Dan odbrane 25-XII 73.

Komisija: 1. Dr. M. Nikolić, mentor
2. Dr. B. Tošić, predsednik
3. Mr. M. Škrinjar, član

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNOMATEMETIČKI FAKULTET
KATEDRA ZA FIZIKU

Ocene:
diplomski rad: 9 (devet)
odbrana: 9 (devet)
~~ukupno~~: 9 (devet)

MILAN Đ. MAZALICA

M E Z O N S K O I E L E K T R O M A G N E T N O P O L J E U R E P R E Z E N T A C I J I D R U G E K V A N T I Z A C I J E

- diplomski rad -

U Novom Sadu, decembra, 1973.

MENTOR
Dr MILAN NIKOLIĆ
VANREDNI PROFESOR

Zahvaljujem se profesoru
Milanu Nikoliću na pomoći
i sugestijama koje mi je
pružio tokom pisanja rada.

1. UVODNA RAZMATRANJA

Pojam fizičkog polja uvodi klasična mehanika pri prelasku sa diskontinuuma na kontinumm. Fizičko polje postoji u nekoj oblasti ako svakoj tački te oblasti možemo pridružiti jednu ili više funkcija koordinata i vremena. Primeri takvih polja su polje temperature, polje brzine i.t.d.

Sveukupnost funkcija koje odredjuju polje zovemo funkcijama polja. Te funkcije zadovoljavaju diferencijalne jednačine, koje su obično drugog reda; te jednačine pretstavljaju jednačine polja.

Od primarnog značaja u fizici nisu gore navedena polja, već polja drugog tipa. To su: elektromagnetno, gravitaciono i nuklearno (polje jakih nuklearnih sila-mezonsko i polje slabih nuklearnih sila).

Najbolje je proučeno elektromagnetno polje, čije tumačenje počinje pokušajima Newtona i Huygensa da objasne prirodu svetlosti. Newton je svetlosti pripisivao korpuskularna svojstva, dok je po Huygensu svetlost talasne prirode. Oba ova gledišta dugo vremena bila su samo hipoteze bez eksperimentalne potvrde, mada se Newtonovo shvatanje održalo duže vremena zbog većeg autoriteta u naučnim krugovima.

U prošlom veku Huygensova teorija se pokazala kao pogodnija da bi se objasnile neke osobine svetlosti (difrakcija i interferencija), a na talasnim svojstvima svetlosti Maxwell gradi teoriju elektromagnetizma, i tim označava početak razvitka torije polja u savremenom obliku.

Newtonova hipoteza, koja je tim bila odbačena, ponovo dobija u svojoj važnosti pojavom teorije Plancka i Einsteina. Da bi objasnio zračenje crnog tela Planck uvodi smelu hipotezu o kvantima zračenja, što Einstein prenosi na svetlosne pojave i tim tumači fotoelektrični efekat. Relacija Planck-Einsteina $E=\hbar\omega$, izmedju energije kvanta svetlosti, fotona i frekvencije oscilovanja odgovarajućeg mu elektromagnetnog polja, je prva formula koja sadrži kvantnu konstantu $\hbar$. Ovom činjenicom Newtonova i Huygensova hipoteza zajedno sa Planck-Einsteinovom teorijom dovode do korpuskularno-talasnog dualizma svetlosti, odnosno elektromagnetnog polja.

Sa druge strane atomske čestice, koje imaju masu mirovanja različitu od nule pokazuju u nekim eksperimentima talasna svojstva, što znači da se i tim česticama po de Broglu može pripisati izvesna talasna dužina. Tako se korpuskularno-talasni dualizam prenosi na sve mikročestice, odnosno na polja čiji su nosioci te čestice.

Nosioci elektromagnetnog polja su fotoni sa masom mirovanja jednakom nuli, dok polju jakih nuklearnih sila pripisujemo mezone mase mirovanja 260 pa nadalje, masa elektrona. Za gravitaciono polje se pretpostavlja da potiče od gravitona, što je još uvek samo hipoteza.

Elektromagnetno polje je odredjeno jačinama električnog i magnetnog polja koje igraju ulogu funkcija polja. Jačine električnog i magnetnog polja zadovoljavaju Maxwellove diferencijalne jednačine-jednačine polja. Medjutim elektromagnetno polje može biti poznato zadavanjem elektromagnetnih potencijala; vektorskog i skalarnog. Time se broj funkcija polja svodi na četiri skalarne: tri komponente vektorskog potencijala A_x, A_y, A_z i skalarni potencijal φ. Stoga , elektromagnetno polje možemo smatrati kao sistem sa četiri stepena slobode sa generalisanim koordinatama: A_x, A_y, A_z i φ . Elektromagnetni potencijali zadovoljavaju d'Alambertovu diferencijalnu jednačinu koja je ekvivalentna Maxwellovim jednačinama, te igra ulogu jednačine polja.

Mezonsko polje je odredjeno skalarnim funkcijama ili njihovim linearnim kombinacijama. Ovo polje još nije dobro proučeno jer nije poznata priroda nuklearnih sila, a sama teorija ovog polja je gradjena po analogiji sa teorijom elektromagnetnog polja.

Gravitaciono polje je najslabije proučeno jer nisu dobro poznati kvanti ovog polja, gravitoni, koji ako postoje, imaju masu mirovanja ravnu nuli i spin najmanje dva (u jedinicama $\hbar$).Funkcije ovog polja su tenzorskog karaktera.

Kako se kvanti navedenih polja kreću brzinom svetlosti ili brzinama vrlo bliskim brzini svetlosti, njihovo kretanje ćemo posmatrati kao relativističko u svetu Minkowskog, gde se tačka definiše skupom :

$$X_\mu = (x, y, z, ict) \quad , \quad \mu = 1, 2, 3, 4$$

a metrika (kvadrat elementa luka) obrascem

$$dS^2 = dX_1^2 + dX_2^2 + dX_3^2 + dX_4^2 .$$

U svetu Minkowskog komponente vektorskog potencijala A_x, A_y, A_z i skalarni potencijal φ elektromagnetnog polja se udružuju u jedan vektor, kvadrivektor elektromagnetnog potencijala

$$A_\mu = (A_x, A_y, A_z, \frac{i}{c}\varphi) ,$$

odakle se zaključuje da je elektromagnetno polje vektorsko polje.

Funkcije mezonskog polja u svetu Minkowskog se transformišu kao skalarne ili pseudoskalarne veličine, dok su eksperimenti pokazali da je mezonsko polje pseudoskalarno.

Kvanti navedenih polja se ponašaju kao mikroobjekti čije opisivanje podleže Heisenbergovim relacijama neodredjenosti, te se ponašanjem ovih čestica potčinjava zakonima kvantne mehanike. Zato, za opisivanje ovih čestica koristimo kvantnomehaničke talasne funkcije koje datim česticama pripisuju talasna svojstva, a skup tih funkcija definiše kvantnomehaničko talasno polje.

Kvantnomehaničke talasne funkcije zadovoljavaju diferencijalne jednačine tipa jednačina Klein-Gordona i Diraca. Te funkcije nemaju neposredan fizički smisao već samo kvadrat njihove amplitude kao statistička interpretacija nalaženja čestice u stanju koje opisuje data funkcija. Po poznatim pravilima kvantne mehanike iz talasne funkcije mogu se odrediti fizičke veličine neposredno merljive u eksperimentu.

2. PRELAZ SA FUNKCIJA POLJA NA KVANTNOMEHANIČKE OPERATORE

Prelaz na drugu kvantizaciju može se izvršiti tako što se talasna funkcija čestice preskribuje u operator polja t.j. umesto talasne funkcije koja opisuje stanje čestice na mestu $\vec{r}$ u prostoru, mi uvodimo operator koji kreira ili anihilira česticu na tom istom mestu $\vec{r}$. Ovakav prelaz opravdan je sa fizičke tačke gledišta i nije teško intuitivno doći do njega. Kao što je poznato talasnu funkciju $\psi(\vec{r})$ možemo razložiti po svojstvenim funkcijama $\varphi_i(\vec{r})$ nekog operatora na sledeći način

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &= \sum_i a_i \varphi_i(\vec{r}), \\ \psi^*(\vec{r}) &= \sum_i a_i^* \varphi_i^*(\vec{r}). \end{aligned} \tag{1}$$

Koeficijenti a_i imaju smisao amplitude verovatnoće da se čestica nadje u svojstvenom stanju okarakterisanom skupom kvantnih brojeva i, tako da

$$W_i = a_i^* a_i \tag{2}$$

predstavlja verovatnoću nalaženja čestice u stanju i. Zbog ortonormiranosti funkcija $\varphi_i(\vec{r})$ sledi da je

$$\sum_i W_i = \sum_i a_i^* a_i = 1, \tag{3}$$

što znači da ćemo pri merenju sa sigurnošću naći česticu tj. izmeriti u nekom stanju. Ako izvršimo napred pomenutu preskripciju

$$\begin{aligned} \psi(\vec{r}) &\longrightarrow \hat{\psi}(\vec{r}) = \sum_i \hat{a}_i \varphi_i(\vec{r}) \\ \psi^*(\vec{r}) &\longrightarrow \hat{\psi}^+(\vec{r}) = \sum_i \hat{a}_i^+ \varphi_i^*(\vec{r}), \end{aligned} \tag{4}$$

onda ψ^+ i ψ kreiraju odnosno anihiliraju česticu na mestu $\vec{r}$, a operatori $\hat{a}_i^+$ i $\hat{a}_i$ kreiraju odnosno anihiliraju česticu u stanju i. Očigledno je da važi uslov

$$\sum_i \hat{a}_i^+ \hat{a}_i = 1, \tag{5}$$

koji znači da nam se u sistemu nalazi jedna čestica, ali je pri merenju sa odredjenom statističkom težinom možemo naći u jednom fiksiranom stanju. Prema tome, fizički posmatrano prelaz na drugu kvantizaciju znači prelaz od izračunavanja verovatnoće nalaženja čestice u datom stanju na " prebrojavanje " čestica u stanjima, jer operator $\hat{a}_i^+\hat{a}_i$ pretstavlja broj čestica u stanju i .

Prelaz od funkcija ψ na operatore polja $\hat{\psi}$ povlači za sobom novo reprezentovanje operatora fizičkih veličina. Ako posmatramo operator koji zavisi od koordinata samo jedne čestice, naprimer $\hat{A}(\vec{r})$, onda je njegova srednja vrednost u stanju $\psi(\vec{r})$ definisana kao

$$\langle \hat{A} \rangle = \int \psi^*(\vec{r})\, \hat{A}(\vec{r})\, \psi(\vec{r})\, d^3\vec{r}, \tag{6}$$

što posle prelaska sa ψ na $\hat{\psi}$ daje operator

$$\hat{A}_1 = \sum_{i,j} \hat{a}_j^+ \hat{a}_i \int \varphi_j^*(\vec{r})\, \hat{A}(\vec{r})\, \varphi_i(\vec{r})\, d^3\vec{r}. \tag{7}$$

Ovo je izraz za jednočestični operator u reprezentaciji druge kvantizacije. Ako su $\varphi_i(\vec{r})$ svojstvene funkcije operatora $\hat{A}(\vec{r})$, a A_i njegove svojstvene vrednosti, onda jednočestični operator postaje dijagonalan

$$\hat{A}_1 = \sum_i A_i\, \hat{a}_i^+ \hat{a}_i . \tag{8}$$

Za dvočestični operator tj. takav operator koji zavisi od koordinata dve čestice $B(\vec{r},\vec{r}')$, srednja vrednost se definiše kao

$$\langle \hat{B}(\vec{r},\vec{r}') \rangle = \int \psi^*(\vec{r})\, \psi^*(\vec{r}')\, \hat{B}(\vec{r},\vec{r}')\, \psi(\vec{r}')\, \psi(\vec{r})\, d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}' \tag{9}$$

što posle prelaska na operatore polja daje dvočestični operator u reprezentaciji druge kvantizacije u obliku

$$\hat{B}_2 = \sum_{i,j,k,l} B_{(ij|kl)}\, \hat{a}_i^+ \hat{a}_j^+ \hat{a}_k \hat{a}_l , \tag{10}$$

gde je

$$B_{(ij|kl)} = \int \varphi_i^*(\vec{r})\, \varphi_j^*(\vec{r}')\, \hat{B}(\vec{r},\vec{r}')\, \varphi_k(\vec{r}')\, \varphi_l(\vec{r})\, d^3\vec{r}\, d^3\vec{r}' .$$

Na sličan način mogu se pretstaviti n-čestični operatori u reprezentaciji druge kvantizacije.

Ovaj prelaz veoma je koristan u slučaju da razmatramo problem mnoštva čestica jer, gledano sa matematičke tačke gledišta najlakše dovodi do rezultata. U fizici čvrstog stanja, naprimer, kako pokazuju eksperimenti dovoljno je uzeti hamiltonijan kristala sa tačnošću do dvočestičnih interakcija zaključno, da bi se dobili rezultati koji se dobro slažu sa eksperimentalnim podacima.

3. LAGRANGEOV FORMALIZAM U TEORIJI POLJA

Teorija polja može biti dobijena uopštavanjem Lagrangeovog formalizma u klasičnoj mehanici, tretirajući polje kao sistem materijalnih tačaka.

Mehanički sistem od n materijalnih tačaka potpuno je odredjen zadavanjem skupa generalisanih koordinata i generalisanih brzina, koji uz date početne i granične uslove opisuje stanje sistema. U teoriji polja generalisane koordinate su talasne funkcije, a generalisane brzine izvodi talasnih funkcija po vremenu. U izgradnji teorije polja prikladniji je Lagrangeov formalizam jer u Lagrangeovu funkciju vreme i prostorne koordinate ulaze potpuno simetrično kao parametri, dok se u Hamiltonovom formalizmu vreme pojavljuje kao osnovna nezavisno promenljiva, pa otsustvuje ravnopravnost prostornih koordinata i vremena. Pa ipak, Hamiltonov formalizam ima tu prednost što je više izražena formalna analogija izmedju teorije polja i klasične mehanike sistema čestica, a Hamiltonova funkcija se neposredno izražava preko dinamičkih karakteristika sistema. Lagrangeov formalizam se uglavnom koristi pri uvodjenju analogije izmedju teorije polja i klasične mehanike zahvaljujući zajedničkom korišćenju istog matematičkog aparata koji vodi do jednačina polja odnosno, do jednačina kretanja. U klasičnoj mehanici, lagranžijan je funkcija od generalisanih koordinata, generalisanih brzina i vremena. Medjutim, u relativističkoj formulaciji lagranžijana za elementarne čestice, lagranžijan ne zavisi eksplicitno od vremena i prostornih koordinata x_μ, što proizilazi iz suštine polja kao kvantnomehaničkog sistema, čije je stanje potpuno odredjeno zadavanjem funkcija polja, a koordinate x_μ su parametri od kojih zavise funkcije polja. Imajući to u vidu gustina lagranžijana se može napisati kao

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(\psi_i , \frac{\partial \psi}{\partial x_\mu} \right) . \tag{11}$$

Preko gustine lagranžijana može se definisati dejstvo S , relacijom

$$S = \int \mathcal{L}(x_\mu)\, d^4x \quad , \text{ gde je } d^4x = dx\,dy\,dz\,dt .$$

Iz klasične mehanike je poznato da se kretanje sistema odvija tako da varijacija dejstva ima ekstremalnu vrednost

$$\delta S = \int_\Omega \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} \delta \psi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\mu}\right)} \delta \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\mu} \right) \right\} d^4x = 0 \,. \tag{12}$$

Kako su operacije variranja i diferenciranja medjusobno nezavisne, može se izmeniti njihov red, pa se za drugi član izraza (12) dobija

$$\int_\Omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\mu}\right)} \delta \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\mu} \right) d^4x = \int_\Omega \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\mu}\right)} \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\delta \psi_i) d^4x =$$

$$= - \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\mu}\right)} \right\} \delta \psi_i d^4x + \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\mu}\right)} \delta \psi_i \right\} d^4x \,.$$

Poslednji član zbog uslova jednakosti nuli $\delta \psi_i$ na hiper-površini koja obuhvata četvorodimenzionu zapreminu Ω u kojoj posmatramo polje za $t = t_1$ i $t = t_2$, je jednak nuli, pa ostaje

$$\int_\Omega \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\mu}\right)} \right] \right\} \delta \psi_i d^4x = 0 \,.$$

Kako su varijacioni izvodi za sve koordinate polja medjusobno nezavisni gornji uslov će biti ispunjen ako je

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_i} - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_\mu}\right)} \right\} = 0 \qquad \begin{matrix} i = 1, 2 \cdots N \\ \mu = 1, 2, 3, 4 \end{matrix} \,, \tag{13}$$

gde je N broj komponenata polja.

Jednačina (13) pretstavlja jednačinu kretanja, odnosno jednačinu polja i zove se Eulerova jednačina. Ona je analogna Lagrangeovoj jednačini u mehanici gde promenljive ψ_i imaju isti smisao kao prostorne koordinate za sisteme čestica.

Važno je naglasiti da je polje sistem sa beskonačno mnogo stepeni slobode, što znači da funkcije polja u bilo kojoj tački prostora za fiksirani trenutak vremena imaju beskonačno mnogo vrednosti. Za razliku od polja mehanički sistemi okarakterisani su konačnim brojem stepeni slobode.

Koristeći se i dalje formalnom analogijom sa mehanikom sistema čestica može se dobiti Hamiltonova funkcija. Prema tome gustina hamiltonijana ima oblik

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_k} \dot{\psi}_k - \mathcal{L} . \tag{14}$$

Odavde je

$$H = \int \mathcal{H} d^3\vec{r} = \int \left\{ \sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_k} \dot{\psi}_k - \mathcal{L} \right\} d^3\vec{r},$$

$$H = \int \left\{ \sum_{k=1}^{m} \pi_k \dot{\psi}_k - \mathcal{L} \right\} d^3\vec{r}, \quad \text{gde je} \quad \pi_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\psi}_k} \tag{15}$$

π_k je generalisani impuls polja kanonski spregnut sa funkcijom ψ_k.

4. NEUTRALNO MEZONSKO POLJE

Neutralno mezonsko polje se opisuje realnom funkcijom $\varphi(x)=\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)$, koja se u Lorentzovim transformacijama ponaša kao skalar.

Za takvo polje uvodi se lagranžijan koji se postulira uz izvesne uslove i ograničenja koja mora da zadovoljava po svom fizičkom smislu.

1. Lagranžijan polja mora da ima takvu analitičku formu funkcija polja i njihovih izvoda da je invarijantan u odnosu na Lorentzove transformacije.
2. Mora da bude realna funkcija.
3. Da bi jednačine polja bile diferencijalne jednačine najviše drugog reda, analogno jednačinama kretanja u mehanici, lagranžijan mora da sadrži uporedo sa funkcijama polja i njihove izvode najviše prvog reda.
4. Da bi jednačine polja bile linearne i jednoznačne, lagranžijan polja mora biti kvadratan po funkcijama polja i njihovim izvodima.

Imajući sve ovo u vidu lagranžijanu neutralnog mezonskog polja se može dati oblik

$$\mathcal{L}(x)=a\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)+b\varphi^2 .$$

Konstante a i b se odredjuju eksperimentalnim putem rukovodeći se potrebom da se iz datog oblika lagranžijana mogu izračunati dinamičke promenljive (energija, impuls i.t.d.). Uzimajući to u obzir, gustina lagranžijana skalarnog mezonskog polja konačno dobija oblik

$$\mathcal{L}(x)=-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\mu}\right)+m^2\varphi^2\right\} . \qquad (16)$$

Uopšteno govoreći u izrazu (16) figuriše i brzina svetlosti, ali zbog prostijeg računa i kako će se kasnije videti, direktnog svodjenja konstante normiranja na jedinicu, koristi se sistem jedinica u kome je $c=1$ i $\hbar=1$.

Koristeći se relacijom (16) može se pokazati da je veličina

$$T_{\mu\nu}=\mathcal{L}\,\delta_{\mu\nu}-\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_\nu}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\varphi_k}{\partial x_\mu}\right)} , \qquad (17)$$

koju nazivamo tenzor energije-impulsa povezana sa gustinom energije i impulsa relacijama

$$\mathcal{H} = -T_{44} \ , \quad \mathcal{P}_m = -i\, T_{m4} \quad (m=1,2,3) \ . \qquad (18)$$

Iz jednačina (16), (17) i (18) izraz za gustinu hamiltonijana neutralnog mezonskog polja dobija oblik

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\left\{ \pi^2 + (\vec{\nabla}\varphi)^2 + m^2\varphi^2 \right\} . \qquad (19)$$

Gustina hemiltonijana je pozitivna veličina što je i neophodno jer je energija pozitivna veličina.
Iz gornjih jednačina možemo dobiti gustinu impulsa neutralnog mezonskog polja

$$\mathcal{P}_\ell = -i\, T_{4\ell} = -\frac{1}{2}\left(\pi \frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_\ell}\pi \right) , \qquad (2o)$$

gde je $\ell = 1,2,3$, a $\pi(x) = \dot{\varphi}(x)$.
Iz Eulerove jednačine (13) i gustine lagranžijana (16) dobije se jednačina

$$(\Box - m^2)\,\varphi(x) = 0 , \qquad (21)$$

gde je

$$\Box = \frac{\partial}{\partial x_\mu}\frac{\partial}{\partial x_\mu} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_4^2} = \nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

Jednačina (21) je kvantnomehanička relativistička talasna jednačina poznata kao Klein-Gordonova jednačina i predstavlja relativističko uopštenje Schrödingerove jednačine, za čestice bez spina ili celobrojnim spinom (bozone).

Za izračunavanje kvantnomehaničkih vrednosti dinamičkihpromenljivih biće potreban zakon disperzije (zavisnost frekvencije od talasnog broja). Energija relativističke čestice data je kao

$$E^2 = \vec{p}^{\,2} c^2 + m^2 c^4 ,$$

Kako je u kvantnoj mehanici $E = \hbar\omega$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$ i ako uzmemo da je $c = 1$, $\hbar = 1$ dobije se

$$\omega^2 = \vec{k}^2 + m^2 . \qquad (22)$$

Ova jednačina pretstavlja zakon disperzije za relativističke čestice sa masom mirovanja različitom od nule.

Rešenje Klein-Gordonove jednačine (21) se normira u zapremini kocke $V = L^3$, u kojoj se polje prikazuje superpozicijom ravnih talasa. Ovo rešenje zadovoljava i uslove periodičnosti po trima prostornim koordinatama na granicama kocke ivice L

$$\varphi(x,y,z,t) = \varphi(x+L,y,z,t) = \varphi(x,y+L,z,t) = \varphi(x,y,z+L,t). \tag{23}$$

Opšte rešenje jednačine (21) razvijeno u Fourierov red po talsnim vektorima i normirano u zapremini $V = L^3$, u kojoj posmatramo polje ima oblik

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left\{ a_{\vec{k}} e^{ikx} + a^{*}_{\vec{k}} e^{-ikx} \right\}, \tag{24}$$

gde je $k = (\vec{k}, i\omega)$, $kx = \vec{k}\vec{r} - \omega t$, $\vec{k} = \frac{2\pi}{L}\vec{n}$, $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$,

a $\vec{n}$ je jedinični vektor koji ima pravac prostiranja talasa. Uopšteni impuls polja ima oblik

$$\pi(x) = \dot{\varphi}(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}} \left\{ -a_{\vec{k}} e^{ikx} + a^{*}_{\vec{k}} e^{-ikx} \right\}. \tag{25}$$

Za prelazak na kvantnomehaničko mezonsko polje potrebno je funkcije polja zameniti odgovarajućim operatorima

$$\varphi(x) \to \hat{\varphi}(x), \quad \pi(x) \to \hat{\pi}(x), \tag{26}$$

a Fourierovi koeficijenti $a_{\vec{k}}$ i $a^{*}_{\vec{k}}$ nisu više brojevi, već kvantnomehanički operatori, $\hat{a}_{\vec{k}}$ i $\hat{a}^{+}_{\vec{k}}$. Dakle,

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}} \left\{ \hat{a}_{\vec{k}} e^{ikx} + \hat{a}^{+}_{\vec{k}} e^{-ikx} \right\}, \tag{27}$$

$$\hat{\pi}(x) = \frac{i}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}} \left\{ -\hat{a}_{\vec{k}} e^{ikx} + \hat{a}^{+}_{\vec{k}} e^{-ikx} \right\}.$$

Prelazak sa funkcija polja na odgovarajuće operatore naziva se druga kvantizacija, a kvantnomehaničke funkcije polja kao operatori zadovoljavaju komutacione relacije

$$[\hat{\varphi}(\vec{r}), \hat{\varphi}^{+}(\vec{r}\,')] = \hat{\varphi}(\vec{r})\hat{\varphi}^{+}(\vec{r}\,') - \hat{\varphi}^{+}(\vec{r}\,')\hat{\varphi}(\vec{r}) =$$

$$= \sum_{i,k} (\hat{a}_i \hat{a}^{+}_k - \hat{a}^{+}_k \hat{a}_i) \hat{\psi}_i(\vec{r}) \hat{\psi}^{+}_k(\vec{r}\,') = \sum_i \hat{\psi}_i(\vec{r}) \hat{\psi}^{+}_i(\vec{r}\,') = \delta(\vec{r} - \vec{r}\,'). \tag{28}$$

Iz ovih relacija sledi da je

$$\hat{a}_k \hat{a}_k^+ - \hat{a}_k^+ \hat{a}_k = 1 \quad . \tag{29}$$

Koristeći se formulama (19)i(27) za energiju polja imamo

$$\hat{H} = \frac{1}{4V} \int \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'}}} \left(-\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'} - \vec{k}\vec{k}' + m^2 \right) \cdot$$

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}'} e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{r}} e^{i(-\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}'})t} + \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}'}^+ e^{i(-\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} e^{i(\omega_{\vec{k}} + \omega_{\vec{k}'})t} \right] d^3\vec{r} +$$

$$+ \frac{1}{4V} \int \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'}}} \left(\omega_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}'} + \vec{k}\vec{k}' + m^2 \right) \cdot$$

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}'}^+ e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} e^{-i(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}'})t} + \hat{a}_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}'} e^{-i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} e^{i(\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}'})t} \right] d^3\vec{r} .$$

Kako je

$$\frac{1}{V} \int e^{\pm(\vec{k} \mp \vec{k}')\vec{r}} d^3\vec{r} = \delta_{\vec{k}, \pm \vec{k}'} \tag{30}$$

U prvom integralu se pojavljuje $\delta_{\vec{k}, -\vec{k}'}$, pa je $-\vec{k}\vec{k}' = k^2$,pa na osnovu disperzione jednačine on je jednak nuli. U drugom integralu se pojavljuje $\delta_{\vec{k}, \vec{k}'}$, tako da je

$$\hat{H} = \frac{1}{4} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\omega_{\vec{k}}} (\omega_{\vec{k}}^2 + \omega_{\vec{k}}^2)(\hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}^+ + \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}}) .$$

Ovaj rezultat i relacija (29) konačno daju

$$H = \sum_{\vec{k}} \omega_{\vec{k}} (\hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}} + \tfrac{1}{2}) . \tag{31}$$

Koristeći formulu (2o) za impuls neutralnog mezonskog polja dobija se

$$\vec{P} = \frac{1}{4V} \int \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} (\vec{k} + \vec{k}') \cdot$$

$$\left[-\hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}'} e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{r}} e^{i(-\omega_{\vec{k}} - \omega_{\vec{k}'})t} - \hat{a}_{\vec{k}}^+ \hat{a}_{\vec{k}'}^+ e^{i(-\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} e^{i(\omega_{k} + \omega_{\vec{k}'})t} \right] d^3\vec{r} +$$

$$+ \frac{1}{4V} \int \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} (\vec{k} + \vec{k}') \cdot$$

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}} \hat{a}^{+}_{\vec{k}'} e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}} e^{i(\omega_{\vec{k}'}-\omega_{\vec{k}})t} + \hat{a}^{+}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}'} e^{i(-\vec{k}+\vec{k}')\vec{r}} e^{i(\omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{k}'})t} \right] d^3\vec{r}$$

Prvi integral je jednak nuli zbog $\delta_{\vec{k}-\vec{k}'}$, što dovodi do $\vec{k}=-\vec{k}'$ pa ostaje

$$\vec{p} = \sum_{\vec{k}} \vec{k} \left(\hat{a}^{+}_{\vec{k}} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \right). \tag{32}$$

Kako $\vec{k}$ ide preko pozitivnih i negativnih vrednosti drugi član u gornjoj sumi davaće nulu i imaćemo da je

$$\vec{p} = \sum_{\vec{k}} \vec{k} \hat{a}^{+}_{\vec{k}} \hat{a}_{\vec{k}}. \tag{33}$$

Da bi objasnili dobijene rezultate za energiju i impuls mezonskog polja, posmatrajmo takve talasne funkcije koje su okarakterisane samo brojem čestica u datom stanju. Broj čestica u nekom stanju može biti beskonačno velik za boze čestice, kakvi su mezoni, jer se one pokoravaju Bose-Einsteinovoj statistici. Uvedimo takav sistem ortonormiranih funkcija $\phi(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots)$, u kojima kao nova nezavisno promenljiva figuriše okupacioni broj, broj čestica u datom stanju.

Uvedimo operator $\hat{a}_i$ na taj način što će njegovo dejstvo na funkciju $\phi(n_1, n_2, \dots, n_i, \dots)$ voditi umanjenju broja čestica u i-tom stanju za jedinicu, a operator $\hat{a}^{+}_i$ delujući na funkciju $\phi(n_1, \dots, n_i, \dots)$ uvećava broj čestica za jedinicu u i-tom stanju. Operator $\hat{a}_i$ se zove anihilacioni, a $\hat{a}^{+}_i$ kreacioni operator. Iz njihovog uvodjenja sleduje

$$\begin{aligned} \hat{a}_i \Phi(n_1, \dots, n_i, \dots) &= \sqrt{n_i}\, \Phi(n_1, \dots, n_i - 1, \dots) \\ \hat{a}^{+}_i \Phi(n_1, \dots n_i \dots) &= \sqrt{n_i + 1}\, \Phi(n_1, \dots, n_i + 1, \dots) \end{aligned} \tag{34}$$

Ovde su $n_1, \dots n_i \dots$ brojevi čestica u prvom, drugom, odnosno i-tom stanju. Ako su ti brojevi jednaki nuli odnosno, ako odsustvuju bozoni u bilo kom stanju, stanje opisano funkcijom $\Phi(0, 0, \dots 0, \dots) = \Phi_0$ zove se vakuumsko stanje. Shodno (34) sledi

$$\hat{a}_i^+\hat{a}_i \, \Phi(n_1, \dots n_i, \dots) = n_i \, \Phi(n_1, \dots, n_i, \dots) \,. \tag{35}$$

Operator $N_i = \hat{a}_i^+\hat{a}_i$ je ovde tzv. operator okupacionog broja n_i, koji delujući na funkciju $\Phi(n_1, \dots n_i, \dots)$, daje ukupan broj čestica u i-tom stanju n_i.

Uvodjenjem boze operatora $\hat{a}_i$ i $\hat{a}_i^+$ i N_i, izrazu za energiju (31) i impuls (32) neutralnog mezonskog polja može se dati sledeća interpretacija.

Razvijajući talasnu funkciju neutralnog mezonskog polja u Fourierov red po talasnim vektorima, gde su koeficijenti razvoja boze operatori, dobili smo izraz za energiju potpuno sličan izrazu za energiju sistema n linearnih harmonijskih oscilatora. Na osnovu toga može se zaključiti da je mezonsko polje svedeno na sistem neinteragujućih čestica energije $\hbar\omega_{\vec{k}}$ i impulsa $\hbar\vec{k}$, gde $\hat{a}_{\vec{k}}^+\hat{a}_{\vec{k}}$ pretstavlja broj neutralnih mezona energije $\hbar\omega_{\vec{k}}$ i impulsa $\hbar\vec{k}$. Medjutim u izrazu za energiju pojavljuje se protivurečnost koja nije u skladu sa logičkim rasudjivanjem o vrednosti energije polja. Ako u polju odsustvuju mezoni tj. ako je $\hat{a}_{\vec{k}}^+\hat{a}_{\vec{k}} = 0$, sledi da energija vakuumskog stanja teži beskonačnim vrednostima jer $\sum \omega_{\vec{k}}$ ide samo preko pozitivnih vrednosti talasnog vektora. Da bi se otklonila ova protivurečnost energija mezonskog polja se računa tako, što se otstrani energija vakuumskog stanja ili se energija polja računa kao razlika energije dobijene izrazom (31) i energije vakuumskog stanja.

5. NAELEKTRISANO MEZONSKO POLJE

Ulogu generalisanih koordinata naelektrisanog mezonskog polja igraju dve kompleksne funkcije $\varphi(x)$ i $\varphi^*(x)$. Obe ove funkcije mogu se razložiti na realne funkcije koje opisuju realno polje $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$, relacijama

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\varphi_1(x) - i\,\varphi_2(x)\right\} \\ \varphi^*(x) &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\varphi_1(x) + i\,\varphi_2(x)\right\} \end{aligned} \qquad (36)$$

Neophodnost uvodjenja funkcija $\varphi(x)$ i $\varphi^*(x)$ proizilazi iz razloga što samo jedna od njih ne odredjuje funkcije realnog polja $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$. Može se pokazati da funkcije $\varphi(x)$ i $\varphi^*(x)$ svaka za sebe zadovoljava Eulerovu jednačinu (13) kao i Klein-Gordonovu jednačinu (21)

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu}\right)}\right] = 0 \qquad (\Box - m^2)\,\varphi(x) = 0 \\ &\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial x_\mu}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right)}\right] = 0 \qquad (\Box - m^2)\,\varphi^*(x) = 0 \end{aligned} \qquad (37)$$

gde je $\mu = 1,2,3,4$, $x = (\vec{r}, t)$, a m je u atomskom sistemu jedinica, kao i kod jednačine (21), masa mirovanja mezona. Uzimajući u obzir gore navedene specifičnosti naelektrisanog mezonskog polja i lagranžijan neutralnog mezonskog polja, gustina lagranžijana naelektrisanog mezonskog polja ima formu

$$\mathcal{L}\left(\varphi, \varphi^*; \frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu}, \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\nu}\right) = -\left\{\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu} + m^2 \varphi \varphi^*\right\}. \qquad (38)$$

Tenzor energije-impulsa ima oblik

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}\,\delta_{\mu\nu} + \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu}\frac{\partial \varphi}{\partial x_\nu} + \frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\nu}. \qquad (39)$$

Kvadrivektor impulsa definisan preko tenzora energije-impulsa ima oblik

$$P_\mu = -i\int T_{4\mu}\, d^3\vec{r}$$

a njegove prve tri komponente se dobiju kao

$$P_k = -i\int T_{4k}\, d^3\vec{r} = -\int\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial t}\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} + \frac{\partial \varphi}{\partial t}\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_k}\right) d^3\vec{r}. \qquad (40)$$

Energija polja se dobije iz tenzora energije-impulsa kao

$$H = -\int T_{44}\, d^3\vec{r}. \tag{41}$$

Za razliku od neutralnog mezonskog polja, ovde moramo uvesti novu dinamičku promenljivu, kvadrivektor struje-naelektrisanja, koji za bilo koje naelektrisano polje ima oblik

$$j_\mu(x) = -ie\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right)}\varphi - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu}\right)}\varphi^*\right].$$

Iz ove formule koristići se izrazom (37) dobijamo kvadrivektor struje naelektrisanja naelektrisanog mezonskog polja

$$j_\mu(x) = ie\left[\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial x_\mu}\right)\varphi - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\mu}\right)\varphi^*\right] \tag{42}$$

Četvrta komponenta ovog kvadrivektora daje gustinu naelektrisanja

$$j_4(x) = ie\left[\frac{\partial \varphi^*}{\partial(it)}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial(it)}\varphi^*\right]$$

$$\rho = \frac{e}{i}\left[\frac{\partial \varphi^*}{\partial t}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\varphi^*\right]. \tag{43}$$

Izraz

$$\frac{\partial j_\mu(x)}{\partial x_\mu} = 0$$

dobijen iz jednačine (42) može se interpretirati kao zakon održanja struje-naelektrisanja.

Ukupno naelektrisanje polja dato je kao

$$Q = \frac{e}{i}\int\left(\frac{\partial \varphi^*}{\partial t}\varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial t}\varphi^*\right)d^3\vec{r}. \tag{44}$$

Sa kompleksnih funkcija (36) prelazimo na odgovarajuće kvantnomehaničke operatore

$$\varphi(x) \to \hat{\varphi}(x) \quad , \quad \varphi^*(x) \to \hat{\varphi}^+(x)$$

koje ćemo kao i kod neutralnog mezonskog polja razviti u Fourierov red po talasnim vektorima

$$\hat{\varphi}(x) = \frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\left\{\hat{a}_{\vec{k}}e^{ikx} + \hat{b}^+_{\vec{k}}e^{-ikx}\right\}$$

$$\hat{\varphi}^{+}(x)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\frac{1}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\left\{\hat{a}^{+}_{\vec{k}}e^{-ikx}+\hat{b}_{\vec{k}}e^{ikx}\right\}. \tag{45}$$

Koeficijenti razvoja pretstavljaju boze operatore koji zadovoljavaju komutacione relacije

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}},\hat{a}^{+}_{\vec{k}'}\right]=\left[\hat{b}_{\vec{k}},\hat{b}^{+}_{\vec{k}'}\right]=\delta_{\vec{k},\vec{k}'}. \tag{46}$$

Ostale kombinacije ovih operatora komutiraju medjusobno slično kao i kod neutralnog mezonskog polja. Operatore $\hat{a}_{\vec{k}}$ i $\hat{a}^{+}_{\vec{k}}$ ćemo interpretirati kao anihilacioni i kreacioni operator pozitivnih mezona, a operatore $\hat{b}_{\vec{k}}$ i $\hat{b}^{+}_{\vec{k}}$ kao anihilacioni i kreacioni operator negativnih mezona.

Saglasno izrazima (39) i (41) operator energije polja ima oblik

$$\hat{H}=\int\left(\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial t}\frac{\partial\hat{\varphi}^{+}}{\partial t}+\vec{\nabla}\hat{\varphi}\vec{\nabla}\hat{\varphi}^{*}+m^{2}\hat{\varphi}\hat{\varphi}^{+}\right)d^{3}\vec{r} \tag{47}$$

gde se $\vec{\nabla}$ odnosi na diferenciranje po $\vec{r}$. Iz jednačina (45) je

$$\frac{\partial\hat{\varphi}}{\partial t}=\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}}\left\{-\hat{a}_{\vec{k}}e^{ikx}+\hat{b}^{+}_{\vec{k}}e^{-ikx}\right\},$$

$$\frac{\partial\hat{\varphi}^{+}}{\partial t}=\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2}}\left\{\hat{a}^{+}_{\vec{k}}e^{-ikx}-\hat{b}_{\vec{k}}e^{ikx}\right\}, \tag{48}$$

$$\vec{\nabla}\hat{\varphi}=\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\frac{\vec{k}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\left\{\hat{a}_{\vec{k}}e^{ikx}-\hat{b}^{+}_{\vec{k}}e^{-ikx}\right\},$$

$$\vec{\nabla}\hat{\varphi}^{+}=\frac{i}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\frac{\vec{k}}{\sqrt{2\omega_{\vec{k}}}}\left\{-\hat{a}^{+}_{\vec{k}}e^{-ikx}+\hat{b}_{\vec{k}}e^{ikx}\right\}. \tag{49}$$

Jednačine (45), (47), (48) i (49) daju

$$\hat{H}=\frac{1}{2V}\int\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k}'}\frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}}\left(\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}+m^{2}+\vec{k}\vec{k}'\right)\cdot$$

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^{+}_{\vec{k}'}e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}e^{i(\omega_{\vec{k}'}-\omega_{\vec{k}})t}+\hat{b}^{+}_{\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k}'}e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{r}}e^{i(\omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{k}'})t}\right]d^{3}\vec{r}+$$

$$+\frac{1}{2V}\int\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k}'}\frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}}\left(-\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}+m^2-\vec{k}\vec{k}'\right)\cdot$$

$$\left[\hat{a}_{\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k}'}e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{r}}e^{i(-\omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{k}'})t}+\hat{b}^+_{\vec{k}}\hat{a}^+_{\vec{k}'}e^{i(-\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}e^{i(\omega_{\vec{k}}+\omega_{\vec{k}'})t}\right]d^3\vec{r}$$

Drugi član, zbog disperzione $\underbrace{\text{jednačine,}}_{\text{JEDNAK JE NULI}}$ dok prvi član, pozivajući se na (3o), daje

$$\hat{H}=\sum_{\vec{k}}\omega_k\left(\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^+_{\vec{k}}+\hat{b}^+_{\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k}}\right)=\sum_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}}\left(\hat{a}^+_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}+\hat{b}^+_{\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k}}+1\right)$$

Otstranjujući iz računa energiju vakuumskog stanja konačno dobijamo

$$\hat{H}=\sum_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}}\left(\hat{a}^+_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}+\hat{b}^+_{\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k}}\right) \qquad (5o)$$

Tumačenje ovog izraza možemo dobiti uporedjujući ga sa izrazom za energiju neutralnog mezonskog polja. $\hat{a}^+_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}$ pertstavlja, u ovom slučaju, operator broja pozitivnih mezona sa talasnim vektorom $\vec{k}$, dok $\hat{b}^+_{\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k}}$ pretstavlja operator broja negativnih mezona sa talasnim vektorom $\vec{k}$.

Koristeći formule (4o), (48) i (49) i provodeći račun potpuno sličan računanju impulsa neutralnog mezonskog polja, za impuls naelektrisanog mezonskog polja dobijamo

$$\hat{\vec{p}}=\sum_{\vec{k}}\vec{k}\left(\hat{a}^+_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}+\hat{b}^+_{\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k}}\right)=\sum_{\vec{k}}\vec{k}\left(N^{(+)}_{\vec{k}}+N^{(-)}_{\vec{k}}\right) \qquad (51)$$

gde su $N^{(+)}_{\vec{k}}$ i $N^{(-)}_{\vec{k}}$ operatori pozitivnog odnosno negativnog broja mezona talasnog vektora $\vec{k}$.

Iz izraza (44), (45) i (48) može se dobiti ukupno naelektrisanje naelektrisanog mezonskog polja

$$\hat{Q}=\frac{e}{2V}\int\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k}'}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}'}}}\left(\hat{a}^+_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}+\hat{a}_{\vec{k}'}\hat{a}^+_{\vec{k}}\right)e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{r}}e^{i(\omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{k}'})t}d^3\vec{r}+$$

$$+\frac{e}{2V}\int\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k}'}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}'}}}\left[\hat{a}_{\vec{k}'}\hat{b}_{\vec{k}}-\hat{b}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}'}\right]e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{r}}e^{i(-\omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{k}'})t}d^3\vec{r}+$$

$$+\frac{e}{2V}\int\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k}'}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}'}}}\left[\hat{a}^{+}_{\vec{k}}\hat{b}^{+}_{\vec{k}'}-\hat{b}^{+}_{\vec{k}'}\hat{a}^{+}_{\vec{k}}\right]e^{i(-\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}e^{i(\omega_{\vec{k}}+\omega_{\vec{k}'})t}d^3\vec{r}\,-$$

$$-\frac{e}{2V}\int\sum_{\vec{k}}\sum_{\vec{k}'}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{\omega_{\vec{k}'}}}\left(\hat{b}_{\vec{k}}\hat{b}^{+}_{\vec{k}'}+\hat{b}^{+}_{\vec{k}'}\hat{b}_{\vec{k}}\right)e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}e^{i(\omega_{\vec{k}'}-\omega_{\vec{k}})t}d^3\vec{r}\,.$$

Drugi i treći član su jednaki nuli jer operatori u uglastim zagradama komutiraju, dok prvi i četvrti član uzimajući u obzir izraz (3o) daju

$$\hat{Q}=\frac{e}{2}\sum_{\vec{k}}\left[\hat{a}^{+}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}+\hat{a}_{\vec{k}}\hat{a}^{+}_{\vec{k}}-\left(\hat{b}^{+}_{\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k}}+\hat{b}_{\vec{k}}\hat{b}^{+}_{\vec{k}}\right)\right]$$

$$\hat{Q}=e\sum_{\vec{k}}\left(\hat{a}^{+}_{\vec{k}}\hat{a}_{\vec{k}}-\hat{b}^{+}_{\vec{k}}\hat{b}_{\vec{k}}\right)=e\sum_{\vec{k}}\left(N^{(+)}_{\vec{k}}-N^{(-)}_{\vec{k}}\right) \qquad (52)$$

I ako je ovaj rezultat dobijen u impulsnom prostoru njegovo tumačenje je isto kao i u koordinatnoj reprezentaciji. Dakle, ukupno naelektrisanje polja jednako je razlici broja pozitivnih i broja negativnih naelektrisanja u jedinicama e. Istaknimo ovde i to, da se diskretnost naelektrisanja javlja kao direktna posledica druge kvantizacije, što sledi iz izraza (52).

6. ELEKTROMEGNETNO POLJE

Elektromagnetno polje bez naelektrisanja je odredjeno trima komponentama vektorskog potencijala i skalarnim potencijalom, koje se udružuju u kvadrivektor elektromagnetnog potencijala

$$A(x) = \{A_\mu(x)\} = \{\vec{A}(x),\, i\varphi(x)\}.$$

Komponente kvadrivektora potencijala zadovoljavaju d'Alambertovu jednačinu

$$\square A_\mu = 0 \qquad (\mu = 1,2,3,4). \tag{53}$$

Kako potencijali zbog gradientne invarijantnosti nisu jednoznačno odredjeni, na njih nalažemo dopunski uslov. U ovom slučaju to je Lorentzov uslov (kalibracija potencijala),

$$\mathrm{div}\vec{A} + \frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0 \quad \text{ili što je ekvivalentno}$$

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} = 0. \tag{54}$$

U poslednjem izrazu se podrazumeva sumiranje po μ $(\mu=1,2,3,4)$. Služeći se analogijom koja postoji izmedju mezonskog i elektromagnetnog polja definišemo veličine koje će biti potrebne za nalaženje dinamičkih karakteristika polja. Eulerova jednačina (13) ovde ima oblik

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \frac{\partial}{\partial x_\nu}\left\{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\right)}\right\} = 0. \tag{55}$$

Koristeći se oblikom gustine lagranžijana iz relacije (16) i imajući u vidu da je masa kvanta elektromagnetnog polja, fotona u mirovanju ravna nuli, može se pokazati da lagranžijan oblika

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu}$$

zadovoljava talasnu jednačinu polja (53). Slično (17) tenzor energije-impulsa ima oblik

$$T_{\mu\nu} = \mathcal{L}\delta_{\mu\nu} - \frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\mu}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial A_\lambda}{\partial x_\nu}\right)}. \tag{56}$$

Elektromagnetno polje je potpuno i jednoznačno odredjeno Maxwell-ovim jednačinama. Da bi te jednačine našli u kovarijantnoj formi, uvodimo antisimetrični tenzor oblika

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\nu} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \qquad (57)$$

Ovako uveden tenzor zove se tenzor elektromagnetnog polja. Komponente jačina električnog i magnetnog polja povezane su sa tenzorom (57) relacijama

$$F_{jk} = \varepsilon_{jkl} H_l \,, \qquad F_{4k} = i E_k \qquad (58)$$

($j,k,l = 1,2,3$ ε_{jkl} je jedinični antisimetrični tenzor).
Koristeći se tenzorom elektromagnetnog polja (57) Maxwellove jednačine

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad i \quad \mathrm{div}\,\vec{E} = 0$$

u kovarijantnoj formulaciji dobijaju oblik

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0, \qquad (59)$$

a jednačine $\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0$ i $\mathrm{div}\,\vec{H} = 0$ prelaze u

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial x_\lambda} + \frac{\partial F_{\nu\lambda}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F_{\lambda\mu}}{\partial x_\nu} = 0 \,, \quad \mu,\nu,\lambda = \begin{Bmatrix} 1, 2, 4 \\ 1, 3, 4 \\ 2, 3, 4 \end{Bmatrix}. \qquad (60)$$

Iz klasične elektrodinamike je poznato, a iz tenzora energije-impulsa može se dobiti energija i impuls spolja relacijama

$$H = \frac{1}{2}\int \left(\vec{E}^2 + \vec{H}^2\right) d^3\vec{r},$$

$$\vec{P} = \int \left(\vec{E} \times \vec{H}\right) d^3\vec{r}\,. \qquad (61)$$

Predjimo sad na drugu kvantizaciju, tako što ćemo sa funkcija polja A_μ (ili što je ekvivalentno $\vec{E}$ i $\vec{H}$) preći na kvantno-mehaničke operatore $\hat{A}_\mu$, $\hat{\vec{E}}$ i $\hat{\vec{H}}$.

U tom smislu razložimo operatore A_μ po ravnim talasima, a superpozicija tih talasa davaće opšte rešenje jednačine (53)

$$\hat{A}_\mu(x) = \sum_{\vec{k},\lambda} \frac{1}{\sqrt{2V\omega_k}} e_\mu^\lambda \left(\hat{C}_{\vec{k},\lambda} e^{ikx} + \hat{C}^+_{\vec{k},\lambda} e^{-ikx} \right) \tag{62}$$

gde su koeficijenti razvoja boze operatori koji zadovoljavaju komutacione relacije

$$\left[\hat{C}_{\vec{k},\lambda}, \hat{C}^+_{\vec{k}',\lambda'} \right] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'} \delta_{\lambda,\lambda'}$$

$$\left[C^+_{\vec{k},\lambda}, C^+_{\vec{k}',\lambda'} \right] = 0 \qquad \left[C_{\vec{k}\lambda}, C_{\vec{k}'\lambda'} \right] = 0 \tag{63}$$

U razvoju(62) e_μ^λ je jedinični vektor polarizacije, V je normirajuća zapremina $V = L^3$, $kx = \vec{k}\vec{r} - \omega t$ je skalarni proizvod kvadrivektora $x(\vec{r}, it)$ i talasnog kvadrivektora $k(\vec{k}, i\omega)$. Ako se $A_\mu(x)$ uvsti u jednačinu (53) dobije se zakon disperzije za fotone, koji je očigledan i iz jednačine (22), ako se uzme da je masa mirovanja fotona jednaka nuli. Taj zakon ima oblik

$$\omega_{\vec{k}} = |\vec{k}| \quad , \text{ (zbog } c = 1 \text{).} \tag{64}$$

Za odredjenu vrednost $\vec{k}$ moguća su četiri nezavisna rešenja (62) sa različitim polarizacijama. Zato, za odredjenu vrednost $\vec{k}$ birajmo jedinične vektore polarizacije e_μ^λ kao bazis četvorodimenzionog koordinatnog sistema, tako da je $e_\alpha^\lambda = \delta_{\lambda\alpha}$, gde se n_α $(\alpha = 1,2,3,4)$ poklapaju sa ortovima tog koordinatnog sistema. Ako upravimo vektor $\vec{k}$ duž n_3, n_1 i n_2 normalno na $\vec{k}$ i medjusobno normalno jedan na drugi, tada za $\lambda = 1,2$ imamo fotone sa poprečnom (transverzalnom)polarizacijom, za $\lambda = 3$ sa uzdužnom (longitudinalnom) polarizacijom,a za $\lambda = 4$ pojavljuje se skalarna ili"vremenska"polarizacija fotona.
To možemo simbolično napisati u formi

$$e_k^\lambda = \begin{Bmatrix} 0 & , \lambda = 1,2 \\ \omega = |\vec{k}| & , \lambda = 3 \\ i\omega & , \lambda = 4 \end{Bmatrix} \tag{65}$$

$$\sum_\lambda e_\mu^\lambda e_\nu^\lambda = \delta_{\mu\nu}, \qquad e^\lambda e^{\lambda'} = \delta_{\lambda\lambda'} \qquad \text{za zadano } \vec{k}.$$

Ako postavimo razvoj operatora $\hat{A}_\mu(x)$ (62) u Lorentzov uslov (54) i koristimo se relacijama (65) dobijamo

$$\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=\sum_{\mu=1}^{4}\frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu}=i\sum_{\vec{k},\lambda}\sum_{l=1}^{3}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}e_l^\lambda k_l\left(\hat{C}_{\vec{k}\lambda}e^{ikx}-\hat{C}^+_{\vec{k}\lambda}e^{-ikx}\right)+$$

$$+\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}e_4^\lambda(i\omega)\left(\hat{C}_{\vec{k}\lambda}e^{ikx}-\hat{C}^+_{\vec{k}\lambda}e^{-ikx}\right)=$$

$$=i\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{k_\mu e_\mu^\lambda}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\left(\hat{C}_{\vec{k}\lambda}e^{ikx}-\hat{C}^+_{\vec{k}\lambda}e^{-ikx}\right)=$$

$$=i\sum_{\vec{k}}\frac{\omega_{\vec{k}}}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\left[(\hat{C}_{\vec{k}3}+i\hat{C}_{\vec{k}4})e^{ikx}-(\hat{C}^+_{\vec{k}3}+i\hat{C}^+_{\vec{k}4})e^{-ikx}\right]$$

Zbog linearne nezavisnosti ravnih talasa da bi gornji uslov bio ispunjen potrebno je da

$$\hat{C}_{\vec{k}3}+i\hat{C}_{\vec{k}4}=0 \quad i \quad \hat{C}^+_{\vec{k}3}+i\hat{C}^+_{\vec{k}4}=0 \tag{66}$$

Koristeći razvoj operatora potencijala na ravne talase (62) tenzor elektromagnetnog polja (57) dobija oblik

$$F_{\mu\nu}=i\sum_{\vec{k},\lambda}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}(e_\nu^\lambda k_\mu-e_\mu^\lambda k_\nu)\left(\hat{C}_{\vec{k}\lambda}e^{ikx}-\hat{C}^+_{\vec{k}\lambda}e^{-ikx}\right) \tag{67}$$

Preko ovog tenzora i jednačina (58) za jačine električnog i magnetnog polja imamo

$$\hat{\vec{E}}=i\sum_{\vec{k},\lambda=1,2}\sqrt{\frac{\omega_{\vec{k}}}{2V}}\,\vec{e}^\lambda\left(\hat{C}_{\vec{k}\lambda}e^{ikx}-\hat{C}^+_{\vec{k}\lambda}e^{-ikx}\right)$$

$$\hat{\vec{H}}=i\sum_{\vec{k},\lambda=1,2}\frac{1}{\sqrt{2V\omega_{\vec{k}}}}\left(\vec{k}\times\vec{e}^\lambda\right)\cdot\left(\hat{C}_{\vec{k}\lambda}e^{ikx}-\hat{C}^+_{\vec{k}\lambda}e^{-ikx}\right) \tag{68}$$

Hamiltonov operator dobijamo koristeći jednačinama (61) i (68).

$$\hat{H}=\frac{1}{4V}\int\sum_{\vec{k},\vec{k}',\lambda=1,2}\frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}}\left(\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}+\vec{k}\vec{k}'\right)$$

$$\left[-\hat{C}_{\vec{k}\lambda}\hat{C}_{\vec{k}\lambda}e^{i(\vec{k}+\vec{k}')\vec{r}}e^{i(-\omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{k}'})t}-\hat{C}^+_{\vec{k}\lambda}\hat{C}^+_{\vec{k}\lambda}e^{i(-\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}e^{i(\omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{k}'})t}\right]d^3\vec{r}+$$

$$+\frac{1}{4V}\int\sum_{\vec{k},\vec{k}',\lambda}\frac{1}{\sqrt{\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}}}\left(\omega_{\vec{k}}\omega_{\vec{k}'}+\vec{k}\vec{k}'\right)\cdot$$

$$\left[\hat{C}_{\vec{k}\lambda}\hat{C}^{+}_{\vec{k}'\lambda}e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{r}}e^{i(\omega_{\vec{k}'}-\omega_{\vec{k}})t}+\hat{C}^{+}_{\vec{k}\lambda}\hat{C}_{\vec{k}'\lambda}e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{r}}e^{i(\omega_{\vec{k}}-\omega_{\vec{k}'})t}\right]d^3\vec{r}.$$

Sumiranje samo po jednoj vrednosti λ se pojavljuje zbog $\delta_{\lambda\lambda}$ iz kvadrata električnog i magnetnog polja. Prvi integral u izrazu za energiju je jednak nuli na osnovu disperzione jednačine, dok drugi daje

$$\hat{H}=\sum_{\vec{k},\lambda=1,2}\omega_{\vec{k}}\left(\hat{C}^{+}_{\vec{k}\lambda}\hat{C}_{\vec{k},\lambda}+\frac{1}{2}\right). \qquad (69)$$

Na sličan način za impuls polja dobijamo

$$\vec{P}=\sum_{\vec{k},\lambda=1,2}\vec{k}\,\hat{C}^{+}_{\vec{k}\lambda}\hat{C}_{\vec{k},\lambda}.$$

Interpretacija dobijenih rezulatata slična je tumačenju rezultata za energiju i impuls mezonskog polja. Operator $N_{\vec{k}\lambda}=\hat{C}^{+}_{\vec{k}\lambda}\hat{C}_{\vec{k}\lambda}$ daje broj fotona talasnog vektora $\vec{k}$ i polarizacije λ. Slično kao i kod mezonskog polja vakuumsko stanje elektromagnetnog polja se definiše kao stanje u kojem otsustvuju fotoni bilo koje polarizacije

$$\hat{C}_{\vec{k}\lambda}\,\Phi_0=0. \qquad (7o)$$

Medjutim, kod kvantovanja elektromagnetnog polja nailazimo na izvesne poteškoće. Izraz (62) pretpostavlja da su komponente potencijala nezavisne, ali Lorentzov uslov nalaže jednakost nuli kvadridivergencije potencijala. Sledeća poteškoća,u tome je što su prve tri komponente realne i ermitske, dok četvrta nije. Te protivurečnosti dovode do relacija (66) koje su, takodje protivurečne jer su operatori koji figurišu u tim jednačinama medjusobno nezavisni. Da bi se izbegle navedene protivurečnosti Gupta i Bleuler su predložili nove uslove naložene na komponente kvadrivektora potencijala. Po njima, sve komponente potencijala se uzimaju kao nezavisne i ermitske, a umesto Lorentzovog uslova, kalibracije, uvodi se novi uslov koji mora da zadovoljavaju talasne funkcije u reprezentaciji okupacionog broja (takve funkcije Φ zavise samo od broja čestica u datom stanju). Po tom uslovu dozvoljena su samo ona stanja sistema za koja je srednja vrednost

$$\langle \Phi | \frac{\partial A_\mu}{\partial x_\mu} | \Phi \rangle = 0 . \tag{71}$$

Primenjujući ovaj uslov za kvadridivergenciju potencijala i rezultate (66) dolazimo do

$$\sum_{\vec{k}} \sqrt{\omega_{\vec{k}}} \langle \Phi | (\hat{C}_{\vec{k}3} + \hat{C}_{\vec{k}4}) e^{ikx} - (\hat{C}^+_{\vec{k}3} + i \hat{C}^+_{\vec{k}4}) e^{-ikx} | \Phi \rangle = 0 \tag{72}$$

Može se pokazati da iz izraza (71) i (72) dolazimo do

$$\langle \Phi | N_{\vec{k}3} + N_{\vec{k}4} | \Phi \rangle = 0 . \tag{73}$$

Ovde su $N_{\vec{k}3}$ i $N_{\vec{k}4}$ operatori broja longitudinalnihi "vremenskih" fotona. Formula (73) vodi činjenici da je pod tim uslovom ako je zadovoljena relacija (71) srednja vrednost broja fotona longitudinalne i "vremenske" polarizacije u tim stanjima jednaka nuli. Na taj način formulama (66) dat je izvesni fizički smisao, a iz računa su odstranjeni fotoni longitudinalne i "vremenske" polarizacije, jer od njih ne zavise energija, impuls, kao ni sve ostale veličine koje imaju fizičkog smisla.

7. ZAKLJUČAK

Na kraju treba naglasiti da se izloženo razmatranje odnosi na slobodna polja: mezonsko polje, čiji su kvanti mezoni sa spinom nula i dva (u jedinicama $\hbar$) i elektromagnetno polje, čiji su nosioci fotoni koji se karakterišu polarizacijom. Fermionska polja čiji su nosioci čestice sa polucelim spinom, a koja se opisuju spinornim funkcijama, nisu obuhvaćena.
Neutralni mezoni i fotoni se izdvajaju od ostalih čestica i po tome što su one same sebi antičestice, dok su pozitivnim mezonima antičestice negativni mezoni.

Stacionarna stanja slobodnih polja okarakterisana su okupacionim brojem tj. brojem kvanata odredjenih karakteristika, što znači da talasne funkcije (vektori stanja) ne zavise eksplicitno od vremena.

Izložena teorija je od velikog značaja jer omogućuje izračunavanje dinamičkih promenljivih polja. Ipak daleko veći značaj dobijeni rezultati imaju ako se primene na interagijuća polja, koja su za fiziku znatno važnija jer pretstavljaju češću fizičku realnost.

Interakcija polja prevodi sistem u stanje koje se karakteriše drugim skupom okupacionih brojeva. Interagujuća polja se opisuju lagranžijanom koji pored članova koji potiču od pojedinih polja kao slobodnih sadrži lagranžijan koji potiče od interakcije polja. Isto rasudjivanje se odnosi i na hamiltonijan sistema.

LITERATURA

1. А. А. БОРУШ, Л. Г. МОРОЗ: ВВДЕНИЕ В ТЕОРИЮ КЛАССИЧЕСКИХ ПОЛЕЙ, „НАУКА И ТЕХНИКА", МИНСК 1968

2. А. С. ШЕХТЕР: ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ИЗДАТЕЛЬСТВО САРАТОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА 1965

3. А. Н. КУШНИРЕНКО: ВВЕДНИЕ В КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ ПОЛЯ „ВЫСШАЯ ШКОЛА", МОСКВА 1971

4. А. И. АХИЕЗЕР, В. Б. БЕРЕСТЕЦКИЙ: КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА „НАУКА", МОСКВА 1969

5. А. С. ДАВЫДОВ: КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, МОСКВА 1963

6. В. ГАЙТЛЕР: КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, МОСКВА 1956

7. Д. И. БЛОХИНЦЕВ: ОСНОВЫ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКИ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ, МОСКВА-ЛЕНИНГРАД 1949

8. Л. Д. ЛАНДАУ, Е. М. ЛИФШИЦ: КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА II „НАУКА", МОСКВА 1972

9. ФИЗИЧЕСКИЙ ЭНЦИКЛОПЕДИЧЕСКИЙ СЛОВАРЬ
ТОМ ВТОРОЙ Е-ЛИТИЙ
СОВЕТСКАЯ ЭНЦИКЛОПЕДИЯ, МОСКВА 1962

10. Đ. MUŠICKI: UVOD U TEORIJSKU FIZIKU II ZAVOD ZA IZDAVANJE UDŽBENIKA SRS, BEOGRAD 1965

11. I. SUPEK: TEORIJSKA FIZIKA I STRUKTURA MATERIJE
DRUGI DIO
„ŠKOLSKA KNJIGA", ZAGREB 1954