overline{N}_{\vec{\nu}} \quad , \quad \left(\overline{n} = \langle P^+_{\vec{f}} P_{\vec{f}} \rangle\right) \qquad (18)$$

Pošto je $\sigma_{1/2} = 1 - 2\overline{n}$ toj jednačini možemo dati pogodniji oblik:

$$\frac{1}{\sigma_{1/2}} = \frac{1}{N}\sum_{\vec{\nu}} \operatorname{cth}\frac{E_{\vec{\nu}}}{2\Theta} \qquad (19)$$

ili

$$\sigma_{1/2} = \frac{1}{1 + 2D_{1/2}} \quad , \quad D_{1/2} = \frac{1}{N}\sum_{\vec{\nu}} \overline{N}_{\vec{\nu}} \qquad (20)$$

Odredjivanje magnetizacije $\sigma_{1/2}$ kao funkcije temperature i polja svodi se, u datoj aproksimaciji, na rešavanje transcendentne jednačine (19) ili (2o). Pokazaćemo da ona daje dovoljno dobru interpolaciju za magnetizaciju u svim intervalima temperature.

U jednačinama (19) i (2o) prelazimo sa sume na integral

$$\frac{1}{\sigma_{1/2}} = \frac{v}{(2\pi)^3}\int \operatorname{cth}\frac{\mu\mathcal{H} + \frac{1}{2}\sigma_{1/2} J(0)\,\varepsilon_{\vec{\nu}}}{2\Theta}\, d^3\vec{\nu} \qquad (21)$$

$$\sigma_{1/2} = \frac{1}{1 + 2D_{1/2}} \quad , \quad D_{1/2} = \frac{v}{(2\pi)^3}\int \overline{N}_{\vec{\nu}}\, d^3\vec{\nu} \qquad (22)$$

Ispitaćemo zavisnost magnetizacije od temperature u polju u različitim intervalima temperatura.

a) NISKE TEMPERATURE $(\Theta\to 0)$. U ovom slučaju koristićemo izraz za $\mathcal{b}_{1/2}$ u obliku (22). Veličina $D_{1/2}$ opisuje odstupanje magnetizacije od zasićenja i pri $\Theta\to 0$ ona je mala pa i izraz za $\mathcal{b}_{1/2}$ možemo pisati u obliku reda

$$\mathcal{b}_{1/2}=1-2D_{1/2}+(2D_{1/2})^2-\dots \qquad (23)$$

Izraz za $D_{1/2}$ pišemo u obliku

$$D_{1/2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{v}{(2\pi)^3}\int e^{-\frac{n}{\Theta}E_{\vec{\nu}}}d^3\vec{\nu}=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}}\frac{v}{(2\pi)^3}\int e^{-n\frac{\mathcal{b}_{1/2}}{2\Theta}J(0)\,\ell_{\vec{\nu}}}d^3\vec{\nu} \qquad (24)$$

Pri $\Theta\to 0$ osnovni doprinos u (24) daju spinski talasi sa malim $\vec{\nu}$. Zato možemo razložiti $E_{\vec{\nu}}$ u red po stepenima $\vec{\nu}$ i ograničiti se sa članovima reda $\vec{\nu}^2$ zaključno. Pošto je $E_{\vec{\nu}}$ parna funkcija od $\vec{\nu}$ razlaganje počinje sa članom $\vec{\nu}^2$.

$$E_{\vec{\nu}}\cong \mu\mathcal{H}+\frac{1}{12}\mathcal{b}_{1/2}J(0)\,\overline{\delta^2}\cdot\vec{\nu}^2 \qquad (25)$$

$$\overline{\delta^2}=\frac{\sum_{\vec{f}}\vec{f}^2 I(\vec{f})}{\sum_{\vec{f}} I(\vec{f})}\,, \qquad \left(J(0)=\sum_{\vec{f}} I(\vec{f})\right)$$

Zamenjujući (25) u (24) i proširujući integraciju na sve vrednosti $\vec{\nu}$ za $D_{1/2}$ dobijamo približan izraz

$$D_{1/2}\cong\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}}\frac{v}{(2\pi)^3}\int e^{-\frac{n}{12\Theta}\mathcal{b}_{1/2}J(0)\,\overline{\delta^2}\,\vec{\nu}^2}d^3\vec{\nu}=$$

$$=\frac{v}{(\overline{\delta^2})^{3/2}}\left(\frac{\Theta}{\frac{\pi}{3}\mathcal{b}_{1/2}J(0)}\right)^{3/2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-n\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}}}{n^{3/2}}=\frac{v}{(\overline{\delta^2})^{3/2}}\left(\frac{\Theta}{\frac{\pi}{3}\mathcal{b}_{1/2}J(0)}\right)^{3/2}Z_{3/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)+O(\Theta^{5/2}) \qquad (26)$$

Zamenjujući (26) u (23) i ograničavajući se na uračunavanje članova reda $\Theta^{3/2}$ zaključno, dobijamo za $\mathcal{b}_{1/2}$ aproksimativan izraz oblika:

$$\mathcal{b}\cong 1-2D_{1/2}\cong 1-\frac{2v}{(\overline{\delta^2})^{3/2}}\left(\frac{\Theta}{\frac{\pi}{3}\mathcal{b}_{1/2}J(0)}\right)^{3/2}Z_{3/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)+O(\Theta^{5/2}) \qquad (27)$$

Ova formula se poklapa sa Blohovom formulom u § 2.

Da bi izračunali sledeće članove po stepenima temperature u $\mathcal{b}_{1/2}$ ograničićemo se na razmatranje najprostijih kubnih rešetki u aproksimaciji najbližih suseda. U tom slučaju biće

$$\overline{\delta^2}=\delta^2\quad, \quad J(0)=IZ$$

gde je δ - rastojanje izmedju najbližih suseda, I - vrednost integrala izmene za najbliže susede, Z - njihov broj. Magnetizacija tada za prostu kubnu strukturu dobija oblik:

$$\mathcal{b}_{1/2}=1-2Z_{3/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)\left(\frac{\tau}{\mathcal{b}_{1/2}}\right)^{3/2}-\frac{3}{2}\pi Z_{5/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)\left(\frac{\tau}{\mathcal{b}_{1/2}}\right)^{5/2}+4Z_{3/2}^2\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)\left(\frac{\tau}{\mathcal{b}_{1/2}}\right)^3-\frac{33}{16}\pi^2 Z_{7/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)\left(\frac{\tau}{\mathcal{b}_{1/2}}\right)^{7/2}+$$

$$+6\pi Z_{3/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)Z_{5/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)\left(\frac{\tau}{\sigma_{1/2}}\right)^4-\frac{281}{2^6}\pi^3 Z_{9/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)\left(\frac{\tau}{\sigma_{1/2}}\right)^{9/2}+3\pi^2\left(\frac{\tau}{\sigma_{1/2}}\right)^5\Big\{3Z^2_{5/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)+$$

$$+\frac{11}{4}Z_{3/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)Z_{7/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)\Big\}-\frac{13419}{2^{10}}\pi^4 Z_{11/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)\left(\frac{\tau}{\sigma_{1/2}}\right)^{11/2}+O(\tau^{13/2}) \qquad (28)$$

gde je $\quad \tau=\dfrac{\Theta}{2\pi I} \qquad (29)$

Ovu jednačinu rešavamo metodom iteracije. U nultoj aproksimaciji uzimamo $\sigma_{1/2}=1$ i dobijamo

$$\sigma_{1/2}=1-2Z_{3/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)\tau^{3/2}-\frac{3}{2}\pi Z_{5/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)\tau^{5/2}+4Z^2_{3/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)\tau^3-\frac{33}{16}\pi^2 Z_{7/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)\tau^{7/2}+$$

$$+6\pi Z_{3/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)Z_{5/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)\tau^4-\frac{281}{2^6}\pi^3 Z_{9/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)\tau^{9/2}+3\pi^2\tau^5\Big\{3Z^2_{5/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)+$$

$$+\frac{11}{4}Z_{3/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)Z_{7/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)\Big\}-\frac{13419}{2^{10}}\pi^4 Z_{11/2}\left(\frac{\mu\mathcal{H}}{\Theta}\right)\tau^{11/2}+O(\tau^{13/2})$$

Pojava članova reda $\tau^{3/2}$ i viših obavezna je iz sledećih uzroka: zavisnosti energije spinskih talasa od talasnog vektora; osobinama kinematičkih uslova za spinske operatore, koji dovode do zavisnosti $\sigma_{1/2}$ od $D_{1/2}$; zavisnosti energije spinskih talasa od temperature samo preko $\sigma_{1/2}$. U slučaju niskih temperatura rezultat nije tačan, pošto član $\Theta^{6/2}$ po Dajsonu ne postoji. Ovo razlaganje je tačno zaključno sa članom $\Theta^{5/2}$.

b) VISOKE TEMPERATURE ($\Theta \leqslant \Theta_c$, $\mathcal{H}=0$). Jednačina za $\sigma_{1/2}$ (21) nema rešenje $\sigma_{1/2}\neq 0$ pri $\mathcal{H}=0$ i $\Theta\to\infty$. Ako je $\sigma_{1/2}$ konačno pri nekoj dovoljno visokoj Θ, tada je

$$\operatorname{cth}\frac{\sigma_{1/2}J(0)\varepsilon_3}{4\Theta}\cong\frac{4\Theta}{\sigma_{1/2}J(0)\varepsilon_3}$$

Stavljajući taj izraz u (21) vidimo da njenu desnu stranu možemo izborom Θ načiniti proizvoljno velikom, dok leva strana ostaje konačna. Otuda sledi da pri dovoljno velikom Θ i $\mathcal{H}=0$ magnetizacija ne može ostati konačna.

Uzećemo sada da je (pri $\mathcal{H}=0$) $\sigma_{1/2}\neq 0$, ako je $\Theta<\Theta_c$ i $\sigma_{1/2}\to 0$, ako $\Theta\to\Theta_c$, gde je Θ_c neka konstanta koja ima smisao Kirijeve temperature.

Ako je $\zeta_{1/2} \ll 1$, tada je i $\frac{\zeta_{1/2} J(0) \mathcal{E}_{\vec{\nu}}}{4\Theta} \ll 1$ iza hiperbolični kotangens možemo koristiti razvoj

$$cth\, x = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1} \qquad (31)$$

gde je B_{2n} - Bernulijev broj ($B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, ...).

Ako to zamenimo u (21) dobijamo

$$\frac{1}{\zeta_{1/2}} = \frac{\tau}{\zeta_{1/2}} C + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} C_{2n-1} \left(\frac{\zeta_{1/2}}{\tau}\right)^{2n-1} \qquad (32)$$

gde je τ - bezdimenziona temperatura

$$\tau = \frac{4\Theta}{J(0)} \qquad (33)$$

i

$$C = \frac{v}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{\nu}}{\mathcal{E}_{\vec{\nu}}}, \qquad C_m = \frac{v}{(2\pi)^3} \int \mathcal{E}_{\vec{\nu}}^{\,m} d^3\vec{\nu} \qquad (34)$$

U aproksimaciji najbližih suseda prva tri koeficijenta C_m imaju oblik

$$C_1 = 1, \quad C_2 = 1 + \frac{1}{Z}, \quad C_3 = 1 + \frac{3}{Z} \qquad (35)$$

Jednačinu (32) možemo pisati u obliku

$$\frac{\zeta_{1/2}}{\tau} = \sqrt{\frac{3}{\tau}(1 - C\tau)} \left\{ 1 + 3 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)!} C_{2n-1} \left(\frac{\zeta_{1/2}}{\tau}\right)^{2n-2} \right\}^{-1/2} \qquad (36)$$

ako u nultoj aproksimaciji stavimo $\zeta_{1/2} = 0$ dobijemo

$$\zeta_{1/2} = \sqrt{3\tau\left(1 - \frac{\tau}{\tau_c}\right)} \cong \sqrt{3\tau_c\left(1 - \frac{\tau}{\tau_c}\right)} \qquad (37)$$

gde je

$$\tau_c^{-1} = C$$

vrednost temperature pri kojoj nestaje magnetizacija. Konstanta zavisi od geometrije kristalne rešetke. Za prostu kubnu, za-preminski i površinski centriranu rešetku u aproksimaciji najbližih suseda ona ima vrednosti

$$C = 1{,}5146\,;\ 1{,}393\,;\ 1.345 \qquad (38)$$

τ_c možemo izjednačiti sa Kirijevom temperaturom. U običnim jedinicama ona je jednaka

$$\Theta_c = \frac{1}{4} J(0)\, \tau_c = \frac{J(0)}{4C} \qquad (39)$$

Sledeća popravka na magnetizaciju daje

$$\zeta_{1/2} = \tau \zeta \left(1 + \frac{1}{30} \frac{Z+3}{Z} \zeta^2\right), \quad \zeta = \sqrt{\frac{3}{\tau}\left(1 - \frac{\tau}{\tau_c}\right)} \qquad (40)$$

Na isti način možemo dobiti popravke višeg reda.

v) VISOKE TEMPERATURE ($\Theta > \Theta_c$, $\mathcal{H} \neq 0$). Za ovaj slučaj koristimo razlaganja oblika:

$$cth \frac{\mu\mathcal{H} + \frac{1}{2} b_{1/2} J(0) \varepsilon_{\vec{v}}}{2\Theta} = cth\left(\frac{h}{\tau} + \frac{b_{1/2}\varepsilon_{\vec{v}}}{\tau}\right) = \frac{1}{t_0}\left\{1 + (1 - t_0^2)\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{t_1}{t_0}\right)^n\right\} \quad (41)$$

gde su

$$t_0 = th\,\frac{h}{\tau}, \quad t_1 = th\,\frac{b_{1/2}\varepsilon_{\vec{v}}}{\tau} \quad (42)$$

τ, h - bezdimenzione veličine

$$\tau = \frac{4\Theta}{J(0)}, \quad h = \frac{2\mu\mathcal{H}}{J(0)} \quad (43)$$

Tada jednačina (21) dobija oblik

$$\frac{1}{b_{1/2}} = \frac{1}{t_0}\left\{1 + (1 - t_0^2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{t_0^n}\frac{v}{(2\pi)^3}\int t_1^n d\vec{v}\right\} \quad (44)$$

t_1 možemo razviti u red po τ^{-1}

$$t_1 = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{2^{2k}(2^{2k}-1)}{(2k)!}B_k\left(\frac{b_{1/2}\varepsilon_{\vec{v}}}{\tau}\right)^{2k-1} \quad (45)$$

Ako ograničimo na članove zaključno s τ^{-2} aproksimativan izraz za $b_{1/2}$ dobija oblik

$$\frac{1}{b_{1/2}} = \frac{1}{t_0}\left\{1 - C_1\frac{1-t_0^2}{t_0}\frac{b_{1/2}}{\tau} + C_2\frac{1-t_0^2}{t_0^2}\left(\frac{b_{1/2}}{\tau}\right)^2 - \dots\right\} \quad (46)$$

gde su C_1 i C_2 odredjeni formulom (35). Za nultu aproksimaciju uzimamo

$$b_{1/2} = t_0 = th\,\frac{h}{\tau} \quad (47)$$

Dalje metodom iteracije za $b_{1/2}$ dobijemo u drugoj aproksimaciji

$$b_{1/2} = t_0 + t_0(1 - t_0^2)\tau^{-1} + t_0(1 - t_0^2)\left(\frac{z-1}{z} - 2t_0^2\right)\tau^{-2} + \dots \quad (48)$$

Na isti način možemo dobiti izraz sa tačnošću proizvoljno stepena τ^{-1}!

Razlaganje (48) dobro se slaže sa temperature više od Kirijeve tačke.

II GLAVA

KOREKCIJA DAJSONOVOG REZULTATA ZA MAGNETIZACIJU

§1. DOBIJANJE DAJSONOVOG REZULTATA ZA $S=\frac{1}{2}$ POMOĆU EGZAKTNE BOZONSKE REPREZENTACIJE

Do Dajsonovog rezultata za magnetizaciju datog u odeljku 3 prve glave možemo lako doći metodom funkcija Grina.

Grinova funkcija u E - reprezentaciji definisana je jednačinom

$$E\langle\langle A|B\rangle\rangle_E = \frac{i}{2\pi}\langle[A,B]\rangle + \langle\langle[A,H]|B\rangle\rangle_E \tag{1}$$

Ako posmatramo Hajzenbergov feromagnetik sa spinom $S=\frac{1}{2}$ njegov hamiltonijan ima oblik:

$$H = H_0 + \Delta\sum_{\vec{n}} P^+_{\vec{n}}P_{\vec{n}} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}{}' I_{\vec{n}\vec{m}} P^+_{\vec{n}}P_{\vec{m}} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}{}' I_{\vec{n}\vec{m}} P^+_{\vec{n}}P^+_{\vec{m}}P_{\vec{m}}P_{\vec{n}} \tag{2}$$

gde je

$$\Delta = \mu\mathcal{H} + \frac{1}{2}J(0), \quad J_{\vec{k}} = \sum_{\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} e^{i\vec{k}(\vec{m}-\vec{n})}, \quad J(0) = \sum_{\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} \tag{3}$$

a $\mathcal{H}$ - spoljašnje magnetno polje, $\vec{k}$ - talasni vektor, $\vec{n}, \vec{m}$ - čvorovi rešetke, $J_{\vec{k}}$ - statistički integral.

Operatori u (2) su Pauli operatori za koje važe sledeće komutacione relacije:

$$[P_{\vec{n}}, P^+_{\vec{m}}] = \delta_{\vec{n}\vec{m}}[1 - 2P^+_{\vec{n}}P_{\vec{n}}] \tag{4}$$

$$P^{+2}_{\vec{n}} = P^2_{\vec{n}} = 0 \tag{5}$$

$$[P_{\vec{n}}, P_{\vec{m}}] = [P^+_{\vec{n}}, P_{\vec{m}}] = 0 \tag{6}$$

$$\overline{P^+_{\vec{n}}P_{\vec{n}}} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \tag{7}$$

Proizvoljni operatori A i B sada su Pauli - operatori za koje je $S=\frac{1}{2}$. Magnetizaciju onda možemo pisati u obliku

$$\sigma = \frac{\langle S^z_{\vec{n}}\rangle}{S} = \frac{1/2 - \langle P^+_{\vec{n}}P_{\vec{n}}\rangle}{1/2} = 1 - 2\langle P^+_{\vec{n}}P_{\vec{n}}\rangle \tag{8}$$

Grinova funkcija dobija oblik

$$E\langle\langle P_{\vec{s}}|P^+_{\vec{g}}\rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}\langle[P_{\vec{s}}, P^+_{\vec{g}}]\rangle + \langle\langle[P_{\vec{s}}, H]|P^+_{\vec{g}}\rangle\rangle \tag{9}$$

Sada treba da nadjemo komutator $[P_{\vec{s}}, H]$ za Hajzenbergov feromagnetik. Posle primene komutacionih relacija za Pauli operatore dobijamo

$$\Omega_{\vec{s}} \equiv [P_{\vec{s}}, H] = \Delta P_{\vec{s}} - \frac{1}{2}\sum_{\vec{m}}{}' I_{\vec{s}\vec{m}}P_{\vec{m}} + \sum_{\vec{m}}{}' I_{\vec{s}\vec{m}}P^+_{\vec{s}}P_{\vec{s}}P_{\vec{m}} - \sum_{\vec{m}}{}' I_{\vec{s}\vec{m}}P^+_{\vec{m}}P_{\vec{m}}P_{\vec{s}} \tag{10}$$

Posle zamene (lo) u (9) dobijamo

$$E\langle\langle P_{\vec{s}} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}\delta_{\vec{s}\vec{g}}\left[1 - 2\langle P^+_{\vec{s}} P_{\vec{s}}\rangle\right] + \langle\langle \Omega_{\vec{s}} | P^+_{\vec{g}} \rangle\rangle \qquad (11)$$

Sada vršimo Furie transformacije ove jednačine smenama:

$$P_{\vec{s}} = \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} P_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{s}} \, , \quad P^+_{\vec{g}} = \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} P^+_{\vec{k}} e^{-i\vec{k}\vec{s}} \qquad (12)$$

$$\delta_{\vec{s}\vec{g}} = \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} e^{i\vec{k}(\vec{s}-\vec{g})} \qquad (13)$$

$$\Omega_{\vec{s}} = \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} \Omega_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{s}} \qquad (14)$$

Ovo uvrštavamo u jednačinu (11), skidamo $\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}$ i množimo sa $e^{-i\vec{k}(\vec{s}-\vec{g})}$ i konačno dobijamo

$$E\langle\langle P_{\vec{k}} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}\left(1 - 2\langle P^+_{\vec{s}} P_{\vec{s}}\rangle\right) + \langle\langle \Omega_{\vec{k}} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle \qquad (15)$$

Treba da nadjemo $\Omega_{\vec{k}}$ ako znamo da je $\Omega_{\vec{s}}$ dato sa (14) i

$$I_{\vec{s}\vec{m}} = \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} J_{\vec{k}} e^{i\vec{k}(\vec{s}-\vec{m})} \qquad (16)$$

Posle transformacija dobijamo

$$\Omega_{\vec{k}} = \Delta P_{\vec{k}} - \frac{1}{2} J_{\vec{k}} P_{\vec{k}} + \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \left(J_{\vec{k}+\vec{q}_2-\vec{q}_1} - J_{\vec{q}_1-\vec{q}_2}\right) P^+_{\vec{q}_2} P_{\vec{q}_1} P_{\vec{k}+\vec{q}_2-\vec{q}_1} \qquad (17)$$

Jednačina za funkciju Grina prelazi u

$$E\langle\langle P_{\vec{k}} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}\left(1 - 2\langle P^+_{\vec{s}} P_{\vec{s}}\rangle\right) + \Delta\langle\langle P_{\vec{k}} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle - \frac{1}{2} J_{\vec{k}} \langle\langle P_{\vec{k}} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle +$$

$$+ \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \left(J_{\vec{k}+\vec{q}_2-\vec{q}_1} - J_{\vec{q}_1-\vec{q}_2}\right) \langle\langle P^+_{\vec{q}_2} P_{\vec{q}_1} P_{\vec{k}+\vec{q}_2-\vec{q}_1} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle \qquad (18)$$

tj.

$$\left(E - \Delta + \frac{1}{2} J_{\vec{k}}\right)\langle\langle P_{\vec{k}} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}\left(1 - 2\langle P^+_{\vec{s}} P_{\vec{s}}\rangle\right) +$$

$$+ \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \left(J_{\vec{k}+\vec{q}_2-\vec{q}_1} - J_{\vec{q}_1-\vec{q}_2}\right) \langle\langle P^+_{\vec{q}_2} P_{\vec{q}_1} P_{\vec{k}+\vec{q}_2-\vec{q}_1} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle \qquad (19)$$

Po Dajsonu operatore spinskog sistema možemo, u nekom fiktivnom prostoru, izjednačiti s operatorima "idealnih spinskih talasa" koji raspolažu bozonskim svojstvima. Na osnovu toga možemo dobiti sledeće transformacije za spinske operatore:

$$P^+_{\vec{n}} = B^+_{\vec{n}} \, , \quad P_{\vec{n}} = B_{\vec{n}} - B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \qquad (20)$$

ili posle Furie transformacija

$$P^+_{\vec{k}} = B^+_{\vec{k}} \quad , \quad P_{\vec{k}} = B_{\vec{k}} - B^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}} B_{\vec{k}} \tag{21}$$

Tada (19) prelazi u

$$(E - E^{(0)}_{\vec{k}})(1 - C_0) \langle\langle B_{\vec{k}} | B^+_{\vec{k}} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}(1 - 2C_0) + M_{\vec{k}} \langle\langle B_{\vec{k}} | B^+_{\vec{k}} \rangle\rangle \tag{22}$$

$$(E - E^{(1)}_{\vec{k}}) \langle\langle B_{\vec{k}} | B^+_{\vec{k}} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} \tag{23}$$

$$\langle\langle B_{\vec{k}} | B^+_{\vec{k}} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} \cdot \frac{1}{E - E^{(1)}_{\vec{k}}} \tag{24}$$

gde je

$$E^{(0)}_{\vec{k}} = \Delta - \frac{1}{2} J_{\vec{k}} \tag{25}$$

$$C_0 = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \langle B^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}} \rangle_0 \tag{26}$$

$$M_{\vec{k}} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} (J_{\vec{k}} + J_{\vec{q}} - J_0 - J_{\vec{k}-\vec{q}}) \langle B^+_{\vec{q}} B_{\vec{q}} \rangle_0 \tag{27}$$

$$E^{(1)}_{\vec{k}} = E^{(0)}_{\vec{k}} + M_{\vec{k}} \tag{28}$$

Ako bi računali po formulama (2o) dobili bi

$$P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}} = B^+_{\vec{n}}(B_{\vec{n}} - B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}}) = B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} - B^+_{\vec{n}} B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \tag{29}$$

i ako bi ovo zamenili u magnetizaciju dobili bi

$$\sigma = 1 - 2 \langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \rangle + 2 \langle B^+_{\vec{n}} B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \rangle \tag{30}$$

što bi dalo zavisnost srazmernu $+\tau^3$ što ne odgovara stvarnosti.

Medjutim po Dajsonu je

$$P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}} = B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \tag{31}$$

i ne sledi iz formula (2o). Ako ovo zamenimo u magnetizaciju dobićemo tačan rezultat.

$$\sigma = 1 - 2 \langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \rangle \tag{32}$$

gde je

$$\langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{\frac{E^{(1)}_{\vec{k}}}{\Theta}} - 1} \tag{33}$$

Da bi odredili magnetizaciju prvo treba da nadjemo vrednost energije date sa (28) tj. vrednosti $E^{(0)}_{\vec{k}}$ u odsustvu spoljašnjeg magnetnog polja i vrednost masenog operatora $M_{\vec{k}}$.

$$E^{(0)}_{\vec{k}} = \frac{1}{2}(J_0 - J_{\vec{k}})$$

gde je $J_{\vec{k}}$ - statistički integral i u aproksimaciju najbližih suseda za prostu kubnu rešetku možemo napisati njegov aproksimativan razvoj u red

$$J_{\vec{k}} = \sum_{\vec{n}} I_{\vec{n}\vec{m}} e^{i\vec{k}\vec{n}} = 2I(\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a)$$

U aproksimaciji malih talasnih vektora

$$\cos(ka) = 1 - \frac{1}{2!}(ka)^2 + \frac{1}{4!}(ka)^4 - \frac{1}{6!}(ka)^6 + \frac{1}{8!}(ka)^8 - \frac{1}{10!}(ka)^{10}$$

i

$$k_x = k\sin\theta\cos\varphi \quad , \quad k_y = k\sin\varphi\sin\theta \quad , \quad k_z = k\cos\theta$$

$$J_0 = 6I$$

$$J_{\vec{k}} = 2I\Big\{3 - \frac{1}{2!}a^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) + \frac{1}{4!}a^4(k_x^4 + k_y^4 + k_z^4) - \frac{1}{6!}a^6(k_x^6 + k_y^6 + k_z^6) +$$

$$+ \frac{1}{8!}a^8(k_x^8 + k_y^8 + k_z^8) - \frac{1}{10!}a^{10}(k_x^{10} + k_y^{10} + k_z^{10})\Big\}$$

Pa izraz za energiju dobija oblik

$$E_{\vec{k}}^{(0)} = A_1 a^2 k^2 + A_2 a^4 k^4 + A_3 a^6 k^6 + A_4 a^8 k^8 + A_5 a^{10} k^{10}$$

gde je

$$A_1 = \frac{1}{2} I$$

$$A_2 = -\frac{1}{4!} I \left[\cos^4\varphi\sin^4\theta + \sin^4\varphi\sin^4\theta + \cos^4\theta\right]$$

$$A_3 = \frac{1}{6!} I \left[\cos^6\varphi\sin^6\theta + \sin^6\varphi\sin^6\theta + \cos^6\theta\right]$$

$$A_4 = -\frac{1}{8!} I \left[\cos^8\varphi\sin^8\theta + \sin^8\varphi\sin^8\theta + \cos^8\theta\right]$$

$$A_5 = \frac{1}{10!} I \left[\cos^{10}\varphi\sin^{10}\theta + \sin^{10}\varphi\sin^{10}\theta + \cos^{10}\theta\right]$$

Izraz za maseni operator bio je dat u obliku

$$M_{\vec{k}} = \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} (J_{\vec{k}} + J_{\vec{q}} - J_0 - J_{\vec{k}-\vec{q}}) \langle B_{\vec{q}}^{+} B_{\vec{q}} \rangle .$$

ili ako sa sume predjemo na integral

$$M_{\vec{k}} = \frac{a^3}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{q_m} \frac{(J_{\vec{k}} + J_{\vec{q}} - J_0 - J_{\vec{k}-\vec{q}})\, q^2 dq}{e^{\frac{E^{(0)}_{\vec{q}}}{\Theta}} - 1}$$

Sada razvijamo sumu statističkih integrala

$$(J_{\vec{k}} + J_{\vec{q}} - J_0 - J_{\vec{k}-\vec{q}}) = -\frac{12}{4!} a^4 I (k_x^2 q_x^2 + k_y^2 q_y^2 + k_z^2 q_z^2) +$$

$$+ \frac{30}{6!} a^6 I \left\{ (k_x^4 q_x^2 + k_y^4 q_y^2 + k_z^4 q_z^2) + (k_x^2 q_x^4 + k_y^2 q_y^4 + k_z^2 q_z^4) \right\} =$$

$$= -\frac{1}{2} a^2 I a^2 q^2 \left\{ k_x^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta + k_y^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + k_z^2 \cos^2\theta \right\} +$$

$$+ \frac{1}{4!} a^4 I a^2 q^2 \left\{ k_x^4 \cos^2\varphi \sin^2\theta + k_y^4 \sin^2\varphi \sin^2\theta + k_z^4 \cos^2\theta \right\} +$$

$$+ \frac{1}{4!} a^2 I a^4 q^4 \left\{ k_x^2 \cos^4\varphi \sin^4\theta + k_y^2 \sin^4\varphi \sin^4\theta + k_z^2 \cos^4\theta \right\} =$$

$$= B_1 a^2 q^2 + B_2 a^4 q^4$$

gde je

$$B_1 = -\frac{1}{2} I a^2 \left\{ k_x^2 \cos^2\varphi \sin^2\theta + k_y^2 \sin^2\varphi \sin^2\theta + k_z^2 \cos^2\theta \right\} +$$

$$+ \frac{1}{4!} a^4 I \left\{ k_x^4 \sin^2\theta \cos^2\varphi + k_y^4 \sin^2\varphi \sin^2\theta + k_z^2 \cos^2\theta \right\}$$

$$B_2 = \frac{1}{4!} I a^2 \left\{ k_x^2 \cos^4\varphi \sin^4\theta + k_y^2 \sin^4\varphi \sin^4\theta + k_z^2 \cos^4\theta \right\}$$

treba da nadjemo

$$\frac{1}{e^{\frac{E^{(0)}_{\vec{q}}}{\Theta}} - 1}$$

za to polazimo od

$$\frac{E^{(0)}_{\vec{q}}}{\Theta} = A_1 \frac{a^2 q^2}{\Theta} + A_2 \frac{a^4 q^4}{\Theta} + A_3 \frac{a^6 q^6}{\Theta} + A_4 \frac{a^8 q^8}{\Theta} + A_5 \frac{a^{10} q^{10}}{\Theta}$$

uvodimo smenu

$$\frac{A_1 a^2 q^2}{\Theta} = x \; ; \quad a^2 q^2 = \frac{\Theta}{A_1} x \; ; \quad a^3 q^2 dq = \left(\frac{\Theta}{A_1}\right)^{3/2} \frac{x^{1/2}}{2} dx$$

$$f(x) = \frac{E^{(0)}_{\vec{q}}}{\Theta} = x + \frac{A_2}{A_1}\left(\frac{\Theta}{A_1}\right) x^2 + \frac{A_3}{A_1}\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)^2 x^3 + \frac{A_4}{A_1}\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)^3 x^4 + \frac{A_5}{A_1}\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)^4 x^5$$

$$\frac{1}{e^{f(x)}-1} = \frac{e^{-f(x)}}{1-e^{-f(x)}} = e^{-f(x)}\sum_{m=0}^{\infty} e^{-m f(x)} = \sum_{m=0}^{\infty} e^{-(m+1)f(x)} \underset{m+1=n}{=}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n f(x)}$$

Zadržavamo samo one članove koji su potrebni za tačnost do koje radimo

$$\frac{1}{e^{f(x)}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n\left[x + \frac{A_2}{A_1}\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)x^2 + \frac{A_3}{A_1}\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)^2 x^3\right]}$$

prelazimo na novu promenljivu

$$nx = y \;;\quad x = \frac{1}{n}y \;;\quad x^{1/2}dx = \frac{1}{n^{3/2}}y^{1/2}dy$$

pa dobijamo

$$\frac{1}{e^{f(x)}-1} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-y}\cdot e^{-\left\{\frac{A_2}{A_1}\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)\frac{1}{n}y^2 + \frac{A_3}{A_1}\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)^2\frac{1}{n^2}y^3\right\}}$$

Posle ovih smena suma statističkih integrala dobija oblik

$$(J_{\vec k} + J_{\vec q} - J_0 - J_{\vec k-\vec q}) = B_1\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)\frac{1}{n}y + B_2\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)^2\frac{1}{n^2}y^2$$

Ako sada sve ovo zamenimo u izraz za maseni operator dobijamo

$$M_{\vec k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)^{3/2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\int_0^{\infty}y^{1/2}dy\left\{B_1\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)\frac{1}{n}y +\right.$$

$$\left.+ B_2\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)^2\frac{1}{n^2}y^2\right\}\cdot e^{-y}\cdot e^{-\left\{\frac{A_2}{A_1}\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)\frac{1}{n}y^2 + \frac{A_3}{A_1}\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)^2\frac{1}{n^2}y^3\right\}}$$

Ako našu eksponencijalnu funkciju razvijemo u red dobijamo

$$e^{-\left\{\frac{A_2}{A_1^2}\left(\frac{\Theta}{n}\right)y^2 + \frac{A_3}{A_1^3}\left(\frac{\Theta}{n}\right)^2y^3\right\}} = 1 - \frac{A_2}{A_1^2}\left(\frac{\Theta}{n}\right)y^2 + \left(\frac{\Theta}{n}\right)^2\left(\frac{1}{2}\frac{A_2^2}{A_1^4}y^4 - \frac{A_3}{A_1^3}y^3\right)$$

Posle običnih algebarskih operacija dobijamo

$$M_{\vec k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)^{5/2}\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/2}}B_1\int_0^{\infty}y^{3/2}e^{-y}dy +\right.$$

$$+ B_2\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{7/2}}\int_0^{\infty}y^{5/2}e^{-y}dy - \frac{A_2B_1}{A_1}\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{7/2}}\int_0^{\infty}y^{7/2}e^{-y}dy -$$

$$- \frac{A_2B_2}{A_1}\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{9/2}}\int_0^{\infty}y^{9/2}e^{-y}dy + \frac{1}{2}\frac{A_2^2B_1}{A_1^2}\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{9/2}}\int_0^{\infty}y^{11/2}e^{-y}dy -$$

$$\left.- \frac{A_3B_1}{A_1}\left(\frac{\Theta}{A_1}\right)^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{9/2}}\int_0^{\infty}y^{9/2}e^{-y}dy\right\}$$

ili

$$M_{\vec{k}} = \alpha \zeta_{5/2} \left(\frac{\Theta}{A_1}\right)^{5/2} + \beta \zeta_{7/2} \left(\frac{\Theta}{A_1}\right)^{7/2}$$

gde je

$$\zeta_a = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-a}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \, B_1 \Gamma_{5/2} \, d\theta$$

$$\beta = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta \left\{ B_2 \Gamma_{7/2} - \frac{A_2 B_1}{A_1} \Gamma_{7/2} \right\} d\theta$$

$$\Gamma_n = \int_0^{\infty} y^{n-1} e^{-y} dy$$

Posle izračunavanja integrala i uvodjenja promenljive τ

$$\tau = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{\Theta}{A_1}\right) = \frac{\Theta}{2\pi I}$$

izraz za maseni operator konačno dobija oblik

$$M_{\vec{k}} = -I\pi a^2 k^2 \zeta_{5/2} \tau^{5/2} + \frac{I\pi B'}{12} a^4 k^4 \zeta_{5/2} \tau^{5/2} + \frac{I\pi^2}{2} a^2 k^2 \zeta_{7/2} \tau^{7/2}$$

gde je

$$B' = \cos^4\varphi \sin^4\theta + \sin^4\varphi \sin^4\theta + \cos^4\theta$$

Izraz za energiju ekscitacija tada možemo pisati kao

$$E_{\vec{k}}^{(1)} = E_{\vec{k}}^{(0)} + M_{\vec{k}}$$

$$E_{\vec{k}}^{(1)} = I \left\{ \alpha_1(\tau) \beta_1(\theta,\varphi) a^2 k^2 + \alpha_2(\tau) \beta_2(\theta,\varphi) a^4 k^4 + \alpha_3(\tau) \beta_3(\theta,\varphi) a^6 k^6 \right\}$$

gde je

$$\alpha_1(\tau) = \frac{1}{2} - \pi \zeta_{5/2} \tau^{5/2} + \frac{\pi^2}{2} \zeta_{7/2} \tau^{7/2}$$

$$\alpha_2(\tau) = -\frac{1}{24} + \frac{\pi}{12} \zeta_{5/2} \tau^{5/2}$$

$$\alpha_3(\tau) = \frac{1}{720}$$

$$\beta_1(\theta,\varphi) = 1$$

$$\beta_2(\theta,\varphi)=(\cos^4\varphi+\sin^4\varphi)\sin^4\theta+\cos^4\theta$$

$$\beta_3(\theta,\varphi)=(\cos^6\varphi+\sin^6\varphi)\sin^6\theta+\cos^6\theta$$

Sada, pošto imamo izraz za $E^{(1)}_{\vec{k}}$ možemo izračunati

$$\langle B^+_{\vec{n}}B_{\vec{n}}\rangle=\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{e^{\frac{E^{(1)}_{\vec{k}}}{\theta}}-1}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{k_M}\frac{a^3\,k^2dk}{e^{\frac{E^{(1)}_{\vec{k}}}{\theta}}-1}$$

Ove integrale računamo na isti način kao u predhodnom slučaju i dobijamo

$$\langle B^+_{\vec{n}}B_{\vec{n}}\rangle=\zeta_{3/2}\tau^{3/2}+\frac{3}{4}\pi\zeta_{5/2}\tau^{5/2}+\frac{33}{32}\zeta_{7/2}\pi^2\tau^{7/2}+3\pi\zeta_{3/2}\zeta_{5/2}\tau^4$$

Izraz za megnetizaciju dobija oblik

$$\sigma=1-2\langle B^+_{\vec{n}}B_{\vec{n}}\rangle$$

$$\sigma=1-2\zeta_{3/2}\tau^{3/2}-\frac{3}{2}\pi\zeta_{5/2}\tau^{5/2}-\frac{33}{16}\pi^2\zeta_{7/2}\tau^{7/2}-6\pi\zeta_{3/2}\zeta_{5/2}\tau^4$$

Ako ovaj rezultat uporedimo sa rezultatom dobijenim u § 3. prve glave vidimo da su oni identični.

§ 2. KOREKCIJA ZAKONA DISPERZIJE ZA MAGNETIKE

Da bi odredili zakon disperzije za magnetike polazimo od jednačine (19) predhodnog paragrafa.

$$(E-E_{\vec{k}}^{(0)})\langle\langle P_{\vec{k}} \,|\, P_{\vec{k}}^{+}\rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}\left(1-2\langle P_{\vec{n}}^{+}P_{\vec{n}}\rangle\right) +$$

$$+\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}\left(J_{\vec{k}+\vec{q}_2-\vec{q}_1}-J_{\vec{q}_1-\vec{q}_2}\right)\langle\langle P_{\vec{q}_2}^{+}P_{\vec{q}_1}P_{\vec{k}+\vec{q}_2-\vec{q}_1} \,|\, P_{\vec{k}}^{+}\rangle\rangle$$

Za $P_{\vec{k}}$ ne znamo komutacione relacije jer to sada nisu ni Boze, ni Fermi, ni Pauli operatori. Zbog toga sa njih prelazimo na Boze operatore za koje važi Vikova teorema. Izmedju ovih operatora i Boze operatora ne postoji direktna veza, ali postoji veza sa Pauli operatorima

$$P_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{k}} P_{\vec{k}}\, e^{i\vec{k}\vec{n}} \quad , \quad P_{\vec{n}}^{+} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{k}} P_{\vec{k}}^{+}\, e^{-i\vec{k}\vec{n}}$$

Pauli operatori se mogu predstaviti preko Boze operatora relacijom

$$P_{\vec{n}} = \left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-2)^{\nu}}{(1+\nu)!}B_{\vec{n}}^{+\nu}B_{\vec{n}}^{\nu}\right]^{1/2}B_{\vec{n}} \;;\; P_{\vec{n}}^{+} = B_{\vec{n}}^{+}\left[\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-2)^{\nu}}{(1+\nu)!}B_{\vec{n}}^{+\nu}B_{\vec{n}}^{\nu}\right]^{1/2} ;$$

$$P_{\vec{n}}^{+}P_{\vec{n}} = \sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{(-2)^{\nu}}{(1+\nu)!}B_{\vec{n}}^{+\,\nu+1}B_{\vec{n}}^{\nu+1}$$

Posle razvijanja korena u red i odredjivanja koeficijenata dobijamo:

$$P_{\vec{n}} = B_{\vec{n}} - B_{\vec{n}}^{+}B_{\vec{n}}B_{\vec{n}} + a\,B_{\vec{n}}^{+}B_{\vec{n}}^{+}B_{\vec{n}}B_{\vec{n}}B_{\vec{n}}$$

$$P_{\vec{n}}^{+} = B_{\vec{n}}^{+} - B_{\vec{n}}^{+}B_{\vec{n}}^{+}B_{\vec{n}} + a\,B_{\vec{n}}^{+}B_{\vec{n}}^{+}B_{\vec{n}}^{+}B_{\vec{n}}B_{\vec{n}}$$

gde je

$$a = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

Pošto postoji već data veza operatora $P_{\vec{n}}$ i $P_{\vec{k}}$ za operatore $P_{\vec{k}}$ izražene preko Boze operatora dobijamo

$$P_{\vec{k}} = B_{\vec{k}} - \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}B_{\vec{q}_2}^{+}B_{\vec{q}_1}B_{\vec{k}+\vec{q}_2-\vec{q}_1} + \frac{a}{N^2}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2\vec{q}_3\vec{q}_4}B_{\vec{q}_4}^{+}B_{\vec{q}_3}^{+}B_{\vec{q}_2}B_{\vec{q}_1}B_{\vec{k}+\vec{q}_4+\vec{q}_3-\vec{q}_2-\vec{q}_1}$$

$$P_{\vec{k}}^{+} = B_{\vec{k}}^{+} - \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}B_{\vec{k}+\vec{q}_2-\vec{q}_1}^{+}B_{\vec{q}_1}^{+}B_{\vec{q}_2} + \frac{a}{N^2}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2\vec{q}_3\vec{q}_4}B_{\vec{k}+\vec{q}_4+\vec{q}_3-\vec{q}_2-\vec{q}_1}^{+}B_{\vec{q}_1}^{+}B_{\vec{q}_2}^{+}B_{\vec{q}_3}B_{\vec{q}_4}$$

Sada, pošto imamo $P_{\vec{k}}$ izražene preko Boze operatora možemo i polaznu jednačinu izraziti kao funkciju Grina za Boze operatore. Medjutim, pošto bi izraz bio glomazan razmatramo svaki član ove jednačine posebno, pa ćemo na kraju pošle svodjenja članova napisati konačan izraz.

Sa leve strane jednačine nalaziše se Grinova funkcija oblika

$$\langle\langle P_{\vec{k}} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle = \langle\langle B_{\vec{k}} | B^+_{\vec{k}} \rangle\rangle - \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \langle\langle B^+_{\vec{q}_2} B_{\vec{q}_1} B_{\vec{k}+\vec{q}_2-\vec{q}_1} | B^+_{\vec{k}} \rangle\rangle -$$

$$- \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \langle\langle B_{\vec{k}} | B^+_{\vec{k}+\vec{q}_2-\vec{q}_1} B^+_{\vec{q}_1} B_{\vec{q}_2} \rangle\rangle + \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2 \vec{q}_3 \vec{q}_4} \langle\langle B^+_{\vec{q}_2} B_{\vec{q}_1} B_{\vec{k}+\vec{q}_2-\vec{q}_1} | B^+_{\vec{k}+\vec{q}_4-\vec{q}_3} B^+_{\vec{q}_3} B_{\vec{q}_4} \rangle\rangle +$$

$$+ \frac{a}{N^2} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2 \vec{q}_3 \vec{q}_4} \langle\langle B_{\vec{k}} | B^+_{\vec{k}-\vec{q}_1-\vec{q}_2+\vec{q}_3+\vec{q}_4} B^+_{\vec{q}_1} B^+_{\vec{q}_2} B_{\vec{q}_3} B_{\vec{q}_4} \rangle\rangle +$$

$$+ \frac{a}{N^2} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2 \vec{q}_3 \vec{q}_4} \langle\langle B^+_{\vec{q}_4} B^+_{\vec{q}_3} B_{\vec{q}_2} B_{\vec{q}_1} B_{\vec{k}-\vec{q}_1-\vec{q}_2+\vec{q}_3+\vec{q}_4} | B^+_{\vec{k}} \rangle\rangle +$$

$$+ \frac{a^2}{N^4} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2 \vec{q}_3 \vec{q}_4 \vec{q}_5 \vec{q}_6 \vec{q}_7 \vec{q}_8} \langle\langle B^+_{\vec{q}_4} B^+_{\vec{q}_3} B_{\vec{q}_2} B_{\vec{q}_1} B_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_3-\vec{q}_2+\vec{q}_4} | B^+_{\vec{k}-\vec{q}_5-\vec{q}_6+\vec{q}_7+\vec{q}_8} B^+_{\vec{q}_5} B^+_{\vec{q}_6} B_{\vec{q}_7} B_{\vec{q}_8} \rangle\rangle$$

Posle dekuplovanja i zadržavanja članova zaključno sa kvadratom koncentracije dobijamo

$$\langle\langle P_{\vec{k}} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle = \langle\langle B_{\vec{k}} | B^+_{\vec{k}} \rangle\rangle \{ 1 - 4c_0 + (10 + 2\sqrt{3}) \}$$

gde je

$$c_0 = \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \langle B^+_{\vec{q}} B_{\vec{q}} \rangle_0$$

Prvi član na desnoj strani dobija oblik

$$\langle P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}} \rangle = \langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \rangle - 2 \langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \rangle_0^2$$

Na desnoj strani jednačine nalazi se i član

$$\frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} (J_{\vec{k}+\vec{q}_2-\vec{q}_1} - J_{\vec{q}_1-\vec{q}_2}) \langle\langle P^+_{\vec{q}_2} P_{\vec{q}_1} P_{\vec{k}+\vec{q}_2-\vec{q}_1} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle$$

Zbog glomaznosti izraza napisaćemo samo njegove članove i preći na simbolično pisanje.

$$P^+_{\vec{k}} = B^+_{\vec{k}} - \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} B^+_{\vec{k}+\vec{q}_2-\vec{q}_1} B^+_{\vec{q}_1} B_{\vec{q}_2} + \frac{a}{N^2} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2 \vec{q}_3 \vec{q}_4} B^+_{\vec{k}-\vec{q}_1-\vec{q}_2+\vec{q}_3+\vec{q}_4} B^+_{\vec{q}_1} B^+_{\vec{q}_2} B_{\vec{q}_3} B_{\vec{q}_4}$$

$$P^+_{\vec{q}_2} P_{\vec{q}_1} = B^+_{\vec{q}_2} B_{\vec{q}_1} - \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} B^+_{\vec{q}_2} B^+_{\vec{k}_2} B_{\vec{k}_1} B_{\vec{q}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_1} -$$

$$- \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} B^+_{\vec{q}_2 - \vec{k}_1 + \vec{k}_2} B^+_{\vec{k}_1} B_{\vec{k}_2} B_{\vec{q}_1} + \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3} B^+_{\vec{q}_2 - \vec{k}_1 + \vec{k}_2} B^+_{\vec{k}_1} B_{\vec{k}_3} B_{\vec{q}_1 - \vec{k}_3 + \vec{k}_2}$$

$$P_{\vec{k} - \vec{q}_1 + \vec{q}_2} = B_{\vec{k} - \vec{q}_1 + \vec{q}_2} - \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} B^+_{\vec{k}_2} B_{\vec{k}_1} B_{\vec{k} - \vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{k}_1 + \vec{k}_2} +$$

$$+ \frac{a}{N^2} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \vec{k}_4} B^+_{\vec{k}_4} B^+_{\vec{k}_3} B_{\vec{k}_2} B_{\vec{k}_1} B_{\vec{k} - \vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{k}_1 - \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4}$$

Uvodimo sinbòlično predstavljanje

$$1 = B^+_{\vec{q}_2} B_{\vec{q}_1}$$

$$2 = -\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} B^+_{\vec{q}_2} B^+_{\vec{k}_2} B_{\vec{k}_1} B_{\vec{q}_1 - \vec{k}_1 + \vec{k}_2}$$

$$3 = -\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} B^+_{\vec{k}_2} B^+_{\vec{k}_1} B_{\vec{k}_2 + \vec{k}_1 - \vec{q}_2} B_{\vec{q}_1}$$

$$4 = \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3} B^+_{\vec{k}_2} B^+_{\vec{k}_1} B_{\vec{k}_3} B_{\vec{q}_1 - \vec{q}_2 - \vec{k}_3 + \vec{k}_2 + \vec{k}_1}$$

$$\underline{I} = B_{\vec{k} - \vec{q}_1 + \vec{q}_2}$$

$$\underline{II} = -\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2} B^+_{\vec{k}_2} B_{\vec{k}_1} B_{\vec{k} - \vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{k}_1 + \vec{k}_2}$$

$$\underline{III} = \frac{a}{N^2} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \vec{k}_4} B^+_{\vec{k}_4} B^+_{\vec{k}_3} B_{\vec{k}_2} B_{\vec{k}_1} B_{\vec{k} - \vec{q}_1 + \vec{q}_2 - \vec{k}_1 - \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4}$$

$$a = B^{+}_{\vec{k}}$$

$$b = -\frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} B^{+}_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} B^{+}_{\vec{q}_1} B_{\vec{q}_2}$$

$$c = \frac{a}{N^2} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2 \vec{q}_3 \vec{q}_4} B^{+}_{\vec{k}-\vec{q}_1-\vec{q}_2+\vec{q}_3+\vec{q}_4} B^{+}_{\vec{q}_1} B^{+}_{\vec{q}_2} B_{\vec{q}_3} B_{\vec{q}_4}$$

Pošto je za tačnost sa kojom mi radimo potrebno uzeti najviše članove sa kvadratom koncentracije doprinos će biti samo članovi:

$$1\mathrm{I}a,\ 1\mathrm{II}a,\ 2\mathrm{I}a,\ 3\mathrm{I}a,\ 4\mathrm{I}a,\ 1\mathrm{I}b$$

Ovi članovi istim redom posle dekuplovanja daju:

$$\frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} (J_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} - J_{\vec{q}_1-\vec{q}_2}) \langle\langle B^{+}_{\vec{q}_2} B_{\vec{q}_1} B_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} | B^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle =$$

$$= \langle\langle B_{\vec{k}} | B^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \langle B^{+}_{\vec{q}} B_{\vec{q}} \rangle_0 \{ J_{\vec{k}} + J_{\vec{q}} - J_0 - J_{\vec{k}-\vec{q}} \}$$

$$-\frac{1}{N^2} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2 \vec{k}_1 \vec{k}_2} (J_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} - J_{\vec{q}_1-\vec{q}_2}) \langle\langle B^{+}_{\vec{q}_2} B^{+}_{\vec{k}_2} B_{\vec{q}_1} B_{\vec{k}_1} B_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2-\vec{k}_1+\vec{k}_2} | B^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle =$$

$$= -\langle\langle B_{\vec{k}} | B^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{q} \cdot \vec{q}'} \langle B^{+}_{\vec{q}} B_{\vec{q}} \rangle_0 \langle B^{+}_{\vec{q}'} B_{\vec{q}'} \rangle_0 \{ 2(J_{\vec{k}-\vec{q}+\vec{q}'} - J_{\vec{q}-\vec{q}'}) +$$

$$+ 2(J_{\vec{k}} - J_0) + 2(J_{\vec{q}} - J_{\vec{k}-\vec{q}}) \}$$

$$-\frac{1}{N^2} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2 \vec{k}_1 \vec{k}_2} (J_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} - J_{\vec{q}_1-\vec{q}_2}) \langle\langle B^{+}_{\vec{q}_2} B^{+}_{\vec{k}_2} B_{\vec{k}_1} B_{\vec{q}_1-\vec{k}_1+\vec{k}_2} B_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} | B^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle =$$

$$= -\langle\langle B_{\vec{k}} | B^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{q}\,\vec{q}\,'} \langle B^{+}_{\vec{q}} B_{\vec{q}} \rangle_0 \langle B^{+}_{\vec{q}\,'} B_{\vec{q}\,'} \rangle_0 \left\{ 2(J_{\vec{k}} - J_0) + 4(J_{\vec{q}} - J_{\vec{k}-\vec{q}}) \right\}$$

$$-\frac{1}{N^2} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2 \vec{k}_1 \vec{k}_2} (J_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} - J_{\vec{q}_1-\vec{q}_2}) \langle\langle B^{+}_{\vec{k}_2} B^{+}_{\vec{k}_1} B_{\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{q}_2} B_{\vec{q}_1} B_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} | B^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle =$$

$$= -\langle\langle B_{\vec{k}} | B^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{q}\,\vec{q}\,'} \langle B^{+}_{\vec{q}} B_{\vec{q}} \rangle_0 \langle B^{+}_{\vec{q}\,'} B_{\vec{q}\,'} \rangle_0 \left\{ 2(J_{\vec{k}} - J_0) + 4(J_{\vec{q}} - J_{\vec{k}-\vec{q}}) \right\}$$

$$\frac{1}{N^3} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \vec{q}_1 \vec{q}_2} (J_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} - J_{\vec{q}_1-\vec{q}_2}) \langle\langle B^{+}_{\vec{k}_2} B^{+}_{\vec{k}_1} B_{\vec{k}_3} B_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} B_{\vec{q}_1-\vec{q}_2+\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3} | B^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle =$$

$$= \langle\langle B_{\vec{k}} | B^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{q}\,\vec{q}\,'} \langle B^{+}_{\vec{q}} B_{\vec{q}} \rangle_0 \langle B^{+}_{\vec{q}\,'} B_{\vec{q}\,'} \rangle_0 \left\{ 4(J_{\vec{q}} - J_{\vec{k}-\vec{q}}) + 2(J_{\vec{k}} - J_0) \right\}$$

$$-\frac{1}{N^2} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2 \vec{k}_1 \vec{k}_2} (J_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} - J_{\vec{q}_1-\vec{q}_2}) \langle\langle B^{+}_{\vec{q}_2} B_{\vec{q}_1} B_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{k}_2} | B^{+}_{\vec{k}-\vec{k}_1+\vec{k}_2} B^{+}_{\vec{k}_1} B_{\vec{k}_2} \rangle\rangle =$$

$$= -\langle\langle B_{\vec{k}} | B^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{q}\,\vec{q}\,'} \langle B^{+}_{\vec{q}} B_{\vec{q}} \rangle_0 \langle B^{+}_{\vec{q}\,'} B_{\vec{q}\,'} \rangle_0 \left\{ 2(J_{\vec{k}} - J_0) + 2(J_{\vec{q}} - J_{\vec{k}-\vec{q}}) \right\}$$

Posle sabiranja svih ovih članova drugi sabirak desne strane polazne jednačine konačno dobija oblik

$$\frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1 \vec{q}_2} (J_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} - J_{\vec{q}_1-\vec{q}_2}) \langle\langle P^{+}_{\vec{q}_2} P_{\vec{q}_1} P_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} | P^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle =$$

$$= \langle\langle B_{\vec{k}} | B^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \langle B^{+}_{\vec{q}} B_{\vec{q}} \rangle_0 \left\{ J_{\vec{k}} + J_{\vec{q}} - J_0 - J_{\vec{k}-\vec{q}} \right\} - \langle\langle B_{\vec{k}} | B^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle \frac{1}{N^2} \cdot$$

$$\cdot \sum_{\vec{q}\,\vec{q}\,'} \langle B^{+}_{\vec{q}} B_{\vec{q}} \rangle_0 \langle B^{+}_{\vec{q}\,'} B_{\vec{q}\,'} \rangle_0 \left\{ 2(J_{\vec{k}-\vec{q}+\vec{q}\,'} - J_{\vec{q}-\vec{q}\,'}) + 6(J_{\vec{k}} - J_0) + 8(J_{\vec{q}} - J_{\vec{k}-\vec{q}}) \right\}$$

Polazna jednačina izražena preko Grinove funkcije Boze operatora ima oblik

$$(E-E^{(0)}_{\vec{k}})\{1-4C_o+(10+2\sqrt{3})C_o^2\}\langle\langle B_{\vec{k}}|B^+_{\vec{k}}\rangle\rangle=\frac{i}{2\pi}(1-2\langle B^+_{\vec{n}}B_{\vec{n}}\rangle+$$

$$+4\langle B^+_{\vec{n}}B_{\vec{n}}\rangle_o^2)+\langle\langle B_{\vec{k}}|B^+_{\vec{k}}\rangle\rangle\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}}\langle B^+_{\vec{q}}B_{\vec{q}}\rangle_o(J_{\vec{k}}+J_{\vec{q}}-J_o-J_{\vec{k}-\vec{q}})-$$

$$-\langle\langle B_{\vec{k}}|B^+_{\vec{k}}\rangle\rangle\frac{1}{N^2}\sum_{\vec{q}\vec{q}'}\langle B^+_{\vec{q}}B_{\vec{q}}\rangle_o\langle B^+_{\vec{q}'}B_{\vec{q}'}\rangle_o\{2(J_{\vec{k}-\vec{q}+\vec{q}'}-J_{\vec{q}-\vec{q}'})+$$

$$+6(J_{\vec{k}}-J_o)+8(J_{\vec{q}}-J_{\vec{k}-\vec{q}})\}$$

Da bi dobili zakon disperzije podelićemo obe strane jednačine množiteljem

$$\{1-4C_o+(10+2\sqrt{3})C_o^2\}$$

tako da dobijamo

$$(E-E^{(0)}_{\vec{k}})\langle\langle B_{\vec{k}}|B^+_{\vec{k}}\rangle\rangle=\frac{i}{2\pi}(1-2\langle B^+_{\vec{n}}B_{\vec{n}}\rangle+4\langle B^+_{\vec{n}}B_{\vec{n}}\rangle_o^2)\{1+4C_o-$$

$$-(10+2\sqrt{3})C_o^2+16C_o^2\}+\langle\langle B_{\vec{k}}|B^+_{\vec{k}}\rangle\rangle\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}}\langle B^+_{\vec{q}}B_{\vec{q}}\rangle_o(J_{\vec{k}}+J_{\vec{q}}-J_o-J_{\vec{k}-\vec{q}})+$$

$$+4\langle\langle B_{\vec{k}}|B^+_{\vec{k}}\rangle\rangle C_o\frac{1}{N}\sum_{\vec{q}}\langle B^+_{\vec{q}}B_{\vec{q}}\rangle_o(J_{\vec{k}}+J_{\vec{q}}-J_o-J_{\vec{k}-\vec{q}})-$$

$$-\langle\langle B_{\vec{k}}|B_{\vec{k}}\rangle\rangle\frac{1}{N^2}\sum_{\vec{q}\vec{q}'}\langle B^+_{\vec{q}}B_{\vec{q}}\rangle_o\langle B^+_{\vec{q}'}B_{\vec{q}'}\rangle_o\{2(J_{\vec{k}-\vec{q}+\vec{q}'}-J_{\vec{q}-\vec{q}'})+$$

$$+6(J_{\vec{k}}-J_o)+8(J_{\vec{q}}-J_{\vec{k}-\vec{q}})\}$$

ili

$$(E-E^{(1)}_{\vec{k}})\langle\langle B_{\vec{k}}|B^+_{\vec{k}}\rangle\rangle=\frac{i}{2\pi}(1-2\langle B^+_{\vec{n}}B_{\vec{n}}\rangle+4\langle B^+_{\vec{n}}B_{\vec{n}}\rangle_o^2)(1+4C_o+2(3-\sqrt{3})C_o^2)$$

gde je

$$E_{\vec{k}}^{(1)} = E_{\vec{k}}^{(0)} + M_{\vec{k}}$$

$$M_{\vec{k}} = M_{\vec{k}}^{'} + 4C_0 M_{\vec{k}}^{'} + M_{\vec{k}}^{''}$$

$$M_{\vec{k}}^{'} = \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \langle B_{\vec{q}}^{+} B_{\vec{q}} \rangle_0 \{ J_{\vec{k}} + J_{\vec{q}} - J_0 - J_{\vec{k}-\vec{q}} \}$$

$$C_0 = \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \langle B_{\vec{q}}^{+} B_{\vec{q}} \rangle_0$$

$$C_0 M_{\vec{k}}^{'} = \frac{1}{N^2}\sum_{\vec{q}\,\vec{q}'} \langle B_{\vec{q}'}^{+} B_{\vec{q}'} \rangle_0 \langle B_{\vec{q}}^{+} B_{\vec{q}} \rangle_0 (J_{\vec{k}} + J_{\vec{q}} - J_0 - J_{\vec{k}-\vec{q}})$$

$$M_{\vec{k}}^{''} = -\frac{1}{N^2}\sum_{\vec{q}\,\vec{q}'} \langle B_{\vec{q}}^{+} B_{\vec{q}} \rangle_0 \langle B_{\vec{q}'}^{+} B_{\vec{q}'} \rangle_0 \{ 2 (J_{\vec{k}-\vec{q}+\vec{q}'} - J_{\vec{q}-\vec{q}'}) +$$

$$+ 6 (J_{\vec{k}} - J_0) + 8 (J_{\vec{q}} - J_{\vec{k}-\vec{q}}) \}$$

Da bi našli korigovani zakon disperzije treba da odredimo maseni operator

$$C_0 = \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \langle B_{\vec{q}}^{+} B_{\vec{q}} \rangle_0 = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{q_n} \frac{a^3 q^2 dq}{e^{\frac{E_{\vec{q}}^{(0)}}{\Theta}} - 1}$$

ako računamo na isti način kao u predhodnoj glavi dobijamo

$$C_0 = \zeta_{3/2} \tau^{3/2} + \frac{3}{4}\pi \zeta_{5/2} \tau^{5/2} + \frac{33}{32}\pi^2 \zeta_{7/2} \tau^{7/2} + \frac{281}{2^7}\pi^3 \zeta_{9/2} \tau^{9/2} + \frac{15419}{2^{11}}\pi^4 \zeta_{11/2} \tau^{11/2}$$

Naše $M_{\vec{k}}^{'}$ je ustvari $M_{\vec{k}}$ iz predhodne glave pa možemo pisati

$$M_{\vec{k}}^{'} = \frac{I\pi B'}{12} a^4 k^4 \zeta_{5/2} \tau^{5/2} - I\pi \zeta_{5/2} a^2 k^2 \tau^{5/2} + \frac{I\pi^2}{2} \zeta_{7/2} a^2 k^2 \tau^{7/2}$$

$$4C_0 M_{\vec{k}}^{'} = -4 I\pi \zeta_{3/2} \zeta_{5/2} \tau^4 a^2 k^2$$

Treći član u masenom operatoru je

$$M''_{\vec{k}} = -\frac{1}{N^2}\sum_{\vec{q}\,\vec{q}'}\langle B^+_{\vec{q}} B_{\vec{q}}\rangle_0 \langle B^+_{\vec{q}'} B_{\vec{q}'}\rangle_0 \left[2(J_{\vec{k}-\vec{q}+\vec{q}'} - J_{\vec{q}-\vec{q}'}) + 6(J_{\vec{k}} - J_0) + 8(J_{\vec{q}} - J_{\vec{k}-\vec{q}}) \right\}$$

$$M''_{\vec{k}} = -\frac{a^6}{(2\pi)^6}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\pi} d\varphi' \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{\pi} \sin\theta' d\theta' \int_0^{q_m} \frac{q^2\, dq}{e^{\frac{E^{(0)}_{q}}{\Theta}}-1} \int_0^{q'_m} \frac{q'^2\, dq'}{e^{\frac{E^{(0)}_{q'}}{\Theta}}-1} \cdot$$

$$\left\{ 2(J_{\vec{k}-\vec{q}+\vec{q}'} - J_{\vec{q}-\vec{q}'}) + 6(J_{\vec{k}} - J_0) + 8(J_{\vec{q}} - J_{\vec{k}-\vec{q}}) \right]$$

Na potpuno isti način kao i u predhodnoj glavi izračunavaju se i ovi integrali i daju

$$M''_{\vec{k}} = 4I\pi\, \zeta_{3/2}\, \zeta_{5/2}\, a^2 k^2 \tau^4$$

Maseni operator onda dobija vrednost

$$M_{\vec{k}} = I\left\{ a^2k^2\left(-\pi \zeta_{5/2}\tau^{5/2} + \frac{\pi^2}{2}\zeta_{7/2}\tau^{7/2}\right) + \frac{\pi B'}{12}\zeta_{5/2}\tau^{5/2}a^4k^4 \right\}$$

Tako da je konačan oblik zakona disperzije

$$E^{(1)}_{\vec{k}} = E^{(0)}_{\vec{k}} + M_{\vec{k}}$$

$$E^{(1)}_{\vec{k}} = I\left\{ \alpha_1(\tau)\beta_1(\theta,\varphi)a^2k^2 + \alpha_2(\tau)\beta_2(\theta,\varphi)a^4k^4 + \alpha_3(\tau)\beta_3(\theta,\varphi)a^6k^6 + \right.$$

$$\left. + \alpha_4(\tau)\beta_4(\theta,\varphi)a^8k^8 + \alpha_5(\tau)\beta_5(\theta,\varphi)a^{10}k^{10} \right\}$$

gde je

$$\alpha_1(\tau) = \frac{1}{2} - \pi\zeta_{5/2}\tau^{5/2} + \frac{\pi^2}{2}\zeta_{7/2}\tau^{7/2}$$

$$\alpha_2(\tau) = -\frac{1}{24} + \frac{\pi}{12}\zeta_{5/2}\tau^{5/2}$$

$$\alpha_3(\tau) = \frac{1}{720}$$

$$\alpha_4(\tau) = -\frac{1}{8!}$$

$$\alpha_5(\tau) = \frac{1}{10!}$$

$$\beta_1(\theta,\varphi) = 1$$

$$\beta_2(\theta,\varphi) = (\cos^4\varphi \sin^4\theta + \sin^4\varphi \sin^4\theta + \cos^4\theta)$$

$$\beta_3(\theta,\varphi) = (\cos^6\varphi \sin^6\theta + \sin^6\varphi \sin^6\theta + \cos^6\theta)$$

$$\beta_4(\theta,\varphi) = (\cos^8\varphi \sin^8\theta + \sin^8\varphi \sin^8\theta + \cos^8\theta)$$

$$\beta_5(\theta,\varphi) = (\cos^{10}\varphi \sin^{10}\theta + \sin^{10}\varphi \sin^{10}\theta + \cos^{10}\theta)$$

§ 3. MAGNETIZACIJA SA TAČNOŠĆU DO $T^{\frac{13}{2}}$

Kada imamo korigovani zakon disperzije za magnetike možemo izračunati i magnetizaciju sa tačnošću do $T^{\frac{13}{2}}$ što i jeste krajnji cilj ovog rada. Za slučaj spina $S=\frac{1}{2}$

$$\sigma = \frac{\langle S^z_{\vec{n}}\rangle}{S} = \frac{\frac{1}{2} - \langle P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}}\rangle}{\frac{1}{2}} = 1 - 2\langle P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}}\rangle$$

gde su $P_{\vec{n}}$ - Pauli operatori koji su vezani sa Boze operatorima relacijom

$$P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-2)^{\nu}}{(1+\nu)!} B^{+\,\nu+1}_{\vec{n}} B^{\nu+1}_{\vec{n}}$$

$$P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}} = B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} - B^+_{\vec{n}} B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}} + \frac{4}{3} B^+_{\vec{n}} B^+_{\vec{n}} B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}}$$

$$\langle P^+_{\vec{n}} P_{\vec{n}}\rangle = \langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}\rangle - 2\langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}\rangle_0^2 + 4\langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}\rangle_0^3$$

pa je

$$\sigma = 1 - 2\langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}\rangle + 4\langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}\rangle_0^2 - 8\langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}\rangle_0^3$$

Da bi smo izračunali magnetizaciju moramo prvo izračunati srednje vrednosti koje se u njoj javljaju

$$\langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}\rangle = \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} \langle B^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}}\rangle$$

$$\langle B^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}}\rangle = \frac{\left(1 - 2\langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}\rangle + 4\langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}\rangle_0^2\right)\left(1 + 4\langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}\rangle_0 + 2(3-\sqrt{3})\langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}\rangle_0^2\right)}{e^{\frac{E^{(1)}_{\vec{k}}}{\Theta}} - 1}$$

$$\langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}\rangle = \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{\frac{E^{(1)}_{\vec{k}}}{\Theta}}-1} - 2\langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}\rangle \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{\frac{E^{(1)}_{\vec{k}}}{\Theta}}-1} + 4\langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}\rangle_0^2 \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{\frac{E^{(1)}_{\vec{k}}}{\Theta}}-1} +$$

$$+ 4\langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}\rangle_0 \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{\frac{E^{(1)}_{\vec{k}}}{\Theta}}-1} - 8\langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}\rangle_0 \langle B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}}\rangle \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{\frac{E^{(1)}_{\vec{k}}}{\Theta}}-1} +$$

$$+2(3-\sqrt{3})\langle B_{\vec{n}}^{+}B_{\vec{n}}\rangle_0^2 \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{\frac{E_{\vec{k}}^{(1)}}{\Theta}}-1}$$

Glavni problem se sastoji u odredjivanju veličine

$$\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{\frac{E_{\vec{k}}^{(1)}}{\Theta}}-1} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{k_m} \frac{a^3 k^2 dk}{e^{\frac{E_{\vec{k}}^{(1)}}{\Theta}}-1} = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} J(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta$$

U predhodnom paragnafu našli smo da energija ima oblik

$$E_{\vec{k}}^{(1)} = I\{\alpha_1\beta_1 a^2k^2 + \alpha_2\beta_2 a^4k^4 + \alpha_3\beta_3 a^6k^6 + \alpha_4\beta_4 a^8k^8 + \alpha_5\beta_5 a^{10}k^{10}\}$$

Posle uvodjenja veličine $\tau = \frac{\Theta}{2\pi I}$ dobijamo za

$$f(\vec{k}) = \frac{E_{\vec{k}}^{(1)}}{\Theta} = \frac{\alpha_1 a^2k^2}{2\pi\tau} + \frac{\alpha_2\beta_2 a^4k^4}{2\pi\tau} + \frac{\alpha_3\beta_3 a^6k^6}{2\pi\tau} + \frac{\alpha_4\beta_4 a^8k^8}{2\pi\tau} + \frac{\alpha_5\beta_5 a^{10}k^{10}}{2\pi\tau}$$

Istim transformacijama kao i u prvom paragrafu ove glave posle smena

$$\frac{\alpha_1}{2\pi\tau} a^2k^2 = x \quad , \quad y = nx$$

i razlaganja

$$\frac{1}{\alpha_1} = \frac{2}{1+\pi^2\zeta_{7/2}\tau^{7/2} - 2\pi\zeta_{5/2}\tau^{5/2}} = 2\{1 + 2\pi\zeta_{5/2}\tau^{5/2} - \pi^2\zeta_{7/2}\tau^{7/2}\}$$

dobijamo za

$$J(\theta,\varphi) = \int_0^{k_m} \frac{a^3k^2dk}{e^{\frac{E_{\vec{k}}^{(1)}}{\Theta}}-1} = 2^2\pi^{-3/2}\{1 + 3\pi\zeta_{5/2}\tau^{5/2} - \frac{3}{2}\pi^2\zeta_{7/2}\tau^{7/2}\}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}\cdot$$

$$\cdot\int_0^{\infty} y^{1/2}e^{-y}dy\Big\{1 + \frac{1}{3}\pi\beta_2\frac{1}{n}y^2\tau + \tau^2\Big[-2^3(2\pi)^2\beta_3\alpha_3\frac{1}{n^2}y^3 + \frac{\pi^2\beta_2^2}{18}\frac{1}{n^2}y^4\Big] +$$

$$+\tau^3\Big[-2^4(2\pi)^3\beta_4\alpha_4\frac{1}{n^3}y^4 - \frac{2^3}{3}\pi(2\pi)^2\beta_2\beta_3\alpha_3\frac{1}{n^3}y^5 + \frac{1}{6\cdot 27}\pi^3\beta_2^3\frac{1}{n^3}y^6\Big] +$$

$$+\tau^{\frac{7}{2}}\frac{2}{3}\pi^2\beta_2\zeta_{5/2}\frac{1}{n}y^2 + \tau^4\Big[-2^5(2\pi)^4\alpha_5\beta_5\frac{1}{n^4}y^5 + 2^5(2\pi)^4\beta_3^2\alpha_3^2\frac{1}{n^4}y^6 -$$

$$-\frac{2^4}{3}\pi(2\pi)^3\beta_2\beta_4\alpha_4\frac{1}{n^4}y^6-\frac{1}{6}\cdot\frac{2^4}{9}\pi^2(2\pi)^2\beta_2^2\beta_3\alpha_3\frac{1}{n^4}y^7-$$

$$-\frac{1}{6}\cdot\frac{2^3}{9}\pi^2(2\pi)^2\beta_3\beta_2^2\alpha_3\frac{1}{n^4}y^7+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{3\cdot 2^7}\cdot\pi^4\beta_2^4\frac{1}{n^4}y^8\Big]\Big\}$$

Ili ako ovo zamenimo u

$$\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{e^{\frac{E_{\vec{k}}^{(1)}}{\Theta}}-1}=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}J(\theta,\varphi)\sin\theta\, d\theta$$

i izračunavanja integrala dobijamo

$$\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{e^{\frac{E_{\vec{k}}^{(1)}}{\Theta}}-1}=\zeta_{3/2}\tau^{3/2}+\frac{3\pi}{2^2}\zeta_{5/2}\tau^{5/2}+\frac{33}{2^5}\pi^2\zeta_{7/2}\tau^{7/2}+$$

$$+3\pi\zeta_{3/2}\zeta_{5/2}\tau^4+\frac{281}{2^7}\pi^3\zeta_{9/2}\tau^{9/2}+\frac{3}{4}\pi^2\tau^5\{5\zeta_{5/2}^2-2\zeta_{3/2}\zeta_{7/2}\}+$$

$$+\frac{13419}{2^{11}}\pi^4\zeta_{11/2}\tau^{11/2}$$

Već smo ranije imali

$$\langle B_{\vec{n}}^+B_{\vec{n}}\rangle_0=\zeta_{3/2}\tau^{3/2}+\frac{3\pi}{4}\zeta_{5/2}\tau^{5/2}+\frac{33}{2^5}\pi^2\zeta_{7/2}\tau^{7/2}+$$

$$+\frac{281}{2^7}\pi^3\zeta_{9/2}\tau^{9/2}+\frac{13419}{2^{11}}\pi^4\zeta_{11/2}\tau^{11/2}$$

pa će biti

$$\langle B_{\vec{n}}^+B_{\vec{n}}\rangle_0\langle B_{\vec{n}}^+B_{\vec{n}}\rangle\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{e^{\frac{E_{\vec{k}}^{(1)}}{\Theta}}-1}=\zeta_{3/2}^3\tau^{9/2}+\frac{3^2}{2^2}\pi\zeta_{3/2}^2\zeta_{5/2}\tau^{11/2}$$

$$\langle B_{\vec{n}}^+B_{\vec{n}}\rangle_0\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{e^{\frac{E_{\vec{k}}^{(1)}}{\Theta}}-1}=\zeta_{3/2}^2\tau^3+\frac{3\pi}{2}\zeta_{3/2}\zeta_{5/2}\tau^4+\frac{\pi^2}{2^4}\tau^5\{9\zeta_{5/2}^2+$$

$$+33\zeta_{3/2}\zeta_{7/2}\}+3\pi\zeta_{3/2}^2\zeta_{5/2}\tau^{11/2}$$

$$\langle B_{\vec{n}}^+B_{\vec{n}}\rangle_0^2\frac{1}{N}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{e^{\frac{E_{\vec{k}}^{(1)}}{\Theta}}-1}=\zeta_{3/2}^3\tau^{9/2}+\frac{3^2}{2^2}\pi\zeta_{3/2}^2\zeta_{5/2}\tau^{11/2}$$

$$\langle B^+_{\vec n} B_{\vec n}\rangle \frac{1}{N}\sum_{\vec k} \frac{1}{e^{E^{(1)}_{\vec k}/\Theta}-1} = \zeta^2_{3/2}\tau^3 + \frac{3\pi}{2}\zeta_{3/2}\zeta_{5/2}\tau^4 +$$

$$+\frac{\pi^2}{2^4}\tau^5\{33\zeta_{3/2}\zeta_{7/2} + 9\zeta^2_{5/2}\} + 3\pi\zeta^2_{3/2}\zeta_{5/2}\tau^{11/2}$$

Kada ovo zamenimo u izraz za srednju vrednost dva operatora dobijamo

$$\langle B^+_{\vec n} B_{\vec n}\rangle = \zeta_{3/2}\tau^{3/2} + \frac{3\pi}{4}\zeta_{5/2}\tau^{5/2} + \frac{33}{32}\pi^2\zeta_{7/2}\tau^{7/2} +$$

$$+6\pi\zeta_{3/2}\zeta_{5/2}\tau^4 + \tau^{9/2}\left\{\frac{281}{2^7}\pi^3\zeta_{9/2} + 2(1-\sqrt{3})\zeta^3_{3/2}\right\} +$$

$$+\frac{8}{3}\pi^2\tau^5\{13\zeta^2_{5/2} + 7\zeta_{3/2}\zeta_{7/2}\} + \tau^{11/2}\left\{\frac{13419}{2^{11}}\pi^4\zeta_{11/2} + \frac{3}{2}(7-3\sqrt{3})\pi\zeta^2_{3/2}\zeta_{5/2}\right\}$$

Isto tako je

$$\langle B^+_{\vec n} B_{\vec n}\rangle^2_0 = \zeta^2_{3/2}\tau^3 + \frac{3\pi}{2}\zeta_{3/2}\zeta_{5/2}\tau^4 + \frac{33}{32}\pi^2\zeta_{3/2}\zeta_{7/2}\tau^5 +$$

$$+\frac{9}{2^4}\pi^2\zeta^2_{5/2}\tau^5$$

$$\langle B^+_{\vec n} B_{\vec n}\rangle^3_0 = \zeta^3_{3/2}\tau^{9/2} + \frac{3^2}{2^2}\pi\zeta^2_{3/2}\zeta_{5/2}\tau^{11/2}$$

Pošto imamo sve članove izračunate možemo napistati konačan izraz za magnetizaciju magnetika sa tačnošću do članova reda $T^{13/2}$.

$$\sigma = 1 - 2\langle B^+_{\vec n} B_{\vec n}\rangle + 4\langle B^+_{\vec n} B_{\vec n}\rangle^2_0 - 8\langle B^+_{\vec n} B_{\vec n}\rangle^3_0$$

$$z = 1 - 2\zeta_{3/2}\tau^{3/2} - \frac{3}{2}\pi\zeta_{5/2}\tau^{5/2} - \frac{33}{16}\pi^2\zeta_{7/2}\tau^{7/2} -$$

$$-6\pi\zeta_{3/2}\zeta_{5/2}\tau^4 - \tau^{9/2}\left\{\frac{281}{2^6}\pi^3\zeta_{9/2} + 4(3-\sqrt{3})\zeta_{3/2}^3\right\} -$$

$$-\frac{3}{8}\pi^2\tau^5\left\{20\zeta_{5/2}^2 + 3\zeta_{3/2}\zeta_{7/2}\right\} -$$

$$-\tau^{11/2}\left\{\frac{13419}{2^{10}}\pi^4\zeta_{11/2} + 3(13-3\sqrt{3})\pi\zeta_{5/2}\zeta_{3/2}^2\right\} + O(\tau^{13/2})$$

§4. UTICAJ KOREKCIJE NA VELIČINU TAČKE PRELAZA

Kod feromagnetika se javlja spontani magnetni momenat koji postoji i kada nema promenljiveg magnetnog polja. Spontani momenat ukazuje da su spinovi rasporedjeni na izvestan pravilan način. Uredjenje spinova je spontano ukoliko je temperatura niža od neke kritične. Magnetni momenat koji se pri tom javlja, po jedinici zapremine, naziva se spontana magnetizacija. Spontana magnetizacija jako zavisi od temperature.

Uredjen raspored spinova narušava se pri nekoj kritičnoj temperaturi koja se naziva Kirijeva temperatura za feromagnetike i Neelova temperatura za antiferomagnetike. To su one temperature pri kojima je toplotna energija reda energije izmenskog medjudejstva. Za tipične feromagnetike Kirieva temperatura je reda 10^3 °K.

Kirieva temperatura Θ_c razdvaja uredjenu feromagnetnu fazu za $\Theta<\Theta_c$ od neuredjene paramagnetne faze za $\Theta>\Theta_c$.

Kritičnu temperaturu možemo izračunati iz izraza za magnetizaciju ako stavimo da je magnetizacija jednaka nuli. Po Tjablikovu $\Theta_c = I$. Ovde ćemo izračunati nule magnetizacije koje slede iz izraza dobijenog u predhodnom paragrafu i nule magnetizacije dobijene iz izraza za magnetizaciju Tjablikova, razvijenog do istog stepena temperaturne zavisnosti kao i izraz u predhodnom paragrafu.

Ovde će još biti izračunat odnos kritičnih temperatura dobijenih iz tačnog izraza za magnetizaciju i Tjablikovskog izraza, za različite stepene tačnosti, da bi se videlo kakav je uticaj korekcije na veličinu tačke prelaza.

U prethodnim paragrafima nadjeni su izrazi za magnetizacuju sa tačnošću do članova reda $\tau^{11/2}$.

$$\sigma = 1-2\zeta_{3/2}\tau^{3/2}-\frac{3}{2}\pi\zeta_{5/2}\tau^{5/2}-\frac{33}{16}\pi^2\zeta_{7/2}\tau^{7/2}-6\pi\zeta_{3/2}\zeta_{5/2}\tau^4-$$

$$-\tau^{9/2}\left\{\frac{281}{2^6}\pi^3\zeta_{9/2}+4(3-\sqrt{3})\zeta_{3/2}^3\right\}-\frac{8}{3}\pi^2\tau^5\left\{20\zeta_{5/2}^2+3\zeta_{3/2}\zeta_{7/2}\right\}-$$

$$-\tau^{11/2}\left\{\frac{13419}{2^{10}}\pi^4\zeta_{11/2}+3(13-3\sqrt{3})\zeta_{5/2}\zeta_{3/2}^2\pi\right\}+O(\tau^{11/2})$$

$$\sigma_T = 1-2\zeta_{3/2}\tau^{3/2}-\frac{3}{2}\pi\zeta_{5/2}\tau^{5/2}+4\zeta_{3/2}^2\tau^3-\frac{33}{16}\pi^2\zeta_{7/2}\tau^{7/2}+6\pi\zeta_{3/2}\zeta_{5/2}\tau^4-$$

$$-\frac{281}{2^6}\pi^3\zeta_{9/2}\tau^{9/2}+3\pi^2\tau^5\left\{3\zeta_{5/2}^2+\frac{11}{4}\zeta_{3/2}\zeta_{7/2}\right\}-\frac{13419}{2^{10}}\pi^4\zeta_{11/2}\tau^{11/2}+O(\tau^{12/2})$$

Gde je ζ magnetizacija izračunata u ovom radu, a ζ_T Tjablikovski razvoj za magnetizaciju.

Ako uvedemo oznake: $y\equiv\zeta$ (magnetizacija), A=egzaktni razvoj, B=Tjablikovski razvoj,

$$X=\tau^{1/2}=\left\{\frac{\Theta}{2\pi J}\right\}^{1/2}$$

$$\frac{\Theta_A}{\Theta_B}=L_{AB}=\frac{X_A^2}{X_B^2}=\left\{\frac{X_A}{X_B}\right\}^2$$

izrazi za magnetizaciju dobijaju oblik

$$y_A=1-2\zeta_{3/2}X^3-\frac{3}{2}\pi\zeta_{5/2}X^5-\frac{33}{16}\pi^2\zeta_{7/2}X^7-6\pi\zeta_{3/2}\zeta_{5/2}X^8-$$

$$-X^9\left\{\frac{281}{2^6}\pi^3\zeta_{9/2}+4(3-\sqrt{3})\zeta_{3/2}^3\right\}-\frac{8}{3}\pi^2X^{10}\left\{20\zeta_{5/2}^2+3\zeta_{3/2}\zeta_{7/2}\right\}-$$

$$-X^{11}\left\{\frac{13419}{2^{10}}\pi^4\zeta_{11/2}+3(13-3\sqrt{3})\zeta_{5/2}\zeta_{3/2}^2\pi\right\}+O(X^{12})$$

$$y_B=1-2\zeta_{3/2}X^3-\frac{3}{2}\pi\zeta_{5/2}X^5+4\zeta_{3/2}^2X^6-\frac{33}{16}\pi^2\zeta_{7/2}X^7+6\pi\zeta_{3/2}\zeta_{5/2}X^8-\frac{281}{2^6}\pi^3\zeta_{9/2}X^9+$$

$$+3\pi^2X^{10}\left\{3\zeta_{5/2}^2+\frac{11}{4}\zeta_{3/2}\zeta_{7/2}\right\}-\frac{13419}{2^{10}}\pi^4\zeta_{11/2}X^{11}+O(X^{12})$$

Prva tri člana u ovim razvojima se poklapaju pa će i kritične tačke sa tim stepenom tačnosti biti jednake. Za egzaktan razvoj sa povišenjem tačnosti dobijamo sledeće vrednosti za nule funkcija.

$$y_A^{(2)}=1-5{,}22400X^3-6{,}31930X^5-22{,}94127X^7$$

$$X_A^{(2)}\cong 0{,}49642$$

$$y_A^{(3)}=1-5{,}22400X^3-6{,}31930X^5-22{,}94127X^7-66{,}02406X^8$$

$$X_A^{(3)}\cong 0{,}47409$$

$$y_A^{(4)} = 1 - 5{,}22400\,x^3 - 6{,}31930\,x^5 - 22{,}94127\,x^7 -$$

$$- 66{,}02406\,x^8 - 233{,}96515\,x^9$$

$$x_A^{(4)} \cong 0{,}45291$$

$$y_A^{(5)} = 1 - 5{,}22400\,x^3 - 6{,}31930\,x^5 - 22{,}94127\,x^7 - 66{,}02406\,x^8 -$$

$$- 233{,}96515\,x^9 - 165{,}79729\,x^{10}$$

$$x_A^{(5)} \cong 0{,}44816$$

$$y_A^{(6)} = 1 - 5{,}22400\,x^3 - 6{,}31930\,x^5 - 22{,}94127\,x^7 - 66{,}02406\,x^8 -$$

$$- 233{,}96515\,x^9 - 165{,}79729\,x^{10} - 1981{,}56946\,x^{11}$$

$$x_A^{(6)} \cong 0{,}43094$$

a za Tjablikovski razvoj

$$y_B^{(2)} = 1 - 5{,}22400\,x^3 - 6{,}31930\,x^5 + 27{,}29016\,x^6 - 22{,}94127\,x^7$$

$$x_B^{(2)} \cong 0{,}60248$$

$$y_B^{(4)} = 1 - 5{,}22400\,x^3 - 6{,}31930\,x^5 + 27{,}29016\,x^6 -$$

$$- 22{,}94127\,x^7 + 66{,}02406\,x^8 - 143{,}58329\,x^9$$

$$x_B^{(4)} \cong 0{,}56542$$

$$y_B^{(6)} = 1 - 5{,}22400\,x^3 - 6{,}31930\,x^5 + 27{,}29016\,x^6 - 22{,}94127\,x^7 +$$

$$+66,02406\,X^8 - 143,58329\,X^9 + 399,42519\,X^{10} -$$

$$- 654,33197\,X^{11}$$

$$X_B^{(6)} \cong 0,53660$$

$y_B^{(3)}$, $y_B^{(5)}$ nemaju realne nule za $X > 0$.

Kada imamo nule magnetizacije možemo naći odnose koji nas interesuju.

$$L_{AB}^{(1)} = \left\{ \frac{X_A^{(1)}}{X_B^{(1)}} \right\}^2 = 1,0000$$

$$L_{AB}^{(2)} = \left\{ \frac{X_A^{(2)}}{X_B^{(2)}} \right\}^2 = 0,6788$$

$$L_{AB}^{(4)} = \left\{ \frac{X_A^{(4)}}{X_B^{(4)}} \right\}^2 = 0,6416$$

$$L_{AB}^{(6)} = \left\{ \frac{X_A^{(6)}}{X_B^{(6)}} \right\}^2 = 0,6285$$

Iz ovih odnosa vidimo da je tačnija tačka prelaza, dobijena iz izraza za magnetizaciju izračunatog u ovom radu, niža od tačke prelaza koju daje metod Tjablikova i iznosi negde oko $4/5$ ove.

ZAKLJUČAK

Rezultati dobijeni u ovom radu mogu se rezimirati na sledeći način.

a) Zamenjujući spinski hamiltonijan ekvivalentnim bozonskim hamiltonijanom i dekuplujući funkcije Grina primenom Vikove teoreme za Boze operatore potvrdjen je Dajsonov nisko temperaturni razvoj za magnetizaciju.

b) Procedura koja je dovela do Dajsonovog rezultata proširena je u smeru viših temperatura i dobijen je dodatak na Dajsonov niz u kome su tačno izračunati koeficijenti uz stepene $\tau^{9/2}$, $\tau^{10/2}$, $\tau^{11/2}$.

c) Ovaj rezultat uporedjen je sa rezultatom Tjablikova, koji je manje tačan, ali zato važi u intervalu temperatura do tačke prelaza. U tačkama $\tau^{7/2}$, $\tau^{9/2}$ i $\tau^{11/2}$ uporedjene su nule magnetizacije koju daje izraz koji je dobio Tjablikovi i tačan izraz koji je ovde dobijen i nadjeno je da je tačnija tačka prelaza oko $\frac{4}{5}$ one tačke koju daje metod Tjablikova. Ovo je u skladu sa onim što se obično i tvrdi a to je da metod Tjablikoba i još pre metod molekularnih polja daju suviše visoku tačku prelaza zbog grubosti aproksimacije.

Na kraju treba napomenuti da se metod koji je ovde primenjen može još proširiti u smeru viših temperatura i poredjenjem analognim ovde izloženom sa još većom tačnošću odrediti vrednost temperature prelaza. U neku ruku ovakav prilaz kritičnoj tačci ali iz oblasti temperatura nižih od kritične predstavlja analog onome što se danas uveliko radi a to je traženje tačnije Kiri temperature korišćenjem razvoja iz paramagnetne faze, tj. razvoja koji idu preko temperatura viših od kritične.

Literatura

1. C. KITEL, UVOD U FIZIKU ČVRSTOG STANJA, IZDANJE SAVREMENA ADMINISTRACIJA, BEOGRAD 1970

2. В. М. АГРАНОВИЧ, ТЕОРИЯ ЭКСИТОНОВ, ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА", МОСКВА 1968

3. В. Л. БОНЧ-БРУЕВИЧ, С. В. ТЯБЛИКОВ, МЕТОД ФУНКЦИЙ ГРИНА В СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ, ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО, МОСКВА 1961

4. С. В. ТЯБЛИКОВ, МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ МАГНЕТИЗМА, ИЗДАТЕЛЬСТВО „НАУКА" МОСКВА 1965

5. С. В. ВОНСОВСКИЙ, СОВРЕМЕННОЕ УЧЕНИЕ О МАГНЕТИЗМЕ, ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО, МОСКВА 1953

6. С. В. ВОНСОВСКИЙ, Я. С. ШУР, ФЕРРОМАГНЕТИЗМ, ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО, МОСКВА-ЛЕНИНГРАД 1948

7. F. J. DYSON, PHYSICAL REVIEW, VOLUMEN 102, NUMER 5, 1217, 1230, JUNE 1956

8. M. J. ŠKRINJAR and B. S. TOŠIĆ, PHYS. STAT. SOL 31, 757 (1969)