UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

NASTAVNO-NAUČNA GRUPA : FIZIKA

DIPLOMSKI RAD

BOZE KONDENZACIJA U SISTEMU MAGNONA

MENTOR

ŠKRINJAR Dr. MARIO

STUDENT

MILICA B. ANDREJIĆ

NOVI SAD, 1977.

Najiskrenije se zahvaljujem profesoru Škrinjar Dr. Mariju na ukazanoj pomoći i korisnim sugestijama u toku rada na ovoj temi.

Milica Andrejić

SADRŽAJ

UVOD

U ovom diplomskom radu proučavat ćemo fenomen Boze kondenzacije u sistemu magnona u Hajzenbergovom feromagnetu sa spinom $S=\frac{1}{2}$. S obzirom da su u ovom slučaju operatori kreacije i anhilacije magnona Pauli operatori, problem razmatranja mogućnosti Boze kondenzacije u sistemu magnona sličan je problemu Boze kondenzacije u sistemu eksitona u molekularnim kristalima.

U radovima [1,2,3] problem Boze kondenzacije u sistemu eksitona rešen je tako, što se sa Pauli operatora prešlo na Boze operatore i dalje radilo u sistemu bozona.

U ovom radu problem Boze kondenzacije u sistemu magnona proučavat ćemo metodom Grinovih funkcija ali preko Paulijevih operatora, slično kao što je urađeno u radu [4]. Takođe ćemo razmatrati i mogućnost eksperimentalnog dobijanja i dokazivanja Boze kondenzacije i superfluidnosti u sistemu magnona.

I. 1. HAJZENBERGOV FEROMAGNET SA SPINOM $S = \frac{1}{2}$

Izvori magnetnog polja su naelektrisanja u kretanju, a kako to kretanje postoji u svim supstancama to su magnetne osobine svojstvene svim materijalima.

Fenomenološka podela izvršena na osnovu znaka i veličine magnetne susceptibilnosti χ, razvrstava materijale u tri grube, ali međusobno različite klase. Magnetna susceptibilnost je definisana kao

$$\chi = \frac{M}{H} \qquad 1.1.$$

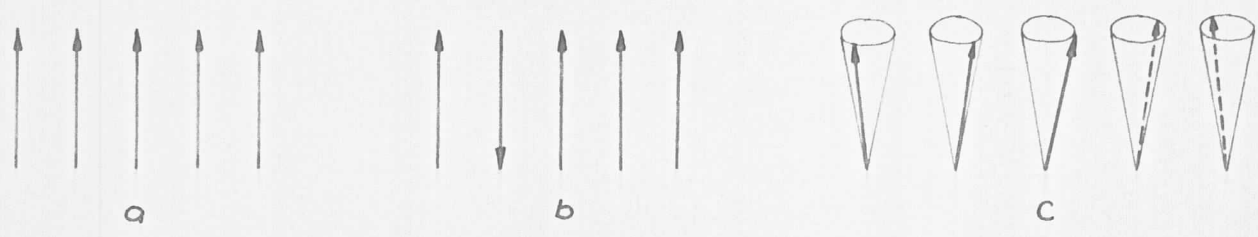
odnosno, χ predstavlja odnos između magnetizacije i jačine polja.

Supstance sa negativnom magnetnom susceptibilnošću se nazivaju dijamagneticima. Supstance sa pozitivnom susceptibilnošću se nazivaju paramagnetici. Veličina magnetne susceptibilnosti je kod njih vrlo mala, reda veličine $10^{-3} - 10^{-6}$, i zato se nazivaju slabomagnetnim materijalima. Nasuprot ovih slabomagnetnih materijala, postoji niz jakomagnetnih materijala. U takvih materijala magnetizacija nije linearna funkcija spoljašnjeg polja, već između njih postoji složenija zavisnost. U jako magnetne materijale spadaju feromagnetici, antiferomagnetici, ferimagnetici i drugi.

Danas je poznato da su nosioci magnetnih osobina kod feromagnetika elektroni nepopunjene 3d odnosno 4f ljuske atoma, koji ulaze u sastav kristalne rešetke. Makroskopski magnetni moment javlja se kao rezultat spinskog uređenja elektrona ovih nepopunjenih ljuski.

Feromagnet je sistem uređenih spinova koji međusobno interoguju silama izmene i dipol-dipolnom interakcijom. Ova dipol-dipolna interakcija uzima se u obzir samo kod slabih feromagnetika dok je kod jakih zanemarljiva jer je oko 10^2 slabija od interakcije izmene, što je i slučaj u ovom radu.

Na temperaturi $0°K$, svi spinovi su usmereni u jednom pravcu, tj. paralelni su. Osa, duž koje su orijentisani, naziva se osa kvantizacije (sl. br. 1.a). Ovakvo stanje sistema spinova naziva se osnovnim stanjem feromagnetika. Ako je jedan od spinova suprotno usmeren, imamo eksitovano stanje (sl. 1.b) pri čemu je energija sistema povećana a totalni spin smanjen. Eksitaciju mnogo niže energije možemo formirati ako dopustimo da je smanjenje momenta impulsa sistema kao celine raspoređeno na sve spinove, kao na slici 1. c.



SLIKA BR. 1

Elementarne eksitacije spinskog sistema koje se zbog interakcije među spinovima šire duž kristala slično talasu, nazivaju se spinskim talasima. Ako uzmemo u obzir kvantnomehaničku prirodu spina, to se i spinski talasi mogu kvantovati. Ti kvanti su poznati pod imenom magnoni.

Eksperimentalno određivanje magnonskog spektra moguće je vršiti sa snopom neutrona, pri čemu može da dođe do difrakcije neutrona na magnetskom kristalu ili pak da magnetska struktura neelastično raseje neutrone uz kreaciju ili anhilaciju magnona.

U feromagnetike spadaju kristali gvožđa, nikla, kobalta, jedan deo lantanida kao i mnogobrojne legure tih elemenata sa neferomagnetnim elementima. Feromagnetizam se kod tih elemenata javlja na temperaturama od 0°K do kritične temperature, odnosno do Kirijeve tačke, iznad koje se feromagnetici ponašaju kao paramagnetici.

Najjednostavniji model za opisivanje feromagnetnih osobina kristala je Hajzenbergov izotropni model. Po ovom modelu je jedino kvantnomehanička interakcija izmene među elektronima odgovorna za magnetne osobine tela, a dipol-dipolna interakcija se zanemaruje.

Sada ćemo napisati hamiltonijan Hajzenbergovog izotropnog feromagnetika smeštenog u spoljašnjem homogenom magnetnom polju H.

Obeležimo sa $\vec{n}$ i $\vec{m}$ vektore čvorova rešetke, a odgovarajuće operatore spinova sa $\vec{S}_{\vec{n}}$ i $\vec{S}_{\vec{m}}$, tada je energija interakcije između spinova u čvoru $\vec{n}$ i $\vec{m}$, po Hajzenbergu, srazmerna skalarnom proizvodu spinova na ta dva čvora rešetke. Ako uzmemo u obzir energiju interakcije na svim čvorovima rešetke, onda možemo napisati hamiltonijan za ceo kristal:

$$H = -\mu H \sum_{\vec{n}} S^z_{\vec{n}} - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} \vec{S}_{\vec{n}} \vec{S}_{\vec{m}} \qquad 1.2.$$

Ovde smo iskoristili sledeće oznake:

μ - magnetni moment atoma

H - spoljašnje magnetno polje

$\vec{S}$ - operator spina

$I_{\vec{n}\vec{m}}$ - tzv. integral izmene

$I_{\vec{n}\vec{m}}$ je energija sila izmene i povezana je sa prekrivanjem raspodele naelektrisanja atoma $\vec{n}$ i $\vec{m}$. Integral izmene ima svojstvo da je $I_{\vec{n}\vec{m}} = I_{\vec{m}\vec{n}}$ i njegova vrednost eksponencijalno opada sa rastojanjem $|\vec{n}-\vec{m}|$, tako da možemo koristiti aproksimaciju najbližih suseda. Faktor $\frac{1}{2}$ stavljamo da bi izbegli udvostručavanje energije interakcije.

Nas posebno zanima Hajzenbergov feromagnet sa spinom $S=\frac{1}{2}$. Hamiltonijan (1.2.) nakon odvajanja energije osnovnog stanja H_0 za spin $S=\frac{1}{2}$, možemo napisati na sledeći način:

$$H = H_0 + [\mu H + \tfrac{1}{2} J_0] \sum_{\vec{n}} (\tfrac{1}{2} - S^z_{\vec{n}}) - \tfrac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} S^-_{\vec{n}} S^+_{\vec{m}} - \tfrac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} (\tfrac{1}{2} - S^z_{\vec{n}})(\tfrac{1}{2} - S^z_{\vec{m}}) \qquad 1.3.$$

gde je: $H_0 = -\frac{1}{2} N\mu H - \frac{1}{8} N J_0$ i $S^{\pm}_n = S^x_n \pm i S^y_n$

I. 2. PRELAZ NA PAULI OPERATORE

S obzirom da su u slučaju spina $S=\frac{1}{2}$ komutacione relacije za spinske operatore date kao:

$$\begin{aligned} &[S^+_{\vec{n}}, S^-_{\vec{m}}] = 2 S^z_{\vec{n}} \delta_{\vec{n}\vec{m}} \\ &(S^+_{\vec{n}})^2 = (S^-_{\vec{n}})^2 = 0 \\ &\{S^+_{\vec{n}}, S^-_{\vec{n}}\} = 1 \end{aligned} \qquad 1.4.$$

spinske operatore možemo zameniti sa Pauli operatorima $P^{+}_{\vec{n}}$ i $P_{\vec{n}}$ na sledeći način:

$$S^{-}_{\vec{n}} = P^{+}_{\vec{n}} \qquad S^{+}_{\vec{n}} = P_{\vec{n}} \qquad \frac{1}{2} - S^{z}_{\vec{n}} = P^{+}_{\vec{n}} P_{\vec{n}} \qquad 1.5.$$

$P^{+}_{\vec{n}}$ je operator kreacije, a P_{n} je operator anhilacije elementarnih eksitacija. Pauli operatori nemaju ni bozonsku ni fermionsku kinematiku, odnosno ne pokoravaju se komutacionim relacijama koje važe za ove operatore. Pauli operatori predstavljaju prelaz između Fermi i Boze operatora jer u slučaju da komutacione relacije kojima se oni pokoravaju primenimo na isti čvor rešetke ponašaju se kao Fermi operatori, a za različite čvorove Pauli operatori se ponašaju kao Boze operatori.

Pauli operatori u konfiguracionom prostoru zadovoljavaju sledeće komutacione relacije:

$$\begin{aligned} [P_{\vec{n}}, P^{+}_{\vec{m}}] &= (1 - 2P^{+}_{\vec{n}} P_{\vec{n}})\, \delta_{\vec{n}\vec{m}} \\ [P_{\vec{n}}, P_{\vec{m}}] &= [P^{+}_{\vec{m}} P^{+}_{\vec{n}}] = 0 \qquad 1.6. \\ [P_{\vec{a}}, \hat{L}_{\vec{n}}] &= P_{\vec{n}}\, \delta_{\vec{a}\vec{n}} \end{aligned}$$

gde je $\hat{L}_{\vec{n}} = P^{+}_{\vec{n}} P_{\vec{n}}$ operator broja pauliona koji ima samo dve svojstvene vrednosti: 0 i 1. Kao što vidimo iz (1.4.) i (1.6.), komutacione relacije za spinske operatore u slučaju $S = \frac{1}{2}$ i Pauli operatora su ekvivalentne. Na osnovu ovoga možemo Hamiltonijan za Hajzenbergov feromagnetik sa spinom $S = \frac{1}{2}$ napisati u Pauli reprezentaciji:

$$H = H_0 + \Delta \sum_{\vec{n}} P_{\vec{n}}^{+} P_{\vec{n}} - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} P_{\vec{n}}^{+} P_{\vec{m}} - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} P_{\vec{n}}^{+} P_{\vec{m}}^{+} P_{\vec{n}} P_{\vec{m}} \qquad 1.7.$$

pri čemu je $\quad \Delta = \mu H + \frac{1}{2} J_0$

Član H_0 ćemo zanemariti zato što se vrlo često energija računa od osnovnog stanja, pa (1.7.) možemo napisati kao:

$$H = \Delta \sum_{\vec{n}} P_{\vec{n}}^{+} P_{\vec{n}} + \sum_{\vec{n}\vec{m}} \alpha_{\vec{n}-\vec{m}} P_{\vec{n}}^{+} P_{\vec{m}} + \sum_{\vec{n}\vec{m}} \beta_{\vec{n}-\vec{m}} P_{\vec{n}}^{+} P_{\vec{m}}^{+} P_{\vec{n}} P_{\vec{m}} \qquad 1.8.$$

U slučaju interakcije izmene, kao što se vidi, $\alpha_{\vec{n}-\vec{m}} = \beta_{\vec{n}-\vec{m}} = \frac{1}{2} I_{\vec{n}\vec{m}}$, ali smo nove oznake α i β uveli da bi obuhvatili i slučaj dipol- dipolne interakcije u slobodnim feromagneticima kod kojih je $\alpha_{\vec{n}-\vec{m}} \neq \beta_{\vec{n}-\vec{m}}$

I. 3. ZAKON DISPERZIJE ZA MAGNONE

Sada ćemo dati kvantnomehaničko izvođenje disperzione relacije za magnone za Hajzenbergov feromagnetik sa spinom $S = \frac{1}{2}$ koji ima prostu kubnu strukturu, a čiji je hamiltonijan dat kao (1.8.)

Služeći se Furije transformacijama za Pauli operatore:

$$P_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} P_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{n}}$$

$$P_{\vec{n}}^{+} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} P_{\vec{k}}^{+} e^{-i\vec{k}\vec{n}} \qquad 1.9.$$

$$X_{\vec{n}-\vec{m}} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} X_{\vec{k}} e^{i\vec{k}(\vec{n}-\vec{m})}$$

preći ćemo iz konfigurativnog prostora u inpulsni prostor, odnosno u prostor recipročne rešetke. Sumiranje se vrši po svim $\vec{k}$ koji pripadaju prvoj Briluenovoj zoni.

$$H = \sum_{\vec{k}} (\Delta + \alpha_{\vec{k}}) P^{+}_{\vec{k}} P_{\vec{k}} + \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}\vec{q}_1\vec{q}_2} \beta(\vec{k}) P^{+}_{\vec{q}_1} P_{\vec{q}_1-\vec{k}} P^{+}_{\vec{q}_2} P_{\vec{q}_2+\vec{k}} \qquad 1.10.$$

Iz ovog hamiltonijana sada određujemo zakon disperzije za sistem idealnih spinskih talasa za slučaj spina $S = \frac{1}{2}$, tj. u slučaju kada zanemarujemo interakciju.

$$E_{\vec{k}} = \frac{\partial H}{\partial P^{+}_{\vec{k}} \partial P_{\vec{k}}} = \frac{\partial}{\partial P^{+}_{\vec{k}} \partial P_{\vec{k}}} \sum_{\vec{n}} (\Delta + \alpha_{\vec{k}}) P^{+}_{\vec{k}} P_{\vec{k}}$$

$$E_{\vec{k}} = \Delta + \alpha_{\vec{k}}$$

Imajući u vidu da je: $\Delta = \mu H + \frac{1}{2} J_0$ i $\alpha_{\vec{k}} = -\frac{1}{2} J_{\vec{k}}$

dobijamo:

$$E_{\vec{k}} = \mu H + \frac{1}{2} (J_0 - J_{\vec{k}}) \qquad 1.13.$$

Zakon disperzije (1.13.) možemo napisati u konkretnijem obliku ako uvedemo sledeće aproksimacije:

1. Kristali feromagnetika imaju prostu kubnu strukturu sa brojem najbližih suseda 6.
2. Aproksimacija najbližih suseda
3. Pretpostavljamo da se radi o malim impulsima, tj. radimo u oblasti u kojoj talasni vektori imaju male vrednosti $ka \ll 1$

Služeći se ovim aproksimacijama, određujemo J_0 i $J_{\vec{k}}$:

$$J_0 = \sum_{\vec{m}} I_{o\vec{m}} = 6I$$

$$J_{\vec{k}} = \sum_{\vec{m}} I_{o\vec{m}} e^{i\vec{m}\vec{k}} = I\left(e^{iak_x} + e^{-iak_x} + e^{iak_y} + e^{-iak_y} + e^{iak_z} + e^{-iak_z}\right)$$

$$J_{\vec{k}} = 2I\left(\cos k_x a + \cos k_y a + \cos k_z a\right) \qquad 1.14.$$

a imajući u vidu uslov $ka \ll 1$ možemo kosinuse razviti u red $\left(\cos k_x = 1 - \frac{1}{2}k^2x^2\right)$, pa dobijamo :

$$J_{\vec{k}} = 6I - Ia^2k^2 \qquad 1.15.$$

Ako zamenimo (1.14.) i (1.15.) u zakon disperzije za spinske talase (1.13.), on se može napisati kao

$$E_{\vec{k}} = \mu H + \frac{1}{2} Ia^2k^2$$

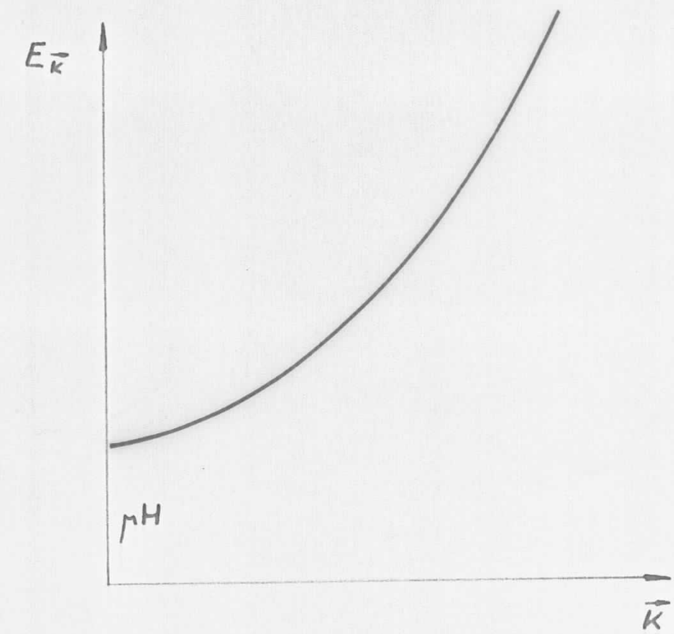
Ovde smo sa I obeležili vrednost matričnog elementa interakcije za najbliže susede.

Energiju $E_{\vec{k}}$ možemo izraziti i preko efektivne mase i na taj način pokazati da se magnoni feromagnetika sa spinom $S = \frac{1}{2}$, pri gore navedenim aproksimacijama, ponašaju kao kvazičestice sa efektivnom masom

$$m^* = \frac{\hbar}{Ia^2}$$

$$E_{\vec{k}} = \mu H + \frac{p^2}{2m^*}$$

Zakon disperzije možemo prikazati grafički , kao na slici 2.



SLIKA BR. 2

BOZE-KONDENZACIJA U SISTEMU MAGNONA

II. 1. O MOGUĆNOSTI BOZE-KONDENZACIJE U SISTEMU MAGNONA

Pri razmatranju mogućnosti Boze-kondenzacije magnona u Hajzenbergovom izotropnom feromagnetiku sa spinom $S=\frac{1}{2}$, moramo imati u vidu činjenicu da su magnoni paulioni čiji je hamiltonijan u konfiguracionom prostoru dat relacijom (1.8.)

Analizirajući pitanje mogućnosti Boze-kondenzacije magnona mora se dati odgovor na dva pitanja.

Jedno pitanje je dali se u sistemu kvazičestica kakvi su magnoni može zadovoljiti osnovni preduslov za pojavu Boze-kondenzacije, tj. dali u sistemu magnona može postojati stanje u kojem je broj magnona konstantan. Na ovom pitanju je dosta rađeno zadnjih godina i većina autora daje pozitivan odgovor. Naime, broj magnona biće konstantan u jednom stanju ako je vreme uspostavljanja termodinamičke ravnoteže (t_c), u procesima sudara, kraće od vremena života magnona (t_e).

Vreme uspostavljanja termodinamičke ravnoteže u sistemu magnona, možemo izračunati, imajući u vidu da je:

$$t_c = \frac{1}{a_i^2 n^2 v} \qquad 2.1.$$

Magnon ima razmere konstante kristalne rešetke $a \sim 10^{-8}$ cm a brzina mu je $v \sim 10^{6}$ cm/s. n je broj magnona u 1 cm^3 kristala i iznosi $n \sim 10^{18} - 10^{20}$. Sledi da je:

$$t_c \approx 10^{-8} - 10^{-10} \text{ s}$$

Eksperimentalno je još utvrđeno da je vreme života magnona

$$t_e \sim 10^{-5} \text{ s}$$

pa zaključujemo da je potreban uslov

$$t_c < t_e \qquad 2.2.$$

zadovoljen, što znači da je u Hajzenbergovom feromagnetiku na niskim temperaturama moguća Boze-kondenzacija magnona u vremenskom intervalu $10^{-10}\text{ s} < t < 10^{-5}\text{ s}$.

Drugo pitanje na koje treba dati odgovor pri razmatranju mogućnosti Boze-kondenzacije magnona je, u kojoj meri na kolektivna svojstva paulijona, utiče činjenica da se oni ne pokoravaju Boze-Ajnštajnovoj statistici.

Utvrđeno je da ova činjenica, tj. da se magnoni ne pokoravaju Boze-Ajnštajnovoj statistici, ne predstavlja prepreku da nastaje Boze-kondenzacija u sistemu magnona, s obzirom da se na niskim temperaturama i pri malim koncentracijama sistem magnona ponaša slično sistemu bozona.

Situacija je slična kao kod eksitona za molekulske kristale, koji su takođe paulioni, i kod kojih dolazi do Boze-kondenzacije, kao što je prikazano u [2]. Potrebno je, međutim, istaći da će se sistem magnona ponašati slično eksitonima samo u slučaju da se sistem nalazi u jakom magnetnom polju i da je interakcija između spinova slaba, što drugim rečima znači da je energija pobuđenja magnona μH mnogo veća od širine magnonske zone, tj. $\mu H \gg I$ (videti [6]). Zbog toga realno je očekivati da do pojave Boze kondenzacije dođe u slabim feromagneticima kod kojih preovlađuje dipol-dipolna interakcija.

II.2. SPEKTAR MAGNONA U USLOVIMA BOZE KONDENZACIJE

Spektar magnona u uslovima Boze kondenzacije tražićemo služeći se hamiltonijanom datim sa (1.10.)

$$H = \sum_{\vec{k}} (\Delta + \alpha_{\vec{k}}) P^{+}_{\vec{k}} P_{\vec{k}} + \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}\vec{q}_1\vec{q}_2} \beta(\vec{k}) P^{+}_{\vec{q}_1} P_{\vec{q}_1-\vec{k}} P^{+}_{\vec{q}_2} P_{\vec{q}_2+\vec{k}} \qquad 2.3.$$

S obzirom da je ovaj Hamiltonijan za Hajzenbergov feromagnetik sa spinom $S = \frac{1}{2}$ dat preko Pauli operatora u impulsnom prostoru, odnosno u prostoru recipročne rešetke, navešćemo relacije komutacije Paulijevih operatora u $\vec{k}$ prostoru:

$$[P_{\vec{k}} , P^{+}_{\vec{q}}] = \delta_{\vec{k}\vec{q}} - \frac{2}{N} \sum_{\vec{l}} P^{+}_{\vec{q}+\vec{l}} P_{\vec{q}+\vec{l}}$$

$$[P_{\vec{k}}, P_{\vec{q}}] = [P^+_{\vec{k}}, P^+_{\vec{q}}] = 0$$
$$[P_{\vec{k}}, \hat{L}_{\vec{\nu}}] = P_{\vec{k}+\vec{\nu}} \qquad 2.4.$$
$$[P^+_{\vec{k}}, \hat{L}_{\vec{\nu}}] = -P_{\vec{k}-\vec{\nu}}$$

Dopunski uslovi:

$$\sum_{q_1 q_2} P^+_{\vec{q}_1+\vec{q}_2} P_{\vec{q}_1+\vec{\mu}} P_{\vec{q}_2+\vec{\nu}} = 0$$

$$\sum_{q_1 q_2} P_{\vec{q}_1+\vec{q}_2} P_{\vec{q}_1+\vec{\mu}} P_{\vec{q}_2+\vec{\nu}} = 0$$

Kako izračunavanje spektra vršimo u sistemu gde postoji kondenzat, moramo uvesti i hemijski potencijal μ. Hamiltonijan (2.3.) napisaćemo u sledećem obliku:

$$H = \sum_{\vec{k}} (\Delta - \mu) P^+_{\vec{k}} P_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} \alpha_{\vec{k}} P^+_{\vec{k}} P_{\vec{k}} + \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}\vec{q}_1\vec{q}_2} \beta_{\vec{k}} P^+_{\vec{q}_1} P_{\vec{q}_1-\vec{k}} P^+_{\vec{q}_2} P_{\vec{q}_2+\vec{k}} \qquad 2.5.$$

Elementarne eksitacije u feromagnetiku su one koje kreira operator $P^+_{\vec{k}}$. Zbog toga ćemo problem Boze-kondenzacije u sistemu pauliona rešavati metodom dvovremenskih temperaturskih Grinovih funkcija koje je razvio Tabljikov [5].

Sistem sa kondenzatom je smeša dva podsistema, kondenzata i čestica van kondenzata, koji uzajamno reaguju. Bitni procesi u njemu su:

1. Procesi rasejanja između kondenzatnih pauliona koje opisuje Grinova funkcija $G_{\vec{k}} \equiv \langle\langle P_{\vec{k}} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle$

2. Procesi anhilacije dva kondenzatna pauliona na račun kreacije dva nadkondenzatna ili pak obrnut proces kreacije dva

kondenzatna pauliona na račun anhilacije dva nadkondenzatna magnona. Ove procese opisujemo Grinovom funkcijom $D_{\vec{k}} \equiv \langle\langle P^+_{-\vec{k}} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle$.

Sistem jednačina za Grinove funkcije $G_{\vec{k}}$ i $D_{\vec{k}}$, koje su Furije transformi dvovremenskih temperaturskih Grinovih funkcija:

$$G_{\vec{k}}(t-t') = \theta(t-t') \langle [P_{\vec{k}}(t), P^+_{\vec{k}}(t')] \rangle$$

$$D_{\vec{k}}(t-t') = \theta(t-t') \langle [P^+_{-\vec{k}}(t), P^+_{\vec{k}}(t')] \rangle \qquad 2.6.$$

je dovoljan za opisivanje sistema sa kondenzatom i mi ćemo ga simultano rešavati, pošto je to kulpovan sistem, tj. ne raspada se na odvojene jednačine.

Sistem jednačina za funkcije $G_{\vec{k}} \equiv \langle\langle P_{\vec{k}} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle$ i $D_{\vec{k}} = \langle\langle P^+_{-\vec{k}} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle$ ima sledeći oblik:

$$E \langle\langle P_{\vec{k}} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} \langle [P_{\vec{k}}, P^+_{\vec{k}}] \rangle + \langle\langle [P_{\vec{k}}, H] || P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle$$

$$E \langle\langle P^+_{-\vec{k}} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi} \langle [P^+_{-\vec{k}}, P^+_{\vec{k}}] \rangle + \langle\langle [P^+_{-\vec{k}}, H] || P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle \qquad 2.7.$$

ili imajući u vidu relacije komutacije za Pauli operatore u impulsnom prostoru (2.4.), imamo:

$$E \langle\langle P_{\vec{k}} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}(1-2C) + \langle\langle [P_{\vec{k}}, H] || P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle$$

$$E \langle\langle P^+_{-\vec{k}} | P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle = \langle\langle [P^+_{-\vec{k}}, H] || P^+_{\vec{k}} \rangle\rangle$$

gde je: H – hamiltonijan sistema

$P_{\vec{k}}$, $P^{+}_{\vec{k}}$, $P^{+}_{-\vec{k}}$ - operatori anhilacije i kreacije pauliona

E - energija elementarnih eksutacija

$$C = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \langle\langle P^{+}_{\vec{k}} P_{\vec{k}} \rangle\rangle \quad \text{- koncentracija pauliona} \tag{2.9.}$$

Da bi rešili ovaj sistem jednačina potražit ćemo komutatore $[P_{\vec{k}}, H]$ i $[P^{+}_{-\vec{k}}, H]$ koji figurišu u Grinovim funkcijama.

Napišimo hamiltonijan (2.5.) preko operatora $\hat{L}_{\vec{\nu}}$ koji je definisan :

$$L_{\nu} = \sum_{\vec{q}} P^{+}_{\vec{q}} P_{\vec{q}+\vec{\nu}}$$

$$H = (\Delta-\mu)\hat{L}_0 + \sum_{\vec{q}} \alpha_{\vec{q}} P^{+}_{\vec{q}} P_{\vec{q}} + \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \beta_{\vec{q}} \sum_{\vec{q}_1} P^{+}_{\vec{q}_1} P_{\vec{q}_1-\vec{q}} \sum_{\vec{q}_2} P^{+}_{\vec{q}_2} P_{\vec{q}_2+\vec{q}}$$

gde je:
$$\hat{L}_0 = \sum_{\vec{k}} P^{+}_{\vec{k}} P_{\vec{k}+0}$$

$$H = (\Delta-\mu)\hat{L}_0 + \sum_{\vec{q}} \alpha_{\vec{q}} P^{+}_{\vec{q}} P_{\vec{q}} + \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \beta_{\vec{q}} \hat{L}_{-\vec{q}} \hat{L}_{\vec{q}} \tag{2.10.}$$

Koristeći hamiltonijan (2.10.) napišimo komutatore $[P_{\vec{k}}, H]$ i $[P^{+}_{-\vec{k}}, H]$

$$[P_{\vec{k}}, H] = (\Delta-\mu)[P_{\vec{k}} \hat{L}_0] + \sum_{\vec{q}} \alpha_{\vec{q}} [P_{\vec{k}} P^{+}_{\vec{q}}] P_{\vec{q}} + \\ + \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \beta_{\vec{q}} \left\{ \hat{L}_{-\vec{q}} [P_{\vec{k}} \hat{L}_{\vec{q}}] + [P_{\vec{k}} \hat{L}_{-\vec{q}}] \hat{L}_{\vec{q}} \right\}$$

2.11.

$$[P^{+}_{-\vec{k}}, H] = (\Delta-\mu)[P^{+}_{-\vec{k}} \hat{L}_0] + \sum_{\vec{q}} \alpha_{\vec{q}} [P^{+}_{-\vec{k}} P^{+}_{\vec{q}}] P_{\vec{q}} + \\ + \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \beta_{\vec{q}} \left\{ \hat{L}_{-\vec{q}} [P^{+}_{-\vec{k}} \hat{L}_{\vec{q}}] + [P^{+}_{-\vec{k}} \hat{L}_{-\vec{q}}] \hat{L}_{\vec{q}} \right\}$$

Jednačine (2.11) možemo transformisati koristeći se komutacionim relacijama koje važe za Pauli operatore u $\vec{k}$ prostoru (2.4.)

$$[P_{\vec{k}}, H] = (\Delta-\mu+\alpha_{\vec{k}})P_{\vec{k}} + \frac{2}{N}\sum_{\vec{q}\vec{q}'}(\beta_{\vec{q}} - \alpha_{\vec{q}+\vec{k}})P^{+}_{\vec{q}} P_{\vec{q}'-\vec{q}} P_{\vec{q}+\vec{k}}$$

2.12.

$$[P^{+}_{-\vec{k}}, H] = -(\Delta-\mu+\alpha_{\vec{k}})P^{+}_{-\vec{k}} - \frac{2}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}(\beta_{\vec{q}_2} - \alpha_{\vec{q}_2-\vec{k}})P^{+}_{\vec{q}_1} P_{\vec{q}_2-\vec{k}} P_{\vec{q}_1+\vec{q}_2}$$

Ove komutatore vraćamo u (2.8) i dobijamo sistem jednačina za Grinove funkcije u obliku:

$$[E-(\Delta-\mu+\alpha_{\vec{k}})]\langle\langle P_{\vec{k}} | P^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle = \frac{i}{2\pi}(1-2C) +$$
$$+\frac{2}{N}\sum_{\vec{q}\vec{q}'}(\beta_{\vec{q}} - \alpha_{\vec{q}+\vec{k}})\langle\langle P^{+}_{\vec{q}} P_{\vec{q}'-\vec{q}} P_{\vec{q}+\vec{k}} | P^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle$$

$$[E+(\Delta-\mu+\alpha_{\vec{k}})]\langle\langle P^{+}_{-\vec{k}} | P^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle =$$
$$= -\frac{2}{N}\sum_{\vec{q}_1\vec{q}_2}(\beta_{\vec{q}_2} - \alpha_{\vec{q}_2-\vec{k}})\langle\langle P^{+}_{\vec{q}_1} P_{\vec{q}_2-\vec{k}} P_{\vec{q}_1+\vec{q}_2} | P^{+}_{\vec{k}}\rangle\rangle$$

Sada ćemo uvesti dekuplovanje Grinovih funkcija, imajući u vidu da je:

$$\langle P^{+}_{\vec{k}} P_{\vec{k}}\rangle \neq 0 \qquad \langle P^{+}_{-\vec{k}} P^{+}_{\vec{k}}\rangle \neq 0 \qquad \langle P_{\vec{k}} P_{-\vec{k}}\rangle \neq 0$$

S obzirom na pojavu Boze-kondenzacije i mogućnost rađanja dva kondenzatna magnona na račun anhilacije dva kondenzatna magnona, kao i anhilacije dva kondenzatna magnona na račun kreacije dva nadkondenzatna magnona.

$$\langle\langle P^{+}_{\vec{q}'} P_{\vec{q}'-\vec{q}} P_{\vec{q}+\vec{k}} | P^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle \approx \left(\langle P^{+}_{\vec{q}'} P_{\vec{q}'} \rangle \delta_{\vec{q},0} + \langle P^{+}_{\vec{q}+\vec{k}} P_{\vec{q}+\vec{k}} \rangle \delta_{\vec{q}',\vec{q}+\vec{k}} \right) \langle\langle P_{\vec{k}} | P^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle +$$

$$+ \langle P_{-\vec{q}-\vec{k}} P_{\vec{q}+\vec{k}} \rangle \delta_{\vec{q}',-\vec{k}} \langle\langle P^{+}_{-\vec{k}} | P^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle \qquad 2.14.$$

$$\langle\langle P^{+}_{\vec{q}_1} P^{+}_{\vec{q}_2-\vec{k}} P_{\vec{q}_1+\vec{q}_2} | P^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle \approx \left(\langle P^{+}_{\vec{q}_1} P_{\vec{q}_1} \rangle \delta_{\vec{q}_2,0} + \langle P^{+}_{\vec{q}_2-\vec{k}} P_{\vec{q}_2-\vec{k}} \rangle \delta_{\vec{q}_1,-\vec{k}} \right) \langle\langle P^{+}_{-\vec{k}} | P^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle +$$

$$+ \langle P^{+}_{-\vec{q}+\vec{k}} P^{+}_{\vec{q}-\vec{k}} \rangle \delta_{\vec{q}_1+\vec{q}_2,\vec{k}} \langle\langle P_{\vec{k}} | P^{+}_{\vec{k}} \rangle\rangle$$

Obeležimo: $\langle P^{+}_{\vec{k}} P_{\vec{k}} \rangle \equiv \bar{n}_{\vec{k}} \qquad \langle P^{+}_{-\vec{k}} P^{+}_{\vec{k}} \rangle \equiv \bar{h}^{*}_{\vec{k}} \qquad \langle P_{\vec{k}} P_{-\vec{k}} \rangle = \bar{h}_{\vec{k}}$ 2.15.

Jednačine za Grinove funkcije sada glase:

$$\left\{ E - (\Delta - \mu + \alpha_{\vec{k}}) - \frac{2}{N} \sum_{\vec{q}'} (\beta_0 - \alpha_{\vec{k}}) \bar{n}_{\vec{q}'} - \frac{2}{N} \sum_{\vec{q}} \bar{n}_{\vec{q}+\vec{k}} (\beta_{\vec{q}} - \alpha_{\vec{q}+\vec{k}}) \right\} G_{\vec{k}} -$$

$$- \frac{2}{N} \sum_{\vec{q}} \bar{h}_{\vec{q}+\vec{k}} (\beta_{\vec{q}} - \alpha_{\vec{q}+\vec{k}}) D_{\vec{k}} = \frac{i}{2\pi} (1 - 2C)$$

$$\left\{ E + (\Delta - \mu + \alpha_{\vec{k}}) + \frac{2}{N} \sum_{\vec{q}_1} \bar{n}_{\vec{q}_1} (\beta_0 - \alpha_{-\vec{k}}) + \frac{2}{N} \sum_{\vec{q}_2} \bar{n}_{\vec{q}_2-\vec{k}} (\beta_{\vec{q}_2} - \alpha_{\vec{q}_2-\vec{k}}) \right\} D_{\vec{k}} +$$

$$+ \frac{2}{N} \sum_{\vec{q}_2} \bar{h}^{*}_{\vec{q}_2-\vec{k}} (\beta_{\vec{q}_2} - \alpha_{\vec{q}_2-\vec{k}}) G_{\vec{k}} = 0$$

U gornjim sumama vršimo smenu indeksa

$$\vec{q}_2 \to -\vec{q}_2 \qquad\qquad -\vec{q}_2 - \vec{k} \to -\vec{p}$$

$$-\vec{q}_2 + \vec{k} \to \vec{q}' \qquad\qquad \vec{q} + \vec{k} \to \vec{p}$$

Pre nego što konačno napišemo jednačine za Grinove funkcije, napomenimo da su funkcije $\alpha_{\vec{p}}$ i $\beta_{\vec{p}}$ parne, tj.

$$\alpha_{\vec{p}} = \alpha_{-\vec{p}} \qquad \beta_{\vec{p}} = \beta_{-\vec{p}}$$

dakle:

$$\left\{E - \left[\Delta - \mu + \alpha_{\vec{k}} + 2C(\beta_0 - \alpha_{\vec{k}}) + \frac{2}{N}\sum_{\vec{p}} \bar{n}_{\vec{p}}(\beta_{\vec{p}-\vec{k}} - \alpha_{\vec{p}})\right]\right\} G_{\vec{k}} -$$

$$- \frac{2}{N}\sum_{\vec{p}} \bar{h}_{\vec{p}}(\beta_{\vec{p}-\vec{k}} - \alpha_{\vec{p}}) D_{\vec{k}} = \frac{i}{2\pi}(1-2C)$$

2.16.

$$\left\{E + \left[\Delta - \mu + \alpha_{\vec{k}} + 2C(\beta_0 - \alpha_{\vec{k}}) + \frac{2}{N}\sum_{\vec{p}} \bar{n}_{\vec{p}}(\beta_{\vec{p}-\vec{k}} - \alpha_{\vec{p}})\right]\right\} D_{\vec{k}} +$$

$$+ \frac{2}{N}\sum_{\vec{p}} \bar{h}^*_{\vec{p}}(\beta_{\vec{p}-\vec{k}} - \alpha_{\vec{p}}) G_{\vec{k}} = 0$$

Pretpostavimo da dolazi do Boze - kondenzacije u stanju sa impulsom $\vec{k} = \vec{k}_0$, tj. tamo gde $\alpha_{\vec{k}}$ ima minimum i energiju magnona (neinteragujućih) računat ćemo od tog stanja, tj. $\varepsilon_{\vec{k}} = \alpha_{\vec{k}} - \alpha_{\vec{k}_0}$.

Prema Bogoljubovu, uzet ćemo da je:

$$P_{\vec{k}_0} = P^+_{\vec{k}_0} = \sqrt{N_0} \qquad \bar{h}_{\vec{k}_0} \approx N_0 \qquad C_0 = \frac{N_0}{N}$$

$$C = C_0 + \frac{1}{N}\sum_{\vec{k} \neq \vec{k}_0} n_{\vec{k}}$$

uz ovu aproksimaciju sistem jednačina (2.16.) dobija oblik:

$$\left\{E - \left[(\varepsilon_{\vec{k}} - \mu') + 2C(\beta_0 - \alpha_{\vec{k}}) + 2C_0(\beta_{\vec{k}-\vec{k}_0} - \alpha_{\vec{k}_0}) + \frac{2}{N}\sum_{\vec{p} \neq \vec{k}_0} \bar{n}_{\vec{p}}(\beta_{\vec{p}-\vec{k}} - \alpha_{\vec{p}})\right]\right\} G_{\vec{k}} -$$

$$-\left[2C_0(\beta_{\vec{k}-\vec{k}_0} - \alpha_{\vec{k}_0}) + \frac{2}{N}\sum_{\vec{p} \neq \vec{k}_0} \bar{h}_{\vec{p}}(\beta_{\vec{p}-\vec{k}} - \alpha_{\vec{p}})\right] D_{\vec{k}} = \frac{i}{2\pi}(1-2C)$$

2.17.

$$\{E+[(\varepsilon_{\vec{k}}-\mu')+2C(\beta_0-\alpha_{\vec{k}})+2C_0(\beta_{\vec{k}-\vec{k}_0}-\alpha_{\vec{k}_0})+\frac{2}{N}\sum_{\vec{p}\neq\vec{k}_0}\bar{n}_{\vec{p}}(\beta_{\vec{p}-\vec{k}}-\alpha_{\vec{p}})]\}D_{\vec{k}}+$$

$$+[2C_0(\beta_{\vec{k}-\vec{k}_0}-\alpha_{\vec{k}_0})+\frac{2}{N}\sum_{\vec{p}\neq\vec{k}_0}\bar{h}^*_{\vec{p}}(\beta_{\vec{p}-\vec{k}}-\alpha_{\vec{p}})]G_{\vec{k}}=0$$

gde je: $\mu'=\mu-\Delta-\alpha_{\vec{k}_0}$. Uvest ćemo oznake:

$$X_{\vec{k}}=\varepsilon_{\vec{k}}-\mu'+2C(\beta_0-\alpha_{\vec{k}})+2C_0(\beta_{\vec{k}-\vec{k}_0}-\alpha_{\vec{k}_0})+\frac{2}{N}\sum_{\vec{p}\neq\vec{k}_0}\bar{n}_{\vec{p}}(\beta_{\vec{p}-\vec{k}}-\alpha_{\vec{p}})$$

$$Y_{\vec{k}}=2C_0(\beta_{\vec{k}-\vec{k}_0}-\alpha_{\vec{k}_0})+\frac{2}{N}\sum_{\vec{p}\neq\vec{k}_0}\bar{h}_{\vec{p}}(\beta_{\vec{p}-\vec{k}}-\alpha_{\vec{p}}) \qquad 2.18.$$

Uvrštavanjem ovih oznaka u (2.17.), jednačine primaju sledeći oblik:

$$(E-X_{\vec{k}})G_{\vec{k}}-Y_{\vec{k}}D_{\vec{k}}=\frac{i}{2\pi}(1-2C)$$

$$Y^*_{\vec{k}}G_{\vec{k}}+(E+X_{\vec{k}})D_{\vec{k}}=0 \qquad 2.19.$$

Rešavajući ovaj sistem jednačina, možemo naći funkcije $G_{\vec{k}}$ i $D_{\vec{k}}$.

$$G_{\vec{k}}=\frac{i}{2\pi}(1-2C)\frac{E+X_{\vec{k}}}{E^2-X^2_{\vec{k}}+|Y_{\vec{k}}|^2}$$

$$D_{\vec{k}}=-\frac{i}{2\pi}(1-2C)\frac{Y^*_{\vec{k}}}{E^2-X^2_{\vec{k}}+|Y_{\vec{k}}|^2} \qquad 2.20.$$

Kako pol Grinove funkcije određuje energiju elementarnih eksuitacija, to iz poslednje relacije sledi:

$$E^2_{(\vec{k})}-X^2_{\vec{k}}+|Y_{\vec{k}}|^2=0$$

$$E_{(\vec{k})}=\sqrt{X^2_{\vec{k}}-|Y_{\vec{k}}|^2} \qquad 2.21.$$

II. 3. ODREĐIVANJE HEMIJSKOG POTENCIJALA

Za određivanje hemijskog potencijala iskoristit ćemo Hajzenbergovu jednačinu kretanja:

$$i\hbar \frac{dP_{\vec{k}}}{dt} = [P_{\vec{k}}, H]$$

$$i\hbar \frac{dP_{\vec{k}}}{dt} = (\mathcal{E}_{\vec{k}} - \mu') P_{\vec{k}} + \frac{2}{N} \sum_{\vec{p}, \vec{q}'} (\beta_{\vec{p}-\vec{k}} - \alpha_{\vec{p}}) P^{+}_{\vec{q}'} P_{\vec{q}'-\vec{p}+\vec{k}} P_{\vec{p}}$$

kako je za $\vec{k} = \vec{k}_0$ $\quad P_{\vec{k}} = P_{\vec{k}_0} = \sqrt{N_0} = \text{const.}$ $\quad \frac{dP_{\vec{k}}}{dt} = 0$

posle usrednjavanja gornje jednačine, dobijamo:

$$(\mathcal{E}_{\vec{k}_0} - \mu)\sqrt{N_0} + \frac{2}{N} \sum_{\vec{p}\vec{q}'} (\beta_{\vec{p}-\vec{k}_0} - \alpha_{\vec{p}}) \langle P^{+}_{\vec{q}'} P_{\vec{q}'-\vec{p}+\vec{k}_0} P_{\vec{p}} \rangle = 0 \qquad 2.22.$$

Služeći se teorijom Bogoljubova, možemo pisati:

$$P_{\vec{k}_0} P^{+}_{\vec{k}_0} - P^{+}_{\vec{k}_0} P_{\vec{k}_0} = 1 \qquad P^{+}_{\vec{k}_0} P_{\vec{k}_0} = N_0$$

$$P_{\vec{k}_0} P^{+}_{\vec{k}_0} = N_0 + 1 \approx N_0$$

Ovo se koristi kod izračunavanja srednje vrednosti proizvoda tri operatora $\langle P^{+}_{\vec{p}_1} P_{\vec{p}_2} P_{\vec{p}_3} \rangle$, koji se pojavljuje u jednačini (2.22.).

S obzirom da radimo sa tačnošću proporcionalnoj koncentraciji, pri izračunavanju srednje vrednosti uzet ćemo samo one vrednosti impulsa $\vec{p}_1$; $\vec{p}_2$ i $\vec{p}_3$, koje su date u tablici I., pri čemu smo sa $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ označili:

$$\vec{p}_1 = \vec{q} \qquad \vec{p}_2 = \vec{q} - \vec{p} + \vec{K}_0 \qquad \vec{p}_3 = \vec{p}$$

$\vec{p}_1$	$\vec{p}_2$	$\vec{p}_3$
$\vec{K}_0$	$\vec{K}_0$	$\vec{K}_0$
$\vec{K}_0$	$\neq$	$\neq$
$\neq$	$\vec{K}_0$	$\neq$
$\neq$	$\neq$	$\vec{K}_0$

TABLICA I

Uz pretpostavku da je $\varepsilon_{\vec{K}_0} = 0$, za hemijski potencijal dobijamo:

$$\mu' = 2C_0(\beta_0 - \alpha_{\vec{K}_0}) + \frac{2}{N}\sum_{\vec{p}\neq\vec{K}_0}(\beta_{\vec{p}-\vec{K}_0} - \alpha_{\vec{p}})(\bar{n}_{\vec{p}} - \bar{h}_{\vec{p}}) \qquad 2.23.$$

Pomoću ovog izraza za μ' i relacija (2.18.) i (2.21.) možemo izračunati energiju elementarnih ekscitacija u funkciji $n_K = \langle P^+_{\vec{K}} P_{\vec{K}} \rangle$ i $\bar{h}_{\vec{K}} = \langle P_{-\vec{K}} P_{\vec{K}} \rangle$. U sledećem paragrafu izračunavat ćemo ove veličine pomoću spektralne intenzivnosti.

II. 4. ANALIZA SPEKTRA MAGNONA U USLOVIMA BOZE - KONDENZACIJE

Napišimo sada Grinovu funkciju $G(\tilde{E},\vec{K})$ u podesnijem obliku:

$$G_{\vec{K}} = \frac{i}{2\pi}(1-2C)\frac{E + X_{\vec{K}}}{(\tilde{E} - E_{\vec{K}})(\tilde{E} + E_{\vec{K}})}$$

gde je $\tilde{E} = E + i\delta \qquad \delta \ll E$

Dalje se Grinova funkcija G_k može napisati kao

$$G_{(\vec{k}\vec{E})} = \frac{i}{2\pi}(1-2C)\left(\frac{A_{\vec{k}}}{\tilde{E} - E_{\vec{k}}} + \frac{B_{\vec{k}}}{\tilde{E} + E_{\vec{k}}}\right)$$

Konstante $A_{\vec{k}}$ i $B_{\vec{k}}$ određujemo iz prethodne dve jednačine :

$$A_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{X_{\vec{k}} + E_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}} \qquad B_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{E_{\vec{k}} - X_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}}$$

$$G_{\vec{k}}(E+i\delta) = \frac{i}{2\pi}(1-2C)\frac{A_{\vec{k}}}{\tilde{E}-E_{\vec{k}}+i\delta} + \frac{B_{\vec{k}}}{E+E_{\vec{k}}+i\delta} \qquad 2.24.$$

Srednja vrednost proizvoda dva operatora se definiše preko spektralne intenzivnosti, na sledeći način :

$$\langle P^+_{\vec{k}} P_{\vec{k}} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{P_{\vec{k}} P^+_{\vec{k}}}(\omega\vec{k})\, d\omega$$

$$\langle P^+_{-\vec{k}} P_{\vec{k}} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} I_{P_{-\vec{k}} P^+_{\vec{k}}}\, d\omega \qquad \omega \Rightarrow E \qquad 2.25.$$

Veza između Grinove i spektralne funkcije je

$$I_{P_{\vec{k}} P^+_{\vec{k}}}(\omega,\vec{k}) = \frac{1}{e^{\frac{\omega}{\theta}}-1}\, 2\,\mathrm{Re}\, G(\omega+i\delta,\vec{k}) \qquad 2.26.$$

Da bi odredili realan deo Grinove funkcije koja je data u obliku

(2.24.), koji nam je potreban za određivanje spektralne intenzivnosti, iskoristit ćemo izraz 26.16 iz [5].

$$\frac{f(x)}{x-a \pm i\varepsilon} = \mathcal{P}\frac{f(x)}{x-a} \mp i\pi\delta(x-a)f(x)$$

Odavde je realan deo Grinove funkcije

$$R_e G(\omega+i\delta,\vec{k}) = \frac{1-2C}{2}\left[A_{\vec{k}}\delta(\omega-E_{\vec{k}}) + B_{\vec{k}}\delta(\omega+E_{\vec{k}})\right]$$

a spektralna intenzivnost

$$I_{P^+_{\vec{k}}P_{\vec{k}}}(\omega,\vec{k}) = \frac{1-2C}{e^{\frac{\omega}{\theta}}-1}\left[A_{\vec{k}}\delta(\omega-E_{\vec{k}}) + B_{\vec{k}}\delta(\omega+E_{\vec{k}})\right]$$

S obzirom da je $\bar{n}_{\vec{k}}$ - srednji broj magnona u stanju sa impulsom $\vec{k}$ jednak $\langle P^+_{\vec{k}}P_{\vec{k}}\rangle$, imamo:

$$\bar{n}_{\vec{k}} = \langle P^+_{\vec{k}}P_{\vec{k}}\rangle = (1-2C)\left[A_{\vec{k}}\frac{1}{e^{\frac{E_{\vec{k}}}{\theta}}-1} + B_{\vec{k}}\frac{1}{e^{\frac{-E_{\vec{k}}}{\theta}}-1}\right]$$

Zamenjivanjem vrednosti za $A_{\vec{k}}$ i $B_{\vec{k}}$ i sređivanjem gornjeg izraza dobijamo:

$$\bar{n}_{\vec{k}} = \frac{1-2C}{2E_{\vec{k}}}\left(\frac{X_{\vec{k}}\left(e^{\frac{E_{\vec{k}}}{2\theta}} + e^{-\frac{E_{\vec{k}}}{2\theta}}\right) - E_{\vec{k}}\left(l^{\frac{E_{\vec{k}}}{2\theta}} - l^{\frac{E_{\vec{k}}}{2\theta}}\right)}{e^{\frac{E_{\vec{k}}}{2\theta}} - e^{\frac{-E_{\vec{k}}}{2\theta}}}\right)$$

odnosno

$$\bar{n}_{\vec{k}} = \left(\frac{1}{2}-C\right)\left(\frac{X_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}}\,\mathrm{cth}\,\frac{E_{\vec{k}}}{2\theta} - 1\right) \qquad 2.27.$$

gde je
$$C = \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}} \bar{n}_{\vec{q}}$$

Napišimo sada funkciju $D_{\vec{k}}$ u obliku

$$D_{\vec{k}} = \frac{i}{2\pi}(2C-1)\frac{Y_{\vec{k}}^{*}}{(E-E_{\vec{k}})(E+E_{\vec{k}})}$$

a zatim preko konstanti $C_{\vec{k}}$ i $D_{\vec{k}}$

$$D_{\vec{k}} = \frac{i}{2\pi}(2C-1)\left(\frac{C_{\vec{k}}}{E-E_{\vec{k}}} + \frac{D_{\vec{k}}}{E+E_{\vec{k}}}\right)$$

Iz zadnjih dveju jednačina odredujemo $C_{\vec{k}}$ i $D_{\vec{k}}$:

$$(E+E_{\vec{k}})C_{\vec{k}} + D_{\vec{k}}(E-E_{\vec{k}}) = Y_{\vec{k}}^{*}$$

$$C_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\frac{Y_{\vec{k}}^{*}}{E_{\vec{k}}} \qquad D_{\vec{k}} = -\frac{1}{2}\frac{Y_{\vec{k}}^{*}}{E_{\vec{k}}}$$

pa za Grinovu funkciju $D_{\vec{k}}$ dobijamo:

$$D_{\vec{k}} = \frac{i}{2\pi}(2C-1)\left[\frac{\frac{Y_{\vec{k}}^{*}}{E_{\vec{k}}}}{E-E_{\vec{k}}+i\delta} - \frac{\frac{Y_{\vec{k}}^{*}}{E_{\vec{k}}}}{E+E_{\vec{k}}+i\delta}\right] \qquad 2.28.$$

Da bi odredili spektralnu intenzivnost $J_{P^{+}_{-\vec{k}}P^{+}_{\vec{k}}}$, potreban nam je realan deo funkcije $D_{\vec{k}}$ koji nalazimo iz (2.28), na osnovu formule 26.16 iz [5].

$$Re\, D(\omega + i\delta, \vec{k}) = \frac{2C-1}{4}\left[\frac{Y_{\vec{k}}^*}{E_{\vec{k}}}\delta(\omega - E_{\vec{k}}) - \frac{Y_{\vec{k}}^*}{E_{\vec{k}}}\delta(\omega + E_{\vec{k}})\right]$$

Spektralna intenzivnost je tada:

$$J_{P_{-\vec{k}}^+ P_{\vec{k}}^+} = (C - \tfrac{1}{2})\frac{1}{e^{\frac{\omega}{\theta}} - 1}\frac{Y_{\vec{k}}^*}{E_{\vec{k}}}\left[\delta(\omega - E_{\vec{k}}) - \delta(\omega + E_{\vec{k}})\right]$$

a srednja vrednost proizvoda operatora $P_{-\vec{k}}^+ P_{\vec{k}}$ je

$$\langle P_{-\vec{k}}^+ P_{\vec{k}} \rangle = (C - \tfrac{1}{2})\frac{Y_{\vec{k}}^*}{E_{\vec{k}}}\left(\frac{1}{e^{\frac{E_{\vec{k}}}{\theta}} - 1} - \frac{1}{e^{\frac{-E_{\vec{k}}}{\theta}} - 1}\right)$$

$$\langle P_{-\vec{k}} P_{\vec{k}} \rangle^* = (C - \tfrac{1}{2})\frac{Y_{\vec{k}}^*}{E_{\vec{k}}}\, cth\, \frac{E_{\vec{k}}}{2\theta} \qquad 2.29.$$

i imamo da je:

$$\langle P_{-\vec{k}}^+ P_{\vec{k}} \rangle^* = \langle P_{-\vec{k}} P_{\vec{k}} \rangle = \bar{h}_{\vec{k}}$$

Dosadašnjim računom smo, u nameri da izračunamo energiju elementarnih ekscitacija magnona, došli do sledećih rezultata:

$$\mu' = 2C(\beta_0 - \alpha_{\vec{k}_0}) + \frac{2}{N}\sum_{\vec{p} \neq \vec{k}_0}(\beta_{\vec{p}-\vec{k}_0} - \alpha_{\vec{p}})(\bar{n}_{\vec{p}} - \bar{h}_{\vec{p}})$$

$$\bar{n}_{\vec{k}} \equiv \langle P_{\vec{k}}^+ P_{\vec{k}} \rangle = (\tfrac{1}{2} - C)\left(\frac{X_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}}\, cth\, \frac{E_{\vec{k}}}{2\theta} - 1\right)$$

$$\bar{h}_{\vec{k}} \equiv \langle P_{-\vec{k}} P_{\vec{k}} \rangle = \langle P_{-\vec{k}}^+ P_{\vec{k}}^+ \rangle^* = (C - \tfrac{1}{2})\frac{Y_{\vec{k}}}{E_{\vec{k}}}\, cth\, \frac{E_{\vec{k}}}{2\Theta} \qquad 2.30.$$

$$E_{\vec{k}} = \sqrt{X_{\vec{k}}^2 - |Y_{\vec{k}}|^2}$$

gde je:

$$X_{\vec{k}} = \varepsilon_{\vec{k}} - \mu' + 2C(\beta_0 - \alpha_{\vec{k}}) + 2C_0(\beta_{\vec{k}-\vec{k}_0} - \alpha_{\vec{k}_0}) + \frac{2}{N}\sum_{\vec{p}\neq\vec{k}_0} \bar{n}_{\vec{p}}(\beta_{\vec{p}-\vec{k}} - \alpha_{\vec{p}})$$

$$Y_{\vec{k}} = 2C_0(\beta_{\vec{k}-\vec{k}_0} - \alpha_{\vec{k}_0}) + \frac{2}{N}\sum_{\vec{p}\neq\vec{k}_0} \bar{h}_{\vec{p}}(\beta_{\vec{p}-\vec{k}} - \alpha_{\vec{p}})$$

Rešavanje gornjeg sistema integralnih jednačina u opštem slučaju je jako komplikovano, te ćemo zbog toga odrediti energiju magnona u stanju male koncentracije, tj. $C \ll 1$, odnosno u poznatoj aproksimaciji Bogoljubova:

$$C = C_0 \frac{1}{N}\sum_{\vec{q}\neq 0} \bar{n}_{\vec{q}} \approx C_0$$

Zbog ove aproksimacije u gornjim jednačinama zanemarujemo sve članove koji sadrže $\bar{n}_{\vec{q}}$, $\bar{h}_{\vec{q}}$, kao i članove proporcionalne kvadratnim i višim stepenima C_0. Služeći se aproksimacijom Bogoljubova gornje jednačine dobijaju sledeći oblik:

$$\mu' = 2C(\beta_0 - \alpha_{\vec{k}_0})$$

$$X_{\vec{k}} = \varepsilon_{\vec{k}} + 2C_0(\beta_{\vec{k}-\vec{k}_0} - \alpha_{\vec{k}_0})$$

$$Y_{\vec{k}} = 2C_0(\beta_{\vec{k}-\vec{k}_0} - \alpha_{\vec{k}_0}) \qquad 2.31.$$

$$\bar{n}_{\vec{k}} = \left(\frac{1}{2} - C_0\right)\left[\frac{\varepsilon_k + 2C_0(\beta_{\vec{k}-\vec{k}_0} - \alpha_{\vec{k}})}{E_{\vec{k}}}\, cth\frac{E_k}{2\Theta} - 1\right]$$

$$E^B_{\vec{k}} = \sqrt{\varepsilon^2_{\vec{k}} + 2\varepsilon_{\vec{k}} C_0(\beta_{\vec{k}-\vec{k}_0} - \alpha_{\vec{k}})}$$

Ovde nam poslednji izraz daje zakon disperzije elementarnih ekscitacija feromagnetika u uslovima Boze-kondenzacije.

Iz zakona disperzije (2.31.) vidimo da do Boze-kondenzacije u sistemu magnona dolazi i u slučaju idealnog magnonskog gasa, tj. kada je $\beta_{\vec{k}} = 0$. Ovo je povezano sa činjenicom da se komutacione relacije za paulione razlikuju od komutacionih relacija za bozone. To dovodi do odbijanja između pauliona na malim rastojanjima, jer na jednom čvoru rešetke ne možemo imati više od jednog magnona (svojstvene vrednosti operatora $P^{+}_{\vec{k}} P_{\vec{k}}$ su 0 ili 1). Ta interakcija je poznata pod imenom kinematičke interakcije.

Pošto je feromagnetik sa interakcijom izmene $\alpha_{\vec{k}} = \beta_{\vec{k}} = \frac{1}{2} I_{\vec{k}}$, u slučaju idealnog magnonskog sistema, dobijamo:

$$E_{\vec{k}} = \sqrt{\left[\frac{\hbar^2(\vec{k}-\vec{k}_0)^2}{2m}\right]^2 + \frac{\hbar^2(k-k_0)^2}{2m} I_{(\vec{k})}} \qquad 2.32.$$

Ako do Boze-kondenzacije dolazi na impulsu $\vec{k}_0 = 0$, za male vrednosti vektora $\vec{k}$, dobijamo linearni zakon disperzije za magnone.

$$E_{(\vec{k})} = \hbar \vec{k} \sqrt{\frac{3I}{m}} = C \cdot p$$

gde je $\qquad C = \sqrt{\frac{3I}{m}} \qquad i \qquad p = \hbar \vec{k}$

Vidimo da se u sistemu magnona pri malim impulsima pojavljuju ekscitacije, koje možemo nazvati „akustičkim magnonima", s obzirom da im je zakon disperzije sličan akustičkim eksitacijama, tj. fononima.

Takav zakon disperzije zadovoljava i uslov superfluidnosti koji je dao Landau, tj.

$$\min \frac{E(\vec{p})}{p} = C > 0 \qquad 2.32'$$

tj. u sistemu magnona dolazi do pojave superfluidnosti.

Temperaturu Boze-kondenzacije određujemo iz uslova $C_0 = 0$. Tada je $E_{\vec{k}} = \mathcal{E}_{\vec{k}}$ i srednji broj magnona je tada:

$$\bar{n}_{\vec{k}} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{cth} \frac{\mathcal{E}_{\vec{k}}}{2\theta} - 1\right) = \frac{1}{e^{\frac{\mathcal{E}_{\vec{k}}}{\theta}} - 1} \qquad 2.33.$$

Za koncentraciju magnona tada dobijamo:

$$C = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k} \neq 0} \bar{n}_{\vec{k}} = \frac{V}{N(2\pi)^3} \int \frac{d^3\vec{k}}{e^{\frac{\mathcal{E}_{\vec{k}}}{\theta}} - 1}$$

Dalje ćemo računati u aproksimaciji efektivne mase, $\mathcal{E}_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m^*}$, pa imamo:

$$C = \frac{V}{N 2\pi^2} \int_0^{k_m} \frac{\vec{k}^2 d\vec{k}}{e^{\frac{\hbar^2 k^2}{2m^* \theta}} - 1} \qquad 2.34.$$

Broj magnona sa impulsom većim od nule, jednak je proizvodu iz broja elementarnih ćelija N i koncentracije C.

$$\mathcal{N}_{\vec{p}>0} = N \cdot C = \frac{V}{2\pi^2} \int_0^{K_m} \frac{\vec{K}^2 d\vec{K}}{e^{\frac{\hbar^2 K^2}{2m\theta}} - 1}$$

Posle smene $\frac{\hbar^2 K^2}{2m\Theta} = t$ i s obzirom da radimo na niskim temperaturama, možemo gornju granicu integrala zameniti sa $+\infty$. Tako dobijamo:

$$\mathcal{N}_{\vec{p}} = \frac{V}{4\pi^2 \hbar^3} (2m\Theta)^{3/2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} \cdot t^{1/2}}{1 - e^{-t}} dt =$$

$$= \frac{V(2\Theta m)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \int_0^{\infty} t^{1/2} e^{-(\nu+1)t} dt$$

ili nakon uvođenja smene $(\nu+1)t = u$

$$\mathcal{N}_{\vec{p}} = \frac{V(2m\Theta)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^{3/2}} \int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du$$

označimo sa $\zeta(\frac{3}{2}) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{(\nu+1)^{3/2}}$ – Rimanova ζ-funkcija

$$\Gamma(\tfrac{3}{2}) = \int_0^{\infty} u^{1/2} e^{-u} du$$

tada je:

$$\mathcal{N}_{\vec{p}} = \Gamma(3/2) \cdot \zeta(3/2) \cdot \frac{V(2m\Theta)^{3/2}}{4\pi^2 \hbar^3}$$

Kako je $\Gamma(3/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ a $\zeta(3/2) = 2{,}612$ za broj magnona sa impulsom većim od nule dobijamo:

$$\mathcal{N}_{\vec{p}>0} = 2{,}612\, \frac{V(2m)^{3/2}}{8\pi^{3/2}\hbar^3}\, \theta^{3/2} \qquad 2.35.$$

Temperatura Boze-Ajnštajnove kondenzacije θ_0, određuje se iz uslova da je $\mathcal{N}_{\vec{p}>0} = \mathcal{N}$, tj. broj magnona sa impulsom većim od nule $\mathcal{N}_{\vec{p}}$ mora biti jednak ukupnom broju magnona u sistemu $\mathcal{N}$. Prema tome:

$$\theta_0 = \frac{(8)^{2/3}\pi\hbar^2}{2m \cdot 2{,}612}\left(\frac{\mathcal{N}}{V}\right)^{2/3} \qquad 2.36.$$

Kako je $\theta_0 = K_B T_0$ a $\left(\frac{\mathcal{N}}{V}\right) \sim 10^{18} - 10^{20}$; $a^2 \sim 10^{-15}$ a znamo da je $m = \frac{\hbar^2}{I a^2}$ i imamo da je: $I \sim K T_c$, tada je $m \approx 10^{-24}$, pa je:

$$T_0 = 3a^2 T_c \left(\frac{\mathcal{N}}{V}\right)^{2/3}$$

$$T_0 = 3\,T_c\,(10^{-3} - 10^{-1})$$

i za $T_c \sim 10 - 10^2\ {}^\circ K$ imamo

$$T_0 = 0{,}3 - 30\ {}^\circ K$$

Znači kod feromagnetika gde se zanemaruje dipol-dipolna interakcija u odnosu na interakciju razmene temperatura prelaza iz kondenzatnog u nadkondenzatno stanje zavisi od koncentracije magnona kao

$$T_0 \sim C^{2/3} \qquad 2.37$$

Kod slobih feromagnetika za dipol-dipolnu interakciju u radu [4] dobija se da zakon disperzije $\varepsilon_{\vec{k}}$ zavisi od k^2 i od θ, gde je θ ugao između vektora $\vec{k}$ i vektora magnetnog momenta $\vec{\mu}$. Kod ovakvog feromagnetika sa dipol-dipolnom interakcijom temperatura prelaza ima drugu zavisnost od koncentracije C, tj.

$$T_0 \sim C^{2/5}$$

U skladu sa našom aproksimacijom možemo izraziti i broj kondenzatnih magnona u funkciji temperature. Pošto je za

$$T < T_0 \qquad \mathcal{N}_0 = \mathcal{N} - \mathcal{N}_{(\vec{p}>0)}$$

iz relacija (2.35.) i (2.36.) sledi:

$$\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}\left[1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{3/2}\right] \qquad 2.38.$$

Rezultati koje smo dobili u aproksimaciji efektivne mase za temperaturu prelaza T_0 i $\mathcal{N}_0$ identični su sa rezultatima za idealan Boze gas, što se moglo i očekivati. Kad bi zakon disperzije za magnone izrazili preko viših stepena talasnog vektora $\vec{k}$, dobili bi i komplikovanije izraze za T_0 i $\mathcal{N}_0$.

ZAKLJUČAK

Rezultati ovog diplomskog rada mogu se ukratko rezimirati na sledeći način.

1. Razmatrani su uslovi pod kojima može doći do Boze kondenzacije u sistemu magnona.

2. Dobijen je spektar magnona u uslovima Boze kondenzacije kao i temperatura T_0 Boze-Ajnštajnove kondenzacije. Pokazano je takođe da spektar magnona u uslovima Boze kondenzacije zadovoljava uslov superfluidnosti.

U vezi sa ovim rezultatima interesantno je razmotriti i mogućnost da se eksperimentalno dokaže postojanje Boze kondenzacije u sistemu magnona.

U radu [4], gde je posmatran feromagnet sa dipolnom interakcijom, pokazano je da bi se feromagnetnom rezonancom moglo dokazati postojanje kondenzata s obzirom da je spektar magnona u uslovima Boze kondenzacije (kod dipolne interakcije) ima gep različit od nule, koji bi doveo do pomeranja frekvence spinske rezonance. Takav metod, u slučaju interakcije izmeđe među spinovima, ne bi se mogao koristiti jer zakon disperzije u ovom slučaju ne sadrži nikakav gep (2.32). Verovatno bi u tom slučaju eksperiment sa magnetnom akustičnom rezonancom mogao pokazati postojanje kondenzata, jer u takvom eksperimentu elementarne ekscitacije imaju $\vec{k} \neq 0$.

Pojavu superfluidnosti u sistemu magnona mogli bi na indirektan način pokazati eksperimentom u kojem bi se izmerio srednji slobodan magnona ~~put u~~ kristalu. U slučaju kada nema superfluidnosti, srednji slobodni put magnona određen je interakcijom između samih magnona ili magnona i fonona i reda je veličine 10 - 100 Å [7]. Ako bi u sistemu magnona došlo do superfluidnog kretanja, srednji slobodni put bio bi određen vremenom života magnona i brzinom kretanja kondenzata (ne bi došlo do sudara).

U sklopu sa našim rezultatom (2.32'), za brzinu magnona dobijamo približno $c \approx 10^5$ cm/s i ako uzmemo da je vreme života magnona 10^{-7} s, dobijamo da je srednji slobodan put $\lambda = v \cdot t = 10^{-3}$ cm $= 10^5$ Å, vidimo da je u ovom slučaju srednji slobodan put za nekoliko redova veličine veći. Ako bi se to moglo eksperimentalno dokazati, na posredan način bi dokazali i postojanje superfluidnosti.

LITERATURA

[1] S. A. MOSKALENKO, „BOSE-EINSTEINOVSKAYA KONDENSATSIYA EKSITONOV I BIEKSITONOV", izd. ACAD. NAUK MOLD. SSSR, KISHINEV (1970).

[2] V. M. AGRANOVICH, „TEORIYA EKSITONOV", izd. NAUKA, (1968).

[3] В. М. АГРАНОВИЧ i В. С. ТОШИЧ ЖЭТФ 53 149 (1967.)

[4] B. I. KOCHELAEV, PUBLISHING HOUSE OF THE ACADEMY OF TE SOCIJALISTIC REPUBLIC OF ROMANIA 137 (1971.)

[5] С. В. ТЯБЛИКОВ, „МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ МАГНЕТИЗМА" (1965.)

[6] MARIO ŠKRINJAR, DOKTORSKA DISERTACIJA (197)

[7] S. D. STOJANOVIĆ I B. S. TOŠIĆ, „SREDNJI SLOBODNI PUT MAGNONA U HAJZENBERGOVOM FEROMAGNETU". (1973.)

[8] Д. МАТТИС, „ТЕОРИЯ МАГНЕТИЗМА" (1967.)