UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU

Neka konceptualna pitanja kvantne mehanike

- diplomski rad -

Mentor: Kandidat:

Prof. dr Milan Pantić Marko Bošković

Novi Sad, 2011.

Sadržaj

Uvod

Čak i sada, više od veka od nastanka, kvantna mehanika za jednog laika simboliše nešto strano i nerazumljivo, nešto čemu je mesto u mašinskom odeljenju svemirskog broda iz naučnofantastične knjige ili filma, a ne u ovom našem svetu. Sa druge strane, za velik broj istraživača, profesora i čak inženjera, kvantna mehanika je postala svakodnevica. Bilo da je predaju ili je koriste u svojim istraživanjima, kvantna mehanika za mnoge ima status recepta, ili bolje rečeno – algoritma. Sve što treba da znaš je koja pravila moraš da poštuješ, gde ti je početak i šta bi otprilike trebalo da ti bude kraj. Na prvi pogled stiče se utisak da su se istraživanja u okviru nuklearne fizike, teorijske fizike čvrstog stanja, i svih drugih oblasti koje koriste kvantnomehanički aparat, svela na popunjavanje kataloga – na računanje stvari koje su promakle drugima, ili na računanje već izračunatih stvari ali na jednu decimalu više. Ali, kao što se u svakoj stvari koju vidiš i dotakneš krije misterija, samo ako u duši imaš trunku sklonosti ka postavljanju pitanja, tako i kvantna mehanika u sebi sadrži velika, još neodgovorena pitanja i možda još veća otkrovenja za one dovoljno smelog i radoznalog duha. Velika je zabluda da je kvantna mehanika završena teorija. Pišu se i objavljuju ozbiljni radovi koji promovišu nadogradnju standardne kvantne teorije, različito se interpretiraju ključni elementi kvantne mehanike i kritikuju se njeni osnovni stavovi. Sve ovo nam govori da postoje neka suštinska pitanja unutar teorije koja još nemaju konačan odgovor. U traganje za ovim odgovorima priključili su se naučnici iz različitih disciplina, a naročito iz filozofije, jer, kao što ćemo videti, neki rezultati kvantne mehanike predstavljaju ozbiljno iskušenje za naše dosadašnje poimanje sveta.

Ovaj rad nije pokušaj da se daju odgovori. Njegov cilj je da pokušaju da se približe sama pitanja, kao i značaj koji ona imaju. Osnovna tema ovog rada je problem merenja u kvantnoj mehanici. Ovo je ujedno i najozbiljniji problem sa kojim se ova teorija sreće. Zašto je ovo tako ozbiljan problem? Svaka fizička teorija se zasniva na skupu postulata. Ovi postulati nastaju apstrahovanjem rezultata velikog broja eksperimenata, tj. merenja. Na primer, Njutnova mehanika počiva na tri postulata. Svaki od njih je rezultat uopštavanja iskustva. Na osnovu usvojenih postulata se dedukcijom gradi teorija, proučavanjem prvo najprostijih problema pa ka sve složenijim. Opravdanost postulata se proverava upoređivanjem predviđanja koje daje teorija i rezultata merenja. Kvantna teorija nije izuzetak – i ona je izgrađena po ovom receptu. Sakupljeni su rezultati velikog broja merenja i formulisani su postulati. Sa svakim novim eksperimentom, ti postulati se učvršćuju. Međutim, kao što ćemo videti, standardna kvantna mehanika nije u stanju da pruži valjano objašnjenje zašto pri merenju dobijamo određeni rezultat. Zašto baš taj broj, a ne neki drugi? A merenje je ono od čega je ova teorija počela i to je ono što ovu teoriju, sa svakim novim eksperimentom, potvrđuje.

Rad je podeljen u tri glave. Prva glava rada se bavi temom koja je blisko povezana sa problemom merenja, ali koja istovremeno predstavlja problem za sebe. Biće ispraćeno pitanje nelokalnih interakcija, od svog začetka pre više od sedamdeset godina do danas. Istraživanja na ovu temu, pored toga što su poljuljala shvatanje realnosti sveta oko nas, dovela su i do razvoja novih oblasti u kojima su nelokalne interakcije našle praktičnu primenu. Problemu merenja, kao i nekim predloženim rešenjima, posvećena je druga glava ovog rada. Treća glava je posvećena osnovama kvantne teorije informacija kao i podoblastima koje je čine – kvantnim kompjuterima, kvantnoj kriptografiji i kvantnoj teleportaciji.

1. EPR efekat i posledice

Ono što sledi je priča o jednoj od najintrigantnijih, ali i najteže svarivih osobenosti kvantne mehanike. To je priča o spletenim stanjima i o nelokalnim interakcijama. Početak ove, po mnogima nezavršene priče, leži u raspravama koje su dvadesetih i tridesetih godina prošlog veka vodila dva velikana moderne fizike – Nils Bor i Albert Ajnštajn. Uzrok ove duge i nadasve plodne rasprave je bila nemogućnost Ajnštajna da prihvati izvesne radikalno drugačije stavove o osobinama sveta koje je kvantna mehanika sugerisala. On nije odbacivao kvantnu mehaniku, već je smatrao da je ona samo stepenik ka savršenijoj teoriji. U svojoj težnji da ovo dokaže, Ajnštajn je smišljao sve nove i nove misaone eksperimente, u kojima bi dokazivao, kako on to naziva, nekompletnost kvantnog opisa stvarnosti. Dežurni branilac kvantne teorije bio je Bor. Većinom bez većih poteškoća, on je okretao Ajnštajnove argumente u korist kvantne teorije. No, Ajnštajn, Podolski i Rozen 1935. godine izdaju članak pod imenom „Da li se kvantnomehanički opis fizičke realnosti može smatrati kompletnim?“[1]. Članak, koji je danas naširoko poznat kao EPR članak, bio je kamenčić koji će pokrenuti lavinu rasprava između najvećih naučnih umova dvadesetog veka. Iako je Bor iste godine odgovorio na ovaj napad, i na neki način sasekao u korenu logiku kojom je EPR trojka pokušala dokazati nekompletnost kvantne teorije, još uvek se nije slegla prašina koju je podigao članak nakon svog pojavljivanja. Argumenti i zapažanja koji su iskorišćeni u ovom radu, jednom kada su prestali da parališu naučne umove svojom neshvatljivošću, doveli su do razvoja novih naučnih oblasti – kvantne kriptografije, kvantnih kompjutera i kvantne teleportacije.

1.1 Članak

Rad izlazi 1935. godine pod originalnim nazivom "Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?". Članak je po svojoj formi relativno kratak, svega četiri strane, ali je efekat koji je proizveo nesamerljiv.

Na početku rada autori se bave opštim pitanjem kompletnosti naučne teorije. Uvode osnovni uslov koji mora da ispuni svaka naučna teorija ne bi li se mogla smatrati kompletnom. Formulišu ga na sledeći način: „*Svakom elementu fizičke realnosti mora odgovarati neki element u fizičkoj teoriji*“. Ova tvrdnja nema smisla ukoliko se ne definiše pojam elementa fizičke realnosti. Autori ovde uvode svoj kriterijum fizičke realnosti koji je kamen temeljac cele naredne priče. Bor je u svom odgovoru uveo svoj kriterijum i tako u samom korenu pokušao da sruši logičku strukturu dokaza nekompletnosti kvantne mehanike. Kriterijum realnosti, po autorima članka, glasi: „*Ako, bez da na ikoji način poremetimo sistem, možemo sa sigurnošću predvideti vrednost fizičke veličine, onda postoji element fizičke realnosti koji odgovara toj fizičkoj veličini*.“

U nastavku teksta, na konkretnom primeru pokazuju da nekomutirajuće veličine (x i p), ako deluju na isto stanje, ne mogu obe da daju određene vrednosti. Ako je to stanje svojstveni vektor operatora impulsa, koordinata će u tom stanju biti neodređena, i obrnuto. Odavde sledi da mora da važi jedna od dve tvrdnje:

1) Kvantnomehanički opis realnosti koji daje talasna funkcija nije kompletan;

ili

2) Kada operatori dve fizičke veličine ne komutiraju, te dve veličine ne mogu istovremeno posedovati realnost.

[1] A. Einstein, B. Podolski, N. Rosen, Phys. Rev. **47**, 777 (1935)

Pobornici kvantne mehanike se ne slažu sa prvom tvrdnjom, tako da im ostaje druga. Sada sledi glavni deo rada. Autori konstruišu stanje za koje ne važi druga tvrdnja i zaključuju da onda mora da važi prva, tj. da je kvantna mehanika nekompletna. Da vidimo kako su to oni uradili.

Pretpostavimo da imamo dva sistema koja su interagovala tokom $t \in (0,T)$ i nakon toga više ne interaguju. Neka su stanja sistema bila poznata pre interakcije. Pomoću Šredingerove jednačine možemo odrediti stanje ukupnog sistema u bilo kom trenutku nakon interakcije.

Neka su α_i, $(i=1,2,3,...)$ svojstvene vrednosti fizičke veličine *A* koja se odnosi na prvi sistem. Veličine $u_1(x_1), u_2(x_1),...$ su odgovarajuće svojstvene funkcije, gde x_1 predstavlja promenljive koje opisuju prvi sistem. Ukupno stanje oba sistema nakon interakcije (Ψ) može se predstaviti kao

$$\Psi(x_1,x_2)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi_n(x_2)u_n(x_1).$$

gde su x_2 promenljive koje opisuju drugi sistem. Veličine $\psi_n(x_2)$ možemo smatrati koeficijentima u razvoju Ψ po $u_n(x_1)$. Ako sada izvršimo merenje veličine *A*, dobićemo kao rezultat neko α_k. Nakon merenja, prvi sistem mora biti u stanju opisanom funkcijom $u_k(x_1)$, a drugi onda mora preći u stanje opisano funkcijom $\psi_k(x_2)$. U slučaju da umesto *A* merimo neku drugu veličinu *B* sa svojstvenim stanjima $v_1(x_1), v_2(x_1),...$ i svojstvenim vrednostima $\beta_1, \beta_2,...$, razvoj funkcije Ψ će izgledati

$$\Psi(x_1,x_2)=\sum_{s=1}^{\infty}\varphi_s(x_2)v_s(x_1).$$

Merenje *B* daje kao rezultat neko β_r i prvi sistem prelazi u stanje $v_r(x_1)$, dok drugi prelazi u stanje opisano funkcijom $\varphi_r(x_2)$.

Kao posledica dva različita merenja na prvom sistemu, drugi sistem može nakon merenja završiti u stanjima predstavljenim različitim funkcijama. Pošto sistemi više ne interaguju, bilo kakva akcija nad prvim sistemom ne može da utiče na stanje drugog sistema. Dakle, zaključuju autori, moguće je pripisati dve različite talasne funkcije (ψ_k i φ_r) istoj realnosti (drugom sistemu).

Može da se desi da su funkcije ψ_k i φ_r svojstvene funkcije dva nekomutirajuća operatora koji predstavljaju dve veličine *P* i *Q*. Kao primer autori predlažu slučaj dve čestice sa zajedničkim stanjem opisanim funkcijom

$$\Psi(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\frac{2\pi i}{h}(x_1-x_2+x_0)\,p\right)dp,$$

gde je x_0 neka konstanta. Ako je *A* impuls prve čestice, njegova svojstvena stanja su data sa

$$u_p(x_1)=\exp\left(\frac{2\pi i}{h}px_1\right) \text{ i važi } \hat{A}u_p(x_1)=pu_p(x_1).$$

Funkcija Ψ sada može da se zapiše

$$\Psi(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}dp\exp\left(\frac{2\pi i}{h}px_1\right)\exp\left(-\frac{2\pi i}{h}(x_2-x_0)p\right)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dpu_p(x_1)\psi_p(x_2)$$

$\psi_p(x_2)=\exp\left(-\frac{2\pi i}{h}(x_2-x_0)p\right)$ je svojstvena funkcija operatora $\hat{P}=\frac{h}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial x_2}$ koji za svojstvenu vrednost ima $-p$.

Međutim, ako B predstavlja koordinatu prve čestice, njegova svojstvena funkcija je $\delta(x_1-x)=v_x(x_1)$ sa svojstvenom vrednošću x. Sada se ukupna talasna funkcija može zapisati kao

$$\Psi(x_1,x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}dp\exp\left(\frac{2\pi i}{h}(x-x_2+x_0)p\right)\delta(x_1-x)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_x(x_2)v_x(x_1)dx$$

Ovde je funkcija $\varphi_x(x_2)=\int_{-\infty}^{\infty}dp\exp\left(\frac{2\pi i}{h}(x-x_2+x_0)p\right)=h\delta(x+x_0-x_2)$, a to je svojstvena funkcija operatora $\hat{Q}\equiv\hat{x}_2$ kome odgovara svojstvena vrednost $x+x_0$.

Kako važi $[\hat{P},\hat{Q}]\neq 0$, autori zaključuju da je moguće da ψ_k i φ_r budu svojstvene funkcije nekomutirajućih operatora.

Merenjem ili *A* ili *B* nad prvim sistemom u mogućnosti smo da, bez ikakvog uticaja na drugi sistem, odredimo vrednosti veličina *P* i *Q* (p_k i q_r). Pošto dva sistema ne interaguju, moramo zaključiti da je drugi sistem sve vreme posedovao definisane vrednosti veličina *P* i *Q*. U skladu sa kriterijumom realnosti sa početka rada, moramo smatrati da su i *P* i *Q* elementi realnosti. Pokazano je da dve nekomutirajuće veličine mogu istovremeno posedovati realnost, stoga sledi da je kvantnomehanički opis realnosti nekompletan.

Autori napominju da su svesni moguće zamerke na račun činjenice da istovremeno merenje nekomutirajućih veličina nije moguće. Iz ovoga bi moglo da se zaključi da različite realnosti nisu istovremeno pripisane posmatranom sistemu. Oni podvlače da bi ovakvo rezonovanje za posledicu imalo pojavu da stanje drugog sistema zavisi od toga koje je merenje izvršeno nad prvim sistemom. Kako ta dva sistema više ne interaguju, to nijedna smislena definicija realnosti ne bi dopustila. Za kraj autori izražavaju uverenje da je moguća teorija koja bi dala kompletan opis fizičke realnosti.

1.2 Borov odgovor

EPR članak je izazvao burne reakcije naučne javnosti. Svi veliki umovi tog vremena dali su svoj sud, da li u izdatim radovima ili u međusobnim prepiskama. Članak je postavio novi izazov pred naučnike tog doba – da li je moguće nadograditi kvantnu teoriju kako bi se dobila teorija u kojoj bi osobine sistema uvek bile definisane i gde bi naša predviđanja imala probabilistički karakter jedino zbog naše nemogućnosti da spoznamo prave vrednosti svih relevantnih veličina? Ova teorija je nazvana teorija *skrivenih varijabli*.

Među prvima koji su dali odgovor na EPR članak bio je Bor. Za razliku od većine drugih fizičara, koji su pokušali da dokažu nepostojanje teorija skrivenih varijabli, on je svoj napad usmerio na definiciju elementa realnosti iz EPR rada. Osnovni princip koji Bor ističe je nerazdvojivost objekta i mernog aparata. Naime, sve što saznajemo o mikroobjektima mi zaključujemo na osnovu ponašanja instrumenta pri interakciji sa mikroobjektima. Odavde sledi da sve što možemo da znamo o čestici zavisi od celokupne eksperimentalne postavke. Shodno ovome, definicija elementa realnosti mora u sebi da sadrži potpun opis eksperimentalne procedure. Ovo gledište je izraženo u principu komplementarnosti (Bel smatra da je daleko logičniji naziv „princip kontradiktornosti“[2]). Ovaj princip tvrdi da za potpun opis mikropojava nije dovoljan jedan eksperiment (misaoni ili realni) već više međusobno isključivih eksperimenata. U jednom trenutku dostupan nam je samo jedan aspekt pojave, samo onaj koji odgovara datom eksperimentu. Ako se vratimo na pitanje čestično--talasnog dualizma, ovaj princip kaže da u jednom trenutku možemo posmatrati samo čestični ili samo talasni aspekt ponašanja čestice. Eksperimentalne postavke za posmatranje na primer talasnog ponašanja isključuju mogućnost posmatranja čestičnih fenomena. Bitno je naglasiti da činjenica da je posmatrač (osoba ili nekakav uređaj) zabeležio dešavanja u eksperimentu ne utiče na pojavu ili nestanak talasnih ili čestičnih fenomena. Za uništenje fenomena koji prate jedan aspekt ponašanja dovoljno je da se recimo informacija o putanji čestice može u principu odrediti iz postavke eksperimenta, ili čak da je informacija o putanji raspršena u okolinu. Osnovni uslov za pojavu talasnih fenomena, kao što je interferencija, jeste odsustvo bilo kakve informacije o putanji čestice[3].

Koji je, dakle, konačni Borov odgovor na EPR izazov? Da bi se izmerile veličine A i B, koje ne komutiraju, potrebne su dve različite postavke eksperimenta. Samim tim posmatramo dva komplementarna aspekta dvaju čestica. Pripisivanje različitih elemenata realnosti tim različitim aspektima u sebi ne nosi ništa paradoksalno.

Osnovna zamerka koju su istakli Ajnšajn i njegovi istomišljenici ticala se čudne posledice ovakvog tretiranja realnosti. Naime, ukoliko eksperimentalna postavka definiše stanje objekta, sledi da promena eksperimentalne postavke može da menja stanje objekta i kada je ovaj na velikoj udaljenosti od samih instrumenata i ni na koji način ne interaguje sa njima. Nelokalna interakcija, kako je ova pojava dobila ime, i dan danas je predmet velikog interesovanja, kako laika zbog naučnofantastičnog šmeka koji ima, tako i ozbiljnih naučnika zbog mogućih praktičnih primena.

1.3 Bomova analiza EPR paradoksa

Od velike je koristi proučiti Bomov stav o EPR paradoksu[4]. Pored toga što je svojom verzijom eksperimenta znatno uprostio problem, njegova analiza je tako jasna i poučna da mora biti pomenuta.

Prva stvar koju Bom ističe je da u korenu osnovnog zahteva kompletnosti, koji autori EPR rada stavljaju pred fizičku teoriju, naime da

(1) *svakom elementu fizičke realnosti mora odgovarati neki element u fizičkoj teoriji*;

[2] J. S. Bell, Six possible worlds of quantum mechanics. Proceedings of the Noble Symposium 65: Possible Worlds in Arts and Sciences (Stockholm 1986)

[3] A. Zeilinger, Rev. Mod. Phys **71**, No. 2, 288 (1999)

[4] D. Bohm, The Paradox of Einstein, Rosen and Podolsky. Quantum Theory, 611 (Prentice-Hall, Englewood Cliffs 1951)

koji se oslanja na njihov kriterijum realnosti

(2) *ako, bez da na ikoji način poremetimo sistem, možemo sa sigurnošću predvideti vrednost fizičke veličine, onda postoji element fizičke realnosti koji odgovara toj fizičkoj veličini*;

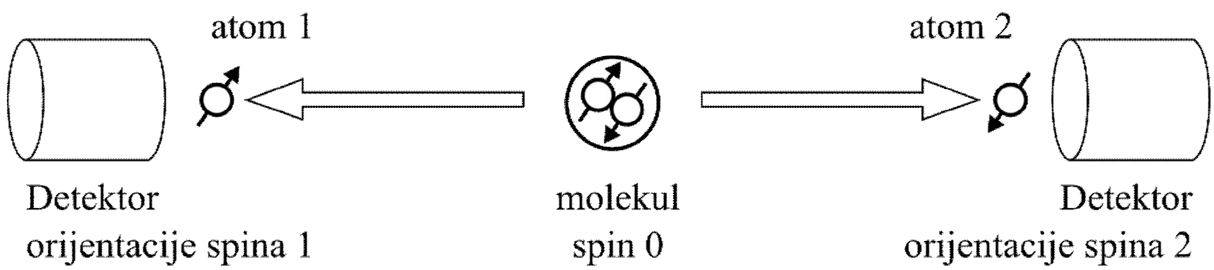
leže dve pretpostavke koje autori podrazumevaju, a koje nisu neposredno izrečene. One glase:

(3) *Svet se može tačno raščlaniti na različite i zasebne „elemente realnosti“.*

(4) *Svakom od ovih elemenata mora odgovarati precizno definisana matematička veličina koja se pojavljuje u kompletnoj teoriji.*

Bom smatra da neprihvatanjem ove dve pretpostavke možemo razrešiti EPR problem bez upadanja u paradoks.

Za početak, razmotrimo Bomovu verziju EPR eksperimenta. Iako modifikovana, ona je konceptualno ekvivalentna originalnom eksperimentu. Pretpostavimo da imamo dvoatomski molekul u stanju u kom je totalni spin jednak nuli. Spinovi atoma su antiparalelni i imaju vrednost $\frac{\hbar}{2}$. Pretpostavimo da je molekul rascepljen nekim procesom koji ne menja totalni spin. Atomi će se razdvojiti i nakon nekog vremena više neće interagovati. Kombinovani spin dva atoma ostaje nula.



Slika 1. Šema Bomove verzije EPR eksperimenta

Pri merenju spina prvog atoma možemo da biramo jednu od tri komponente (S_x, S_y ili S_z) koju ćemo meriti. Koju god komponentu da izaberemo, merenja na dva atoma će biti korelisana. Merenje iste komponente spina drugog atoma će dati istu vrednost kao i prvo merenja, ali suprotnog znaka. Vidimo da merenje nad prvim atomom predstavlja indirektno merenje nad drugim. Na ovaj način možemo da izvršimo merenje bez ikakvog poremećaja. Ako prihvatimo EPR definiciju realnosti (2), nakon merenja S_z prvog atoma, S_z drugog atoma mora biti tačno definisana, te S_z drugog atoma predstavlja element realnosti. Drugi atom je morao posedovati ovaj element realnosti i pre merenja, jer dva atoma više ne interaguju i merenje nad prvim atomom nikako ne utiče na drugi atom. Detektore možemo rotirati dok su atomi u letu i tako izmeriti i ostale komponete spina prvog atoma, bez da na ikoji način utičemo na same atome. Drugi atom mora posedovati elemente realnosti koji odgovaraju svim trima komponentama spina. Kako talasna funkcija u jednom trenutku može pružiti kompletnu sliku samo o jednoj komponenti, moramo zaključiti da talasna funkcija ne obezbeđuje kompletan opis svih elemenata realnosti koje poseduje drugi atom.

Pokažimo sada kako izgleda ovaj problem opisan matematičkim formalizmom kvantne mehanike. Sistem koji sadrži spinove dva atoma se opisuje pomoću četiri bazisna stanja[5],

$$|\psi_a\rangle = |u_+\rangle_1 |u_+\rangle_2 \qquad |\psi_c\rangle = |u_+\rangle_1 |u_-\rangle_2$$
$$|\psi_b\rangle = |u_-\rangle_1 |u_-\rangle_2 \qquad |\psi_d\rangle = |u_-\rangle_1 |u_+\rangle_2,$$

gde su $|u_\pm\rangle$ svojstvena stanja operatora projekcije spina odgovarajućih atoma.

Stanja $|\psi_c\rangle$ i $|\psi_d\rangle$ predstavljaju slučajeve sa antiparalelnim spinovima. Talasna funkcija sistema, čiji je totalni spin nula, predstavljena je stanjem

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_c\rangle - |\psi_d\rangle\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|u_+\rangle_1 |u_-\rangle_2 - |u_-\rangle_1 |u_+\rangle_2\right).$$

Ovo je takozvano neseparabilno stanje. U originalu, na engleskom jeziku, ovakva stanja se nazivaju "entangled states". U našoj literaturi se kao ekvivalentni prevodi koriste izrazi: spletena stanja, singletna stanja, korelisana stanja, kao i već pomenuta neseparabilna stanja. U radu će biti korišćeni podjednako svi prevodi, tako da sada naglašavamo njihovu ekvivalentnost[6].

Varijanta $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\psi_c\rangle + |\psi_d\rangle\right)$ ne dolazi u obzir jer je u tom slučaju vrednost totalnog spina različita od nule. Očigledno je da je totalni spin interferenciona osobina funkcija $|\psi_c\rangle$ i $|\psi_d\rangle$,

$\hat{S}^2_{tot}|\psi_0\rangle = 0|\psi_0\rangle$, dok $\hat{S}^2_{tot}|\psi_{c \text{ ili } d}\rangle \neq \lambda|\psi_{c \text{ ili } d}\rangle$.

S druge strane, spin samih atoma je definisan samo u stanjima oblika $|\psi_c\rangle$ ili $|\psi_d\rangle$ zasebno,

$$\hat{S}^z_1|\psi_{c \text{ ili } d}\rangle = \begin{cases} \hat{S}^z_1|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2 = \frac{\hbar}{2}|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2 \\ \hat{S}^z_1|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2 = -\frac{\hbar}{2}|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2 \end{cases}, \quad \hat{S}^z_2|\psi_{c \text{ ili } d}\rangle = \begin{cases} \hat{S}^z_2|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2 = -\frac{\hbar}{2}|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2 \\ \hat{S}^z_2|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2 = \frac{\hbar}{2}|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2 \end{cases},$$

ali $\hat{S}^z_1|\psi_0\rangle \neq \mu|\psi_0\rangle$[7].

Prilikom merenja spina jednog atoma sistem će preći iz stanja sa definisanim totalnim spinom a nedefinisanim pojedinačnim spinovima atoma, u stanje u kom su zasebni spinovi definisani ali totalni spin nije.

Pokažimo sada da se korelacije održavaju bez obzira koje komponente izaberemo da merimo. U slučaju da merimo *z*-komponente, stanje posmatranog sistema biće opisano funkcijom

[5] U Dodatku A su opisani višečestični sistemi kao i prostori stanja koji im se pridružuju.
[6] O osobinama ovakvih stanja možete više pronaći u Dodatku B.
[7] Potpunija izvođenja se mogu naći u dodatku C

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z_+\rangle_1 |z_-\rangle_2 - |z_-\rangle_1 |z_+\rangle_2\right).$$

Ukoliko želimo da merimo *x*-komponente spina, moramo ovo stanje izraziti pomoću svojstvenih stanja operatora $\hat{S}_x$, $|x_+\rangle$ i $|x_-\rangle$. Kako važi $|z_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_+\rangle + |x_-\rangle\right)$ i $|z_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_+\rangle - |x_-\rangle\right)$, zamenom u $|\psi_0\rangle$ dobijamo

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\left(|x_+\rangle_1 + |x_-\rangle_1\right)\left(|x_+\rangle_2 - |x_-\rangle_2\right) - \frac{1}{2}\left(|x_+\rangle_1 - |x_-\rangle_1\right)\left(|x_+\rangle_2 + |x_-\rangle_2\right)\right]$$

$$|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_-\rangle_1 |x_+\rangle_2 - |x_+\rangle_1 |x_-\rangle_2\right).$$

Ovo stanje, takođe, sadrži korelaciju između vrednosti S_x jednog i drugog atoma. Slično se može pokazati i za *y*-komponentu. Korelacija se održava ma koju komponentu spina mi odlučimo da merimo.

Pokažimo, najzad, kako se EPR paradoks može izbeći ako se ne usvoje pretpostavke (3) i (4). Ove pretpostavke predstavljaju hipotezu da je realnost zasnovana na matematičkoj strukturi – svaki element realnosti tačno odgovara nekom elementu potpunog skupa matematičkih izraza. Međutim, u kvantnoj mehanici, ovakvo „1 na 1“ preslikavanje između matematičke teorije i realnosti stoji samo na klasičnom nivou. Na kvantnom nivou, matematički opis koji daje talasna funkcija svakako nije u „1 na 1“ odnosu sa stvarnim ponašanjem posmatranog sistema. Veza koja u kvantnoj mehanici postoji između teorije i realnosti je statističke prirode. S druge strane, tvrdimo da talasna funkcija obezbeđuje najpotpuniji mogući opis sistema. Ova dva gledišta na talasnu funkciju miri stav da osobine sistema u opštem slučaju postoje samo u nepotpuno definisanoj formi. Ne postoje dobro definisane osobine, već samo mogućnosti koje mogu biti bolje definisane pri interakciji sa odgovarajućim klasičnim sistemom, kao što je merni uređaj. Na primer, položaj i impuls elektrona u opštem slučaju ne postoje u precizno definisanoj formi, već u grubo definisanom obliku, tako da ne dolazi do narušenja principa neodređenosti. Svaka veličina, pri interakciji sa mernim uređajem, može postati bolje definisana na račun stepena definisanosti one druge. Osobine položaja i impulsa ne samo da predstavljaju nepotpuno definisane i suprotstavljajuće mogućnosti, nego se ne može ni smatrati da one pripadaju elektronu samom. Realizovanje ovih mogućnosti zavisi i od sistema sa kojim elektron interaguje. Sledi da definisani elementi realnosti ni ne postoje.

Primenimo ovaj rezon na EPR eksperiment. Autori članka bi rekli da postoji samo ona komponenta spina koja je precizno definisana talasnom funkcijom. Kvantna mehanika bi rekla da sve tri komponente postoje istovremeno u nekoj grubo definisanoj formi. Svaka komponenta ima mogućnost da pri interakciji sa mernim uređajem postane bolje defnisana na račun ostalih komponenata. Samo kada je talasna funkcija svojstveno stanje neke komponente spina, možemo sa sigurnošću predvideti njenu vrednost. U slučaju da je stanje sistema predstavljeno funkcijom $|\psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z_+\rangle_1 |z_-\rangle_2 - |z_-\rangle_1 |z_+\rangle_2\right)$, sistem tek pri interakciji sa mernim instrumentom dobija definisanu vrednost određene komponente spina atoma.

Kada merenje komponente spina prvog atoma da, na primer, rezultat $+\frac{\hbar}{2}$, talasna funkcija drugog atoma prelazi u oblik koji garantuje da će se pri merenju iste komponente spina dobiti rezultat $-\frac{\hbar}{2}$. Vidimo da u ovom slučaju ne nailazimo ni na kakav paradoks.

1.4 Belove nejednakosti

Mogli bismo reći da je osnovno pitanje oko kog se ne slažu zagovornici standardne kvantne teorije i zagovornici teorija skrivenih varijabli pitanje interpretacije superpozicije. Oni na strani kvantne mehanike smatraju da je kvantna teorija kompletna, i da su osobine sistema čije je stanje predstavljeno superpozicijom neodređene. Sa druge strane, pobornici skrivenih varijabli tvrde da je kvantnomehanički opis nekompletan. Po njima, osobine sistema imaju definisanu vrednost sve vreme, pa i kad je sistem u superpoziciji.

Situacija je mogla da se razreši samo eksperimentom, ali originalna postavka EPR efekta bila je eksperimentalno neizvodljiva. Prvi značajni pomak napravio je Bom svojom modifikacijom EPR eksperimenta. Iako je i ova verzija bila teška za praktično izvođenje, bila je definitivno korak u pravom smeru.

Formalno, stanje sistema u Bomovoj verziji EPR eksperimenta se da predstaviti na sledeći način:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2,$$

gde $|z_+\rangle_1$ i $|z_-\rangle_1$ predstavljaju svojstvena stanja operatora projekcije spina na z-osu za prvu česticu, a $|z_+\rangle_2$ i $|z_-\rangle_2$ za drugu. Iz ugla standardne kvantne mehanike, vrednosti komponenata spina čestica su neodređene.

Ako merimo spin prve čestice, možemo dobiti dva moguća rezultata, spin-gore ili spin--dole, svaki sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$. Ako pri merenju dobijemo spin-gore doći će do kolapsa superpozicije,

$$|\Psi\rangle \rightarrow |z_+\rangle_1|z_-\rangle_2,$$

i druga čestica trenutno dobija određenu vrednost projekcije spina – spin-dole. Pitanje je otkud ova promena stanja druge čestice (iz neodređenog u određeno) kada nismo ničim uticali na nju. Kvantnomehanička interpretacija superpozicije dovodi do pojave dejstva na daljinu.

Zanimljivo je razmotriti viđenje ovog eksperimenta iz ugla teorija skrivenih varijabli. Po njima, orijentacije spinova su određene u trenutku stvaranja čestica i one sve vreme nose osobine koje to određuju ali mi nemamo dovoljno informacija o njima. Da li je opis kvantnog stanja u terminima skrivenih varijabli moguć? Na odgovor na ovo pitanje (kao što ćemo videti – delimičan) čekalo se skoro trideset godina, od izlaska EPR članka do izlaska Belovog rada[8] 1964. godine. Pokazalo se da su bile potrebne dalje modifikacije eksperimenta kako bi se dao odgovor na ovo pitanje. Za formulaciju paradoksa bila je potrebna jedna osa duž koje

[8] J. S. Bell, Physics **1**, 195 (1964)

su posmatrani spinovi. Kako bi se dao odgovor, bilo je potrebno uvesti dodatne ose. Po mnogima, Belove nejednakosti su najznačajnije otkriće prošlog veka. Njihov značaj se može videti i iz sledećeg podatka: u periodu između 1935. i 1964. godine EPR rad je citiran u drugim naučnim radovima svega četrdesetak puta. Međutim, od 1964. godine do danas, ovaj rad je citiran više od četiri hiljade puta. To je pokazatelj da su Belove nejednakosti bile prekretnica u načinu na koji su se posmatrali problemi teorija skrivenih varijabli i spletenih stanja. One su označile kraj spekulisanja i misaonih eksperimenata i omogućile eksperimentalnu proveru predviđanja koje daju kvantna mehanika i teorije skrivenih varijabli. Jedno, do 1964. godine pretežno filozofsko pitanje, svedeno je na upoređivanje dva broja. Od sedamdesetih godina prošlog veka do danas izvršen je niz eksperimenata, ali ipak do danas nije doneta konačna presuda u korist jedne ili druge strane. Naišlo se na niz teškoća, pre svega tehnoloških, u realizaciji eksperimenata, ali dosadašnji rezultati su bili u korist kvantne mehanike.

Belova nejednakost je konstruisana za teorije skrivenih varijabli koje počivaju na dvema pretpostavkama – lokalnosti i realizmu. Pretpostavka o lokalnosti se ogleda u tvrdnji da merenje izvršeno na jednom sistemu ni na koji način ne može da utiče na drugi sistem ukoliko ta dva sistema ne interaguju. Pretpostavka realizma, u suštini, tvrdi da čestice poseduju definisane osobine nezavisno od toga da li su posmatrane ili ne.

Pogledajmo sad kako je Bel izveo svoju nejednakost. Posmatramo sistem od dve čestice U i V koje su nastale raspadom neke treće čestice. Svaka od čestica ima spin, $\vec{\sigma}_U$ i $\vec{\sigma}_V$. Eksperimentalni uređaj čine dva magneta orijentisana duž vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Mere se projekcije spinova na ose određene orijentacijom magneta, tj. $\vec{a}\cdot\vec{\sigma}_U$ i $\vec{b}\cdot\vec{\sigma}_V$. Uvodi se skup varijabli λ koji predstavlja skrivene varijable. One potpuno definišu stanje čestica i kada bi nam bile poznate mogli bismo sa sigurnošću predvideti rezultat merenja. Skup λ je definisan u trenutku stvaranja dvaju čestica i zavisi od stanja raspadnute čestice neposredno pre raspada. U toku procesa merenja on ostaje konstantan. Vrednosti merenja projekcije spina dvaju čestica zavise od orijentacije magneta kao i od novouvedenih varijabli,

$$A = A(\vec{a},\lambda) \text{ i } B=B(\vec{b},\lambda).$$

U ovom koraku su u suštini uvedene pretpostavke lokalnosti i realizma. Vidimo da rezultat pri merenju nad jednom česticom ne zavisi od merenja izvršenog nad drugom kao ni od orijentacije drugog magneta. Takođe, skrivene varijable definišu stanje čestica kao i vrednost veličina koje im pripadaju sve vreme od trenutka njihovog nastanka i nezavisno od izvršenog merenja. U nekom opštem slučaju i sami instrumenti mogu sadržati skrivene varijable koje mogu uticati na rezultat. Kako bi se ovo izbeglo, posmatraćemo usrednjene vrednosti po skrivenim varijablama detektora,

$$A(\vec{a},\lambda)\to\overline{A}(\vec{a},\lambda) \text{ i } B(\vec{b},\lambda)\to\overline{B}(\vec{b},\lambda).$$

Ukoliko distribucije skrivenih varijabli jednog instrumenta ne zavise od orijentacije drugog instrumenta, ostaje da važi da rezultat merenja nad jednom česticom ne zavisi od merenja nad drugom niti od orijentacije drugog magneta.

Sada možemo da postavimo pitanje da li ćemo usrednjavanjem vrednosti proizvoda AB po skrivenim varijablama λ,

$$E(\vec{a},\vec{b})=\int d\lambda\rho(\lambda)\overline{A}(\vec{a},\lambda)\overline{B}(\vec{b},\lambda),$$

dobiti slaganje sa kvantnomehaničkim predviđanjem. Veličinu $E\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ možemo smatrati korelacijom između rezultata dobijenih na dva uređaja. U slučaju da se orijentacije oba detektora poklapaju, $\vec{a}=\vec{b}$, dobićemo $E\left(\vec{a},\vec{b}\right)=-1$, tj. tada imamo maksimalnu antikorelaciju. U gornjoj formuli je $\rho(\lambda)$ distribucija verovatnoće, koja daje verovatnoću da je raspadnuta čestica bila određena skupom varijabli λ neposredno pre raspada.

Kako važi $A=\pm 1$ i $B=\pm 1$[9], sledi da mora važiti $\left|\bar{A}\right|\le 1$ i $\left|\bar{B}\right|\le 1$. Vidimo da čak i da oba detektora zakažu i ne detektuju česticu, tj. da $A, B, \bar{A}$ i $\bar{B}$ budu nula, gornji uslov će i dalje važiti.

Ako se uvedu dodatni pravci magneta, $\vec{a}\,'$ i $\vec{b}\,'$, možemo pisati

$$E\left(\vec{a},\vec{b}\right)-E\left(\vec{a},\vec{b}\,'\right)=\int\rho(\lambda)\left[\bar{A}(\vec{a},\lambda)\bar{B}\left(\vec{b},\lambda\right)-\bar{A}(\vec{a},\lambda)\bar{B}\left(\vec{b}\,',\lambda\right)\right]d\lambda=$$

$$=\int\rho(\lambda)\left[\bar{A}(\vec{a},\lambda)\bar{B}\left(\vec{b},\lambda\right)-\bar{A}(\vec{a},\lambda)\bar{B}\left(\vec{b}\,',\lambda\right)+\begin{Bmatrix}\pm\bar{A}(\vec{a},\lambda)\bar{B}\left(\vec{b},\lambda\right)\bar{A}(\vec{a}\,',\lambda)\bar{B}\left(\vec{b}\,',\lambda\right)\\ \mp\bar{A}(\vec{a},\lambda)\bar{B}\left(\vec{b},\lambda\right)\bar{A}(\vec{a}\,',\lambda)\bar{B}\left(\vec{b}\,',\lambda\right)\end{Bmatrix}\right]d\lambda$$

$$E\left(\vec{a},\vec{b}\right)-E\left(\vec{a},\vec{b}\,'\right)=\int\rho(\lambda)\bar{A}(\vec{a},\lambda)\bar{B}\left(\vec{b},\lambda\right)\left[1\pm\bar{A}(\vec{a}\,',\lambda)\bar{B}\left(\vec{b}\,',\lambda\right)\right]d\lambda-$$

$$-\int\rho(\lambda)\bar{A}(\vec{a},\lambda)\bar{B}\left(\vec{b}\,',\lambda\right)\left[1\pm\bar{A}(\vec{a}\,',\lambda)\bar{B}\left(\vec{b},\lambda\right)\right]d\lambda$$

Koristeći nejednakost trougla[10], uslov $\left|\bar{A}\right|\le 1$ i $\left|\bar{B}\right|\le 1$ i činjenicu da su $1\pm\bar{A}(\vec{a}\,',\lambda)\bar{B}\left(\vec{b}\,',\lambda\right)$ i $1\pm\bar{A}(\vec{a}\,',\lambda)\bar{B}\left(\vec{b},\lambda\right)$ nenegativni dobijamo sledeće

$$\left|E\left(\vec{a},\vec{b}\right)-E\left(\vec{a},\vec{b}\,'\right)\right|\le\int\rho(\lambda)\left[1\pm\bar{A}(\vec{a}\,',\lambda)\bar{B}\left(\vec{b}\,',\lambda\right)\right]d\lambda+\int\rho(\lambda)\left[1\pm\bar{A}(\vec{a}\,',\lambda)\bar{B}\left(\vec{b},\lambda\right)\right]d\lambda.$$

Obzirom da važi $\int\rho(\lambda)d\lambda=1$ imamo

$$\left|E\left(\vec{a},\vec{b}\right)-E\left(\vec{a},\vec{b}\,'\right)\right|\le 2\pm\left[E\left(\vec{a}\,',\vec{b}\,'\right)+E\left(\vec{a}\,',\vec{b}\right)\right].$$

Dobili smo Belovu nejednakost u najopštijem obliku. Da bismo videli da li je kvantnomehanička očekivanja narušavaju vratimo se na Bomov eksperiment. Kako je ukupan spin sistema nula, projekcije na istu osu su suprotno orijentisane i mora važiti $E\left(\vec{a}\,',\vec{a}\,'\right)=-1$. Ako izaberemo da $\vec{b}\,'=\vec{a}\,'$ dobijamo

$$\left|E\left(\vec{a},\vec{b}\right)-E\left(\vec{a},\vec{b}\,'\right)\right|\le 2\pm\left[-1+E\left(\vec{b}\,',\vec{b}\right)\right].$$

Sa desne strane, zavisno koji znak odaberemo, možemo dobiti dve vrednosti,

---

[9] U $\frac{\hbar}{2}$ jedinicama

[10] Zbir dužina dve stranice uvek je veći od dužine treće stranice, tj. $|A+B|<|A|+|B|$

$3-E\left(\vec{b}\,',\vec{b}\right)$ ili $1+E\left(\vec{b}\,',\vec{b}\right)$. Kako je $E\left(\vec{b}\,',\vec{b}\right)\le 1$, biramo drugu vrednost jer ona predstavlja strožiji uslov.

$$\left|E\left(\vec{a},\vec{b}\right)-E\left(\vec{a},\vec{b}\,'\right)\right|\le 1+E\left(\vec{b},\vec{b}\,'\right).$$

Ova nejednakost mora da važi za sve moguće orijentacije vektora $\vec{a},\vec{b}$ i $\vec{b}\,'$.

Kvantnomehaničko očekivanje proizvoda rezultata merenja je

$$E\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\left\langle(\vec{\sigma}_U\cdot\vec{a})\left(\vec{\sigma}_V\cdot\vec{b}\right)\right\rangle.$$

Neka vektor $\vec{a}$ definiše pravac z-ose. Vektor $\vec{b}$ je nagnut pod uglom θ u odnosu na $\vec{a}$. Sada možemo da smatramo da $\vec{\sigma}_U\cdot\vec{a}\equiv\hat{S}_z$ i $\vec{\sigma}_V\cdot\vec{b}\equiv\hat{S}_\theta$, gde je $\hat{S}_z$ operator projekcije spina prve čestice na z-osu ($\vec{a}$), a $\hat{S}_\theta$ operator projekcije spina druge čestice na osu pod uglom θ u odnosu na z-osu ($\vec{b}$).

Neka je stanje posmatranih čestica opisano funkcijom sledećeg oblika

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}|z_+\rangle_U|z_-\rangle_V-\frac{1}{\sqrt{2}}|z_-\rangle_U|z_+\rangle_V.$$

Vidimo da u funkciji već figurišu svojstveni vektori operatora $\hat{S}_z$, $|z_+\rangle_U$ i $|z_-\rangle_U$. Preostaje da raspišemo $|z_+\rangle_V$ i $|z_-\rangle_V$ preko svojstvenih vektora operatora $\hat{S}_\theta$,

$$|z_+\rangle_V=\cos\frac{\theta}{2}|\theta_+\rangle_V+\sin\frac{\theta}{2}|\theta_-\rangle_V \text{ i}$$

$$|z_-\rangle_V=\sin\frac{\theta}{2}|\theta_+\rangle_V-\cos\frac{\theta}{2}|\theta_-\rangle_V.$$ [11]

Sada se $|\Psi\rangle$ može zapisati

$$|\Psi\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}|z_+\rangle_U|\theta_+\rangle_V-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}|z_+\rangle_U|\theta_-\rangle_V-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{\theta}{2}|z_-\rangle_U|\theta_+\rangle_V-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{\theta}{2}|z_-\rangle_U|\theta_-\rangle_V.$$

Za očekivanje dobijamo

$$E\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\langle\Psi|\hat{S}_z\hat{S}_\theta|\Psi\rangle=\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}+\frac{1}{2}\sin^2\frac{\theta}{2}=$$
$$=\sin^2\frac{\theta}{2}-\cos^2\frac{\theta}{2}=-\cos\theta=-\vec{a}\cdot\vec{b}$$

Sada se Belova nejednakost može napisati kao

$$\left|-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{b}\,'\right|\le 1-\vec{b}\cdot\vec{b}\,'.$$

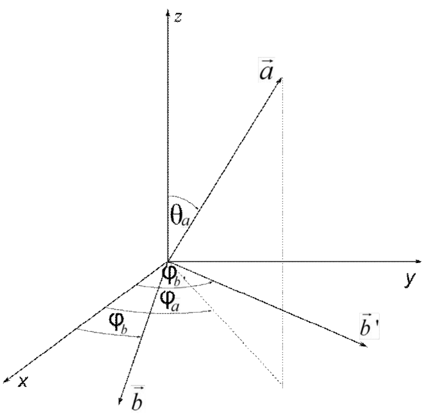
[11] Pogledati Dodatak D ukoliko je potrebno pojašnjenje navedenih relacija

Orijentišimo naš koordinatni sistem tako da vektori $\vec{b}$ i $\vec{b}\,'$ leže u xy-ravni. Vektori $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{b}\,'$ su određeni uglovima $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_{b'}$ i θ_a (Slika 2).

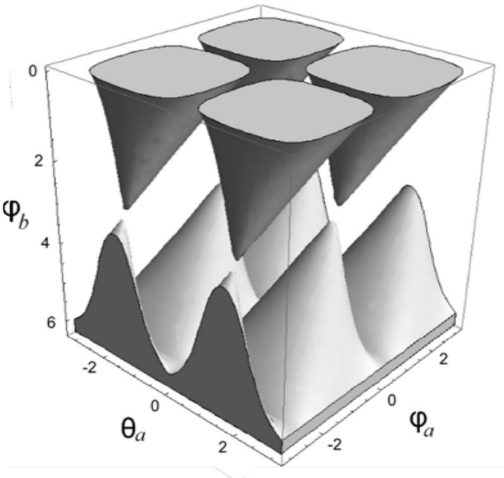
Kada se raspišu skalarni proizvodi i upotrebi formula za razliku kosinusa dobije se:

$$\left|\sin\theta_a\right|\left|\sin\left(\varphi_a - \frac{\varphi_b + \varphi_{b'}}{2}\right)\right| \le \sin\frac{\varphi_{b'} - \varphi_b}{2}.$$

Ako nam je $\varphi_{b'} - \varphi_b$ malo, uvek možemo izabrati uglove θ_a i φ_a da nejednakost bude narušena (Slika 3).



Slika 2. Orijentacije magneta



Slika 3. Osenčene oblasti predstavljaju vrednosti uglova φ_a, φ_b i θ_a u radijanima za koje **važi** Belova nejednakost.

Uzeto je da je $\varphi_{b'} = \dfrac{\pi}{10}$

Zaključujemo da teorija skrivenih varijabli zasnovana na prepostavci lokalnog realizma ne može reprodukovati sva predviđanja kvantne teorije.

1.4.1 Eksperimentalni testovi Belovih nejednakosti

Belova nejednakost je u originalu izvedena za specijalan slučaj Bomovog eksperimenta, gde se posmatraju projekcije spinova. U ovom slučaju, mere se komponente spina jedne i druge spletene čestice za više različitih orijentacija detektora. Da bi se dobila korelacija rezultata $E\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, jedan detektor se orijentiše duž vektora $\vec{a}$, a drugi duž vektora $\vec{b}$. Dobijene vrednosti komponenti spina jedne i druge čestice se množe i tako dobijamo korelaciju $E\left(\vec{a},\vec{b}\right)$ za te dve orijentacije detektora. Naravno vrši se velik broj istovetnih merenja kako bi se dobila srednja vrednost i nju koristimo u Belovoj nejednakosti. Korelacije $E\left(\vec{a},\vec{b}\,'\right)$ i $E\left(\vec{b},\vec{b}\,'\right)$ se dobijaju nakon odgovarajućih rotacija detektora. Računaju se proizvodi dobijenih vrednosti komponenti spina u svakom slučaju i nalaze se korelacije za svaku orijentaciju. Vrednosti $E\left(\vec{a},\vec{b}\right)$, $E\left(\vec{a},\vec{b}'\right)$ i $E\left(\vec{b},\vec{b}'\right)$ se zamenjuju u Belovu nejednakost $\left|E\left(\vec{a},\vec{b}\right)-E\left(\vec{a},\vec{b}'\right)\right|\le 1+E\left(\vec{b},\vec{b}'\right)$. Proverava se da li za određene orijentacije detektora dolazi do narušavanja ove nejednakosti.

Kako je daleko jednostavnije proizvesti spletene parove fotona nego parove čestica sa antiparalelnim spinovima, prvi eksperimenti koji su izvedeni su se koristili modifikacijama Belovih nejednakosti kod kojih su posmatrane polarizacije spletenih fotona. Najpoznatije su CHSH i CH74[12] modifikacije. U ovom slučaju se pomoću kristala sa nelinearnim optičkim osobinama od jednog fotona prave dva ili čak tri fotona sa korelisanim polarizacijama. Na put fotonima se postavljaju polarizatori sa različitim orijentacijama i opet se računaju korelacije dobijenih parova rezultata. Prvi test Belovih nejednakosti koristeći se ovim metodom izvršili su Fridman i Klauzer 1972. godine. Gledano iz sadašnje perspektive, tom eksperimentu se ima dosta toga zameriti, ali to ne menja činjenicu da je on prvi. Daleko poznatiji eksperimenti izvršeni su od strane Aspekta i saradnika tokom 1982. i 1983. godine. Izvršili su tri eksperimenta koristeći spletene fotone. Poslednji od njih je i najznačajniji jer se u njemu prvi put uvodi promena orijentacije analizatora u toku leta fotona. Ovo je sam Bel predložio kako bi se isključila bilo kakva moguća korelacija između detektora i fotona. Detektori su bili na udaljenosti od 12 metara, što je davalo 40ns vremena da dođe do promene njihove orijentacije. Promena orijentacije nije bila potpuno nasumična, već pre kvaziperiodična, pošto je u ovako kratkom intervalu samo takva realizacija eksperimenta bila moguća. Rezultati ovog eksperimenta su pokazali da je došlo do narušenja Belovih nejednakosti za više od pet standarnih devijacija, a da se rezultati poklapaju sa predviđanjima kvantne mehanike. Sa razvojem tehnologije i nelinearne optike, usledili su još precizniji i savršeniji eksperimenti. Pokazalo se da čak i na rastojanju od osamnaest kilometara između detektora dolazi do narušenja nejednakosti za više od trideset standardnih devijacija, a da se rezultati poklapaju sa kvantnomehaničkim predviđanjima.

Zagovornici teorija skivenih varijabli ističu da svako do sada izvršeno merenje sadrži, kako se to u stranoj literaturi naziva, „loopholes“, tj. „rupe“, koje predstavljaju izvesne nesavršenosti u samom procesu merenja zbog kojih se dobijeni rezultati i dalje mogu teorijski objasniti iz ugla teorije skrivenih varijabli. Definisano je više vrsta rupa, od kojih su najznačajnije rupe u detekciji (detection efficiency loopholes) i rupe u lokalnosti (locality loopholes).

Rupa u detekciji nastaje usled nesavršenosti detektora, tj. usled činjenice da je koeficijent efikasnosti detektora uvek manji od jedinice. Kada se u Belove nejednakosti uračuna uticaj ograničene efikasnosti detektora, dobije se da za niske vrednosti koeficijenta efikasnosti nikada ne dolazi do narušenja Belovih nejednakosti – dobija se potpuno slaganje kvantnih predviđanja i predviđanja teorija skrivenih varijabli.

Rupa u lokalnosti je rezultat činjenice da svaki eksperiment koji ima za cilj da testira lokalni realizam (Belove nejednakosti), mora onemogućiti razmenu informacija između dva mesta na kojima se vrše merenja. Mesta merenja moraju biti razdvojena na toliku razdaljinu da je vreme potrebno svetlosti da je pređe veće od vremena trajanja eksperimenta. Svi rani eksperimenti su patili od ovog nedostatka, ali je počev od Aspektovog trećeg eksperimenta pa do danas izvršen velik broj testova koji su otklonili ovu rupu.

Ispostavilo se da je svaku rupu zasebno relativno lako prevazići, ali da zatvaranje svih rupa istovremeno predstavlja velik tehnološki izazov. Ipak, činjenica je da se svakim novim eksperimentom sve više bližimo tom popunom eksperimentu bez ikakvih rupa. Preostaje da

[12] Modifikacija koju su izveli John **C**lauser, Michael **H**orne, Abner **S**himony i Richard **H**olt i modifikacija izvedena od strane John **C**lauser-a i Michael **H**orne-a 1974. godine

zaključimo da su spletene čestice, ma koliko udaljene bile, predstavljene neseparabilnim stanjem i da zasebno ne poseduju lokalnu fizičku realnost.

1.5 Posle Bela

Kako se čini, testovi Belovih nejednakosti će uskoro u popunosti isključiti iz igre teorije skrivenih varijabli koje se zasnivaju na združenim pretpostavkama lokalnosti i realizma. Međutim, Belove nejednakosti nam ne kazuju koja od ove dve pretpostavke je u protivrečnosti sa kvantnom mehanikom. Sa druge strane, 1966. godine Bel izdaje članak[13] u kome kritikuje dotadašnje dokaze nepostojanja skrivenih varijabli. Tokom svog izlaganja, on pravi razliku između kontekstualnih i nekontekstualnih teorija (mada ih on tada nije zvao tako). Nekontekstualne teorije su one kod kojih vrednosti jedne varijable ne zavisi od toga koje se veličine pored nje mere kao ni od eksperimentalnog okvira. Većina dotadašnjih dokaza protiv skrivenih varijabli su u stvari bili protiv ove podgrupe. Kontekstualne teorije su one kod kojih vrednost varijabli zavisi i od toga koje se veličine mere uporedo kao i od eksperimentalnog okvira u koji je problem postavljen.Vidimo da je Bor uveo kontekstualnost u standardnu kvantnu teoriju definisanjem principa komplementarnosti.

Dakle, ostaju nerazrešena dva velika pitanja:

1. Koja je od dve pretpostavke u protivrečnosti sa kvantnom mehanikom, lokalnost ili realizam?

2. Pitanje kontekstualnosti teorija skrivenih varijabli.

Pozabavićemo se prvo pitanjem kontekstualnosti. Ovim problemom se bavi teorema Košen-Spekera. Poznata je još i kao teorema Bel-Košen-Spekera, pošto su dva autora za njenu osnovu uzeli kritike koje je Bel izneo na račun najpoznatijih dokaza protiv postojanja skrivenih varijabli. Ova teorema tvrdi da teorija skrivenih varijabli izgrađena na pretpostavkama realizma i nekontekstualnosti nije u skladu sa kvantnom mehanikom. Potvrda ove teoreme bi značila da se moramo odreći jedne od tih pretpostavki kao i svih teorija skrivenih varijabli koje se zasnivaju na njoj. Koje od te dve, predstavlja jedno novo pitanje koje tek treba da dobije odgovor. Postoje eksperimentalni testovi ove teoreme koji je dokazuju, ali i ovde postoje brojne rupe. Dok neki naučnici smatraju da je teorema proverena još pre trideset godina, drugi tvrde da su potrebni novi unapređeni testovi.

Vratimo se sada pitanju lokalnosti i realizma. Delimičan odgovor daju takozvane Legetove nejednakosti. Leget je u duhu Belovih nejednakosti formulisao nove nejednakosti koje zadovoljavaju sve teorije skivenih varijabli koje se oslanjaju na pretpostavku realizma. Nelokalne interakcije su u ovom slučaju bile do velikog stepena dopuštene. Slično kao i kod Belovih nejednakosti, kvantna mehanika je i ove nejednakosti narušavala. Prvi test Legetovih nejednakosti izvršili su Aspelmajer, Zeilinger i saradnici 2007. godine. Najnoviji test je izvršen od strane Romera, Liča i saradnika tokom 2010. godine. Oba su potvrdila predviđanja kvantne teorije i na taj način su isključili iz igre širok spektar nelokalnih teorija zasnovanih na realizmu.

[13] J. S. Bell, Rev. Mod. Phys. **38**, 447 (1966)

1.6 Reč-dve o nelokalnosti

Pošto svi podaci ukazuju na opravdanost pretpostavke o postojanju nelokalnih interakcija, razmotrićemo ukratko njihove osobine i posledice. Videli smo da se jedno EPR stanje može zapisati u sledećoj formi:

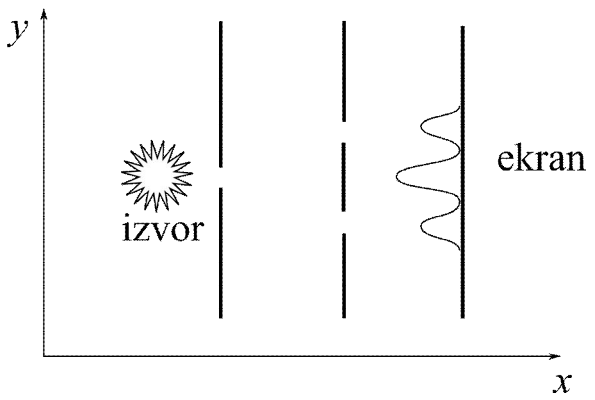
$$\left|\Psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|z_+\right\rangle_1\left|z_-\right\rangle_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\left|z_-\right\rangle_1\left|z_+\right\rangle_2 .$$

Ako merenje na prvoj čestici da rezultat spin-gore dolazi do kolapsa,

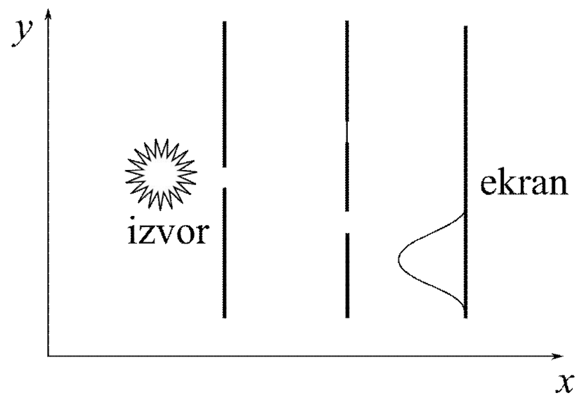
$$\left|\Psi\right\rangle \;\rightarrow\; \left|z_+\right\rangle_1\left|z_-\right\rangle_2 ,$$

i stanje druge čestice postaje potpuno određeno, tako da sa sigurnošću možemo znati koji bi rezultat dalo merenje na drugoj čestici, naime spin-dole. Rezultat merenja na drugoj čestici zavisi nelokalno od rezultata merenja na prvoj. Ali, bitno je naglasiti da rezultat merenja na drugoj čestici ne zavisi od toga da li je na prvoj čestici izvršeno merenje ili ne. U slučaju da merimo samo drugu česticu, dobijamo sa verovatnoćom $\frac{1}{2}$ jedan ili drugi rezultat. Ako prvo izvršimo merenje na prvoj čestici pa onda na drugoj, opet će verovatnoće i mogući rezultati biti isti. Odavde sledi da se nelokalnost ne može iskoristiti za slanje signala brzinom većom od brzine svetlosti. Posmatrač druge čestice ne zna da li je izvršeno merenje na prvoj sve dok ne uporedi rezultate svog merenja sa onim izvršenim na drugoj. Naravno, njemu se ti rezultati moraju dostaviti nekim klasičnim kanalom. Sa druge strane, osobina nelokalnosti se može iskoristiti za slanje šifrovanih poruka i to tako da bi svako prisluškivanje poruke bilo jasno vidljivo.

Bilo bi korisno naglasiti još jednu stvar – nelokalnost nije osobina samo višečestičnih sistema. Jednočestični sistemi takođe pokazuju osobinu nelokalnosti. Uzmimo dobro poznat primer sa difrakcijom elektrona na dva proreza. Puštamo jedan po jedan elektron na proreze i posmatramo šta se dešava. Ukoliko su oba proreza otvorena, na ekranu iza proreza dobijamo interferencioni obrazac koji ima maksimum naspram polovine razmaka između ova dva proreza. Ukoliko je jedan prorez zatvoren, a drugi otvoren, najveći broj elektrona će se gomilati oko tačke gde prava tačkasti izvor-prorez probija ekran (Slika 4a i 4b).



Slika 4a. Šematski prikaz difrakcije na dva otvora



Slika 4b. Šematski prikaz difrakcije na jednom otvoru

Kada analiziramo proces nastanka interferencionog obrasca, mi znamo da nije pola elektrona prošlo kroz jedan prorez, a pola kroz drugi. Dobro je poznata činjenica da se elektron emituje i detektuje čestično. Umesto toga, kaže se da je elektron prošao kroz oba proreza istovremeno. A šta je ovo nego osobina nelokalnosti? Takođe, jedan prorez možemo da zatvorimo kad je elektron već u letu. U ovom slučaju opet neće doći do obrazovanja interferencionog obrasca. I u ovom slučaju, elektron, zahvaljujući svojoj nelokalnosti, „zna" da li je prorez zatvoren ili otvoren. Slično važi i za upletene čestice. Tako upletene, one se ponašaju kao jedna čestica, ma koliko te dve čestice razdvojene bile, i bilo kakav uticaj na stanje jedne menja stanje druge.

Eksperimentalne provere Belovih nejednakosti nam ukazuju da teorije skrivenih varijabli ne mogu biti zasnovane na pretpostavkama lokalnosti i realizma. Ostalo je pitanje da li se kvantnomehanički opis stvarnosti oslanja na ove pretpostavke. Realizma smo se odrekli onog trenutka kada smo prihvatili postojanje superponiranih stanja. Takođe, mogli bismo tvrditi da je kvantna mehanika nelokalna teorija, jer su nelokalni efekti već mnogo puta eksperimentalno provereni. Ako bismo se zadržali u okvirima nerelativističke kvantne mehanike, tom stavu se ništa ne bi moglo zameriti. Ništa ne zabranjuje postojanje trenutnih interakcija na proizvoljno velikim rastojanjima. Sa druge strane, mogu se naći veoma jaki argumenti u korist lokalnosti. Formulacija kvantne teorije polja je najjači od njih. Proširenje kvantne teorije na elektrodinamiku (koja je lokalna) izvršeno je relativno jednostavno. Pri tome nisu iskrsli nikakvi problemi koji bi se očekivali pri spajanju jedne teorije koja je nelokalna sa teorijom koja je lokalna. Drugo što možemo primetiti je da, i pored postojanja nelokalnih efekata, brzina svetlosti u vakuumu predstavlja najveću moguću brzinu prenošenja informacija, a ovo je ograničenje koje poštuju sve lokalne teorije. I konačno, kvantne korelacije, zbog kojih i dolazi do nelokalnih efekata, nemaju nikakve veze sa kauzalnošću. Merenje na jednoj čestici koja je spletena sa nekom drugom česticom dovodi do trenutne promene stanja te druge čestice. Ako odmah po prvom merenju izvršimo odgovarajuće merenje na drugoj čestici dobićemo baš rezultat koji smo predvideli na osnovu prvog merenja. Merenje na prvoj i na drugoj čestici su dva događaja koja su razdvojena intervalom prostornog tipa. Pogodnim izborom referentnog sistema možemo da menjamo vremenski redosled događaja. Posmatrano iz jednog referentnog sistema, prvo je izvršeno merenje na prvoj čestici pa potom na drugoj te možemo tvrditi da je merenje na prvoj čestici uzrok promene stanja druge čestice. Iz nekog drugog referentnog sistema, prvo se desilo merenje na drugoj čestici pa potom na prvoj. U ovom sistemu merenje na drugoj čestici je uzrok promene stanja prve čestice. Vidimo da je u ovom slučaju besmisleno govoriti o tome šta je uzrok a šta posledica. Kod bilo kakvih fizičkih interakcija, uzrok i posledica su jasno određeni. Zaključujemo da kvantna korelacija ne izaziva fizičke interakcije, pa tako ni ne dolazi do narušavanja lokalnosti. I kakva je konačna presuda? Kvantna mehanika je (ne)lokalna teorija. Jasno je zašto je lokalna – zbog svih gore navedenih razloga. Nelokalna je jer u određenim situacijama dolazi do trenutne promene stanja sistema na proizvoljno velikoj udaljenosti. Bitno je primetiti da dolazi do trenutne promene **stanja**. Pošto stanja predstavljaju samo naš model pomoću kog opisujemo realnost, usred nelokalnih interakcija dolazi do promena našeg modela, a to ne znači da dolazi do promena na posmatranom fizičkom sistemu.

2. Problem merenja

Narednih nekoliko poglavlja bavićemo se problemom merenja. Ovo je sigurno jedno od najznačajnijih pitanja sa kojima se sreće kvantna mehanika. Jedan deo naučne populacije tvrdi da je razmišljanje o ovom problemu besmisleno i da je kvantna mehanika samo alat, istina veoma efikasan alat. Po njima, zadatak fizičara je da odgovore na pitanje „kako?“ i osnovni princip kome se povinuju je „Shut up and calculate!“[14]. Drugi deo naučne populacije je zaokupljen pitanjem „zašto?“ i on je uložio ogroman trud da se apstraktnim konceptima, koji čine elemente matematičkog formalizma teorije, pripiše fizičko značenje. Problem merenja je svakako jedan od najvećih izazova sa kojim su se sreli i naredne strane se mogu shvatiti kao uvod u ovaj, još uvek veoma aktuelan problem.

Opisaćemo proces merenja iz ugla standardne interpretacije i primenom modela kvantnog merenja uočićemo gde dolazi do pojave problema merenja. Kako kolaps stanja igra bitnu ulogu u opisu procesa merenja, biće razmotrene njegove osnovne osobine i opravdanost njegovog uvođenja kao dodatnog postulata. Za kraj ove glave ostavljen je program dekoherencije. Iako nema velikih izgleda da će dekoherencija doneti dugo traženi odgovor, karakteriše je radikalno drugačiji pristup procesu merenja i ulozi okoline u njemu, te će zato biti ukratko opisana.

2.1 Standardna interpretacija i proces merenja

Od začetka kvantne teorije do danas najviše pristalica ima standardna kvantna teorija, tj. Kopenhagenska interpretacija. Osnovna odlika ove interpretacije je podela sveta na dva dela – na mikrosvet, koji se opisuje kvantnom mehanikom, i na makrosvet koji se opisuje zakonima klasične fizike. Boru, koji je osnivač ove interpretacije, ovakva podela je imperativ jer pri bilo kakvom merenju nad mikroobjektima, rezultati koje dobijamo moraju biti tumačeni i preneseni dalje jezikom koji je nastao u svetu koji ne zna za druge zakone do klasičnih. Taj zahtev, da postavka i rezultati eksperimenta moraju biti objašnjeni svakodnevnim jezikom, Boru je poslužio kao opravdanje za razdvajanje sveta na dva dela.

Ova, u suštini postulirana, podela najveći uticaj ima na opis procesa merenja. Merni aparati pripadaju klasičnom svetu i stoga se ne opisuju kvantnomehanički. S druge strane, kao što je poznato, javlja se neophodnost uvođenja postulata o redukciji talasnog paketa kako bi teorija bila u stanju da opiše proces dobijanja rezultata. Mehanizam kolapsa je nepoznat i zato se to uvodi kao dodatni postulat.

Sad vidimo da u Kopenhagenskoj interpretaciji postoje dva vida evolucije stanja – kontinualni, koji se opisuje Šredingerovom jednačinom i kojim rukovodi Hamiltonijan interakcije, i skokovit, kojim superpozicija kolabira u neko od svojstvenih stanja opservable.

Poslednjih sedamdesetak godina, u okviru alternativnih interpretacija kvantne mehanike, pojavilo se mnogo kritika na ovakav pogled na proces merenja. Sve je počelo od Šredingera[15] i njegove naširoko poznate priče o mački. Postavio je pitanje koje se u suštini prirodno nameće i tako započeo još nedovršen niz rasprava na temu procesa merenja. Njegov rezon je krajnje logičan – ako kvantna teorija opisuje mikrosisteme (elektrone, atome, molekule i td.), a svi makroobjekti se sastoje od velikog broja atoma i molekula, onda se i merni uređaji, bar u načelu, mogu opisati talasnom funkcijom. Pri opisivanju procesa merenja moraju se uzeti i stanja aparata u obzir i rezultat merenja, kao krajnji ishod, dobio bi se kao posledica evolucije

[14] Slogan koji se često pripisuje Ričardu Fejnmanu ili Polu Diraku, a u stvari ga je izgovorio David Mermin

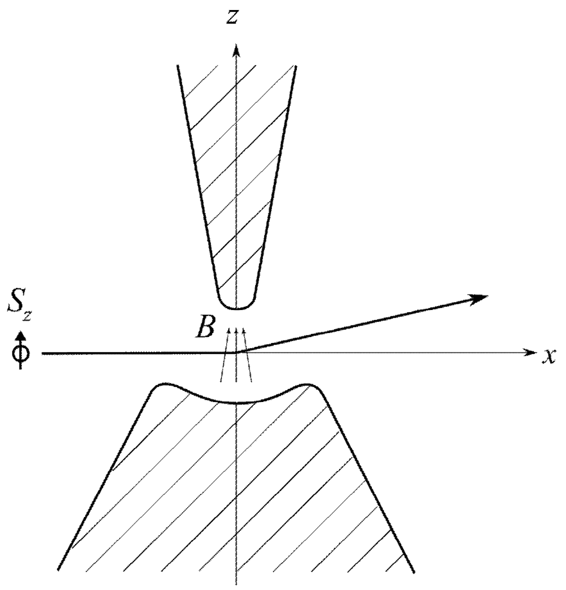
[15] Šredinger je bio veliki protivnik redukcionog postulata

zajedničke funkcije stanja sistem-aparat. Kako je ova evolucija deterministička postavlja se pitanje odakle potiče probabilistički karakter kvantne teorije.

2.1.1 Model merenja

Pokazaćemo kako u kvantnom merenju superpozicija stanja mikroobjekata putem procesa preplitanja biva pojačana u svet makroobjekata. Na kraju se dobijaju neklasična stanja koja ne odgovaraju onome što se zapaža na kraju procesa merenja. Razmotrićemo ovo na idealnom slučaju merenja u kom posmatrani sistem ne trpi promene tokom interakcije sa aparatom.

Kako bismo definisali korake koji čine kvantno merenje analiziraćemo jedan standardni kvantni eksperiment – Štern-Gerlahovo merenje spina (Slika 5).



Slika 5. Šema Štern-Gerlahovog eksperimenta

Atom sa *z*-komponentnom spina, S_z, se kreće duž *x*-ose i nailazi na nehomogeno magnetno polje. Hamiltonijan interakcije je $H_i = -\mu\vec{S}\cdot\vec{B}$, što u stvari predstavlja potencijalnu energiju magnetnog dipola u magnetnom polju. U Hajzenbergovoj slici, promena imulsa atoma se može naći pomoću Hajzenbergove jednačine kretanja,

$$\frac{d\hat{\vec{p}}}{dt} = \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_i, \hat{\vec{p}}\right] = -\frac{i}{\hbar}\frac{\hbar}{i}\nabla\hat{H}_i = \mu\nabla\left(\vec{S}\cdot\vec{B}\right)$$ [16].

Radi jednostavnosti, pretpostavimo da

$$\vec{B} = B_z\vec{e}_z = Bz\vec{e}_z$$ [17].

Onda dobijamo

$$\frac{d\hat{p}_z}{dt} = \mu\frac{\partial B_z}{\partial z}\hat{S}_z = \mu B\hat{S}_z, \text{ tj. } \hat{p}_z = \mu B\hat{S}_z T,$$

gde je *T* vreme koje atom provede u magnetnom polju, tj. vreme interakcije. Vidimo da se usled interakcije sa magnetnim poljem snop atoma cepa na više zraka, za svaku vrednost S_z.

Iz ovog primera se da zaključiti:

1) Vreme merenja (T) je ograničeno. Sve ostalo vreme, atom i merni instrument su odvojene celine koje ni na koji način ne interaguju.

2) Nastaje uočljiva promena (skretanje zraka) koja odgovara vrednosti opservable (S_z).

3) Ne dolazi do promene posmatrane opservable.

[16] Ovde je korišćena osobina komutatora impulsa i funkcije koordinate,

$$\left[\hat{p}, \hat{f}(r)\right]\Psi = \frac{\hbar}{i}\nabla\left(\hat{f}(r)\Psi\right) - \frac{\hbar}{i}\hat{f}(r)\nabla\Psi = \frac{\hbar}{i}\left(\nabla\hat{f}(r)\right)\Psi.$$

[17] Ovo je samo aproksimacija. Ovakvo polje ne zadovoljava Maksvelovu jednačinu $div\vec{B} = 0$.

4) U principu, vreme interakcije T može biti proizvoljno malo (ako je $\frac{\partial B_z}{\partial z}$ veliko). Brza merenja su poželjna. Na primer, merenje položaja neke čestice menja njen impuls i sa vremenom će doći i do promene položaja. Nedovoljno brzo merenje bi izmerilo neki promenjen položaj.

5) Merenje je kvantni proces. Atom posmatramo kao talasni paket čijom evolucijom rukovodi Hamiltonijan interakcije.

Na osnovu izvučenih stavki možemo da izgradimo model merenja neke opservable A_S. Tokom merenja deluje interakcioni Hamiltonijan H_i. Zbog (3) $\hat{H}_i$ i $\hat{A}_S$ moraju komutirati, znači $\hat{H}_i = f\left(\hat{A}_S\right)$. Zbog (2) u $\hat{H}_i$ mora $\hat{A}_S$ biti upareno sa nekom opservablom koja se menja u toku merenja. Najjednostavnije je pisati $\hat{A}_S\hat{P}_D$, gde je $\hat{P}_D$ neka nezavisna opservabla. $\hat{P}_D$ ne mora nužno biti pripisan nekom drugom sistemu. On može opisivati stepen slobode te iste čestice koja se posmatra, ali koji je nezavisan od posmatranog stepena slobode. Pri merenju spina, $\hat{P}_D$ može biti operator koordinate ili impulsa te čestice. Zbog (1) moramo ograničiti vreme trajanja interakcije. $\hat{A}_S\hat{P}_D$ množimo sa $g(t)$ koja je različita od nule samo u intervalu $0<t<T$ i za koju važi $\int_{-\infty}^{\infty} g(t)\,dt = \int_0^T g(t)\,dt = g_0$. Najzad, zbog (4) zahtevamo $T \to 0$. Ovakva merenja se nazivaju „impulsna" merenja.

Za interakcioni Hamiltonijan dobijamo

$$\hat{H}_i(t) = g(t)\hat{A}_S\hat{P}_D.$$

Ukupni Hamiltonijan sadrži i Hamiltonijane sistema i detektora,

$$\hat{H} = \hat{H}_D + \hat{H}_S + \hat{H}_i(t).$$

Kako ovaj model radi? Uvodimo još jednu opservablu $\hat{Q}_D$ koja je konjugovana od $\hat{P}_D$, tj. važi $\left[\hat{Q}_D, \hat{P}_D\right] = i\hbar$. Pripremimo detektor u početno stanje sa definisanom vrednošću $\hat{Q}_D$, na primer $Q_D(0) = 0$. Atom je u svojstvenom stanju operatora $\hat{A}_S$. Promena $\hat{Q}_D$ tokom merenja se može izraziti pomoću Hajzenbergove jednačine kretanja,

$$\hat{Q}_D(T) - \hat{Q}_D(0) = \int_0^T dt \frac{d\hat{Q}_D}{dt} = \int_0^T dt \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}, \hat{Q}_D\right].$$

Komutator, kada se zameni Hamiltonijan, dobija vrednost

$$\left[\hat{H}, \hat{Q}_D\right] = \left[\hat{H}_D, \hat{Q}_D\right] + \left[\hat{H}_S, \hat{Q}_D\right] + \left[\hat{H}_i, \hat{Q}_D\right] = \left[\hat{H}_D, \hat{Q}_D\right] + 0 + \left[g(t)\hat{A}_S\hat{P}_D, \hat{Q}_D\right] =$$
$$= \left[\hat{H}_D, \hat{Q}_D\right] + g(t)\hat{A}_S\left[\hat{P}_D, \hat{Q}_D\right] = \left[\hat{H}_D, \hat{Q}_D\right] - i\hbar g(t)\hat{A}_S$$

Promena $\hat{Q}_D$ je sada jednaka

$$\hat{Q}_D(T) = \int_0^T dt \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_D, \hat{Q}_D\right] + \hat{A}_S \int_0^T g(t)\,dt = \int_0^T dt \frac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_D, \hat{Q}_D\right] + g_0 \hat{A}_S .$$

U slučaju $T \to 0$, integral zanemarujemo i ostaje samo

$$\hat{Q}_D(T) = g_0 \hat{A}_S .$$

Ako Q_D predstavlja položaj pointera[18] detektora (ili položaj same čestice), vidimo da će on nakon merenja zavisiti od vrednosti merene opservable.

Razmotrimo ovu priču i u Šredingerovoj slici, gde stanja evoluiraju tokom vremena. Spin atoma pre ulaska u magnetno polje je predstavljen stanjem $|z_+\rangle$, gde važi da su $|z_+\rangle$ i $|z_-\rangle$ svojstvena stanja operatora komponente impulsa $\hat{S}_z$ ($\hat{A}_S \to \hat{S}_z$). Neka je početno stanje pointera $|0\rangle$ i neka važi $\hat{Q}_D|0\rangle = 0$. Ukupno stanje atom-detektor je predstavljeno proizvodom $|\Psi(0)\rangle = |z_+\rangle \otimes |0\rangle \equiv |z_+, 0\rangle$.

Evolucijom stanja tokom merenja upravlja operator

$$\hat{U} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T \hat{H}_i dt\right) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T g(t)\,\hat{S}_z \hat{P}_D dt\right) = e^{-\frac{i}{\hbar} g_0 \hat{S}_z \hat{P}_d} .$$

Nakon vremena T ukupno stanje sistema će biti

$$|\Psi(T)\rangle = \hat{U}|\Psi(0)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} g_0 \hat{S}_z \hat{P}_d}|z_+, 0\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar} g_0 \hat{P}_D \frac{\hbar}{2}}|z_+, 0\rangle = |z_+\rangle e^{-\frac{i}{\hbar} g_0 \hat{P}_D \frac{\hbar}{2}}|0\rangle .$$

Novo stanje detektora zavisi od dobijene vrednosti komponente impulsa S_z, tj. od $\frac{\hbar}{2}$ u našem slučaju. U specijalnom slučaju kada su $\hat{Q}_D$ i $\hat{P}_D$ baš operatori položaja i impulsa, za konačno stanje dobijamo

$$|\Psi(T)\rangle = \left|z_+, g_0 \frac{\hbar}{2}\right\rangle$$ [19].

Dakle, pointer će biti pomeren za $g_0 \frac{\hbar}{2}$. Ukoliko je početno stanje ukupnog sistema $|z_-, 0\rangle$, konačno stanje će biti $\left|z_-, -g_0 \frac{\hbar}{2}\right\rangle$.

Šta ako je atom u superpoziciji? Početno stanje će biti predstavljeno funkcijom

---

[18] Usled nedostatka pogodnog prevoda, u radu će se koristiti ovaj izraz. On označava sve ono što dobijamo na izlazu mernog uređaja, tj. ono što na uređaju očitavamo.

[19] Korišćena je sledeća osobina Furije transforma,

$$e^{ip\frac{L}{\hbar}} f(x) = e^{ip\frac{L}{\hbar}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \tilde{f}(p) e^{ip\frac{x}{\hbar}} dp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int \tilde{f}(p) e^{ip\frac{x+L}{\hbar}} dp = f(x+L)$$, gde su $f(x)$ i $\tilde{f}(p)$ par Furije transforma.

$\left|\Psi(0)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z_+\right\rangle + \left|z_-\right\rangle\right)\otimes\left|0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z_+,0\right\rangle + \left|z_-,0\right\rangle\right)$. Operator $\hat{U}$ je linearan pa ćemo za krajnje stanje dobiti

$\left|\Psi(T)\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z_+, g_0\frac{\hbar}{2}\right\rangle + \left|z_-, -g_0\frac{\hbar}{2}\right\rangle\right)$. Merni uređaj je u superpoziciji! Dobijeno stanje je spleteno.

Razmotrimo još jedan konkretan primer. Opet ćemo meriti spin atoma, ali u ovom slučaju neka merni instrument bude spin neke druge čestice (sonde). Pored spina atoma, $\hat{S}_z$, definišemo i Paulijeve spinske matrice mernog uređaja, $\hat{\sigma}_x^D$, $\hat{\sigma}_y^D$ i $\hat{\sigma}_z^D$. Pored $\hat{S}_z$, Hamiltonijan će sadržati i $\hat{\sigma}_y^D$, $\hat{H}_i = g(t)\hat{\sigma}_y^D\hat{S}_z$. Početno stanje mernog uređaja će biti $\left|0\right\rangle_D \equiv \left|x_+\right\rangle_D$. Evolucijom ukupnog sistema rukovodi operator

$$\hat{U} = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_0^T g(t)\hat{\sigma}_y^D\hat{S}_z\right) = e^{-\frac{i}{\hbar}g_0\hat{\sigma}_y^D\hat{S}_z}.$$

Ukoliko je atom u stanju $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z_+\right\rangle + \left|z_-\right\rangle\right)$, evolucija će teći na sledeći način:

$$\hat{U}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z_+\right\rangle + \left|z_-\right\rangle\right)\left|x_+\right\rangle_D\right) = e^{-\frac{i}{\hbar}g_0\hat{\sigma}_y^D\hat{S}_z}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z_+\right\rangle\left|x_+\right\rangle_D + \left|z_-\right\rangle\left|x_+\right\rangle_D\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z_+\right\rangle e^{-i\frac{g_0}{2}\hat{\sigma}_y^D}\left|x_+\right\rangle_D + \left|z_-\right\rangle e^{i\frac{g_0}{2}\hat{\sigma}_y^D}\left|x_+\right\rangle_D\right)$$

Moramo izraziti $\left|x_+\right\rangle_D$ preko svojstvenih vektora operatora $\hat{\sigma}_y^D$, $\left|y_+\right\rangle_D$ i $\left|y_-\right\rangle_D$.

$$\left|x_+\right\rangle_D = a\left|y_+\right\rangle_D + b\left|y_-\right\rangle_D,$$

$$a = \left\langle y_+ | x_+\right\rangle_D = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1-i) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}},$$

$$b = \left\langle y_- | x_+\right\rangle_D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}(1+i) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}},$$

$$\left|x_+\right\rangle_D = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\left|y_+\right\rangle_D + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\left|y_-\right\rangle_D.$$

Sada možemo da izračunamo

$$e^{-i\frac{g_0}{2}\hat{\sigma}_y^D}\left|x_+\right\rangle_D = e^{-i\frac{g_0}{2}\hat{\sigma}_y^D}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}\left|y_+\right\rangle_D + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}\left|y_-\right\rangle_D\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{-i\frac{g_0}{2}}\left|y_+\right\rangle_D + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{g_0}{2}}\left|y_-\right\rangle_D = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{g_0}{2}\right)}\left|y_+\right\rangle_D + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{g_0}{2}\right)}\left|y_-\right\rangle_D,$$

$$e^{i\frac{g_0}{2}\hat{\sigma}_y^D}\left|x_+\right\rangle_D=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{4}}e^{i\frac{g_0}{2}}\left|y_+\right\rangle_D+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\frac{g_0}{2}}\left|y_-\right\rangle_D=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{g_0}{2}\right)}\left|y_+\right\rangle_D+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{g_0}{2}\right)}\left|y_-\right\rangle_D.$$

Ako izaberemo $g_0=\frac{\pi}{2}$, dobijamo

$$e^{-i\frac{g_0}{2}\hat{\sigma}_y^D}\left|x_+\right\rangle_D=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left|y_+\right\rangle_D+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)}\left|y_-\right\rangle_D=-\frac{i}{\sqrt{2}}\left|y_+\right\rangle_D+\frac{i}{\sqrt{2}}\left|y_-\right\rangle=\left|z_-\right\rangle_D,$$

$$e^{i\frac{g_0}{2}\hat{\sigma}_y^D}\left|x_+\right\rangle_D=\frac{1}{\sqrt{2}}\left|y_+\right\rangle_D+\frac{1}{\sqrt{2}}\left|y_-\right\rangle_D=\left|z_+\right\rangle_D$$

Vidimo da izraz $e^{\pm i\frac{g_0}{2}\hat{\sigma}_y^D}$ predstavlja operator rotacije spinora za ugao $\pm g_0$ oko y-ose. Sistem će nakon merenja biti u stanju

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z_+\right\rangle\left|z_-\right\rangle_D+\left|z_-\right\rangle\left|z_+\right\rangle_D\right).$$

Sada se daleko jasnije vidi da se nakon merenja dobija spleteno, tj. neseparabilno stanje.

2.1.2 Problem merenja

Na osnovu svega izloženog u prethodnom odeljku, proces merenja se može opisati na sledeći način. Mikroskopski sistem *S*, predstavljen bazisnim vektorima $\left|s_n\right\rangle$ u Hilbertovom prostoru H_S, interaguje sa mernim aparatom *A*, predstavljenog bazisnim vektorima $\left|a_n\right\rangle$ u prostoru H_A. $\left|a_n\right\rangle$ predstavljaju makroskopski različita stanja mernog uređaja koja respektivno odgovaraju različitim stanjima $\left|s_n\right\rangle$.

Za početak, pretpostavimo da je sistem *S* u svojstvenom stanju. Stanja kompleta sistem--aparat pripadaju prostoru predstavljenom direktnim proizvodom dva Hilbertova prostora, $H_S\otimes H_A$. Usled interakcije, stanje *SA* će se razvijati:

$\left|s_n\right\rangle\left|a_i\right\rangle\rightarrow\left|s_n\right\rangle\left|a_n\right\rangle$, gde $\left|a_i\right\rangle$ predstavlja početno stanje aparata.

Ako je, pak, *S* u mikroskopskoj superpoziciji $\sum_n c_n\left|s_n\right\rangle$, onda će usled linearnosti Šredingerove jednačine totalni sistem *SA* evoluirati,

$$\left(\sum_n c_n\left|s_n\right\rangle\right)\left|a_i\right\rangle\xrightarrow{t}\sum_n c_n\left|s_n\right\rangle\left|a_n\right\rangle.$$

Ovakva evolucija se najčešće naziva predmerenje jer rezultat na desnoj strani još ne odgovara onome šta dobijamo na kraju procesa merenja. Desna strana jednačine predstavlja čisto stanje, tj. superpoziciju stanja sistem-aparat. Poznato je da se čisto stanje (superpozicija) razlikuje od mešanih stanja (ansambla više stanja). Kod mešanih stanja, sistem se nalazi u određenom stanju, ali nam merenje ne daje dovoljno informacija da znamo u kojem i otud statistička verovatnoća dobijanja nekog rezultata. Razlika se može pokazati putem eksperimenata interferencije. U našem slučaju, dobijena superpozicija se ne može tumačiti u svetlu ansambalske interpretacije. Inače bi sledilo da je dobijena superpozicija u stvari mešavina određenih stanja i da merenjem možemo da izdvojimo posebne podansamble. Vraćajući se unazad, zbog jednoznačnosti vremenske evolucije, dobili bismo i sa leve strane mešavinu stanja, a to ne odgovara zadatom problemu (sa leve strane znamo da imamo superpoziciju mikroskopskih stanja).

Sa druge strane, ako bi se predstavila šema realnog merenja ona bi izgledala ovako:

$$\left(\sum_n c_n |s_n\rangle\right)|a_i\rangle \xrightarrow{t} \begin{cases} |s_1\rangle|a_1\rangle \text{ sa verovatnoćom } |c_1|^2 \\ |s_2\rangle|a_2\rangle \text{ sa verovatnoćom } |c_2|^2 \\ \ldots \end{cases}$$

Prateći logiku kvantne mehanike, nakon merenja trebalo bi da imamo superpoziciju stanja sistem-aparat. Kako bi se ovaj rezultat povezao sa rezultatima realnog eksperimenta (statistička mešavina stanja), mora se ili uvesti dodatni mehanizam (kolaps superpozicije) ili na određen način interpretirati dobijena superpozicija. Ovaj problem je ono što se najčešće naziva problemom merenja. U literaturi se on često nalazi pod imenom – *problem određenih stanja*. Drugi problem koji ulazi u priču je mogućnost proizvoljnog razlaganja desne strane jednačine

$$\left(\sum_n c_n |s_n\rangle\right)|a_i\rangle \xrightarrow{t} \sum_n c_n |s_n\rangle|a_n\rangle.$$

Odavde sledi nedovoljno dobra definisanost merene opservable. To je takozvani *problem preferiranog bazisa*. O problemu preferiranog bazisa će biti više reči na kraju ove glave, u okviru priče o teoriji dekoherencije.

Kako bi se rešio problem određenih stanja, unutar Kopenhagenske interpretacije je dodat još jedan postulat – postulat o redukciji stanja. Mehanizam redukcije obezbeđuje nastanak klasičnih stanja na kraju merenja, tj. prelaz superpozicije stanja u statističku mešavinu. Mnogi autori komentarišu opravdanost uvođenja ovog postulata. Po njima je on uveden veštački kako bi se "zakrpila" teorija. Narednih nekoliko poglavlja se bavi baš kolapsom stanja. Razmotrićemo njegove najbitnije osobine, kao i neke za ili protiv argumente.

2.2 O kolapsu

Videli smo da u standardnoj kvantnoj teoriji postoje dva tipa evolucije sistema:

1. kontinualna evolucija koju opisuje Šredingerova jednačina,

$$|\Psi(t_1)\rangle \to |\Psi(t_2)\rangle$$

2. skokovita promena do koje dolazi tokom merenja,

$$|\Psi\rangle \to |b_i\rangle, \text{ gde važi } |\Psi\rangle = \sum_i c_i |b_i\rangle$$

Kada redukcioni postulat stupa na scenu? Kopenhagenska škola tvrdi da do toga dolazi kada makroskopski (klasični) sistem interaguje sa mikrosistemom. A može li se eksperimentalno utvrditi kada je došlo do kolapsa? Pokazaćemo da u principu može, ali u praksi nikada.

Posmatramo spin elektrona koji je pripremljen tako da mu je stanje predstavljeno superpozicijom,

$$\left|\Psi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left|z_+\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|z_-\right\rangle.$$

Ovo je stanje koje odgovara slučaju kada je elektron prepariran u stanje sa spinom orijentisanim duž *x*-ose, a mi posmatramo spin duž *z*-ose.

Elektron nailazi na detektor sa dva moguća stanja, $\left|D_{z+}\right\rangle$ i $\left|D_{z-}\right\rangle$. Neka je početno stanje $\left|D_{z+}\right\rangle$. Ako je elektron u stanju $\left|z_+\right\rangle$ neće doći do promene stanja detektora. Ukoliko je elektron u stanju $\left|z_-\right\rangle$, detektor prelazi u stanje $\left|D_{z-}\right\rangle$. Stanje ukupnog sistema elektron-detektor i njegova evolucija teku na sledeći način,

$$\left|\Phi\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z_+\right\rangle + \left|z_-\right\rangle\right)\left|D_{z+}\right\rangle \xrightarrow{t_0 \to t_1} \frac{1}{\sqrt{2}}\left|z_+\right\rangle\left|D_{z+}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|z_-\right\rangle\left|D_{z-}\right\rangle.$$

Ako kolaps nastupa u trenutku t_1, tada će stanje biti ili $\left|z_+\right\rangle\left|D_{z+}\right\rangle$ ili $\left|z_-\right\rangle\left|D_{z-}\right\rangle$ sa verovatnoćama $\frac{1}{2}$. Ako kolaps nastupa nakon t_1, u trenutku t_1 imaćemo i dalje superpoziciju $\frac{1}{\sqrt{2}}\left|z_+\right\rangle\left|D_{z+}\right\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\left|z_-\right\rangle\left|D_{z-}\right\rangle$.

Ovo neseparabilno stanje sistema elektron-detektor može posedovati definisane dvočestične osobine i ako ih zasebno ni elektron ni detektor nemaju. Ako ovu osobinu nemaju definisanu ni jedno od dva moguća stanja nakon kolapsa, možemo pomoću nje razlikovati superpoziciju od kolabiranih stanja.

Nad elektronom možemo izvršiti merenje vrednosti projekcije spina na *z*-osu pomoću operatora $\hat{S}_z$, ali isto tako i projekciju spina na *x*-osu pomoću operatora $\hat{S}_x$. Za date operatore i svojstvena stanja koja im odgovaraju važi sledeće:

$$\begin{aligned}\hat{S}_z\left|z_+\right\rangle &= +1\left|z_+\right\rangle \\ \hat{S}_z\left|z_-\right\rangle &= -1\left|z_-\right\rangle\end{aligned}, \quad \begin{aligned}\hat{S}_x\left|x_+\right\rangle &= +1\left|x_+\right\rangle \\ \hat{S}_x\left|x_-\right\rangle &= -1\left|x_-\right\rangle\end{aligned}, \quad \begin{aligned}\left|z_+\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|x_+\right\rangle + \left|x_-\right\rangle\right) \\ \left|z_-\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|x_+\right\rangle - \left|x_-\right\rangle\right)\end{aligned} \quad \text{i} \quad \begin{aligned}\left|x_+\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z_+\right\rangle + \left|z_-\right\rangle\right) \\ \left|x_-\right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z_+\right\rangle - \left|z_-\right\rangle\right)\end{aligned}$$

Detektorska stanja su svojstvena stanja operatora detektorskih opservabli, $\hat{\Delta}_z$ i $\hat{\Delta}_x$. Stanja detektora možemo definisati na sledeći način:

$$\left|D_{z+}\right\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad \left|D_{z-}\right\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, \quad \left|D_{x+}\right\rangle = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}, \quad \left|D_{x-}\right\rangle = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$$

$$\hat{\Delta}_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}, \quad \hat{\Delta}_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$$

Lako je proveriti da važi sledeće:

$$\hat{\Delta}_z |D_{z+}\rangle = +1|D_{z+}\rangle \quad \hat{\Delta}_x |D_{x+}\rangle = +1|D_{x+}\rangle \quad |D_{x+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|D_{z+}\rangle + |D_{z-}\rangle\right)$$
$$\hat{\Delta}_z |D_{z-}\rangle = -1|D_{z-}\rangle, \quad \hat{\Delta}_x |D_{x-}\rangle = -1|D_{x-}\rangle, \quad |D_{x-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|D_{z+}\rangle - |D_{z-}\rangle\right) \quad \text{i}$$

$$|D_{z+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|D_{x+}\rangle + |D_{x-}\rangle\right)$$
$$|D_{z-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|D_{x+}\rangle - |D_{x-}\rangle\right)$$

Ako želimo da odredimo vrednost projekcije spina na *x*-osu, moramo na stanje elektron--detektor sistema primeniti dvočestični operator tipa $\hat{S}_x \otimes \hat{I}^D$. Ako želimo da odredimo vrednost detektorske varijable pri merenju projekcije na x-osu (da pročitamo rezultat), moramo koristiti operator tipa $\hat{I}^e \otimes \hat{\Delta}_x$. Pokazaćemo da razlika ova dva operatora, $\hat{I}^e \otimes \hat{\Delta}_x - \hat{S}_x \otimes \hat{I}^D$, može biti upotrebljena za razlikovanje superpozicije od kolabiranih stanja.

U slučaju da u trenutku t_1 nije došlo do kolapsa, stanje ukupnog sistema predstavljeno je superpozicijom

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z_+\rangle|D_{z+}\rangle + |z_-\rangle|D_{z-}\rangle\right).$$

Da bismo mogli da upotrebimo gornji operator, moramo ovo stanje predstaviti preko svojstvenih vektora operatora $\hat{S}_x$ i $\hat{\Delta}_x$.

$$|\Phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[|z_+\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|D_{x+}\rangle + |D_{x-}\rangle\right) + |z_-\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|D_{x+}\rangle - |D_{x-}\rangle\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|D_{x+}\rangle\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z_+\rangle + |z_-\rangle\right)\right] + \frac{1}{\sqrt{2}}|D_{x-}\rangle\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z_+\rangle - |z_-\rangle\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|x_+\rangle|D_{x+}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|x_-\rangle|D_{x-}\rangle$$

Kad primenimo naš dvočestični operator na ovo stanje

$$\left(\hat{I}^e \otimes \hat{\Delta}_x - \hat{S}_x \otimes \hat{I}^D\right)|\Phi\rangle = \hat{I}^e \otimes \hat{\Delta}_x|\Phi\rangle - \hat{S}_x \otimes \hat{I}^D|\Phi\rangle =$$
$$= \hat{I}^e \otimes \hat{\Delta}_x\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|x_+\rangle|D_{x+}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|x_-\rangle|D_{x-}\rangle\right] - \hat{S}_x \otimes \hat{I}^D\left[\frac{1}{\sqrt{2}}|x_+\rangle|D_{x+}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|x_-\rangle|D_{x-}\rangle\right] =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}}|x_+\rangle|D_{x+}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|x_-\rangle|D_{x-}\rangle - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}|x_+\rangle|D_{x+}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|x_-\rangle|D_{x-}\rangle\right) = 0 = 0|\Phi\rangle$$

Vidimo da je stanje predstavljeno superpozicijom svojstveno stanje našeg dvočestičnog operatora.

Ako je u trenutku t_1 došlo do kolapsa, stanje sistema će biti opisano ili sa $|z_+\rangle|D_{z+}\rangle$ ili sa $|z_-\rangle|D_{z-}\rangle$. Proverimo šta se dešava u ovom slučaju.

$$|z_+\rangle|D_{z+}\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|x_+\rangle+|x_-\rangle\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|D_{x+}\rangle+|D_{x-}\rangle\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(|x_+\rangle|D_{x+}\rangle+|x_+\rangle|D_{x-}\rangle+|x_-\rangle|D_{x+}\rangle+|x_-\rangle|D_{x-}\rangle\right)$$

Merenje u ovom slučaju daje

$$\left(\hat{I}^e\otimes\hat{\Delta}_x-\hat{S}_x\otimes\hat{I}^D\right)|z_+\rangle|D_{z+}\rangle=\hat{I}^e\otimes\hat{\Delta}_x|z_+\rangle|D_{z+}\rangle-\hat{S}_x\otimes\hat{I}^D|z_+\rangle|D_{z+}\rangle=$$
$$=\frac{1}{2}\hat{I}^e\otimes\hat{\Delta}_x\left(|x_+\rangle|D_{x+}\rangle+|x_+\rangle|D_{x-}\rangle+|x_-\rangle|D_{x+}\rangle+|x_-\rangle|D_{x-}\rangle\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\hat{S}_x\otimes\hat{I}^D\left(|x_+\rangle|D_{x+}\rangle+|x_+\rangle|D_{x-}\rangle+|x_-\rangle|D_{x+}\rangle+|x_-\rangle|D_{x-}\rangle\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left(|x_+\rangle|D_{x+}\rangle-|x_+\rangle|D_{x-}\rangle+|x_-\rangle|D_{x+}\rangle-|x_-\rangle|D_{x-}\rangle\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left(|x_+\rangle|D_{x+}\rangle+|x_+\rangle|D_{x-}\rangle-|x_-\rangle|D_{x+}\rangle-|x_-\rangle|D_{x-}\rangle\right)=$$
$$=-|x_+\rangle|D_{x-}\rangle+|x_-\rangle|D_{x+}\rangle\neq\lambda|z_+\rangle|D_{z+}\rangle$$

Slično se dobije i za $|z_-\rangle|D_{z-}\rangle$.

Znači, merenjem naše dvočestične varijable, na osnovu dobijenih vrednosti, možemo odrediti da li je sistem u stanju opisanom superpozicijom ili je do kolapsa već došlo. U prvom slučaju kao rezultat dobijaćemo uvek 0, a u drugom dobijaćemo različite vrednosti. Ukoliko dobijemo vrednost 0, pošto je superponirano stanje svojstveno stanje primenjenog operatora, neće doći do promene stanja i možemo vršiti ponovno merenje u nekom trenutku t_2 i tako dalje, sve dok ne dobijemo drugačiji rezultat. Na taj način možemo odrediti u kom trenutku je došlo do kolapsa.

Međutim, u praksi je ovo neizvodljivo. Pogledajmo šta se dešava ako je pored detektora prisutan samo jedan molekul gasa.

U analizu moramo uključiti talasnu funkciju tog molekula, jer promena stanja detektora menja i stanje molekula. U slučaju da je došlo do kolapsa, ukupan elektron-detektor-molekul sistem nalazi se u stanju $|z_+\rangle|D_{z+}\rangle|m\rangle$ ili u stanju $|z_-\rangle|D_{z-}\rangle|n\rangle$ sa verovatnoćama $\frac{1}{2}$. Ovde su $|m\rangle$ i $|n\rangle$ stanja molekula koja odgovaraju različitim stanjima detektora. U slučaju da do kolapsa nije došlo, stanje je opisano funkcijom $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z_+\rangle|D_{z+}\rangle|m\rangle+|z_-\rangle|D_{z-}\rangle|n\rangle\right)$.

Da bismo razlikovali ova dva slučaja morali bismo koristiti složeniju osobinu ovog trokomponentnog sistema. Sa povećanjem broja stranih podsistema, problem se komplikuje i postaje nerešiv. Kako idealno izolovani sistemi ne postoje, zaključujemo da se ne može odrediti trenutak kolapsa. Ovo je izuzetno nezadovoljavajući rezultat. Kao što smo videli, kolaps dovodi do potpuno drugačije evolucije stanja te njime mora rukovoditi jedan poseban mehanizam. Pored toga što ne znamo kakav je mehanizam kolapsa, ne možemo da odredimo ni trenutak kada taj mehanizam deluje. Ovaj „lov u mutnom“ svakako može da dovede samo u sumnju opravdanost redukcionog postulata. Kao protivteg dosadašnjem razmatranju, izložićemo jednu teoriju koja je pokušala da ponudi odgovore i na pitanja mehanizma kolapsa kao i na pitanje trenutka u kome dolazi do kolapsa.

2.2.1 GRW[20] teorija kolapsa

Primetimo, za početak, da bez obzira koja se osobina mikrosistema posmatra ona je uglavnom, ako ne i uvek, povezana sa pozicijom nekog pointera na detektoru. Drugim rečima, pri merenju dolazi do preplitanja stanja merenog mikrosistema i stanja pointera. Ako bi pointer kolabirao u neko određeno stanje i mikrosistem bi se našao u određenom stanju. Može se uvesti dodatni dinamički zakon koji bi omogućio da osobina pozicije uvek bude određena.

Dodatni GRW dinamički zakon glasi: Tokom bilo kog intervala vremena postoji nenulta verovatnoća da će stanje čestice kolabirati u svojstveno stanje pozicije.

Ako posmatramo sistem od N čestica, on se opisuje talasnom funkcijom $\Psi(t,\vec{r}_1,\vec{r}_2,...,\vec{r}_N)$. Verovatnoća skoka u jedinici vremena data je sa $\frac{N}{\tau}$, gde je τ nova konstanta prirode. Vidimo da što je od većeg broja čestica sačinjen sistem to je verovatnoća skoka veća. Kolabirana funkcija je oblika

$$\Phi = \frac{g(\vec{x}-\vec{r}_i)\Psi(t,\vec{r}_1,...)}{R_i(\vec{x})}.$$

$R_i(\vec{x})$ je faktor norme, tj. važi $\left|R_i(\vec{x})\right|^2 = \int d^3\vec{r}_1...d^3\vec{r}_N \left|g(\vec{x}-\vec{r}_i)\Psi(t,\vec{r}_1,...)\right|^2$. $g(\vec{x})$ je Gausova funkcija, $g(\vec{x}) = K\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right)$, koja je normirana na jedinicu. a je još jedna konstanta prirode. $\vec{r}_i$ je nasumično izabran između svih $\{\vec{r}_1,...,\vec{r}_N\}$ sa verovatnoćom $d^3\vec{x}\left|R_i(\vec{x})\right|^2$.

Za nove konstante prirode GRW predlaže:

$\tau \approx 10^{15} s \approx 10^8$ godina i

$a \approx 10^{-7} m$.

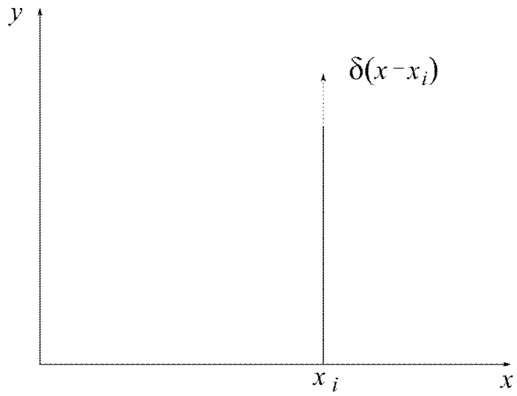
Posmatrajmo sad talasnu funkciju koja opisuje dva sistema, $\Phi(\vec{s}_1,...,\vec{s}_L)\Omega(\vec{r}_1,...,\vec{r}_M)$, gde je L proizvoljno veliko, a M veoma, veoma veliko. Funkcija Φ može opisivati mali sistem poput atoma ili molekula koji je privremeno izolovan od ostatka sveta. GRW procesi za dve posmatrane funkcije su nezavisni pa možemo zanemariti mali sistem (zbog malog L neće doći do kolapsa u realnom vremenu). Međutim, ukoliko je $M \sim 10^{20}$, očekivano vreme života velikog sistema pre kvantnog skoka je $\frac{10^{15}}{10^{20}} = 10^{-5} s$ ili manje.

Posmatrajmo sad superpoziciju $\Phi_1(\vec{s}_1,...,\vec{s}_L)\Omega_1(\vec{r}_1,...,\vec{r}_M) + \Phi_2(\vec{s}_1,...,\vec{s}_L)\Omega_2(\vec{r}_1,...,\vec{r}_M)$.

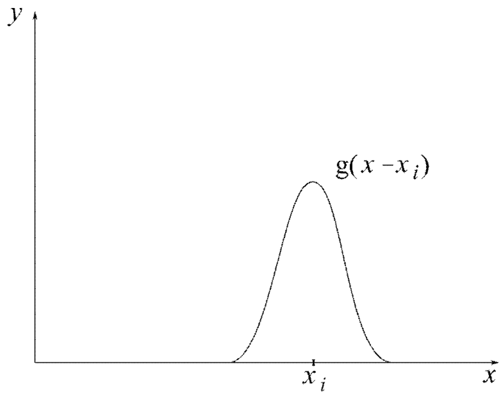
[20] G.C. Ghirardi, A. Rimini and T. Weber, A Model for a Unified Quantum Description of Macroscopic and Microscopic Systems, Quantum Probability and Applications, L. Accardi et al. (eds), Springer, Berlin (1985)

Ovakav slučaj možemo dobiti nakon predmerenja. „Izmerena“ je neka osobina malog sistema i usled interakcije instrument, koji predstavlja veliki sistem, prebačen je u jedno od dva stanja, Ω_1 ili Ω_2, koja odgovaraju različitim očitavanjima pointera. Usled makroskopskih razlika između dva stanja instrumenta, za veoma veliki broj argumenata $\vec{r}_i$, množenje funkcije sa $g(\vec{x}-\vec{r}_i)$ će svesti na nulu jedno od dva člana superpozicije (neće doći do preklapanja talasne funkcije i Gausove funkcije). Za vreme reda $10^{-5}s$ superpozicija će se svesti na samo jedan član. Verovatnoća da će jedan član „preživeti“ a da drugi neće je u skladu sa pravilima kvantne teorije, tj. sa Bornovim pravilom.

Početna zamisao GRW trojke je bila da umesto Gausove funkcije koriste Dirakovu delta funkciju. Na ovaj način bi nakon kolapsa dobili funkciju sa tačno određenim položajem, što je u skladu sa klasičnim shvatanjem. Nezgoda sa ovim pristupom je što pripisivanje tačno određene vrednosti položaja pripisuje beskonačnu neodređenost vrednosti impulsa. Usled kolapsa u stanje sa tačno određenim položajem moglo bi doći do narušenja zakona održanja impulsa i/ili energije. Kako bi ovo izbegli, umesto delta funkcije iskorišćena je Gausova funkcija.



Slika 6. Delta funkcija

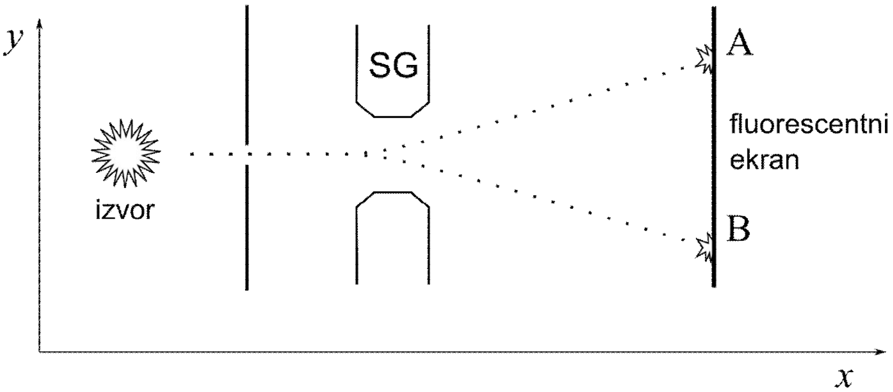


Slika 7. Gausova funkcija

Vidimo da delta funkciju možemo smatrati graničnim slučajem Gausove funkcije kada $a \to 0$ (Slike 6 i 7). Pogodnim izborom $g(x-x_i)$, tj. konstante a, može se smanjiti neodređenost impulsa i/ili energije. Cena je, naravno, da je položaj razmazan oko x_i. Uvođenjem Gausove funkcije, autori GRW teorije su se odrekli tačno definisanog položaja.

Najočigledniji nedostatak GRW teorije tiče se same Gausove funkcije, tj. činjenice da ona nikada praktično nije nula, ma koliko se udaljili od x_i. Kao posledicu dobijamo da se čak i nakon kolapsa čestica nalazi u superpoziciji svojstvenih stanja – postoji nenulta verovatnoća da nadjemo česticu u nekoj tački daleko od centra kolapsa x_i.

Pored ovoga, postavlja se pitanje šta ako koristimo mikroskopski aparat za merenje. U tom slučaju se radi o malom broju čestica i ne možemo očekivati da do kolapsa dođe u realnom vremenu. Drugo pitanje koje možemo postaviti je: da li baš u svim merenjima dolazi do stvaranja korelacija sa osobinom položaja? Ukoliko ne, u tim slučajevima ne možemo primeniti GRW teoriju. Kao primer možemo uzeti Štern-Gerlahov eksperiment u kom kao detektor koristimo fluorescentni ekran.



Slika 8. Šema Štern-Gerlahovog eksperimenta sa fluorescentnim ekranom kao detektorom

Nakon magneta, elektron se kreće gornjom ili donjom putanjom, zavisno od spina, i udara u tačku A ili B. Ni u jednom trenutku neće doći do stvaranja korelacija između spina čestice i pozicije „pointera“. Interakcija čestice i ekrana stvoriće korelacije između spina čestice i energetskih stanja elektrona u atomima ekrana u tački udara. GRW kolaps fluorescentnih elektrona neće izazvati kolaps stanja čestice.

Iako je GRW teorija takođe naišla na svoje sledovanje problema, mnogi priznati naučnici su je podržali. Sam Bel ju je smatrao glavnim kandidatom za odgovor na problem merenja.

Vidimo da redukcioni postulat sa sobom nosi ozbiljne probleme, od kojih je najveći pitanje mehanizma kolapsa. Logično je zapitati se može li se opisati proces merenja bez uvođenja bilo kakvog kolapsa. U nastavku rada ćemo prvo pokazati jedan zanimljiv rezultat koji se tiče redukcionog postulata, a zatim sledi proces merenja iz ugla teorije dekoherencije.

2.2.2 Da li je redukcija talasnog paketa fundamentalni princip ili tek pogodnost?

Kako bismo procenili opravdanost uvođenja redukcionog postulata razmotrićemo proces merenja dve različite veličine nad istim sistemom. Merićemo veličine, *A* i *B*, nad sistemom u stanju $|\Psi_0\rangle$. Odredićemo verovatnoću nalaženja rezultata β_j u drugom merenju ako smo dobili rezultat α_i u prvom merenju, tj. uslovnu verovatnoću $w(\alpha_i|\beta_j)$. Prvo ćemo verovatnoću odrediti koristeći postulat o redukciji, a zatim ćemo isto izračunati bez njega i uporedićemo dobijene rezultate.

a) Sa redukcijom talasnog paketa dobijamo:

Merenjem veličine *A*, dolazi do promene stanja sistema $\hat{A}|\Psi_0\rangle \rightarrow \alpha_i|a_i\rangle$, gde je $|a_i\rangle$ svojstveno stanje operatora $\hat{A}$. Verovatnoća dobijanja rezultata α_i jednaka je $w(\alpha_i) = |\langle a_i|\Psi_0\rangle|^2$.

Između dva merenja protekne neko vreme *t* i za to vreme sistem evoluira u skladu sa Šredingerovom jednačinom

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t}|a_i\rangle .$$

Merenjem veličine B nakon vremena t, dobijamo rezultat β_j sa verovatnoćom $w(\beta_j) = \left|\left\langle b_j \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} \right| a_i \right\rangle\right|^2$.

Verovatnoća dobijanja oba rezultata jednaka je proizvodu pojedinih verovatnoća, tj. dobija se

$$w(\alpha_i|\beta_j) = |\langle a_i | \Psi_0 \rangle|^2 \left|\left\langle b_j \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} \right| a_i \right\rangle\right|^2 .$$

b) Bez redukcije talasnog paketa:

U ovom pristupu moramo kvantnomehanički posmatrati i merne uređaje. Merni uređaj koji meri veličinu A se nalazi u stanju definisanom talasnom funkcijom $|\mathcal{A}_0\rangle$. Drugi merni uređaj je opisan stanjem $|\mathcal{B}_0\rangle$. Početno stanje posmatranog sistema možemo razložiti po svojstvenim stanjima opeatora veličine A, $|\Psi_0\rangle = \sum_i \mu_i |a_i\rangle$.

Stanje kombinacije sistem-aparat A-aparat B, opisano je funkcijom koja ima sledeći oblik

$$|\Phi_0\rangle = \sum_i \mu_i |a_i\rangle \otimes |\mathcal{A}_0\rangle \otimes |\mathcal{B}_0\rangle .$$

Nakon prvog merenja došlo je do interakcije sistema i prvog mernog uređaja, i to takve da nova stanja mernog uređaja u sebi nose informaciju o stanju sistema,

$$|\Phi_0\rangle \to |\Phi_{0+}\rangle = \sum_i \mu_i |a_i\rangle \otimes |\mathcal{A}_i\rangle \otimes |\mathcal{B}_0\rangle .$$

Evolucijom sveukupnog sistema tokom vremena t između dva merenja rukovodi ukupan Hamiltonijan, $\hat{H} = \hat{H}_S + \hat{H}_{\mathcal{A}} + \hat{H}_{\mathcal{B}}$, gde $\hat{H}_{\mathcal{A}}$ i $\hat{H}_{\mathcal{B}}$ predstavljaju Hamiltonijane uređaja A i B. Pretpostavljamo da između merenja ne postoji interakcija između sistema i dva uređaja, kao ni među uređajima.

$$|\Phi(t)\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}t} |\Phi_{0+}\rangle = \sum_i \mu_i e^{-\frac{i}{\hbar}(A_i+B_0)t} \left(e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} |a_i\rangle \right) \otimes |\mathcal{A}_i\rangle \otimes |\mathcal{B}_0\rangle .$$

A_i i B_0 su svojstvene vrednosti Hamiltonijana odgovarajućih uređaja, tj. važi $\hat{H}_A |\mathcal{A}_i\rangle = A_i |\mathcal{A}_i\rangle$ i $\hat{H}_B |\mathcal{B}_0\rangle = B_0 |\mathcal{B}_0\rangle$.

Sledi merenje veličine B. Novo stanje posmatranog sistema moramo razložiti po svojstvenim stanjima operatora veličine B.

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} |a_i\rangle = \sum_j \gamma_{ij} |b_j\rangle, \text{ gde je } \gamma_{ij} = \left\langle b_j \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} \right| a_i \right\rangle .$$

Prilikom merenja dolazi do interakcije između posmatranog sistema i aparata B,

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_{i,j} \mu_i e^{-\frac{i}{\hbar}(A_i+B_0)t} \gamma_{ij} |b_j\rangle \otimes |\mathcal{A}_i\rangle \otimes |\mathcal{B}_0\rangle \ \to \ \sum_{i,j} \mu_i e^{-\frac{i}{\hbar}(A_i+B_0)t} \gamma_{ij} |b_j\rangle \otimes |\mathcal{A}_i\rangle \otimes |\mathcal{B}_j\rangle .$$

Dobili smo konačno stanje sveukupnog sistema. Verovatnoća da prilikom prvog merenja dobijemo α_i, a drugog β_j, jednaka je

$$w\left(\alpha_i \left|\beta_j\right.\right) = \left|\mu_i\right|^2 \left|\gamma_{ij}\right|^2 = \left|\left\langle a_i \left|\Psi_0\right.\right\rangle\right|^2 \left|\left\langle b_j \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_S t} \right| a_i \right\rangle\right|^2 .$$

Oba pristupa procesu merenja daju isti rezultat! Može se zaključiti da je redukcija talasnog paketa samo pogodan alat za uprošćavanje opisa procesa merenja. Koristeći se tim alatom, izbegavamo potrebu za kvantnomehaničkim opisom mernih uređaja, što naravno znatno uprošćava analizu problema. Izložićemo sada jednu teoriju koja u potpunosti odbacuje redukcioni postulat. U ovoj teoriji okolini je data ključna uloga – ona svojim delovanjem prevodi superpoziciju stanja mikrosistema i detektora u klasičnu mešavinu stanja.

2.3 Teorija dekoherencije[21]

U klasičnoj fizici, na okolinu se gleda kao na nešto što je izvor šuma ili poremećaja na sistemu koji hoćemo da merimo. Iz tog razloga je uveden pojam izolovanog sistema na kome se eksperimentalnim putem može doći do poimanja istinske prirode posmatranog sistema. Kvantno preplitanje je pokazalo da su korelacije među interagujućim sistemima od fundamentalnog značaja i da dovode do pojava koje nisu prisutne kod pojedinačnih sistema. Teorija dekoherencije bazira na stavu da je interakcija između sistema i okoline nezaobilazna i da se pri tom javljaju izvesne korelacije koje se ne smeju zanemariti. U ogromnoj većini praktičnih slučajeva interakcija sistema sa okolinom dominira i onemogućava nam da registrujemo čista stanja. Samo u slučaju tipično mikroskopskih fenomena možemo govoriti o izolovanim sistemima, pa se i predviđanja linearne kvantne mehanike samo tada mogu registrovati.

Pokazalo se sa dekoherencija deluje u izuzetno kratkom vremenskom periodu i zahteva prisustvo minimalne okoline. Sa povećanjem sistema efekti dekoherencije rastu, tj. što je veći sistem to brže nastupa dekoherencija. Dokazano je da je za mezoskopske sisteme moguće napraviti konfiguraciju u kojoj bi sistem bio zaštićen od uticaja okoline. U ovakvim slučajevima se dekoherencija može kontrolisano uključivati i tako pratiti nastanak klasičnih stanja.

Prvo što ćemo razmotriti je način na koji teorija dekoherencije teži da prevaziđe problem merenja, tj. problem određenih stanja. Kako se ova teorija ne oslanja na redukcioni postulat, sve što učestvuje u procesu merenja se posmatra kvantnomehanički.

2.3.1 Problem određenih stanja

Modifikovana šema merenja

Ponovo ćemo razmotriti proces kvantnog merenje, samo ćemo ovaj put uračunati i uticaj okoline. Okolini ćemo pripisati oznaku E i početno stanje $\left|e_0\right\rangle$ u Hilbertovom prostoru H_E. Prostor stanja ukupnog objekta sistem-aparat-okolina je dat direktnim proizvodom odgovarajućih Hilbertovih prostora, $H_S \otimes H_A \otimes H_E$. Zbog linearnosti, evolucija ukupnog sistema će teći

[21] Izraz dekoherencija se odnosi na nestanak dijagonalnih (interferencionih) elemenata u statističkom operatoru koji opisuje stanje sistema

$$\left(\sum_n c_n|s_n\rangle\right)|a_i\rangle|e_0\rangle \rightarrow \left(\sum_n c_n|s_n\rangle|a_n\rangle\right)|e_0\rangle \rightarrow \sum_n c_n|s_n\rangle|a_n\rangle|e_n\rangle,$$

gde su stanja $|e_n\rangle$ pripisana različitim makroskopskim stanjima aparata $|a_n\rangle$. Vidimo da je stanje sistema zabeleženo u okolini – stvorena je neseparabilna i nepovratna korelacija između stanja sistem-aparat i stanja okoline. Strelica označava vremensku evoluciju sistema kojom rukovodi Hamiltonijan interakcije. Da bi konačno stanje moglo da se razloži na $\sum_n c_n|s_n\rangle|a_n\rangle|e_n\rangle$, Hamiltonijan mora imati specijalan oblik. Sada sledi osnovna ideja ove teorije.

Dekoherencija i lokalno potiskivanje interferencije

Pri merenju, bilo koja opservacija je ograničena na sistem-aparat komponentu, dok mnogo stepeni slobode okoline ostaje van opsega posmatranja.

Neka operator $\hat{O}_{SA}$ predstavlja opservablu nad *SA* komponentom. Očekivana vrednost opservable se dobija

$$\langle\hat{O}_{SA}\rangle = Tr\left[\hat{\rho}_{SAE}\left(\hat{O}_{SA}\otimes\hat{I}_E\right)\right],$$

gde je statistički operator[22] dat sa

$$\hat{\rho}_{SAE} = \sum_{m,n} c_m c_n^* |s_m\rangle|a_m\rangle|e_m\rangle\langle s_n|\langle a_n|\langle e_n|.$$

Kako opservabla deluje samo nad *SA* komponentom, možemo uvesti redukovani statistički operator. Što se tiče statističkih predviđanja, on će nam dati iste rezultate kao potpuni statistički operator.

$$\hat{\rho}_{SA} = Tr_E\left(\hat{\rho}_{SAE}\right) = \sum_k \langle e_k|\left(\sum_{m,n} c_m c_n^* |s_m\rangle|a_m\rangle|e_m\rangle\langle s_n|\langle a_n|\langle e_n|\right)|e_k\rangle,$$

pa dobijamo

$$\hat{\rho}_{SA} = \sum_{m,n,k} c_m c_n^* |s_m\rangle|a_m\rangle\langle s_n|\langle a_n|\langle e_k|e_m\rangle\langle e_n|e_k\rangle.$$

Kako sredinu u stvari čini ogroman broj podsistema, tj. $|e_n\rangle = |\alpha_n\rangle|\beta_n\rangle|\chi_n\rangle\cdots|\zeta_n\rangle$, pokazalo se da stanja sredine sa vremenom veoma brzo teže ortogonalnosti, $\langle e_n|e_m\rangle(t)\rightarrow\delta_{n,m}$. Ovo je lako razumeti ako se uzme u obzir da skalarni proizvod $\langle e_n|e_m\rangle$ u stvari predstavlja ogroman broj skalarnih proizvoda različitih stanja podsistema:

$$\langle e_n|e_m\rangle = \langle\alpha_n|\alpha_m\rangle\langle\beta_n|\beta_m\rangle\cdots\langle\zeta_n|\zeta_m\rangle.$$

Svaki od tih skalarnih proizvoda je manji od jedinice ili jednak jedinici. Ako se nakupi dovoljan broj proizvoda manjih od jedinice (kako se stanja sredine makroskopski razlikuju, mora postojati velik broj takvih), ukupan prozvod će brzo težiti nuli.

[22] Osobine i značaj statističkog operatora i redukovanog statističkog operatora su bliže objašnjeni u Dodatku E

Zbog gore rečenog, redukovani statistički operator prelazi u ortogonalni oblik

$$\hat{\rho}_{SA} \to \hat{\rho}^{d}_{SA} = \sum_m |c_m|^2 |s_m\rangle |a_m\rangle\langle s_m|\langle a_m| = \sum_m |c_m|^2 \hat{P}^{(S)}_m \otimes \hat{P}^{(A)}_m ,$$

gde su $\hat{P}^{(S)}_m$ i $\hat{P}^{(A)}_m$ projektori na svojstvena stanja *S* i *A*.

Kao primer posmatrajmo merenje spina sistema *S* pomoću detektora sa dva moguća stanja. Pretpostavimo da merimo projekciju spina na osu definisanu spoljašnjim magnetnim poljem. *S* je definisano svojstvenim stanjima operatora $\hat{S}_z$, $|z_+\rangle$ i $|z_-\rangle$, nad Hilbertovim prostorom H_S. Stanja detektora su $|d_{z+}\rangle$ i $|d_{z-}\rangle$ nad prostorom H_A. Neka je početno stanje detektora $|d_{z+}\rangle$ i neka se promeni ukoliko je spin $|z_-\rangle$, a neka ostane isto ukoliko je spin $|z_+\rangle$. Okolini ćemo pripisati stanja $|e_0\rangle$, $|e_+\rangle$ i $|e_-\rangle$ nad prostorom H_E. Stanje $|e_0\rangle$ je neko početno stanje, dok stanja $|e_+\rangle$ i $|e_-\rangle$ respektivno odgovaraju stanjima aparata $|d_{z+}\rangle$ i $|d_{z-}\rangle$. Pretpostavićemo da je na početku sistem u superpoziciji $\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z_+\rangle + |z_-\rangle\right)$. Tada će evolucija teći:

$$|\Psi_0\rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z_+\rangle + |z_-\rangle\right) \otimes |d_{z+}\rangle\right) \otimes |e_+\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z_+\rangle|d_{z+}\rangle + |z_-\rangle|d_{z-}\rangle\right) \otimes |e_+\rangle \to$$

$$\to \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z_+\rangle|d_{z+}\rangle|e_+\rangle + |z_-\rangle|d_{z-}\rangle|e_-\rangle\right) = |\Psi\rangle$$

Redukovani statistički operator je jednak

$$\hat{\rho}_{SA} = Tr_E\left(\hat{\rho}_{SAE}\right) = \frac{1}{2}|z_+\rangle\langle z_+||d_{z+}\rangle\langle d_{z+}| + \frac{1}{2}|z_-\rangle\langle z_-||d_{z-}\rangle\langle d_{z-}| .$$

Kao što se i očekivalo, dobili smo da merenjem izvršenim nad kombinovanim stanjem sistem-aparat ne možemo odrediti da li je to stanje čisto ili se radi o mešavini. Došlo je do lokalnog nestanka superpozicije i do pojave klasičnih stanja. Interferencija između stanja sistema i aparata je delokalizovana u okolinu i zato je nebitna ukoliko se okolina ne posmatra. Naravno, superpozicija je i dalje tu, ali se merenjem ne može detektovati. Interferencionim eksperimentima se može pokazati da nije došlo ni do kakvog uništenja koherencije, tj. interferencionih članova.

Odmah možemo da istaknemo osnovnu zamerku ovoj teoriji – dekoherencija nam daje odgovor zašto ne vidimo interferenciju između klasičnih stanja (nedijagonalni članovi u statističkom operatoru postaju nula), ali nam ne govori kako ta interferencija zaista nestaje.

2.3.2 Problem preferiranog bazisa

Drugi problem, koji zajedno sa problemom određenog stanja čini problem merenja, jeste problem preferiranog bazisa. Najlakše ćemo na primeru uvideti gde on isplivava i kako ga teorija dekoherencije prevazilazi. Ovo je ujedno i najznačajniji rezultat teorije dekoherencije.

Opet ćemo posmatrati primer merenja spina. Ako za trenutak zaboravimo na okolinu, stanja ukupnog sistema čine vektori iz prostora definisanog sa $H_S \otimes H_A$. Usled interakcije dolazi do evolucije ukupnog sistema i do stvaranja korelacija između stanja sistema i detektora.

$$\left|\Psi^{i}\right\rangle=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z_{+}\right\rangle+\left|z_{-}\right\rangle\right)\right]\left|d_{z+}\right\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z_{+}\right\rangle\left|d_{z+}\right\rangle+\left|z_{-}\right\rangle\left|d_{z-}\right\rangle\right)=\left|\Psi^{c}\right\rangle$$

Ono što predstavlja problem je činjenica da je konačno stanje $\left|\Psi^{c}\right\rangle$ invarijantno u odnosu na rotaciju bazisa. Na primer, umesto svojstvenih stanja $\hat{S}_z$ možemo koristiti svojstvena stanja $\hat{S}_x$, $\left|x_{+}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z_{+}\right\rangle+\left|z_{-}\right\rangle\right)$ i $\left|x_{-}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z_{+}\right\rangle-\left|z_{-}\right\rangle\right)$. Sledi da konačno stanje možemo predstaviti kao:

$$\left|\Psi^{c}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|x_{-}\right\rangle\left|d_{x-}\right\rangle-\left|x_{+}\right\rangle\left|d_{x+}\right\rangle\right),$$

gde su nova stanja detektora $\left|d_{x+}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|d_{z-}\right\rangle-\left|d_{z+}\right\rangle\right)$ i $\left|d_{x-}\right\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|d_{z+}\right\rangle+\left|d_{z-}\right\rangle\right)$, koja očigledno zadovoljavaju uslove ortogonalnosti.

Vidimo da konačno stanje odgovara merenju dve različite opservable, $\hat{S}_z$ i $\hat{S}_x$. Štaviše, kako isto ovo važi i za treću osu, možemo reći da smo merenjem jedne projekcije izmerili i sve ostale.

Prateći logiku kvantne mehanike došli smo do još jednog apsurdnog rezultata – iako su detektor i proces merenja osmišljeni kako bi izmerili tačno određenu veličinu, nakon merenja ne možemo biti sigurni šta smo izmerili. S druge strane, činjenica je da u realnosti merenjem zaista dobijemo ono što smo i planirali.

Superselekcija izazvana okolinom

Program dekoherencije nudi rešenje i za ovaj problem. Uvođenje okoline u kvantnomehanički opis dovodi do:

$$\left|\Psi^{i}\right\rangle=\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|z_{+}\right\rangle+\left|z_{-}\right\rangle\right)\left|d_{z+}\right\rangle\right]\left|e_{0}\right\rangle \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|z_{+}\right\rangle\left|d_{z+}\right\rangle+\left|z_{-}\right\rangle\left|d_{z-}\right\rangle\right]\left|e_{0}\right\rangle$$

$$\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left|z_{+}\right\rangle\left|d_{z+}\right\rangle\left|e_{+}\right\rangle+\left|z_{-}\right\rangle\left|d_{z-}\right\rangle\left|e_{-}\right\rangle\right]=\left|\Psi^{c}\right\rangle$$

Ponovo možemo da obrazujemo redukovani statistički operator

$$\hat{\rho}_{SA}=Tr_{E}\left(\hat{\rho}_{SAE}\right)=\frac{1}{2}\left|z_{+}\right\rangle\left|d_{z+}\right\rangle\left\langle z_{+}\right|\left\langle d_{z+}\right|+\frac{1}{2}\left|z_{-}\right\rangle\left|d_{z-}\right\rangle\left\langle z_{-}\right|\left\langle d_{z-}\right|.$$

Već smo rekli da nam $\hat{\rho}_{SA}$ daje istu statistiku kao i $\hat{\rho}_{SAE}$, ali ono što je ovde bitno primetiti je da je došlo do isticanja jednog određenog bazisa – redukovani statistički operator je dijagonalan u svojstvenom prostoru opservable detektora.

Postoji još jedna stvar koju treba istaći. Nakon merenja dobijamo konačno stanje $\left|\Psi^{c}\right\rangle$ nad prostorom $H_S \otimes H_A \otimes H_E$. Dokazano je da u ovakvom slučaju važi teorema o jedinstvenosti tridekompozicije[23]. Ona govori da ako se konačno stanje može prikazati u Šmitovoj formi, $\left|\Psi^c\right\rangle = \sum_i \alpha_i \left|\varphi_i\right\rangle\left|\phi_i\right\rangle\left|\gamma_i\right\rangle$, onda je ta dekompozicija jedinstvena. Vidimo da je uvođenjem trećeg sistema (okoline) nestala nejasnost oko izbora bazisa. Ova teorema, međutim, nije dovoljna. Iako uvodi jedinstvenost u priču, ni na koji način nam ne ukazuje na način izbora bazisa.

Prirodno se nameće jedan kriterijum izbora preferiranog bazisa – kriterijum stabilnosti. On se oslikava u zahtevu da korelacije koje se stvaraju sa okolinom ne uništavaju već stvorene korelacije između sistema i detektora. Tokom formalnog izlaganja šeme merenja, već je prećutno poštovan ovaj zahtev – ne pojavljuju se korelacije tipa

$$\left(\left|z_+\right\rangle\left|d_{z+}\right\rangle\right)\left|e_0\right\rangle \rightarrow \left|z_-\right\rangle\left|d_{z+}\right\rangle\left|e_+\right\rangle.$$

Stanja detektora jednoznačno oslikavaju stanja sistema. Okolina, u suštini, interaguje samo sa detektorom. Kako bi bio ispunjen gornji zahtev, opservabla detektora mora ostati nepromenjena u toku interakcije između detektora i okoline, tj. ona mora biti konstanta kretanja interakcionog hamiltonijana H_{AE}. Formalno rečeno, opservabla detektora i Hamiltonijan interakcije moraju komutirati, $\left[\hat{d}, \hat{H}_{AE}\right] = 0$. Preferirani bazis, dakle, odgovara onoj opservabli detektora koja ispunjava ovaj uslov.

Da zaključimo, okolina, putem interakcionog hamiltonijana, određuje preferirani bazis detektora, a time i stanja sistema koja su merena detektorom (pošto su stanja sistema i detektora upletena). Teorema o jedinstvenosti tridekompozicije obezbeđuje jedinstvenost preferiranog bazisa.

U svetlu ovog izlaganja, činjenica da prostorna koordinata igra preovlađujuću ulogu u našem iskustvu se da lako objasniti zavisnošću interakcionog Hamiltonijana od udaljenosti. Interakcija između okoline i mernog uređaja je prevashodno elektromagnetna te Hamiltonijan interakcije zavisi od rastojanja, $\hat{H}_{AE} = \hat{H}_{AE}(r)$. Zbog ove zavisnosti znamo da sigurno važi $\left[\hat{r}, \hat{H}_{AE}(r)\right] = 0$. Teorija predviđa da bi položaj bio dobra detektorska opservabla. Sa druge strane, poznato nam je da u većini eksperimenata očitavamo podatke određujući položaj igle mernog uređaja na skali ili pak tumačeći prostornu raspodelu rezultata na ekranu.

Teorija dekoherencije je hrabar pokušaj da se objasni proces merenja bez upotrebe redukcionog postulata. Bez obzira što je, po svemu sudeći, doživela neuspeh, niko joj ne može osporiti ulogu koju je odigrala u prepoznavanju značaja uticaja okoline na proces merenja.

Ovim završavamo uvod u problem merenja. Istina je da je tema samo dotaknuta i da još puno toga ima da se kaže o njoj. Ipak, ovo što je rečeno bi trebalo da je dovoljno da se stekne opšti utisak o značaju ovog problema. Za kraj rada je preostalo da se pomenu praktične posledice ove višedecenijske potrage za odgovorom. Kao nusproizvod nastala je kvantna teorija informacija, u okviru koje se vrše eksperimenti koji se graniče sa naučnom fantastikom.

[23] A. Elby and J. Bub., Triorthogonal uniqueness theorem and its relevance to the interpretation of quantum mechanics, Phys. Rev. A **49**, 4213 (1994)

3. Kvantna teorija informacija

Poslednjih decenija došlo je do naglog porasta interesovanja za novu naučnu oblast – kvantnu teoriju informacija. Na tržištu se pojavio ogroman broj knjiga koji se bave ovom temom. Kvantna kriptografija, kvantna teleportacija i kvantni kompjuteri, podoblasti kvantne teorije informacija, u svojoj osnovi imaju princip superpozicije i/ili kvantnu spletenost, a oba su stupili u žižu interesovanja nakon EPR rada. Zbog toga se ove oblasti mogu smatrati plodovima rasprave koju je započeo Ajnštajn sa saradnicima.

Kvantni kompjuteri privlače pažnju zbog mogućnosti upražnjavanja paralelnog računanja, a koje je posledica postojanja superponiranih stanja i lineranosti operatora. Ovo bi dovelo do daleko bržeg izvršavanja izvesnih računskih operacija u odnosu na klasične kompjutere. Već postoje brojni algoritmi kojim bi se koristili kvantni računari, ali sa praktične strane naišlo se na ozbiljne poteškoće. One se najviše tiču negativnog uticaja okoline, jer je za rad jednog kvantnog računara potrebno postići skoro potpunu izolaciju od okolnih uticaja. Velik broj skeptika tvrdi da se ove teškoće nikada neće prevazići i da su brojne knjige i radovi na ovu temu preuranjene.

Temelje kvantne kriptografije čine EPR efekat kao i činjenica da merenje u kvantnoj mehanici neizostavno dovodi do poremećaja posmatranog sistema. Informacije se u ovom slučaju prenose putem kvantnih korelacija, a svako eventualno prisluškivanje od strane trećeg lica izaziva neslaganje dobijenih rezultata sa očekivanima i zato je lako primetno. Na ovaj način, u principu, moguće je komunicirati i biti savršeno siguran da niko ne prisluškuje. Kvantna kriptografija je već napustila okvire laboratorije. U 2004. godini izvršen je prenos novca između Austrijske banke i bečke Gradske kuće pomoću parova spletenih fotona.

Nešto detaljnije ćemo se pozabaviti kvantnom teleportacijom. Do sada je izvršen velik broj eksperimenata koji demonstrira ovu pojavu, najčešće na fotonima. Kako bi se razumeo princip teleportacije, neophodno je uvesti neke pojmove kojima barata kvantna teorija informacija.

3.1 Kubiti

Analogno bitima u klasičnoj teoriji informacija, u kvantnoj teoriji osnovna jedinica kojom baratamo je kubit. Kubit predstavlja jedno od dva stanja kvantnog sistema sa dva stanja. Ta stanja obeležavamo sa „0“ i „1“, gde ove oznake odgovaraju vektorima $|0\rangle$ i $|1\rangle$. Kao primer može poslužiti spin čestice duž neke ose. Osnovna razlika između bita i kubita je da kubiti mogu biti i u superpoziciji,

$$|Q\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle, \quad a^2 + b^2 = 1.$$

Jedna ovakva superpozicija može nositi proizvoljnu količinu informacija uskladištenu u koeficijentima a i b. Da bismo pristupili informaciji koju nosi ova superpozicija moramo izvršiti merenje. Pri tome možemo dobiti samo jedan bit informacije, 0 ili 1, bez obzira što superpozicija može da uskladišti daleko više.

3.2 Transformacije na kubitima

Neka je H Hilbertov prostor kubita sa bazisnim vektorima $|0\rangle$ i $|1\rangle$. Ovim bazisnim vektorima možemo pripisati vektore kolone,

$$|0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bitnu ulogu igraju sledeći operatori nad *H*:

$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, jedinični operator.

$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, negacija kubita – $\hat{X}|0\rangle = \hat{X}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = |1\rangle$, $\hat{X}|1\rangle = |0\rangle$.

$\hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, kombinacija negacije i pomeraja faze – $\hat{Y}|0\rangle = -|1\rangle$, $\hat{Y}|1\rangle = |0\rangle$.

$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, promena faze – $\hat{Z}|0\rangle = |0\rangle$, $\hat{Z}|1\rangle = -|1\rangle$.

$\hat{H} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, Hadamardova transformacija – stvara superpoziciju bazisnih kubita:

$$\hat{H}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle, \qquad \hat{H}|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle.$$

Ako imamo dva kvantna sistema sa po dva stanja, oni su predstavljeni prostorima H_1 i H_2. Prostor zajedničkih stanja je $H_1 \otimes H_2$. Ako su $|0\rangle_1$ i $|1\rangle_1$ bazisni vektori prvog sistema, a $|0\rangle_2$ i $|1\rangle_2$ drugog, bazisni vektori $H_1 \otimes H_2$ su $|0\rangle_1|0\rangle_2$, $|0\rangle_1|1\rangle_2$, $|1\rangle_1|0\rangle_2$ i $|1\rangle_1|1\rangle_2$. Kao bazis prostora $H_1 \otimes H_2$ može se uzeti i skup sledećih vektora:

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2\right)$$

$$|\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|0\rangle_2 - |1\rangle_1|1\rangle_2\right)$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|1\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|1\rangle_2\right)$$

$$|\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-|1\rangle_1|0\rangle_2 + |0\rangle_1|1\rangle_2\right)$$

Ovo je takozvani „Belov bazis“, a ova stanja se još nazivaju i maksimalno spletena bazisna stanja.

Najznačajnija transformacija nad više kubita je „Controled-NOT“, predstavljena operatorom $\hat{C}_{NOT}$. Ovaj operator menja drugi kubit ukoliko je prvi kubit $|1\rangle$, a ostavlja ga nepromenjenim ako je prvi kubit $|0\rangle$.

$$\hat{C}_{NOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{aligned} \hat{C}_{NOT}|0\rangle_1|0\rangle_2 &= |0\rangle_1|0\rangle_2 \\ \hat{C}_{NOT}|0\rangle_1|1\rangle_2 &= |0\rangle_1|1\rangle_2 \\ \hat{C}_{NOT}|1\rangle_1|0\rangle_2 &= |1\rangle_1|1\rangle_2 \\ \hat{C}_{NOT}|1\rangle_1|1\rangle_1 &= |1\rangle_1|0\rangle_1 \end{aligned}$$

Vektori kolone za bazisna stanja u ovom slučaju su

$$|0\rangle_1|0\rangle_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |0\rangle_1|1\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle_1|0\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |1\rangle_1|1\rangle_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Prvi bitan rezultat kvantne teorije informacija je „No-cloning“ teorema. Ona tvrdi da se nepoznata ili neortogonalna stanja ne mogu klonirati, tj. da ne postoji unitarni operator $\hat{U}$ koji deluje na sistem kubita na sledeći način

$\hat{U}|v\rangle_1|0\rangle_2 = |v\rangle_1|v\rangle_2$, za bilo koji proizvoljan vektor $|v\rangle_1$.

Dokaz je jednostavan. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji takav operator. Za bilo koja dva proizvoljna vektora $|a\rangle$ i $|b\rangle$ imali bismo: $\hat{U}|a\rangle_1|0\rangle_2 = |a\rangle_1|a\rangle_2$ i $\hat{U}|b\rangle_1|0\rangle_2 = |b\rangle_1|b\rangle_2$. A za neki vektor $|c\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle$ koji je neortogonalan na $|a\rangle$ i $|b\rangle$:

$$\hat{U}|c\rangle_1|0\rangle_2 = \begin{cases} = \hat{U}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|a\rangle_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}|b\rangle_1\right)|0\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|a\rangle_1|a\rangle_2 + |b\rangle_1|b\rangle_2\right) \\ = |c\rangle_1|c\rangle_2 = \frac{1}{2}\left(|a\rangle_1|a\rangle_2 + |a\rangle_1|b\rangle_2 + |b\rangle_1|a\rangle_2 + |b\rangle_1|b\rangle_2\right) \end{cases}$$

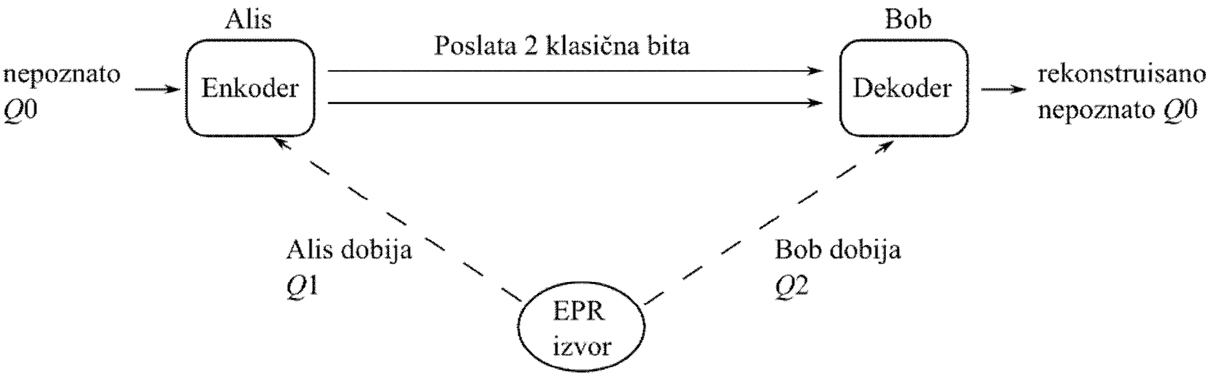
Vidimo da dobijamo dva različita rezultata, te sledi da početna pretpostavka nije tačna, tj. ne postoji takav operator $\hat{U}$. Može se formirati operator koji bi klonirao jedno određeno stanje, na primer $\hat{C}_{NOT}$ kada deluje na $|1\rangle_1|0\rangle_2$ daje $|1\rangle_1|1\rangle_2$. Međutim, ne može se napraviti operator koji bi klonirao svako proizvoljno stanje. Klasična informacija, za razliku od kvantne, uvek može da se klonira (kopira).

3.3 Kvantna teleportacija

Cilj je da koristeći klasične bite pošaljemo informaciju o nepoznatom stanju i da se to stanje rekonstruiše kod prijemnika. Posmatramo predajnik i prijemnik, Alis i Bob, kako je uobičajeno da se zovu u literaturi. Kod Alis se nalazi nepoznati kubit *Q*0, $|Q\rangle_0 = a|0\rangle_0 + b|1\rangle_0$, koji ona želi da pošalje Bobu. Takođe, spremljena su dva kubita, *Q*1 i *Q*2, u spletenom stanju,

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2\right).$$

Alis dobija $Q1$, a Bob $Q2$. Alis će vršiti transformacije na kubitima $Q0$ i $Q1$, tako da omogući da Bobov $Q2$ pređe u dato nepoznato stanje (Slika 9).



$$\left|\Psi^{+}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_1|0\rangle_2 + |1\rangle_1|1\rangle_2\right)$$

Slika 9. Šema teleporacije

Postupak:

1. Alis u početku ima sistem 3 kubita, $Q0$, $Q1$ i $Q2$, s tim da može direktno da utiče samo na prva dva kubita.

$$|Q\rangle_0\left|\Psi^{+}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a|0\rangle_0|0\rangle_1|0\rangle_2 + a|0\rangle_0|1\rangle_1|1\rangle_2 + b|1\rangle_0|0\rangle_1|0\rangle_2 + b|1\rangle_0|1\rangle_1|1\rangle_2\right)$$

Alis prvo primenjuje $\hat{C}_{NOT}$ transformaciju nad $Q0$ i $Q1$, a potom Hadamardovu transformaciju na $Q0$.

(I) $\left(\hat{C}_{NOT}\otimes\hat{I}_2\right)|Q\rangle_0\left|\Psi^{+}\right\rangle =$

$$=\left(\hat{C}_{NOT}\otimes\hat{I}_2\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a|0\rangle_0|0\rangle_1|0\rangle_2 + a|0\rangle_0|1\rangle_1|1\rangle_2 + b|1\rangle_0|0\rangle_1|0\rangle_2 + b|1\rangle_0|1\rangle_1|1\rangle_2\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a|0\rangle_0|0\rangle_1|0\rangle_2 + a|0\rangle_0|1\rangle_1|1\rangle_2 + b|1\rangle_0|1\rangle_1|0\rangle_2 + b|1\rangle_0|0\rangle_1|1\rangle_2\right)$$

(II) Sledi Hadamardova transformacija,

$$\left(\hat{H}_0\otimes\hat{I}_1\otimes\hat{I}_2\right)\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a|0\rangle_0|0\rangle_1|0\rangle_2 + a|0\rangle_0|1\rangle_1|1\rangle_2 + b|1\rangle_0|1\rangle_1|0\rangle_2 + b|1\rangle_0|0\rangle_1|1\rangle_2\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{a\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_0+|1\rangle_0\right)|0\rangle_1|0\rangle_2 + a\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_0+|1\rangle_0\right)|1\rangle_1|1\rangle_2 +\right.$$

$$\left.+b\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_0-|1\rangle_0\right)|1\rangle_1|0\rangle_2 + b\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|0\rangle_0-|1\rangle_0\right)|0\rangle_1|1\rangle_2\right\}=$$

$$=\frac{1}{2}\Big\{|0\rangle_0|0\rangle_1\left(a|0\rangle_2+b|1\rangle_2\right)+|0\rangle_0|1\rangle_1\left(a|1\rangle_2+b|0\rangle_2\right)+$$
$$+|1\rangle_0|0\rangle_1\left(a|0\rangle_2-b|1\rangle_2\right)+|1\rangle_0|1\rangle_1\left(a|1\rangle_2-b|0\rangle_2\right)\Big\}$$

2. Vidimo da nakon ovih transformacija kubiti $Q0$ i $Q1$ predstavljaju stanja sa definisanim vrednostima. Sada Alis vrši merenje nad $Q0$ i $Q1$ i može dobiti neki od četiri rezultata. Dobijanje svakog od tih rezultata podrazumeva da je došlo do kolapsa i da se kubit $Q2$ nalazi u odgovarajućem stanju.

Dobijen rezultat	Stanje $Q2$
$\|0\rangle_0\|0\rangle_1$	$a\|0\rangle_2+b\|1\rangle_2$
$\|0\rangle_0\|1\rangle_1$	$a\|1\rangle_2+b\|0\rangle_2$
$\|1\rangle_0\|0\rangle_1$	$a\|0\rangle_2-b\|1\rangle_2$
$\|1\rangle_0\|1\rangle_1$	$a\|1\rangle_2-b\|0\rangle_2$

3. Alis šalje Bobu rezultate svog merenja u formi dva klasična bita, 00, 01, 10 ili 11 koji odgovaraju stanjima $|0\rangle_0|0\rangle_1$, $|0\rangle_0|1\rangle_1$, $|1\rangle_0|0\rangle_1$ i $|1\rangle_0|1\rangle_1$, respektivno.

4. Za svaki od četiri različita podatka koja Alis pošalje, Bob vrši odgovarajuću transformaciju nad $Q2$ i tako rekonstruiše nepoznato stanje $Q0$.

Informacija	Transformacija	
00	$\hat{I}_2$	$\hat{I}_2\left(a\|0\rangle_2+b\|1\rangle_2\right)=a\|0\rangle_2+b\|1\rangle_2$
01	$\hat{X}_2$	$\hat{X}_2\left(a\|1\rangle_2+b\|0\rangle_2\right)=a\|0\rangle_2+b\|1\rangle_2$
10	$\hat{Z}_2$	$\hat{Z}_2\left(a\|0\rangle_2-b\|1\rangle_2\right)=a\|0\rangle_2+b\|1\rangle_2$
11	$\hat{Y}_2$	$\hat{Y}_2\left(a\|1\rangle_2-b\|0\rangle_2\right)=a\|0\rangle_2+b\|1\rangle_2$

Vidimo da nije došlo do narušenja „No-cloning“ teoreme jer je u procesu teleportacije došlo do uništenja prvobitnog $Q0$. Na ovaj način je nepoznato stanje pomoću kvantnih korelacija i odgovarajućih transformacija teleportovano iz jedne tačke u drugu. Kako su morali biti iskorišćeni klasični biti, tj. klasični kanal, za slanje podataka o vrsti transformacije, teleportacija ne može biti iskorišćena za slanje signala brzinom većom od brzine svetlosti.

Zaključak

Nakon čitanja ovog rada mnoga pitanja ostaju otvorena. Iako rad u svom začetku nije bio tako zamišljen, kako su se gomilali podaci iz različitih izvora, počele su da se pokazuju dobre strane ovakvog koncepta. Pitanja koja su dotaknuta u radu su i dalje veoma aktuelna, u smislu da još uvek nemaju konačan odgovor. Ovakva koncepcija rada je, stoga, u skladu sa opštim stanjem u oblastima kojima se rad bavi.

Kao što smo videli, prva glava se bavi pitanjem teorija skrivenih varijabli. Ovo pitanje je direktno stimulisano izvesnim problemima sa kojima se suočila standardna interpretacija (od kojih je problem merenja daleko najznačajniji). Pomenuti eksperimentalni testovi, pored toga što su ukazali kojih se sve pretpostavki o realnosti takve teorije moraju odreći, značajni su iz još jednog razloga – nagnali su naučnike da preispitaju svoje stavove o osobinama sveta oko nas. Pitanja lokalnosti, realizma i kauzalnosti su iz domena filozofije dospela i u domen fizike. Čini se da ni u jednom periodu u istoriji nisu sa tolikim iščekivanjem dočekivani rezultati najnovijih eksperimenata, kako od strane fizičara, tako i od strane filozofa nauke i prirode. Paralelno ovoj, može se slobodno nazvati – euforiji, koja vlada u pomenutim krugovima, novo shvatanje osobina sveta, koje je nastalo kao posledica istraživanja u ovom polju, dovelo je do stvaranja novih oblasti fizike. U njima su praktično iskorišćeni rezultati dosadašnjih istraživanja. Ovo je pokazalo da odgovori na pomenuta pitanja nisu stvar ličnog ukusa, ili možda bolje uverenja, naučnika, već da imaju ogroman praktičan značaj. Nema sumnje da će dalja istraživanja u ovoj oblasti doneti velika iznenađenja i naravno neka nova pitanja.

Više od sedamdeset godina fizičari pokušavaju da daju odgovor na problem merenja. Ideje se rađaju i razvijaju. Neke bivaju napuštene samo da bi nekoliko decenija kasnije bile ponovo oživljene u nekom novom ruhu. Zastupnici svake od njih imaju spremne kritike na račun svih drugih, a opet ni jedna nije u stanju da jednom za svagda ućutka sve ostale. Ovo je jedan od osnovnih razloga zašto je u radu pažnja, najvećim delom, poklonjena samom problemu, a tek neke od ideja su pomenute. Ostaje da se vidi da li će neka ideja iz skupa trenutno aktuelnih preovladati ili će biti potrebno da se načini takav korak koji će dovesti do još jedne revolucije u naučnom mišljenju.

Dodaci

Dodatak A Višečestični sistemi

Fizički sistem je predstavljen vektorskim prostorom, tj. prostorom svih mogućih stanja. Ako posmatramo više sistema, potrebno je uvesti više vektorskih prostora. Matematički se može definisati proizvod više različitih prostora i tako stvoriti novi vektorski prostor koji sadrži stanja višečestičnih sistema.

Sistem	Prostor stanja	Stanje	Osobina	
1	V	$\vert\Psi_a\rangle_1$	$\hat{A}^{(1)}$	$\hat{A}^{(1)}\vert\Psi_a\rangle_1 = a\vert\Psi_a\rangle_1$
2	W	$\vert\Psi_b\rangle_2$	$\hat{B}^{(2)}$	$\hat{B}^{(2)}\vert\Psi_b\rangle_2 = b\vert\Psi_b\rangle_2$
1 i 2	$V\otimes W$	$\vert\Psi_a\rangle_1\vert\Psi_b\rangle_2$	$\hat{A}^{(1)}\otimes\hat{B}^{(2)}$	$\left(\hat{A}^{(1)}\otimes\hat{B}^{(2)}\right)\vert\Psi_a\rangle_1\vert\Psi_b\rangle_2 = ab\vert\Psi_a\rangle_1\vert\Psi_b\rangle_2$
1 i 2	$V\otimes W$	$\vert\Psi_a\rangle_1\vert\Psi_b\rangle_2$	$\hat{A}^{(1)}$	$\hat{A}^{(1)}\vert\Psi_a\rangle_1\vert\Psi_b\rangle_2 = \left(\hat{A}^{(1)}\otimes\hat{I}^{(2)}\right)\vert\Psi_a\rangle_1\vert\Psi_b\rangle_2 =$ $= a\vert\Psi_a\rangle_1\vert\Psi_b\rangle_2$

Vektor $|\Psi_a\rangle_1|\Psi_b\rangle_2$ se naziva tenzorski proizvod vektora $|\Psi_a\rangle_1$ i $|\Psi_b\rangle_2$ i može se zapisati kao $|\Psi_a^1,\Psi_b^2\rangle$ ili $|\Psi_a\rangle_1\otimes|\Psi_b\rangle_2$. Vektor $|\Psi_a\rangle_1|\Psi_b\rangle_2$ pripada novom vektorskom prostoru $V\otimes W$ koji predstavlja prostor stanja kombinovanog dvočestičnog sistema.

Ako vektori $|\Psi_1\rangle_1, |\Psi_2\rangle_1, |\Psi_3\rangle_1, ..., |\Psi_N\rangle_1$ predstavljaju bazis prostora *V*, a vektori $|\Psi_1\rangle_2, |\Psi_2\rangle_2, |\Psi_3\rangle_2, ..., |\Psi_L\rangle_2$ bazis prostora *W*, onda $|\Psi_i\rangle_1|\Psi_j\rangle_2$ za $i = 1, 2, ..., N$ i $j = 1, 2, ..., L$, predstavljaju bazis prostora $V\otimes W$. Svaki vektor koji pripada prostoru $V\otimes W$ može biti razložen po ovom bazisu,

$$|A\rangle = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{L} a_{ij}|\Psi_i\rangle_1|\Psi_j\rangle_2 .$$

Proizvodi prostora se koriste za predstavljanje sistema sa više stepeni slobode. Radi jasnosti možemo navesti sledeće primere:

a) Jedna čestica u jednoj dimenziji – $|\Psi\rangle$

b) Dve čestice, svaka sa po jednom osobinom – $|\Psi^1,\Psi^2\rangle$

c) Jedna čestica u tri dimenzije – $|\Psi^x,\Psi^y,\Psi^z\rangle$

d) Jedna čestica u dve dimenzije sa spinom (ukupno tri stepena slobode) – $|\Psi^{spin}\rangle|\Psi^x,\Psi^y\rangle$

Dodatak B Separabilna i spletena stanja

Po definiciji, separabilno stanje je bilo koji vektor iz $V \otimes W$ čiji razvoj po bazisnim vektorima može biti faktorisan u proizvod dva člana od kojih svaki sadrži vektore iz samo jednog podprostora, *V* ili *W*. Kako bismo razjasnili, pogledajmo nekoliko primera.

$$|R\rangle = \sqrt{\frac{1}{4}}|\Psi_1\rangle_1|\Psi_4\rangle_2 + \sqrt{\frac{1}{4}}|\Psi_3\rangle_1|\Psi_4\rangle_2 + \sqrt{\frac{1}{4}}|\Psi_1\rangle_1|\Psi_5\rangle_2 + \sqrt{\frac{1}{4}}|\Psi_3\rangle_1|\Psi_5\rangle_2 =$$

$$= \sqrt{\frac{1}{4}}\left(|\Psi_1\rangle_1 + |\Psi_3\rangle_1\right)\left(|\Psi_4\rangle_2 + |\Psi_5\rangle_2\right)$$

$$|S\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|\Psi_1\rangle_1|\Psi_1\rangle_2 + \sqrt{\frac{1}{2}}|\Psi_2\rangle_1|\Psi_1\rangle_2 = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|\Psi_1\rangle_1 + |\Psi_2\rangle_1\right)|\Psi_1\rangle_2$$

$$|T\rangle = |\Psi_5\rangle_1|\Psi_3\rangle_2$$

Sva navedena stanja su separabilna jer zadovoljavaju gornju definiciju. U stanju $|R\rangle$ ni prva ni druga čestica nemaju definisane osobine koje odgovaraju bazisnim stanjima $|\Psi_i\rangle_1$ i $|\Psi_j\rangle_2$ jer su obe zasebno u superponiranim stanjima. U stanju $|S\rangle$, druga čestica ima definisanu osobinu, dok u stanju $|T\rangle$ obe imaju definisane osobine.

Sa druge strane, spleteno (neseparabilno) stanje je bilo koji vektor iz $V \otimes W$ za koji ne važi gornja definicija. Takvo stanje se ne može faktorisati u proizvod dva člana koji sadrže vektore samo iz podprostora *V* ili *W*. Kao primer možemo uzeti sledeće stanje

$$|Q\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}|\Psi_1\rangle_1|\Psi_1\rangle_2 + \sqrt{\frac{1}{2}}|\Psi_2\rangle_1|\Psi_2\rangle_2 .$$

Lako se da pokazati da se stanje $|Q\rangle$ ne može faktorisati. Pretpostavimo da može. Trebalo bi da se stanje $|Q\rangle$ može zapisati na sledeći način,

$$|Q\rangle = \left(a|\Psi_1\rangle_1 + b|\Psi_2\rangle_1\right)\otimes\left(c|\Psi_1\rangle_2 + d|\Psi_2\rangle_2\right) =$$
$$= ac|\Psi_1\rangle_1|\Psi_1\rangle_2 + ad|\Psi_1\rangle_1|\Psi_2\rangle_2 + bc|\Psi_2\rangle_1|\Psi_1\rangle_2 + bd|\Psi_2\rangle_1|\Psi_2\rangle_2$$

Upoređivanjem, dobijamo sledeće jednačine

$$ac = \sqrt{\frac{1}{2}},\ ad = 0,\ bc = 0 \ \text{i}\ bd = \sqrt{\frac{1}{2}} .$$

Ovaj sistem nema rešenja. Dakle, stanje $|Q\rangle$ je neseparabilno.

U stanju $|Q\rangle$ nijedna čestica nema definisane osobine (ponoviću, govorim o osobinama, tj. operatorima čiji svojstveni vektori čine bazise potprostora). S druge strane, dvočestični sistem kao celina uvek ima neke definisane osobine. Ovo je posledica osobina prostora kojima pripadaju posmatrana stanja, tj. činjenice da je bilo koji vektor iz Hilbertovog prostora svojstveni vektor nekog Ermitskog operatora. Kako bismo ovo pokazali, razmotrimo jedan konkretan slučaj. Posmatramo dve čestice sa spinom $\frac{1}{2}$. Prostor stanja prve čestice je određen vektorima $|z_+\rangle_1$ i $|z_-\rangle_1$ koji su svojstveni vektori operatora projekcije spina $\hat{S}_1^z$. Prostor stanja druge čestice je, slično, određen vektorima $|z_+\rangle_2$ i $|z_-\rangle_2$ koji su svojstveni vektori $\hat{S}_2^z$. Jedno spleteno stanje ove dve čestice je

$$|\Psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}\left(|z_+\rangle_1 |z_-\rangle_2 - |z_-\rangle_1 |z_+\rangle_2\right).$$

Lako se da proveriti da je ovo stanje svojstveno stanje operatora $\hat{S}_1^z + \hat{S}_2^z$,

$$\left(\hat{S}_1^z + \hat{S}_2^z\right)|\Psi\rangle \equiv \left(\hat{S}_1^z \otimes \hat{I}_2 + \hat{I}_1 \otimes \hat{S}_2^z\right)|\Psi\rangle = 0 = 0|\Psi\rangle.$$

Dodatak C Spin dvočestičnog sistema

Posmatrajmo, za početak, jednu česticu sa spinom. Rezultat delovanja operatora odgovarajućih komponenata u svojstvenim stanjima $|z_\pm\rangle$ se može naći na sledeći način.

$$\hat{S}_x|z_+\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}|z_-\rangle$$

$$\hat{S}_x|z_-\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}|z_+\rangle$$

$$\hat{S}_y|z_+\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0\\ i\end{pmatrix} = i\frac{\hbar}{2}|z_-\rangle$$

$$\hat{S}_y|z_-\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = -i\frac{\hbar}{2}|z_+\rangle$$

$$\hat{S}_z|z_+\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix} = \frac{\hbar}{2}|z_+\rangle$$

$$\hat{S}_z|z_-\rangle = \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix} = -\frac{\hbar}{2}|z_-\rangle$$

$$\hat{S}^2 = \hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2$$

$$\hat{S}^2|z_+\rangle = \left(\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2\right)|z_+\rangle = \hat{S}_x\hat{S}_x|z_+\rangle + \hat{S}_y\hat{S}_y|z_+\rangle + \hat{S}_z\hat{S}_z|z_+\rangle =$$

$$= \frac{\hbar^2}{4}|z_+\rangle + i\frac{\hbar}{2}\left(-i\frac{\hbar}{2}\right)|z_+\rangle + \frac{\hbar^2}{4}|z_+\rangle$$

$$\hat{S}^2|z_+\rangle = \frac{3}{4}\hbar^2|z_+\rangle$$

Slično, $\hat{S}^2|z_-\rangle=\frac{3}{4}\hbar^2|z_-\rangle$

Posmatramo sada sistem dve čestica sa spinovima $\hat{\vec{S}}_1$ i $\hat{\vec{S}}_2$, respektivno. Neka je stanje sistema predstavljeno funkcijom

$$|\psi_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2-|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2\right).$$

Da vidimo šta dobijamo kada na ovo stanje delujemo sledećim operatorima.

$$\hat{S}_1^x|\psi_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{S}_1^x|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2-\hat{S}_1^x|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hbar}{2}|z_-\rangle_1|z_-\rangle_2-\frac{\hbar}{2}|z_+\rangle_1|z_+\rangle_2\right)\neq\lambda|\psi_0\rangle$$

$$\hat{S}_1^y|\psi_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{S}_1^y|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2-\hat{S}_1^y|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(i\frac{\hbar}{2}|z_-\rangle_1|z_-\rangle_2+i\frac{\hbar}{2}|z_+\rangle_1|z_+\rangle_2\right)\neq\lambda|\psi_0\rangle$$

$$\hat{S}_1^z|\psi_0\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\hat{S}_1^z|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2-\hat{S}_1^z|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\hbar}{2}|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2+\frac{\hbar}{2}|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2\right)\neq\lambda|\psi_0\rangle$$

Totalni spin sistema se definiše kao $\hat{\vec{S}}_{tot}=\hat{\vec{S}}_1+\hat{\vec{S}}_2$.

$$\hat{S}_{tot}^2=\hat{\vec{S}}_{tot}\cdot\hat{\vec{S}}_{tot}=\hat{S}_1^2+\hat{S}_2^2+2\left(\hat{S}_1^x\hat{S}_2^x+\hat{S}_1^y\hat{S}_2^y+\hat{S}_1^z\hat{S}_2^z\right)$$

$$\hat{S}_{tot}^2|\psi_0\rangle=\left[\hat{S}_1^2+\hat{S}_2^2+2\left(\hat{S}_1^x\hat{S}_2^x+\hat{S}_1^y\hat{S}_2^y+\hat{S}_1^z\hat{S}_2^z\right)\right]\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2-|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\frac{3}{4}\hbar^2|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2-\frac{3}{4}\hbar^2|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2+\frac{3}{4}\hbar^2|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2-\frac{3}{4}\hbar^2|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2+\right.$$
$$+2\left(\frac{\hbar^2}{4}|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2-\frac{\hbar^2}{4}|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2+\frac{\hbar^2}{4}|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2-\frac{\hbar^2}{4}|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2-\right.$$
$$\left.\left.-\frac{\hbar^2}{4}|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2+\frac{\hbar^2}{4}|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2\right)\right\}$$

$$\hat{S}_{tot}^2|\psi_0\rangle=0=0|\psi_0\rangle$$

Dakle, u stanju $|\psi_0\rangle$, pojedinačne čestice nemaju definisane vrednosti spina, dok je totalni spin sistema u tom stanju definisan.

Nakon merenja komponente S_z neke od čestica, sistem će se naći u nekom od stanja $|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2$ ili $|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2$. U ovom slučaju imamo:

$$\hat{S}_{tot}^2|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2=\left(\hat{S}_1^2+\hat{S}_2^2+2\left(\hat{S}_1^x\hat{S}_2^x+\hat{S}_1^y\hat{S}_2^y+\hat{S}_1^z\hat{S}_2^z\right)\right)|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2=$$

$$=\frac{3}{4}\hbar^2|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2+\frac{3}{4}\hbar^2|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2+\frac{2}{4}\hbar^2|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2+\frac{2}{4}\hbar^2|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2-\frac{2}{4}\hbar^2|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2$$

$$\hat{S}_{tot}^2|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2=\hbar^2|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2+\hbar^2|z_-\rangle_1|z_+\rangle_2\neq\lambda|z_+\rangle_1|z_-\rangle_2$$

Stanje $|z_+\rangle_1 |z_-\rangle_2$ (kao i $|z_-\rangle_1 |z_+\rangle_2$) nije svojstveno stanja totalnog spina sistema i on u ovom stanju nema definisanu vrednost.

Dodatak D Svojstvena stanja operatora projekcije spina na proizvoljnu osu

Operator spina dat je sledećim vektorom:

$$\hat{\vec{S}} = \begin{pmatrix} \hat{S}_x \\ \hat{S}_y \\ \hat{S}_z \end{pmatrix}$$

Gde $\hat{S}_x$, $\hat{S}_y$ i $\hat{S}_z$ predstavljaju Paulijeve spinske matrice ($\frac{\hbar}{2} = 1$),

$$\hat{S}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \hat{S}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \ \text{i} \ \hat{S}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Svojstveni vektori ovih operatora su

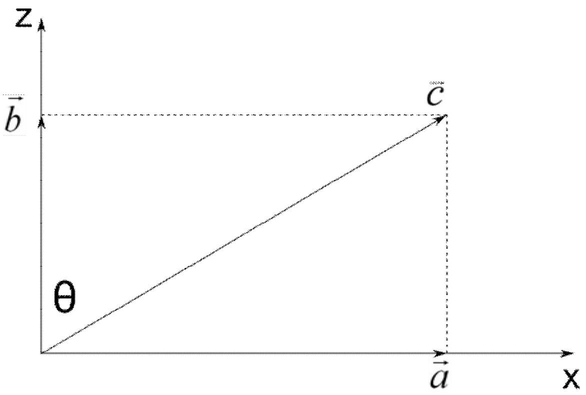
$$|x_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \ \text{i} \ |x_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$|y_+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \ \text{i} \ |y_-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},$$

$$|z_+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ \text{i} \ |z_-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ako posmatramo projekciju spina na x-osu, operator projekcije spina dobijamo kao $\hat{\vec{S}} \cdot \vec{e}_x = \hat{S}_x$ a za ostale ose imamo $\hat{\vec{S}} \cdot \vec{e}_y = \hat{S}_y$ i $\hat{\vec{S}} \cdot \vec{e}_z = \hat{S}_z$. Pretpostavimo da hoćemo da posmatramo projekciju spina na neku proizvoljnu osu u xz-ravni. Ta osa je određena nekim vektorom $\vec{c} = c\vec{e}_c = a\vec{e}_x + b\vec{e}_z$. Tada imamo

$$\hat{\vec{S}} \cdot \frac{\vec{c}}{c} \equiv \hat{S}_c = \frac{a}{c}\hat{S}_x + \frac{b}{c}\hat{S}_z = \hat{S}_x \sin\theta + \hat{S}_z \cos\theta$$



Dobijamo $\hat{S}_c = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

Za svojstvene vektore $\hat{S}_c$ dobijamo:

$$|c_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \ \text{i} \ |c_-\rangle = \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Lako se da proveriti da važi

$$\hat{S}_c|c_+\rangle = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\frac{\theta}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta}{2} \\ \sin\theta\cos\frac{\theta}{2} - \cos\theta\sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\theta - \frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} = +1|c_+\rangle$$

$$\hat{S}_c|c_-\rangle = -1|c_-\rangle$$

Konačno, svojstveni vektori operatora $\hat{S}_c$ se mogu izraziti preko $|z_+\rangle$ i $|z_-\rangle$ na sledeći način

$$|c_+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|z_+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|z_-\rangle \quad \text{i}$$

$$|c_-\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|z_+\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|z_-\rangle .$$

Jednostavno se da proveriti da važe i relacije

$$|z_+\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|c_+\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|c_-\rangle \quad \text{i}$$

$$|z_-\rangle = \sin\frac{\theta}{2}|c_+\rangle - \cos\frac{\theta}{2}|c_-\rangle .$$

Dodatak E Ansambli: čisto i mešano stanje. Statistički operator

Šta je to *čisto stanje* i kako se definiše? Ako iz nekog stanja $|\Psi\rangle$ možemo izračunati verovatnoće svakog mogućeg rezultata merenja, imamo posla sa čistim stanjem. Međutim, dešava se da nam stanje ne daje potpunu informaciju o sistemu. To se najlakše da videti na primeru. Posmatrajmo ravanski oscilator. Neka smo izmerili njegovu energiju i dobili $2\hbar\omega$. U kom je stanju sistem nakon merenja? Trebalo bi da možemo na to da odgovorimo. Međutim, pokazuje se da on može biti u dva različita stanja, jednom definisanom kvantnim brojevima $n_x = 1,\ n_y = 0$ i drugom definisanom sa $n_x = 0,\ n_y = 1$. Dakle, nemamo potpunu informaciju o stanju u kom je sistem.

Kako bi se moglo raditi sa ovakvim sistemima kod kojih nisu sve veličine izmerene, uvodi se koncept *statističkog operatora*. Neka $E_1, E_2, \ldots$ čine ansamble fizičkog sistema istog tipa. Ukupan broj elemenata ansambla je $N = N_1 + N_2 + \ldots$, gde je N_1 broj elemenata ansambla E_1 i tako dalje. Neka je svaki od ovih ansanbala određen odgovarajućim stanjem $|\alpha\rangle$. Stanja različitih podansambla u opštem slučaju nisu međusobno ortogonalna ali jesu normirana.

Statistički operator se definiše kao

$$\hat{\rho} = \sum_\alpha \frac{N_\alpha}{N}|\alpha\rangle\langle\alpha| .$$

Ovaj operator je ermitski i ima sledeće bitne osobine:

$$\langle n|\hat{\rho}|n\rangle = \langle n|\left(\sum_{\alpha}\frac{N_\alpha}{N}|\alpha\rangle\langle\alpha|\right)|n\rangle = \sum_{\alpha}\frac{N_\alpha}{N}\sum_{m}a_m\langle n|m\rangle\sum_{k}a_k^*\langle k|n\rangle = \sum_{\alpha,m,k}\frac{N_\alpha}{N}a_m a_k^*\delta_{nm}\delta_{kn} =$$

$$= \sum_{\alpha}\frac{N_\alpha}{N}|a_n|^2 = |a_n|^2$$

Odnosno, $\langle n|\hat{\rho}|n\rangle \geq 0$.

Takođe važi

$$Tr\hat{\rho} = \sum_{n}\langle n|\hat{\rho}|n\rangle = \sum_{n}|a_n|^2 = 1.$$

Svi dijagonalni elementi su nenegativni. Odavde sledi da za sve svojstvene vrednosti $\hat{\rho}$ važi $0 \leq \rho_n \leq 1$.

U slučaju da je $\hat{\rho}$ projekcioni operator, važi $\hat{\rho}^2 = \hat{\rho}$ i $Tr\hat{\rho}^2 = Tr\hat{\rho} = 1$. Tada za svojstvene vrednosti dobijamo slično, $\rho_n^2 = \rho_n$. Vidimo da ρ_n može imati samo vrednosti 0 ili 1. Ako je $\hat{\rho}$ prikazano u svojstvenom bazisu, $Tr\hat{\rho} = \sum_{n}\rho_n = 1$ i sledi da je samo jedna svojstvena vrednost jednaka 1, a sve ostale 0. Operator $\hat{\rho}$ se u svojstvenom bazisu svodi na $\hat{\rho} = \sum_{n}|n\rangle\rho_n\langle n| = |n\rangle\langle n|$.

Da vidimo kakva moraju biti stanja $|\alpha\rangle$ da bi $\hat{\rho}$ bio projekcioni operator. Mora biti zadovoljena relacija $Tr\hat{\rho}^2 = 1$. Ako ovo raspišemo,

$$Tr\hat{\rho}^2 = \sum_{n}\langle n|\left(\sum_{\alpha,\beta}\frac{N_\alpha N_\beta}{N^2}|\alpha\rangle\langle\alpha||\beta\rangle\langle\beta|\right)|n\rangle = \sum_{n,\alpha,\beta}\frac{N_\alpha N_\beta}{N^2}\langle\alpha|\beta\rangle\langle\beta|n\rangle\langle n|\alpha\rangle =$$

$$= \sum_{\alpha,\beta}\frac{N_\alpha N_\beta}{N^2}|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = 1$$

Dalje dobijamo

$$\sum_{\alpha,\beta}N_\alpha N_\beta|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = N^2 = \left(\sum_{\alpha}N_\alpha\right)^2 = \sum_{\alpha,\beta}N_\alpha N_\beta$$

$$\sum_{\alpha,\beta}N_\alpha N_\beta\left(1-|\langle\alpha|\beta\rangle|^2\right) = 0.$$

Kako su sve veličine u sumi pozitivne, a N_α i N_β nisu nula, mora važiti $|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = 1$. Kao posledicu ovoga možemo pisati

$$|\langle\alpha|\beta\rangle|^2 = 1 \equiv \langle\alpha|\alpha\rangle\langle\beta|\beta\rangle.$$

Sledi da mora važiti $|\alpha\rangle = \lambda_{\alpha\beta}|\beta\rangle$. Štaviše, moduo $\lambda_{\alpha\beta}$ mora biti 1 jer su i $|\alpha\rangle$ i $|\beta\rangle$ normirani. Zaključujemo da ako se stanja $|\alpha\rangle$ i $|\beta\rangle$ razlikuju do na fazni faktor, $\hat{\rho}$ je projekcioni operator i njegova definicija prelazi u

$$\hat{\rho} = \sum_\alpha \frac{N_\alpha}{N}|\alpha\rangle\langle\alpha| \to |\alpha\rangle\langle\alpha|.$$

Ako se ansambl ne može rastaviti na podansable u različitim stanjima, radi se o *čistom stanju*. U tom slučaju, $N_\alpha \equiv N$ i sledi $\hat{\rho} = |\alpha\rangle\langle\alpha|$. Vidimo da u ovom slučaju, statistički operator postaje projektor. Važe sledeće osobine

$$Tr\left(\hat{\rho}\hat{A}\right) = \sum_n \langle n|\left(|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{A}\right)|n\rangle = \sum_n \langle\alpha|\hat{A}|n\rangle\langle n||\alpha\rangle = \langle\alpha|\hat{A}|\alpha\rangle = \left\langle\hat{A}\right\rangle.$$

Verovatnoća dobijanja rezultata a_k pri merenju veličine A jednaka je

$$Tr\left(\hat{\rho}\hat{P}_k\right) = \sum_n \langle n|\left(|\alpha\rangle\langle\alpha||k\rangle\langle k|\right)|n\rangle = \langle k|\alpha\rangle\langle\alpha|k\rangle = |c_k|^2 = w(a_k),$$

gde je $\hat{P}_k$ projektor na svojstveno stanje operatora $\hat{A}$ koje odgovara svojstvenoj vrednosti a_k.

Ukoliko je glavni ansambl sastavljen od podansambala koji su određeni vektorima stanja koja nisu identična, radi se o *mešanom stanju*. Podansambli su, naravno, u čistim stanjima. U ovom slučaju, srednja vrednost merene veličine se dobija kao

$$\left\langle\hat{A}\right\rangle = \frac{1}{N}\sum_\alpha N_\alpha \left\langle\hat{A}_\alpha\right\rangle.$$

Prvo se računaju očekivane vrednosti za podansamble, a onda se računa srednja vrednost za ceo ansambl.

$$\left\langle\hat{A}\right\rangle = \frac{1}{N}\sum_\alpha N_\alpha Tr\left(\hat{\rho}_\alpha\hat{A}\right) = \sum_\alpha \frac{N_\alpha}{N}\sum_n \langle n|\left(|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{A}\right)|n\rangle =$$
$$= \sum_n \langle n|\left(\sum_\alpha \frac{N_\alpha}{N}|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{A}\right)|n\rangle = Tr\left(\hat{\rho}\hat{A}\right)$$

Vidimo da za računanje srednje vrednosti važi ista zakonitost kao i kod čistih stanja. Može se pokazati da se za mešana stanja verovatnoća dobijanja određenog rezultata pri merenju takođe dobija po istom zakonu kao i za čista stanja,

$$w(a_k) = \sum_\alpha \frac{N_\alpha}{N} w_\alpha(a_k) = \sum_\alpha \frac{N_\alpha}{N} Tr\left(\hat{\rho}_\alpha\hat{P}_k\right) = \sum_\alpha \frac{N_\alpha}{N}\sum_n \langle n|\left(|\alpha\rangle\langle\alpha||k\rangle\langle k|\right)|n\rangle =$$
$$= \sum_n \langle n|\left(\sum_\alpha \frac{N_\alpha}{N}|\alpha\rangle\langle\alpha||k\rangle\langle k|\right)|n\rangle = Tr\left(\hat{\rho}\hat{P}_k\right).$$

Možemo zaključiti da umesto standardnih formula za računanje srednje vrednosti i verovatnoće dobijanja određenog rezultata, $\left\langle\hat{A}\right\rangle = \langle\Psi|\hat{A}|\Psi\rangle$ i $w(a_k) = |\langle k|\Psi\rangle|^2$, možemo koristiti formule koje koriste statistički operator, $\langle \hat{A} \rangle = Tr(\hat{\rho}\hat{A})$ i $w(a_k) = Tr(\hat{\rho}\hat{P}_k)$. Nove formule su opštije jer važe kako za čista stanja tako i za statističke mešavine.

Ostaje pitanje kako razlikovati čisto od mešanog stanja. Pokazali smo da je statistički operator čistog stanja projektor. Statistički operator mešanog stanja to nije, tj. važi $\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$. Kada bi bio projektor sledilo bi da su svi operatori $|\alpha\rangle\langle\alpha|$ identični među sobom i dati ansambl bi bio u čistom stanju definisanom stanjem $|\alpha\rangle$.

Koncept redukovanog statističkog operatora

Radi jednostavnosti, posmatrajmo isprepletani dvospinski sistem:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2\right)$$

Ovakvo stanje se pojavljuje u Bomovoj verziji EPR eksperimenta. Posmatra se raspad čestice sa nultim spinom na dve nove čestice sa antiparalelnim spinovima. Ukoliko jedna čestica ima spin $|-\rangle_1$, zakon održanja nalaže da druga mora imati $|+\rangle_2$, i obrnuto. Stanje sistema koji čine te dve čestice se opisuje gornjom funkcijom.

Ukoliko se neka naša opservabla $\hat{O}$ odnosi samo na sistem 1, tj. $\hat{O} = \hat{O}_1 \otimes \hat{I}_2$, statistički operator čistog stanja $\hat{\rho} = |\Psi\rangle\langle\Psi|$ daje isto očekivanje $\langle \hat{O} \rangle$ kao i *redukovani operator*, $\hat{\rho}_1 = Tr_2(|\Psi\rangle\langle\Psi|)$.

$$\langle \hat{O} \rangle = Tr(\hat{\rho}\hat{O}) = \sum_{n,m=\pm} \langle n|_1 \langle m|_2 \hat{\rho}\hat{O}_1 \otimes \hat{I}_2 |n\rangle_1 |m\rangle_2 = \frac{1}{2}\left[\langle +|_1 \hat{O}_1 |+\rangle_1 + \langle -|_1 \hat{O}_1 |-\rangle_1\right]$$

Sa druge strane

$$Tr_1(\hat{\rho}_1\hat{O}_1) = \sum_{n=\pm} \langle n|_1 \hat{\rho}_1\hat{O}_1 |n\rangle_1 = \frac{1}{2}\left[\langle +|_1 \hat{O}_1 |+\rangle_1 + \langle -|_1 \hat{O}_1 |-\rangle_1\right].[24]$$

Sledi da je

$$\langle \hat{O} \rangle = Tr(\hat{\rho}\hat{O}) = Tr_1(\hat{\rho}_1\hat{O}_1).$$

Redukovani statistički operator $\hat{\rho}_1$ nam daje istu statistiku kao i statistički operator čistog stanja $\hat{\rho}$.

Ovaj rezultat ostaje na snazi i ako se naše čisto stanje sastoji iz velikog broja upletenih stanja podsistema.

$$|\Psi\rangle = \sum_i \alpha_i |\phi_i\rangle_1 |\phi_i\rangle_2 |\phi_i\rangle_3 \ldots |\phi_i\rangle_N$$

[24] Radi jednostavnosti je pretpostavljeno da su stanja 2 ortogonalna. Zaključak $\langle \hat{O} \rangle = Tr(\hat{\rho}\hat{O}) = Tr_1(\hat{\rho}_1\hat{O}_1)$ važi i ako nisu.

Set stanja $\left\{ \left| \phi_i \right\rangle_j \right\}$ formira bazis u odgovarajućem Hilbertovom prostoru $\mathrm{H}_j,\ j = 1,2,...,N$. Ako opet posmatramo opservablu $\hat{O}$ koja se odnosi samo na sistem *j*

$\hat{O} = \hat{I}_1 \otimes \hat{I}_2 \otimes \cdots \otimes \hat{I}_{j-1} \otimes \hat{O}_j \otimes \hat{I}_{j+1} \otimes \cdots \otimes \hat{I}_N$, opet će važiti

$\left\langle \hat{O} \right\rangle = Tr\left(\hat{\rho}\hat{O} \right) = Tr_j\left(\hat{\rho}_j \hat{O}_j \right)$, gde je $\hat{\rho}_j$ redukovani statistički operator.

Vratimo se na gornji primer sa spinovima. Za redukovani operator se dobija

$$\hat{\rho}_1 = Tr_2\left(\left| \Psi \right\rangle \left\langle \Psi \right| \right) = \frac{1}{2} \left| + \right\rangle_1 \left\langle + \right|_1 + \frac{1}{2} \left| - \right\rangle_1 \left\langle - \right|_1 .$$

Ovakav statistički operator bi se dobio i kad bi sistem 1 bio u mešanom stanju, tj. u jednom od dva stanja $\left| + \right\rangle_1$ i $\left| - \right\rangle_1$ sa jednakim verovatnoćama. Sledi da merenjem opservable koja se odnosi samo na jedan sistem ne možemo razlikovati da li je sistem u čistom ili mešanom stanju. Ne smemo smetnuti sa uma da je redukovani statistički operator samo pogodan matematički pojam i da on ne definiše stanje sistema, tj. ne smemo tvrditi da je posmatrani sistem zaista u mešanom stanju.

Dodatak F Teorema Košen-Spekera (ovog dodatka nema u štampanom radu)

Kao što smo videli, eksperimenti na osnovu Belove nejednakosti su iz igre izbacili lokalne teorije skrivenih varijabli. Preostaje pitanje nelokalnih teorija. Ove se, u zavisnosti koji kriterijum uzmemo, mogu podeliti na određene podgrupe. 1966. Bel izdaje članak[25] u kome kritikuje dotadašnje dokaze nepostojanja skrivenih varijabli. Tokom svog izlaganja, on pravi razliku između kontekstualnih i nekontekstualnih teorija (mada ih on tada nije zvao tako). Nekontekstualne teorije su one kod kojih vrednosti jedne varijable ne zavisi od toga koje se veličine pored nje mere kao ni od eksperimentalnog okvira. Većina dotadašnjih dokaza protiv skrivenih varijabli su u stvari bili protiv ove podgrupe. Kontekstualne teorije su one kod kojih vrednost varijabli zavisi i od toga koje se veličine mere uporedo kao i od eksperimentalnog okvira u koji je problem postavljen.Vidimo da je Bor uveo kontekstualnost u standardnu kvantnu teoriju definisanjem principa komplementarnosti. Druga podela može se napraviti na teorije koje tvrde da sve varijable imaju definisanu vrednost u svakom trenutku i na one koje smatraju da je u jednom trenutku definisana samo jedna grupa varijabli a da su ostale nedefinisane. Ove poslednje se još nazivaju i modalne teorije. Podgrupe nastale na osnovu dva navedena kriterijuma se preklapaju, tako da postoje, recimo, modalne kontekstualne teorije od kojih je najznačajniji predstavnik Bomova teorija „vodećeg talasa“ (čiji je zastupnik bio i sam Bel).

Jedna od osnovnih pretpostavki teorija skrivenih varijabli tiče se mogućnosti pripisivanja definisanih vrednosti posmatranom sistemu. Ova pretpostavka je poznata pod nazivom VD-stav[26] i glasi:

(VD) Sve osobine koje kvantnomehanički sistem poseduje imaju definisane vrednosti u svim trenucima.

Ovaj stav je posledica prihvatanja filozofskog principa realnosti, tj. verovanja da sve što postoji u fizičkom svetu ne zavisi od merenja koje vršimo (ili ne vršimo).

Druga pretpostavka koja važi tiče se već pomenutog pojma kontekstualnosti:

---

[25] J. S. Bell, On the problem of hidden variables in quantum theory. Rev. Mod. Phys. 38 (1966)

[26] **V**alue **D**efiniteness

(NC[27]) Ako kvantnomehanički sistem poseduje definisanu vrednost neke opservable, onda je poseduje nezavisno od konteksta merenja, tj. od načina merenja.

Ovo znači da ako sistem poseduje datu osobinu, on je poseduje nezavisno od toga da li poseduje druge osobine vezane za drugačije eksperimentalne uslove.

Obe pretpostavke, VD i NC, u suštini izražavaju ideju o nezavisnosti fizičke realnosti od merenja.

Teorema Košen-Spekera tvrdi da, ukoliko se pretpostavi nekontekstualnost, određenim skupovima kvantnomehaničkih varijabli se ne može pripisati vrednost uopšte, tj. da postoji kontradikcija između pretpostavki VD+NC i kvantne mehanike. Prihvatanje kvantne mehanike nas prisiljava na odbacivanje ili VD ili NC. VD pretpostavka je motivisana konceptualnim poteškoćama na koje je naišla standardna kvantna teorija. Misli se pre svega na statistički karakter teorije kao i na problem merenja. Ako bi VD pretpostavka bila opravdana, objašnjenje ovih problema bi bilo trivijalno. Zbog ovoga se zagovornici teorija skrivenih varijabli radije odriču NC pretpostavke.

Košen-Speker teorema ima dve bitne osobine zbog kojih i jeste jedan od najjačih argumenata protiv teorija sktivenih varijabli. Prvo, bazirana je na konačnom skupu diskretnih varijabli (a ne na kontinuumu kao svi dotadašnji dokazi). I drugo, za fizičku realizaciju teoreme se koristi jednočestični sistem. Ni separabilnost ni lokalnost ni u jednom trenutku ne ulaze u priču.

Sada kad smo uveli osnovne pretpostavke, možemo definisati teoremu:

Neka je H Hilbertov prostor dimenzije $x \geq 3$. Postoji skup M opservabli nad H koji sadrži y elemenata takav da su dve sledeće tvrdnje kontradiktorne:

(KS1) Svih y članova M istovremeno poseduju vrednost, tj. operatorima $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \ldots$ iz M odgovaraju vrednosti $v\left(\hat{A}\right), v\left(\hat{B}\right), v\left(\hat{C}\right), \ldots$

(KS2) Vrednosti opservabli poštuju sledeća pravila:

(a) Ako su operatori $\hat{A}, \hat{B}$ i $\hat{C}$ kompatibilni (imaju isti bazis) i $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$, onda važi i $v\left(\hat{C}\right) = v\left(\hat{A}\right) + v\left(\hat{B}\right)$.

(b) Ako su operatori $\hat{A}, \hat{B}$ i $\hat{C}$ kompatibilni i $\hat{C} = \hat{A}\hat{B}$, onda važi i $v\left(\hat{C}\right) = v\left(\hat{A}\right) v\left(\hat{B}\right)$.

Tvrdnja KS1 je ekvivalentna VD-u. Tvrdnje KS2a i KS2b se nazivaju zakon sume i zakon proizvoda. Može se pokazati da su oba zakona posledica NC.

U originalnom dokazu teoreme $x = 3$ i $y = 117$. Postoje i noviji dokazi koji koriste manje opservabli. Dokazano je da je $y = 18$ najmanji broj opservabli za koji važi Košen-Speker teorema.

Kako bi dokazali teoremu, potrebne su nam dve stvari: (1) skupovi od po tri ortogonalna zraka u H_3 (trodimenzioni Hilbertov prostor); (2) ograničenje koje će svakoj trojci zraka nametnuti da jedan zrak ima vrednost 1 a ostali 0. Da vidimo zašto nam trebaju ovi zahtevi i kako ih ispuniti. Posmatramo proizvoljan operator $\hat{Q}$ nad H_3. On ima tri različite svojstvene vrednosti q_1, q_2 i q_3 i tri odgovarajuća svojstvena vektora $|q_1\rangle, |q_2\rangle$ i $|q_3\rangle$. Možemo definisati tri projektora $\hat{P}_1, \hat{P}_2$ i $\hat{P}_3$ koji projektuju na zrake definisane svojstvenim vektorima. Projektor $\hat{P}_i$ je „da-ne opservabla“ koja odgovara na pitanje „Da li sistem ima vrednost q_i za $\hat{Q}$?“ To možemo videti iz sledećih relacija,

[27] **N**on**C**ontextuality

$$\hat{Q}|q_i\rangle = q_i|q_i\rangle$$
$$\hat{P}_i|q_i\rangle = |q_i\rangle = +1|q_i\rangle$$
$$\hat{P}_i|q_j\rangle = 0|q_i\rangle = 0|q_j\rangle$$

Delujući projektorom na neko od svojstvenih stanja $\hat{Q}$ možemo dobiti dva odgovora:

a) +1, što znači da stanje ima vrednost q_i za veličinu $\hat{Q}$;

b) 0, stanje nema vrednost q_i za veličinu $\hat{Q}$;

Jedinični operator se može razložiti po projektorima,

$$\hat{I} = \sum_i \hat{P}_i .$$

Kako i $\hat{I}$ i projektori $\hat{P}_i$ dele isti bazis, zbog tvrdnje KS2a važi

$$v\left(\hat{I}\right) = 1 = v\left(\hat{P}_1\right) + v\left(\hat{P}_2\right) + ... + v\left(\hat{P}_N\right)$$ [28].

Međutim, zbog idempotentnosti projektora i tvrdnje KS2b imamo

$$v\left(\hat{P}_i^2\right) = \begin{cases} v\left(\hat{P}_i\right) \\ v\left(P_i\right)v\left(P_i\right) \end{cases} \Rightarrow v\left(\hat{P}_i\right) = 1 \text{ ili } v\left(\hat{P}_i\right) = 0$$

Tvrdnja KS2 dobija sledeći oblik:

(VC1[29]) $v\left(\hat{P}_1\right) + v\left(\hat{P}_2\right) + ... + v\left(\hat{P}_N\right) = 1$, gde $v\left(\hat{P}_i\right) = 1$ ili $v\left(\hat{P}_i\right) = 0$.

VC1 znači da unutar proizvoljne trojke ortogonalnih zrakova samo jednom dodeljujemo vrednost 1, a ostalima 0.

Izbor neke drugačije opservable $\hat{Q}'$ definiše nove projektore $\hat{P}_i'$ koji opet određuju nove zrake u H_3. Za njih, takođe, mora da važi VC1. Ako uvedemo dodatne nekompatibilne opservable $\hat{Q}'', \hat{Q}''', ...$ one određuju različite ortogonalne triplete u H_3. VD, tj. KS1, zahteva da svaki od njih ima tri vrednosti, a VC1 zahteva da te vrednosti budu baš (1,0,0).

Košen-Speker teorema tvrdi da za specifični konačni skup ortogonalnih trojki u H_3 nije moguće dodeliti vrednosti (1,0,0) svim tripletima. Da bi se teorema dokazala, nije neophodno da operišemo u kompleksnom prostoru. Pokazano je da ako se dokaže važenje teoreme u realnom prostoru (u R_3), onda ona mora važiti i u kompleksnom prostoru.

Razmotrićemo originalnu postavku Košena i Spekera. Posmatrajmo spin-1 česticu. Interesuju nas vrednosti operatora $\hat{S}_x^2, \hat{S}_y^2$ i $\hat{S}_z^2$. Ovi operatori komutiraju pa su i kompatibilni. Njihova suma daje $\hat{S}_x^2 + \hat{S}_y^2 + \hat{S}_z^2 = \hat{S}^2$. Svojstvene vrednosti $\hat{S}^2$ su $s\left(s+1\right)$ pa za $s = 1$, koristeći zakone sume i proizvoda, imamo:

[28] U našem slučaju *N*=3

[29] **V**alue **C**onstraints

$v\left(\hat{S}_x^2\right)+v\left(\hat{S}_y^2\right)+v\left(\hat{S}_z^2\right)=2v\left(\hat{I}\right)$ ili

(VC2) $v\left(\hat{S}_x^2\right)+v\left(\hat{S}_y^2\right)+v\left(\hat{S}_z^2\right)=2$, gde $v\left(\hat{S}_\alpha^2\right)=1$ ili $v\left(\hat{S}_\alpha^2\right)=0$, $\alpha = x, y, z$

Operatori $\hat{S}_\alpha^2$ komutiraju pa postoji neki operator $\hat{O}$ takav da su $\hat{S}_\alpha^2$ funkcije od $\hat{O}$. Izborom $\hat{O}$ biramo i $\hat{S}_\alpha^2$, tj. trojku zraka u H_3. Problem je u ovom slučaju malo drugačiji ali analogan – da li možemo dodeliti vrednosti (1,1,0) svim trojkama u odgovarajućom skupu? Izbor $\hat{O}$ definiše i tri ortogonalna zraka u fizičkom prostoru tako što fiksira koordinatni sistem x, y, z i tako određuje duž kojih se osa određuju vrednosti $\hat{S}_x^2, \hat{S}_y^2$ i $\hat{S}_z^2$.

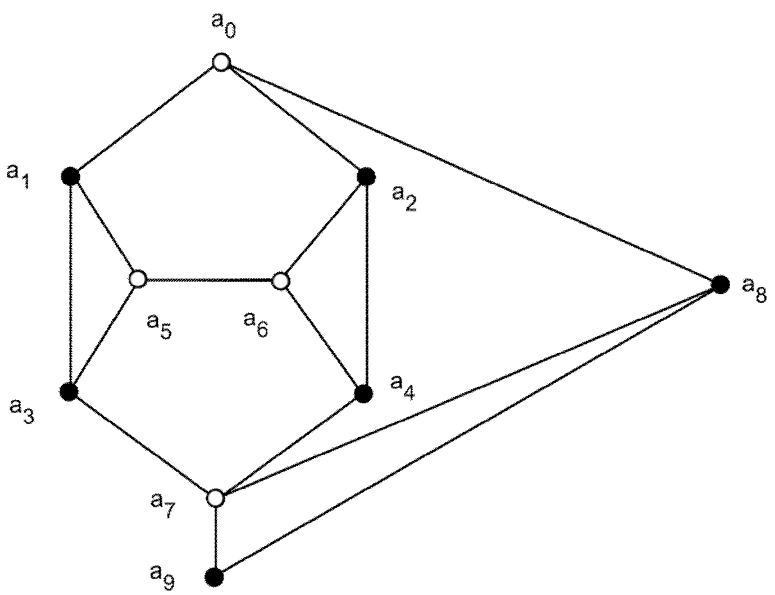
Košen-Speker teorema pokazuje da nije moguće dodeliti vrednosti za sve proizvoljne izbore $\hat{O}$. Kako bi mogao da se prati dokaz teoreme, moramo uvesti još neka pravila:

1. Zrak predstavljamo tačkom na jediničnoj sferi. Podrazumeva se da je zrak određen centrom sfere i tom tačkom.

2. VC1 i VC2 ograničenja se prevode u pravilo bojenja tačaka. U slučaju VC2, tačke (odnosno zrake) bojimo belo kada im pripisujemo vrednost 0, a crno ako im pripišemo vrednost 1.

3. Relacije između zraka se predstavljaju na takozvanim KS dijagramima. Svakom zraku je pripisana tačka (ili verteks). Dve tačke spojene pravom linijom predstavljaju dva ortogonalna zraka. Trougao predstavlja jedan bazis. Pravilo bojenja zahteva da dve spojene tačke ne smeju biti obe bele i da svaki trougao sadrži samo jednu belu tačku.

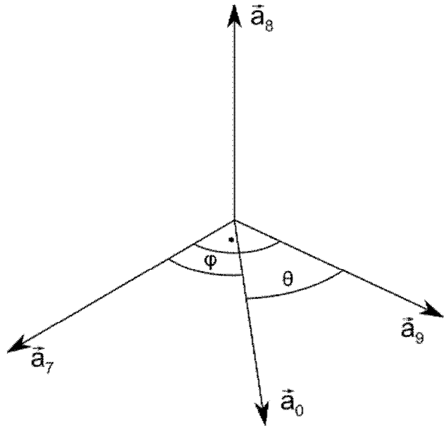
U prvom koraku ćemo pokazati da dva zraka suprotnih boja ne mogu biti proizvoljno blizu. Posmatramo sledeći dijagram, koji ćemo zvati G1 dijagram.



Slika xx. G1-dijagram

Vidimo da imamo deset tačaka, tj. deset vektora, koji stoje u nekom odnosu. Svakoj tački a_i odgovara jedinični vektor $\vec{a}_i$. Na primer, tačke a_0 i a_1 predstavljaju dva orotogonalna vektora $\vec{a}_0$ i $\vec{a}_1$.

Interesuje nas da li možemo da odredimo ugao između $\vec{a}_0$ i $\vec{a}_9$. Pretpostavimo da je to neki ugao θ. Kako je $\vec{a}_8$ ortogonalno na $\vec{a}_0$ i $\vec{a}_9$, a $\vec{a}_7$ na $\vec{a}_8$ i $\vec{a}_9$, zaključujemo da $\vec{a}_7$ leži u ravni određenom vektorima $\vec{a}_0$ i $\vec{a}_9$. Ugao između $\vec{a}_7$ i $\vec{a}_0$ ćemo označiti sa φ i biramo da važi $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$.



Slika xx.

Označimo sad vektore $\vec{a}_5 = \vec{i}$ i $\vec{a}_6 = \vec{k}$ i pretpostavimo da postoji $\vec{j}$ takvo da $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ predstavljaju ortogonalni bazis.

Kako je $\vec{a}_1$ normalno na $\vec{a}_5 = \vec{i}$, možemo ga predstaviti pomoću $\vec{j}$ i $\vec{k}$ na sledeći način:

$\vec{a}_1 = \dfrac{\vec{j} + x\vec{k}}{\sqrt{1+x^2}}$, gde je x neki realan broj.

Slično, pošto je $\vec{a}_2$ normalno na $\vec{a}_6 = \vec{k}$,

$\vec{a}_2 = \dfrac{\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{1+y^2}}, \ y \in R.$

Vidimo da je $\vec{a}_3$ normalno na vektore $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_5$ pa može biti izraženo preko njih na sledeći način:

$\vec{a}_3 = \vec{a}_5 \times \vec{a}_1 = \dfrac{-x\vec{j} + \vec{k}}{\sqrt{1+x^2}}.$

Slično dobijamo i

$\vec{a}_4 = \vec{a}_2 \times \vec{a}_6 = \dfrac{y\vec{i} - \vec{j}}{\sqrt{1+y^2}}, \quad \vec{a}_0 = \dfrac{\vec{a}_1 \times \vec{a}_2}{|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2|} = \dfrac{-xy\vec{i} + x\vec{j} - \vec{k}}{\sqrt{1+x^2+x^2y^2}}$ i $\vec{a}_7 = \dfrac{\vec{a}_4 \times \vec{a}_3}{|\vec{a}_4 \times \vec{a}_3|} = \dfrac{-\vec{i} - y\vec{j} - xy\vec{k}}{\sqrt{1+y^2+x^2y^2}}.$

Najzad, ugao φ možemo dobiti pomoću skalarnog proizvoda a_0 i $\vec{a}_7$,

$$\cos\varphi = \vec{a}_0 \cdot \vec{a}_7 = \frac{xy}{\sqrt{(1+x^2+x^2y^2)(1+y^2+x^2y^2)}}.$$

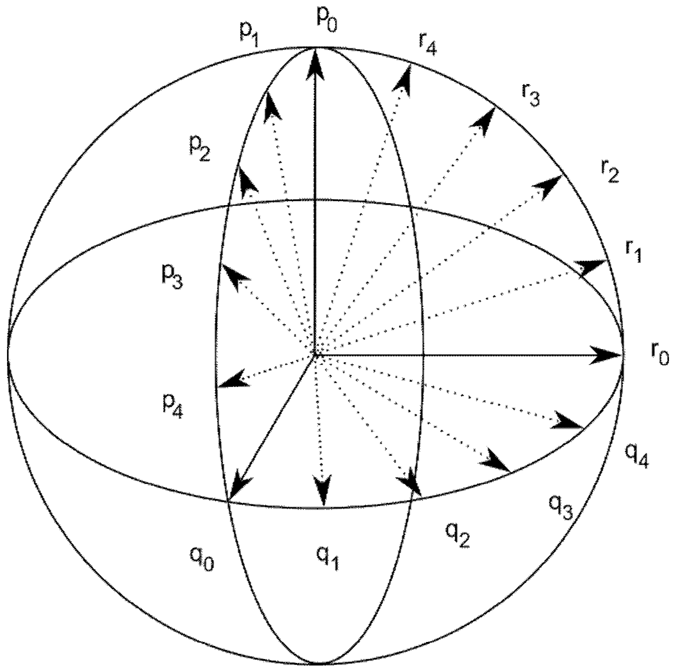
A kako je $\varphi = \frac{\pi}{2} - \theta$,

$$\sin\theta = \frac{xy}{\sqrt{(1+x^2+x^2y^2)(1+y^2+x^2y^2)}}.$$

Gornja funkcija ima maksimalnu vrednost $\frac{1}{3}$ za $x = y = \pm 1$. Sledi $0 \le \sin\theta \le \frac{1}{3}$. Znači, između svaka dva vektora kod kojih ugao između njih poštuje ograničenje $0 \le \theta \le \arcsin\frac{1}{3}$ možemo ubaciti jedan ovakav dijagram.

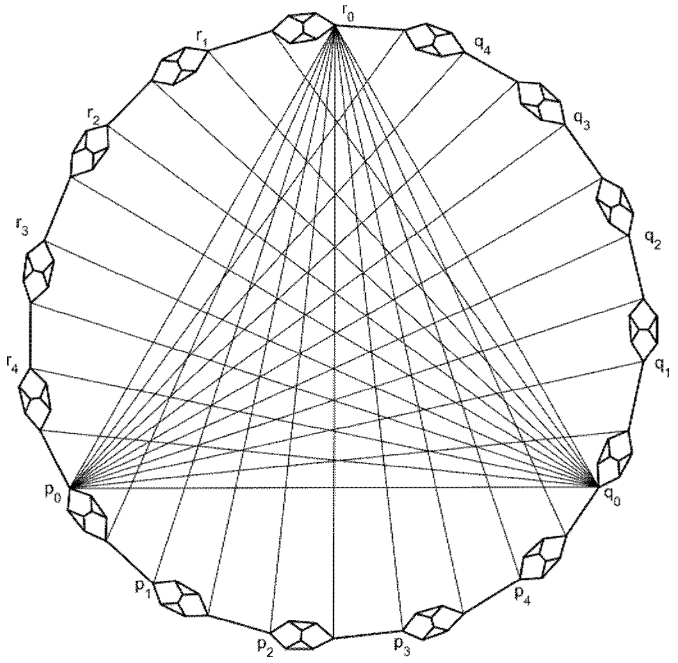
Zbog čega je ovaj dijagram poseban? Razmotrimo šta se dešava kada primenimo pravilo bojenja zraka na njega. Obojimo, za početak, a_0 i a_9 različitim bojama, kao na slici gore. Koristeći pravila bojenja, dolazimo u situaciju da su i a_5 i a_6 obojeni u belo. Ovo je nedozvoljena situacija i zaključujemo da a_0 i a_9 moraju biti iste boje kako bi mogli konzistentno da obojimo ceo dijagram. Drugim rečima, dva zraka različite boje ne mogu biti proizvoljno blizu.

Izaberimo ugao θ da bude $18° < \arcsin\frac{1}{3}$. Posmatramo tri ortogonalna zraka, tj. tačke, p_0, q_0 i r_0.



Slika xx.

Između svake dve tačke možemo smestiti po pet G1 dijagrama ($5 \cdot 18° = 90°$) i to tako da se preklapaju a_9 jednog i a_0 sledećeg u nizu. Za sve G1 dijagrame između p_0 i q_0 tačka a_8 se poklapa sa tačkom r_0. Slično i za dijagrame između p_0 i r_0 i između q_0 i r_0.



Slika xx. G2-dijagram

Pokazuje se da dijagram G2 nije moguće konzistentno obojiti. Zbog toga što je $\theta = 18°$, u svakom G1 dijagramu a_0 i a_9 moraju biti iste boje. Kako se poklapaju a_0 i a_9 susednih dijagrama, svi a_0 i a_9 u celom G2 dijaramu će biti iste boje. Međutim, i tačke p_0, q_0 i r_0 se poklapaju sa a_0 i a_9 pa su i one iste boje, ali pošto predstavljaju ortogonalne zrake jedan mora biti beo a dva crna. Znači, G2 ne može biti konzistentno obojen u skladu sa zahtevima VC2.

U G2 dijagramu ima 15 G1 dijagrama. Kada se oduzmu tačke koje se preklapaju dobije se ukupno 117 tačaka, tj. 117 zrakova. Košen-Speker teorema je dokazala da se skupu od 117 da-ne opservabli ne mogu konzistentno pripisati vrednosti u skladu sa VC2 (ili VC1). Kako zraci odgovaraju različitim orijentacijama koordinatnog sistema pri merenju $\hat{S}_x^2, \hat{S}_y^2$ i $\hat{S}_z^2$, dobijamo da pri određenim orijentacijama sistema date opservable nemaju definisanu vrednost.

Možemo primetiti da na dijagramu postoje tačke koje pripadaju različitim trojkama. Tu se vidi potreba za nekontekstualnošću. Ona mora biti u startu pretpostavljena kako bi boja jednog zraka ostala nepromenjena u različitim trojkama, tj. pri različitim merenjima.

Da bi izbegli Košen-Speker teoremu, teorije skrivenih varijabli moraju da se odreknu neke od početnih pretpostavki, VD ili NC. Odricanje od VD-a bi značilo da se ne zahteva da sve varijable budu definisane već da samo jedan određen skup njih bude. Ovaj pristup su prihvatile modalne interpretacije. Postavlja se pitanje da li su modalne teorije imune na ovu teoremu jer se pokazalo da postoje specijalni oblici Košen-Speker teoreme koji važe i za neke modalne teorije. Drugo pitanje sa kojim se suočavaju modalne teorije je pitanje izbora varijabli koje su definisane. Sa druge strane, uvođenje kontekstualnosti u teoriju može biti urađeno na više načina. Jedan od njih se može smatrati proširenjem Borovog stava na teorije skrivenih variabli, naime da vrednosti osobina zavise od eksperimentalnog okvira u koji je posmatrani sistem smešten. To bi za sobom povlačilo posledicu da su osobine sistema uslovnog tipa, da sistem ima određene osobine samo ako ima i neke određene druge ili ako je deo određene eksperimentalne postavke. Ovo i slični problemi su predmet filozofskih rasprava u koje se ne sme olako uplitati. Pošto je ova teorema samo deo rada, zadržaćemo se na dosad rečenom i nećemo u to dublje ulaziti.

Literatura

1. Aharonov, Y., Rohrlich, D., Quantum Paradoxes: Quantum Theory for the Perplexed, WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA (2005)
2. Aspect, A., Bell's inequality test: more ideal than ever, Nature 398, 189 (1999)
3. Aspect, A., Dalibard, J., Roger, G., Experimental Test of Bell's Inequalities Using Time-Varying Analyzers, Phys. Rev. Letters 49, No. 25, 1804 (1982)
4. Bell, J. S., Speakable and unspeakable in quantum mechanics: collected papers in quantum mechanics, Cambridge University Press (1987)
5. Bohr, N., Atomska fizika i ljudsko znanje, Nolit, Beograd (1985)
6. Brukner, Č., Hofner, J., Quantum, classical and coarse-grained measurements, Workshop on modern trends in quantum optics and quantum information, Prague (2008)
7. Dugić, M., Osnovi kvantne informatike i kvantnog računanja, PMF, Kragujevac (2009)
8. d'Espagnat, B., Conceptual Foundations of Quantum Mechanics, Perseus Books Publishing, L.L.C. (1999)
9. Einstein A., Podolsky B., Rosen, N., Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?, Phys. Rev. **47**, 777 (1935)
10. Herbut, F., Kvantna mehanika za istraživače, Univerzitet u Beogradu (1999)
11. Home, D., Whitaker, A., Einstein's Struggles with Quantum Theory, Springer Science+Business Media, L.L.C. (2007)
12. Kiefer, C., On the interpretation of quantum theory – from Copenhagen to the present day, arXiv:quant-ph/0210152v1 (2002)
13. Leggett, A. J., Realism and the physical world, Rep. Prog. Phys. **71**, 1 (2008)
14. Mensky, M. B., Quantum mechanics: new experiments, new applications, and new formulations of old questions, Physics-Uspekhi **43**, 585 (2000)
15. Mermin, N. D., Is the moon there when nobody looks? Reality and the quantum theory, Physics Today, 38 (1985)
16. Popov, L., Einstein-Podolsky-Rosen (EPR) argument i posljedice, Zagreb
17. Schlosshauer, M., Decoherence, the measurement problem, and interpretations of quantum mechanics, Rev. Mod. Phys. **76**, 1267 (2004)
18. Weinberg, S., Snovi o konačnoj teoriji, Solaris, Beograd
19. Wheeler, J. A., Zurek, W. H., Quantum Theory and Measurement, Princeton Series in Physics, Princeton, New Jersey (1983)
20. Zeilinger, A., Aspelmeyer, M., A Quantum Renaissance, Physics World, 22 (2008)
21. Zeilinger, A., Experiment and the foundations of quantum physics, Rev. Mod. Phys. **71**, No. 2, 288 (1999)
22. Zurek, W. H., Decoherence and transition from quantum to classical, Physics Today, 36 (1991)

23. Jonathan Bain, Philosophy of Quantum Mechanics – Courses, http://ls.poly.edu/~jbain/philqm/
24. Copenhagen Interpretation of Quantum Mechanics, Stanford Encyclopedia of Philosophy, http://plato.stanford.edu/
25. The Kochen-Specker Theorem, Stanford Encyclopedia of Philosophy, http://plato.stanford.edu/
26. Leggett–Garg inequality, Wikipedia, the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
27. Bell test experiments, Wikipedia, the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page
28. Loopholes in Bell test experiments, Wikipedia, the free encyclopedia, http://en.wikipedia.org/wiki/Main_Page

Biografija autora

Marko Bošković je rođen 30. maja 1983. godine u Rumi, gde je stekao osnovno i srednje obrazovanje. Nakon završene gimnazije, 2002. godine upisuje fiziku na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu, smer medicinska fizika. Početkom treće godine studija se prebacuje na smer diplomirani fizičar.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:	
RBR	
Identifikacioni broj:	
IBR	
Tip dokumentacije:	Monografska dokumentacija
TD	
Tip zapisa:	Tekstualni štampani materijal
TZ	
Vrsta rada:	Diplomski rad
VR	
Autor:	Marko Bošković
AU	
Mentor:	Prof. dr Milan Pantić
MN	
Naslov rada:	Neka konceptualna pitanja kvantne mehanike
NR	
Jezik publikacije:	srpski (latinica)
JP	
Jezik izvoda:	srpski/engleski
JI	
Zemlja publikovanja:	Srbija
ZP	
Uže geografsko područje:	Vojvodina
UGP	
Godina:	2011
GO	
Izdavač:	Autorski reprint
IZ	
Mesto i adresa:	Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA	
Fizički opis rada:	6/57/9/3/11/0/5
FO	
Naučna oblast:	Fizika
NO	
Naučna disciplina:	Teorijska fizika
ND	
Predmetna odrednica/ ključne reči:	Problem merenja, EPR efekat
PO	
UDK	
Čuva se:	Biblioteka departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu
ČU	
Važna napomena:	Nema
VN	

Izvod: **IZ**	Rad predstavlja uvod u dva ključna problema kvantne mehanike, EPR efekat i problem merenja.
Datum prihvatanja teme od NN veća: **DP**	
Datum odbrane: **DO**	
Članovi komisije: **KO**	
Predsednik:	Prof. dr Darko Kapor
član:	Prof. dr Milan Pantić
član:	Prof. dr Miodrag Krmar

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number: **ANO**	
Identification number: **INO**	
Document type: **DT**	Monograph publication
Type of record: **TR**	Textual printed material
Content code: **CC**	Final paper
Author: **AU**	Marko Bošković
Mentor/comentor: **MN**	Prof. Milan Pantić PhD
Title: **TI**	Some Conceptual Questions of Quantum Mechanics
Language of text: **LT**	Serbian (Latin)
Language of abstract: **LA**	English
Country of publication: **CP**	Serbia
Locality of publication: **LP**	Vojvodina
Publication year: **PY**	2011
Publisher: **PU**	Author's reprint
Publication place: **PP**	Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
Physical description: ***PD***	6/57/9/3/11/0/5
Scientific field: **SF**	Physics
Scientific discipline: **SD**	Theoretical physics
Subject/ Key words: **SKW**	Measurement problem, EPR effect
UC	
Holding data: **HD**	Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4
Note: **N**	None

Abstract: The paper represents an introduction to two major problems of quantum mechanics, EPR effect and measurement problem.
AB

Accepted by the Scientific Board:
ASB
Defended on:
DE
Thesis defend board:
DB

President: Prof. Darko Kapor PhD
Member: Prof. Milan Pantić PhD
Member: Prof. Miodrag Krmar PhD