U N I V E R Z I T E T U N O V O M S A D U

P R I R O D N O - M A T E M A T I Č K I F A K U L T E T

K a t e d r a z a f i z i k u

Записник

Рад је бранен 8.I.1973 год. пред комисијом

1) Dr. Слободан Царић, ванр. проф. (председник)
2) Dr. Братислав Тошић, доц. (ментор)
3) Станоје Стојановић, асист. (члан)

комисија је једногласно рад оценила са оценом 9 (девет)

Др Царић.

Svrkota B. Mićun

SPIN-FONON INTERAKCIJA I SREDNJI SLOBODNI PUT MAGNONA

D i p l o m s k i r a d

N O V I S A D 1 9 7 2.

Zahvaljujem se profesoru
DR. BRATISLAVU S. TOŠIĆU
na pomoći pri izboru teme i pri pisanju rada.

Sadržaj

U V O D

Pri rešavanju problema mnogo čestica u kvantnom mehanici kao veoma efektivna koristi se reprezentacija okupacionih brojeva /reprezentacija druge kvantizacije/ za operatore i funkcije, čestice se tretiraju kao kvanti nekog polja. Tako pri ispitivanju oscilacija rešetki uvode se kvanti oscilovanja-fononi, a pri proučavanju svojstava jakih magnetnih materijala odgovarajući kvanti energije zovu se magnoni. Tema ovog rada upravo je interakcija pomenutih kvazi-čestica i izračunava-nje srednjeg slobodnog puta izmedju dva "sudara" fonona i magnona. Put će biti izračunat za unutrašnjost kristala, on je odredjen interakcijom zapreminskih fonona i zapreminskih magnona, drugim riječima kristal se posmatra kao beskonačan, uz to račun će se odnositi na najprostiji slučaj, slučaj proste kubne rešetke izotropnog feromagnetika. Kao model feromagnetizma korišćenje Hajzembergov model koji je ujedno i najviše eksploatisan model u kvantnoj mehanici kada se radi o proučavanju svojstava jakih magnetnih materijala.

U radu je korišćena reprezentacija druge kvantizacije, a pri prelazu na Hamiltonijan u reprezentaciji druge kvantizacije uzete su Blohove aproksimacije za spinske operatore. Korišćeni su i rezultati teorije perturbacije.
Formule za vrijeme relaksacije i srednji slobodni put uzete su iz H. Fröhlich : Pros. Ray. Soc. 230, CLX 1937 god.
Račun traženja vjerovatnoće prelaza, vremena relaksacije i srednjeg slobodnog puta dosta je glomazan zbog čega su sva elementarna algebarska svodjenja u radu izostavljena , a često su dati samo krajnji rezultati.

I GLAVA

MAGNONI I FONONI

§1. Elementi teorije magnetizma

Prema magnetnim svojstvima čvrsta tijela dijele se na slabe i jake magnetne materijale, ovi drugi dalje se dijele na fero, feri i anti-ferimagnetike, i to prema stepenu manifestovanja svojstava koja ih izdvajaju u posebnu grupu-jake magnetne materijale. Jaki magnetni materijali u prvom redu feromagneti i ferimagneti karakterišu se postajanjem velikog makroskopskog momenta, koji je pod odredjenim uslovima rezultat specifičnog magnetnog uredjenja.

Broj ovih materijala nije veliki, pomenutim svojstvima odlikuju se samo neki od prelaznih metala /Fe,Co,Ni,Pt, Cr,Mn/ zatim neki od elemenata iz grupe retkih zemalja /Ce, Nd, Sm, Eu, Gd, Tb, Dy, Ho, Er, Tu/ , legure Fe, Co, Ni. Gvoždje, kobalt i nikal su tipični feromagnetici, njihove soli i oksidi /FeO, CoO, CoF_2, $NiSO_4$/ predstavnici su antiferomagnetika, dok su kompleksne soli prelaznih metala ferimagnetici.

Pošto osobine jakih magnetnih materijala pokazuju samo oni kristali u čiji sastav ulaze atomi sa nepopunjenim unutrašnjim ljuskama to se prema savremenim teorijama i smatra da su baš ti elektroni odgovorni za feromagnetizam no sigurno je da postajanje nepopunjenih unutrašnjih nivoa nije dovoljan uslov egzistiranja pomenutih svojstava pošto svi tranzitni elementi imaju nepopunjene unutrašnje ljuske ali su najvećim delom paramagnetici jedino su gvoždje, kobalt i nikal feromagnetici paladijum i platina antiferomagnetici. Znači osobine jakih magnetnih materijala uslovljene su elektronima nepopunjenih ljuski i to zavise od raspodjele gustine provodnih elektrona, no formulisanje neophodnih i dovoljnih uslova za postajanje jakog magnetizma na osnovu elektronskih konfiguracija slobodnih elektrona je neizvodljivo.

Zna se da je žiromagnetni odnos /u jedinicama $\frac{e}{2mc}$ / za sopstveni magnetni moment 2 a za orbitalni 1, pa se može uzeti da je dopinos orbitalnih momenata mali i da se makroskopski momenti sastoje od magnetnih momenata elektrona nepopunjenih nivoa, i to uz pretpostavku da je rezultujući magnetni moment uslovljen pri odredjenim uslovima spinskim uredjenjem elektrona nepopunjenih ljuski. Ovakav model prvi su predložili Frenkel i Hajzemberg i on predstavlja osnovu savremene kvantne teorije magnetnih materijala.

Magnetni moment jedinice zapremine /magnetizacija/ pri temperaturama koje su niže od jedne kritične naziva se spontana magnetizacija, ona je funkcija temperature a gotovo nezavisi od primenjenog polja. Njena najveća vrednost je magnetizacija zasićenja. Jaki magnetni materijali sigurno su kristali, uticaj kristalne strukture na magnetna svojstva ogleda se sem toga na postojanju magnetno-kristalne anizotropije, odnosno zavisnosti osobina od pravca. U kristalima postoji samo nekoliko pravaca duž kojih orijentacija spinova daje minimalan termodinamički potencijal, ti pravci su pravci lakog namagnetisanja. Gvoždje, koje inače ima kubnu zapreminski centriranu rešetku ima pravce lakog namagnetisanja duž ivica kocke. U odsustvu spoljašnjeg polja energetski najpovoljniji raspored spinova u monokristalu je onaj kada je monokristal razdeljen na niz oblasti u kojima su spinovi usmereni u jednom pravcu, veličine i medjusobni položaji ovih oblasti spontane magnetizacije ili domena kako se još zovu odredjeni su uslovom minimuma termodinamičkog pontencijala.

Znači pri odredjenim uslovima elektroni nepopunjenih ljuski mogu se opisati sistemom spinova. Interakcija uzajamnog dejstva spinova naziva se integral izmjene, smatra se da je integral izmjene po redu veličine jednak energiji izmjene elektrona odgovarajućih čvorova. No, račun čak i sa ovako uprošćenim modelom nije nimalo prost. Nekad operatori spinova mogu se zamijeniti sa klasičnim vektorima tada se model posmatra kao sistem dipola vezanih energijom veličine energije izmjene. Ovaj kvazi klasični model daje dosta dobre kvalitativne rezultate a donekle i kvantitativne. Sam model može se još uprostiti ako se uzajamno dejstvo magnetnih momenata zamijeni sa nekim efektivnim poljem proporcionalnim integralu izmjene i srednjoj magnetizaciji.

Ako je N broj atoma rešetke a μ magnetni moment atoma onda je magnetizacija zasićenja

$$M_o = N\mu$$

izmjerene vrednosti su manje a razlika je uslovljena toplotnom oscilacijom spinskih momenata, anizotropijom i efektom krajeva uzorka. Ako se uzorak nadje u spoljašnjem polju H , magnetizacija raste, promjena magnetizacije po jedinici polja naziva se magnetna susceptibilnosti tj.

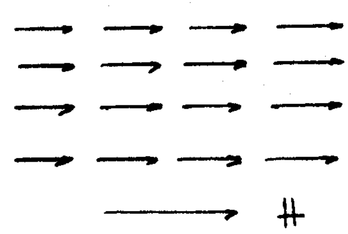
$$\chi(H) = \frac{\partial M}{\partial H}$$

Na temperaturama na kojima je srednja toplotna energija reda veličine integrala izmene narušava se uredjenost spinova, ta temperatura za feromagnetike zove se Kirijeva temperatura i reda veličine je $\sim 10^{3\circ}$ K, pa je integral izmjene zato $I \sim 10^{-13}$ ergo, dok je energija magnetne anizotropije uporediva sa energijom magnetnih uzajamnih dejstava elektrona /spin-spinsko i spin-orbitalno/. Uticaj energije anizotropije umanjuje spoljašnje polje a ona sama zavisi od temperature. Kako je energija dipolnog uzajamnog dejstva reda veličine 10^{-16} - 10^{-17} erga a njoj odgovara Kirijeva temperatura od 1-0,1 1°K to se slučaj dipolnog magnetizma posmatra rijetko.

Ako se zanemari uticaj magnetne anizotropije, a koriste kvaziklasične aproksimacije modeli jakih magnetnih materijala ponaosob izgledali bi ovako:

Feromagneti

Na temperaturama koje su niže od Kirijeve tačke svi spinovi u proseku su orijentisani u jednom pravcu to je rezultujući magnetni moment znatan. U odsustvu spoljašnjeg polja pravac rezultujućeg magnetnog momenta nije fiksiran, no ako postoji makar i slaba anizotropija vktor $\vec{M}$ je orjentisan duž jednog pravca lakog namagnetisanja. Ako se feromagnet nadje u spoljašnjem polju vektori $\vec{M}$ i $\vec{H}$ postaju kolinearni sl.1



сл. 1

Na Kirijevoj temperaturi nestaje spontane magnetizacije, za visoke temperatuŕe feromagnetik se ponaša kao paramagnetik, a susceptibilnost odredjena je Kiri-Vajsovim zakonom:

$$\chi = \frac{const}{T - T_c}$$

Spontana magnetizacija za $T < T_c$

$$M(T) \cong const\sqrt{1 - T/T_c}$$

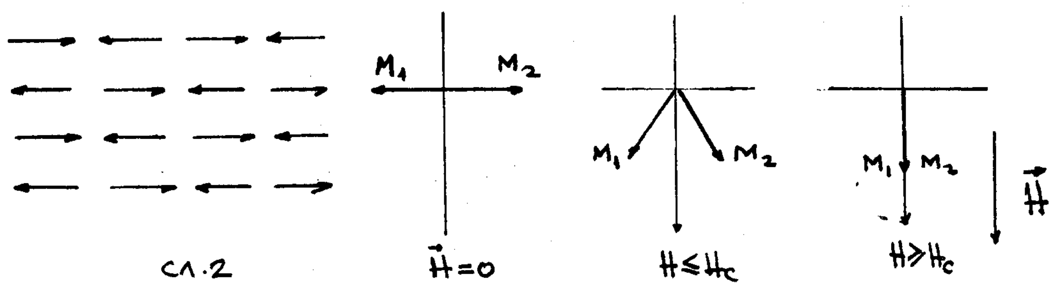
za $T \to 0$

$$M(T) = M_0\left(1 - A_1 T^{3/2} - A_2 T^{5/2} - \dots\right)$$

A_i su neke konstante, M_0-magnetizacija zasićenja.

Antiferomagnetici

Prema Nelu antiferomagnetni raspored spinova može se predstaviti kao sprega dvije ili više feromagnetnih podrešetki sl.2. Kako se vidi sa slike koja predstavlja šematski prikaz antiferomagnetika sa dvije podrešetke, rezultujuća magnetizacija pri $H = 0$ je nula, dok pri polju koje je manje od nekog kritičnog magnetizacija podrešetaka nije usmerena u pravcu polja no rezultujuća magnetizacija je kolinearna sa poljem. Pri $H > H_c$ magnetizacija podrešetaka je u pravcu polja tj. rezultujuća je jednaka algebarskom zbiru, očito u ovom slučaju antiferomagnetik se ponaša kao feromagnetik, isto tako kao feromagnetici i antiferomagnetici se pri $T > T_n$ ponašaju kao paramagnetici, T_n - je Nelova temperatura.

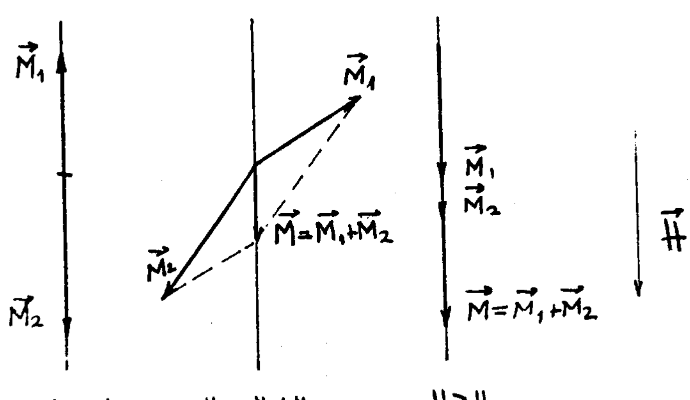


сл.2

Karakteristike antiferomagnetika su još maksimum susceptibilnosti pri $T = T_n$, stroga zavisnost susceptibilnosti od temperature i veći uticaj anizotropije nego kod feromagnetika. Postoji jedna grupa magnetnih materijala koji čine prelaz izmedju dvije opisane vrste to su slabi feromagnetici ili antiferomagnetici sa slabim feromagnetizmom, kod njih pri $H = 0$ $\vec{M} \neq 0$ što je uslovljeno anizotropijom i ne strogom paralelnošću spinova podrešetki.

Ferimagnetizam

Karakteriše se postajanjem nekoliko podrešetki sa rezultujućim momentom različitim od nule koji potiče usled različitog broja "levih" i "desnih" čvorova, različitih veličina spinova i nekolinearnog rasporeda momenata podrešetki. Ponašanje ferimagnetika u spoljašnjem polju dato je na sl.3:



сл.3

Kao što se vidi radi se o feromagnetu sa dvije podrešetke $M_1 \neq M_2$, H_1 i H_2 su kritične vrednosti polja. Broj podrešetki može da bude veći i interesantno je da spontano magnetizacija može da padne na nulu prije Kirijeve tačke to je tz. temperatura kompenzacije a rezultat je različite temperaturne zavisnosti magnetizacija podrešetki koje se u jednom trenutku kompenzuju.

Pored opisanih prostih struktura postoje tz. spiralne strukture kod kojih se komponente spinova perijodično mijenjaju pri pomijeranju duž nekog kristalografskog pravca. Kod ovakvih struktura moguć je prelaz iz jednog oblika u drugi a sem toga nije lako napraviti njihovu klasifikaciju. Materijali ovog tipa na primer neke retke zemlje imaju dvije nisko temperaturne faze, pri jako niskim temperaturama odlikuju se feromagnetnim svojstvima a pri višim anitiferomagnetnim tj. imaju dvije tačke faznih prelaza. Na nekoj karakterističnoj temperaturi T_1 iz feromagnetne prelaze u antiferomagnetnu fazu a opet na temperaturi T_2 prelaze u paramagnetnu fazu.

Ovakav model jakog magnetizma dao je dosta rezultata potvrdjenih eksperimentalno, no kako predstavlja uprošćenu sliku normalno je da daje i rezultate koji ne odgovaraju izmjerenim. Moglo bi se reći da ovakav model bolje opisije antiferomagnetike i ferimagnetike koji su poluprovodnici ili dijalektrici. Tako na primer trebalo bi da su magnetni momenti slobodnih atoma ako ne jednaki onda vrlo bliski srednjim magnetnim momentima po čvoru u slučaju vrlo niskih temperatura i vrlo visokih spoljašnjih polja to slaganje je mnogo bolje za ferimagnetike i antiferimagnetike nego za 3d-metale /Fe, Ni, Co/, isto važi za ostupanje od celobrojnih vrednosti u jedinicama μ_B srednjih magnetnih momenata. Logično je zaključiti da ovome neslaganju u znatnoj mjeri doprinosi zanemarivanje interakcije izmedju elektrona nepopunjenih ljuski i provodnih elektrona. Sve ovo je uslovilo stvaranje jedne nove teorije - teorije zona magnetizma. Ona daje objašnjenje naprimer necelobrojnosti magnetnih momenata i anomalno velikih atomskih toplotnih kapaciteta 3d - metala, ali kako uveličava efekt kolektivizavije nemože da objasni znatan broj magnetnih svojstava.

Postoji još jedan model tz. s - d model izmjene, uzajamno dejstvo elektrona odgovornih za magnetizam i valentnih uzima se kao mala perturbacija. No sigurno je da magnetna svojstva ipak najbolje opisuje model prema kome se jaki magnetni materijali uzimaju kao sistem spinova rasporedjenih u čvorovima rešetke.

§2. Hajzembergov feromagnet-magnoni

Kao što je već pomenuto Hajzemberg i Frenkel su dali jedan model feromagnetizma nazvan Hajzemberov model, oni su naime pokazali da osnovnu ulogu u feromagnetizmu igra interakcija izmene izmedju elektrona nepopunjenih ljuski, prema ovome modelu uzajamno dejstvo valentnih elektrona i elektrona nepopunjenih ljuski inače odgovornih za feromagnetizam smatra se malim, drugim riječima elektroni nepopunjenih ljudski i valentni elektroni mogu se tretirati kao dva podsistema, predpostavlja se da ima jedan elektron odgovoran za feromagnetizam, zanemaruje njegov orbitalni momenat kao i uzajamno dejstvo magnetnih momenata sa orbitalnim i medju sobom.

Posmatrajmo jednodimenzionalni model, neka su atomi rasporedjeni na rastojanju a i neka niz sadrži N atoma. Radi eliminisanja efekata krajeva uvedimo ciklične uslove sa velikim periodom L=Na, posmatraćemo jedan elektron a ostatak tretirati kao pozitivni jon, operator Hamiltonija biće:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\sum_{i=1}^{N}\nabla_i^2 + \sum_{i,l}^{N} V_l(\vec{r}_i) + \frac{1}{2}\sum_{i,l}^{N}\frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_l|} \qquad 2.1$$

V_{lr} je negativna pontencijalna energija i -ga elektrona u polju l-ga atoma. Talasne funkcije izolovanih atoma zadovoljavaju jednačinu

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m^*}\nabla_i^2 + V_l(\vec{r}_i) - \mathcal{E}_0\right]\varphi_l(\vec{r}_i) = 0 \qquad 2.2$$

a kao posledica slabog prepokrivanja talasnih funkcija različitih atoma imamo

$$\int \varphi_i(\vec{r}_i)\varphi_l(\vec{r}_i)\, d^3\vec{r}_i \approx \delta_{i,l} \qquad 2.3$$

Dvije moguće orijentacije spina protiv i duž z-ose označavaju se odgovarajućim spinskim funkcijama α i β. Potpunom namagnetisanju odgovara orjentisanost svih spinova duž ili protiv z-ose. Antisimetrična funkcija tog stanja u nultoj aproksimaciji je:

$$|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\nu} (-1)^{\nu} P_{\nu} \left\{ \varphi_1(\vec{r}_1)\alpha(1) \cdots \varphi_N(\vec{r}_N)\alpha(N) \right\} \qquad 2.4$$

Sumiranje se vrši po svim permutacijama elektrona, ali takvim da se svaka poslednja dobija iz predhodne permutacijom jednog para elektrona. Prema teoriji perturbacije energija u prvoj aprosimaciji je:

$$E_0 = \langle 0|\hat{H}|0\rangle$$

Obzirom na izraz za $|0\rangle$ i $\hat{H}$ mpže se napisati kao:

$$E_0 = N\varepsilon_0 + Q - \frac{1}{2}\sum_{i,l}{}' I_{i,l} \qquad 2.5$$

gde je:

$$Q = \sum_{i,l}{}' \int |\varphi_i(\vec{r}_i)|^2 \left\{ V_l(\vec{r}_i) + \frac{1}{2}\int \frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_l|} |\varphi_l(\vec{r}_l)|^2 d^3\vec{r}_l \right\} d^3\vec{r}_i$$

i predstavlja srednju kulonovsku energiju uzajamnog dejstva elektrona medjusobno i sa jonima rešetke.

$$I_{i,l} = \int \varphi_l^*(\vec{r}_l)\varphi_i^*(\vec{r}_i)\left[V_l(\vec{r}_i) + V_i(\vec{r}_l) + \frac{e^2}{|\vec{r}_i - \vec{r}_l|}\right]\varphi_l(\vec{r}_i)\varphi_i(\vec{r}_l)\, d^3\vec{r}_i\, d^3\vec{r}_l$$

je integral izmjene medju atomima i i l. Okretanje jednog spina odgovaralo bi najniže pobudjenom stanju, ako je to bilo u n-tom atomu talasna funkcija će biti:

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\nu} (-1)^{\nu} P_{\nu} \left\{ \varphi_1(\vec{r}_1)\alpha(1) \cdots \varphi_n(\vec{r}_n)\beta(n) \cdots \varphi_N(\vec{r}_N)\alpha(N) \right\} \qquad 2.6$$

Ovo je talasna funkcija pobudjenog stanja u nultoj aproksimaciji, zato talasne funkcije u sledećim aproksimacijama, a koje su rešenja jednačine:

$$(\hat{H}-E)\Psi=0 \tag{2.7}$$

mogu se tražiti u formi:

$$\Psi=\sum_m b_m|m\rangle \tag{2.8}$$

b_m-su konstantni kojeficijenti. Zamjenom 2.8 u 2.7, množeći sa lijeve strane sa $|n\rangle$ i integrišući dobija se sistem jednačina koje odredjuju kojeficijente b_m i energiju sistema

$$\sum_m \langle n|\hat{H}|m\rangle b_m + [\langle n|\hat{H}|n\rangle - E]b_n = 0 \tag{2.9}$$

obzirom na izraze za $\hat{H}$ i $|n\rangle$

$$\langle n|\hat{H}|\hat{n}\rangle = E_o + \frac{1}{2}\sum_l{}' I_{l,n} \equiv E_o'$$

s tim da je E_o dato sa 2.5, a

$$\langle n|\hat{H}|\acute{m}\rangle = -\frac{1}{2} I_{n,m}$$

Uzimajući integrale izmjene samo izmedju susednih atoma

$$I_{n,n+1} = I_{n-1,n} = I$$

dobija se sistem jednačina

$$(E-E_o')b_n = \frac{1}{2}I(2b_n - b_{n+1} - b_{n-1})$$

čije rešenje se može napisati u vidu

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ikan} \tag{2.10}$$

gdje je $k=\frac{2\pi\nu}{Na}$; ν-ceo broj, svakoj vrednosti k odgovara energija sistema

$$E(k) - E_o' = I(1-\cos ka)$$

Znači da svakom pobudjenom stanju odgovara talasna funkcija

$$\Psi_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_m |m\rangle e^{ikma} \tag{2.11}$$

ova funkcija zove se spinski talas, a veličina

$$\mathcal{E}(k) = E_k - E_o' = I(1-\cos ka) \qquad 2.12$$

energija spinskog talasa, ova energija što je od posebnog značaja za niske temperature i male vrijednosti ka svodi se na

$$\mathcal{E}(k) = \frac{1}{2} I a^2 k^2 \qquad 2.13$$

iz 2.12 da bi Eo odgovaralominimumu energije I mora biti pozitivno, a sama vrednost I jednaka je temperaturi Kirija u energetskim jedinicama $I \approx kT_k$.
Sada ostaje da se dobijeni rezultati uopše na slučaj trodimenzijonalne rešetke. Za slučaj proste kubne /pošto će se i ostali računi kasnije odnositi na istu rešetku,/ rešetke

$$\mathcal{E}(\vec{k}) = I \sum_{i=1}^{3} (1-\cos k_i a) \qquad 2.14$$

što se opet u aproksimaciji malih talasnih vektora svodi na

$$\mathcal{E}(\vec{k}) = \frac{1}{2} I a^2 k^2 \qquad 2.15$$

Ako se posmatraju stanja sa malim brojem "prevrnutih" spinova u odnosu ukupan broj tako pobudjena stanja mogu se predstaviti kao superpozicija nezavisnih spinskih stanja sa jednim prevrnutim spinom što je s druge strane ekvivalentno zanemarivanju rasejanja spinskih talasa, kao i zamarivanju spinskih kompleksa. Prema iznesenim aproksimacijama mala pobudjenja kristala razmatraju se kao ukupnost elementarnih pobudjenja od kojih se svako ponaša kao kvazi-čestica idealnog gasa čija je efektivna masa prema 2.15

$$m^* = \frac{\hbar^2}{I a^2} \qquad 2.16$$

Ove kvazi čestice nazivaju se magnonima, a ako se spinski talasi smatraju nezavisni broj magnona u stanju odredjenom vrednosti $\vec{k}$ dat je prema Boze-Anštajnovoj statistici relacijom:

$$\overline{n_{\vec{k}}} = \frac{1}{e^{\varepsilon_{\vec{k}}/\Theta}-1} \qquad 2.17$$

je energija magnona a $\Theta = kT$, gdje je k Bolcmanova konstanta a T apsolutna temperatura. Važno je još da je u k-prostranstvu broj mogućih vrednosti k po jedinici obima $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3$

Ova elementarna teorija magnetizma omogućila je uvodjenje pojma spinskih talasa i magnona. Sada treba koristeći se istim modelom izvesti njegov Hamiltonijan u obliku kome se najčešće koristi za razna izračunavanja u magnetizmu tz. Hajzembergov spinski Hamiltonijan. Pored napomena koje su ovom modelu date na početku §2. uzima se još da je rešetka ~~uredjena~~ obrazovana iz atoma iste vrste. Neka se u nultoj aproksimaciji najniži energetski nivo ε_0 karakteriše jediničnim okupacionim brojem elektrona u čvorovima rešetke.

$$N_f = n_{f,-\frac{1}{2}} + n_{f,\frac{1}{2}} = 1$$

gdje je $n_{f,-\frac{1}{2}}$ broj elektrona sa spinom "levo" i $n_{f,1/2}$ – broj elektrona sa spinom "desno", neka je još nivo ε_0 odvojen od pobudjenih odredjenim energetskim gepom. Uzajamno dejstvo elektrona posmatra se kao perturbacija. Nivo ε_0 je spinski degenerisan pošto je on odredjen samo jediničnom vrednošću okupacionog broja, a vrednost spina u čvoru je neodredjena. Ako se $\hat{H}_0$ označi Hamiltonijan nulte aproksimacije a sa Co odgovarajuća funkcija stanja tada je :

$$\left(\hat{H}_0 - \varepsilon_0\right)C_0 = 0 \qquad 2.18$$

Funkcija Co odredjena je okupacionim brojem $n_{f\sigma}\left(\sigma = \pm\frac{1}{2}\right)$ kao $C_0 = C_0(\cdots n_{f\sigma}\cdots)$ ove sopstvene funkcije obrazuju linearno prostranstvo $\mathcal{L}$. Na osnovu teorije perturbacije cijepanje nivoa ε_0 u sledećim aproksimacijama dato je jednačinom

$$\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)C_0 = \hat{H}C_0 \qquad 2.19$$

$\hat{H}$ je samoadjungovani /ermitski/ operator koji funkcije iz prostranstva $\mathcal{L}$ transformiše u nove funkcije ali koje takodje pripadaju istom prostranstvu- Obzirom na nefiksiranost spinova Co se može uzeti kao funkcija z - komponenti operatora spina, a $\hat{H}$ kao funkcija operatora spina elektrona. Tako hamiltonijan predstavljen po stepenima spinskih operatora ima oblik

$$\hat{H} = G_0 + \sum_{\alpha f} G_\alpha(f)\hat{S}_f^\alpha + \sum_{\alpha_1\alpha_2 f_1 f_2} G_{\alpha_1\alpha_2}(f_1 f_2)\hat{S}_{f_1}^{\alpha_1}\hat{S}_{f_2} + \sum_{\substack{\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \\ f_1 f_2 f_3}} G_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}(f_1 f_2 f_3)\hat{S}_{f_1}^{\alpha_1}\hat{S}_{f_2}^{\alpha_2}\hat{S}_{f_3}^{\alpha_3} \quad 2.20$$

$\alpha = x,y,z$, $G_{\alpha i}$- predstavljaju obične funkcije broja koordinata sumiranje se vrši tako da se ne uzimaju kombinacije sa jednakim indeksima f_i, pod ovim uslovom operatori S_f^α pod znakom sume komutiraju. Kojeficijenti razvoja G su realni pošto je $\hat{H}$ ermitski. Ako se zanemare magnetne sile, a pošto elektrostatičke ne zavise od orijentacije spinova hamiltonijan mora biti invarijantan u odnosu na transformaciju okretanja spinova, što dalje znači da su članovi razvoja skalarne funkcije spinskih operatora. Hamiltonijan je invarijanta i na kanonične transformacije

$$\hat{S}_f^\alpha \to -\hat{S}_f^\alpha \,, \quad i \to -i$$

pošto ne zavisi od orijentacije spinova. Zbog svega hamiltonijan mora biti skalar sastavljen od parnog broja spinskih operatora i ako se zanemare članovi četvrtog reda po spinskim operatorima biće

$$\hat{H} = G_0 + \sum G(f_1 f_2)(\hat{\vec{S}}_{f_1}, \hat{\vec{S}}_{f_2}) \quad ili \qquad 2.21$$

$$\hat{H} = G_0 - \frac{1}{2}\sum I(f_1 f_2)(\hat{S}_{f_1}, \hat{S}_{f_2}) \qquad 2.22$$

gdje je $G(f,f) = -\frac{1}{2} I(f,f)$ — integral izmjene mora važiti i

$$I(f_1 f_2) = I(-f_1, -f_2)$$

Pošto se pri izmeni pravca osa u običnom prostranstvu $f^{\alpha} \rightarrow -f^{\alpha}$ nemijenja elektrostatičko uzajamno dejstvo, još pod uslovom da su svi čvorovi ekvivalentni a kako mora postajati invarijantnost u odnosu na celobrojni umnožak konstante rešetke integral izmjene ustvari je funkcija samo relativnih odstojanja . Znači hamiltonijan Hajzembergovog modela feromagnetizma izražava se preko spinskih operatora elektrona nepopunjenih ljuski. On opisuje feromagnetik kao skup spinova rasporedjenih u čvorovima kristalne rešetke koji uzajamno interaguju po parovima sa energijom jednakoj integralnu izmene . Integrali u izraz za hamiltonijan ulaze kao neke fenomenološke veličine. Eksplicitni izraz za I u ovom slučaju se ne dobija, no pri korišćenju aproksimacije Hajtler - Londona pri izgradnji teorije feromagnetizma slično onom pristupu u prvom dijelu ovog poglavlja dobijaju se i eksplicitni izrazi za integral izmjene . Kao rezime ovoga poglavlja može se još reći da spinski hamiltonijani dosta dobro opisuju magnetna svojstva materijala , bez obzira što se može pokazati da su oni prva aproksimacija stvarnih hamiltonijana, a aproksimacija je dobra ako se smatra da je prepokrivanje talasnih funkcija atoma malo.

§3. Fononi u kristalnoj rešetki

Posmatraćemo kristal čija elementarna ćelija ima σ atoma. Radi eliminisanja efekata krajeva uvešćemo ciklične uslove sa velikim periodima. Ravnotežni položaj atoma odredjeni su vektorom rešetke $\vec{n} = \sum_{i=1}^{3} n_i \vec{a}_i$ koji odredjuje položaj elementarne ćelije i brojem α koji odredjuje položaj atoma u elementarnoj ćeliji. Neka je $\xi^{x}_{\vec{n}\alpha}$ -x-ta komponenta pomeranja atoma tada je energija data sa

$$H_{KA} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\alpha x} \left\{ M_\alpha (\dot{\xi}^{x}_{\vec{n}\alpha})^2 + \sum_{\vec{n}'\alpha' x'} \lambda^{xx'}_{\alpha\alpha'}(\vec{n}-\vec{n}')\, \xi^{x}_{\vec{n}\alpha}\, \xi^{x'}_{\vec{n}'\alpha'} \right\} \qquad 3.1$$

Pod uslovom da je pomjeranje atoma malo u odnosu na konstantu rešetke tako da se u razvoju za pontencijalnu energiju mogu odbaciti kvadratni i viši članovi. M_α - je masa atoma na mjestu α, kojeficijenti $\lambda^{xx'}_{\alpha\alpha'}$, zavise sako od relativne razlike $\vec{n}$ i $\vec{n}'$. Klasične jednačine kretanja su:

$$M_\alpha \ddot{\xi}^{x}_{\vec{n}\alpha} + \sum_{\vec{n}'\alpha' x'} \lambda^{xx'}_{\alpha\alpha'}(\vec{n}-\vec{n}')\, \xi^{x'}_{\vec{n}'\alpha'} = 0 \qquad 3.2$$

njihovo rešenje obzirom na translacionu simetriju tražićemo u obliku

$$\vec{\xi}_{\vec{n}\alpha}(\vec{q}) = \vec{e}_\alpha(\vec{q})\, e^{i\vec{q}\vec{n} - i\omega_{\vec{q}} t} \qquad 3.3$$

zbog cikličnih graničnih uslova mora biti

$$\vec{q} = 2\pi \sum_{i=1}^{3} \frac{\nu_i}{N_i} \vec{b}_i \, ; \; -\frac{N_i}{2} < \nu_i \leq \frac{N_i}{2}$$

$\vec{b}_i$ su vektori recipročne rešetke. Vektori $\vec{e}_\alpha(\vec{q})$ karakterišu pravac talasa datog talasnog vektora $\vec{q}$, a njihove Dekartove komponente su date sistemom jednačina:

$$\sum_{x'\alpha'} L^{xx'}_{\alpha\alpha'}(\vec{q})\, e^{x'}_{\alpha'} - \omega^2_{\vec{q}} M_\alpha e^{x}_{\alpha} = 0 \qquad 3.4$$

koje se dobijaju kada se 3.3 zamijeni u jednačinama kretanja. Kojeficijenti:

$$L^{xx'}_{\alpha\alpha'}(\vec{q}) \equiv \sum_{\vec{n}'} \lambda^{xx'}_{\alpha\alpha'}(\vec{n}-\vec{n}')\, e^{i\vec{q}(\vec{n}-\vec{n}')}$$

obrazuju ermitovu matricu. Iz uslova rešivosti gornjeg sistema jednačina odredjeni su kvadrati sopstvenih frekvencija malih oscilacija, uslovi se svode na jednačinu 3σ reda gdje je 3σ -broj stepeni slobode unutar jedne elementarne ćelije.

$$\left| L^{\varkappa\varkappa'}_{\alpha\alpha'}(\vec{q}) - \omega^2_{q} M_\alpha \delta_{\varkappa\varkappa'}\delta_{\alpha\alpha'} \right| = 0 \qquad 3.5$$

Sva rešenja su realne i pozitivne funkcije q, i to tri frekvencije teže nuli za $q=0$, to su tzv. akustične grane, ostale /ima ih $3(\sigma-1)$ / zovu se optičke grane, a za $q=0$ različite su od nule. U slučaju proste kubne strukture za koju će baš biti i izračunat srednji slobodni put postoje samo akustične grane. Svakoj vrijednosti ω_{q} kao rešenje sistema 3,4 odgovara skup realnih vektora $\vec{e}_{\alpha j}$. Vektori su indeksirani sa j stim što postoje j 1, 2, . . .3σ, oni čine orogonalan sistem a zgodno ih je normirati relacijom:

$$\sum_{\alpha=1}^{\sigma} \vec{e}_{\alpha j}\,\vec{e}_{\alpha l} = \delta_{jl}$$

pa je elementarno pomjeranje atoma α koji pripada elementarnoj ćeliji $\vec{n}$ a odgovara grani j i talasnom vektoru q dato kao:

$$\vec{\xi}^{\,j}_{\vec{n}\alpha}(\vec{q}) = \vec{e}_{\alpha j}(\vec{q})\, e^{i(\vec{q}\vec{n} - \omega_j(\vec{q})t)}$$

a proizvoljno pomjeranje je superpozicija svih elementarnih po svim granama oscilacije i svim talasnim vektorima tj.

$$\vec{\xi}_{\vec{n}\alpha} = \sum_{j\vec{q}} \left(\frac{\hbar}{2M_\alpha N\omega_j(\vec{q})}\right)^{1/2} \vec{e}_{\alpha j}(\vec{q}) \left\{ a_{\vec{q}j} e^{i\vec{q}\vec{n}} + a^{*}_{\vec{q}j} e^{-i\vec{q}\vec{n}} \right\} \qquad 3.6$$

Pomjeranje je napisano u kompleksnoj formi vodeći računa o tome da je ono realna veličina, a faktor normiranja izabran u ovom vidu radi pogodnosti svodjenja Hamiltonijana na sumu Hamiltonijana nezavisnih oscilatora. U kojeficijentima $a_{\vec{q}j}$ sadržana je vremenska zavisnost pomjeranja i to je:

$$\frac{da_{\vec{q}j}}{dt} = -i\omega_j(\vec{q})\, a_{\vec{q}j}$$

Stavljajući 3.6 u 3.1 moglo bi se zaista koristeći još

$$\sum_{\vec{n}} e^{i\vec{n}(\vec{q}-\vec{q}\,')} = N\delta_{\vec{q}-\vec{q}\,',0}$$

pokazati da je hamiltonijan predstavljenkao suma hamiltonijana nezavisnih oscilatora, stim da je broj oscilatora $3\sigma N$, nakon pomenute zamjene i dosta računa dobija se

$$H_{KA} = \frac{1}{2} \sum_{j\vec{q}} \hbar\omega_j(\vec{q}) \left\{ a_{\vec{q}j} a^*_{\vec{q}j} + a^*_{\vec{q}j} a_{\vec{q}j} \right\} \qquad 3.7$$

ako se još kompleksne amplitude zamijene boze operatorima dobija se kvantni hamiltonijan u reprezentaciji druge kvantizacije:

$$\hat{H} = \sum_{\vec{q}j} \hbar\omega_j(\vec{q}) \left\{ \hat{a}^+_{\vec{q}j} \hat{a}_{\vec{q}j} + \frac{1}{2} \right\} = \sum_{\vec{q}j} \hbar\omega_j(\vec{q}) \hat{a}^+_{\vec{q}j} \hat{a}_{\vec{q}j} + E_0 \qquad 3.8$$

pri čemu je $E_0 = \frac{1}{2} \sum \hbar\omega_j(\vec{q})$ energija osnovnog stanja-energija vakuma.Talasna funkcija osnovnog stanja označava se kao $|0\rangle$, tada funkcija koja opisuje stanje sa jednim kvantom pobudjenja ili kako se najčešće kaže stanje sa jednim fononom je:

$$|1_{\vec{q}j}\rangle = \hat{a}^+_{\vec{q}j} |0\rangle$$

Fononska pobudjenja su posledica kolektivnih pobudjenja uzajamno interagujućih atoma u kristalu. Energija fonona je $\varepsilon_\phi = \hbar\omega(k)$
Talasna funkcija stanja sa n jednakih fonona data je kao:

$$|n_{\vec{q}j}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_{\vec{q}j}!}} \left(\hat{a}^+_{\vec{q}j}\right)^n |0\rangle$$

Kao što se vidi funkcija stanja sa n jednakih fonona zavisi samo od broja fonona zato je ona simetrična u odnosu na permutacije jednakih čestica, drugim riječima fononi su boze čestice-bozoni i pokoravaju se Boze-Anštajnovoj statistici pa je srednji broj fonona sa talasnim vektorom $\vec{q}$ u nekom kvantnom stanju dat kao:

$$\overline{n_{\vec{q}}} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon(\vec{q})}{\Theta}} - 1} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_j(\vec{q})/\Theta} - 1} \qquad 3.9$$

U najopštijem slučaju talasna funkcija stanja je $|\cdots n_{\vec{q}j}\cdots\rangle$ tj. stanje oscilacije odredjeno je zadavanjem broja fonona različitog tipa u stanju. Ako se radi o primitivnoj ćeliji tj. ćeliji koja sadrži jedan atom rečeno je da postoje samo akustične grane oscilacije koje se u slučaju još izotropnog kristala za datu vrijednost talasnog broja karakterišu sa tri jedinična normalna vektora polarizacije, i to jedan je kolinearan sa talasnim vektorom i on odgovara longitudinalni zvučnim talasima, a druga dva odgovaraju poprečnim zvučnim talasima i normalni su na odgovarajućem talasnom vektoru. Za dato $\vec{q}$ poprečni talasi imaju istu brzinu ali manju od brzine longitudinalnih talasa. Prema 3.6 za primitivnu ćeliju pomjeranje atoma u n - oj elementarnoj ćeliji je

$$\vec{\xi}_{\vec{n}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2MN}} \sum_{\vec{q}j} \frac{\vec{e}_j(\vec{q})}{\sqrt{\omega_j(\vec{q})}} \left\{ a_{\vec{q}j} e^{i\vec{q}\vec{n}} + a^*_{\vec{q}j} e^{-i\vec{q}\vec{n}} \right\} \qquad 3.10$$

Operator pomijeranja dobiće se ako se kompleksne amplitude zamijene boze operatorima, pa će operator pomaka biti dat kao suma dva člana od kojih je jedan odgovoran za kreaciju fonona

$$\hat{\xi}^+_{\vec{n}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2MN}} \sum_{\vec{q}j} \frac{\vec{e}_j(\vec{q})}{\sqrt{\omega_j(\vec{q})}} \hat{a}^+_{\vec{q}j} e^{-i\vec{q}\vec{n}}$$

a drugi za anhilaciju

$$\hat{\xi}^-_{\vec{n}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2MN}} \sum_{\vec{q}j} \frac{\vec{e}_j(\vec{q})}{\sqrt{\omega_j(\vec{q})}} \hat{a}_{\vec{q}j} e^{i\vec{q}\vec{n}}$$

Prema tome ukupni pomak je:

$$\hat{\vec{\xi}}_{\vec{n}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2MN}} \sum_{\vec{q}j} \frac{\vec{e}_j(\vec{q})}{\sqrt{\omega_j(\vec{q})}} \left\{ \hat{a}_{\vec{q}j} e^{i\vec{q}\vec{n}} + \hat{a}^+_{\vec{q}j} e^{-i\vec{q}\vec{n}} \right\} \qquad 3.11$$

II G L A V A

SPIN - FONON INTERAKCIJA

§4. Razvijanje integrala izmjene po atomskim pomacima

Pri izvodjenju spinskog hamiltonijana uzeto je da atomi rešetke miruju, no na temperaturama različitim od nule atomi vrše toplotne oscilacije što dovodi do uzajamnog dejstva spina sa oscilacijama rešetke-fononima i do promjene interakcije izmjene. Sada se potpuni hamiltonijan može napisati:

$$\hat{H} = \hat{H}_{S,S} + \hat{H}_F + \hat{H}_{S,F} \qquad 4.1$$

gdje je $\hat{H}_{S,S}$ hamiltonijan spin-spinske interakcije dat sa 2.22 tj.

$$\hat{H}_{S,S} = G_0 - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}}{}' I_{\vec{n},\vec{m}} \hat{\vec{S}}_{\vec{n}} \hat{\vec{S}}_{\vec{m}} \qquad 4.2$$

Indeksi f i f zamijenjeni su sa n i m; $\hat{H}_F$ je hamiltonijan fononskog potsistema dat sa 3.8, $\hat{H}_{S,F}$ u ovom slučaju najinteresantniji deo hamiltonijana i predstavlja Hamiltonijan spin-fononske interakcije. No prije nego što uvedemo $\hat{H}_{S,F}$ zgodno je operator spin-fononske interakcije izraziti preko $S_n^{\pm}$ operatora. Pošto je $\vec{S}_{\vec{n}}\vec{S}_{\vec{m}} = S_{\vec{n}}^x S_{\vec{m}}^x + S_{\vec{n}}^Y S_{\vec{m}}^Y + S_{\vec{n}}^z S_{\vec{m}}^z$ a operatori $S_n^{\pm}$ su definisani kao:

$$S_{\vec{n}}^{\pm} = S_{\vec{n}}^x \pm i S_{\vec{n}}^Y \qquad 4.3$$

Iz ove relacije sledi

$$S_{\vec{n}}^x = \frac{S_{\vec{n}}^+ + S_{\vec{n}}^-}{2} \quad i \quad S_{\vec{n}}^Y = \frac{S_{\vec{n}}^+ - S_{\vec{n}}^-}{2i} \qquad 4.4$$

Obzirom na relacije 4.4 hamiltonijan spin-fononske interakcije bez energije osnovnog stanja postaje

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n},\vec{m}}\left[\frac{S_{\vec{n}}^{-}S_{\vec{m}}^{+}}{2} + \frac{S_{\vec{n}}^{+}S_{\vec{m}}^{-}}{2} + S_{\vec{n}}^{z}S_{\vec{m}}^{z}\right]$$

Kako važi $I_{\vec{n},\vec{m}} = I_{\vec{m},\vec{n}} = I_{\vec{n}-\vec{m}}$, $S_{\vec{n}}^{-}S_{\vec{m}}^{+}$ i $S_{\vec{n}}^{+}S_{\vec{m}}^{-}$ mogu sabrati pa je konačno:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}}{}' I_{\vec{n}-\vec{m}}\left(S_{\vec{n}}^{-}S_{\vec{m}}^{+} + S_{\vec{n}}^{z}S_{\vec{m}}^{z}\right) \qquad 4.5$$

Neka usled toplotnih oscilacija čvor na mjestu n dobije pomak $\vec{\xi}_{\vec{n}}$, a čvor na mjestu m analogno $\vec{\xi}_{\vec{m}}$ tj.

$$\vec{n} \rightarrow \vec{n} + \vec{\xi}_{\vec{n}}$$

$$\vec{m} \rightarrow \vec{m} + \vec{\xi}_{\vec{m}}$$

Integral izmjene postaje:

$$I_{\vec{n}-\vec{m}} \rightarrow I_{\vec{n}+\vec{\xi}_{\vec{n}}-\vec{m}-\vec{\xi}_{\vec{m}}} = I_{\vec{n}-\vec{m}+(\vec{\xi}_{\vec{n}}-\vec{\xi}_{\vec{m}})}$$

Pod uslovom da su oscilacije male tj. $\vec{\xi}_n$ i $\vec{\xi}_m$ mnogo manji od vektora rešetke $\vec{n}$ i $\vec{m}$ možemo u razvoju integrala izmjene po atomskim pomacima odbaciti kvadratne i više članove po pomacima pa je:

$$I_{\vec{n}-\vec{m}+(\vec{\xi}_{\vec{n}}-\vec{\xi}_{\vec{m}})} = I_{\vec{n}-\vec{m}} + (\vec{\xi}_{\vec{n}}-\vec{\xi}_{\vec{m}})\nabla I_{\vec{n}-\vec{m}} \qquad 4.6$$

Sada hamiltonijan postaje:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}-\vec{m}}\left(S_{\vec{n}}^{-}S_{\vec{m}}^{+} + S_{\vec{n}}^{z}S_{\vec{m}}^{z}\right) - \frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} \nabla I_{\vec{n}-\vec{m}}$$

$$\times\left(S_{\vec{n}}^{-}S_{\vec{m}}^{+} + S_{\vec{n}}^{z}S_{\vec{m}}^{z}\right)\left(\hat{\vec{\xi}}_{\vec{n}} - \hat{\vec{\xi}}_{\vec{m}}\right) = \hat{H}_{S,S} + \hat{H}_{S,F}$$

znači hamiltonijan spin-fonon interakcije je:

$$\hat{H}_{S,F} = \sum_{\vec{n}\vec{m}} \nabla I_{\vec{n}-\vec{m}}\left(\hat{\vec{\xi}}_{\vec{n}} - \hat{\vec{\xi}}_{\vec{m}}\right)\left(S_{\vec{n}}^{-}S_{\vec{m}}^{+} + S_{\vec{n}}^{z}S_{\vec{m}}^{z}\right) \qquad 4.7$$

$S_{\vec{n}}^{-}$, $S_{\vec{n}}^{+}$, $S_{\vec{n}}^{z}$ su operatori.

§5. Blohova aproksimacija za spinske operatore

Prema Blohovoj aproksimaciji za spinske operatore imamo:

$$S_{\vec{n}}^{-} \cong \sqrt{2S}\, B_{\vec{n}}^{+}$$

$$S_{\vec{n}}^{+} \cong \sqrt{2S}\, B_{\vec{n}} \qquad 5.1$$

$$S_{\vec{n}}^{z} \cong S - B_{\vec{n}}^{+} B_{\vec{n}}$$

Ove aproksimacije važe pod uslovom da je broj bozona najviše jednak 2S, za stanja kada je broj bozona veći od 2S kaže se da su nefizičkaa. B_n^+ i B_n su boze operatori i to B_n^+ je kreacioni, kada on djeluje na stanje sa n bozona on kreira jednu kvazi-česticu

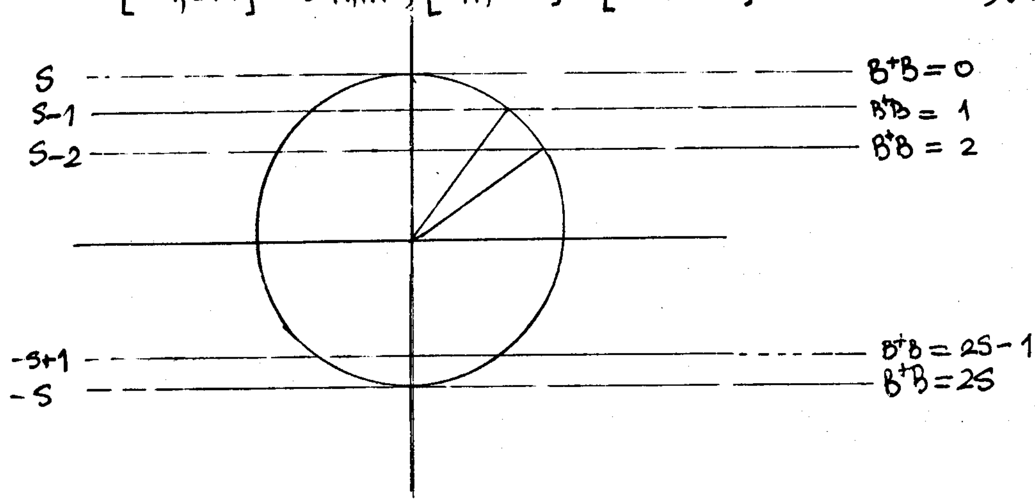
$$B_n^+ |n\rangle = \sqrt{n+1}\, |n+1\rangle \qquad 5.2$$

B_n je anhilacioni operator, on djelujući na stanje od n bozona uništava jednu kvazi-česticu:

$$B_n |n\rangle = \sqrt{n}\, |n-1\rangle \qquad 5.3$$

Komutacione relacije za ove operatore su:

$$[B_n, B_m^+] = \delta_{n,m} \; ; \; [B_n, B_m] = [B_m^+, B_m^+] = 0 \qquad 5.4$$



§6. Hamiltonijan spin-fononske interakcije

Hamiltonijan magnon-fonon interakcije 4.7 u spinskoj formi je:

$$\hat{H}_{SF} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} \nabla I_{\vec{n}-\vec{m}}(\hat{\vec{\xi}}_{\vec{n}} - \hat{\vec{\xi}}_{\vec{m}})(S^-_{\vec{n}} S^+_{\vec{m}} + S^z_{\vec{n}} S^z_{\vec{m}})$$

Koristeći Blohove aproksimacije za spinske operatore on postaje:

$$\hat{H}_{SF} = -\frac{1}{2}\sum \nabla I_{\vec{n}-\vec{m}}(\hat{\vec{\xi}}_{\vec{n}} - \hat{\vec{\xi}}_{\vec{m}})(2S B^+_{\vec{n}} B_{\vec{m}} + S^2 - S B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} - S B^+_{\vec{m}} B_{\vec{m}} + B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B^+_{\vec{m}} B_{\vec{n}})$$

Korišćenje Blohove aproksimacije obavezuje da se odbace članovi četvrtog reda po boze operatorima, uzimajući to u obzir:

$$\hat{H}_{SF} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} \nabla I_{\vec{n}-\vec{m}}(\hat{\vec{\xi}}_{\vec{n}} - \hat{\vec{\xi}}_{\vec{m}})\left[2S B^+_{\vec{n}} B_{\vec{m}} - S(B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} + B^+_{\vec{m}} B_{\vec{m}}) + S^2\right] \quad 6.1$$

Sada treba transformisati hamiltonijan, preći na impulsni prostor koristeći Furije transformacije:

$$I_{\vec{n}-\vec{m}} = \frac{1}{N}\sum_{k_1} I_{\vec{k}_1} e^{i\vec{k}_1(\vec{n}-\vec{m})}$$

$$B^+_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{k}_2} B^+_{\vec{k}_2} e^{-i\vec{k}_2\vec{n}} \qquad 6.2$$

$$B_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{\vec{k}_3} B_{\vec{k}_3} e^{i\vec{k}_3\vec{n}}$$

$$\hat{\vec{\xi}}_{\vec{n}} = \sum_{\vec{k}_4 j}\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{\vec{e}_j(\vec{k}_4)}{\sqrt{\omega_j(\vec{k}_4)}}\left(a_{\vec{k}_4 j} + a_{-\vec{k}_4 j}\right) e^{i\vec{k}_4\vec{n}}$$

Operator pomaka ne razlikuje se od onog 3.11, ovdje je samo sumacioni indeks $\vec{k}_4$ umjesto $\vec{q}$, a u drugoj sumi izvršena je smjena $\vec{k}=-\vec{k}_4$ radi lakšeg kasnijeg računa. Zbog bolje preglednosti hamiltonijan $\hat{H}$ biće transformisan član po član tj.

$$\hat{H}_{SF} = \hat{H}^1_{SF} + \hat{H}^2_{SF} + \hat{H}^3_{SF} + \hat{H}^4_{SF} \qquad 6.3$$

$$\hat{H}^2_{SF} = \frac{S}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} \nabla I_{\vec{n}-\vec{m}}\left(\hat{\xi}_{\vec{n}} - \hat{\xi}_{\vec{m}}\right) B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \qquad 6.4$$

Poslije Furije transformacije 6.2

$$\hat{H}^2_{SF} = -\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{Si}{2N^2} \sum_{\vec{K}_1\vec{K}_2\vec{K}_3\vec{K}_4 j} \vec{K}_1 \vec{e}_j(\vec{K}_4) \frac{I_{\vec{K}_1}}{\sqrt{\omega_j(\vec{K}_4)}} B_{\vec{K}_2} B_{\vec{K}_3} \left(a_{\vec{K}_4 j} + a^+_{-\vec{K}_4 j}\right) \sum_{\vec{n}\vec{m}} e^{i\vec{K}_1(\vec{n}-\vec{m})}$$

$$\times e^{-i\vec{K}_2\vec{n} + i\vec{K}_3\vec{n} + i\vec{K}_4\vec{n}} - \left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{Si}{2N^2} \sum_{\vec{K}_1\vec{K}_2\vec{K}_3\vec{K}_4 j} \vec{K}_1 \vec{e}_j(\vec{K}_4) \frac{I_{\vec{K}_1}}{\sqrt{\omega_j(K_4)}} B^+_{\vec{K}_2} B_{\vec{K}_3} \left(a_{\vec{K}_4 j} + \right.$$

$$\left. + a^+_{-\vec{K}_4 j}\right) \sum_{\vec{n}\vec{m}} e^{i\vec{K}_1(\vec{n}-\vec{m}) - i\vec{K}_2\vec{n} + i\vec{K}_3\vec{n} + i\vec{K}_4\vec{m}} =$$

$$= \left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{Si}{2N^2} \sum_{\vec{K}_1\vec{K}_2\vec{K}_3\vec{K}_4 j} \vec{K}_1 \vec{e}_j(\vec{K}_4) \frac{I_{\vec{K}_1}}{\sqrt{\omega_j(\vec{K}_4)}} B^+_{\vec{K}_2} B_{\vec{K}_3} \left(a_{\vec{K}_4 j} + a^+_{-K_4 j}\right) \times$$

$$\sum_{\vec{n}} e^{in(K_1 - K_2 + K_3 + K_4)} \sum_{\vec{m}} e^{imK_1} - \left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{Si}{2N^2} \sum_{\vec{K}_1\vec{K}_2\vec{K}_3\vec{K}_4 j} \vec{K}_1 \vec{e}_j(\vec{K}_4) \frac{I_{\vec{K}_1}}{\sqrt{\omega_j(\vec{K}_4)}}$$

$$\times B^+_{\vec{K}_2} B_{\vec{K}_3} \left(a_{\vec{K}_4 j} + a^+_{-\vec{K}_4 j}\right) \sum_{\vec{n}} e^{i\vec{n}(\vec{K}_1 - \vec{K}_2 + \vec{K}_3)} \sum_{\vec{m}} e^{i\vec{m}(\vec{K}_4 - \vec{K}_1)}$$

Kao rezultat boks kvantizacije izraz se dalje svodi na

$$H^2_{S,F} = \left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{Si}{2N^2} \sum_{\vec{K}_1\vec{K}_2\vec{K}_3\vec{K}_4 j} \vec{K}_1 \vec{e}_j(\vec{K}_4) \frac{I_{\vec{K}_1}}{\sqrt{\omega_j(\vec{K}_4)}} B_{\vec{K}_2} B_{\vec{K}_3} \left(a_{\vec{K}_4 j} + a_{-\vec{K}_4 j}\right) \times$$

$$\times N^2 \delta_{\vec{K}_1 - \vec{K}_2 + \vec{K}_3 + \vec{K}_4, 0}\, \delta_{K_1, 0} - \left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^2 \frac{Si}{2N^2} \sum_{\vec{K}_1\vec{K}_2\vec{K}_3\vec{K}_4 j} \vec{K}_1 \vec{e}_j(\vec{K}_4) \frac{I_{K_1}}{\sqrt{\omega_j(\vec{K}_4)}} \times$$

$$B^+_{\vec{k}_2} B_{\vec{k}_3} \left(a_{\vec{k}_4 j} + a_{-\vec{k}_4 j} \right) N^2 \delta_{\vec{k}_1 - \vec{k}_2 + \vec{k}_3, 0} \, \delta_{\vec{k}_4 - \vec{k}_1, 0}$$

prva suma je očito nula.

$$\hat{H}^2_{SF} = -\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{S_i}{2} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 j} \vec{k}_1 \vec{e}_j(\vec{k}_1) \frac{I_{\vec{k}_1}}{\sqrt{\omega_j(\vec{k}_1)}} B^+_{\vec{k}_2} B_{\vec{k}_2 - \vec{k}_1} \left(a_{\vec{k}_1 j} + a^+_{-\vec{k}_1 j} \right)$$

Stavljajući još $\vec{k}_2 = \vec{q}$, $\vec{k}_1 = \vec{k}$ konačno se dobija

$$\hat{H}^2_{S,F} = -\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{S_i}{2} \sum_{\vec{k} \vec{q} j} \frac{\vec{k}\, \vec{e}_j(\vec{k})}{\sqrt{\omega_j(\vec{k})}} I_{\vec{k}} B^+_{\vec{q}} B_{\vec{q} - \vec{k}} \left(a_{\vec{k} j} + a^+_{-\vec{k} j} \right) \qquad 6.5$$

$\hat{H}^3_{SF}$ nakon Furije transformacije

$$\hat{H}^3_{SF} = \left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{S_i}{2N^2} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \vec{k}_4 j} \vec{k}_1 \vec{e}_j(\vec{k}_4) \frac{I_{\vec{k}_1}}{\sqrt{\omega_j(\vec{k}_4)}} B^+_{\vec{k}_2} B_{\vec{k}_3} \left(a_{\vec{k}_4 j} + a^+_{-\vec{k}_4 j} \right)$$

$$\times \sum_{\vec{n} \vec{m}} e^{i\vec{k}_1(\vec{n} - \vec{m}) - i\vec{k}_2 \vec{m} + i\vec{k}_3 \vec{m} + i\vec{k}_4 \vec{n}} - \left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{S_i}{2N^2} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \vec{k}_4 j} \vec{k}_1 \vec{e}_j(\vec{k}_4)$$

$$\times \frac{I_{\vec{k}_1}}{\sqrt{\omega_j(\vec{k}_4)}} B^+_{\vec{k}_2} B_{\vec{k}_3} \left(a_{\vec{k}_4 j} + a^+_{-\vec{k}_4 j} \right) \sum_{\vec{n} \vec{m}} e^{i(\vec{n} - \vec{m})\vec{k}_1 - i\vec{k}_2 \vec{m} + i\vec{k}_3 \vec{m} + i\vec{k}_4 \vec{m}}$$

Što se opet zbog boks kvantizacije posle kraćeg računa svodi na:

$$\hat{H}^3_{S,F} = \left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{S_i}{2} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 j} \frac{\vec{k}_1 \vec{e}_j(\vec{k}_1)}{\sqrt{\omega_j(\vec{k}_1)}} I_{\vec{k}_1} B^+_{\vec{k}_2} B_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2} \left(a_{\vec{k}_1 j} + a^+_{\vec{k}_1 j} \right) \quad \text{ili}$$

$$\hat{H}^3_{S,F} = -\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{S_i}{2} \sum_{\vec{k} \vec{q} j} \frac{\vec{k}\, \vec{e}_j(\vec{k})}{\sqrt{\omega_j(\vec{k})}} I_{\vec{k}} B^+_{\vec{q}} B_{\vec{q} - \vec{k}} \left(a_{\vec{k} j} + a^+_{-\vec{k} j} \right) \qquad 6.6$$

Slično ako se u $\hat{H}^4_{SF}$ izvrši unitarna Furije transformacija dobija se:

$$\hat{H}^4_{S,F} = -\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{S_i}{2N} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_4 j} \frac{\vec{k}_1 \vec{e}_j(\vec{k}_4)}{\sqrt{\omega_j(\vec{k}_4)}} I_{\vec{k}_1} \left(a_{\vec{k}_4 j} + a^+_{-\vec{k}_4 j} \right)$$

$$\times \sum_{\vec{n}} e^{i\vec{n}(\vec{K}_1+\vec{K}_4)} \sum_{\vec{m}} e^{-i\vec{m}\vec{K}_1} + \left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{Si}{2N} \sum_{\vec{K}_1\vec{K}_4 j} \frac{\vec{K}_1\vec{e}_j(\vec{K}_4)}{\sqrt{\omega_j(\vec{K}_4)}}$$

$$\times I_{\vec{K}_1} \left(a_{\vec{K}_4 j} + a^+_{-\vec{K}_4 j}\right) \sum_{\vec{n}} e^{i\vec{n}\vec{K}_1} \sum_{\vec{m}} e^{i\vec{m}(\vec{K}_4-\vec{K}_1)}$$

Što je zbog pojave $\delta_{-\vec{K}_1,0}$ u prvoj i $\delta_{\vec{K}_1,0}$ u drugoj sumi jednako nuli tj.

$$\hat{H}^4_{S,F} = 0 \qquad 6.7$$

$$\hat{H}^1_{S,F} = -S \sum \nabla I_{\vec{n}-\vec{m}} \left(\hat{\vec{\xi}}_{\vec{n}} - \hat{\vec{\xi}}_{\vec{m}}\right) B^+_{\vec{n}} B_{\vec{m}}$$

Nakon Furije transformacije:

$$\hat{H}^1_{SF} = -\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{Si}{N^2} \sum_{\vec{K}_1\vec{K}_2\vec{K}_3\vec{K}_4 j} \vec{K}_1\vec{e}_j(\vec{K}_4) \frac{I_{\vec{K}_1}}{\sqrt{\omega_j(\vec{K}_4)}} B^+_{\vec{K}_2} B_{\vec{K}_3} \left(a_{\vec{K}_4 j} + a^+_{-\vec{K}_4 j}\right)$$

$$\times \sum_{\vec{n}\vec{m}} e^{i\vec{K}_1(\vec{n}-\vec{m}) - i\vec{K}_2\vec{n} + i\vec{K}_3\vec{m} + i\vec{K}_4\vec{n}} + \left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{Si}{N^2} \sum_{\vec{K}_1\vec{K}_2\vec{K}_3\vec{K}_4 j} \vec{K}_1\vec{e}_j(\vec{K}_4) \frac{I_{\vec{K}_1}}{\sqrt{\omega_j(\vec{K}_4)}}$$

$$\times B^+_{\vec{K}_2} B_{\vec{K}_3} \left(a_{\vec{K}_4 j} + a^+_{-\vec{K}_4 j}\right) \sum_{\vec{n}\vec{m}} e^{i\vec{K}_1(\vec{n}-\vec{m}) - i\vec{K}_2\vec{n} + i\vec{K}_3\vec{m} + i\vec{K}_4\vec{m}} = \left(\hat{H}^1_{SF}\right)^{I} + \left(\hat{H}^1_{SF}\right)^{II}$$

$$\left(\hat{H}^1_{SF}\right)^{I} = -\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{Si}{N^2} \sum_{\vec{K}_1\vec{K}_2\vec{K}_3\vec{K}_4 j} \vec{K}_1\vec{e}_j(\vec{K}_4) \frac{I_{\vec{K}_1}}{\sqrt{\omega_j(\vec{K}_4)}} B^+_{\vec{K}_2} B_{\vec{K}_3} \left(a_{\vec{K}_4 j} + a^+_{-\vec{K}_4 j}\right)$$

$$\times \sum_{\vec{n}} e^{i\vec{n}(\vec{K}_1+\vec{K}_4-\vec{K}_2)} \sum_{m} e^{i\vec{m}(\vec{K}_3-\vec{K}_1)} = -\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{Si}{N^2}$$

$$\times \sum_{\vec{K}_1\vec{K}_2\vec{K}_3\vec{K}_4 j} \vec{K}_1\vec{e}_j(\vec{K}_4) \frac{I_{\vec{K}_1}}{\sqrt{\omega_j(\vec{K}_4)}} B^+_{\vec{K}_2} B_{\vec{K}_3} \left(a_{\vec{K}_4 j} + a^+_{-\vec{K}_4 j}\right) N^2 \times$$

$$\times\,\delta_{\vec{k}_1+\vec{k}_4-\vec{k}_2,0}\cdot\delta_{\vec{k}_3-\vec{k}_1,0} = -\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2}\cdot\frac{S_i N^2}{N^2}\times$$

$$\times\sum_{\vec{k}_1\vec{k}_2 j}\vec{k}_1\vec{e}_j(\vec{k}_2-\vec{k}_1)\frac{I_{\vec{k}_1}}{\sqrt{\omega_j(\vec{k}_2-\vec{k}_1)}}B^+_{\vec{k}_2}B_{\vec{k}_1}\left(a_{\vec{k}_2-\vec{k}_1,j}+a^+_{\vec{k}_1-\vec{k}_2,j}\right)$$

Stavljajući još $\vec{k}_2-\vec{k}_1=\vec{k}$, $\vec{k}_1=-\vec{k}+\vec{q}$ odavde sledi.:
$\vec{k}_2=\vec{k}+\vec{k}_1=\vec{k}+\vec{q}-\vec{k}=\vec{q}$

$$\left(\hat{H}^1_{SF}\right)^{I}=-\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2}S_i\sum_{\vec{k}\vec{q}j}(\vec{q}-\vec{k})\,\vec{e}_j(\vec{k})\frac{I_{\vec{q}-\vec{k}}}{\sqrt{\omega_j(\vec{k})}}B^+_{\vec{q}}B_{\vec{q}-\vec{k}}\left(a_{\vec{k}j}+a^+_{\vec{k}j}\right)$$

Potpuno analogno dobija se:

$$\left(\hat{H}^1_{SF}\right)^{II}=-\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2}S_i\sum_{\vec{k}\vec{q}j}\vec{q}\,\vec{e}_j(\vec{k})\frac{I_{\vec{q}}}{\sqrt{\omega_j(\vec{k})}}B^+_{\vec{q}}B_{\vec{q}-\vec{k}}\left(a_{\vec{k}j}+a^+_{-\vec{k}j}\right)$$

Sabirajući $\left(\hat{H}^1_{SF}\right)'$ i $\left(\hat{H}^1_{SF}\right)''$ biće:

$$\hat{H}^1_{SF}=-\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2}S_i\sum_{\vec{k}\vec{q}j}(\vec{q}-\vec{k})\,e_j(\vec{k})\frac{I_{\vec{q}-\vec{k}}}{\sqrt{\omega_j(\vec{k})}}B^+_{\vec{q}}B_{\vec{q}-\vec{k}}\left(a_{\vec{k}j}+a^+_{-\vec{k}j}\right)\qquad 6.8$$

$$+\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2}S_i\sum_{\vec{k}\vec{q}j}\vec{q}\,\vec{e}_j(\vec{k})\frac{I_{\vec{q}}}{\sqrt{\omega_j(\vec{k})}}B^+_{\vec{q}}B_{\vec{q}-\vec{k}}\left(a_{\vec{k}j}+a^+_{-\vec{k}j}\right)$$

Sabirajući prema 6.3 izraze date sa 6.5, 6.6, 6.7, 6.8, dobija se hamiltonijan magnon-fonon interakcije:

$$\hat{H}_{SF}=-\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2}S_i\sum_{\vec{k}\vec{q}j}\left\{\frac{\vec{k}\vec{e}_j(\vec{k})}{\sqrt{\omega_j(\vec{k})}}I_{\vec{k}}-\frac{\vec{q}\,\vec{e}_j(\vec{k})}{\sqrt{\omega_j(\vec{k})}}I_{\vec{q}}+\right.\qquad 6.9$$

$$\left.+\frac{(\vec{q}-\vec{k})\vec{e}_j(\vec{k})}{\sqrt{\omega_j(\vec{k})}}I_{\vec{q}-\vec{k}}\right\}B^+_{\vec{q}}B_{\vec{q}-\vec{k}}\left(a^+_{\vec{k}j}+a^+_{-\vec{k}j}\right)$$

Očito hamiltonijan se sastoji iz dva dijela i to jedan je odgovoran za apsorpciju, a drugi za emisiju fonona.

III GLAVA

UTICAJ FONONA NA PROSTIRANJE SPINSKIH TALASA

§7. Prelazi pod dejstvom spin-fonon interakcije

Prepišimo još jednom Hamiltonijan spin-fononske interakcije sada u obliku

$$\hat{H}_{S,F} = \sum_{\vec{k}\vec{q}j} F_{kq} B^{+}_{\vec{q}} B_{\vec{q}-\vec{k}} \left(a_{\vec{k}j} + a^{+}_{-\vec{k}j}\right) \tag{7.1}$$

gdje je:

$$F_{kq} = -\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} S_i \left\{ \frac{\vec{k}\vec{e}_j(\vec{k})}{\sqrt{\omega_j(\vec{k})}} I_{\vec{k}} - \frac{\vec{q}\vec{e}_j(\vec{k})}{\sqrt{\omega_j(\vec{k})}} I_{\vec{q}} + \frac{(\vec{q}-\vec{k})\vec{e}_j(\vec{k})}{\sqrt{\omega_j(\vec{k})}} I_{\vec{q}-\vec{k}} \right\} \tag{7.2}$$

Kao što je već rečeno pod dejstvom ovoga Hamiltonijana mogu nastati dvije vrste prelaza, jedan odgovara članu Hamiltonijana:

$$\hat{H}^{I}_{S,F} = \sum_{\vec{k}\vec{q}j} F_{kq} B^{+}_{\vec{q}} B_{\vec{q}-\vec{k}} a^{+}_{-\vec{k}j} \tag{7.3}$$

a drugi čalnu:

$$\hat{H}^{II}_{SF} = \sum_{\vec{k}\vec{q}j} F_{kq} B^{+}_{\vec{q}} B_{\vec{q}-\vec{k}} a_{\vec{k}j} \tag{7.4}$$

Neka u početnom stanju imamo jedan magnon talasnog vektora $\vec{q}-\vec{k}$ i n fonona, tada pod dejstvom Hamiltonijana 7.3 nestaje jedan magnon sa talasnim vektorom $\vec{q}-\vec{k}$, a radja se jedan fonon sa talasnim vektorom $-\vec{k}$, i jedan magnon sa talasnim vektorom $\vec{q}$ tj. inicijalno stanje u ovom slučaju je:

$$|0_{\vec{q}}\rangle |1_{\vec{q}-\vec{k}}\rangle |n_{-\vec{k}}\rangle \equiv |E\rangle_i \tag{7.5}$$

a finalno:

$$|1_{\vec{q}}\rangle |0_{\vec{q}-\vec{k}}\rangle |n_{-\vec{k}}+1\rangle \equiv |E\rangle_f$$

Pod dejstvom Hamiltonijana 7.4 takodje nestaje jedan magnon sa talasnim vektorom $\vec{q}-\vec{k}$, nestaje i jedan fonon sa talasnim vektorom $+\vec{k}$, a radja se magnon talasnog vektora $\vec{q}$, prema tome inicijalno stanje sada je:

$$|0_{\vec{q}}\rangle|1_{\vec{q}-\vec{k}}\rangle|n_{+\vec{k}}\rangle \equiv |A\rangle_i \qquad 7.6$$

a finalno:

$$|1_{\vec{q}}\rangle|0_{\vec{q}-\vec{k}}\rangle|n_{+\vec{k}}+1\rangle \equiv |A\rangle_f$$

§8. Vjerovatnoće prelaza i vrijeme relaksacije

Na osnovu teorije perturbacije vjerovatnoća prelaza u jedinici vremena iz stanja $|\varphi_i\rangle$ pod dejstvom Hamiltonijana $\hat{H}$ u stanje $|\varphi_f\rangle$ data je sa

$$W = \frac{2\pi}{\hbar}|A|^2\delta(\varepsilon_i - \varepsilon_f) \qquad 8.1$$

gdje je $A = \langle\varphi_f|\hat{H}|\varphi_i\rangle$ matrični element prelaza, a E_i i E_f su energije početnog i krajnjeg stanja respektivno. Za izotropni kristal primitivne kubne ćelije kao što je već pomenuto u §3. postoje samo akustične grane oscilacije koje se za dati talasni vektor karakterišu sa tri jedinična vektora od kojih je jedan kolinearan sa talasnim vektorom i odgovara longitudinalnim zvučnim talasima u kristalu, a druga dva su normalana na odgovarajućem talasnom vektoru tj. $j=1,2,3$, pa će vjerovatnoće biti posebno izračunate za interakciju magnona sa longitudinalnim i sa transverzalnim oscilacijama rešetke i to za prost slučaj zvučnih oscilacija za koje važi:

$$\omega_k^{\wedge} = c_\wedge k \quad i \quad \omega_k^{T} = c_T k \qquad 8.2$$

gdje su $c_\wedge$ i c_T brzine longitudinalnih odnosno transverzalnih zvučnih talasa u kristalu. Matrični elementi prelaza /amplituda prelaza/ za longitudinalnu komponentu i prvi prelaz je:

$$A_\wedge^I = {}_f\langle E|\hat{H}_{SF}^{1\,lon}|E\rangle_i \qquad 8.3$$

gdje je $\hat{H}_{SF}^{1\,long} = \sum_{\vec{k}\vec{q}} F_{kq}^{long} B_{\vec{q}}^{+} B_{\vec{q}-\vec{k}}\, a_{-\vec{k}}^{+}$, a $|E\rangle_i$ i $|E\rangle_f$ date su sa 7.5

Kad se ovaj operator "usendviči" po gornjim funkcijama samo će član sume

$$F_{kq}^{long} B_{\vec{q}}^{+} B_{\vec{q}-\vec{k}}\, a_{-\vec{k}}^{+}$$

dati rezultat različit od nule, prema tome izraz 8.3 postaje :

$$A_\lambda^I = \langle 1_{\vec q} | \langle 0_{\vec q-\vec k} | \langle n_{-\vec k}+1 | F_{kq} B_{\vec q}^+ B_{\vec q-\vec k} a_{-\vec k}^+ | 0_{\vec q} \rangle | 1_{\vec q-\vec k} \rangle | n_k \rangle$$

Kako je još

$$a_{-\vec k}^+ | n_{\vec k} \rangle = \sqrt{n_{\vec k}+1}\, | n_{-\vec k}+1 \rangle$$

$$B_{\vec q-\vec k} | 1_{\vec q-k} \rangle = 1 | 0_{\vec q-k} \rangle \qquad 8.4$$

$$B_{\vec q}^+ | 0_{\vec q} \rangle = 1 | 1_{\vec q} \rangle$$

a funkcija $n_{\vec k}$ je parna tj. $n_{\vec k} = n_{\vec k}$, to matrični elementi se svodi na:

$$A_\lambda^I = F_{k q}^{long} \sqrt{n_{\vec k}+1} \langle 1_{\vec q} | \langle 0_{\vec q-\vec k} | \langle n_{-\vec k}+1 | 1_{\vec q} \rangle | 0_{\vec q-\vec k} \rangle | n_{-\vec k}+1 \rangle$$

Kako su još funkcije stanja orto normirane

$$A_\lambda^I = F_{kq}^{long} \sqrt{n_{\vec k}+1} \qquad 8.5$$

slično je

$$A_\lambda^{II} = F_{kq}^{long} \sqrt{n_{\vec k}+1} \qquad 8.6$$

Prema 7.2

$$F_{kq}^{long} = -\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{S i}{\sqrt{\omega_\lambda(k)}} \left\{ k I_{\vec k} + q \cos\vartheta I_{\vec q-\vec k} - k I_{\vec q-\vec k} - q \cos\vartheta I_{\vec q} \right\} \qquad 8.7$$

gdje je $k=|\vec k|$, $q=|\vec q|$, a je ugao izmedju $\vec k$ i $\vec q$, tj. izmednju pravca kretanja magnona i emisije fonona. Izračunaćemo F_{kq}^{long} u kvantnoj aproksimaciji za I_k

$$I_{\vec k} = 6I - I k^2 a^2$$

$$I_{\vec q-\vec k} = 6I - I a^2 (k^2 + q^2 - 2kq\cos\vartheta) \qquad 8.8$$

Zamjenom 8.8 u 8.7 dobija se:

$$F_{kq}^{long} = -\left(\frac{\hbar}{2MN}\right)^{1/2} \frac{S i I a^2}{\sqrt{\omega_\lambda(\vec k)}} \left\{ k q^2 (1 + 2\cos^2\vartheta) - 3k^2 q \cos\vartheta \right\} \qquad 8.9$$

Za izračunavanje vjerovatnoće prelaza u jedinici vremena prema 8.1 potrebno je naći još energije početnog i krajnjeg stanja u oba procesa posebno. Za slučaj malih talasnih vektora energije magnona i fonona su:

$$\varepsilon_{\vec{k}}^{\phi} = \hbar\omega_\lambda = \hbar c_\lambda k$$
$$\varepsilon_{\vec{q}}^{M} = SIa^2k^2 \qquad 8.10$$
$$\varepsilon_{\vec{q}-\vec{k}}^{M} = SIa^2(k^2+q^2-kq\cos\vartheta)$$

Za prvi prelaz obzirom na 8.10 energije su:

$$\varepsilon_i^{I} = n\varepsilon_{\vec{k}}^{\phi} + \varepsilon_{\vec{q}-\vec{k}}^{M} \; ; \quad \varepsilon_f^{I} = (n+1)\varepsilon_{\vec{k}}^{\phi} + \varepsilon_{\vec{q}}^{M}$$
$$\Delta\varepsilon^{I} = \varepsilon_i^{I} - \varepsilon_f^{I} = -\hbar c_\lambda k + ISa^2k^2 + 2ISa^2kq\cos\vartheta \qquad 8.11$$

Za drugi prelaz slično:

$$\varepsilon_i^{II} = n\varepsilon_{\vec{k}}^{\phi} + \varepsilon_{\vec{q}-\vec{k}}^{M} \; ; \quad \varepsilon_f^{I} = (n-1)\varepsilon_{\vec{k}}^{\phi} + \varepsilon_{\vec{q}}^{M}$$
$$\Delta\varepsilon^{I} = \varepsilon_i^{II} - \varepsilon_f^{II} = +\hbar c_\lambda k + ISa^2k^2 + 2ISa^2kq\cos\vartheta \qquad 8.12$$

Izraze 8.11 i 8.12 zgodno je transformisati uvodeći efektivnu masu magnona i brzinu magnona, prema analogiji za energiju slobodne čestice

$$\varepsilon_{\vec{q}}^{M} = SIq^2a^2 = \frac{q^2\hbar^2}{\frac{2\hbar^2}{2SIa^2}} = \frac{q^2\hbar^2}{2m^*}$$
$$m^* = \frac{\hbar^2}{2SIa^2} \; ; \quad v_M = \frac{q\hbar}{m^*} \qquad 8.13$$

Nakon smjene 8.13 u 8.11 i 8.12 razlike energije početnog i krajnjeg stanja su:

$$\Delta\varepsilon^{I} = \hbar k\left(\frac{\hbar k}{2m^*} - v_M\cos\vartheta - c_\lambda\right) \qquad 8.14$$
$$\Delta\varepsilon^{II} = \hbar k\left(\frac{\hbar k}{2m^*} - v_M\cos\vartheta + c_\lambda\right)$$

Na kraju se može napisati konačan izraz za vjerovatnoću prelaza, prema 8.1 i 8.14 biće

$$W_\lambda^{I} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|A_\lambda^{I}\right|^2 \delta\left\{\hbar K\left(\frac{\hbar K}{2m^*} - V_M\cos\vartheta - C_\lambda\right)\right\} \qquad 8.15$$

$$W_\lambda^{II} = \frac{2\pi}{\hbar}\left|A_\lambda^{II}\right|^2 \delta\left\{\hbar K\left(\frac{\hbar K}{2m^*} - V_M\cos\vartheta + C_\lambda\right)\right\} \qquad 8.16$$

A_λ^{I} i A_λ^{II} dati su sa 8.5, 8.6 i 8.9.

Totalne vjerovatnoće prelaza dobijaju se sumiranjem po svim fononskim stanjima tj.

$$\left(W_\lambda^{I}\right)_{TOT} = \sum_K W_\lambda^{I}$$

$$\left(W_\lambda^{II}\right)_{TOT} = \sum_K W_\lambda^{II} \qquad 8.17$$

No prije nego što predjemo na izračunavanje totalnih vjerovatnoća prelaza izraze W_λ^{I}, W_λ^{II} na osnovu nekih osobina δ-ta funkcije transformisaćemo u oblik pogodniji za sumiranje. Koristeći:

$$\delta\left(x^2 - a^2\right) = \frac{\delta(x-a) + \delta(x+a)}{|a|} \qquad 8.18$$

$$\delta\left\{\hbar K\left(\frac{\hbar K}{2m^*} - V_M\cos\vartheta - C_\lambda\right)\right\} = A\,\delta(\hbar K) + B\,\delta\left(\frac{\hbar K}{2m^*} - V_M\cos\vartheta - C_\lambda\right)$$

A i B su odredjeni iz

$$\frac{1}{\hbar K\left(\frac{\hbar K}{2m^*} - V_M\cos\vartheta - C_\lambda\right)} = \frac{A}{\hbar K} + \frac{B}{\frac{\hbar K}{2m^*} - V_M\cos\vartheta - C_\lambda}$$

$$\frac{1}{\hbar K\left(\frac{\hbar K}{2m^*} - V_M\cos\vartheta - C_\lambda\right)} = \frac{-A\left(V_M\cos\vartheta + C_\lambda\right) + K\left(A\frac{\hbar}{2m^*} + B\hbar\right)}{\hbar K\left(\frac{\hbar K}{2m^*} - V_M\cos\vartheta - C_\lambda\right)}$$

odavde uporedjivanje sledi:

$$1=A(V_M\cos\vartheta+C_\lambda)\ ;\quad \hbar\left(A\frac{1}{2m^*}+B\right)=0$$

ili

$$A=-\frac{1}{V_M\cos\vartheta+C_\lambda}\qquad B=\frac{1}{2m^*(V_M\cos\vartheta+C_\lambda)}$$

Prema osobini δ-ta funkcije

$$\delta(ax)=\frac{1}{a}\delta(x)$$

$$\delta\left\{\hbar K\left(\frac{\hbar K}{2m}-V_M\cos\vartheta-C_\lambda\right)\right\}=-\frac{\delta(K)}{\hbar(V_M\cos\vartheta+C_\lambda)}+\frac{\delta\left\{K-\frac{2m^*}{\hbar}(C_\lambda+V_M\cos\vartheta)\right\}}{\hbar(V_M\cos\vartheta+C_\lambda)}\qquad 8.19$$

i potpuno analogno

$$\delta\left\{\hbar K\left(\frac{\hbar K}{2m^*}-V_M\cos\vartheta+C_\lambda\right)\right\}=-\frac{\delta(K)}{\hbar(C_\lambda-V_M\cos\vartheta)}+\frac{\delta\left\{K-\frac{2m}{\hbar}(V_M\cos\vartheta-C_\lambda)\right\}}{\hbar(V_M\cos\vartheta-C_\lambda)}\qquad 8.20$$

Sada možemo preći na izračunavanje totalnih vjerovatnoća prelaza vršeći sumiranje po svim fononskim stanjima. Pošto parcijalne vjerovatnoće zavise samo od inteziteta talasnih vektora zgodno je preći sa sume na integral, i to integrisaćemo u svernom koordinatnom sistemu, a z osu uzeti duž talasnog vektora magnona pa će ugao ϑ koji se javlja u W_λ^I i W_λ^{II} postati integracioni ugao. Za prelaz sa sume na integral važi

$$\sum_K=\frac{V}{(2\pi)^3}\int_V\qquad 8.21$$

Za slučaj primitivne kubne strukture još je $V=Na$, N broj elementarnih ćelija dok je a konstanta rešetke. Totalna vjerovatnoća za emisiju fonona prema 8.17, 8.15, 8.5, 8.9, 8.19 8.21 i 8.2

$$\left(W_\lambda^I\right)_{TOT}=\frac{\pi S^2I^2a^4}{(2\pi)^3MNC_\lambda}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\vartheta_{max}}\int_0^{\infty}\left\{K^3g^4(1+2\cos^2\vartheta)^2+9K^5g^2\cos^2\vartheta-6K^4g^3(1+2\cos^2\vartheta)\right.$$

$$\left.\times\cos\vartheta\right\}\sin\vartheta\,(n_K+1)\left\{\frac{-\delta(K)}{\hbar(V_M\cos\vartheta+C_\lambda)}+\frac{\delta\left[K-\frac{2m}{\hbar}(C_\lambda+V_M\cos\vartheta\right]}{\hbar(V_M\cos\vartheta+C_\lambda)}\right\}d\vartheta\,dK$$

$$= \frac{2\pi^2 S^2 I^2 a^4 N}{(2\pi)^3 M N c_A}\left\{\frac{2^4}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^3 \int_0^{\vartheta_{max}} (1+2\cos^2\vartheta)^2 (c_A+V_M\cos\vartheta)^2 (n_K+1)\sin\vartheta\, d\vartheta \; + \right.$$

$$+ \frac{9g^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5 \int_0^{\vartheta_{max}} \cos^2\vartheta \sin\vartheta (c_A+V_M\cos\vartheta)^4 (n_K+1)\, d\vartheta - \frac{6g^3}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^4$$

$$\int_0^{\vartheta_{max}} (1+2\cos^2\vartheta)\cos\vartheta\sin\vartheta (c_A+V_M\cos\vartheta)^3 (n_K+1)\, d\vartheta \qquad 8.22$$

ϑ_{max} odredjeno je iz uslova

$$K = \frac{2m^*}{\hbar}(c_A+V_M\cos\vartheta) > 0 \qquad 8.23$$

za $k=0$

$$c_A + V_M\cos\vartheta_{max} = 0 \; ; \; \cos\vartheta_{max} = -\frac{c_A}{V_M}$$

odnosno

$$\vartheta_{max} = \arccos\left(-\frac{c_A}{V_M}\right) \qquad 8.24$$

Iz 8.23 sledi $|v| \geq |c|$, tj. interakcija fonona sa spinskim talasima moguća je samo ako je brzina magnona veća ili jednaka brzini zvuka u kristalu. Uzimajući u obzir 3.9 integrali u 8.22 svode se na dva tipa i to:

$$I_1 = \int_0^{\vartheta_{max}} \cos^n\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$I_2 = \int_0^{\vartheta_{max}} \cos^n\vartheta \frac{d\vartheta}{e^{\frac{c_A}{\Theta}2m^*(c_A+V_M\cos\vartheta)} - 1}$$

Ako se u prvom izvrši smjena:

$$\cos\vartheta = x \qquad \sin\vartheta\, d\vartheta = -dx$$

Za $\vartheta=0$ $x=1$, za $\vartheta=\vartheta_{max}$ $x=-\frac{c_A}{V_M}$, i još obrnu granice integral postaje:

$$I_1 = \int_0^{\vartheta_{max}} \cos^n\vartheta \sin\vartheta\, d\vartheta = \int_{-\frac{c_A}{V_M}}^{1} x^n dx = \left.\frac{x^{n+1}}{n+1}\right|_{-\frac{c_A}{V_M}}^{1} \qquad 8.25$$

U drugom se uvodi smjena $b(c_\lambda + V_M \cos\vartheta) = y$ stavljeno je radi kratkoće pisanja $b = \frac{2m^* c_\lambda}{\Theta}$

$$\cos\vartheta = \frac{y - bc_\lambda}{bV_M}; \quad -\sin\vartheta d\vartheta = \frac{dy}{V_M b}$$

za $\vartheta = \vartheta_{max}$ $y = 0$, za $\vartheta = 0$ $y = b$ $/c_\lambda + V_M/ \to \infty$, i obrćući granice integral I_2 se svodi na integral

$$I_3 = \int_0^\infty y^m \frac{dy}{e^y - 1} = \int_0^\infty y^m \frac{e^{-y}}{1 - e^{-y}} dy = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\infty y^m e^{-ny} dy$$

$$I^m = \int_0^\infty y^m e^{-ny} dy$$

Parcijalna integracija daje

$$y^m = u, \quad e^{-ny} dy = dv \quad m y^{m-1} dy = du, \quad v = -\frac{e^{-ny}}{n}$$

$$I^m = -y^m \frac{e^{-ny}}{n} \Big|_0^\infty + \frac{m}{n} \int_0^\infty y^{m-1} e^{-ny} dy$$

integrisani deo je nula, poslije m integracija, pošto je integrisani deo uvijek nula biće:

$$I^m = -\frac{y m!}{n^m} e^{-ny} \Big|_0^\infty + \frac{m(m-1)\cdots 321}{n^m} \int e^{-ny} dy$$

$$= \frac{m!}{n^m} \int_0^\infty e^{-ny} dy = \frac{m!}{n^{m+1}} e^{-ny} \Big|_0^\infty = \frac{m!}{n^{m+1}}$$

$$I_3 = \sum_{n=1} \frac{m!}{n^{m+1}} = m! \sum_{n=1} \frac{1}{n^{m+1}} = m! \zeta(m+1)$$

Koristeći sve ove napomene posle elementarnih ali glomaznih izračunavanja dobijamo:

$$\left(W_\lambda'\right)_{TOT} = \frac{S^2 I^2 a^7}{4\pi M c_\lambda} \left\{ \frac{9\Omega^2}{\hbar} \left(\frac{2m^*}{\hbar} \right)^5 \left[\frac{2}{3} c_\lambda V_M^3 + \frac{6}{5} c_\lambda^2 V_M^2 + c_\lambda^3 V_M + \frac{c_\lambda^4}{3} + \frac{V_M^4}{7} + \frac{c_\lambda^7}{105 V_M^3} \right] \right.$$

$$-\frac{6g^3}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^4\left[\frac{7}{4}C_\lambda V_M^2+\frac{11}{5}C_\lambda^2V_M+C_\lambda^3+\frac{2}{7}V_M^3-\frac{1}{4}\frac{C_\lambda^5}{V_M^2}-\frac{1}{70}\cdot\frac{C_\lambda^7}{V_M^4}\right]+$$

$$+\frac{g^4}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^3\left[\frac{47}{15}C_\lambda^2+\frac{179}{105}V_M^2+\frac{13}{3}V_MC_\lambda+\frac{1}{3}\frac{C_\lambda^3}{V_M}+\frac{2C_\lambda^5}{15V_M^3}+\frac{4}{105}\frac{C_\lambda^7}{V_M^5}\right]+$$

$$+\frac{9g^2}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^5\left[24\frac{C_\lambda^2}{b^5V_M^3}\zeta(5)-\frac{240C_\lambda}{b^6V_M^3}\zeta(6)+\frac{720}{b^7V_M^3}\zeta(7)\right]+$$

$$+\frac{6g^3}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^4\left[\frac{2C_\lambda^3+V_M^2C_\lambda}{b^4V_M^4}6\zeta(4)-\frac{24(6C_\lambda^2+V_M^2)}{b^5V_M^4}\zeta(5)+\frac{720C_\lambda}{b^6V_M^4}\zeta(6)-\right.$$

$$\left.-\frac{1440}{b^7V_M^4}\zeta(7)\right]+\frac{g^4}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^3\left[\frac{(V_M^2+C_\lambda^2)^2\,2}{V_M^5b^3}\zeta(3)-\frac{48(V_M^2C_\lambda+C_\lambda^3)}{b^4V_M^5}\zeta(4)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{24(4V_M^2-17C_\lambda^2)}{b^5V_M^5}\zeta(5)-\frac{1920C_\lambda}{b^6V_M^5}\zeta(6)+\frac{2880}{b^7V_M^5}\zeta(7)\right]\right\} \qquad 8.27$$

Potpuno analogan račun ovome daje

$$\left(W_\lambda''\right)_{TOT}=\frac{S^2I^2a^7}{4\pi MC_\lambda}\left\{\frac{9g^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\left[\frac{24C_\lambda^2}{b^5V_M^3}\zeta(5)+\frac{240C_\lambda}{b^6V_M^3}\zeta(6)+\frac{720}{b^7V_M^3}\zeta(7)\right]+\right.$$

$$-\frac{6g^3}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^4\left[\frac{6(2C_\lambda^3+V_M^2C_\lambda)}{b^5V_M^4}\zeta(4)+\frac{24(6C_\lambda^2+V_M^2)}{b^5V_M^4}\zeta(5)+\frac{720}{b^6V_M^5}\zeta(6)+\frac{1440}{b^7V_M^4}\zeta(7)\right]+$$

$$+\frac{g^4}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^3\left[\frac{2V_M^2+2C_\lambda^2}{b^3V_M^5}\zeta(3)+\frac{48(C_\lambda V_M^2+C_\lambda^3)}{b^4V_M^5}\zeta(4)+\frac{24(4V_M^2+17C_\lambda^2)}{b^5V_M^5}\times\right.$$

$$\left.\left.\times\zeta(5)+\frac{720C_\lambda}{b^6V_M^5}\zeta(6)+\frac{2880}{b^7V_M^5}\zeta(7)\right]\right\} \qquad 8.28$$

Vrijeme relaksacije definiše se kao

$$\frac{1}{\tau_\lambda}=\sum_k V_1V_2 \qquad 8.29$$

gdje je $V_1=\frac{\text{broj meta}}{\text{broj projektila}}=\frac{\text{F-ja distribucije fonona}}{\text{f-ja distribucije magnona}}=\frac{k^2}{q^2}$

$$V_2=W_\lambda^{I}+W_\lambda^{II}$$

$$\frac{1}{\tau_\lambda} = \sum_K \frac{K^2}{q^2}\left(W_\lambda^{I} + W_\lambda^{II}\right) = \frac{1}{\tau_\lambda^{I}} + \frac{1}{\tau_\lambda^{II}} \tag{8.30}$$

Prema 8.30, 8.15 i 8.19

$$\frac{1}{\tau_\lambda^{I}} = \frac{\pi s^2 I^2 a^4}{MNC_\lambda} \sum_K (n_K+1)\frac{K^2}{q^2}\Big\{Kq^4(1+2\cos^2\vartheta)^2 + 9K^3q^2\cos\vartheta - 6K^2q^3\big(1+2\cos^2\vartheta\big)\cos\vartheta\Big\}\left\{-\frac{\delta(K)}{\hbar(V_M\cos\vartheta + C_\lambda)} + \frac{\delta\left[K - \frac{2m^*}{\hbar}(C_\lambda + V_M\cos\vartheta)\right]}{\hbar(V_M\cos\vartheta + C_\lambda)}\right\} \tag{8.31}$$

Ponovo je zgodno preći na integral

$$\frac{1}{\tau_\lambda^{I}} = \frac{\pi s^2 I^2 a^4 V}{(2\pi)^3 MNC_\lambda}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\vartheta_{max}} \sin\vartheta \int_0^{\infty}(n_K+1)\Big\{q^2K^5(1+2\cos^2\vartheta)^2 + 9K^7\cos^2\vartheta - 6qK^6(1+2\cos^2\vartheta)\cos\vartheta\Big\}\left\{-\frac{\delta(K)}{\hbar(V_M\cos\vartheta + C_\lambda)} + \frac{\delta\left[K - \frac{2m^*}{\hbar}(V_M\cos\vartheta + C_\lambda)\right]}{\hbar(V_M\cos\vartheta + C_\lambda)}\right\}$$

Poslije niza algebarskih operacija, uvodjenja smjena kao kod izračunavanja totalnih vjerovatnoća prelaza 8.31 postaje:

$$\frac{1}{\tau_\lambda^{I}} = \frac{s^2I^2a^4}{4\pi MC_\lambda}\Big\{\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5 C_\lambda^4 \int_{-\frac{C_\lambda}{V_M}}^{1} dx + \left[\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5 4C_\lambda^3V_M - \frac{6q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6 C_\lambda^5\right]\int_{-\frac{C_\lambda}{V_M}}^{1} x\,dx +$$

$$+\left[\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\left(6C_\lambda^2V_M^2 + 4C_\lambda^4\right) + \frac{9}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^7 C_\lambda^6 - \frac{6q}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^6 5C_\lambda^4V_M\right]\int_{-\frac{C_\lambda}{V_M}}^{1} x^2dx + \left[\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^5\times\right.$$

$$\times\left(4C_\lambda V_M^3 + 16C_\lambda^3V_M\right) + \frac{9}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^7 6C_\lambda^5V_M - \frac{6q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\left(10C_\lambda^3V_M^2 + 2C_\lambda^5\right)\Big]\int_{-\frac{C_\lambda}{V_M}}^{1} x^3dx + \left[\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^5\times\right.$$

$$\times\left(V_M^4 + 24C_\lambda^2V_M^2 + 4C_\lambda^4\right) + \frac{9}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7 15C_\lambda^4V_M^2 - \frac{6q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\left(10C_\lambda^2V_M^3 + 10C_\lambda^4V_M\right)\Big]\int_{-\frac{C_\lambda}{V_M}}^{1} x^4dx +$$

$$+\left[\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\left(16C_\lambda V_M^3 + 16C_\lambda^3V_M\right) + \frac{9}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7 20C_\lambda^3V_M^3 - \frac{6q}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^6\left(5C_\lambda V_M^4 + 20C_\lambda^3V_M^2\right)\right]\int x^5dx +$$

$$+\left[\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\left(4V_M^4 + 24C^2V_M^2\right) + \frac{9}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^7 15C_\lambda^2V_M^4 - \frac{6q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\left(V_M^5 + 20C_\lambda^2V_M^3\right)\right]\int_{-\frac{C_\lambda}{V_M}}^{1} x^6dx$$

$$+\left[\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5 16C_\lambda V_M^3 + \frac{9}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7 6C_\lambda V_M^5 - \frac{6q}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^6 10C_\lambda V_M^4\right]\int_{-\frac{C_\lambda}{V_M}}^{1} x^7dx +$$

$$\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5 4V_M^4+\frac{q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7 V_M^6-\frac{6q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\cdot 2V_M^5\int_{-\frac{C_\lambda}{V_M}}^{1} x^8 dx+\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5 \times$$

$$\times\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\frac{1}{V_M^5 b^9}\left[(V_M^2+2C_\lambda^2)b^2\right]^2\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} y^4 e^{-ny}dy+\left[-\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\frac{1}{b^9V_M^5}\times\right.$$

$$\left.\times 8(V_M^2C_\lambda+2C_\lambda^3)b^3+\frac{6q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\frac{1}{b^9V_M^4}(V_M^2C_\lambda+2C_\lambda^3)b^3\right]\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} y^5 e^{-ny}dy$$

$$+\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5(4V_M^2+24C_\lambda^2)b^2\frac{1}{V_M^5 b^9}+\frac{q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\frac{b^2C_\lambda^2}{b^9V_M^3}-\frac{6q}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^6\frac{1}{b^9V_M^4}\times$$

$$\left.\times(V_M^2+6C_\lambda^2)b^2\right]\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} y^6 e^{-ny}dy+\left[-\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\frac{16C_\lambda b}{b^9V_M^5}-\frac{q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\frac{2bC_\lambda}{b^9V_M^3}+\right.$$

$$+\frac{6q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\frac{6bC_\lambda}{b^9V_M^4}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} y^7 e^{-ny}dy+\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\frac{4}{b^9V_M^5}+\frac{q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\times$$

$$\left.\times\frac{1}{b^9V_M^3}-\frac{6q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\frac{2}{b^9V_M^4}\right]\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty} y^8 e^{-ny}dy\Big\}$$

Kao što se vidi izraz za $\frac{1}{\tau_\lambda^I}$ svodi se na integrale tipa 8.25 i 8.26, poslije integrisanja i grupisanja članova po stepenima od q, računajući i to da je $V_M=\frac{\hbar q}{m^*}$ dobija se:

$$\frac{1}{\tau_\lambda^I}=\frac{S^2I^2a^7}{4\pi C_\lambda M}\left\{\frac{q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\frac{1}{252}\frac{C_\lambda^9}{V_M^3}+\frac{6q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\frac{1}{252}\frac{C_\lambda^9}{V_M^4}+\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\frac{2}{315}\frac{C_\lambda^9}{V_M^5}+\right.$$

$$+\frac{6q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\frac{1}{42}\frac{C_\lambda^7}{V_M^2}+\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\frac{4}{105}\frac{C_\lambda^7}{V_M^3}+\frac{q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\frac{C_\lambda^6}{3}+\frac{q}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^7\frac{3}{2}C_\lambda^5V_M-$$

$$-\frac{6q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6C_\lambda^5+\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^5\frac{1}{5}\frac{C_\lambda^5}{V_M}+\frac{q}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^7 3C_\lambda^4V_M^2-\frac{6q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\times$$

$$\times\frac{11}{3}C_\lambda^4V_M+\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^5\frac{47}{15}C_\lambda^4+\frac{q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\frac{10}{3}C_\lambda^3-\frac{6q}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^6$$

$$\times\frac{35}{6}C_\lambda^3V_M^2+\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\frac{26}{3}C_\lambda^3V_M+\frac{q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\frac{15}{7}C_\lambda^2V_M^4-\frac{6q}{\hbar}\times$$

$$\times\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\frac{34}{7}C_\lambda^2V_M^3+\frac{q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\frac{358}{35}C_\lambda^2V_M^2+\frac{q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\frac{3}{4}C_\lambda V_M^5$$

$$- \frac{6g}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6 \frac{25}{12} V_M^4 C_\lambda + \frac{g^2}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^5 \frac{17}{3} C_\lambda V_M^3 + \frac{g}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7 \frac{C_\lambda^2}{9} V_M^6 - \frac{6g}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^6$$

$$\times \frac{23}{63} V_M^5 + \frac{g^2}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^5 \frac{383}{315} V_M^4 + \frac{g}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^7 \frac{1}{V_M^3}\left[\frac{720 C_\lambda^2}{b^7}\zeta(7) - \frac{10080}{b^8} \times\right.$$

$$\left.\times C_\lambda \zeta(8) + \frac{40320}{b^9}\zeta(9)\right] + \frac{6g}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^6 \frac{1}{V_M^4}\left[\frac{240 C_\lambda^3}{b^6}\zeta(6) - \frac{4320 C_\lambda^2}{b^7}\zeta(7) +\right.$$

$$\left.+ \frac{30240 C_\lambda}{b^8}\zeta(8) - \frac{80640}{b^9}\zeta(9)\right] + \frac{g^2}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^5 \frac{1}{V_M^5}\left[\frac{96 C_\lambda^4}{b^5}\zeta(5) - \frac{1820 C_\lambda^3}{b^6}\zeta(6)\right.$$

$$\left.+ \frac{17280 C_\lambda^2}{b^7}\zeta(7) - \frac{80640}{b^8}\zeta(8) + \frac{161280}{b^9}\zeta(9)\right] + \frac{6g}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6 \frac{1}{V_M^2}\left[\frac{120 C_\lambda}{b^6}\zeta(6)\right.$$

$$\left.- \frac{720}{b^7}\zeta(7)\right] + \frac{g^2}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^5 \frac{1}{V_M^3}\left[\frac{96 C_\lambda^2}{b^5}\zeta(5) - \frac{960}{b^6}\zeta(6) + \frac{2880}{b^7}\right.$$

$$\left.\zeta(7)\right] + \frac{g^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5 \frac{24}{b^5 V_M}\zeta(5)\Bigg\} \qquad 8.32$$

Sličan račun daje:

$$\frac{1}{\tau_\lambda^{II}} = \frac{S^2 I^2 a^7}{4\pi M C_\lambda}\left\{\frac{g}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^7 \frac{1}{V_M^3}\left[\frac{720 C_\lambda^2}{b^7}\zeta(7) + \frac{10080 C_\lambda}{b^8}\zeta(8) + \frac{40320}{b^9}\zeta(9)\right] -\right.$$

$$- \frac{6g}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6 \frac{1}{V_M^4}\left[\frac{240 C_\lambda^3}{b^6}\zeta(6) + \frac{4320 C_\lambda^2}{b^7}\zeta(7) + \frac{30240 C_\lambda}{b^8}\zeta(8) + \frac{80640}{b^9}\zeta(9)\right] +$$

$$+ \frac{g^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5 \frac{1}{V_M^5}\left[\frac{96 C_\lambda^4}{b^5}\zeta(5) + \frac{1820 C_\lambda^3}{b^6}\zeta(6) + \frac{17280 C_\lambda^2}{b^7}\zeta(7) + \frac{80640}{b^8}\zeta(8) +\right.$$

$$\left.+ \frac{161280}{b^9}\zeta(9)\right] - \frac{6g}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6 \frac{1}{V^2}\left[\frac{120 C_\lambda}{b^6}\zeta(6) + \frac{720}{b^7}\zeta(7)\right] + \frac{g^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5 \frac{1}{V_M^3}\left[\right.$$

$$\left.\frac{96 C_\lambda^2}{b^5}\zeta(5) + \frac{960 C_\lambda}{b^6}\zeta(6) + \frac{2880}{b^7}\zeta(7)\right] + \frac{g^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5 \frac{1}{V_M}\frac{24}{b^5}\zeta(5)\Bigg\}$$

$$8.33$$

Sabirajući izraze 8.32 i 8.33 dobija se ukupno relaksaciono vrijeme sistema.

§9. Srednji slobodni put magnona i njegova zavisnost od temperature

Srednji slobodni put magnona izmedju dva sudara sa fononima rešetke definiše se kao:

$$\overline{\left(\frac{1}{\lambda_\lambda}\right)} = \frac{1}{N}\sum_{q}\frac{1}{\tau V_M} \qquad 9.1$$

ili ako se predje na integral

$$\overline{\left(\frac{1}{\lambda_\lambda}\right)} = \frac{a^3}{2\pi^3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_{q_{min}}^{q_{max}} \sin\vartheta \frac{q^2}{V_M \tau} d\varphi d\vartheta dq = \frac{4\pi}{8\pi^3}\int_{q_{min}}^{q_{max}}\frac{q^2 dq}{V_M \tau}$$

Vidjeli smo da je interakcija moguća samo pod uslovom $v_M \geqslant c_\lambda$ to znači $v_M^{min} = c_\lambda$ ili

$$C_\lambda = \frac{\hbar q_{min}}{m^*} \quad \text{odnosno} \quad q_{min} = \frac{m^* C_\lambda}{\hbar} \qquad 9.2$$

Zna se da je $q_x^{max} = \frac{\pi}{a}$ zbog čega je u našem slučaju

$$q_{max} = \sqrt{(q_x^{max})^2 + (q_y^{max})^2 + (q_z^{max})^2} \qquad 9.3$$

Zamjenom τ iz 8.32 i 8.33 izraz za srednji slobodni put postaje:

$$\overline{\left(\frac{1}{\lambda_\lambda}\right)} = \frac{I^2 S^2 a^{10}}{8\pi^3 M C_\lambda}\left\{\frac{9}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^4\frac{c_\lambda^9}{252} + \frac{6}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\left(\frac{m}{\hbar}\right)^5\frac{c_\lambda^9}{252} + \frac{1}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\left(\frac{m}{\hbar}\right)^6\frac{2}{315}\right]$$

$$\int_{q_{min}}^{q_{max}}\frac{1}{q^2}dq + c_\lambda^7\left[\frac{6}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\left(\frac{m}{\hbar}\right)^3\frac{1}{42} + \frac{1}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\left(\frac{m}{\hbar}\right)^4\frac{4}{105}\right]\int_{q_{min}}^{q_{max}} dq +$$

$$+\frac{9}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)\frac{c_\lambda^6}{3}\int_{q_{min}}^{q_{max}} q\,dq + \left[\frac{9}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\frac{3}{2}c_\lambda^5 - \frac{c_\lambda^5 6}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\frac{m^*}{\hbar} + \frac{c_\lambda^5}{5\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^2\right]$$

$$\int_{q_{min}}^{q_{max}} q^2 dq + \left[\frac{9}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\frac{\hbar c_\lambda^4}{m^* 3} - \frac{6}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^6\frac{25}{6}c_\lambda^4 + \frac{c_\lambda^4}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^5\frac{m}{\hbar}\frac{47}{15}\right]\int_{q_{min}}^{q_{max}} q^3 dq +$$

$$\left[\frac{9}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\left(\frac{h}{m}\right)^2 10\frac{c_\lambda^3}{3} - \frac{6}{q}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\frac{h}{m}\frac{11}{3}c_\lambda^3 + \frac{c_\lambda^3}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\frac{26}{3}\right]\int_{q_{min}}^{q_{max}} q^4 dq +$$

$$+\left[\frac{9}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\left(\frac{\hbar}{m}\right)^3\frac{15}{7}c_\lambda^2 - \frac{6}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\frac{34}{7}c_\lambda^2 + \frac{1}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\frac{h c_\lambda^2}{m^*}\frac{358}{35}\right]\int_{q_{min}}^{q_{max}} q^5 dq +$$

$$+\left[\frac{9}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\frac{c_\lambda 3}{4}\left(\frac{\hbar}{m^*}\right)^4 - \frac{6c_\lambda}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\left(\frac{h}{m}\right)^3\frac{25}{12} + \frac{1}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\left(\frac{h}{m^*}\right)^2\frac{17}{3}\right]\int_{q_{max}}^{q_{max}} q^6 dq +$$

$$+\left[\frac{9}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\left(\frac{\hbar}{m^*}\right)^5\frac{1}{9} - \frac{6}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\left(\frac{\hbar}{m}\right)^4\frac{23}{63} + \frac{1}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\left(\frac{\lambda}{m^*}\right)^3\frac{383}{315}\right]$$

$$\int_{q_{min}}^{q_{max}} q^7 dq + \left[\frac{9}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^4\left(\frac{1440\, c_\lambda^2}{b^7}\zeta(7) + \frac{80640}{b^9}\zeta(9)\right) - \frac{6}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^6\right.$$

$$\left(\frac{m}{\hbar}\right)^5\left(\frac{8640\, c_\lambda^2}{b^7}\zeta(7)\ \frac{161280}{b^9}\zeta(9)\right) + \frac{1}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\left(\frac{m}{\hbar}\right)^6\left(\frac{192 c_\lambda^4}{b^5}\right.$$

$$\left.\left.\zeta(5) + \frac{35560\, c_\lambda^2}{b^7}\zeta(7) + \frac{322560}{b^9}\zeta(9)\right)\right]\int_{q_{min}}^{q_{max}}\frac{dq}{q^2} + \left[\frac{1}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^4\right.$$

$$\left.\left(\frac{192\, c_\lambda^2}{b^5}\zeta(5) + \frac{5760}{b^7}\zeta(7)\right) - \frac{6}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^3\frac{1440}{b^7}\zeta(7)\right]\int_{q_{min}}^{q_{max}} dq$$

$$+\frac{1}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\left(\frac{m}{\hbar}\right)^2\frac{48}{b^5}\zeta(5)\int_{q_{min}}^{q_{max}} q^2 dq\ \}$$

Poslije integracije i kraćeg sredjivanja:

$$
\begin{aligned}
\overline{\left(\frac{1}{\lambda_\lambda}\right)} = {} & \frac{s^2 I^2 a^{10}}{8\pi^3 M C_\lambda}\Biggl\{\frac{C_\lambda^9}{\hbar}\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^{11}\left(\frac{64}{315}+\frac{1536}{252}\right)\left(\frac{\hbar}{m^* C_\lambda}-\frac{a}{\sqrt{3}\pi}\right)+ \\
& + \frac{C_\lambda^7}{\hbar}\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^9\left(\frac{384}{49}+\frac{128}{105}\right)\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}-\frac{m C_\lambda}{\hbar}\right)+\frac{1152}{3}\,\frac{C_\lambda^6}{2\hbar}\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^8\times \\
& \times\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^2-\left(\frac{m^* C_\lambda}{\hbar}\right)^2\right]+\frac{C_\lambda^5}{3\hbar}\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^7\left(1344+\frac{32}{5}\right)\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^3-\left(\frac{m^* C_\lambda}{\hbar}\right)^3\right]+ \\
& +\frac{C_\lambda^4}{4\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\left(1856+\frac{1504}{15}\right)\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^4-\left(\frac{m^* C_\lambda}{\hbar}\right)^4\right]+\frac{C_\lambda^3}{5\hbar}\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^5\Bigl(3036+ \\
& +\frac{832}{3}\Bigr)\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^5-\left(\frac{m^* C_\lambda}{\hbar}\right)^5\right]+\frac{C_\lambda^2}{6\hbar}\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^4\left(\frac{4224}{7}+\frac{11456}{3}\right)\Bigl[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^6- \\
& -\left(\frac{m C_\lambda}{\hbar}\right)^6\Bigr]+\frac{C_\lambda}{7\hbar}\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^3\left(64+\frac{544}{3}\right)\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^7-\left(\frac{m^* C_\lambda}{\hbar}\right)^7\right]+\frac{1}{8\hbar}\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^2 \\
& \left(128-\frac{8832}{63}+\frac{12256}{315}\right)\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^8-\left(\frac{m C_\lambda}{\hbar}\right)^8\right]+\frac{1}{\hbar}\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^{11}\Biggl[1152\Bigl(\frac{C_\lambda^2}{b^7} \\
& \times 1440\,\zeta(7)+\frac{80640}{b^9}\zeta(9)\Bigr)-384\left(\frac{8640\,C_\lambda^2}{b^7}\zeta(7)+\frac{161280}{b^9}\zeta(9)\right) \\
& +32\left(\frac{192\,C_\lambda^4}{b^5}\zeta(5)+\frac{35560\,C_\lambda^2}{b^7}\zeta(7)+\frac{322560}{b^9}\zeta(9)\right)\Biggr]\left(\frac{\hbar}{m C_\lambda}-\frac{a}{\pi\sqrt{3}}\right)+\frac{1}{\hbar}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^9\Biggl[\\
& \Biggl[-\frac{384\cdot 1440}{b^7}\zeta(7)+32\Bigl(\frac{192\,C_\lambda^2}{b^5}\zeta(5)+\frac{5760}{b^7}\zeta(7)\Biggr]\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}-\frac{m C_\lambda}{\hbar}\right)+\frac{1536}{3b^5\hbar}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^7\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^3-\left(\frac{m C_\lambda}{\hbar}\right)^3\right]
\end{aligned}
\qquad 9.4
$$

Izraz 9.4 je konačan izraz za longitudinalnu komponentu srednjeg slobodnog puta, koristeći se njime može se naći i numerička vrednost srednjeg slobodnog puta, zato je potrebno znati veličine konstanti h,k, a odabrati veličine za: spin, konstantu rešetke, masu atoma, brzinu longitudinalnih zvučnih talasa i integral izmjene. Izračunaćemo dužinu tz. "spontanog" slobodnog puta, odnosno dužinu puta kad u početnom stanju nema fonona tj. $n_k = 0$. Izraz za dužinu dobija se stavljajući $n_k = 0$ ili stavljajući $T = 0$ u konačan izraz za srednji slobodan put, pošto za $T = 0$ nema oscilovanja rešetke odnosno fonona. Znači dužina srednjeg "spontanog" slobodnog puta magnona je:

$$\left(\frac{1}{\lambda_\lambda}\right)_{T=0} = \frac{S^2 I^2 a^{10}}{8\pi^3 M C_\lambda} \left\{ \frac{C_\lambda^8}{\hbar}\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^{11}\left(\frac{64}{315} + \frac{1536}{252}\right)\left(\frac{\hbar}{mC_\lambda} - \frac{a}{\pi\sqrt{3}}\right) + \right.$$

$$+ \frac{C_\lambda^7}{\hbar}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^9\left(\frac{384}{49} + \frac{128}{105}\right)\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a} - \frac{mC_\lambda}{\hbar}\right) + \frac{1152 C_\lambda^6}{6\hbar}\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^8\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^2 -\right.$$

$$\left. - \left(\frac{mC_\lambda}{\hbar}\right)^2\right] + \frac{C_\lambda^5}{3\hbar}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^7\left(1344 + \frac{32}{5}\right)\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^3 - \left(\frac{m^* C_\lambda}{\hbar}\right)^3\right] + \frac{C_\lambda^4}{4\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^6\left(1856 +\right.$$

$$\left. + \frac{1504}{15}\right)\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^4 - \left(\frac{mC_\lambda}{\hbar}\right)^4\right] + \frac{C_\lambda^3}{5\hbar}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^5\left(3036 + \frac{832}{3}\right)\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^5 - \left(\frac{mC_\lambda}{\hbar}\right)^5\right] +$$

$$+ \frac{C_\lambda^2}{6\hbar}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^4\left(\frac{4224}{7} + \frac{11456}{3}\right)\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^6 - \left(\frac{m^* C_\lambda}{\hbar}\right)^6\right] + \frac{C_\lambda}{7\hbar}\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^3\left(64 +\right.$$

$$\left.\left. + \frac{544}{3}\right)\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^7 - \left(\frac{mC_\lambda}{\hbar}\right)^7\right] + \frac{1}{8\hbar}\left(\frac{m}{\hbar}\right)^2\left(128 - \frac{8832}{63} + \frac{12256}{315}\right)\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^8 - \left(\frac{mC_\lambda}{\hbar}\right)^8\right]\right\} \quad 9.5$$

Zna se da je $\hbar = 1{,}054\ 10^{-27}$ erg sek, a uzećemo: $a = 10^{-7}$ cm, $M = 10^{-22}$ gr, $S = \frac{1}{2}$, $C_\lambda = 10^{6}$ cm/sek, a integral izmjene ćemo procijeniti iz Kirijeve temperature, i to neka je $T_c = 10^3\ {}^\circ K$ tada je $I = kT_c = 1{,}38\ 10^{-13} = 1{,}38\ 10^{-13}$ erga.

$$m^* = \frac{\hbar^2}{2ISa^2}; \quad \frac{m^*}{\hbar} = \frac{\hbar}{2ISa^2} = \frac{1.054\ 10^{-27}}{1.38\ 10^{-13}\ 10^{-14}} =$$

$$= 0.760$$

$$\frac{\hbar}{m^* c_\lambda} = \frac{1}{\frac{m^*}{\hbar}} \frac{1}{c_\lambda} = 1.31\ 10^{-6} cm\ ; \quad \frac{m^* c_\lambda}{\hbar} = 0.760\ 10^{6} cm^{-1}$$

$$\frac{a}{\pi\sqrt{3}} = \frac{10^{-7}}{5.44} = 1.837\ 10^{-8} cm\ ; \quad \frac{\pi\sqrt{3}}{a} = 5.43\ 10^{7} cm^{-1}$$

Kada se sve ovo zamijeni u 9.5 dobija se:

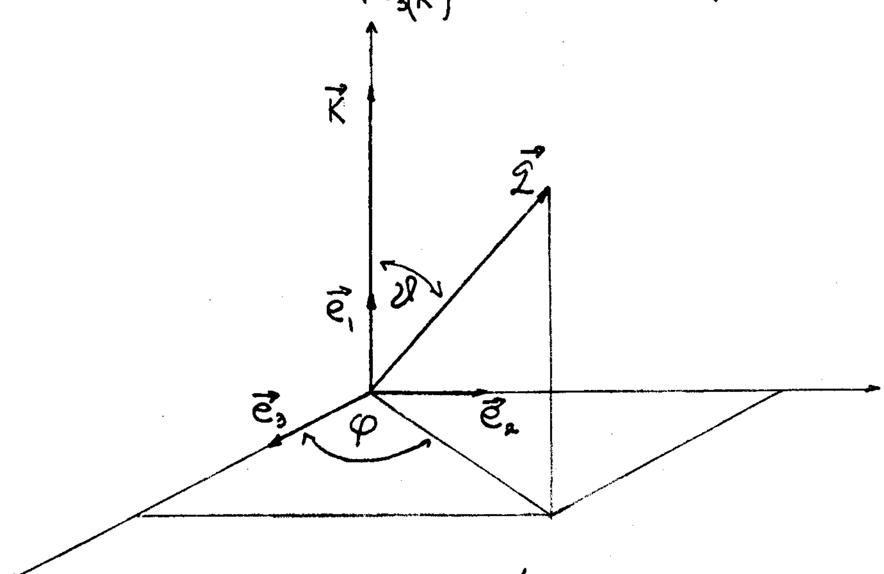
$$\overline{\left(\frac{1}{\lambda_\lambda}\right)}_{T=0} \cong 3.1417\ 10^{6} cm^{-1} \quad \text{ili}$$

$$\overline{\lambda}_\lambda^{cn.} = 3.28\ 10^{-7} cm = 32.8 \mathring{A} = 3.28\ a$$

Što se tiče temperaturne zavisnosti može se pokazati da srednji slobodni put opada sa petim stepenom apsolutne temperature, ovo zbog toga što čitav ovaj račun i uzete aproksimacije je dobar samo za niske temperature.

Ostaje još da se nadju transverzalne komponente srednjeg slobodnog puta. Prema 7.2

$$\left(F^{TP}_{\kappa q}\right)_1 = \frac{I a^2 \vec{q}\vec{e}_2}{\sqrt{\omega_2(\vec{K})}} \left\{2\kappa q \cos\vartheta - \kappa^2\right\}$$
$$\left(F^{TP}_{\kappa q}\right)_2 = \frac{I a^2 \vec{q}\vec{e}_3}{\sqrt{\omega_3(\vec{K})}} \left\{2\kappa q \cos\vartheta - \kappa^2\right\} \qquad 9.6$$



Сл. 4

Prema sl.4 na kojoj se vidi odnos talasnih vektora i vektora polarizacije je:

$$\vec{q} = q(\sin\vartheta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\vartheta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\vartheta\,\vec{k})$$

odnosno

$$\vec{q}\vec{e}_2 = q\sin\vartheta\cos\varphi; \quad \vec{q}\vec{e}_3 = q\sin\vartheta\sin\varphi \qquad 9.7$$

Račun traženja transverzalnih komponenti potpuno je sličan onom za longitudinalnu, razlika u samim izrazima potiče baš od F_{qk} što neznatno mijenja račun. Ako se pogledaju izrazi 9.6 i 9.7, a obzirom da je za izotropni kristal $\omega_2(K)=\omega_3(K)$ jasno je da se oni razlikuju samo po činiocu koji zavisi od φ, no kako u vjerovatnoću prelaza, vrijeme relaksacije i srednji slobodni put ulaze kvadrati $(F_{qk}^{rl})_1$ i $(F_{qk}^{rl})_2$, i pošto su integrali u granicama $0-2\pi$ od $\sin\varphi$ i $\cos\varphi$ jednaki to je jasno da su transverzalne komponente srednjih slobodnih puteva u izotropnom feromagnetiku jednake što je logično i očekivati. Kao što je rečeno traženjem ovih komponenti potpuno je analogno onom kod longitudinalne zbog čega je interesantno dati samo krajnje rezultate.

$$\left(\frac{1}{\tau_T}\right)_{1,2} = \frac{s^2 I^2 a^7}{8\pi M C_T}\left\{-\frac{C_T^9}{\hbar}\left[\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^7\frac{1}{252V_M^3} + 4q\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^6\frac{1}{504V_M^4} + 4q^2\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^5\frac{1}{630V_M^5}\right] + \right.$$

$$+\frac{C_T^7}{\hbar}\left[\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\frac{1}{7V_M} + 4q\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\frac{1}{42V_M^2} + 4q^2\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\frac{1}{105V_M^3}\right] + \frac{C_T^6}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^7\frac{2}{3} +$$

$$+\frac{C_T^5}{\hbar}\left[\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^7\frac{3}{2}V_M - 4q\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^6\frac{1}{4}\right] + \frac{C_T^4}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^7 2V_M^2 - 4q\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\frac{2}{3}V_M + 4q^2\times$$

$$\left.\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^5\frac{2}{15}\right] + \frac{C_T^3}{\hbar}\left[\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\frac{10}{6}V_M^3 - 4q\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^6\frac{5}{6}V_M^2 + 4q^2\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^5\frac{1}{3}V_M\right] +$$

$$+\frac{C_T^2}{\hbar}\left[\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\frac{6}{7}V_M^4 - \frac{4q\hbar}{\hbar}\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^6\cdot\frac{4}{7}V_M^3 + 4q^2\left(\frac{2m}{\hbar}\right)^5\frac{12}{35}V_M^2\right] +$$

$$+\frac{C_T}{\hbar}\left[\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\frac{1}{4}V_M^5 - 4q\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\frac{5}{24}V_M^4 + 4q^2\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\frac{1}{6}V_M^3\right] +$$

$$+\frac{1}{\hbar}\left[\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\frac{2}{63}V_M^6 - 4q\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\frac{2}{63}V_M^5 + 4q^2\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\frac{2}{63}V_M^4\right] +$$

$$+\frac{1}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\frac{1}{V_M^3}\left[-\frac{1440\,C_T^2}{d^7}\zeta(7)-\frac{80640}{d^9}\zeta(9)\right]-\frac{4q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\frac{1}{V_M^4}\left[-\frac{3320}{d^7}\right.$$

$$\left.\times\zeta(7)-\frac{80640}{d^9}\zeta(9)\right]+\frac{4q^2}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\frac{1}{V_M^5}\left[-\frac{48\,C_T^4}{d^5}\zeta(5)-\frac{8640\,C_T^2}{d^7}\zeta(7)-\right.$$

$$\left.-\frac{80640}{d^9}\zeta(9)\right]+\frac{1}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^7\frac{1440}{V_M d^7}\zeta(7)-\frac{4q}{\hbar}\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^6\frac{1440}{d^7V_M^2}\zeta(7)+\frac{4q^2}{\hbar}\times$$

$$\left.\left(\frac{2m^*}{\hbar}\right)^5\frac{1}{V_M^3}\left[\frac{48\,C_T^2}{d^5}\zeta(5)+\frac{1440}{d^7}\zeta(7)\right]\right\}\qquad 9.8$$

$$\overline{\left(\frac{1}{\lambda_T}\right)}_{1,2}=\frac{S^2I^2a^{10}}{16\pi^3MC_T\hbar}\left\{-C_T^9\left(\frac{m}{\hbar}\right)^{11}\left(\frac{64}{63}+\frac{64}{315}\right)\left(\frac{\hbar}{mC_T}-\frac{a}{\pi\sqrt{3}}\right)+C_T^7\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^9\right.\Bigg($$

$$\left(\frac{380}{21}+\frac{128}{105}\right)\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}-\frac{m^*C_T}{\hbar}\right)+C_T^6\left(\frac{m}{\hbar}\right)^8\frac{128}{3}\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^2-\left(\frac{m^*C_T}{\hbar}\right)^2\right]+C_T^5\left(\frac{m}{\hbar}\right)^7$$

$$\cdot\frac{64}{3}\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^3-\left(\frac{mC_T}{\hbar}\right)^3\right]+C_T^4\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^6 25.6\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^4-\left(\frac{m^*C_T}{\hbar}\right)^4\right]+C_T^3\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^5\frac{140}{15}$$

$$\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^5-\left(\frac{mC_T}{\hbar}\right)^5\right]+C_T^2\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^4\frac{4}{105}\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^6-\left(\frac{mC_T}{\hbar}\right)^6\right]+\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^{11}\left[128\left(-\frac{1440}{d^7}\zeta(7)-\right.\right.$$

$$\left.-\frac{80640}{d^7}\zeta(7)\right)+256\left(\frac{4320\,C_T^2}{d^7}\zeta(7)+\frac{80640}{d^9}\zeta(9)\right)-128\left(\frac{48\,C_T^4}{d^5}\zeta(5)+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{80640\,C_T^2}{d^7}\zeta(7)+\frac{80640}{d^9}\zeta(9)\right)\right]\left(\frac{\hbar}{m^*C_T}-\frac{a}{\pi\sqrt{3}}\right)+\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^9\left[\frac{128\;1440}{d^7}-\frac{256\;1440}{d^9}\right.$$

$$\left.\left.\zeta(9)+128\left(\frac{28\,C_T^2}{d^5}\zeta(5)+\frac{1440}{d^7}\zeta(7)\right)\right]\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}-\frac{m^*C_T}{\hbar}\right)\right\}\qquad 9.9$$

$$d=\frac{2m^*}{\Theta}C_T$$

za $T=0$

$$\overline{\left(\frac{1}{\tau_T}\right)}^{\text{спон.}}_{1,2}=\frac{S^2I^2a^{10}}{16\pi^3MC_T\hbar}\left\{-C_T^9\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^{11}\left(\frac{64}{63}+\frac{64}{315}\right)\left(\frac{\hbar}{mC_T}-\frac{a}{\pi\sqrt{3}}\right)+\right.$$

$$+C_T^7\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^9\left(\frac{380}{21}-\frac{128}{105}\right)\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}-\frac{m^*C_T}{\hbar}\right)+C_T^6\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^8\frac{128}{3}\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^2-\left(\frac{mC_T}{\hbar}\right)^2\right]+$$

$$+ c_T^5\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^7 \frac{64}{3}\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^3-\left(\frac{m^* c_T}{\hbar}\right)^3\right] + c_T^4\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^6 25.6\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^4-\left(\frac{m c_T}{\hbar}\right)^4\right]+$$

$$+ c_T^3\left(\frac{m}{\hbar}\right)^5 \frac{140}{15}\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^5-\left(\frac{m^* c_T}{\hbar}\right)^5\right] + c_T^2\left(\frac{m^*}{\hbar}\right)^6 \frac{4}{105}\left[\left(\frac{\pi\sqrt{3}}{a}\right)^6-\left(\frac{m c_T}{\hbar}\right)^6\right] \qquad 9.10$$

Uzimajući $c_T = 5\ 10^5$ cm/sek, ostale konstante i veličine su iste kao i za λ_L /str.44/ numerička vrednost transverzalnih komponenti srednjeg slobodnog puta je:

$$\overline{\left(\frac{1}{\lambda_T}\right)}_{1,2}^{\text{спон}} \cong 4.70064 \text{ ili } \left(\lambda_{1,2}^T\right)^{\text{cn.}} = 0.2128 \text{ cm} = 2.128 \text{ mm}$$

Uporedjujući srednji slobodni put longitudinalne i transverzalne komponente lako se vidi da je vjerovatnoća interakcije magnona sa poprečnim oscilacijama mnogo manja od one za interakciju sa longitudinalnim i da se magnoni praktično ne rasejavaju na transverzalnim fononima.

Zaključak

U radu su ispitivani efekti spin-fonon interakcije u feromagnetnim materijalima. Osnovna pažnja posvećena je izračunavanju srednjeg slobodnog puta magnona izmedju dva sudara sa fononima tj. izmedju sudara sa atomima rešetke. Nadjene su vjerovatnoće u jedinici vremena za spontanu emisiju fonona i za iznudjenu emisiju i apsorpciju, ove vjerovatnoće čije je nalaženje zahtevalo najviše matematičkih operacija korišćene su za izračunavanje srednjeg slobodnog puta magnona i njegove zavisnosti od temperature. Nadjene vjerovatnoće mogu da pisluže za izračunavanje drugih karakteristika feromagneta kao što su naprimer: procesi oslobadjanja ili apsorbovanja toplote i uticaj ovih procesa na termodinamičke karakteristike tijela kao što su unutrašnja energija, slobodna energija, entropija itd. Svi ovi proračuni daleko prevazilaze okvire jednog diplomskog rada pa se zbog toga ostalo samo na proračunu srednjeg slobodnog puta.

Osnovni zaključci u vezi sa srednjim slobodnim putem su sledeći: a/ srednji slobodni put usled interakcije sa longitudinalnim fononima je reda veličine 3-4 konstante rešetke. b/ kao što se moglo očekivati srednji slobodni put se smanjuje sa povišenjem temperature i pokazalo se da on ima negativnu temperatursku korekciju proporcionalnu petom stepenu apsolutne temperature, zbog ovakvog visokog stepena očigledno je da pri niskim temperaturama ova korekcija zanemarljiva. c/ srednji slobodni put magnona usled rasejanja na transverzalnim fononima iznosi 2-3 mm što drugim riječima znači pošto se radi o kristalu čije su linearne dimenzije 1 cm da se magnoni praktično ne rasejavaju na transverzalnim fononima, ovaj zaključak je u skladu sa onim što se zna srednji slobodni put elektrona u kristalu koji kao što je poznato ne zavisi od interakcije elektrona sa transverzalnim fononima.

Ceo račun je izveden za prosti kubni kristal u aproksimaciji najbližih susjeda i malih talasnih vektora /kada za fonone važi linearni zakon disperzije/. Generalizacija na slučaj složenih struktura ne predstavlja principijelnu teškoću, već u prvom redu računsku. Ove računske teškoće su nalaženje zakona disperzije za fonone u složenoj strukturi nalaženje njihove funkcije distribucije. Poznato je da je samo za veoma mali broj kristala nadjeno i jedno i drugo u skladu sa tačnom Born-fon Kornovom teorijom treperenja kristalne rešetke i da su ovi računi zahtevali više mjesečni kompjuterski rad. Medjutim, nezavisno od upotrebljenih idealizacija mogu se izvesti izvjesni kvalitativni zaključci koji su gore navedeni, tako da se stiče jedna opšta slika o tome kako fononi utiču na migraciju magnona u feromagnetnim kristalima nezavisno od njihve kristalne strukture.

Литература:

1. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц: „Квантовая механика" „Физматгиз", Москва 1963

2. А. С. Давыдов: „Квантовая механика" „Физматгиз" Москва 1963

3. С. В. Тябликов: „Методы квантовой теории магнетизма" „Наука 1965 Москва

4. Вонсовский С. В.; Шур Я. С.: „Ферромагнетизм" „Гостехиздат" Москва-Ленинград 1948

5. Вонсовский С. В.: „Современное учение о магнетизме" „Гостехиздат" Москва-Ленинград 1952

6. Charles Kittel: „Uvod u fiziku čvrstog stanja" „Savremena administracija" Beograd 1972

7. Дж. Займан: „Принципы теории твёрдого тела" „Мир" Москва 1966

8. F. Bloh Zs. für Phis. 51, 545, 1929 god

9. F. Bloh Zs. für Phis 61, 206, 1930 god

10. F. Bloh Zs fur Phis. 74, 295, 1932 god

11. H. Fröhlich: Proc. Roy. soc. 230 CLX 1937 god

12. Ахиезер А. И., Барьяхтар В. Г., Каганов М. И.
Спиновые волны в ферромагнетиках и антиферромагнетиках
I и II 71, 533, 1960 god