

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNOMATEMATIČKI FAKULTET

Mr Mario Škrinjar

BOSE KONDENZACIJA U SISTEMU ČESTICA I
KVAZIČESTICA I MOGUĆE PRIMENE OVOG EFEKTA

- doktorska disertacija -

NOVI SAD 1975.

10/2

UZLJAVAC: Dr. Bratislav Tošić

St. Štečni nalog: 100/7

Na ovom mestu želim da izrazim veliku zahvalnost Dr Bratislavu S. Tošiću, vanrednom profesoru Prirodnog matematičkog fakulteta u Novom Sadu i mentoru ovog rada, koji mi je pomogao pri izboru teme i korisnim sugestijama i aiskuajama doprineo da se rad na ovoj tezi uspešno završi.

Posebno se zahvaljujem Dr Stanoju D. Stojanoviću, docentu Prirodnog matematičkog fakulteta u Novom Sadu, Mr Darku Kaporu, asistentu Prirodnog matematičkog fakulteta u Novom Sadu i Dr Radoslavu B. Žakuli, naučnom saradniku IBK u Vinči na korisnim sugestijama u toku rada na ovoj tezi.

Tehničku pomoć u izradi ove teze pružili su Stevan Vaderna i Slobodan Božić, na čemu im se ovom prilikom zahvaljujem.

KAKIĆ
VADERNA

APRONTA

LITERATURA

A U T O R

S A D R Č A J

UVOD	I
I GLAVA: O Bose kondenzaciji	1
1. Tečni helijum (He^4)	1
2. Problem superprovodljivosti	14
3. Mogućnost Bose-kondenzacije kvazičestica	26
II GLAVA: Bose kondenzacija Frenkelovih eksitona i polaritona	36
4. Eksitonski hamiltonijan i Bose kondenzacija	36
5. Korekcija superfluidnog spektra usled neodržanja nekondenziranih eksitona	43
6. Bose-kondenzacija u sistemu polaritona	59
7. Eksiton-foton interakcija i Bose-kondenzacija eksitona i eksitonskih kaplji	74
III GLAVA: Bose-kondenzacija u sistemu magnona i kuperovskih parova	86
8. Bose-kondenzacija u sistemu magnona	86
9. Reformulisana BCS teorija superprovodljivosti	98
ZAKLJUČAK	110
APENDIKS	113
LITERATURA	121

U ovom radu je predstavljeno konceptualno srođenje i analiza učinkova dve glavne BCS teorije superprovodljivosti, t.j. učinkova dvostrukog i polikratnog međusobnog vezanja učinkova magnetizujućih i elektromagnetičkih silava, na posebne fizikalne probleme, kao npr. na stvaranje i razvoj polikratne magnetizujuće trave, zatim na učinkove magnetizujuće i elektromagnetičke silave, gde je fokus na superfluidnosti da faktički predstavlja učinkove i učinkove.

U V O D

Cilj ove teze je teorijska analiza procesa Bose kondenzacije u kvazičestičnim sistemima. Kao što je poznato, pojava Bose kondenzacije može da prouzrokuje superfluidna kretanja u sistemima u kojima se ona dogadja. Treba naglasiti da izraz "superfluidna kretanja" ovde nije slučajno upotrebljen jer istraživanja koja će se ovde vršiti ne odnose se samo na superfluidni prenos mase već na superfluidne prenose nanelektrisanja, energije i drugih fizičkih veličina koje karakterišu sistem.

Mada i danas postoje dileme o tome da li je u sistemu kvazičestica moguć fenomen Bose kondenzacije, jer sigurnih eksperimentalnih potvrda za ovo još uvek nema, ovde će se polaziti od predpostavke da je ona zaista moguća i ispitati se veoma širok spektar njenih posledica. Obsirom da postoje mišljenja da je fenomen Bose kondenzacije nemoguć u sistemu kvazičestica dosta pažnje biće posveđeno kriterijumima za egzistenciju Bose kondenzacije i različitim mišljenjima koja se u vezi sa ovim pojavljuju u literaturi.

Analiza Bose kondenzacije i njenih posledica biće izvršena za različite fizičke sisteme, kao napr. za sisteme optičkih pobudjenja različite vrste, zatim za magnetne materijale i za provodnike, gde je fenomen superfluidnosti de facto proticanje struje bez otpora.

GLAVIĆ

Nije potrebno isticati neophodnost ovakvih istraživanja, jer svaki prenos energije bez trenja ili sa minimalnim gubicima ima izvanredno veliki praktični značaj. Osim toga treba naglasiti da sistem u kome egzistira kondenzat ima čitav niz kvalitativno novih osobina u odnosu na sistem bez kondenzata, pa je zbog toga neophodno upoznati ove osobine da bi im se mogla naći odgovarajuća praktična primena. Nije isključeno da će istraživanja ovakve vrste predstavljati veoma značajnu podlogu za razvoj biofizike, jer je očigledno, s obzirom na relativno malu snagu bioenergetskih izvora i relativno dug život bioloških organizama, da je fenomen superfluidnog prenosa energije informacije i drugih agensa zastupljen u bioenergetskim procesima.

U dva stabila isotopa helijuma, He^3 i He^4 , su eksistirale dozadne i respektivne, koji i predstavljaju jedine vratne vrste u svemiru, što se tiče svojstva superfluidnosti, koje poseduje samo He^4 . Sjedi atomi imaju spin $s = 1/2$ (supozivaju se Ross-skoje kvadrupole) (Ross, Kostelač) statisici, dok He^3 , koji predstavlja Fermi-tehnont je s leđi odje superfluiditet u toj veličini temperaturu.¹ Prema tome da superfluidnosti delovi su u ljudskoj fizici se čestice pozovaju Rossovej statističi. Oprete ovim delovačima vlasti postalo je ipak jasno, da u formi velikosti, pri dovoljno niskim temperaturama ($T < 0.01^\circ\text{K}$, vidi Černi) do doparivanja, tj. do plesavanja tih čestica, se preusmjerava i superfluidnost. Na osnovu toga možemo govoriti o superfluidnosti, ne oviđi li o načinu, delovi kod velikih temperatura.

I G L A V A

O Bose kondenzaciji

1. Tečni helijum (He^4)

U tečnom helijumu (He^4) pri temperaturi $T = 2,18^\circ\text{K}$ dolazi do faznog prelaza druge vrste (λ - prelaz). Ispod λ -tačke tečni helijum (helijum II) poseduje niz neobičnih svojstava, od kojih je sigurno najinteresantnija superfluidnost, koju je otkrio P. L. Kapica 1938. god. /1/, i sastoji se u tome, da helijum II može proticati bez trenja kroz uske kapilare. Na temperaturama $1 - 2^\circ\text{K}$, De Broglieva (De Broglie) talasna dužina atoma helijuma samerljiva je sa medjuatomskim rastojanjima, odakle sledi da je helijum II bitno kvantomehanički objekt, odnosno predstavlja kvantu tečnost. Kao što je poznato, postoje dva stabilna izotopa helijuma, He^4 i He^3 , sa atomskim masama 4 i 3 respektivno, koji i predstavljaju jedine kvantne tečnosti u prirodi. Što se tiče svojstva superfluidnosti, nju poseduje samo He^4 čiji atomi imaju spin $s = 0$ i pokoravaju se Boze-Ajnštajnovoj (Bose, Einstein) statistici, dok He^3 , koji predstavlja Fermi-tečnost ($s = 1/2$) nije superfluidan u toj oblasti temperatura.* Prema tome do superfluidnosti dolazi samo u tečnostima čije se čestice pokoravaju Bozeovoj statistici. Upravo ova

U poslednje vreme postalo je ipak jasno, da u fermi tečnosti He^3 , pri dovoljno niskim temperaturama ($T < 0,01^\circ\text{K}$, vidi /2/) dolazi do sparivanja, tj. do stvaranja boze čestica, pa prema tome pojavljuje se i superfluidnost. Na osnovu toga možemo reći da do superfluidnosti, na ovaj ili onaj način, dolazi kod svih kvantnih tečnosti.

činjenica i dovodi na pomisao da postoji duboka veza izmedju λ - prelaza i Boze-Ajanštajnove kondenzacije u sistem bozona, tim pre što je temperatura Boze kondenzacije idealnog gasa sastavljenog od atoma He^4 ($T_c = 3,14^\circ\text{K}$), istog reda veličine sa T_λ . Uzajamna povezanost λ - prelaza i Boze kondenzacije u tečnom helijumu mogla bi biti pronađena pomoću statističke sume koja, nažalost, do sada nije izračunata eksplicitno. Prema tome njihova međusobna veza ostaje samo kao moguća predpostavka, koja se u literaturi obilato koristi i daje određene rezultate, kao što će se i kasnije videti (podrobnije o tom problemu vidi u /3/, 18.).

Otkriće superfluidnosti He^4 zainteresovalo je i teoretičare i uslovilo pojavu velikog broja teorijskih istraživanja tog fenomena. Ta istraživanja kretala su se uglavnom u dva pravca: ka izgradnji fenomenološke ili makroskopske teorije i izgradnji mikroskopske teorije.

Makroskopsku teoriju superfluidnosti dao je Tissa 1938. god. /4/, tako što je tečni He^4 ispod tačke prelaza razmatrao kao skup superfluidne i normalne komponente, pri čemu se svaka može kretati svojom brzinom. Tako su jednačine hidrodinamike helijuma II gradjene kao jednačine hidrodinamike dve tečnosti.

L. D. Landau /5/ je poboljšao teoriju Tisa, time što je uzeo u obzir da se kretanje superfluidne komponente razlikuje od normalne ne samo zbog odsutnosti viskoznosti već i po tome što je ono obavezno potencijalno. Na taj način su dobijene nešto drugačije hidrodinamičke jednačine.

Na ovom mestu neće biti reči o hidrodinamici helijuma II, već će ukratko biti izložena teorija Landaua koja povezuje pojavu superfluidnosti sa kvantnim osobinama sistema.

Fenomenološka teorija Landaua

Prema klasičnoj mehanici na apsolutnoj nuli svi atomi bi morali mirovati, a njihova potencijalna energija imala bi minimum. Kao posledica toga, atomi na niskim temperaturama mogu vršiti samo male oscilacije oko nekih ravnotežnih položaja, tj. sva tela morala bi biti u čvrstom stanju. Tečni helijum predstavlja jedinu tečnost u prirodi koja ne prelazi u čvrsto stanje (kvantna tečnost), što se objašnjava relativno slabom interakcijom atoma helijuma. Kao što je poznato, koristeći predstavu o zvučnim kvantima - fononima, možemo objasniti sva topotna i mehanička svojstva čvrstih tela na niskim temperaturama. Što se tiče klasifikacije mogućih energetskih spektara slabo pobudjenih stanja kvantne tečnosti, moguće je navesti uglavnom dva tipa (Boze i Fermi spektri), pri čemu treba napomenuti da nema nikakve smetnje za postojanje i trećih tzv. kombinovanih vrsta spektara (u tzv. Fermi-Boze kvantnim tečnostima, vidi /2/).

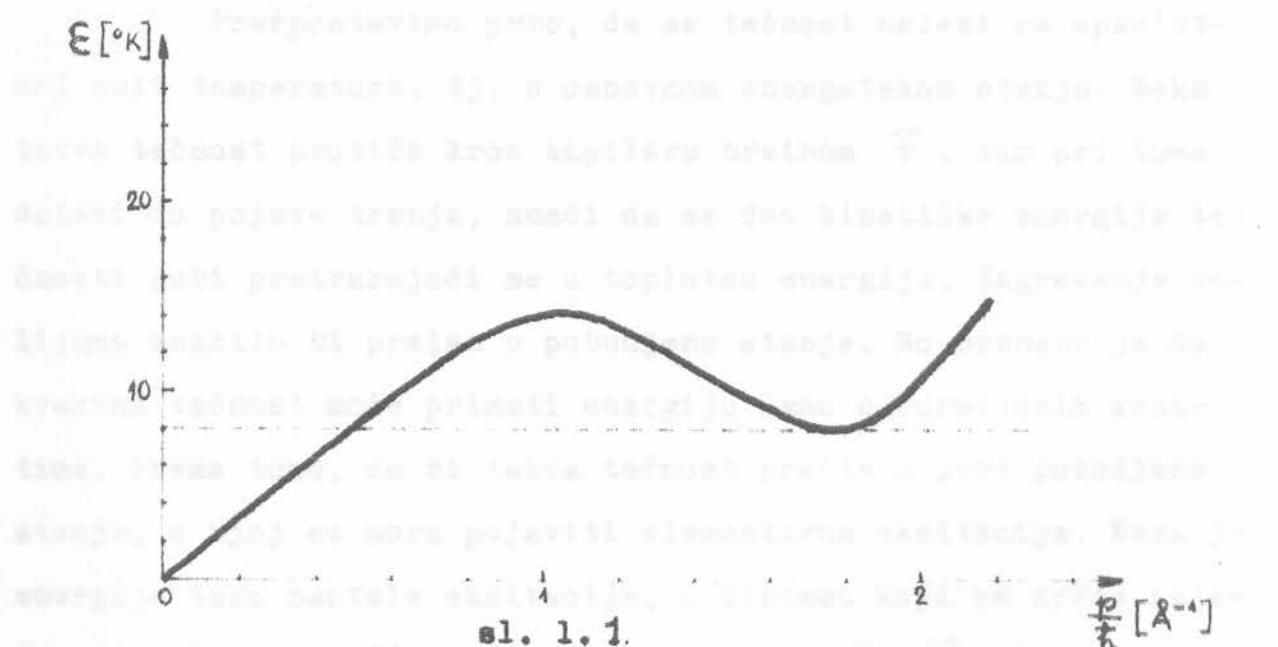
Napomenimo odmah, da u kvantnoj tečnosti čiji je energetski spektar slabo pobudjenih stanja Fermi-tipa ne može doći do superfluidnosti, te ćemo posmatrati samo spektre Boze-tipa.

Energetski spektar Bozeovog tipa karakteriše se time što elementarne eksitacije mogu pojedinačno nastati i isčezavati. Pošto se moment količine kretanja svakog kvantomehaničkog sistema može menjati samo za celobrojne vrednosti, znači da elementarne eksitacije koje mogu nastati pojedinačno imaju celobrojne momente količine kretanja, te se i pokoravaju Bozeovoj statistici.

Označimo sa $\xi(p)$ energiju elementarne eksitacije u tečnom helijumu, kao funkciju impulsa p . Pri malim impulsima

tj. za velike vrednosti talasne dužine, te eksitacije odgovara-ju zvučnim talasima u tečnosti, odnosno fononima, što znači da je energija linearna funkcija impulsa: $\xi = u \cdot p$, gde je u brzina zvuka u tečnosti. Sa povećanjem impulsa kriva $\xi(p)$ odstupa od linearne zavisnosti i njen oblik zavisi od konkretnog zakona interakcije molekula tečnosti.

Da bi objasnio eksperimentalne vrednosti termodinamičkih veličina helijuma, L. Landau je predložio energetski spek-tar koji je prikazan na sl. 1.1. u obliku superplotovanja.



Ovakav oblik krive $\xi(p)$ delimično je bio sugerisan činjenicom da sami fononi nisu bili dovoljni za objašnjavanje temperatur-ske zavisnosti i apsolutne vrednosti takvih termodinamičkih ka-rakteristika kao što je npr. toplotni kapacitet tečnog helijuma. Ako se, pored fonona, uzimaju u obzir i elementarne eksitacije sa energijom oko minimuma krive na sl. 1.1. prilikom izračunava-nja termodinamičkih veličina nestaju pomenute teškoće. Te ele-mentarne eksitacije su nazvane rotonima, a njihova se energija može izraziti sledećom formulom:

$$\epsilon(p) = \Delta + \frac{(k - k_0)^2 \hbar^2}{2\mu}$$

gde je /6/: $\Delta = 8,6^\circ\text{K}$, $k_0 = 1,9 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-1}$, $\mu = 0,16 \text{ m}_{\text{He}^4}$.

Za vrednosti impulsa $p \gg \hbar \cdot k_0$ funkcija $\epsilon(p)$ uopšte ne mora postojati, budući da su elementarne eksitacije sa suviše velikim impulsima nestabilne i raspadaju se na nekoliko eksitacija sa manjim impulsima.

Pokažimo sada, kako iz navedenih predstava o elementarnim eksitacijama u helijumu sledi osobina superfluidnosti.

Pretpostavimo prvo, da se tečnost nalazi na absolutnoj nuli temperaturi, tj. u osnovnom energetskom stanju. Neka takva tečnost protiče kroz kapilaru brzinom \vec{v} . Ako pri tome dolazi do pojave trenja, znači da se deo kinetičke energije tečnosti gubi pretvarajući se u topotnu energiju. Zagrevanje helijuma značilo bi prelaz u pobudjeno stanje. No poznato je da kvantna tečnost može primati energiju samo u određenim kvantima. Prema tome, da bi takva tečnost prešla u prvo pobudjeno stanje, u njoj se mora pojaviti elementarna eksitacija. Neka je energija tako nastale eksitacije, u sistemu koji se kreće zajedno sa tečnosti, $\epsilon(p)$ i odgovarajući impuls \vec{p} . Tada u sistemu reference vezanom za kapilaru, energija celog sistema (tečnog helijuma) promeniće se za veličinu

$$\epsilon(p) + \vec{p} \cdot \vec{v} \quad (1.1)$$

Prelaz tečnosti u pobudjeno stanje biće moguće samo u slučaju da je ispunjen uslov

$$\epsilon(p) + \vec{p} \cdot \vec{v} < 0 \quad (1.2)$$

jer, kao što smo napomenuli, energija sistema se smanjuje. Pri

datoj vrednosti impulea, veličina na levoj strani nejednačine (1.2.) ima najmanju vrednost kada su \vec{p} i \vec{v} antiparalelni.

Tada je $E(p) - p \cdot v < 0$, odnosno $v > \frac{E(p)}{p}$.
Tako dobijamo kriterij eksitacije u tečnom heliju:

Očevidno, do radjanja eksitacije u tečnom heliju doći će ako uslov (1.3) bude ispunjen u krajnjem slučaju u tački spektra gde količnik $E(p)/p$ ima minimum.

Tako dobijamo, konačno, neophodan uslov za kreaciju elementarne eksitacije:

$$v > \min \frac{E(p)}{p} \quad (1.4)$$

Na osnovu poslednje nejednačine dobija se i uslov za superfluidno proticanje helijuma:

$$v_{kr} = \min \frac{E(p)}{p} \neq 0 \quad (1.5)$$

Za sve vrednosti brzine proticanja helijuma, koje su manje od kritične vrednosti v_{kr} , radjanje eksitacija je energetski nepogodno i tečnost protiče bez disipacije energije, tj. bez trenja. Proticanje tečnosti bez trenja se ne može usporavati tj. ono će biti superfluidno. Suprotno tome, ako je brzina proticanja helijuma veća od kritične vrednosti v_{kr} , u tečnosti će se pojaviti eksitacije, tj. tečnost će gubiti energiju i njen kretanje će biti usporen.

Spektar elementarnih eksitacija u tečnom heliju, koji je dat na sl. 1. zadovoljava uslov superfluidnosti (1.5).

Minimum količnika $E(p)/p$ možemo odrediti iz uslova ekstremuma:

$$\frac{d}{dp} \frac{E(p)}{p} = -\frac{E(p)}{p^2} + \frac{1}{p} \frac{dE}{dp} = 0, \quad \text{odakle sledi}$$

$$\frac{\dot{E}(p)}{p} = \frac{dE(p)}{dp}, \quad (1.6)$$

tj. $\frac{\dot{E}(p)}{p}$ ima minimum u tački gde prava povučena iz koordinatnog početka dodiruje krivu $E(p)$. Za spektar tečnog helijuma to je tačka nedaleko od minimuma krive $E(p)$.

Pošto pri izvodjenju uslova (1.4) nismo nigde koristili predpostavku da u tečnosti ne postoje i druge elementarne eksitacije, sledi da se kriterij (1.4) može primeniti i u uslovima kad se kvantna tečnost ne nalazi u osnovnom stanju, tj. on važi i pri temperaturama različitim od apsolutne nule. Ipak, prisustvo eksitacija u tečnosti dovodi do složenijih pojava prilikom proticanja tečnog helijuma. Naime, eksitacije koje postoje u sistemu sudarat će se sa stenkama cevi predavajući im deo svog impulsa. Zbog toga će se onaj deo tečnosti koji se kreće kao "gas eksitacija" usporavati, tj. ponašat će se kao normalna viskozna tečnost. Prema tome, pri $T = 0$ kroz kapilaru protiče sva tečnost bez trenja, a pri $T \neq 0$ samo jedan njen deo.

Na taj način po teoriji Landaua dolazimo do sledećeg rezultata. Na temperaturama različitim od nule jedan deo mase tečnosti se ponaša kao normalna viskozna tečnost, dok se ostali deo ponaša kao superfluidna tečnost, bez trenja, koja se kreće nezavisno od normalnog dela dok je brzina proticanja manja od kritične vrednosti v_{kr} . Tako u helijumu II postoji istovremeno dva kretanja: superfluidno sa brzinom \vec{v}_s i normalno sa brzinom \vec{v}_n i svakom kretanju odgovara određena "efektivna masa". Zbir masa normalnog i superfluidnog dela daje ukupnu masu helijuma.

Na osnovu gornjih predstava možemo ukupni impuls jedinične zapremine helijuma II napisati u obliku zbiru:

$$\vec{j} = \rho_s \vec{v}_s + \rho_n \vec{v}_n, \quad (1.7)$$

i slično gustinu tečnosti:

$$\rho = \rho_n + \rho_s , \quad (1.8)$$

gde je ρ_n - gustina normalnog dela tečnosti, a ρ_s - gustina superfluidnog dela.

Odnos ρ_n/ρ jednak je jedinici u λ - tački, a teži nuli pri $T = 0$.

Mikroskopska teorija Bogoliubova

Da bi na osnovu zakona kvantne mehanike koji vladaju u atomskim sistemima (mikroskopski) dobio energetski spektar elementarnih eksitacija u He^4 , koji bi zadovoljavao ranije pomenute uslove superfluidnosti, Bogoliubov je sistem atoma He^4 posmatrao kao slabo neidealni Bose - gas. Hamiltonian takvog sistema u reprezentaciji druge kvantizacije ima oblik (u impulsnom prostoru):

$$H = \sum_{\vec{p}} \frac{\vec{p}^2}{2m} a_{\vec{p}}^+ \cdot a_{\vec{p}}^- + \frac{1}{2V} \sum_{\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_3 + \vec{p}_4} W(\vec{p}_1 - \vec{p}_3) a_{\vec{p}_1}^+ a_{\vec{p}_2}^+ a_{\vec{p}_3}^- a_{\vec{p}_4}^- \quad (1.9)$$

gde je $W(\vec{p}_1 - \vec{p}_3)$ - furije lik interakcije izmedju helijumovih atoma, a $a_{\vec{p}}^+$ i $a_{\vec{p}}^-$ su Bose operatori kreacije i anihilacije, koji zadovoljavaju poznate relacije komutacije:

$$[a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^+] = \delta_{\vec{p}\vec{p}'} , \quad [a_{\vec{p}}, a_{\vec{p}'}^-] = [a_{\vec{p}}^+, a_{\vec{p}'}^+] = 0 \quad (1.10)$$

Polazne ideje Bogoliubova baziraju na sledećim fizičkim činjenicama:

- Bose čestice mogu se skupljati u neograničenom broju u jednom kvantnom stanju, i
- Postoji opšta težnja u prirodi da sistem zauzme stanje najniže energije.

Odavde sledi zaključak da će gotovo svi atomi He^4 , čija je kinetička energija $\frac{\vec{p}^2}{2m}$, zauzeti stanje sa $\vec{p} = 0$, koje od-

govara najnižoj energiji. Sličnu situaciju imamo i kod Bose - kondenzacije idealnog Bose gasa, samo što će se ovde energetski spekter razlikovati od spektra idealnog gasa zbog interakcije. Ako sa N označimo ukupan broj atoma He^4 u sistemu, a sa N_0 označimo broj atoma sa impulsom nula (dalje ćemo ih zvati "kondenzatnim" atomima), očigledno da važe sledeće relacije:

$$N = N_0 + \sum_{\vec{p} \neq 0} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \quad (1.11)$$

$$\text{i } N \approx N_0 \text{ odnosno } N_0 = a_0^\dagger a_0 \gg \sum_{\vec{p} \neq 0} a_{\vec{p}}^\dagger a_{\vec{p}} \quad (1.12)$$

S obzirom da je broj čestica u kondenzatu velik ($N_0 \sim N \sim 10^{24}$), iz komutacionih relacija za Bose operator sledi:

$$a_0 a_0^\dagger = N_0 + 1 \approx N_0 ,$$

odnosno

$$a_0^\dagger a_0 = a_0^\dagger a_0 = N_0 ,$$

tj. a_0 i a_0^\dagger možemo smatrati brojevima:

$$a_0 = a_0^\dagger = \sqrt{N_0} \quad (1.13)$$

Imajući u vidu relacije (1.12) zaključujemo da će glavni doprinos energiji interakcije dati oni članovi koji opisuju interakciju kondenzatnih čestica izmedju sebe $0 + 0 \rightarrow 0 + 0$ i interakciju nadkondenzatnih čestica sa česticama kondenzata. Te članove iz hamiltonijana interakcije možemo izdvojiti na osnovu tablice I.

Pošto će daljnja teorija biti data u prvoj aproksimaciji teorije perturbacije u tablici I izostavljeni su članovi sa tri impulsa različita od nule. Osim toga odbacićemo i član gde su sva četiri impulsa različita od nule, jer on daje popravke proporcionalne koncentraciji nadkondenzatnih bozona, a te su popravke male,

što sledi iz (1.12).

T A B L I C A I

p_1	p_2	p_3	p_4
0	0	0	0
$p_1 \neq 0$	$p_2 \neq 0$	0	0
$p_1 \neq 0$	0	$p_3 \neq 0$	0
$p_1 \neq 0$	0	0	$p_4 \neq 0$
0	$p_2 \neq 0$	$p_3 \neq 0$	0
0	$p_2 \neq 0$	0	$p_4 \neq 0$
0	0	$p_3 \neq 0$	$p_4 \neq 0$
$p_1 \neq 0$	$p_2 \neq 0$	$p_3 \neq 0$	$p_4 \neq 0$

Uzimajući u obzir ove primedbe i jednačinu (1.13), hamiltonijan (1.9) možemo napisati u obliku:

$$H = \frac{1}{2} \frac{N^2}{V} W(0) + \sum_{\vec{p} \neq 0} \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{N}{V} W(\vec{p}) \right] a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^- + \frac{N}{2V} \sum_{\vec{p} \neq 0} W(\vec{p}) (a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^+ + a_{\vec{p}}^- a_{\vec{p}}^-) + \\ + \frac{N}{V} W(0) \sum_{\vec{p} \neq 0} a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^-$$

Ako uzmemo u obzir relaciju (1.11) i zanemarimo kvadrate male veličine $N_p = \sum_{\vec{p} \neq 0} a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^-$, konačni oblik hamiltonijana biće:

$$H = \frac{N^2 W(0)}{2V} + \sum_{\vec{p} \neq 0} \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{N}{V} W(\vec{p}) \right] a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^- + \frac{N}{2V} \sum_{\vec{p} \neq 0} W(\vec{p}) [a_{\vec{p}}^+ a_{\vec{p}}^+ + a_{\vec{p}}^- a_{\vec{p}}^-] \quad (1.14)$$

Hamiltonijan (1.14) dijagonalizuje se kanonskom transformacijom:

$$a_{\vec{p}}^- = u_{\vec{p}}^- c_{\vec{p}}^- + v_{\vec{p}}^- c_{-\vec{p}}^+ \quad (1.15)$$

gde su funkcije $u_{\vec{p}}^-$ i $v_{\vec{p}}^-$ realne i parne i zbog kanoničnosti

transformacije zadovoljavaju relaciju:

$$\frac{u_{\vec{p}}^2}{\vec{p}^2} - \frac{v_{\vec{p}}^2}{\vec{p}^2} = 1 \quad (1.16)$$

Ako u hamiltonijanu (1.14) izvršimo zamenu (1.15) dobijamo sledeći izraz:

$$H = \frac{N^2 W(0)}{2V} + \sum_{\vec{p} \neq 0} \left[\alpha_{\vec{p}} \frac{v_{\vec{p}}^2}{\vec{p}^2} + \beta_{\vec{p}} u_{\vec{p}} v_{\vec{p}} \right] + \sum_{\vec{p} \neq 0} \left[\alpha_{\vec{p}} \left(\frac{u_{\vec{p}}^2}{\vec{p}^2} + \frac{v_{\vec{p}}^2}{\vec{p}^2} \right) + 2\beta_{\vec{p}} u_{\vec{p}} v_{\vec{p}} \right] c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{p}} + \\ + \sum_{\vec{p} \neq 0} \left[\alpha_{\vec{p}} u_{\vec{p}} v_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \beta_{\vec{p}} \left(\frac{u_{\vec{p}}^2}{\vec{p}^2} + \frac{v_{\vec{p}}^2}{\vec{p}^2} \right) \right] (c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{p}}^+ + c_{\vec{p}}^- c_{-\vec{p}}^-), \quad (1.17)$$

gde je $\alpha_{\vec{p}} = \frac{\vec{p}^2}{2m} + \frac{N^2}{V} W(0)$ i $\beta_{\vec{p}} = \frac{N^2}{V} W(\vec{p})$.

Da bi se oslobodili nedijagonalnih članova po operatorima c u (1.17) funkcije u i v moraju zadovoljavati sledeći uslov:

$$\alpha_{\vec{p}} u_{\vec{p}} v_{\vec{p}} + \frac{1}{2} \beta_{\vec{p}} \left(\frac{u_{\vec{p}}^2}{\vec{p}^2} + \frac{v_{\vec{p}}^2}{\vec{p}^2} \right) = 0 \quad (1.18)$$

Iz (1.16) i (1.18) možemo izračunati $u_{\vec{p}}$ i $v_{\vec{p}}$:

$$\left. \begin{aligned} u_{\vec{p}}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{\vec{p}}}{\sqrt{\alpha_{\vec{p}}^2 - \beta_{\vec{p}}^2}} + 1 \right), & v_{\vec{p}}^2 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha_{\vec{p}}}{\sqrt{\alpha_{\vec{p}}^2 - \beta_{\vec{p}}^2}} - 1 \right) \\ u_{\vec{p}}^2 + v_{\vec{p}}^2 &= \frac{\alpha_{\vec{p}}}{\sqrt{\alpha_{\vec{p}}^2 - \beta_{\vec{p}}^2}}, & u_{\vec{p}} v_{\vec{p}} &= -\frac{1}{2} \frac{\beta_{\vec{p}}}{\sqrt{\alpha_{\vec{p}}^2 - \beta_{\vec{p}}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Ako ove rezultate zamenimo u (1.17) dobijamo:

$$H = H_0 + \sum_{\vec{p} \neq 0} E(\vec{p}) c_{\vec{p}}^+ c_{\vec{p}} \quad (1.20)$$

gde je

$$H_0 = \frac{N^2 W(0)}{2V} + \sum_{\vec{p} \neq 0} \left\{ \frac{1}{2} \epsilon(\vec{p}) - \omega_{\vec{p}} \right\},$$

energija osnovnog stanja, a

$$\epsilon(\vec{p}) = \sqrt{\alpha_{\vec{p}}^2 - \beta_{\vec{p}}^2} = \sqrt{\left(\frac{p^2}{2m}\right)^2 + \frac{N_0}{V} W(\vec{p}) \frac{p^2}{m}}, \quad (1.21)$$

predstavlja energiju elementarnih eksitacija u He^4 . Pošto se ovdje posmatraju samo slabo pobudjena stanja, možemo $W(\vec{p})$ zameniti nekom konstantom, koju ćemo označiti sa \bar{W} i možemo je izvesti preko amplitude rasejanja f (vidi /7/, 4.) po formuli:

$$\bar{W} = \frac{4\pi \hbar^2}{m} f \quad (1.22)$$

Sada energiju elementarnih eksitacija možemo napisati na sledeći način:

$$\epsilon(\vec{p}) = p \sqrt{\frac{p^2}{4m^2} + \frac{N_0}{mV} \bar{W}} = p \sqrt{\frac{p^2}{4m^2} + \frac{4\pi \hbar^2 N_0 f}{m^2 V}} \quad (1.23)$$

Lako je videti da ovaj energetski spektar zadovoljava uslov superfluidnosti (1.5).

Naime, iz (1.23) sledi:

$$\min \frac{\epsilon(\vec{p})}{p} = \sqrt{\frac{N_0 \bar{W}}{mV}} \approx \sqrt{\frac{NW}{mV}} \neq 0$$

Prema tome minimum fazne brzine elementarnih eksitacija u tečnom He^4 je pozitivna veličina pa ovaj rezultat predstavlja objašnjenje činjenice da je tečni helijum superfluidan.

Primetimo na kraju, da je spektar Bogoliubova (1.23) u skladu sa fenomenološkom teorijom Landaua. Naime, pri dovoljno malim impulsima:

jer će se rezultirati relativno mala i fizički realna, u
kvantitativne koeficijente postupka redovito sastoji se u uzastopanju

spektar (1.23) možemo napisati na sledeći način:

$$\mathcal{E}(p) = p \sqrt{\frac{N_o W}{mV}} \quad (1.24)$$

tj. elementarne eksitacije su fononi sa brzinom zvuka
posedujući gubitkovski tip.

$$u = \sqrt{\frac{N_o W}{mV}} \quad (1.25)$$

S druge strane, pri dovoljno velikim impulsima,

$$\mathcal{E}(p) \approx \frac{p^2}{2m} \quad (1.26)$$

trična otpremanje neglo pada na nulu. Ova pojava, koja se naziva roton i elementarne eksitacije odgovaraju rotonima u teoriji Landaua.

Osim Bogoliubova problemom mikroteorijskog opisivanja fenomena u tečnom He^4 bavio se i Fejman (Feynman), /8/ /9/. U detalje Fejmanove teorije nećemo ulaziti. Može se reći da je elementarne eksitacije u tečnom He^4 razmatrao kao fluktuacije gustine tečnosti. Pri malim impulsima predpostavljao je da su ove fluktuacije longitudinalnog karaktera (zvuk) dok je pri većim impulsima, gde dolazi do vrtložnog kretanja tečnosti, predpostavio da su osnovne fluktuacije gustine turbulentnog tipa (rotioni). Fejmanova teorija ima bolje kvantitativno slaganje sa eksperimentom nego teorija Bogoliubova.

Teoriju koja se kvantitativno najbolje slaže sa eksperimentima dala je grupa japanskih fizičara u nekoliko uzastopnih radova (/10/,/11/). Ova teorija tečnog helijuma sadrži u svojoj osnovi sve napred navedene ideje teorije Bogoliubova, ali se hamiltoni-

jan (1.9) razmatra matematički preciznije i fizički realnije. Matematičke korekcije postupka Bogoljubova sastoje se u uračunavanju popravki koje potiču iz viših redova teorije perturbacije i popravke koje potiču od činjenice da hamiltonijan (1.9) ne održava broj kvazičestica. Prilaz ove grupe fizički je realniji u tom smislu što se prilikom izračunavanja amplitude rasejanja umesto modela tvrdih sfera koji je koristio Bogoljubov (δ - potencijal) uzima realniji potencijal gausijanskog tipa.

2. Problem superprovodljivosti

Ako se neki metali i legure hlađe do dovoljno niskih temperatura (u opsegu temperature tečnog helijuma), tada njihova električna otpornost naglo pada na nulu. Ovu pojavu, koju zovemo superprovodljivost, otkrio je 1911. godine Kamerling Onnes (Kamerlingh Onnes) /12/, hlađeći živu ispod temperature $T_c = 4,15^{\circ}\text{K}$. Treba napomenuti da se ovde nije radilo o nekom znatnom smanjenju otpora, već o totalnom odsustvu otpora, što je i kasnije dokazano pomoću preciznih metoda nuklearne magnetne rezonancije /13/.

U granicama klasične fizike ova pojava se nije mogla objasniti. Sa razvojem kvantne mehanike porastao je i interes za objašnjenje ovog fenomena, ali se ipak na njegovo konačno teorijsko objašnjenje dosta dugo čekalo. Prekretnicu u rešavanju problema superprovodljivosti predstavljalo je otkriće pojave superfluidnosti u tečnom helijumu. Tada se počelo sa teorijama koje su težile da superprovodljivost svedu na superfluidnost nanelektrisanih čestica, što se u osnovi pokazalo kao pravilna ideja, jer odsustvo otpora znači da se fluid slobodnih elektrona kreće kroz kristal bez trenja odnosno bez sudara sa jonomima rešetke.

Iako je ovakav prilaz doveo do rešenja sústine problema superprovodljivosti, bilo je potrebno najpre rešiti jedan paradoks. Naime, poznato je da je superfluidnost tečnog He^4 posledica činjenice da su atomi He^4 boze čestice, a pošto su elektroni fermi čestice, njima nedostaje ona bitna osobina koja omogućuje kretanje bez trenja, a to je mogućnost njihovog kondenzovanja na najnižem energetskom nivou.

Rešavanje ovog problema išlo je u dve etape. Predpostavilo se da u elektronskom gasu pod izvesnim uslovima dolazi do sparivanja elektrona sa suprotnim spinovima, tj. do obrazovanja elektronskih parova sa nultim spinom koji imaju bozonska svojstva i prema tome mogu da se kondenzuju. Superprovodljivost bi tada u stvari bila superfluidnost ovih elektronskih kompleksa sa nultim spinom.

Dalje, bilo je potrebno razjasniti koji mehanizam dovodi do sparivanja elektrona i kakva sila drži na okupu par elektrona, jer je poznato da izmedju elektrona deluju odbojne Kulonove (Coulomb) sile, koje očigledno ne dozvoljavaju obrazovanje para. Jasno je bilo da rešenje treba tražiti u interakciji elektronskog gasa sa drugim sistemom čestica (ili kvazičestica) u kristalu, provodniku. (To bi mogli biti napr. fononi, elektroni iz drugih zona, spinski talasi u magnetnim sredinama, itd.). Ovaj problem rešio je Frelih (Frölich) /14/, koji je ukazao da važnu ulogu u mehanizmu sparivanja igra samo elektron - fonon interakcija.

Treba svakako podvući genijalnost ove Frelihove ideje s obzirom da je elektron - fonon interakcija uzrok postojanja otpora. On je, međutim, pokazao da na niskim temperaturama ova ista interakcija deluje u obrnutom smeru, tj. stvara uslove za superprovodljivost. Na ovu ideju navela ga je, verovatno, eksperimentalna

činjenica da lošiji provodnici (velika elektron - fonon interakcija) na višim temperaturama (napr. Hg i Pb), imaju mnogo višu tačku prelaza u superprovodno stanje od provodnika sa jako malim otporom (napr. Cu i Ag). S druge strane i tзв. isotopski efekat kod superprovodnika , koji povezuje masu izotopa M i temperaturu prelaza relacijom

$$M^\alpha T_C = \text{Const.} \quad (\alpha \approx 0,5) \quad (2.1)$$

je navodio na pomisao da fononi na neki način utiču na superprovodljivost, jer bi inače bilo teško objasniti zavisnost temperature prelaza od mase jona rešetke.

Na osnovu radova Freliha, Bardin, Kuper i Šrifer (Bardeen, Cooper, Schrieffer) /15/, /16/, formulisali su svoj model superprovodnika. U tom modelu (tзв. BCS model) izmedju elektrona sa suprotnim spinovima u oblasti impulsa koja je bliska granici fermi sfere postoji privlačna sila koja ih vezuje u parove (kuprovski parovi). Uzimajući u obzir da izmedju elektrona sa suprotno usmerenim spinovima deluju privlačne sile izmene, a izmedju elektrona sa paralelnim spinovima odbojne sile, Bardin, Kuper i Šrifer modifikovali su Frelihov ekvivalentni hamiltonijan (2.6) sumirajući interakciju po svim suprotno usmerenim spinovima. Na osnovu takvih rasudjivanja oni su dali poznati modelni hamiltonijan (2.7), koji leži u osnovi BCS teorije.

Ukratko ćemo sada izložiti Frelihovu analizu hamiltonijana elektron - fonon interakcije, a analizu modelnog hamiltonijana izvršićemo metodom koju je predložio Bogoliubov /17/.

Frelihova analiza hamiltonijana elektron - fonon interakcije

Hamiltonijan elektron - fonon interakcije ima sledeći oblik (vidi Appendix formula (A-10)):

$$H_{\text{int}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} F(\vec{k}, \vec{q}) a_{\vec{k}-\vec{q}}^{\dagger} a_{\vec{k}}^{\dagger} (b_{-\vec{q}} + b_{\vec{q}}^{\dagger}) \quad (2.2)$$

gde su a i a^{\dagger} operatori anihilacije i kreacije fermiona (elektrona), a b^{\dagger} i b operatori kreacije i anihilacije fonona. Veličina $F(\vec{k}, \vec{q})$ određuje elektron - fonon interakciju i data je formulom (A-11).

Kompletan hamiltonijan sistema elektrona i fonona u provodniku možemo napisati u obliku:

$$H = \sum_{\vec{k}} E(\vec{k}) a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + \sum_{\vec{q}} \hbar \omega_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^{\dagger} b_{\vec{q}} + \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} F(\vec{k}, \vec{q}) a_{\vec{k}-\vec{q}}^{\dagger} a_{\vec{k}}^{\dagger} (b_{-\vec{q}} + b_{\vec{q}}^{\dagger}) \quad (2.3)$$

gde je $E(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}}$ - energija elektrona u aproksimaciji efektivne mase, a $\hbar \omega_{\vec{q}} = \hbar c |\vec{q}|$ - je energija fonona (c - brzina zvuka, a \vec{q} - talasni vektor fonona).

Da bi ocenio ulogu elektron-fonon interakcije Frelih je pomoću jedne unitarne transformacije hamiltonijana (2.3) dobio novi hamiltonijan H_{eq} , iz kojeg je bio isključen dobar deo operatara interakcije. Ta transformacija ima sledeći oblik:

$$H_{\text{eq}} = e^{-iS} H e^{iS} \approx H + i[H, S] - \frac{1}{2} [S, [S, H]] \quad (2.4)$$

Ermitiski operator S odabratemo u sledećem obliku:

$$S = \sum_{\vec{k}', \vec{q}'} X(\vec{k}', \vec{q}') a_{\vec{k}' - \vec{q}'}^{\dagger} a_{\vec{k}'}^{\dagger} (b_{-\vec{q}'} + b_{\vec{q}'}^{\dagger}) \quad (2.5)$$

gdje je $X(\vec{k}', \vec{q}')$ nepoznata funkcija koja se određuje iz uslova da se eliminiše hamiltonijan elektron-fonon interakcije iz izraza (2.4).

Ako se uzme u obzir samo spontana emisija fonona (niske temperature), posle prostog računa, koji ovde neće biti dat, (vidi

napr. /18/ paragraf 144), može se pokazati da će ekvivalentni hamiltonijan H_{eq} imati sledeći oblik:

$$H_{eq} = \sum_{\vec{k}} E(\vec{k}) a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}^- - \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \frac{\Phi^2(\vec{k}, 2\vec{k})}{\hbar \omega_{2\vec{k}}} a_{\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^+ a_{-\vec{k}}^- a_{\vec{k}}^- \quad (2.6)$$

Drugi član u ovom izrazu predstavlja privlačnu elektron - elektron interakciju (zbog znaka "-") uslovljenu virtuelnom izmenom fona. Napomenimo još, da je u hamiltonijanu (2.6) zadržan samo član interakcije izmedju elektrona sa suprotno usmerenim impulsima, i da se može pokazati da je on veći od svih ostalih ispuštenih članova, kao i od kulanovskog odbijanja koje postoji izmedju elektrona u jednom uskom sloju impulsa oko graničnog impulsa fermi sfere.

Model Bardina, Kupera i Šrifera i kanonična transformacija Bogoliubova

Kao što smo (gore) spomenuli, Bardin, Kuper i Šrifer su modifikovali rezultate Freliha (2.6) tako što su uzeli u obzir efekte spin - spin interakcije i sumirali interakciju po svim suprotno orjentisanim spinovima.

Na osnovu ovakvih rasudjivanja dat je modelni hamiltonijan koji ima oblik:

$$H_{BCS} = \sum_{\vec{k}} E(\vec{k}) \left[a_{\vec{k}}^+(1/2) a_{\vec{k}}^-(1/2) + a_{-\vec{k}}^+(-1/2) a_{-\vec{k}}^-(-1/2) \right] - \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} W(\vec{k}, \vec{q}) a_{\vec{k}}^+(1/2) a_{-\vec{k}}^+(-1/2) a_{-\vec{q}}^-(-1/2) a_{\vec{q}}^-(1/2) \quad (2.7)$$

Funkcija $W(\vec{k}, \vec{q})$ je pozitivna i parna u intervalu impulsa

$$p_F - p_G = \hbar k = p_F + p_G \quad (p_G \leq p_F) \quad (2.8)$$

$$p_F - p_G = \hbar q \leq p_F + p_G$$

gde je p_F - granični impuls fermi sfere, a p_G određuje polovinu debljine sloja oko graničnog impulsa p_F i proporcionalan je Debajevoj frekvenciji fonona.

Van intervala (2.8) prema BCS modelu funkcija $W(\vec{k}, \vec{q})$ je ravna nuli. Takodje se uzima u obzir da se u intervalu (2.8) ova funkcija sporo menja sa promenom impulsa, pa se u konkretnom računu često zamenjuje konstantom.

Hamiltonijan (2.7) dijagonalizovaćemo kanoničnom transformacijom koju je predložio Bogoliubov, tako što ćemo sa fermi operatora $a_{\vec{k}}^{\dagger}(1/2)$ i $a_{-\vec{k}}^{\dagger}(-1/2)$ preći na nove fermi operatore $A_{\vec{k}}^{\dagger}(0)$ i $A_{\vec{k}}^{\dagger}(1)$. Oblik ove transformacije je sledeći:

$$\begin{aligned} a_{\vec{k}}^{\dagger}(1/2) &= u_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^{\dagger}(0) + v_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^{\dagger}(1) \\ a_{\vec{k}}^{\dagger}(-1/2) &= u_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^{\dagger}(1) - v_{\vec{k}} A_{\vec{k}}^{\dagger}(0) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Funkcije $u_{\vec{k}}$ i $v_{\vec{k}}$ su realne i parne i zbog kanoničnosti transformacije (2.9) moraju zadovoljavati uslov:

$$u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 = 1 \quad (2.10)$$

Ako u hamiltonijanu (2.7) operatore a^{\dagger} i a zamenimo novim, $A(0)$ i $A(1)$, pomoću transformacija (2.9) i zadržimo se samo na članovima kvadratnim po operatorima $A(0)$ i $A(1)$, on dobija sledeći oblik:

$$H_{BCS} = H_o + H_d + H_{nd} \quad (2.11)$$

$$H_o = \sum_{\vec{k}} \left\{ 2E(\vec{k}) - v_{\vec{k}}^2 - u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} W(\vec{k}, \vec{q}) u_{\vec{q}} v_{\vec{q}} \right\} \quad (2.12)$$

$$H_d = \sum_{\vec{k}} \left\{ E(\vec{k}) (u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2) + 2u_{\vec{k}}v_{\vec{k}} \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} W(\vec{k}, \vec{q}) u_{\vec{q}}v_{\vec{q}} \right\} [A_{\vec{k}}^+(0) A_{\vec{k}}^-(0) + A_{\vec{k}}^+(1) A_{\vec{k}}^-(1)] \quad (2.13)$$

i

$$H_{nd} = \sum_{\vec{k}} \left\{ 2E(\vec{k}) u_{\vec{k}}v_{\vec{k}} - (u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2) \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} W(\vec{k}, \vec{q}) u_{\vec{q}}v_{\vec{q}} \right\} [A_{\vec{k}}^+(0) A_{\vec{k}}^+(1) + A_{\vec{k}}^+(1) A_{\vec{k}}^-(0)] \quad (2.14)$$

Funkcije $u_{\vec{k}}$ i $v_{\vec{k}}$ određuju se tako da nedijagonalni deo hamiltonijana H_{nd} bude ravan nuli. Ovo nam daje uslov:

$$2E(\vec{k}) u_{\vec{k}}v_{\vec{k}} - (u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2) \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} W(\vec{k}, \vec{q}) u_{\vec{q}}v_{\vec{q}} = 0 \quad (2.15)$$

Ako uvedemo oznaku:

$$\Delta_{\vec{k}} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} W(\vec{k}, \vec{q}) u_{\vec{q}}v_{\vec{q}} \quad (2.16)$$

tada se uslov (2.15) svodi na:

$$2E(\vec{k}) u_{\vec{k}}v_{\vec{k}} = (u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2) \Delta_{\vec{k}} \quad (2.17)$$

Iz uslova kanoničnosti (2.10) i (2.17) dobijamo za funkcije u i v sledeće izraze:

$$u_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E(\vec{k})}{\sqrt{E^2(\vec{k}) + \Delta_{\vec{k}}^2}} \right)$$

$$v_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E(\vec{k})}{\sqrt{E^2(\vec{k}) + \Delta_{\vec{k}}^2}} \right) \quad (2.18)$$

Odavde sledi:

$$u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2 = \frac{E(\vec{k})}{\sqrt{E^2(\vec{k}) + \Delta_{\vec{k}}^2}} \quad i \quad u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta_{\vec{k}}}{\sqrt{E^2(\vec{k}) + \Delta_{\vec{k}}^2}} \quad (2.19)$$

Zamenom izraza (2.18) i (2.19) u (2.12) i (2.13), dobijamo konačno:

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} E(\vec{k}) \left(1 - \frac{2E(\vec{k}) + \Delta_{\vec{k}}}{2\sqrt{E^2(\vec{k}) + \Delta_{\vec{k}}^2}} \right) \quad (2.20)$$

i dijagonalni deo hamiltonijana:

$$H_d = \sum_{\vec{k}} \sqrt{E^2(\vec{k}) + \Delta_{\vec{k}}^2} [A_{\vec{k}}^\dagger(0) A_{\vec{k}}(0) + A_{\vec{k}}^\dagger(1) A_{\vec{k}}(1)] \quad (2.21)$$

Vidimo da je spektar elementarnih eksitacija (isti za oba tipa fermiona, određenih operatorima $A(0)$ i $A(1)$), zbog interakcije među elektronima odredjen izrazom:

$$E(\vec{k}) = \sqrt{E^2(\vec{k}) + \Delta_{\vec{k}}^2}, \quad (2.22)$$

tj. u spektru se pojavljuje veličina $\Delta_{\vec{k}}$ (tzw. gep), koja je odredjena relacijom:

$$\Delta_{\vec{k}} = \frac{1}{2N} \sum_{\vec{q}} \frac{W(\vec{k}, \vec{q}) \Delta_{\vec{q}}}{\sqrt{E^2(\vec{q}) + \Delta_{\vec{q}}^2}} \quad (2.23)$$

Pre nego što predjemo na analizu spektra (2.22), odredićemo, uz izvesne aproksimacije, veličinu $\Delta_{\vec{k}}$.

Energija elektrona $E(\vec{k})$ data je u reprezentaciji hemij-

skog potencijala, tj.

$$E(k) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} - \mu \quad (2.24)$$

gde za veličinu hemijskog potencijala μ možemo uzeti približno:

$$\mu = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m_{\text{eff}}} , \quad k_F = \frac{p_F}{\hbar} \quad (2.25)$$

Tada je

$$E(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}} (k^2 - k_F^2) = \frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}} (k - k_F)(k + k_F) \quad (2.26)$$

Pošto ceo model ima smisla samo za uzani sloj impulsa oko graničnog impulsa fermi sfere p_F , u poslednjoj formuli možemo staviti

$$k + k_F \approx 2k_F ,$$

što daje

$$E(\vec{k}) = \frac{\hbar^2}{m_{\text{eff}}} k_F (k - k_F) . \quad (2.27)$$

Ako uvedemo brzinu elektrona na granici fermi sfere $v_F = \frac{\hbar \cdot k_F}{m_{\text{eff}}}$, imamo konačno:

$$E(k) = \hbar \cdot v_F (k - k_F) \quad (2.28)$$

Funkcija $W(\vec{k}, \vec{q})$ u BCS modelu aproksimira se konstantom u uskom energetskom sloju oko granice fermi sfere, tj.:

$$W(\vec{k}, \vec{q}) = \begin{cases} W & \text{za } |E(\vec{k})| \leq \hbar \omega_D \\ 0 & \text{u protivnom slučaju} \end{cases} \quad (2.29)$$

gde je ω_D - debajevska frekvencija.

Sledeća aproksimacija sastoji se u tome što se predpos-

tavlja da je i veličina $\Delta_{\vec{k}}$ konstantna, tj.

$$\Delta_{\vec{k}} = \begin{cases} \Delta & \text{za } |E(\vec{k})| \leq \hbar\omega_D \\ 0 & \text{u protivnom slučaju} \end{cases} \quad (2.30)$$

Ove aproksimacije svode formula (2.23) na sledeći oblik:

$$1 = \frac{W}{2N} \sum_{\vec{q}} \frac{1}{\sqrt{\hbar^2 v_F^2 (q - q_F)^2 + \Delta^2}} \quad (2.31)$$

Iz ove jednačine se jasno vidi da samo privlačna interakcija $W > 0$ može da dovede do realne vrednosti za veličinu Δ .

Ako sa sume predjemo na integral po pravilu

$$\sum_{\vec{q}} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{q}$$

i stavimo približno $d^3 \vec{q} \approx 4\pi k_F^2 dq$, jednačina (2.31) dobija sledeći oblik:

$$1 = \frac{W \Omega k_F^2}{4\pi^2} \int_{k_F - k_G}^{k_F + k_G} \frac{dq}{\sqrt{\hbar^2 v_F^2 (q - k_F)^2 + \Delta^2}} \quad (2.32)$$

gde je Ω - zapremina elementarne celije ($V = N\Omega$), a granični impuls k_G odredjen je iz uslova $|E(k_G)| = \hbar\omega_D$, odnosno uzimajući u obzir (2.28):

$$\hbar v_F (k_G - k_F) = \hbar v_F k_G = \hbar\omega_D \quad (2.32a)$$

Ako izračunamo integral (2.32) i rešimo dobijenu jednačinu po Δ , nalazimo da je

$$\Delta = 2\hbar v_F k_G \frac{-\frac{D}{W}}{1 - e^{-\frac{D}{W}}} , \quad D = \frac{2\pi^2 \hbar v_F^2}{\Omega k_F^2} \quad (2.33)$$

gdje je v_F brzina slobodnog elektrona, k_G gorski koeficijent, Ω efekat superprovodljivosti i D konstanta.

Predpostavimo li da je $D \gg W$, za Δ dobijamo sledeći izraz:

$$\Delta = 2\hbar v_F k_G e^{-\frac{2\pi^2 \hbar v_F^2}{\Omega k_F^2 W}} \quad (2.34)$$

Napomenimo još da BCS teorija daje prostu vezu izmedju temperaturu prelaza (T_C) iz normalne u superprovodnu fazu i energetskog gepa Δ (/19/):

$$2\Delta = 3,5 k_B T_C . \quad (2.35)$$

Pokažimo sada da energetski spektar (2.22) ispunjava uslov za kretanje bez trenja, koji zahteva da minimum fazne brzine mora biti pozitivna veličina.

Ako izraz (2.28) uvrstimo u (2.22), energetski spektar fermiona dobiće sledeći oblik:

$$\epsilon(p) = \sqrt{\Delta^2 + v_F^2(p - p_F)^2} , \quad (2.36)$$

odakle je

$$\frac{\epsilon(p)}{p} = \sqrt{\frac{\Delta^2}{p^2} + \frac{v_F^2}{p^2} (p - p_F)^2} \quad (2.37)$$

Uzmimo da je približno $p^2 \approx p_F^2$ i nadjimo minimum izraza (2.37):

$$\min \frac{\epsilon(p)}{p} \approx \frac{\Delta}{p_F} > 0 \quad (2.38)$$

Kao što vidimo, minimum fazne brzine je pozitivan dokle god je veličina gepa Δ različita od nule. Pošto Δ postaje ravno nuli na

temperaturi T_C , znači da će uslov (2.38) biti zadovoljen na temperaturama $T < T_C$, što je u skladu sa eksperimentima, jer na temperaturi T_C efekat superprovodljivosti nestaje.

Navedimo na graju ovog paragrafa, osnovne rezultate teorije superprovodljivosti:

a) Na temperaturama tečnog helijuma elektron - fonon interakcija dovodi do sparivanja elektrona u kuperovske parove koji se kondenzuju na impulsu fermi sfere p_F .

b) Superprovodnost se ne realizuje kretanjem kuperovskih parova (zakon disperzije (2.22) odnosi se na elementarne eksitacije fermi tipa) već kretanjem elektrona koji nastaju razgradjivanjem kuperovskog para. Naime, ti elektroni pored kinetičke energije nose sa sobom i deo energije veze ($\sim \frac{\Delta}{2}$), a za takav zakon disperzije elektrona zadovoljen je uslov kretanja bez trenja. Razgradjivanje kuperovskog para postiže se spoljašnjim električnim (ili magnetnim) poljem, koje istovremeno dovodi do kretanja elektrona, tj. do superprovodne struje.

c) Energija veze Δ je funkcija temperature i opada sa njenim porastom. Na temperaturi prelaza T_C , Δ postaje ravno nuli i na toj temperaturi prestaje i efekat superprovodljivosti.

Temperature prelaza T_C kreću se (eksperimentalni podaci) do 10^0K za čiste metale, a za legure i intermetalna jedinjenja do 20^0K (najviša 24^0K , vidi /20/).

U III glavi biće data reformulisana BCS teorija superprovodljivosti i diskutovana mogućnost konstruisanja visokotemperaturnih superprovodnika.

3. Mogućnost Bose - kondenzacije kvazičestica

S obzirom da je tema ove disertacije Bose kondenzacija u sistemu kvazičestica, u ovom paragrafu posebno će biti razmotreno pitanje o mogućnosti Bose kondenzacije kvazičestica (u prvom redu Frenkelovih eksitona i magnona).

Poslednjih 10 - 15 godina pojavio se veliki broj radova u kojima se diskutuje o mogućnosti Bose kondenzacije u sistemu kvazičestica /21 - 30/, ali možemo konstatovati da još do danas postoje principijelna neslaganja u gledištima pojedinih autora u odnosu na to pitanje. U radovima /21 - 23/, gde se tretira Bose kondenzacija eksitona Vanie-Mota (Wannier, Mott) (eksiton velikog radiusa), predpostavlja se da se eksitoni koji su sastavljeni od dve fermi čestice - elektrona i šupljine, mogu smatrati bozonima i da se na takav sistem mogu neposredno primeniti rezultati teorije Bose gasa i Bose tečnosti, sastavljenih od bez strukturalnih Bose čestica. U kasnijim radovima pokazalo se, da uporedo sa činjenicom što statistika eksitona odstupa od Bose statistike treba uzeti u obzir i njihovu medjusobnu interakciju. Tada, pri malim koncentracijama, sistem eksitona se ponaša kao slabo neidealni Bose gas i prema tome u njemu se mogu realizovati stanja superfluidnog kretanja kroz kristal (dolazi do Bose kondenzacije na dnu eksitonske zone). Konačno, u radu /29/ izneto je tvrdjenje da, za razliku od sistema istinskih Bose čestica, sistem eksitona u principu ne može biti superfluidan. Dokaz o nemogućnosti superfluidnog kretanja eksitona u pomenutom radu izведен je na osnovu posmatranja prenosa mase u sistemu eksitona. Najdoslednije je problem Bose kondenzacije (i superfluidnosti) u sistemu eksitona Vanie - Mota tretiran u radovima /27/ i /30/. U radu /27/ posmatrana su dva pitanja: prvo, pod kakvim je uslovima moguća Bose kondenzacija u sistemu eksitona

Vanie - Mota i drugo, kakav je spektar elementarnih eksitacija u uslovima postojanja kondenzata i do kakvih novih efekata on dovođi. Što se tiče prvog pitanja, konstatovano je da je Bose kondenzacija moguća u slučaju kada je vreme života eksitona (T_e) veće od vremena uspostavljanja termodinamičke ravnoteže (T_c) između eksitona i rešetke. Pošto je kod eksitona u poluprovodničkim kristalima taj uslov zadovoljen, u radu je dobijen energetski spektar, koji je, slično kao kod slabo neidealnog Bose gasa, fononskog tipa (pri malim impulsima). Kao vrlo interesantan efekat, pokazano je dalje, da pri učestanostima nešto manjim od eksitonske apsorpcije dolazi do negativne apsorpcije svetlosti, tj. u poluprovodniku sa kondenzatom moguća je stimulisana emisija svetlosti.

U radu /27/ ostaje ipak otvoreno jedno pitanje. Naime, tamo se svim elektronima (i šupljinama) pripisuje isti termodinamički potencijal, što bi bilo tačno samo u slučaju potpune termodinamičke ravnoteže u sistemu eksitona, elektrona, šupljina i kristalne rešetke. Međutim, u realnim eksperimentima, takva potpuna ravnoteža nije moguća i to u smislu da su elektroni, šupljine i eksitoni u ravnoteži između sebe i sa kristalnom rešetkom po svim parametrima osim u jednom: ukupni broj eksitona i parova elektron-šupljina nije određen uslovima termodinamičke ravnoteže već bilo kakvim spoljašnjim izvorom eksitacija.

U radu /30/ problemu Bose kondenzacije eksitona Vanie - Mota prilazi se na drugi način. Kao što je poznato /31 - 32/, eksitoni predstavljaju, u suštini, kvante normalnih oscilacija elektronske gustine kristala, u mnogome slične plazmonima. U skladu s tim, u /30/ se stanje Bose kondenzacije posmatra kao koherentni talas elektronske gustine, konačne amplitude.

Posmatrajući koherentna stanja eksitona u pomenutom radu

je za amplitudu eksitonskog talasa dobijena jednačina:

$$ih \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi - \alpha |\phi|^2 \phi = 0 \quad (3.1)$$

Iako je u ovom sistemu kvantitativno moglo rezultirati jednačina koja je za $\alpha > 0$, ekvivalentna fenomenološkim jednačinama hidrodinamike superfluidne tečnosti /2/. Na taj način je potvrđena mogućnost superfluidnog kretanja eksitona, sa primedbom, da u sistemu eksitona ne može doći do prenosa mase ili nanelektrisanja, već se može posmatrati samo prenos energije eksitacije, ili drugih veličina, kao napr. momenta količine kretanja, električnog ili magnetnog momenta (ako postoji kod datog tipa eksitona). Time je ujedno i pokazano, da tvrdjenje autora u radu /29/ o nemogućnosti superfluidnog kretanja eksitona nije tačno, jer je ono bazirano na posmatranju samo prenosa mase, što se u sistemu eksitona zaista ne može ostvariti.

U svetlu rezultata pomenutih radova, analiziraćemo sada pitanje o mogućnosti Bose kondenzacije u sistemu Frenkelovih eksitona i magnona u Hajzenbergovom (Heisenberg) feromagnetu sa spinom $S = 1/2$. Kao što je poznato (vidi glave II i III) ove kvazičestice predstavljaju paulione čiji hamiltonijan, napisan preko Pauli operatora, ima sledeći oblik:

$$H = H_0 + H_{int} \quad (3.1a)$$

gde je

$$H_0 = \Delta \sum_n P_n^\dagger P_n + \frac{1}{2} \sum_{nm} V_{nm} P_m^\dagger P_n \quad (3.2)$$

i

$$H_{int} = \frac{1}{2} \sum_{nm} V_{nm} P_m^\dagger P_m P_n^\dagger P_n \quad (3.3)$$

Smisao oznake Δ i V_{nm} dat je u II glavi za eksitone, a u III

glavi za magnone.

Pri razmatranju mogućnosti Bose kondenzacije u sistemu pauliona čiji je hamiltonijan dat formulom (3.1a) nameću se dva pitanja. Prvo, da li se u sistemu kvazičestica može realizovati stanje u kojem će njihov broj biti konstantan, s obzirom da je to osnovni preduslov za nastajanje kondenzata? Drugo, u kojoj meri na kolektivna svojstva pauliona utiče činjenica da se oni ne pokoravaju Bose - Ajnštajnovoj statistici?

Odgovor na prvo pitanje može biti pozitivan samo ako posmatramo stanja sistema kvazičestica u vremenskom intervalu od trenutka uspostavljanja termodinamičke ravnoteže (T_c) sa rešetkom, do trenutka koji je određen vremenom života kvazičestice (T_e). Naime, u tom vremenskom intervalu ($T_c < T < T_e$) broj kvazičestica će biti određen bilo kakvim spoljašnjim izvorom eksitacija i ostat će konstantan u celom intervalu, čime je prvi uslov za nastajanje Bose kondenzacije zadovoljen.

Vreme uspostavljanja termodinamičke ravnoteže (termalizacije) T_c za Frenkelove eksitone izračunato je u /33/ glava X. Pokazano je da na niskim temperaturama vreme termalizacije T_c uglavnom je određeno interakcijom eksitona sa akustičnim fononima (u idealnim strukturama) i za molekularne kristale se kreće od 10^{-10} do 10^{-12} s.

Vreme života eksitona (onih koji nastaju kao rezultat pobudjenja elektronskog podsistema kristala) je reda veličine $\tau \sim 10^{-8}$ s (vidi /33/ glava X), što znači da je kod eksitona ispunjen uslov $\tau_e > T_c$, i u vremenskom intervalu $10^{-11} < T < 10^{-8}$ sekunda moguća je Bose kondenzacija Frenkelovih eksitona.

Vreme uspostavljanja termodinamičke ravnoteže u sistemu magnona izračunato je u /34/ i kreće se u intervalu od 10^{-10} - 10^{-13} s.

dok je vreme života magnona (u jakom spoljašnjem magnetnom polju), prema nekim eksperimentima /36/ $\bar{T}_e \sim 10^{-5}$ s, odakle zaključujemo da je i u sistemu magnona ispunjen uslov $\bar{T}_e > \bar{T}_c$ i da je moguća Bose kondenzacija magnona u vremenskom intervalu $10^{-10} < \bar{T} < 10^{-5}$ s.

Čak i nezavisno od eksperimentalnih podataka vreme života slabo interagujućih kvazi-čestica je veoma dugo, tako da možemo smatrati da je na niskim temperaturama u sistemu eksitona i magnona ispunjen uslov $\bar{T}_e > \bar{T}_c$ što je neophodno za nastajanje kondenzata.

Da bi ispitali u kojoj meri na kolektivna svojstva pauliona utiče činjenica da se oni ne pokoravaju Bose-Ajnštajnovoj statistici (drugo pitanje!), detaljnije ćemo analizirati hamiltonijan (3.1a), koristeći egzaktnu reprezentaciju Pauli operator P preko Bose operatora B, koja je data u /33/ glava X, i ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned} P_{\vec{S}} &= \left[\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-2)^v}{(1+v)!} B_{\vec{S}}^{v+1} B_{\vec{S}}^v \right]^{\frac{1}{2}} B_{\vec{S}} \\ P_{\vec{S}}^+ &= B_{\vec{S}}^+ \left[\sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-2)^v}{(1+v)!} B_{\vec{S}}^v B_{\vec{S}}^{v+1} \right]^{\frac{1}{2}} \\ P_{\vec{S}}^+ P_{\vec{S}} &= \sum_{v=0}^{\infty} \frac{(-2)^v}{(1+v)!} B_{\vec{S}}^{v+1} B_{\vec{S}}^{v+1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

S obzirom da posmatramo kristal na niskim temperaturama, kada je koncentracija kvazičestica mala ($\langle P_{\vec{S}}^+ P_{\vec{S}} \rangle \ll 1$), umesto tačnih izraza (3.4) zadržaćemo samo one članove koji opisuju dvobožonske interakcije. Iz (3.4) slede sledeće približne formule:

$$\begin{aligned} P_{\vec{S}} &\approx B_{\vec{S}} - B_{\vec{S}}^+ B_{\vec{S}}^+ B_{\vec{S}} \\ P_{\vec{S}}^+ &\approx B_{\vec{S}}^+ - B_{\vec{S}}^+ B_{\vec{S}}^+ B_{\vec{S}} \\ P_{\vec{S}}^+ P_{\vec{S}} &\approx B_{\vec{S}}^+ B_{\vec{S}} + B_{\vec{S}}^+ B_{\vec{S}}^+ B_{\vec{S}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Ako u hamiltonijan (3.1a) zamenimo Pauli operator Bose operatorima pomoću formule (3.5) i zadržimo članove najviše do dvobozonских interakcija (proizvoda četiri operatora), dobijamo sledeći ekvivalentni bozonski hamiltonijan:

$$H_B = H_2 + H_4 \quad (3.6)$$

gde je

$$H_2 = \Delta \sum_{\vec{n}} B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}}^- + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n} \vec{m}} V_{\vec{n}\vec{m}} B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{m}}^- \quad (3.7)$$

i

$$\begin{aligned} H_4 = & - \Delta \sum_{\vec{n}} B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}}^- B_{\vec{n}}^- - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n} \vec{m}} V_{\vec{n}\vec{m}} B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{m}}^- B_{\vec{m}}^- - \\ & - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n} \vec{m}} V_{\vec{n}\vec{m}} B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{m}}^- B_{\vec{m}}^- + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n} \vec{m}} V_{\vec{n}\vec{m}} B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{m}}^- B_{\vec{m}}^- \end{aligned} \quad (3.8)$$

Furije transformacijom operatora $B_{\vec{n}}$:

$$B_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{n}} \quad (3.9)$$

Hamiltonijan H_2 se dijagonalizuje i ima sledeći oblik:

$$H_2 = \sum_{\vec{k}} (\Delta + \frac{1}{2} V_{\vec{k}}) B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}}^- = \sum_{\vec{k}} \alpha(\vec{k}) B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}}^- \quad (3.10)$$

gde je

$$V_{\vec{k}} = \sum_{\vec{n}} V_{\vec{n}} e^{i\vec{k}\vec{n}} .$$

Ako posmatramo kristal proste kubne strukture u aproksimaciji najbližih suseda i za male talasne vektore, za $\alpha(\vec{k})$ dobijamo sledeći izraz:

$$\alpha(\vec{k}) = \tilde{\Delta} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} \quad (3.11)$$

gde je: $\tilde{\Delta} = \Delta + 3\tilde{V}$ (\tilde{V} - matrični element interakcije medju naj-

bližim susedima), i $m_{\text{eff}} = - \frac{\hbar^2}{a_V^2} \tilde{V}$ - efektivna masa kvazičestica.

U hamiltonijanu H_4 prva tri člana opisuju kinematičku interakciju medju bozonima, dok zadnji član opisuje njihovu dinamičku interakciju. S obzirom da je kod eksitona $\Delta \gg V_{nm}$ i da slična relacija važi i kod feromagneta u jakom spoljašnjem magnetnom polju (vidi glavu III), mi ćemo zadržati samo prvi član hamiltonijana H_4 , koji opisuje rasejanje bozona na δ -potencijalu:

$$H_4' = - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} 2\Delta \delta_{\vec{n}\vec{m}, \vec{B}_n^+ \vec{B}_m^+ \vec{B}_m^- \vec{B}_n^-} \quad (3.12)$$

Na osnovu opšte teorije I. M. Lifšica /36/, Dubovski i Konobejev /37/ izveli su formula za amplitudu rasejanja na δ -potencijalu, koja ima sledeći oblik

$$A(\vec{k}) = \frac{a}{2} \frac{\xi}{1 - \xi + \xi x^2 - i \frac{\pi x \xi}{2}} \quad (3.13)$$

gde je

a - konstanta kristalne rešetke,

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\Delta}{\tilde{V}} \\ x &= \frac{\vec{k}}{k_m} \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

k_m - vrednost talasnog vektora na granici Brijulenove zone.

U slučaju kada je $\Delta \gg \tilde{V}$ i za male talasne vektore ($\vec{k} \ll k_m$), formula (3.13) za amplitudu rasejanja daje:

$$A(\vec{k}) = - \frac{a}{2} \quad (3.15)$$

odakle zaključujemo da na δ -potencijalu dolazi do odbijanja medju kvazičesticama. S obzirom da za rasejanje na δ -potencijalu ne možemo primeniti Bornovu aproksimaciju, prelaz u impulsni prostor u H_4' izvršićemo na sledeći način:

$$U_{\text{nm}} \rightarrow I(\vec{k}) = \frac{2\pi\hbar^2}{m_{\text{eff}}\Omega_0} \left\{ A(\vec{k}) + A^*(\vec{k}) \right\} \quad (3.16)$$

što odgovara prelazu na amplitudu rasejanja kao u (1.22). (Ω_0 predstavlja zapreminu elementarne celije).

Ako za amplitudu rasejanja na δ -potencijalu uzmememo vrednost (3.13)^{*}, koristeći formule (3.14) i (3.9), za hamiltonijan H_4' u impulsnom prostoru dobijamo sledeći izraz:

$$H_4' = \frac{2\pi\hbar^2 a}{m_{\text{eff}} V} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3} B_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^+ B_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^- \quad (3.17)$$

gde je V zapremina kristala.

Ukupni hamiltonijan sistema kvazičestica u impulsnom prostoru ima oblik:

$$H = \sum_{\vec{k}} \alpha(\vec{k}) B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}}^- + \frac{2\pi\hbar^2 a}{m_{\text{eff}} V} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3} B_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^+ B_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^- \quad (3.18)$$

Pokazaćemo da je u sistemu kvazičestica (eksitona i magnona u jakom magnetnom polju), čiji je hamiltonijan dat gornjom jednačinom, moguće superfluidno kretanje. U tom cilju posmatraćemo kohärentna stanja u sistemu bozona, po analogiji sa radom /30/.

Napomenimo da u računu neće biti uzeti u obzir višečes-

* Isti rezultat za amplitudu rasejanja dobijamo ako posmatramo rasejanje sporih čestica na potencijalnu jamu dubine 2Δ i širine $a/2$, kada je ispunjen uslov $2\Delta \gg 4\hbar^2/m a^2$ i osim toga veličina $\frac{a}{2\hbar}(4\Delta m)^{1/2}$ nije bliska neparnom umnošku od $\pi/2$. Isto dobijamo i kada jamu zamenimo "barijerom" visine 2Δ /38/.

tični korelacioni efekti, te ćemo u hamiltonijanu (3.18) zadržati samo članove koji sadrže operatore $\hat{n}_{\vec{k}} = \hat{B}_{\vec{k}\vec{k}}^\dagger \hat{B}_{\vec{k}\vec{k}}$ i njihove srednje vrednosti $\langle \hat{n}_{\vec{k}} \rangle$. U toj "aproksimaciji Harti-Foka" hamiltonijan (3.18) imaće sledeći oblik:

$$H = \sum_{\vec{k}} E(\vec{k}) \hat{B}_{\vec{k}\vec{k}}^\dagger \hat{B}_{\vec{k}\vec{k}} \quad (3.19)$$

gde je

$$E(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} + \tilde{\Delta} + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m_{\text{eff}}} n \quad (3.20)$$

a n predstavlja koncentraciju kvazičestica.

$$n = \frac{1}{V} \sum_{\vec{q}} \langle \hat{n}_{\vec{q}} \rangle \quad (3.21)$$

Koherentna stanja $|\psi_{\vec{k}}\rangle$ u sistemu bozona, u pomenutoj aproksimaciji, data su sledećom relacijom (/39/, /40/):

$$|\psi_{\vec{k}}\rangle = \exp \left\{ \phi(\vec{k}, t) \hat{B}_{\vec{k}}^\dagger - \phi^*(\vec{k}, t) \hat{B}_{\vec{k}} \right\} |0\rangle \quad (3.22)$$

gde smo sa $|0\rangle$ obeležili vakuumsko stanje. Funkciju $|\psi_{\vec{k}}\rangle$ možemo razviti po svojstvenim funkcijama operatora $\hat{n}_{\vec{k}} = \hat{B}_{\vec{k}\vec{k}}^\dagger \hat{B}_{\vec{k}\vec{k}}$, koje su definisane relacijom:

$$\hat{n}_{\vec{k}} |\psi_{\vec{k}}\rangle = n_{\vec{k}} |\psi_{\vec{k}}\rangle \quad (3.23)$$

Tada je

$$|\psi_{\vec{k}}\rangle = \text{const.} \sum_{n_{\vec{k}}=0}^{\infty} \frac{\phi^{n_{\vec{k}}}(\vec{k}, t)}{\sqrt{n_{\vec{k}}!}} |n_{\vec{k}}\rangle \quad (3.24)$$

gde se konstanta određuje iz uslova normiranja. Da bi odredili koju jednačinu zadovoljava amplituda bozonskog talasa $\phi(\vec{k}, t)$, poči ćemo od Šredingerove jednačine za funkciju $|\psi_{\vec{k}}\rangle$:

$$i\hbar \frac{\partial |c_{\vec{k}}\rangle}{\partial t} - H |c_{\vec{k}}\rangle = 0 \quad (3.25)$$

Ako za funkciju $|c_{\vec{k}}\rangle$ koristimo izraz (3.24), iz (3.25) sledi da $\phi(\vec{k}, t)$ mora zadovoljavati sledeću jednačinu:

$$i\hbar \frac{\partial \phi(\vec{k}, t)}{\partial t} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \phi(\vec{k}, t) - \left[\tilde{\Delta} + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} n \right] \phi(\vec{k}, t) = 0 \quad (3.26)$$

Prije transformacijom preći ćemo u konfiguracijski prostor:

$$\phi(\vec{r}, t) = \int \phi(\vec{k}, t) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d^3k ,$$

posle čega za funkciju $\phi(\vec{r}, t)$ dobijamo sledeću diferencijalnu jednačinu:

$$i\hbar \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \phi - (\tilde{\Delta} + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} n) \phi = 0 \quad (3.27)$$

koja je analogna jednačini (3.1) jer je $\tilde{\Delta} + \frac{4\pi\hbar^2 a}{m} n > 0$. Time smo pokazali da je u sistemu kvazičestica, čiji je hamiltonijan dat jednačinom (3.18), moguće superfluidno kretanje.

Na osnovu svega što je izloženo u ovom paragrafu, možemo donekle precizirati pojam superfluidnog kretanja kvazičestica (eksitona i magnona). U prvom redu, za razliku od tečnog helijuma ili superprovodnika, jasno je da u sistemu kvazičestica superfluidno kretanje ne može trajati beskonačno dugo (u makro razmerama), već je ograničeno vremenom života kvazičestica. Sam prelaz kvazičestica u superfluidno stanje znači da vreme amortizacije toka nije određeno vremenom rasejanja kvazičestica (vremenom relaksacije T_c), nego vremenom života T_f , koje je veće za nekoliko reda veličine. U skladu sa ovim zaključcima, u II i III glavi, Bose kondenzacija eksitona i magnona biće tretirana kao statistička fluktuacija u in-

tervalu vremena $\tilde{T}_c < t < \tilde{T}_\ell$ i pored toga biće razmotrene i mogućnosti eksperimentalnog dokazivanja postojanja kondenzata u sistemu eksitona i magnona, respektivno.

II G L A V A

Bose kondenzacija Frenkelovih eksitona i polaritona

4. Eksitonski hamiltonijan i Bose kondenzacija

U ovom paragrafu biće detaljno analiziran eksitonski hamiltonijan i Bose kondenzacija u sistemu Frenkelovih eksitona, koji nastaju kao pobudjenja elektronskog podsistema u molekularnim kristalima.

Eksitonski hamiltonijan izražen preko Pauli operatora ima sledeći oblik (/33/ paragraf 2):

$$H = H_0 + H_{int} \quad (4.1)$$

gde je

$$H_0 = \sum_{\vec{n}} \Delta P_{\vec{n}\vec{n}}^+ P_{\vec{n}\vec{n}}^- + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} M_{\vec{n}\vec{m}}^I P_{\vec{n}\vec{m}}^+ P_{\vec{n}\vec{m}}^- + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} M_{\vec{n}\vec{m}}^{II} (B_{\vec{n}\vec{m}}^+ B_{\vec{n}\vec{m}}^- \rightarrow B_{\vec{n}\vec{m}}^- B_{\vec{n}\vec{m}}^+) \quad (4.2)$$

i

$$H_{int} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} M_{\vec{n}\vec{m}}^{IV} P_{\vec{n}\vec{m}}^+ P_{\vec{n}\vec{m}}^- P_{\vec{m}\vec{n}}^- P_{\vec{m}\vec{n}}^+ \quad (4.3)$$

Oznake koje se koriste u gornjim formulama imaju sledeći smisao:

$$\Delta = E_{nf} - E_{no} + \frac{1}{2} V_o(of;fo) + \frac{1}{2} V_o(fo;of) - V_o(oo;oo)$$

predstavlja energiju pobudjenja molekula u kristalu ($E_{nf} - E_{no}$ je

energija pobudjenja izolovanog molekula),

$$M_{nm}^{I} = V_{nm}(f0;f0) + V_{nm}(0f;0f),$$

$$M_{nm}^{II} = V_{nm}(ff;00) = V_{nm}(00;ff),$$

$$M_{nm}^{IV} = V_{nm}(ff;ff) + V_{nm}(00;00) - 2V_{nm}(f0;0f)$$

gde je

$$V_{nm}(f_1 f_2; f_3 f_4) = \int \varphi_n^{* f_1} \varphi_m^{* f_2} V_{nm} \varphi_m^{f_3} \varphi_n^{f_4} d\vec{r}_n d\vec{r}_m$$

matrični element operatora dipol - dipolne interakcije V_{nm} medju molekulima kristala, i

$$V_o(f_1 f_2; f_3 f_4) = \sum_n V_{no}(f_1 f_2; f_3 f_4).$$

Pauli operatori $P_{\vec{n}}$ i $P_{\vec{m}}^+$, kao što je poznato, zadovoljavaju sledeće komutacione relacije:

$$\left. \begin{aligned} [P_{\vec{n}}, P_{\vec{m}}^+] &= (1 - 2P_{\vec{n}}^+ P_{\vec{n}}) \delta_{\vec{n}\vec{m}} \\ [P_{\vec{n}}, P_{\vec{m}}] &= [P_{\vec{n}}^+, P_{\vec{m}}^+] = 0 \\ (P_{\vec{n}}^+)^2 &= (P_{\vec{n}})^2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

Analizu hamiltonijana (4.1) izvršićemo pomoću egzaktne Bose - reprezentacije Pauli operatora, kao u 3. paragrafu. Pošto posmatramo kristal na niskim temperaturama, kada je koncentracija eksitona mala ($\langle P_{\vec{m}}^+ P_{\vec{m}} \rangle \ll 1$), u bozonskom hamiltonijanu zadržaćemo samo članove do četvrtog reda po Bose operatorima (dvobozonska interakcija). U takvoj aproksimaciji, ekvivalentni bozonski hamil-

nijan ima sledeći oblik:

$$H_B = H_2 + H_4 \quad (4.5)$$

gde je

$$H_2 = \Delta \sum_{\vec{n}} B_{\vec{n}}^{\dagger} B_{\vec{n}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}, \vec{m}} M_{\vec{n}\vec{m}}^I B_{\vec{n}}^{\dagger} B_{\vec{m}} + \\ + \sum_{\vec{n}, \vec{m}} M_{\vec{n}\vec{m}}^{II} (B_{\vec{n}}^{\dagger} B_{\vec{m}}^{\dagger} + B_{\vec{n}} B_{\vec{m}}) \quad (4.6)$$

$$H_4 = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{n}, \vec{m}} 2\Delta \delta_{\vec{n}\vec{m}} B_{\vec{n}}^{\dagger} B_{\vec{m}}^{\dagger} B_{\vec{m}} B_{\vec{n}} - \\ - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}, \vec{m}} M_{\vec{n}\vec{m}}^I (B_{\vec{n}}^{\dagger} B_{\vec{n}}^{\dagger} B_{\vec{n}} B_{\vec{m}} + B_{\vec{n}}^{\dagger} B_{\vec{m}}^{\dagger} B_{\vec{m}} B_{\vec{n}}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}, \vec{m}} M_{\vec{n}\vec{m}}^{IV} B_{\vec{n}}^{\dagger} B_{\vec{m}}^{\dagger} B_{\vec{m}} B_{\vec{n}} \quad (4.7)$$

Vidimo da pri prelazu sa Pauli na Bose operatore, čak i ako u hamiltonijanu (4.1) odbacimo član koji sadrži interakciju medju eksitonima (paulionima, $H_{int} = 0$), u ekvivalentnom bozonskom hamiltonijanu H_B , pored hamiltonijana nulte aproksimacije (4.6) pojavljuju se članovi četvrtog reda po Bose operatorima, koji opisuju tzv. kinematičku interakciju medju eksitonima (sada bozonima). Kinematičkoj interakciji odgovaraju prve tri sume u hamiltonijanu (4.7), i ona je samo posledica razlike u komutacionim relacijama za bozone i paulione.

Prva suma u (4.7) opisuje rasejanje eksitona (bozona) na δ -potencijalu i kao što je pokazano u /33/ Glava VI, potencijal takvog oblika može da dovede do pojave lokalnih stanja. Pojava lokalnih stanja znači da se mogu obrazovati bieksitoni, tj. dva eksitona se mogu naći u vezanom stanju. U vezi stiš razmotrićemo nešto detaljnije pitanje pojave lokalnih stanja. U prvom redu primećimo da potencijal $V_{nm} = -2\Delta \delta_{nm}$ može da dovede do pojave bilo

zatim detale članove Hamiltoniana (4.7), obavio da nema do-
malog lokalnog nivoa bilo dubokog nivoa (dubine $\sim 2\Delta$). Što se ti-
če malih lokalnih nivoa, koji su udaljeni od dna eksitonske zone
približno za širinu eksitonske zone, ako se i pojavljuju oni se na-
laze uvek izmedju eksitonskih zona. Ispod najniže eksitonske zone,
koja i jeste aktuelna pri razmatranju Bose - Ajnštajnovе kondenza-
cije, mali lokalni nivoi se ne pojavljuju (/33/ 3. paragraf, Gl. VI),
te prema tome nema ni vezivanja eksitona.

Što se tiče vezivanja eksitona na duboki lokalni nivo, du-
bine $\sim 2\Delta$, ono se u principu može desiti. Ipak kod kristala gde je
kvantni izlaz eksitonske luminescencije blizak jedinici, neradija-
cioni procesi anihilacije eksitona se ne ostvaruju za vreme života
eksitona T_e . (U protivnom slučaju, pri razmatranju kolektivnih
svojstava eksitona ne bi se moglo uzeti da je njihov broj konstan-
tan). Jasno da je kod takvih kristala vezivanje dva eksitona na du-
boki lokalni nivo malo verovatno, jer predpostavlja prelaz u fono-
ne sa dva puta većom energijom, što je energetski malo verovatno na
niskim temperaturama. Prema tome, i pored toga što je formalno mo-
guće postojanje vezanih stanja dva eksitona na jednom čvoru, pre-
laz u ova stanja za vreme $t < T_e$ je malo verovatan i otuda nije
nužno uzeti ga u obzir. Na osnovu toga zaključujemo da na δ -po-
tencijalu dolazi samo do rasejanja eksitona jedan na drugog.

Amplituda rasejanja na δ -potencijalu data je u 3. pa-
ragrafu i iznosi $-\frac{\alpha}{2}$, što odgovara odbijanju medju eksitonima. Ovo
odbijanje odražava činjenicu da elektronska pobudjenja u molekular-
nim kristalima nisu bozoni nego paulioni, tako da pojava odbijanja
na malim rastojanjima (manjim od konstante rešetke) kompenzuje gre-
šku povezanu sa prelazom od pauliona na bozone.

Pre nego što izvedemo bilo kakav zaključak o mogućnosti
Bose kondenzacije eksitona na niskim temperaturama, potrebno je raz-

motriti ostale članove hamiltonijana (4.7), obzirom da mogu dovesti do vezivanja dva eksitona u bieksiton.^{*}

Matrični elementi $M_{\vec{n}\vec{m}}^I$ i $M_{\vec{n}\vec{m}}^{IV}$ opadaju sa rastojanjem medju molekulima $|\vec{n} - \vec{m}|$ ne sporije od $|\vec{n} - \vec{m}|^{-3}$ (dipol - dipol interakcija), tako da interakcija medju eksitonima opisana operatorom:

$$H_4' = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{n}, \vec{m}} M_{\vec{n}\vec{m}}^I (B_{\vec{n}\vec{n}\vec{n}\vec{m}}^+ B_{\vec{n}\vec{n}\vec{n}\vec{m}}^- + B_{\vec{n}\vec{m}\vec{m}\vec{m}}^+ B_{\vec{n}\vec{m}\vec{m}\vec{m}}^-) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}, \vec{m}} M_{\vec{n}\vec{m}}^{IV} B_{\vec{n}\vec{m}\vec{n}\vec{m}}^+ B_{\vec{n}\vec{m}\vec{n}\vec{m}}^- , \quad (4.8)$$

za bilo koja rastojanja medju eksitonima zadovoljava nejednačinu:

$$|U_{\vec{n}\vec{m}}| \ll \frac{\hbar^2}{m_{\text{eff}} |\vec{n} - \vec{m}|^2} , \quad (4.9)$$

gde je m_{eff} - efektivna masa eksitona.

Kao što je pokazano u /38/, 45. paragraf i 125. paragraf, čak i u slučaju kad interakcija $U_{\vec{n}\vec{m}}$ odgovara privlačenju medju eksitonima, ispunjavanje uslova (4.9) označava da ne može doći do pojave vezanih stanja dva eksitona, a njihovu kontribuciju amplitudi rasejanja možemo izračunati u Born-ovoј aproksimaciji. Obzirom da je $|M_{\vec{n}\vec{m}}^I| \sim |M_{\vec{n}\vec{m}}^{IV}| \ll \Delta$, interakcija (4.8) može dati samo malu korekciju na amplitudu rasejanja na δ -potencijalu, tako da ona ostaje negativna, a samim tim medju eksitonima na malim rastojanjima preovladaće odbijanje, što znači da postoji mogućnost Bose kondenzacije eksitona.

U skladu sa onim što je gore rečeno, u hamiltonijanu H_4 , datom formulom (4.7), zadržaćemo samo deo koji odgovara rasejanju na δ -potencijalu. Ako u hamiltonijanu H_2 iz (4.6)

* Vezivanje eksitona u bieksiton uslovljeno virtuelnom razmenom fona (eksiton - fonon interakcijom) biće posmatrano u 7. paragrafu.

odbacimo članove oblika $B_{n,m}^{\dagger}B_{n,m}^{\dagger}$ i $B_{n,m}B_{n,m}$ (to odgovara Hajtler-Londonovoj aproksimaciji), ekvivalenti bozonski hamiltonijan (4.5) imaće sledeći oblik:

$$H_B = \Delta \sum_n B_{n,n}^{\dagger}B_{n,n} + \frac{1}{2} \sum_{\overline{n}, \overline{m}} M_{\overline{n}\overline{m}}^I B_{\overline{n}\overline{m}}^{\dagger}B_{\overline{n}\overline{m}} - \frac{1}{2} \sum_{\overline{n}, \overline{m}} 2\Delta \delta_{\overline{n}\overline{m}} B_{\overline{n}\overline{m}}^{\dagger}B_{\overline{n}\overline{m}}^{\dagger}B_{\overline{n}\overline{m}}B_{\overline{n}\overline{m}} \quad (4.10)$$

Pri prelazu u impulsnji prostor, Furije (Fourier) transformacijom operatora $B_{\overline{n}}$:

$$B_{\overline{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\overline{k}} b_{\overline{k}} e^{ik\overline{n}}, \quad (4.11)$$

u delu hamiltonijana koji opisuje rasejanje na δ - potencijalu izvršićemo prelaz na amplitudu rasejanja, kao u 3. paragrafu, tako da će hamiltonijan (4.10) u impulsnom prostoru imati sledeći oblik:

$$\tilde{H}_B = \sum_{\overline{k}} \alpha(\overline{k}) b_{\overline{k}}^{\dagger} b_{\overline{k}} + \frac{2\pi\hbar^2 a}{m_{eff} V} \sum_{\overline{q}_1 \overline{q}_2 \overline{q}_3} b_{\overline{q}_1}^{\dagger} b_{\overline{q}_2}^{\dagger} b_{\overline{q}_3} b_{\overline{q}_1 + \overline{q}_2 - \overline{q}_3}, \quad (4.12)$$

gde je (za detaljan račun videti napr. /33/ 2. paragraf, Gl. I):
 $\alpha(\overline{k}) \approx \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{eff}}$ - energija eksitona u aproksimaciji efektivne mase,

računata od dna eksitonske zone;

$$m_{eff} = - \frac{\hbar^2}{2a^2 M} \quad - \text{efektivna masa eksitona};$$

M - matrični element operatora dipol - dipolne interakcije za najbliže susede;

V - zapremina kristala.

Za amplitudu rasejanja na δ - potencijalu uzeta je vrednost $-\frac{a}{2}$.

Hamiltonijan (4.12) ima isti oblik kao hamiltonijan slabo neidealnog Bose gasa u aproksimaciji tvrdih sfera, te na njega možemo primeniti teoriju Bogoliubova, slično kao i u slučaju teč-

nog helijuma (videti 1. paragraf). spektar tačnog helijuma (1. paragraf).

Ako kondenzatne operatore zamenimo brojevima $b_0 = b_0^\dagger = \sqrt{N_0}$, gde je N_0 broj kondenzatnih eksitona, koji je približno jednak ukupnom broju eksitona, tj. $N_n \approx N$, sličnim postupkom kao u 1. paragrafu dobijamo sledeći efektivni hamiltonijan (u uslovi ma kondenzacije) :

Što znači da je minimum fiksne brzine pozitiven, a to je upravo uslov za pojavu $H_{\text{eff}} = \sum_{\vec{k} \neq 0} [\alpha(\vec{k}) + \beta(\vec{k})] B_{\vec{k}}^\dagger B_{\vec{k}} +$ eksitona, često se naziva se potencijalnim načinom kondenzacije.

$$+ \sum_{\vec{k} \neq 0} \beta(\vec{k}) [B_{\vec{k}}^\dagger B_{-\vec{k}}^\dagger + B_{\vec{k}}^\dagger B_{-\vec{k}}] + \frac{\hbar^2 \pi^2 a}{V m_{\text{eff}}} \quad (4.13)$$

gde je : $B_{\vec{k}}^\dagger = \frac{b_0^\dagger b_{\vec{k}}}{\sqrt{N_0}}$ i $B_{\vec{k}}^\dagger = \frac{b_0 b_{\vec{k}}^\dagger}{\sqrt{N_0}}$

začetek dijagonala, u kojem su eksitoni uključeni u nadkondenzaciju i da je preostalo sivo načelo u kojem su eksitoni uključeni u nadkondenzaciju.

Deo hamiltonijana koji sadrži proizvod četiri nadkondenzatna operatora nismo zapisali, što je u skladu sa teorijom Bogoliubova.

Hamiltonijan (4.13) se dijagonalizuje "u-v" transformacijom:

$$\left. \begin{aligned} B_{\vec{k}} &= u_{\vec{k}} C_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} C_{-\vec{k}}^\dagger \\ B_{\vec{k}}^\dagger &= u_{\vec{k}} C_{\vec{k}}^\dagger + v_{\vec{k}} C_{-\vec{k}} \end{aligned} \right\} \quad (4.14)$$

i za spektar eksitona u uslovima Bose kondenzacije dobijamo sledeći izraz:

$$\epsilon(\vec{k}) = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} \right)^2 + \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} \right) \frac{4\pi a \hbar^2 N_0}{V m_{\text{eff}}}} \quad (4.15)$$

Kao posledica kontinuiranih u uslovima Bose kondenzacije po-

Spektar (4.15) je sličan spektru tečnog helijuma (1. paragraf) i prema tome zadovoljava kriterijum superfluidnosti. Nai-me, iz (4.15) sledi ($\vec{p} = \hbar\vec{k}$) :

$$\min \frac{\varepsilon(p)}{p} = \sqrt{\frac{2\pi a\hbar^2 N_0}{V m_{\text{eff}}^2}} > 0 \quad , \quad (4.16)$$

što znači da je minimum fazne brzine pozitivan, a to je upravo uslov za pojavu superfluidnog kretanja u sistemu eksitona, naravno u skladu sa primedbama datim na kraju 3. paragrafa.

Na kraju ovog paragrafa možemo zaključiti sledeće: Pre-laz sa Pauli na Bose operatore omogućio nam je da izdvojimo kinematičku interakciju u sistemu eksitona, da odredimo amplitudu rasjemanja i da primenom teorije slabo neidealnog Bose gasa nadjemo zakon disperzije za eksitone u uslovima Bose kondenzacije.

5. Korekcija superfluidnog spektra usled neodržanja nadkondenzatnih eksitona

Pomoću laserskih snopova velikog intenziteta moguće je postići vrlo veliku koncentraciju eksitona u molekularnim kristalima ($n = \frac{N}{M} \sim 10^{-1} - 10^{-3}$, gde je M broj eksitona, a N broj molekula u kristalu). Kod teorijskog razmatranja Bose kondenzacije u sistemu eksitona, pri tako velikim koncentracijama, jasno je da teorija Bogoliubova, koju smo primenili u prošlom paragrafu, ne može dati zadovoljavajuće rezultate. U ovom paragrafu ona će biti korigovana na taj način što će biti uzete u obzir popravke na energetski spektar eksitona usled neodržanja nadkondenzatnih eksitona, što se u standardnoj teoriji zanemaruje.

Eksitonski hamiltonijan u uslovima Bose kondenzacije na

osnovu formula (4.12) i (4.13) možemo napisati na sledeći način:

$$H = \sum_{\vec{k} \neq 0} [\alpha(\vec{k}) + \beta(\vec{k})] B_{\vec{k}}^{\dagger} B_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k} \neq 0} \beta(\vec{k}) (B_{\vec{k}}^{\dagger} B_{-\vec{k}}^{\dagger} + B_{\vec{k}} B_{-\vec{k}}) + \frac{1}{N} \sum_{\substack{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3 \\ \vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 = 0}} \gamma(\vec{k}_1 - \vec{k}_3) B_{\vec{k}_1}^{\dagger} B_{\vec{k}_2}^{\dagger} B_{\vec{k}_3} B_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3} \quad (5.1)$$

gde je:

$$\alpha(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} \quad , \quad \beta(\vec{k}) = \frac{N_0}{N} \gamma_0 + 4\Delta \left(\frac{N_0}{N} \right)^2 \quad (5.2)$$

$$\gamma(\vec{k}_1 - \vec{k}_3) = \gamma_0 = \frac{2\pi \hbar^2 a}{m_{\text{eff}} \Omega_0}$$

(Ω_0 - zapremina elementarne čelije).

U teoriji Bogoliubova hamiltonijan (5.1) se dijagonalizuje "u-v" transformacijom:

$$B_{\vec{k}} = u_{\vec{k}} C_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} C_{-\vec{k}}^{\dagger} \quad (5.3)$$

$$B_{\vec{k}}^{\dagger} = u_{\vec{k}} C_{\vec{k}}^{\dagger} + v_{\vec{k}} C_{-\vec{k}}$$

i zanemaruje se doprinos dela hamiltonijana koji sadrži proizvod četiri operatora. Na taj način, dijagonalizacijom samo kvadratnog dela hamiltonijana (5.1) dobijen je eksitonski spektar (4.15).

Treba napomenuti da ovakva dijagonalizacija ne daje korektni spektar, jer u hamiltonijanu (5.1) su uključeni i delovi drugih redova.

* Član $4\Delta(N_0/N)^2$ u $\beta(\vec{k})$, koji je proporcionalan kvadratu koncentracije kondenzatnih eksiton, dobijen je od dela ekvivalentnog bozonskog hamiltonijana (4.5) koji sadrži proizvode šest Bose operatora: $H_6 = \frac{2}{3}\Delta \sum_{\vec{n}} B_{\vec{n}}^{\dagger} B_{\vec{n}}^{\dagger} B_{\vec{n}}^{\dagger} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B_{\vec{n}}$. Pošto je $\Delta \gg M_{\text{eff}}$, ostale delove hamiltonijana šestog reda smo odbacili.

ktor čak ni u kvadratnoj aproksimaciji, što je lako zaključiti iz sledećeg rasudjivanja. S obzirom da "u-v" transformacija sadrži u sebi kreacione i anihilacione operatorne (C i C^\dagger), očigledno je da ukoliko ovu transformaciju uvedemo i u deo hamiltonijana četvrtog reda po originalnim operatorima ($B_{\vec{k}}$ i $B_{\vec{k}}^\dagger$), redosled u kojem figurišu operatori kreacije i anihilacije u novom hamiltonijanu, promeniće se. Ako taj hamiltonijan svedemo na normalne produkte po novim operatorima, dobićemo dopunske delove nultog i drugog reda koji menjaju spektar Bogoliubova. To ćemo konkretnim računom i pokazati.

Ako u hamiltonijanu (5.1) zamenimo Bose operatorne $B_{\vec{k}}$ i $B_{\vec{k}}^\dagger$ novim Bose operatorima $C_{\vec{k}}$ i $C_{\vec{k}}^\dagger$ pomoću kanonske transformacije (5.3), dobićemo sledeći izraz za novi hamiltonijan:

$$\begin{aligned}
 H = & \sum_{\vec{k}} \left[\alpha(\vec{k}) + \beta(\vec{k}) \right] (u_{\vec{k}} C_{\vec{k}}^\dagger + v_{\vec{k}} C_{-\vec{k}})(u_{\vec{k}} C_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} C_{-\vec{k}}^\dagger) + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \beta(\vec{k}) \left[(u_{\vec{k}} C_{\vec{k}}^\dagger + v_{\vec{k}} C_{-\vec{k}})(u_{\vec{k}} C_{-\vec{k}}^\dagger + v_{\vec{k}} C_{\vec{k}}) + (u_{\vec{k}} C_{-\vec{k}} + v_{\vec{k}} C_{\vec{k}}^\dagger) \times \right. \\
 & \times (u_{\vec{k}} C_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} C_{-\vec{k}}^\dagger) + \frac{1}{8} \sum_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{k}_3 + \vec{k}_4} \gamma(\vec{k}_1 - \vec{k}_3) (u_{\vec{k}} C_{\vec{k}}^\dagger + v_{\vec{k}} C_{-\vec{k}})(u_{\vec{k}} C_{\vec{k}}^\dagger + v_{\vec{k}} C_{-\vec{k}}) \times \\
 & \times (u_{\vec{k}} C_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} C_{-\vec{k}}^\dagger)(u_{\vec{k}} C_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} C_{-\vec{k}}^\dagger) \quad (5.4)
 \end{aligned}$$

Pošto se u hamiltonijanu (5.4) izvrše naznačena množenja, potrebno je pomoću komutacionih relacija za Bose operatorne:

$$\begin{aligned}
 C_{\vec{k}} C_{\vec{k}'}^\dagger - C_{\vec{k}'}^\dagger C_{\vec{k}} = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}, \\
 C_{\vec{k}} C_{\vec{k}'} = C_{\vec{k}'} C_{\vec{k}}, \quad C_{\vec{k}}^\dagger C_{\vec{k}'}^\dagger = C_{\vec{k}'}^\dagger C_{\vec{k}}^\dagger
 \end{aligned} \quad (5.5)$$

sve proizvode operatora $C_{\vec{k}}$ i $C_{\vec{k}}^+$ napisati u obliku normalnih produkata, tj. da su operatori kreacije uvek levo od operatora anihilacije (napr. $C_{\vec{k}_1}^+ C_{\vec{k}_2}^+ C_{\vec{k}_3}^+ C_{\vec{k}_4} = C_{\vec{k}_4}^+ C_{\vec{k}_3}^+ C_{\vec{k}_2}^+ C_{\vec{k}_1} + \delta_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \vec{k}_4} C_{\vec{k}_1}^+ C_{\vec{k}_2}^+ C_{\vec{k}_3}^+ C_{\vec{k}_4}$ itd.). Posle glomaznih, ali u principu jednostavnih računanja, hamiltonijan (5.4) možemo svesti na sledeći oblik:

$$H = H_0 + H_2 + H_4 \quad (5.6)$$

gde je

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_{\vec{k}} \left[\alpha(\vec{k}) v_{\vec{k}}^2 + \beta(\vec{k}) (v_{\vec{k}}^2 + u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}) \right] + \\ &+ \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \left[\gamma(\vec{q}_1 - \vec{q}_2) u_{\vec{q}_1} u_{\vec{q}_2} v_{\vec{q}_1} v_{\vec{q}_2} + \right. \\ &\left. + (\gamma(\vec{q}_1 - \vec{q}_2) + \gamma_0) v_{\vec{q}_1}^2 v_{\vec{q}_2}^2 \right] \end{aligned}$$

popraća uvelike redoslijednost izrazitosti (5.1), a

popravka na energiju osnovnog stanja;

$$\begin{aligned} H_2 &= \sum_{\vec{k} \neq 0} \left\{ u_{\vec{k}}^2 \left[\alpha(\vec{k}) + \beta(\vec{k}) + \frac{2}{N} \sum_{\vec{q}} \gamma_0 v_{\vec{q}}^2 + \frac{2}{N} \sum_{\vec{q}} \gamma(\vec{k} - \vec{q}) v_{\vec{q}}^2 \right] + \right. \\ &+ v_{\vec{k}}^2 \left[\alpha(\vec{k}) + \beta(\vec{k}) + \frac{2}{N} \sum_{\vec{q}} \gamma_0 v_{\vec{q}}^2 + \frac{2}{N} \sum_{\vec{q}} \gamma(\vec{k} + \vec{q}) v_{\vec{q}}^2 \right] + \\ &+ 2u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} \left[\beta(\vec{k}) + \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} (\gamma(\vec{k} - \vec{q}) + \gamma(\vec{k} + \vec{q})) u_{\vec{q}} v_{\vec{q}} \right] \left. C_{\vec{k}}^+ C_{\vec{k}} \right. + \\ &+ \sum_{\vec{k} \neq 0} \left\{ (u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2) \left[\frac{1}{2} \beta(\vec{k}) + \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \gamma(\vec{k} - \vec{q}) u_{\vec{q}} v_{\vec{q}} \right] + \right. \\ &+ u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} \left[\alpha(\vec{k}) + \beta(\vec{k}) + \frac{2}{N} \sum_{\vec{q}} (\gamma_0 + \gamma(\vec{k} - \vec{q})) v_{\vec{q}}^2 \right] \left. \left(C_{\vec{k}}^+ C_{-\vec{k}}^+ + \right. \right. \\ &\left. \left. + C_{\vec{k}}^+ C_{-\vec{k}} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$H_4 = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \Phi_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3} (C_{\vec{k}_1}^+ C_{\vec{k}_2}^+ C_{\vec{k}_3}^+ C_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3} + C_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3}^+ C_{\vec{k}_1}^+ C_{\vec{k}_2}^+ C_{\vec{k}_3}^+)$$

$$+ F_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^{0+} C_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^{++} C_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^{++} + G_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^{+} (C_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^{++} C_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^{++} - C_{-\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^{+} C_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^{+}) \quad (5.8)$$

U formuli (5.8) korišćene su sledeće oznake:

$$\Phi_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3} = 2 \gamma_0 (u_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^+ u_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^- + v_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^+ v_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^-) \quad (5.9)$$

$$F_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^{0+} = \gamma_0 (u_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^+ u_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^- + v_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^+ v_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^- + 4 u_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^+ v_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^-) \quad (5.10)$$

$$G_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^{+} = \gamma_0 u_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^+ v_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3}^- \quad (5.11)$$

Nepoznate funkcije $u_{\vec{k}}$ i $v_{\vec{k}}$ odredit ćemo iz uslova da hamiltonijan H_2 (formula 5.7) bude dijagonalan. Tada funkcije $u_{\vec{k}}$ i $v_{\vec{k}}$, pored uslova kanoničnosti transformacije (5.3):

$$u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2 = 1 \quad (5.12)$$

moraju zadovoljavati i sledeću jednačinu:

$$(u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2) \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \gamma(\vec{k} - \vec{q}) u_{\vec{q}} v_{\vec{q}} + \frac{2 u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}}{N} \sum_{\vec{q}} [\gamma_0 + \gamma(\vec{k} - \vec{q})] v_{\vec{q}}^2 = \\ = - [u_{\vec{k}}^2 v_{\vec{k}} (\alpha(\vec{k}) + \beta(\vec{k})) + \frac{1}{2} \beta(\vec{k}) (u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2)] \quad (5.13)$$

Gornja jednačina u suštini predstavlja jednu nelinearnu integralnu jednačinu po nepoznatim funkcijama $u_{\vec{k}}$ i $v_{\vec{k}}$, koju treba rešiti zajedno sa jednačinom (5.12).

Pošto je u našem slučaju $\gamma(\vec{q}) = \gamma_0$, tj. γ ne zavisi od talasnog vektora, rešavanje jednačine (5.13) mnogo je jednostavnije. Naime, ako stavimo da je:

$$\frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \gamma(\vec{k} - \vec{q}) u_{\vec{q}} v_{\vec{q}} = \frac{\gamma_0}{N} \sum_{\vec{q}} u_{\vec{q}} v_{\vec{q}} \equiv \gamma_0 \Delta_2 \quad (5.14)$$

$$\frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} [\gamma_0 + \gamma(\vec{k} - \vec{q})] v_{\vec{q}}^2 = \frac{2\gamma_0}{N} \sum_{\vec{q}} v_{\vec{q}}^2 \equiv 2\gamma_0 \Delta_1$$

simultanim rešavanjem jednačine (5.12) i (5.13), za funkcije $u_{\vec{k}}$ i $v_{\vec{k}}$ dobijamo sledeće izraze:

$$u_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{A_{\vec{k}}}{\sqrt{A_{\vec{k}}^2 - B_{\vec{k}}^2}} + 1 \right) \quad (5.15)$$

$$v_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{A_{\vec{k}}}{\sqrt{A_{\vec{k}}^2 - B_{\vec{k}}^2}} - 1 \right)$$

odnosno

$$u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 = \frac{A_{\vec{k}}}{\sqrt{A_{\vec{k}}^2 - B_{\vec{k}}^2}}$$

Imajući u vidu da su funkcije $A_{\vec{k}}$ i $B_{\vec{k}}$ nevezne veličine, ap. 2. P., vidimo da obzirom na spektarne funkcije u pojedinim vektorima, odnosno da je (5.15) sada stvarno da je $A_{\vec{k}} = A_0$, je u skladu sa očekivanim rezultatima.

$$u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} = -\frac{1}{2} \frac{B_{\vec{k}}}{\sqrt{A_{\vec{k}}^2 - B_{\vec{k}}^2}}$$

gdje je $\alpha(\vec{k})$ i $\beta(\vec{k})$. Posto je prema (5.13)

$$A_{\vec{k}} = \alpha(\vec{k}) + \beta(\vec{k}) + 4\gamma_0 \Delta_1 \quad (5.17)$$

$$B_{\vec{k}} = \beta(\vec{k}) + 2\gamma_0 \Delta_2$$

Konstante Δ_1 i Δ_2 određuju se iz sledećih relacija:

$$\Delta_1 = \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} v_{\vec{q}}^2 = \frac{1}{2N} \sum_{\vec{q}} \left(\frac{\alpha(\vec{q}) + \beta(\vec{q}) + 4\gamma_0 \Delta_1}{\sqrt{[\alpha(\vec{q}) + \beta(\vec{q}) + 4\gamma_0 \Delta_1]^2 - [\beta(\vec{q}) + 2\gamma_0 \Delta_2]^2}} - 1 \right) \quad (5.18)$$

$$\Delta_2 = \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} u_{\vec{q}} v_{\vec{q}} = - \frac{1}{2N} \sum_{\vec{q}} \frac{\beta(\vec{q}) + 2\gamma_0 \Delta_2}{\sqrt{[\alpha(\vec{q}) + \beta(\vec{q}) + 4\gamma_0 \Delta_1]^2 - [\beta(\vec{q}) + 2\gamma_0 \Delta_2]^2}} \quad (5.19)$$

Ako zamenimo dobijene izraze za funkcije $u_{\vec{k}}$ i $v_{\vec{k}}$ (5.15) i (5.16) u kvadratni hamiltonijan (5.7), on će dobiti sledeći (dijagonalni) oblik:

$$H_2 = \sum_{\vec{k}} E(\vec{k}) C_{\vec{k}}^{\dagger} C_{\vec{k}} \quad (5.20)$$

gde je energija elementarnih eksitacija data relacijom:

$$E(\vec{k}) = \sqrt{A_{\vec{k}}^2 - B_{\vec{k}}^2} \quad (5.20)$$

Imajući u vidu izraze (5.17), koji određuju veličine $A_{\vec{k}}$ i $B_{\vec{k}}$, vidimo da eksitonski spektar (5.20) prelazi u spektar Bogoliubova (4.15) ako stavimo $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, što je u skladu sa onim što je napred rečeno. Konstante Δ_1 i Δ_2 mogu biti određene numerički pomoću formula (5.18) i (5.19). U tom cilju ćemo tim formulama dati pogodniji oblik. Pošto je prema (5.2):

$$\alpha(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} , \quad \beta(\vec{k}) = \beta = \gamma_0 \left(\frac{N_0}{N} \right) + 4\Delta \left(\frac{N_0}{N} \right)^2$$

$$\gamma_0 = \frac{2\pi\hbar^2}{m_{\text{eff}}a^2} \approx 1 - 2[\text{eV}] \quad (m_{\text{eff}} \sim 10^{-27} \text{ g}, \quad a \sim 5 \cdot 10^{-8} \text{ cm})$$

$A_{\vec{k}}$ i $B_{\vec{k}}$ iz (5.17) možemo napisati na sledeći način:

$$A_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \beta + 4\gamma_0 \Delta_1 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \gamma_0 \delta_1 \quad (5.21)$$

$$B_{\vec{k}} \equiv B_0 = \beta + 2\gamma_0 \Delta_2 = \gamma_0 \delta_2$$

gde je

$$\delta_1 = \frac{\beta}{\gamma} + 4\Delta_1 = \tilde{\beta} + 4\Delta_1 \quad (5.22)$$

$$\delta_2 = \frac{\beta}{\gamma} + 2\Delta_2 = \tilde{\beta} + 2\Delta_2$$

Ako, dalje, uvedemo bezrazmerni kvaziimpuls

$$\vec{x} = \frac{\vec{k}}{Q}, \quad (5.23)$$

gde je $Q = |\vec{k}_{\max}|$ - maksimalna vrednost kvaziimpulsa na kraju Brijulenove zone, koja je odredjena relacijom (za prosti kubni kristal):

$$\frac{4}{3}\pi Q^3 = \left(\frac{2\pi}{a}\right)^3, \quad (5.24)$$

i ako energiju izrazimo u elektronvoltima (eV), imajući u vidu (5.21) i (5.20), možemo napisati:

$$E(\vec{x}) = \sqrt{A^2 x^4 + Bx^2 + C} \quad (5.24a)$$

gde je

$$A = \frac{\hbar^2 Q^2}{2m_{\text{eff}}} \sim 0,2 \text{ [eV]}, \quad B = 2A\gamma_0\delta_1 \approx 0,4\delta_1 \text{ [eV}^2\text{]} \quad \left. \right\} (5.25)$$

$$\text{Pa osim toga i } C = \delta_1^2 - \delta_2^2$$

Za određivanje konstanti Δ_1 i Δ_2 dobijamo sledeće formule:

$$\Delta_1 = \frac{3}{2} \int_0^1 \left(\frac{2x^2 + \delta_1}{\sqrt{0,04x^4 + 0,4\delta_1x^2 + \delta_1^2 - \delta_2^2}} - 1 \right) x^2 dx \quad (5.26)$$

$$\Delta_2 = -\frac{3}{2} \int_0^1 \frac{\delta_2 \alpha^2 d\alpha}{\sqrt{0,04\alpha^2 + 0,4\delta_1\alpha^2 + \delta_1^2 - \delta_2^2}} \quad (5.27)$$

Iz poslednjih formula mogu se približno proceniti konstante Δ_1 i Δ_2 . U prvoj aproksimaciji dobija se:

$$\Delta_1 \approx \frac{1}{4} \tilde{\beta}^{3/2} \quad i \quad \Delta_2 \approx -\frac{3}{4}(\tilde{\beta} - \tilde{\beta}^{3/2}) \quad (5.28)$$

odnosno:

$$\delta_1 \approx \tilde{\beta} + \tilde{\beta}^{3/2} \quad i \quad \delta_2 \approx -\frac{\tilde{\beta}}{2} + \frac{3}{2}\tilde{\beta}^{3/2} \quad (5.29)$$

a za energiju elementarnih eksitacija:

$$E(\vec{\alpha}) = \sqrt{0,04\alpha^4 + 0,4(\tilde{\beta} + \tilde{\beta}^{3/2})\alpha^2 + \frac{3}{4}\tilde{\beta}^2} \quad (5.30)$$

Spektar Bogoljubova (4.15), izražen preko $\vec{\alpha}$ ima sledeći oblik:

$$E_B(\vec{\alpha}) = \sqrt{0,04\alpha^4 + 0,4\tilde{\beta}\alpha^2} \quad [eV] \quad (5.31)$$

S obzirom da je $\tilde{\beta}$ proporcionalno koncentraciji eksitona (prema (5.2) i (5.22)), pri velikim koncentracijama spektar (5.30) daje primetne popravke u odnosu na (5.31).

Na ovom mestu se nećemo dalje zadržavati na tačnijem određivanju konstanti Δ_1 i Δ_2 (odnosno energije $E(\vec{\alpha})$), već ćemo preći na izračunavanje korekcije na energetski spektrar usled neodržanja nadkondenzatnih eksitona. U tom cilju koristićemo metod temperaturskih (termodinamičkih) Grinovih (Green) funkcija, koji je razvijen u monografiji Tjablikova /41/.

Spektar elementarnih eksitacija naći ćemo kao pol jednočestične Grinove funkcije

$$G_{\mathcal{V}}(t, t') = \langle\langle c_{\mathcal{V}}(t) c_{\mathcal{V}}^{\dagger}(t') \rangle\rangle = \Theta(t-t') \langle [c_{\mathcal{V}}(t), c_{\mathcal{V}}^{\dagger}(t')] \rangle$$

gde je $\Theta(t-t') = \begin{cases} 1 & \text{za } t > t' \\ 0 & \text{za } t < t' \end{cases}$

Jednačina za Furije lik $\Gamma_{\mathcal{V}}(E) = \langle\langle c_{\mathcal{V}} | c_{\mathcal{V}}^{\dagger} \rangle\rangle$ Grinove funkcije $G_{\mathcal{V}}(t, t')$ je oblika (videti /41/):

$$E \langle\langle c_{\mathcal{V}} | c_{\mathcal{V}}^{\dagger} \rangle\rangle = \frac{1}{2\pi} - \langle\langle c_{\mathcal{V}} | [c_{\mathcal{V}}^{\dagger}, H] \rangle\rangle , \quad (5.32)$$

gde $[c_{\mathcal{V}}^{\dagger}, H] = c_{\mathcal{V}}^{\dagger} H - H c_{\mathcal{V}}^{\dagger}$ (5.33)

predstavlja komutator operatora $c_{\mathcal{V}}^{\dagger}$ sa ukupnim hamiltonijanom sistema eksitona, koji je dat formulama (5.6), (5.8) i (5.20).

U opštem slučaju, kao što sledi iz (5.32), za jednočestičnu Grinovu funkciju dobijamo jedan beskonačan niz jednačina, jer se ona izražava preko višečestičnih Grinovih funkcija, za koje važi ista jednačina (5.32). Taj se lanac jednačina prekida u zavisnosti od tačnosti kojom želimo, u konkretnom zadatku, izračunati spektar elementarnih eksitacija. U našem računu zadržaćemo tačnost do dvočestičnih Grinovih funkcija, koje će nam omogućiti da dobijemo eksitonski spektar do članova proporcionalnih γ_2^2 . Odbačene tročestične i višečestične Grinove funkcije dale bi po-pravke na spektar proporcionalne γ_2^3 (odnosno višim stepenima po γ_2), koje ćemo zanemariti.

Komutator u (5.32) dovodi do sledećih Grinovih funkcija:

$$\langle\langle c_{\mathcal{V}} | [c_{\mathcal{V}}^{\dagger}, H_2] \rangle\rangle = E(\mathcal{V}) \langle\langle c_{\mathcal{V}} | c_{\mathcal{V}}^{\dagger} \rangle\rangle \quad (5.34)$$

$$\langle\langle c_{\vec{v}} | [c_{\vec{v}}^*, h_4] \rangle\rangle = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \Phi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2} \langle\langle c_{\vec{v}} | c_{\vec{k}_1}^* c_{\vec{k}_2}^* c_{\vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2}^* \rangle\rangle \quad (5.35)$$

Dvočestične Grinove funkcije koje potiču od ostalih članova hamiltonijana H_4 imaju sledeći oblik:

$$\langle\langle c_{\vec{v}} | c^* c c \rangle\rangle ; \quad \langle\langle c_{\vec{v}} | c^* c^* c \rangle\rangle \text{ i } \langle\langle c_{\vec{v}} | c c c \rangle\rangle .$$

Lako se može videti, da su te dvočestične funkcije, u našoj apsroksimaciji, (kad odbacujemo tročestične funkcije) jednake nuli. Prema tome za funkciju $\langle\langle c_{\vec{v}} | C_{\vec{v}}^* \rangle\rangle$, na osnovu relacija (5.32), (5.34) i (5.35), dobijamo sledeću jednačinu:

$$(E - E(\vec{v})) \langle\langle c_{\vec{v}} | c_{\vec{v}}^* \rangle\rangle = \frac{1}{2N} + \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \Phi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2} \langle\langle c_{\vec{v}} | c_{\vec{k}_1}^* c_{\vec{k}_2}^* c_{\vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2}^* \rangle\rangle \quad (5.36)$$

Vidimo da ova jednačina određuje jednočestičnu Grinovu funkciju preko dvočestične. Dvočestičnu funkciju $\langle\langle c_{\vec{v}} | c_{\vec{k}_1}^* c_{\vec{k}_2}^* c_{\vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2}^* \rangle\rangle$ određujemo takođe pomoću jednačine (5.32), koja nam daje:

$$\langle\langle c_{\vec{v}} | c_{\vec{k}_1}^* c_{\vec{k}_2}^* c_{\vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2}^* \rangle\rangle = - \langle\langle c_{\vec{v}} | [c_{\vec{k}_1}^* c_{\vec{k}_2}^* c_{\vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2}^*, h] \rangle\rangle \quad (5.37)$$

Ako potražimo komutatore sa ukupnim hamiltonijanom u (5.37), lako se možemo uveriti da samo sledeća dva komutatora dovode do jednočestične, odnosno dvočestične Grinove funkcije:

$$\langle\langle c_{\vec{v}} | [c_{\vec{k}_1}^* c_{\vec{k}_2}^* c_{\vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2}^*, \sum_{\vec{k}} E(\vec{k}) c_{\vec{k}}^* c_{\vec{k}}] \rangle\rangle =$$

$$= (E(\vec{k}_1) + E(\vec{k}_2) + E(\vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2)) \langle\langle c_{\vec{v}} | c_{\vec{k}_1}^+ c_{\vec{k}_2}^+ c_{\vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2}^+ \rangle\rangle \quad (5.38)$$

$$\stackrel{i}{=} \langle\langle c_{\vec{v}} | [c_{\vec{k}_1}^+ c_{\vec{k}_2}^+ c_{\vec{k}_3}^+, \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3} \Phi_{\vec{q}_1 \vec{q}_2 \vec{q}_3} c_{\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3}^+ c_{\vec{q}_3} c_{\vec{q}_2} c_{\vec{q}_1}] \rangle\rangle =$$

$$= \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3} \langle\langle c_{\vec{v}} | [c_{\vec{k}_1}^+ c_{\vec{k}_2}^+ c_{\vec{k}_3}^+, c_{\vec{q}_4}^+ c_{\vec{q}_3} c_{\vec{q}_2} c_{\vec{q}_1}] \rangle\rangle \Phi_{\vec{q}_1 \vec{q}_2 \vec{q}_3} =$$

gde smo stavili $\vec{k}_3 = \vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2$ i $\vec{q}_4 = \vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3$. Primenom komutacionih relacija, poslednja jednačina nam daje:

$$\begin{aligned} & \langle\langle c_{\vec{v}}^+ | [c_{\vec{k}_1}^+ c_{\vec{k}_2}^+ c_{\vec{k}_3}^+, \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2, \vec{q}_3} \Phi_{\vec{q}_1 \vec{q}_2 \vec{q}_3} c_{\vec{q}_4}^+ c_{\vec{q}_3} c_{\vec{q}_2} c_{\vec{q}_1}] \rangle\rangle = \langle\langle c_{\vec{v}} | c_{\vec{v}}^+ \rangle\rangle \times \\ & \times (\Phi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2} + \Phi_{\vec{k}_2, \vec{k}_1, \vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2} + \Phi_{\vec{k}_1, \vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2, \vec{k}_2} + \\ & + \Phi_{\vec{k}_2, \vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2, \vec{k}_1} + \Phi_{\vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2, \vec{k}_1, \vec{k}_2} + \Phi_{\vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2, \vec{k}_2, \vec{k}_1}) \quad (5.39) \end{aligned}$$

Preostali komutatori iz (5.37), koji su oblika:

$$\left[c_{\vec{k}_1}^+ c_{\vec{k}_2}^+ c_{\vec{k}_3}^+, c_{\vec{q}_1}^+ c_{\vec{q}_2}^+ c_{\vec{q}_3}^+ c_{\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3} \right] \cdot \left[c_{\vec{k}_1}^+ c_{\vec{k}_2}^+ c_{\vec{k}_3}^+, c_{\vec{q}_1}^+ c_{\vec{q}_2}^+ c_{\vec{q}_3}^+ c_{\vec{q}_1 + \vec{q}_2 + \vec{q}_3} \right],$$

$$\left[c_{\vec{k}_1}^+ c_{\vec{k}_2}^+ c_{\vec{k}_3}^+, c_{\vec{q}_1}^+ c_{\vec{q}_2}^+ c_{\vec{q}_3}^+ c_{-\vec{q}_1 - \vec{q}_2 - \vec{q}_3} \right] \stackrel{i}{=} \left[c_{\vec{k}_1}^+ c_{\vec{k}_2}^+ c_{\vec{k}_3}^+, c_{-\vec{q}_1 - \vec{q}_2 - \vec{q}_3} c_{\vec{q}_3} c_{\vec{q}_2} c_{\vec{q}_1} \right].$$

dovode do tročestičnih Grinovih funkcija, koje mi odbacujemo, ili su jednaki nuli, tako da nam jednačina (5.37) za dvočestičnu Grinovu funkciju daje:

$$\langle\langle c_{\vec{v}} | c_{\vec{k}_1}^+ c_{\vec{k}_2}^+ c_{\vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2}^+ \rangle\rangle (E - E(\vec{k}_1) - E(\vec{k}_2) - E(\vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2)) =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{N} \langle\langle c_{\vec{v}} | c_{\vec{v}}^* \rangle\rangle (\Phi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{v}-\vec{k}_1-\vec{k}_2} + \Phi_{\vec{k}_2, \vec{k}_1, \vec{v}-\vec{k}_1-\vec{k}_2} + \\
 &+ \Phi_{\vec{k}_1, \vec{v}-\vec{k}_1-\vec{k}_2, \vec{k}_2} + \Phi_{\vec{k}_2, \vec{v}-\vec{k}_1-\vec{k}_2, \vec{k}_1} + \Phi_{\vec{v}-\vec{k}_1-\vec{k}_2, \vec{k}_2, \vec{k}_1}) \tag{5.40}
 \end{aligned}$$

Konačno, iz (5.40) i (5.36), za jednočestičnu Grinovu funkciju dobijamo:

$$\langle\langle c_{\vec{v}} | c_{\vec{v}}^* \rangle\rangle = \frac{1}{2E} \left\{ E - E(\vec{v}) - \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \frac{f(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{v})}{E - E(\vec{k}_1) - E(\vec{k}_2) - E(\vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2)} \right\}^{-1} \tag{5.41}$$

gde je:

$$\begin{aligned}
 f(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{v}) &= \Phi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{v}-\vec{k}_1-\vec{k}_2} (\Phi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{v}-\vec{k}_1-\vec{k}_2} + \Phi_{\vec{k}_2, \vec{k}_1, \vec{v}-\vec{k}_1-\vec{k}_2} + \\
 &+ \Phi_{\vec{k}_1, \vec{v}-\vec{k}_1-\vec{k}_2, \vec{k}_2} + \Phi_{\vec{k}_2, \vec{v}-\vec{k}_1-\vec{k}_2, \vec{k}_1} + \Phi_{\vec{v}-\vec{k}_1-\vec{k}_2, \vec{k}_1, \vec{k}_2} + \\
 &+ \Phi_{\vec{v}-\vec{k}_1-\vec{k}_2, \vec{k}_2, \vec{k}_1}) \tag{5.42}
 \end{aligned}$$

Energiju elementarnih eksitacija dobijamo kao realni deo pola Grinove funkcije $\langle\langle c_{\vec{v}} | c_{\vec{v}}^* \rangle\rangle$. Iz (5.41) sledi:

$$E \equiv \mathcal{E}(\vec{v}) = E(\vec{v}) + \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \frac{f(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{v})}{\mathcal{E}(\vec{v}) - E(\vec{k}_1) - E(\vec{k}_2) - E(\vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2)} \tag{5.43}$$

Ovu integralnu jednačinu možemo rešiti metodom sukcesivnih aproksimacija. Ako u prvoj aproksimaciji uzmemo $\mathcal{E}^{(1)}(\vec{v}) = E(\vec{v})$, sledeća aproksimacija daje:

$$\mathcal{E}^{(2)}(\vec{v}) \equiv \mathcal{E}(\vec{v}) = E(\vec{v}) + \frac{1}{N^2} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2} \frac{f(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{v})}{E(\vec{v}) - E(\vec{k}_1) - E(\vec{k}_2) - E(\vec{v} - \vec{k}_1 - \vec{k}_2)} \tag{5.44}$$

Mi ćemo se zadržati na ovoj aproksimaciji, koja daje popravku na $E(\vec{v})$ proporcionalnu δ_0^2 , a kao što je napred rečeno, popravke višeg reda zanemarujuemo. Funkciju $f(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{v})$, koja je data formulom (5.42), možemo izraziti preko $u_{\vec{k}}$ i $v_{\vec{k}}$ koristeći (5.9), što daje:

$$f(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{v}) = 8\delta_0^2 \left\{ (u_{\vec{k}_1} u_{\vec{k}_2} u_{\vec{v}} v_{\vec{v}} - \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 + v_{\vec{k}_1} v_{\vec{k}_2} v_{\vec{v}} u_{\vec{v}} - \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2)^2 + \right. \\ + 2u_{\vec{k}_1} v_{\vec{k}_2} (u_{\vec{k}_1} u_{\vec{k}_2} u_{\vec{v}} v_{\vec{v}} - \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 + v_{\vec{k}_1} v_{\vec{k}_2} v_{\vec{v}} u_{\vec{v}} - \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2) (u_{\vec{v}} u_{\vec{v}} - \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 + v_{\vec{v}} v_{\vec{v}} - \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2) \\ \left. + v_{\vec{v}} v_{\vec{v}} - \vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2 \right\} . \quad (5.45)$$

Ako u (5.44) izvršimo sledeće smene indeksa sumiranja:

$$\vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \vec{q} \quad \text{i} \quad \vec{k}_2 = \vec{q} - \vec{k}_1 ,$$

i zamenimo $f(\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{v})$ iz (5.45), za energiju elementarnih eksitacija dobijamo sledeći izraz:

$$E(\vec{v}) = E(\vec{v}) + \frac{8\delta_0^2}{N^2} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \left[E(\vec{v}) - E(\vec{k}_1) - E(\vec{q} - \vec{k}_1) - E(\vec{v} - \vec{q}) \right]^{-1} \times \\ \times \left\{ (u_{\vec{k}_1} u_{\vec{q} - \vec{k}_1} u_{\vec{v}} v_{\vec{v} - \vec{q}} + v_{\vec{k}_1} v_{\vec{q} - \vec{k}_1} v_{\vec{v}} u_{\vec{v} - \vec{q}})^2 + 2u_{\vec{k}_1} v_{\vec{q} - \vec{k}_1} \times \right. \\ \left. \times (u_{\vec{k}_1} u_{\vec{q} - \vec{k}_1} u_{\vec{v}} v_{\vec{v} - \vec{q}} + v_{\vec{k}_1} v_{\vec{q} - \vec{k}_1} v_{\vec{v}} u_{\vec{v} - \vec{q}}) (u_{\vec{v}} u_{\vec{v} - \vec{q}} + v_{\vec{v}} v_{\vec{v} - \vec{q}}) \right\} \quad (5.45a)$$

Da bi dobili formulu za praktično izračunavanje energije elementarnih eksitacija, u (5.45a) preći ćemo sa sumiranja na integraljenje. Izrazimo li energiju u [eV] i uvedemo bezrazmerne kvazi impulse

($\vec{d} = \frac{\vec{k}}{Q}$), uzimajući u obzir formule (5.15), (5.16), (5.24) i (5.25), za energiju $E(\vec{v})$ dobijamo sledeći izraz:

$$\begin{aligned}
 E(\vec{v}) &= E(\vec{v}) + 18 \gamma_0^2 \int_0^1 d\alpha_1 \int_0^1 d\alpha_2 \int_{-1}^1 dx \int_{-1}^1 dy \times \\
 &\times \left[E(\vec{v}) - E(\vec{d}_1) - E(\vec{d}_1, \vec{d}_2, y) - E(\vec{v}, \vec{d}_2, x) \right]^{-1} \times \\
 &\times \left\{ \left[\left(\frac{A\gamma^2 + \delta_1}{E(\vec{v})} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{A\alpha_1^2 + \delta_1}{E(\vec{d}_1)} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{A\alpha_2^2 + A\alpha_1^2 - 2A\alpha_1\alpha_2 y + \delta_1}{E(\vec{d}_1, \vec{d}_2, y)} + 1 \right)^{1/2} \right. \right. \\
 &\times \left. \left(\frac{A\alpha_2^2 + A\alpha_1^2 - 2A\alpha_1\alpha_2 y + \delta_1}{E(\vec{d}_1, \vec{d}_2, y)} - 1 \right)^{1/2} \left(\frac{A\gamma^2 + A\alpha_2^2 - 2A\gamma\alpha_2 x + \delta_1}{E(\vec{v}, \vec{d}_2, x)} + 1 \right)^{1/2} \right]^2 + \\
 &+ 2 \left(\frac{A\alpha_1^2 + \delta_1}{E(\vec{d}_1)} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{A\alpha_1^2 + A\alpha_2^2 - 2A\alpha_1\alpha_2 y + \delta_1}{E(\vec{d}_1, \vec{d}_2, y)} - 1 \right)^{1/2} \times \\
 &\times \left[\left(\frac{A\gamma^2 + \delta_1}{E(\vec{v})} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{A\gamma^2 + A\alpha_2^2 - 2A\gamma\alpha_2 x + \delta_1}{E(\vec{v}, \vec{d}_2, x)} - 1 \right)^{1/2} + \right. \\
 &\left. + \left(\frac{A\gamma^2 + \delta_1}{E(\vec{v})} - 1 \right)^{1/2} \left(\frac{A\gamma^2 + A\alpha_2^2 - 2A\gamma\alpha_2 x + \delta_1}{E(\vec{v}, \vec{d}_2, x)} - 1 \right)^{1/2} \right] \times \\
 &\times \left[\left(\frac{A\gamma^2 + \delta_1}{E(\vec{v})} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{A\alpha_1^2 + \delta_1}{E(\vec{d}_1)} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{A\alpha_1^2 + A\alpha_2^2 - 2A\alpha_1\alpha_2 y + \delta_1}{E(\vec{d}_1, \vec{d}_2, y)} + 1 \right)^{1/2} \right. \\
 &\times \left(\frac{A\gamma^2 + A\alpha_2^2 - 2A\gamma\alpha_2 x + \delta_1}{E(\vec{v}, \vec{d}_2, x)} - 1 \right)^{1/2} + \left(\frac{A\gamma^2 + \delta_1}{E(\vec{v})} - 1 \right)^{1/2} \left(\frac{A\alpha_1^2 + \delta_1}{E(\vec{d}_1)} - 1 \right)^{1/2} \times
 \end{aligned}$$

$$\left\{ \lambda \left(\frac{A\partial_1^2 + A\partial_2^2 - 2A\partial_1\partial_2 y + \delta_1}{E(\vec{\partial}_1, \vec{\partial}_2, y)} - 1 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A\nu^2 + A\partial_2^2 - 2A\nu\partial_2 x + \delta_1}{E(\vec{\nu}, \vec{\partial}_2, x)} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (5.46)$$

gde je

$$E(\vec{\nu}) = \sqrt{A^2\nu^4 + B\nu^2 + C} ; \quad A = \frac{\hbar^2 q^2}{2m_{\text{eff}}} \sim 0,2 \text{ [eV]}$$

$$B = 2A\delta_1 ; \quad C = \delta_1^2 - \delta_2^2 , \quad (5.47)$$

$$E(\vec{\nu}, \vec{\partial}_2, x) = \left(A^2\nu^4 + A^2\partial_2^4 + 2A^2\nu^2\partial_2^2 + 4A^2y^2\partial_2^2x^2 - 4A^2\nu\partial_2^3 - 4A^2\nu^3\partial_2x + B\partial_2^2 - 2B\nu\partial_2x + C \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.48)$$

$$x = \cos\theta_1 ; \quad \theta_1 - \text{ugao izmedju vektora } \vec{\nu} \text{ i } \vec{\partial}_2 ; \quad \theta_1 \in (0, \pi)$$

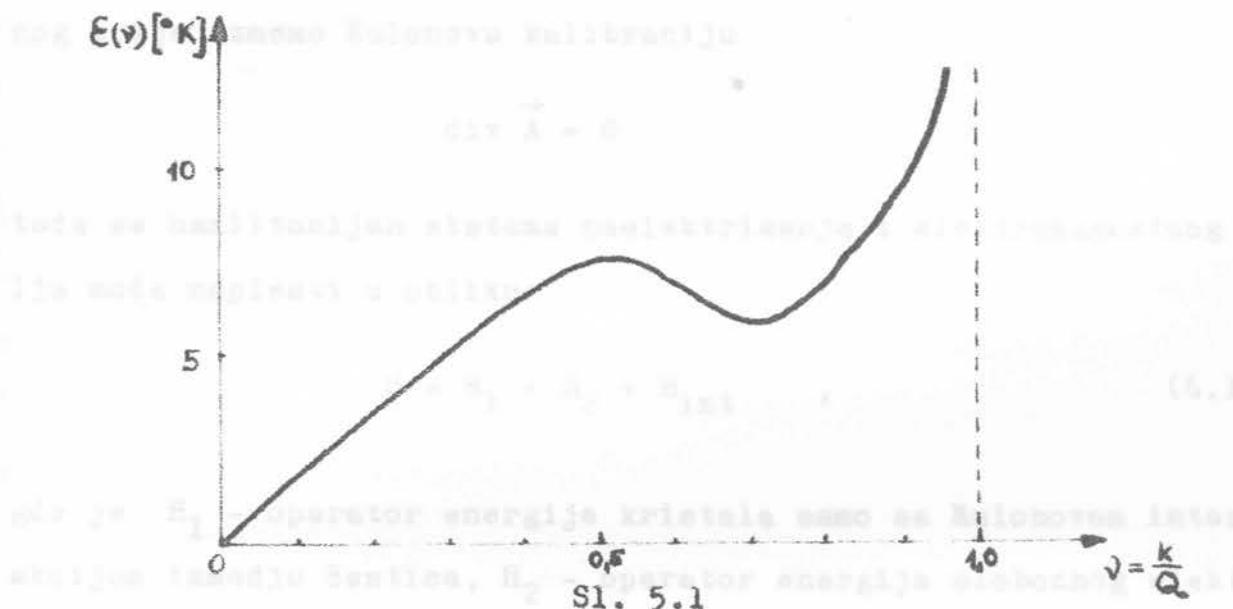
$$y = \cos\theta_2 ; \quad \theta_2 - \text{ugao izmedju vektora } \vec{\partial}_1 \text{ i } \vec{\partial}_2 . \quad \theta_2 \in (0, \pi)$$

Pomoću izraza (5.46), koji određuje energiju elementarnih eksitacija i izraza (5.26) i (5.27), koji određuju konstante Δ_1 i Δ_2 , moguće je numerički (uz pomoć računara) odrediti spektar eksitonu u uslovima Bose kondenzacije.

Obzirom na glomaznost izraza (5.46), detaljnije je analiziran samo slučaj jednodimenzionog kristala, iako i u tom slučaju izraz (5.46) ostaje glomazan.

Energetski spektar dobijen tom analizom prikazan je na slici 5.1. Vidimo da se u "rotonskoj" oblasti impulsa pojavljuje minimum, što nije slučaj sa spektrom (4.15). Pored toga, gruba procena spektra (5.46) pokazuje da se u oblasti velikih impulsa pojavljuju logaritamski singulariteti, što bi odgovaralo raspodu rotona na par fonona. Ta pojava je eksperimentalno konstatovana kod

tečnog helijuma, dok za eksitonе takvih eksperimentalnih podataka nema, no o tome će kasnije biti više rečeno.



Sl. 5.1

6. Bose kondenzacija u sistemu polaritona

a) Polaritoni

U prethodna dva paragrafa ove glave tretiran je problem Bose kondenzacije u sistemu Kulonovih eksiton (tj. elementarnih eksitacija kristala, pri čemu se uzimala u obzir samo kulonovska interakcija izmedju nanelektrisanja). Treba međutim imati u vidu, da u većini eksperimenata u kojima se ispituju optičke osobine kristala, realne optičke eksitacije u kristalu nastaju kao rezultat trenutne Kulonove interakcije nanelektrisanja i retardovane interakcije istih kada se kristal nalazi u elektromagnetsnom polju. Drugim rečima, nije dovoljno posmatrati samo hamiltonijan kristala (eksitonski), već se mora uzeti u obzir i interakcija nastalih eksitona sa elektromagnetsnim zračenjem (poljem foton), koje i dalje pada na kristal. Prema tome, za potpuno opisivanje sistema kristal + polje zračenja, moramo uzeti hamiltonijan elektromagnetskog polja i hamiltonijan sistema nanelektrisanih čestica (kristala) u

elektromagnetsnom polju. Kao što je poznato iz kvantne elektrodinamike (videti /42/), ako za vektoraski potencijal elektromagnetsnog polja uzmemo Kulonovu kalibraciju

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

tada se hamiltonijan sistema naelektrisanja i elektromagnetsnog polja može napisati u obliku:

$$H = H_1 + H_2 + H_{\text{int}} , \quad (6.1)$$

gde je H_1 - operator energije kristala samo sa Kulonovom interakcijom izmedju čestica, H_2 - operator energije slobodnog elektromagnetsnog polja transverzalnih fotona i H_{int} - operator interakcije svih naelektrisanja sa poljem transverzalnih fotona.

Operator energije kristala H_1 u našem slučaju predstavlja u stvari eksitonski hamiltonijan koji je razmatran u prethodna dva paragrafa.

Operator polja transverzalnih fotona dat je izrazom (videti napr. /42/):

$$H_2 = H_{\text{fot}} = \sum_{\vec{k}, j=1,2} \hbar c |\vec{k}| \alpha_{\vec{k}j}^{\dagger} \alpha_{\vec{k}j} , \quad (6.2)$$

gde je c - brzina svetlosti, $\alpha_{\vec{k}j}^{\dagger}$ i $\alpha_{\vec{k}j}$ - (Bose) operatori kreacije i anihilacije transverzalnih fotona, a j - broj jedne od dve moguće polarizacije fotona.

Operator interakcije naelektrisanja sa poljem transverzalnih fotona u nerelativističkoj aproksimaciji (u odnosu na kretanje naelektrisanja) ima sledeći oblik:

$$H_{\text{int}} = -\frac{1}{c} \sum_{\vec{n}_{\alpha}} \sum_{\nu} \left(\vec{n}_{\alpha} \right) \frac{e_{\nu}}{m_{\nu}} \hat{A} \left(\vec{P}_{\nu} \left(\vec{n}_{\alpha} \right) \right) \hat{P}_{\nu} \left(\vec{n}_{\alpha} \right) .$$

$$+ \frac{1}{2c^2} \sum_{\vec{n}_\alpha} \sum_{\nu}^{(\vec{n}_\alpha)} \frac{e_\nu^2}{m_\nu} \hat{\mathbf{A}}(\vec{Q}_\nu^{(\vec{n}_\alpha)}) , \quad (6.3)$$

gde: $\sum_{\nu}^{(\vec{n}_\alpha)}$ - označava sumiranje po svim nanelektrisanjima molekule (\vec{n}_α) ; \vec{n}_α - predstavlja vektor položaja molekule u kristalu ($\alpha = 1, 2, \dots, 6$; 6 - broj molekula u elementarnoj celiji); $\vec{Q}_\nu^{(\vec{n}_\alpha)}$ - radijus vektor ν -tog nanelektrisanja u molekuli (\vec{n}_α) ; $\hat{\mathbf{p}}_\nu^{(\vec{n}_\alpha)}$ - operator impulsa ν -tog nanelektrisanja. Drugi član u hamiltonijanu (6.3) definiše energiju tzv. "plazmenih" oscilacija i mi ga nećemo uzeti u obzir, pošto energiju optičkih sistema očitavamo od nivoa "plazmenih" oscilacija.

Operator vektorskog potencijala $\hat{\mathbf{A}}(\vec{r})$ dat je izrazom /42/:

$$\hat{\mathbf{A}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}, j} \sqrt{\frac{2\pi \hbar c}{Na^3 |\vec{k}|}} \vec{l}_{\vec{k}j} \left\{ \alpha_{\vec{k}j} + \alpha_{-\vec{k}j}^* \right\} e^{i\vec{k}\vec{r}} , \quad (6.4)$$

gde je: $Na^3 = V$ - zapremina (kristala) u kojoj se posmatra elektromagnetno polje, a $\vec{l}_{\vec{k}j}$ - predstavljaju ortove koji nam daju dva uzajamno normalna pravca polarizacije.

U ovom paragrafu (kao i prethodnim) posmatraćemo kristal sa jednom molekulom u elementarnoj celiji ($6 = 1$), i svim elektronima u molekuli pripisaćemo isti vektor položaja, tj. u (6.3) možemo staviti

$$\begin{aligned} \vec{Q}_\nu^{(\vec{n}_\alpha)} &\equiv \vec{n} \quad (\vec{n} - vektor položaja molekula u rešeci) i \\ \hat{\mathbf{p}}_\nu^{(\vec{n}_\alpha)} &= \hat{\mathbf{p}}_H - operator impulsa bilo kog elektrona u molekuli. \end{aligned} \quad (\vec{n})$$

Pošto ioni u rešeci miruju (ne posmatramo oscilovanja oko ravnotežnih položaja), u (6.3) treba sve mase iona uzeti kao beskonačne, tako da ostaje sumiranje samo po svim elektronima u molekuli.

Operator impulsa elektrona $\hat{\vec{p}}_n^*$ možemo, u reprezentaciji druge kvantizacije, izraziti preko Pauli operatora P_n^+ i P_n^- kreacije i anihilacije eksitona (videti napr. /33/ Gl.II, prvi paragraf) na sledeći način:

$$\hat{\vec{p}}_n^* = \vec{\mathcal{P}}_f (P_n^+ + P_n^-) \quad , \quad (6.5)$$

gde je

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}}_f &= \vec{\mathcal{P}}_{of} = \vec{\mathcal{P}}_{fo} = -i\hbar \int \varphi_n^0 \nabla_n \varphi_n^+ d\mathcal{C}_n = \\ &= \frac{\hbar}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k}_1 d^3\vec{k}_2 d\mathcal{C}_n \varphi_{\vec{k}_1}^0 \varphi_{\vec{k}_2}^+ e^{i\vec{k}_1 \cdot \vec{k}_2} \quad - \text{matrični element} \end{aligned}$$

impulsa $-i\hbar \nabla_n$. (φ_n^0 i φ_n^+ su funkcije osnovnog, odnosno f-tog pobudjenog stanja izolovanog molekula).

Uzimajući u obzir formule (6.4) i (6.5)^{*}, hamiltonijan interakcije (6.3) dobija sledeći oblik:

$$H_{int} = \sum_{\vec{k}, j} \vec{\Omega}_{\vec{k} \vec{k}_j} (\alpha_{\vec{k}_j} + \alpha_{-\vec{k}_j}) (P_{\vec{k}}^+ + P_{-\vec{k}}^-) \quad (6.6)$$

gde:

$$\vec{\Omega}_{\vec{k}} = -\frac{C_e}{m_e} \sqrt{\frac{2\pi\hbar N}{a^3 |\vec{k}| c}} \vec{\mathcal{P}}_f \quad (6.7)$$

predstavlja vektor dipolnog momenta prelaza u molekuli,

* Prethodno treba u (6.5) izvršiti Furije transformaciju Pauli operatora:

$$P_n^- = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} P_{\vec{k}}^- e^{-i\vec{k} \cdot \vec{n}} \quad i \quad P_n^+ = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} P_{\vec{k}}^+ e^{i\vec{k} \cdot \vec{n}} .$$

\tilde{G} - broj elektrona u molekuli i m_e - masa elektrona.

Pauli operatore $P_{\vec{k}}$ i $P_{\vec{k}}^+$ zameničemo Bose operatorima po formuli (paragraf 3.):

$$P_{\vec{n}} = B_{\vec{n}} - \frac{B_{\vec{n}}^+ B_{\vec{n}} B_{\vec{n}}}{n n n}$$

odnosno, posle Furije transformacija:

$$P_{\vec{k}} = B_{\vec{k}} - \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} B_{\vec{q}_2}^+ B_{\vec{q}_1} B_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2} \quad (6.8)$$

$$P_{\vec{k}}^+ = B_{\vec{k}}^+ - \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} B_{\vec{k}-\vec{q}_1+\vec{q}_2}^+ B_{\vec{q}_1}^+ B_{\vec{q}_2} \quad (6.9)$$

Exsitonski hamiltonijan $H_1 \equiv H_e$ uzećemo u istoj aproksimaciji kao u paragrapu 4. (4.12), tj. harmonijski deo uzimamo u Hajtler - Londonovoj aproksimaciji, a od anharmonijskih efekata uzimamo samo rasejanje na δ -potencijalu, tako da možemo pisati:

$$H_e = \sum_{\vec{k}} E_e(\vec{k}) B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}} + \frac{\gamma_0}{V} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} B_{\vec{k}_1}^+ B_{\vec{k}_2}^+ B_{\vec{k}_3} B_{\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{k}_3} \quad (6.10)$$

gde je

$$E_e(\vec{k}) = \Delta + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} \quad \text{i} \quad \gamma_0 = \frac{2J \hbar^2}{m_{\text{eff}}^2} \quad ,$$

Uzimajući u obzir formule (6.2), (6.6), (6.8), (6.9) i (6.10), hamiltonijan sistema kristal + polje zračenja možemo napisati u sledećem obliku:

$$H = H_{\text{Har.}} + H_{\text{Anhar.}} \quad (6.11)$$

gde je:

$$\begin{aligned} H_{\text{Har.}} &= \sum_{\vec{k}} E_e(\vec{k}) B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} E_{\text{rot}}(\vec{k}) \alpha_{\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}} + \\ &+ \sum_{\vec{k}} T_{\vec{k}} (B_{\vec{k}}^+ \alpha_{\vec{k}} + \alpha_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}} + B_{\vec{k}}^+ \alpha_{-\vec{k}} + \alpha_{-\vec{k}}^+ B_{\vec{k}}) \end{aligned} \quad (6.12)$$

$$^1 H_{\text{Anhar.}} = \frac{G_0}{N} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} B_{\vec{k}_1}^\dagger B_{\vec{k}_2}^\dagger B_{\vec{k}_3}^\dagger B_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3} - \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}, \vec{q}_1, \vec{q}_2} T_{\vec{k}} (B_{\vec{k}-\vec{q}_1 + \vec{q}_2}^\dagger B_{\vec{q}_1}^\dagger B_{\vec{q}_2} \alpha_{\vec{k}}^\dagger \\ + \alpha_{\vec{k}}^\dagger B_{\vec{q}_2}^\dagger B_{\vec{q}_1} B_{\vec{k}-\vec{q}_1 + \vec{q}_2} + B_{\vec{k}-\vec{q}_1 + \vec{q}_2}^\dagger B_{\vec{q}_1}^\dagger B_{\vec{q}_2} \alpha_{-\vec{k}}^\dagger + B_{\vec{q}_2}^\dagger B_{\vec{q}_1} B_{\vec{k}-\vec{q}_1 + \vec{q}_2} \alpha_{-\vec{k}}) .$$

(6.13)

U poslednjim izrazima uvedene su sledeće oznake:

$$E_{\text{tot}}(\vec{k}) = \hbar c |\vec{k}| \quad - \text{energija fotona}$$

i $T_{\vec{k}} = \vec{\Omega}_{\vec{k}} \cdot \vec{l}_{\vec{k}}$. Pored toga predpostavili smo da eksiton interaguje samo sa jednom fotonskom granom, što je moguće ako vektori $\vec{\Omega}_{\vec{k}}$, $\vec{l}_{\vec{k}_1} \equiv \vec{l}_{\vec{k}}$ leže u ravni na koju je drugi vektor polarizacije ($\vec{l}_{\vec{k}_2}$) normalan. U praksi takav slučaj najčešće se realizuje kod kristala naftalina.

Hamiltonijan sistema u harmonijskoj aproksimaciji (6.12) dijagonalizovaćemo prelaskom na nove Bose operatore $C_{1\vec{k}}$ i $C_{2\vec{k}}$ metodom Tjablikova /41/. Ako (6.12) napišemo u pogodnijem obliku:

$$H_{\text{Harm.}} = \sum_{S,S=1}^2 M_{SS} b_S^\dagger b_S + \frac{1}{2} \sum M_{SS} (b_S^\dagger b_S^\dagger + b_S b_S) \quad (6.13a)$$

gde je

$$\left. \begin{aligned} M_{11} &\equiv E_e(\vec{k}) , & M_{22} &\equiv E_{\text{tot}}(\vec{k}) , & M_{12} &= M_{21} = T_{\vec{k}} \\ M_{11} &= 0 & M_{22} &= 0 & M_{12} &= M_{21} = T_{\vec{k}} \\ b_1 &= B_{\vec{k}} & \text{i} & b_2 &= \alpha_{\vec{k}} \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

i predjemo na nove operatore C_S i C_S^\dagger transformacijom:

$$b_S(t) = \sum_{\sigma=1}^2 (u_{S\sigma} c_\sigma e^{-iEt} + v_{S\sigma} c_\sigma^+ e^{iEt}) , \quad (6.15)$$

gde operatori $b_S(t)$ zadovoljavaju Hajzenbergove jednačine kretanja:

$$ib_S(t) = [b_S, H]$$

operator (6.13a) postaje dijagonalan po novim operatorima i direktno ćemo dobiti zakon disperzije za nove elementarne eksitacije u kristalu - polaritone, koji nastaju kao rezultat interakcije eksitonskog i fotonskog podsistema. Detalje računa nećemo navesti, već ćemo dati konačne rezultate (detalji se mogu naći napr. u /33/ Gl. III i Prilog).

Dijagonalizovani hamiltonijan (6.12) ima sledeći oblik:

$$H = \sum_{\vec{k}} \left[\epsilon_1(\vec{k}) c_{1\vec{k}}^* c_{1\vec{k}} + \epsilon_2(\vec{k}) c_{2\vec{k}}^* c_{2\vec{k}} \right] \quad (6.16)$$

gde su energije polaritona date relacijom:

$$\epsilon_{1,2}(\vec{k}) = \sqrt{\frac{E_e^2(\vec{k}) + E_{\text{tot}}^2(\vec{k})}{2} \pm \left\{ \left[\frac{E_e^2(\vec{k}) - E_{\text{tot}}^2(\vec{k})}{2} \right]^2 + 4E_e(\vec{k})E_{\text{tot}}(\vec{k})T_k^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (6.17)$$

Transformacione funkcije $u_{S\sigma}$ i $v_{S\sigma}$ ($S, \sigma = 1, 2$) date su sledećim izrazima:

$$u_{1\sigma} = \frac{-2T_k E_{\text{tot}}(\vec{k})}{[E_\sigma - E_e(\vec{k})][E_\sigma - E_{\text{tot}}(\vec{k})]} v_{2\sigma} \quad (6.18a)$$

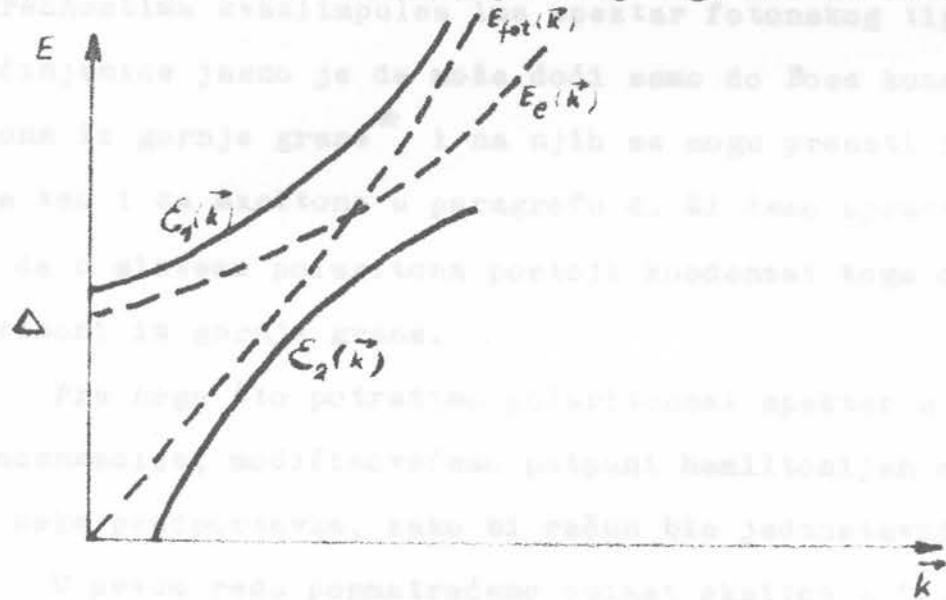
$$u_{2\sigma} = -\frac{E_\sigma + E_{\text{tot}}(\vec{k})}{E_\sigma - E_{\text{tot}}(\vec{k})} v_{2\sigma} \quad (6.18b)$$

$$v_{16} = \frac{2T_k^2 E_{\text{tot}}(\vec{k})}{[E_\phi + E_e(\vec{k})][E_\phi - E_{\text{tot}}(\vec{k})]} \quad (6.18c)$$

$$v_{26} = \frac{1}{\left\{ \left[\frac{E_\phi + E_{\text{tot}}(\vec{k})}{E_\phi - E_{\text{tot}}(\vec{k})} \right]^2 + \frac{4T_k^2 E_{\text{tot}}^2(\vec{k})}{[E_e - E_e(\vec{k})]^2 [E_e - E_{\text{tot}}(\vec{k})]^2} - \frac{4T_k^2 E_{\text{tot}}^2(\vec{k})}{[E_e + E_e(\vec{k})]^2 [E_e - E_{\text{tot}}(\vec{k})]^2} \right\}} \quad (6.18d)$$

gdje je $E_1 = \Sigma_1(\vec{k})$ i $E_2 = \Sigma_2(\vec{k})$ u nihilacije su te polaritonske grane u slj. 6.1, što u potpunosti poklapa sa našim rezultatom.

Iz hamiltonijana (6.16) vidimo da se u kristalu, koji interaguje sa elektromagnetskim poljem, pojavljuju dve polaritonske grane, koje smo grafički predstavili na Sl. 6.1, što je i eksperimentalno potvrđeno. Te dve grane se ne presecaju kao što to čine energije eksitona i fotona, pa zbog toga ako se kristal ana-



Sl. 6.1

lizira u polaritonskoj reprezentaciji, otpadaju teškoće koje se pojavljuju u domenu eksiton - foton rezonance (singulariteti u svim fizičkim veličinama koje karakterišu optičke pojave u kristalu), ako se kristal analizira u eksitonskoj reprezentaciji, a interakcija sa poljem zračenja se uzima kao perturbacija. Mi se

ovde nećemo zadržavati na ovim problemima, već ćemo ispitati mogućnost Bose kondenzacije u sistemu polaritona.

b) Spektar polaritona u uslovima Bose kondenzacije

Ako detaljnije analiziramo polaritonски spektar (6.17), vidimo da se pri malim vrednostima kvaziimpulsa, spektar gornje polaritonske grane $\mathcal{E}_1(\vec{k})$ (operatori kreacije i anihilacije za te polaritone su $C_{1\vec{k}}^+$ i $C_{1\vec{k}}^-$) skoro u potpunosti poklapa sa eksitonским spektrom, tj.

$$\mathcal{E}_1(\vec{k}) \approx E_e(\vec{k}) . \quad (6.19)$$

S druge strane, donja polaritonска grana $\mathcal{E}_2(\vec{k})$, pri malim vrednostima kvaziimpulsa ima spektar fotonskog tipa. Obzirom na ove činjenice jasno je da može doći samo do Bose kondenzacije polaritona iz gornje grane*, i na njih se mogu preneti ista rasudjivanja kao i za eksitone u paragrafu 4. Mi ćemo upravo i predpostaviti da u sistemu polaritona postoji kondenzat koga obrazuju samo polaritoni iz gornje grane.

Pre nego što potražimo polaritonski spektar u uslovima Bose kondenzacije, modifikovaćemo potpuni hamiltonijan sistema (6.11) uvođeći neke predpostavke, kako bi račun bio jednostavniji.

U prvom redu posmatraćemo oblast eksiton - foton rezonan-
ce, u kojoj važe sledeće relacije:

$$E_e(\vec{k}) \cong E_{\text{fot}}(\vec{k}) \quad (6.20)$$

* Poznata je činjenica da ne dolazi do Bose kondenzacije fotona, te je prema tome malo verovatno da polaritoni iz donje grane mogu obrazovati kondenzat.

Dalje, predpostavićemo da su vektori dipolnog momenta prelaza $\vec{\Omega}_{\vec{k}}$ i vektor polarizacije fotona $\vec{l}_{\vec{k}}$ približno ortogonalni, tako da je

$$T_{\vec{k}} = \vec{\Omega}_{\vec{k}} \cdot \vec{l}_{\vec{k}} \ll \Delta \quad (6.21)$$

Pri ovakvim predpostavkama, formule (6.18) i (6.15) (za $t = 0$) daju:

$$u_{11}(\vec{k}) = u_{12}(\vec{k}) = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{4} \delta_{\vec{k}}\right) \quad (6.22a)$$

$$u_{21}(\vec{k}) = -u_{22}(\vec{k}) = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{4} \delta_{\vec{k}}\right) \quad (6.22b)$$

$$v_{11}(\vec{k}) = v_{21}(\vec{k}) = v_{22}(\vec{k}) = -v_{12}(\vec{k}) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \delta_{\vec{k}} \quad (6.22c)$$

gde je $\delta_{\vec{k}} = \frac{T_{\vec{k}}}{\Delta} \approx 0$

$$\begin{aligned} B_{\vec{k}}^+ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (C_{1\vec{k}}^+ + C_{2\vec{k}}^+) \\ C_{\vec{k}}^- &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (C_{1\vec{k}}^- - C_{2\vec{k}}^-) \end{aligned} \quad \left. \right\} \quad (6.23)$$

Polaritonske energije, u ovoj aproksimaciji, imaju oblik:

$$\hat{E}_1(\vec{k}) = E_e(\vec{k}) + T_{\vec{k}} ; \quad \hat{E}_2(\vec{k}) = E_e(\vec{k}) - T_{\vec{k}} \quad (6.24)$$

Ako u anharmonijskom delu hamiltonijana (6.13) zanemarimo članove proporcionalne $T_{\vec{k}}$ (što znači da jedini anharmonijski efekat u sistemu polaritona predstavlja rasejanje na δ -potencijalu), ukupni polaritonski hamiltonijan (6.11), isražen preko operatora $C_{1\vec{k}}$ i $C_{2\vec{k}}$, na osnovu izraza (6.23), ima sledeći oblik:

$$\begin{aligned}
 H_{\text{eff}} = & \sum_{\vec{k}} \left(\tilde{\Delta} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \right) (c_{1\vec{k}}^\dagger c_{1\vec{k}} + c_{2\vec{k}}^\dagger c_{2\vec{k}}) + \frac{g_0}{4\pi} \sum_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4} \left\{ c_{1\vec{k}_1}^\dagger c_{1\vec{k}_2}^\dagger c_{1\vec{k}_3} c_{1\vec{k}_4} + \right. \\
 & + c_{1\vec{k}_1}^\dagger c_{1\vec{k}_2}^\dagger c_{1\vec{k}_3} c_{2\vec{k}_4} + c_{1\vec{k}_1}^\dagger c_{1\vec{k}_2}^\dagger c_{2\vec{k}_3} c_{1\vec{k}_4} + c_{1\vec{k}_1}^\dagger c_{1\vec{k}_2}^\dagger c_{2\vec{k}_3} c_{2\vec{k}_4} + \\
 & + c_{1\vec{k}_1}^\dagger c_{2\vec{k}_2}^\dagger c_{1\vec{k}_3} c_{1\vec{k}_4} + c_{1\vec{k}_1}^\dagger c_{2\vec{k}_2}^\dagger c_{1\vec{k}_3} c_{2\vec{k}_4} + c_{1\vec{k}_1}^\dagger c_{2\vec{k}_2}^\dagger c_{2\vec{k}_3} c_{1\vec{k}_4} + \\
 & + c_{1\vec{k}_1}^\dagger c_{2\vec{k}_2}^\dagger c_{2\vec{k}_3} c_{2\vec{k}_4} + c_{2\vec{k}_1}^\dagger c_{1\vec{k}_2}^\dagger c_{1\vec{k}_3} c_{1\vec{k}_4} + c_{2\vec{k}_1}^\dagger c_{1\vec{k}_2}^\dagger c_{1\vec{k}_3} c_{2\vec{k}_4} + \\
 & + c_{2\vec{k}_1}^\dagger c_{1\vec{k}_2}^\dagger c_{2\vec{k}_3} c_{1\vec{k}_4} + c_{2\vec{k}_1}^\dagger c_{1\vec{k}_2}^\dagger c_{2\vec{k}_3} c_{2\vec{k}_4} + c_{2\vec{k}_1}^\dagger c_{2\vec{k}_2}^\dagger c_{1\vec{k}_3} c_{1\vec{k}_4} + \\
 & \left. + c_{2\vec{k}_1}^\dagger c_{2\vec{k}_2}^\dagger c_{1\vec{k}_3} c_{2\vec{k}_4} + c_{2\vec{k}_1}^\dagger c_{2\vec{k}_2}^\dagger c_{2\vec{k}_3} c_{1\vec{k}_4} + c_{2\vec{k}_1}^\dagger c_{2\vec{k}_2}^\dagger c_{2\vec{k}_3} c_{2\vec{k}_4} \right\} \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

U harmonijskom delu efektivnog hamiltonijana, u izrazima za energije $\mathcal{E}_1(\vec{k})$ i $\mathcal{E}_2(\vec{k})$, zanemarili smo veličinu $T_{\vec{k}}$.

Polazeći od predpostavke da polaritoni gornje grane obrazuju kondenzat, ispitacemo efektivni hamiltonijan u uslovima Bose kondenzacije.

Na osnovu ovih predpostavki možemo pisati:

$$c_{10}^\dagger c_{10} = N_{10} \approx N_1, \quad c_{20}^\dagger c_{20} = N_{20} = 0,$$

$$c_{10}^\dagger = c_{10} = \sqrt{N_{10}} \quad (6.26)$$

i

$$\sum_{\vec{k} \neq 0} c_{1\vec{k}}^\dagger c_{1\vec{k}} = N - N_{10} \ll N_{10} \quad (6.27)$$

U gornjim relacijama smo broj eksitonskih molekula kristala izjednačili sa ukupnim brojem molekula N , što za jake laserske snopove predstavlja dobru aproksimaciju. Ako u hamiltonijanu (6.25) izvršimo razdvajanje delova sa impulsom ravnim nuli po teoriji Bogo-

ljubova (slično kao u paragrafu 1. za tečni helijum), uzimajući u obzir (6.26) i (6.27) dobijamo:

$$\begin{aligned} H_{\text{eff}}^{(2)} = & \Delta N_{10} + \sum_{\vec{k} \neq 0} \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} C_{1\vec{k}}^* C_{1\vec{k}} + \sum_{\vec{k} \neq 0} (\Delta + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}}) C_{2\vec{k}}^* C_{2\vec{k}} + \\ & + \frac{\tilde{\gamma}_0}{4N} N_{10}^2 + \frac{\tilde{\gamma}_0 N_{10}}{N} \sum_{\vec{k} \neq 0} \left[\frac{1}{4} (C_{1\vec{k}}^* C_{1-\vec{k}}^* + C_{1-\vec{k}} C_{1\vec{k}} + C_{2\vec{k}}^* C_{2-\vec{k}}^* + C_{2-\vec{k}} C_{2\vec{k}}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} (C_{1\vec{k}}^* C_{2-\vec{k}}^* + C_{2-\vec{k}} C_{1\vec{k}}) + (C_{1\vec{k}}^* C_{1\vec{k}} + C_{1\vec{k}}^* C_{2\vec{k}} + C_{2\vec{k}}^* C_{1\vec{k}} + C_{2\vec{k}}^* C_{2\vec{k}}) \right] \quad (6.28) \end{aligned}$$

Ako stavimo da je približno:

$$N_{10}^2 \cong N^2 - 2N \sum_{\vec{k} \neq 0} C_{1\vec{k}}^* C_{1\vec{k}} \quad (6.29)$$

i u (6.28) zanemarimo $(\sum_{\vec{k} \neq 0} C_{1\vec{k}}^* C_{1\vec{k}})^2$, konačno dobijamo:

$$H_{\text{eff}}^{(2)} = H_0 + H_2 \quad (6.30)$$

gde je

$$H_0 = N(\Delta + \frac{1}{4}\tilde{\gamma}_0) , \quad (6.31)$$

$$\begin{aligned} H_2 = & \sum_{\vec{k} \neq 0} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} + \frac{\tilde{\gamma}_0}{2} \right) C_{1\vec{k}}^* C_{1\vec{k}} + \sum_{\vec{k} \neq 0} \left(\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} + \tilde{\Delta} + \tilde{\gamma}_0 \right) C_{2\vec{k}}^* C_{2\vec{k}} + \\ & + \tilde{\gamma}_0 \sum_{\vec{k} \neq 0} (C_{1\vec{k}}^* C_{2\vec{k}} + C_{2\vec{k}}^* C_{1\vec{k}}) + \frac{\tilde{\gamma}_0}{4} \sum_{\vec{k} \neq 0} \left\{ C_{1\vec{k}}^* C_{1-\vec{k}}^* + C_{1-\vec{k}} C_{1\vec{k}} + C_{2\vec{k}}^* C_{2-\vec{k}}^* + \right. \\ & \left. + C_{2-\vec{k}} C_{2\vec{k}} + 2C_{1\vec{k}}^* C_{2-\vec{k}}^* + 2C_{2-\vec{k}} C_{1\vec{k}} \right\} \quad (6.32) \end{aligned}$$

Hamiltonian H_2 može se napisati u obliku:

$$H_2 = \sum_{\vec{k} \neq 0} H_{\vec{k}}$$

gde je

$$H_{\vec{k}} = \sum_{S,S'=1}^2 M_{SS'} C_{S\vec{k}}^* C_{S'\vec{k}} + \frac{1}{2} \sum_{S,S'=1}^2 N_{SS'} (C_{S\vec{k}}^* C_{S'\vec{k}}^* + C_{S'\vec{k}} C_{S\vec{k}}) \quad (6.33)$$

$$M_{11} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{eff}} + \frac{\gamma_0}{2} \quad ; \quad M_{22} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{eff}} + \Delta + \frac{\gamma_0}{2} \quad ;$$

$$M_{12} = M_{21} = \gamma_0 \quad ; \quad N_{11} = N_{22} = N_{12} = N_{21} = \frac{\gamma_0}{2} \quad (6.34)$$

Hamiltonijan (6.33) može se dijagonalizovati metodom Tjablikova /41/. Nove operatore $Q_{S\vec{k}}^+$ i $Q_{S\vec{k}}$ uvodimo transformacijom:

$$C_{S\vec{k}} = \sum_{S=1}^2 (u_{S\vec{0}} Q_{S\vec{k}} e^{-iEt} + v_{S\vec{0}} Q_{S\vec{k}}^+ e^{iEt}) \quad (6.35)$$

Za operatore $C_{S\vec{k}}$ važe sledeće jednačine kretanja:

$$i\dot{C}_{S\vec{k}} = \sum_{S'=1}^2 (M_{SS'} C_{S'\vec{k}} + N_{SS'} C_{S'\vec{k}}^*) \quad (6.36)$$

Pošto transformacija (6.35) mora biti kanonična, za funkcije $u_{S\vec{0}}$ i $v_{S\vec{0}}$ dobijamo sledeće uslove:

$$\begin{aligned} \sum_{S=1}^2 (u_{S\vec{0}} u_{S\vec{0}}^* - v_{S\vec{0}}^* v_{S\vec{0}}) &= \delta_{SS'} \\ \sum_{S=1}^2 (u_{S\vec{0}} u_{S\vec{0}}^* - v_{S\vec{0}}^* v_{S\vec{0}}) &= \delta_{00}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Zamenjujući (6.35) u (6.36) dobijamo sledeći sistem jednačina za funkcije $u_{S\vec{0}}$ i $v_{S\vec{0}}$:

$$\left. \begin{aligned} (E - M_{11})u_{1\vec{0}} - M_{12}u_{2\vec{0}} - M_{11}v_{1\vec{0}} - M_{12}v_{2\vec{0}} &= 0 \\ -M_{21}u_{1\vec{0}} + (E - M_{22})u_{2\vec{0}} - M_{21}v_{1\vec{0}} - M_{22}v_{2\vec{0}} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

(6.38)

$$M_{11}u_{16} + M_{12}u_{26} + (E + M_{11})v_{16} + M_{12}v_{26} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \quad (6.38)$$

$$M_{21}u_{16} + M_{22}u_{26} + M_{21}v_{16} + (E + M_{22})v_{26} = 0 \quad (6.39)$$

Da bi ovaj homogeni sistem jednačina imao netrivijalna rešenja mora determinanta sistema biti jednaka nuli, a to nam upravo i daje uslov za određivanje energije elementarnih eksitacija.

Izjednačavanje determinante sistema (6.38) sa nulom daje sledeću bikvadratnu jednačinu po energiji elementarnih eksitacija:

$$E^4 - (X^2 + Y^2 + Z^2)E^2 + \left[(Z^2 - XY)^2 - (X + Y - 2Z)^2 \frac{Z^2}{4} \right] = 0 \quad (6.39)$$

gde je:

$$X = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} + \frac{\gamma_0}{2} ; \quad Y = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} + \Delta + \frac{\gamma_0}{2} ; \quad Z = \frac{\gamma_0}{2} \quad (6.40)$$

Rešavajući jednačinu (6.39), za energije polaritona u uslovima Bose kondenzacije dobijamo sledeće izraze:

$$E_{1/2}(\vec{k}) = \left\{ \frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2} \pm \left[\left(\frac{X^2 + Y^2 + Z^2}{2} \right)^2 + \frac{Z^2}{4}(X + Y - 2Z)^2 - (Z^2 - XY)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (6.41)$$

Gornja formula je prilično glomazna i zavisnost energije od talasnog vektora može se ispitati numerički. Na slici 6.2 dati su grafici energije za obe polaritonske grane, u uslovima Bose kondenzacije.

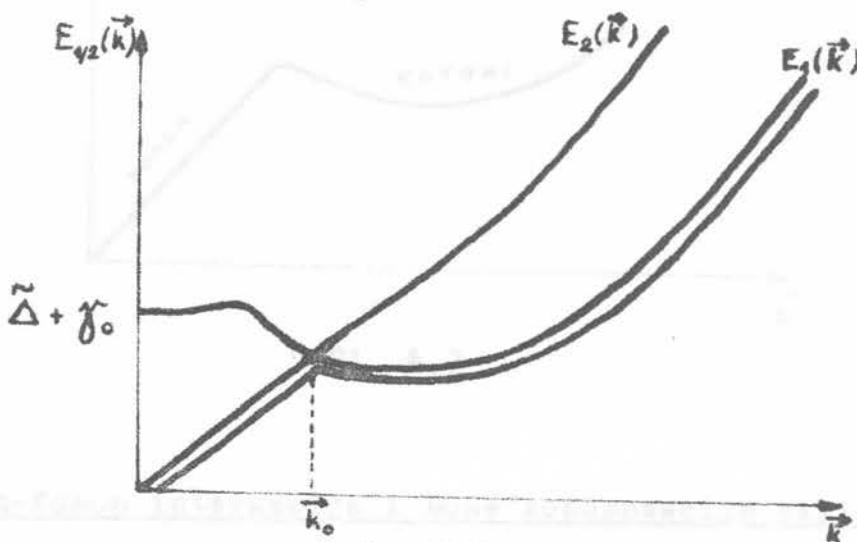
U oblasti velikih impulsa ($k \gg \frac{\sqrt{2m}\gamma_0}{\hbar}$) formula (6.41) daje sledeće vrednosti za energije polaritona:

$$E_1(\vec{k}) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} \quad \text{i} \quad E_2(\vec{k}) = \Delta + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} , \quad (6.42)$$

dok u oblasti malih impulsa ($k \ll \frac{\sqrt{2m\gamma_0}}{\hbar}$) daje:

$$E_1(\vec{k}) \approx \tilde{\Delta} + \gamma_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} \quad \text{i} \quad E_2(\vec{k}) \approx i \gamma_0 \sqrt{\frac{\gamma_0}{\Delta}} \quad (6.43)$$

Spektar (6.41) u uslovima Bose kondenzacije bitno se razlikuje od normalnog polaritonskog spektra (6.17) još po tome, što se dve polaritonske grane u uslovima kondenzacije presecaju (za vrednost kvaziimpulsa $\hbar k_0 \sim \sqrt{2m_{\text{eff}}\gamma_0}$).



Sl. 6.2

Na osnovu gornje analize o spektru polaritona u uslovima Bose kondenzacije možemo zaključiti sledeće:

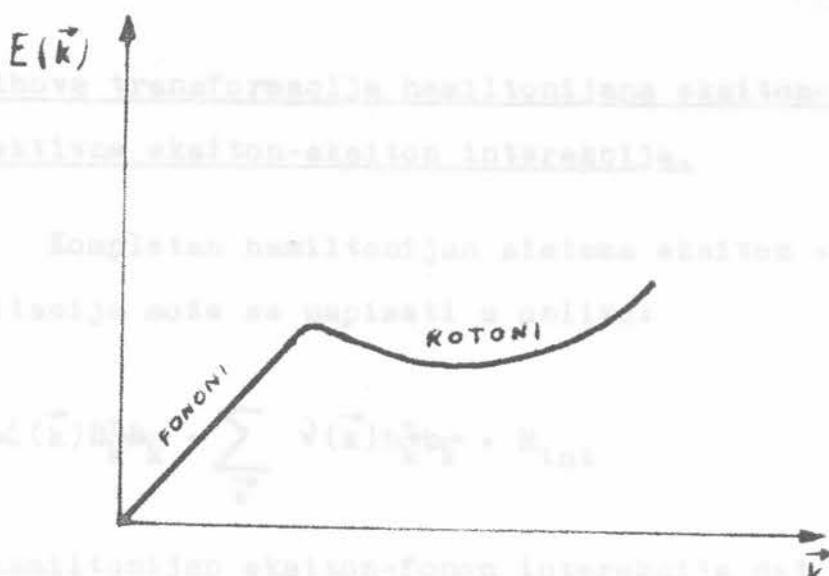
a) Pojavljuju se dve grane koje se presecaju, tj. dolazi do pojave rezonance što nije slučaj kod normalnog polaritonskog spektra.

b) Povećava se gip jedne polaritonske grane ($E_1(\vec{k})$), koja ima i negativnu disperziju.

c) Pri malim impulsima spektar druge grane je skoro linearan ($E_2(\vec{k})$), sa jakim prigušenjem.

d) Ako posmatramo najniže delove i jedne i druge krive, koji su statistički najbolje populisani (na Sl. 6.2 su podvučeni),

vidimo da dobijamo spektar koji odgovara teoriji Landaua o "fononima" i "rotonima" (slika 6.3), odakle zaključujemo da je u sistemu polaritona moguća pojava superfluidnosti.



Sl. 6.3

7. Eksiton-fonon interakcija i Bose kondenzacija eksitona i eksitonskih kaplji

U ovom paragrafu problem Bose kondenzacije eksitona biće tretiran sa jednog drugačijeg stanovišta nego što je učinjeno u 4. i 5. paragrafu ove glave. Naime, ranije smo proces Bose kondenzacije razmatrali kao posledicu eksiton - eksiton interakcije, koja nastaje usled dovoljno visoke koncentracije eksitona (ostvarene laserom naprimjer), dok ćemo sada taj problem razmatrati kao posledicu eksiton - eksiton interakcije koja nastaje usled razne virtuelnih fonona (tj. usled eksiton - fonon interakcije). Za te procese nisu potrebne visoke koncentracije eksitona, tako da se interakcija izmedju samih eksitona može zanemariti.

Analiza eksiton - fonon interakcije biće izvršena po ugledu na radove Freliha /14/ u teoriji superkonduktivnosti, jer

po svojoj matematičkoj strukturi hamiltonijan eksiton-fonon interakcije je sličan hamiltonijanu elektron-fonon interakcije u metalima.

a) Frelihova transformacija hamiltonijana eksiton-fononskog polja i efektivna eksiton-eksiton interakcija.

Kompletan hamiltonijan sistema eksiton + polje mehaničkih oscilacija može se napisati u obliku:

$$H = \sum_{\vec{k}} \alpha(\vec{k}) B_{\vec{k}}^{\dagger} B_{\vec{k}} + \sum_{\vec{k}} \nu(\vec{k}) b_{\vec{k}}^{\dagger} b_{\vec{k}} + H_{int} \quad (7.1)$$

gde je hamiltonijan eksiton-fonon interakcije dat formulom (B.7):

$$H_{int} = \frac{1}{i} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} F(\vec{k}, \vec{q}) B_{\vec{k}-\vec{q}}^{\dagger} B_{\vec{k}} (b_{-\vec{q}} + b_{\vec{q}}^{\dagger}) \quad (7.2)$$

U gornjim formulama koriste se sledeće oznake:

B i b su eksitonski, odnosno fononski operatori,

$\alpha(\vec{k}) = \Delta + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{eff}}$ - energija eksitona u aproksimaciji efektivne mase,

$\nu(\vec{k}) = \hbar v k$ - energija longitudinalnih fonona,

i

$$F(\vec{k}, \vec{q}) = i \sqrt{\frac{1}{2\mu v q}} (\vec{q} \cdot \vec{l}_{\vec{q}}) [\Delta + D_0 + D_{\vec{q}} + M_{\vec{k}} + M_{\vec{k}-\vec{q}}] \quad (7.3)$$

gde je: μ - masa jona, v - brzina zvuka u kristalu, $D_{\vec{k}}$ i $M_{\vec{k}}$ su purije likovi matričnih elemenata interakcije izmedju molekula u kristalu.

Napomenimo da se operator eksiton-fonon interakcije dat

formulom (7.2) bitno razlikuje od standardnog operatora eksiton-fonon interakcije, koji se koristi u literaturi, što je detaljno objašnjeno u Apendiksu B. Najbitnija razlika jeste u tome, što se u izrazu (7.3) za $F(\vec{k}, \vec{q})$, pojavljuje član proporcionalan veličini Δ (energiji pobudjenja izolovanog molekula), kojeg nema u standardnom prilazu eksiton-fonon interakciji. Obzirom da Δ za red ili dva reda veličine premašuje vrednost matričnih elemenata $D_{\vec{q}}$ i $M_{\vec{k}}$, jasno je da teorijsko razmatranje eksiton-fonon interakcije u novoj slici daje bitne kvantitativne korekcije na sve fizičke pojave, koje su posledica eksiton-fonon interakcije. Najnovija istraživanja u toj oblasti pokazuju da su slaganja sa eksperimentalnim rezultatima mnogo bolja nego kod standardnog prilaza eksiton-fonon interakciji (videti Apendiks B i /43/), pa će zbog toga i ovde biti korišćen operator interakcije dat izrazom (7.2)

Obzirom da je hamiltonijan (7.1) po svojoj strukturi sličan hamiltonijanu sistema elektrona + polje mehaničkih oscilacija u provodnicima, izvršićemo unitarnu transformaciju operatora (7.1), analogno Prelihovoj transformaciji hamiltonijana u teoriji superprovodljivosti.

Novi hamiltonijan H_{eq} izražava se preko starog hamiltonijana H , unitarnom transformacijom oblika:

$$H_{eq} = e^{-i\hat{S}} H e^{i\hat{S}} \approx H - i[\hat{S}, H] - \frac{1}{2} [\hat{S}, [\hat{S}, H]] \quad (7.4)$$

gde je operator \hat{S} ($\hat{S} = \hat{S}^*$) dat relacijom:

$$\hat{S} = \sum_{\vec{k}, \vec{q}} W(\vec{k}, \vec{q}) B_{\vec{k}-\vec{q}}^\dagger B_{\vec{k}-\vec{q}} + \text{ermit. konj.} \quad (7.5)$$

Nepoznatu funkciju $W(\vec{k}, \vec{q})$ odredjujemo tako da iz formule (7.4) nestanu članovi linearni po eksiton-fonon interakciji. Ova eliminacija daje za funkciju $W(\vec{k}, \vec{q})$ sledeću vrednost:

$$W(\vec{k}, \vec{q}) = \frac{i}{\sqrt{N}} \cdot \frac{F(\vec{k}, \vec{q})}{\alpha(\vec{k}) - \alpha(\vec{k}-\vec{q}) - \nu(\vec{q})} \quad (7.6)$$

Ako $W(\vec{k}, \vec{q})$, odredjenu gornjom jednačinom, vratimo u (7.4) i dobijeni hamiltonijan usrednjimo po fononskom vakuumu (posmatramo samo spontanu emisiju fonona), za H_{eq} dobijamo sledeći izraz:

$$H_{eq} = \sum_{\vec{k}} \left\{ \alpha(\vec{k}) + \sum_{\vec{q}} \frac{|F(\vec{k}, \vec{q})|^2}{\alpha(\vec{k}) - \alpha(\vec{k}-\vec{q}) - \nu(\vec{q})} \right\} B_{\vec{k}}^{\dagger} B_{\vec{k}} + \\ + \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \frac{\nu(\vec{k}_1 - \vec{k}_3) F(\vec{k}_1, \vec{k}_1 - \vec{k}_3) F(\vec{k}_3, \vec{k}_3 - \vec{k}_1)}{[\alpha(\vec{k}_1) - \alpha(\vec{k}_3)]^2 - \nu^2(\vec{k}_1 - \vec{k}_3)} B_{\vec{k}_1}^{\dagger} B_{\vec{k}_2}^{\dagger} B_{\vec{k}_3} B_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3} \quad (7.7)$$

Kao što se vidi iz poslednjeg izraza eksiton-fonon interakcija koriguje harmonijski spektar eksitona za član

$$\sum_{\vec{q}} \frac{|F(\vec{k}, \vec{q})|^2}{\alpha(\vec{k}) - \alpha(\vec{k}-\vec{q}) - \nu(\vec{q})} \quad (7.8)$$

i dovodi do efektivne eksiton-eksiton interakcije definisane izrazom:

$$H_{int}^{(eff)} = \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \frac{\nu(\vec{k}_1 - \vec{k}_3) F(\vec{k}_1, \vec{k}_1 - \vec{k}_3) F(\vec{k}_3, \vec{k}_3 - \vec{k}_1)}{[\alpha(\vec{k}) - \alpha(\vec{k}_3)]^2 - \nu^2(\vec{k}_1 - \vec{k}_3)} B_{\vec{k}_1}^{\dagger} B_{\vec{k}_2}^{\dagger} B_{\vec{k}_3} B_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3} \quad (7.9)$$

b) Uloga spontane emisije fonona u procesu Bose kondenzacije eksitona.

Obzirom da je hamiltonijan (7.7) dobijen usrednjavanjem po fononskom vakuumu, sve korekcije koje se dobijaju na eksitonski spektar nastaju kao rezultat spontane emisije fonona. Zbog toga ćemo nešto detaljnije razmotriti proces spontane emisije fonona.

Spontana emisija fonona je rezultat rasejanja eksitona na molekulima kristalne rešetke. U ovim procesima eksiton može da izgubi deo energije koji se manifestuje kao stvaranje jednog kolektivnog kvanta mehaničkih oscilacija tj. fonona. Pri ovim procesima važe zakoni održanja kavziimpulsa i energije. To znači da ako u početnom stanju imamo eksiton sa impulsom \vec{k} , u krajnjem stanju imaćemo jedan fonon sa impulsom \vec{q} i eksiton sa impulsom $\vec{k}-\vec{q}$, dok će zakon održanja energije dati:

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} = \frac{\hbar^2}{2m_{\text{eff}}} (\vec{k}-\vec{q})^2 + \hbar v q \quad (7.10)$$

Iz gornje jednačine za intenzitet vektora q dobijamo:

$$q = 2k \cos \theta - \frac{2mv}{\hbar} \quad (7.11)$$

gde je θ ugao izmedju vektora \vec{k} i \vec{q} .

Ako uvedemo brzinu eksitona

$$u = \frac{\hbar k}{m_{\text{eff}}}$$

uslov za spontanu emisiju (7.11) se svodi na:

$$q = \frac{2m_{\text{eff}}}{\hbar} (u \cos \theta - v) . \quad (7.12)$$

Pošto je $q \geq 0$ iz (7.12) vidimo da su procesi spontane emisije fonona mogući samo ako je

$$u \cos \theta - v \geq 0 ,$$

a to znači da ugao θ mora da se kreće u intervalu

$$0 \leq \theta \leq \arccos \frac{v}{u} \quad (7.13)$$

Iz poslednje nejednačine sledi da su procesi spontane emisije mogući samo dok je brzina eksitona u veća od brzine zvuka v u kristalu, ili obzirom na definiciju brzine eksitona, kada impuls eksitona zadovoljava relaciju:

$$\hbar k \geq m_{\text{eff}} v \quad (7.14)$$

Sada ćemo analizirati hamiltonijan (7.7) u uslovima Bose kondenzacije, po teoriji Bogoliubova. Potpuno analognim postupkom kao i u slučaju tečnog helijuma (paragraf 1.), za eksitonski spektar u uslovima Bose kondenzacije dobijamo sledeći izraz:

$$E(\vec{k}) = \sqrt{s_k^2 - \tau_k^2} \quad (7.15)$$

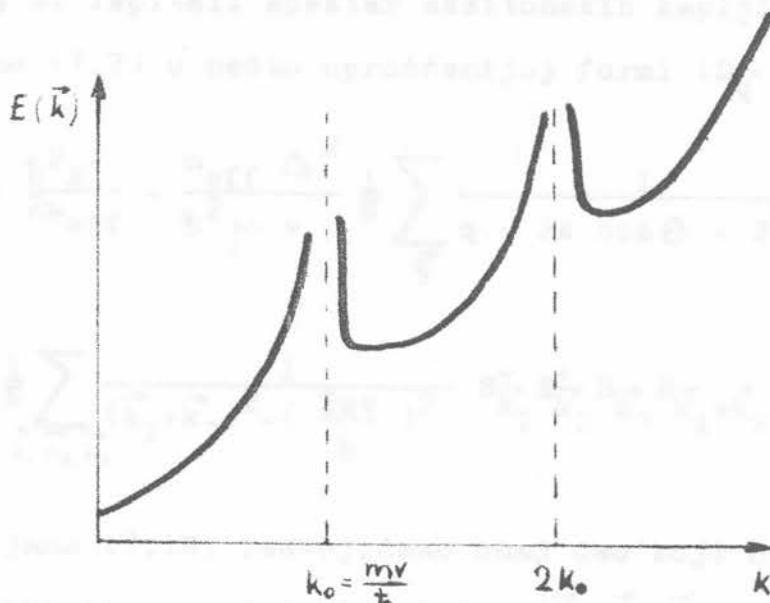
gde su

$$s_k^2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} - \frac{1}{N} \sum_q \frac{\Delta^2}{\mu \hbar v} \frac{1}{q - 2k \cos \theta + 2\frac{mv}{\hbar}} + \frac{N_0}{N} \frac{4m_{\text{eff}}^2}{\mu \hbar^2} \frac{v^2}{k^2 - (\frac{2mv}{\hbar})^2} + \frac{N_0}{N} \frac{2\Delta [m_0 - m_k]}{\mu v^2} \left[\frac{1}{2} + \frac{m_{\text{eff}}^2 v^2}{2\hbar (\frac{m v^2}{\hbar^2} - k^2)} \right] \quad (7.16)$$

$$T_Y = \frac{N_0}{V} \frac{4m_{\text{eff}} \Delta^2}{h^2} \frac{1}{k^2 - (\frac{2mv}{h})^2} \quad (7.17)$$

(S obzirom da je $\Delta \gg D_q ; M_q$, u poslednjim formulama zanemarili smo D_q i M_q u odnosu na Δ .)

Grafički prikaz (kvalitativni) spektra (7.15) dat je na slici 7.1.



S1. 7.1

Vidimo da se u spektru pojavljuju singulariteti u okolini impulsa

$$k_0 = \frac{mv}{h} \quad i \quad 2k_0 .$$

Pojava singulariteta u spektru znači da efektivna eksiton-eksiton interakcija (data formulom (7.9)) pored rasejanja eksitona može da dovede do vezivanja dva eksitona u "eksitonске kaplje" ili biseksitone. Takav proces je moguće očekivati, obzirom da efektivna eksiton-eksiton interakcija (7.9) može da bude privlačna*. U tom slučaju situacija je slična kao kod superprovodnika, gde elektron-phonon interakcija dovodi do stvaranja kuperovskih parova, pa ćemo

* Isti zaključak izведен je i u radu /44/, gde se posmatra interakcija eksitona sa fononima pomoću teorije perturbacije.

ovde posmatrati spektar "eksitonskih kaplji" koje nastaju vezivanjem dva eksitona sa suprotnim impulsima.

Energetski spektar ovih elementarnih struktura ima oblik:

c) Energetski spektar bieksitona.

Da bi ispitali spektar eksitonskih kaplji počićećemo od hamiltonijana (7.7) u nešto uprošćenijoj formi ($D_{\vec{q}}, M_{\vec{q}} \ll \Delta$):

$$H = \sum_{\vec{k}} \left\{ \Delta + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} - \frac{m_{\text{eff}} \Delta^2}{\hbar^2 \mu v} \right\} \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \frac{1}{q - 2k \cos \theta + 2 \frac{mv}{\hbar}} \left\{ B_{\vec{k}}^{\dagger} B_{\vec{k}} + \right. \\ \left. + \frac{2m_{\text{eff}}^2 \Delta^2}{\hbar^2 \mu} \right\} \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3} \frac{1}{(\vec{k}_1 + \vec{k}_3)^2 - (\frac{2mv}{\hbar})^2} B_{\vec{k}_1}^{\dagger} B_{\vec{k}_2}^{\dagger} B_{\vec{k}_3} B_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 - \vec{k}_3} \quad (7.18)$$

Iz hamiltonijana (7.18) izdvojimo onaj deo koji odgovara interakciji eksitona sa suprotnim impulsima ($\vec{k}_1 = \vec{k}_2 = -\vec{k}_3 ; \vec{k}_3 = -\vec{q}$), tako da ćemo ispitati efektivni hamiltonijan oblika:

$$H'_{\text{eff}} = \sum_{\vec{k}} X_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^{\dagger} B_{\vec{k}} + \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}, \vec{q}} Y_{\vec{k}-\vec{q}} B_{\vec{k}}^{\dagger} B_{-\vec{k}}^{\dagger} B_{\vec{q}} B_{-\vec{q}} \quad (7.19)$$

gde je

$$X_{\vec{k}} = \Delta + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\text{eff}}} - \frac{m_{\text{eff}} \Delta^2}{\hbar \mu v} \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{q - 2k \cos \theta + 2 \frac{mv}{\hbar}} \quad (7.20)$$

$$Y_{\vec{k}-\vec{q}} = - \frac{2m_{\text{eff}}^2 \Delta^2}{\hbar^2 \mu} \frac{1}{(\vec{k}-\vec{q})^2 - (\frac{2m_{\text{eff}} v}{\hbar})^2} \quad (7.21)$$

Hamiltonijan (7.19) dijagonalizira se kanonskom transformacijom kojom se od operatora $B_{\vec{k}}$ prelazi na nove operatore $b_{\vec{k}}$:

$$B_{\vec{k}} = u_{\vec{k}} b_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} b_{-\vec{k}}^{\dagger} \quad (7.22)$$

potpuno analogno kao i hamiltonijan superprovodnika u teoriji Bogoliubova (paragraf 2.).

Energetski spektar novih elementarnih eksitacija ima oblik:

$$\tilde{\mathcal{E}}(\vec{k}) = \sqrt{x_{\vec{k}}^2 - \Phi_{\vec{k}}^2} \quad (7.23)$$

gde se "gep" $\Phi_{\vec{k}}$ određuje iz sledeće integralne jednačine:

$$\Phi_{\vec{k}} = - \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \frac{\Phi_{\vec{q}} Y_{\vec{k}-\vec{q}}}{\sqrt{x_{\vec{q}}^2 - \Phi_{\vec{q}}^2}} \quad (7.24)$$

Obzirom da ne postojineki opšti metod za inverziju gornje integralne jednačine, pri njenoj analizi koristićemo izvesne aproksimacije. Ako predpostavimo da u oblasti malih impulsa efektivni potencijal eksiton-eksiton interakcije $Y_{\vec{k}-\vec{q}}$ slabo zavisi od impulsa i u prvoj aproksimaciji stavimo da je jednak konstanti tj.

$$Y_{\vec{k}-\vec{q}} \approx - \tilde{Y}, \quad (7.25)$$

Takvi eksitonski kompleksi povezuju noćine eksiton-fonon interakcije (znak minus zbog privlačenja medju eksitonima), iz jednačine (7.24) sledi da će i "gep" $\Phi_{\vec{k}}$ biti konstanta, tj.

$$\Phi_{\vec{k}} \approx \tilde{\Phi} \quad (7.26)$$

Za energiju eksitona $x_{\vec{k}}$ uzećemo, približno, $x_{\vec{k}} = \Delta + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, tj. zamenićemo korekciju usled eksiton-fonon interakcije, koja je data u (7.20). Pri ovakvim predpostavkama, jednačina (7.24) daje:

$$1 = \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}} \frac{1}{\sqrt{(\Delta + \frac{\hbar^2 k^2}{2m})^2 - \tilde{\Phi}^2}} \quad (7.27)$$

Konačno, ako imamo u vidu da je $\Delta \gg \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, za "gep" $\tilde{\Phi}$ dobijamo sledeću vrednost:

$$\tilde{\Phi}^2 = \Delta^2 - \tilde{Y}^2 \quad . \quad (7.28)$$

U ovoj aproksimaciji energija elementarnih eksitacija $\tilde{\mathcal{E}}(\vec{k})$, iz (7.23), dobija sledeći oblik:

$$\tilde{\mathcal{E}}(\vec{k}) = \sqrt{(\Delta + \frac{\hbar^2 k^2}{2m})^2 - \Delta^2 + \tilde{Y}^2},$$

odnosno

$$\tilde{\mathcal{E}}(\vec{k}) = \sqrt{(\frac{\hbar^2 k^2}{2m})^2 + 2\Delta \frac{\hbar^2 k^2}{2m} + \tilde{Y}^2} \quad (7.29)$$

Lako je videti da energetski spektar (7.29) zadovoljava uslov superfluidnosti (dat jednačinom (1.5)), odakle zaključujemo da u sistemu bieksitona može doći do superfluidnog kretanja. Član \tilde{Y}^2 koji daje "gep" u spektru (7.29) očigledno predstavlja energiju veze kaplike.

Osnovni zaključak koji se nameće u ovom paragrafu jeste, da eksiton-fonon interakcija, u izvesnoj oblasti impulsa može da dovede do privlačenja izmedju eksitona i stvaranja bieksitona. Takvi eksitonski kompleksi poseduju osobinu superfluidnosti, tako da imamo situaciju potpuno analognu kao i kod superprovodljivosti.

Pošto je u ovoj glavi razmatrana mogućnost Bose kondenzacije eksitona i polaritona sa teorijskog stanovišta, postavlja se pitanje, da li je taj problem interesantan samo sa teorijske tačke gledišta ili može da bude interesantan i za praktičnu primenu? Na žalost, eksperimentalnih podataka o Bose kondenzaciji eksitona u molekularnim kristalima do danas ima vrlo malo /45/, ali i pored toga možemo dati pozitivan odgovor na gore postavljeno pitanje, obzirom na ulogu koju igraju eksitoni u mehanizmu prenosa

stojanja koja su uveljavljena za tenu difuzionog pomeranja. U sljedećem poglavlju će se detaljnije razgovarati o prenosu energije elektronskih pobudjenja u kristalima.

Možemo smatrati da je danas nedvosmisleno potvrđeno, da prenos energije elektronskih eksitacija u kristalima na značajna rastojanja igra važnu ulogu u raznim fizičkim, fizičkohemijskim i biofizičkim procesima, koji se odigravaju u prirodi ili u raznim tehničkim uređajima. Specijalno, prenos energije elektronskih eksitacija u kristalima koristi se pri konstrukciji različitih tipova scintilacionih brojača /46/. Pored toga, jedan od uzroka koji naročito stimuliše istraživanje u oblasti migracije energije elektronskih pobudjenja u organskim kristalima jeste pojava senzibilizovane luminescencije i migracije energije u biološkim sistemima. Putem ovih istraživanja pokušava se naći odgovor na kardinalno pitanje u savremenoj bioenergetici, tj. "na koji način energija upravlja životnom aktivnošću? Kako ona pokreće živu mašinu?" (A. Sent Djerdj (A. Szent György) : "Bioenergetika").

Kao što je pokazano u /33/ Gl. IX, jedan od glavnih mehanizama prenosa energije elektronskih eksitacija u kristalima jeste difuziono kretanje eksitona kroz fononski gas. Drugim rečima, srednji slobodni put i koeficijent difuzije eksitona u molekularnim kristalima uglavnom zavise od eksiton-fonon interakcije.

Dužina difuzionog pomeranja eksitona u kristalu data je formulom:

$$\lambda = \sqrt{D\bar{T}_t} \quad (7.30)$$

gde je D - koeficijent difuzije eksitona, a \bar{T}_t - vreme života eksitona. Teorijski proračuni dužine difuzionog pomeranja eksitona daju vrednosti reda veličine 10^3 Å , dok su eksperimentalni podaci za λ od $10^2 - 10^3 \text{ Å}$ /33/. To znači da eksiton u molekularnim kristalima, u srednjem, prenose energiju eksitacija na ra-

stojanja koja su odredjena dužinom difuzionog pomeranja. U slučaju kada dolazi do Bose kondenzacije eksitona, prenos energije vršiće kako nadkondenzatni tako i eksitonni kondenzata. Bitna razlika sada nastaje u tome, što rastojanje na koje mogu da se pomere eksitonni kondenzata nije određeno dužinom difuzionog pomeranja, već zavisi od brzine superfluidnog kretanja celog kondenzata. Ako sa v označimo brzinu kretanja kondenzata, onda za vreme života eksitona τ_e , pomeranje eksitona biće $l \sim v\tau_e$. Ako uzmemo da je $v \sim 10^5$ cm/s i $\tau_e \sim 10^{-8}$ s, sledi da je pomeranje kondenzatnih eksitona $l \sim 10^{-3}$ cm = 10^5 Å. Vidimo da je ova veličina oko sto puta veća od najveće izmerene vrednosti za difuziono pomeranje eksitona. Iz ovoga je jasno da Bose kondenzacija eksitona stvara mnogo povoljnije uslove za migraciju energije kroz kristal. Sa te tačke gledišta vidimo da je za praktičnu primenu ispitivanje uslova i mogućnosti Bose kondenzacije eksitona vrlo važno, i eksperimentalni podaci o tom fenomenu bili bi vrlo interesantni.

Primetimo da bi se Bose kondenzacija eksitona mogla eksperimentalno dokazati upravo posmatranjem prenosa energije kroz planparalelne kristalne ploče, slično kao u eksperimentima Simpsona /47/, u kojima se ispitivala dužina difuzionog pomeranja eksitona.

Ako se na jednoj strani ploče (recimo, levoj) pomoću lasera izazove velika koncentracija eksitona, oni će se kretati kroz kristal ka desnoj strani ploče, koja služi kao detektor eksitona (napr. ako se na nju nanese dovoljna koncentracija primesnih molekula neke luminescentne supstance). Na osnovu intenziteta karakterističnog svetlucanja detektora moglo bi se neposredno suditi o pokretljivosti eksitona. Obzirom da pomeranje eksitona kondenzata (1) za nekoliko redova veličine premašuje dužinu difuzionog pomeranja eksitona (λ), menjanjem debljine planparalelne kristalne ploče moglo bi se pokazati da li dolazi do Bose kondenzacije eksitona, ili ne.

G L A V A III

Bose kondenzacija u sistemu magnona i kuperovskih parova

8. Bose kondenzacija u sistemu magnona

U ovom paragrafu biće tretiran problem Bose kondenzacije u Hajzenbergovom (Heisenberg) feromagnetu sa spinom $S = 1/2$ i to primenom dijagramske tehnike koju je razvio Beljajev /52/ za sisteme sa kondenzatom.

Pre nego što predjemo na formalna računanja, moramo razjasniti pod kojim uslovima je moguća Bose kondenzacija magnona (u feromagnetu sa spinom $S = 1/2$).

Hamiltonijan izotropnog feromagneta sa spinom $S = 1/2$, izražen preko Pauli operatora, ima sledeći oblik /41/:

$$H = \Delta \sum_{\vec{n}} P_{\vec{n}}^+ P_{\vec{n}}^- - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}, \vec{n}'} I_{\vec{n}\vec{n}'}^+ P_{\vec{n}}^+ P_{\vec{n}'}^- - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}, \vec{n}'} I_{\vec{n}\vec{n}'}^+ P_{\vec{n}}^+ P_{\vec{n}'}^+, \quad (8.1)$$

gde je \vec{n} - vektor čvora rešetke, $\Delta = \mu \mathcal{H} + \frac{1}{2} J_0$, μ - magnetni moment atoma, \mathcal{H} - spoljašnje magnetno polje, $J_0 = \sum_{\vec{n}, \vec{n}'} I_{\vec{n}\vec{n}'}^+$, $I_{\vec{n}\vec{n}'}^+$ - integral izmene koji se u teoriji uvodi kao fenomenološki parametar.

Ako u hamiltonijanu (8.1) predjemo sa Pauli na Bose operatore, pomoću egzaktne bozonske reprezentacije kao u 3. paragrafu, hamiltonijan feromagneta u Bose reprezentaciji imaće sledeći oblik (i ovde ćemo zadržati samo dvobozonske procese):

$$H(B) = H_2 + H_S + H_{C_1} + H_{C_2} + H_D \quad (8.2)$$

gde je

$$H_2 = \Delta \sum_{\vec{n}} B_{\vec{n}}^* B_{\vec{n}} - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}, \vec{n}'} I_{\vec{n}\vec{n}'} B_{\vec{n}}^* B_{\vec{n}'}^*, \quad (8.3)$$

$$H_\delta = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{n}, \vec{n}'} 2\Delta \delta_{\vec{n}\vec{n}'} B_{\vec{n}}^* B_{\vec{n}'}^* B_{\vec{n}'} B_{\vec{n}}, \quad (8.4a)$$

$$H_{C_1} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}, \vec{n}'} I_{\vec{n}\vec{n}'} B_{\vec{n}}^* B_{\vec{n}'}^* B_{\vec{n}'} B_{\vec{n}}, \quad (8.4b)$$

$$H_{C_2} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}, \vec{n}'} I_{\vec{n}\vec{n}'} B_{\vec{n}}^* B_{\vec{n}'}^* B_{\vec{n}'} B_{\vec{n}}, \quad (8.4c)$$

$$H_D = -\frac{1}{2} \sum_{\vec{n}, \vec{n}'} I_{\vec{n}\vec{n}'} B_{\vec{n}}^* B_{\vec{n}'}^* B_{\vec{n}'} B_{\vec{n}}. \quad (8.5)$$

Kao što vidimo i u sistemu magnona, slično kao i kod Frenkelovih eksitona, pojavljuje se hamiltonijan H_δ koji opisuje rasejanje na δ - potencijalu $V_{\vec{n}\vec{n}'} = -2\Delta \delta_{\vec{n}\vec{n}'}$. Upravo ovaj hamiltonijan, kao i odnos veličina Δ i $I_{\vec{n}\vec{n}'}$, igra fundamentalnu ulogu u definiciji ponašanja bozonskog sistema, koji je opisan hamiltonijanom (8.2). δ - potencijal može da dovede, slično kao i kod eksitona, do tri vrste procesa: rasejanja, vezanja dva bozona na duboki lokalni nivo dubine oko -2Δ i vezanja na mali nivo dubine $-2E_1$ ($E_1 \ll \Delta$).

Amplituda rasejanja na δ - potencijalu preračunata iz rada /37/ za slučaj feromagneta data je formulom:

$$f(k, \Delta) = \frac{a}{2} \frac{\xi}{1 - \xi + \xi y^2 - i \frac{\pi}{2} \xi y} \quad (8.6)$$

gde je a - konstanta kristalne rešetke,

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \frac{\mu \partial \epsilon + 3I}{\pi I} \\ y &= k/k_M \end{aligned} \right\} \quad (8.7)$$

k_M - vrednost talasnog vektora na granici Brijulenove zone,

I - integral izmene za najbliže susede.

U slučaju malih talasnih vektorova $k \ll k_M$ (na niskim temperaturama ta oblast je najaktuuelnija), formula (8.6) prelazi u:

$$f = \frac{a}{2} \frac{\xi}{1 - \xi} \quad (8.8)$$

Poslednju formulu analiziracemo u dva granična slučaja i to kada je $\mu\mathcal{H} \gg J_1 I$ i $\mu\mathcal{H} \ll J_1 I$.

a) Jaka magnetna polja: $\mu\mathcal{H} \gg J_1 I$

U posmatranom slučaju koji u praksi važi samo za slabe feromagnete (retke zemlje), iz (8.7) vidimo da je $\xi \gg 1$, te za amplitudu rasejanja iz (8.8) dobijamo:

$$f_a = -\frac{a}{2} \quad (8.9)$$

Situacija je sada potpuno analogna kao i kod sistema eksitonu u molekularnim kristalima, a to znači da na δ - potencijalu dolazi samo do rasejanja i ne dolazi do vezivanja magnona ni na duboki (dubine $\sim 2\Delta$) ni na plitki lokalni nivo. Do tog zaključka dolazimo potpuno istim rezonovanjem kao i u 4. paragrafu.

U skladu s tim, u hamiltonijanu H_δ izvršićemo prelaz na amplitudu rasejanja, što daje:

$$H_\delta \rightarrow H_\delta(f \rightarrow f_a) = \frac{2\pi a}{m^* \Omega} \sum_n B_n^+ B_n^+ B_n^- B_n^- \quad (8.10)$$

gde je $m^* = \frac{1}{Ia}$ - efektivna masa magnona i Ω - zapremina elementarne celije.

Ostali potencijali u (8.4) i (8.5) su Bornovskog tipa tako da na osnovu (8.10), (8.4) i (8.5) zaključujemo da izmedju

magnona u oblasti malih talasnih vektora preovladjuje odbijanje i da oni mogu obrazovati kondenzat. Podsetimo se da smo u 3. paragrafu pokazali da je vreme života magnona \bar{T}_ℓ mnogo veće od vremena relaksacije \bar{T}_c pa je prema tome i taj fundamentalni uslov ($\bar{T}_\ell > \bar{T}_c$) za Bose kondenzaciju kvazičestica ispunjen u sistemu magnona. Jasno je da Bose kondenzaciju magnona možemo tretirati kao statističku fluktuaciju u vremenskom intervalu $\bar{T}_c < t < \bar{T}_\ell$, u skladu sa zaključcima do kojih smo došli u 3. paragrafu, gde je tretirano pitanje o mogućnosti Bose kondenzacije u sistemu kvazičestica.

Za istraživanje bozonskih sistema sa kondenzatom adekvatan formalizam razradjen je od strane Beljajeva /52/. U skladu s tim formalizmom, u svakom od operatora B_n^{\rightarrow} i B_n^{\leftarrow} izdvajaju se operatori $b_n^{(o)}$ i $b_n^{+(o)}$ koji odgovaraju anihilaciji i kreaciji bozona čiji je impuls jednak nuli, tako da formalno možemo pisati:

$$B_n^{\rightarrow} = b_n^{(o)} + b_n^{(\vec{k})} ; \quad B_n^{\leftarrow} = b_n^{+(o)} + b_n^{+(\vec{k})} \quad (8.11)$$

Gornje relacije postaju jasnije ako operatore B_n^{\rightarrow} i B_n^{\leftarrow} izrazimo preko Furije likova B_k^{\rightarrow} odnosno B_k^{\leftarrow} . Tada napr. za B_n^{\rightarrow} imamo:

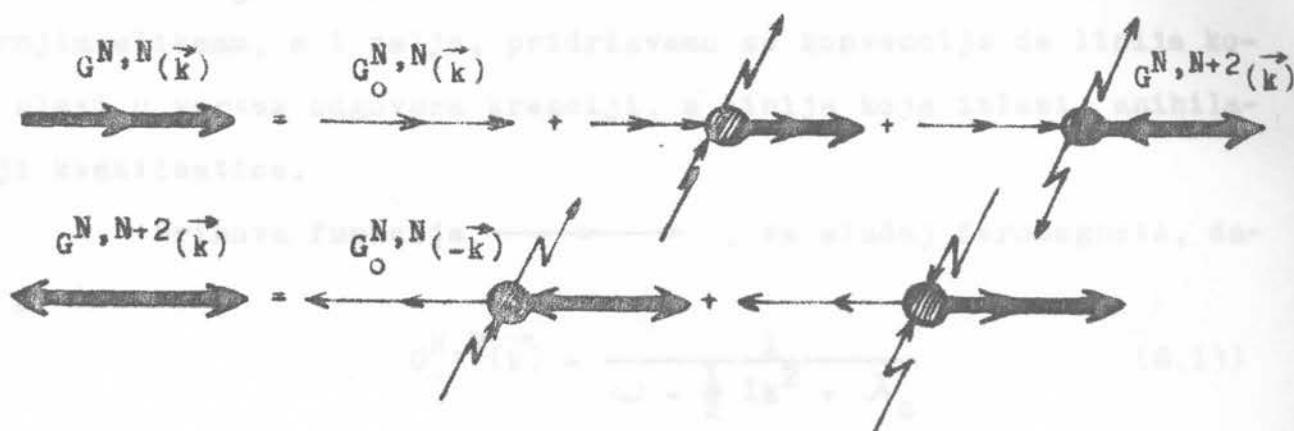
$$B_n^{\rightarrow} = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{\vec{k}} B_k^{\rightarrow} e^{i\vec{k}\vec{n}} = \frac{1}{N^{1/2}} B_o + \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{\vec{k}} B_k^{\rightarrow} e^{i\vec{k}\vec{n}} ,$$

pa je

$$b_n^{(o)} = \frac{B_o}{N^{1/2}} \quad i \quad b_n^{(\vec{k})} = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{\vec{k}} B_k^{\rightarrow} e^{i\vec{k}\vec{n}} . \quad (8.11a)$$

Operacije hronološkog uređjivanja \hat{T} i usrednjjenja $\langle \dots \rangle$ razbijaju se na proizvode: $\hat{T} \rightarrow \hat{T}_{(o)} \cdot \hat{T}_{(\vec{k})}$ i $\langle \dots \rangle \rightarrow \langle \dots \rangle_{(o)} \cdot \langle \dots \rangle_{(\vec{k})}$,

gde indeksi (o) i (k) označavaju da se uvedene operacije vrše po kondenzatnim odnosno nadkondenzatnim bozonima. Kao rezultat gore navedene procedure javljaju se dva tipa Grinovskih funkcija: $G^{N,N}(\vec{k})$, koja odgovara procesima koji ne menjaju ukupan broj nadkondenzatnih (i kondenzatnih) bozona, i $G^{N,N+2} = -G^{N,N-2}$, koje odgovaraju radjanju dva nadkondenzatna bozona iz kondenzata ili obrnutom procesu. Jednačine za funkcije $G^{N,N}$ i $G^{N,N+2}$, koje su u literaturi poznate kao jednačine Beljajeva, grafički se mogu prikazati na sledeći način:



Sl. 8.1

Napomenimo da sistem jednačina za funkcije $G^{N,N}$ i $G^{N,N-2}$ daje potpuno iste rezultate kao i gornje jednačine, te ga nećemo uzeti u obzir.

Debeli liniji $\longrightarrow \longrightarrow$ na slici 8.1 odgovara potpunoj Grinovoj funkciji nadkondenzatnih bozona ($G^{N,N}$), dok je linija $\longrightarrow \longrightarrow$ Grinova funkcija slobodnih bozona ($G_o^{N,N}$). Linija $\longleftarrow \longrightarrow$ je potpuna Grinova funkcija smeše kondenzatnih i nadkondenzatnih bozona koja odgovara procesu nestanka dva kondenzata na račun radjanja dva nadkondenzatna bozona. Verteksi:

$$M_{11}(\vec{k}) = \text{vertex}_1 ; M_{20}(\vec{k}) = \text{vertex}_2 \text{ i } M_{o2}(\vec{k}) = \text{vertex}_3 \quad (8.12)$$

opisuju sledeće procese:

$M_{11}(\vec{k})$ odgovara procesima rasejanja izmedju nadkondenzatnih bozona i procesima rasejanja nadkondenzatnih bozona na kondenzatnim bozonima. $M_{20}(\vec{k})$ odgovara procesu radjanja dva nadkondenzatna bozona uz isčezavanje dva kondenzatna, a $M_{02}(\vec{k})$ obrnutom procesu. "Cik-cak" linije predstavljaju kondenzatne operatorе $b_n^{(o)}$ i $b_n^{+(o)}$ i njihova je vrednost $\sqrt{N_o/N} = \sqrt{n_o}$, u skladu sa teorijom Bogoliubova. N_o predstavlja broj kondenzatnih bozona, N - broj atoma u kristalu i n_o - očigledno koncentraciju kondenzatnih bozona. Na gornjim slikama, a i dalje, pridržavamo se konvencije da linija koja ulazi u vertex odgovara kreaciji, a linija koja izlazi, anihilaciji kvazičestice.

Grinova funkcija \longrightarrow , za slučaj feromagneta, da ta je izrazom:

$$G_o^{N,N}(\vec{k}) = \frac{1}{\omega - \frac{1}{2}Ik^2 + \lambda_o} \quad (8.13)$$

gde je

$$\left. \begin{aligned} \omega &= E - \mu \vec{\mathcal{H}} \\ \lambda_o &= M_{11}(o) - M_{20}(o) \end{aligned} \right\} \quad (8.14)$$

Sistem jednačina sa sl. 8.1 analitički se može napisati na sledeći način:

$$\left. \begin{aligned} G_o^{N,N}(\vec{k}) &= \frac{\omega + \frac{1}{2}Ik^2 + S(\vec{k}) + A(\vec{k}) - \lambda_o}{[\omega - A(\vec{k})]^2 - [\frac{1}{2}Ik^2 + S(\vec{k}) - \lambda_o]^2 + M_{20}(\vec{k})M_{02}(\vec{k})} \\ G_o^{N,N+2}(\vec{k}) &= \frac{M_{02}(\vec{k})}{[\omega - A(\vec{k})]^2 - [\frac{1}{2}Ik^2 + S(\vec{k}) - \lambda_o]^2 + M_{20}(\vec{k})M_{02}(\vec{k})} \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

gde je

$$\left. \begin{aligned} S(\vec{k}) &= \frac{1}{2} [M_{11}(\vec{k}) + M_{11}(-\vec{k})] \\ A(\vec{k}) &= \frac{1}{2} [M_{11}(\vec{k}) - M_{11}(-\vec{k})] \end{aligned} \right\} \quad (8.16)$$

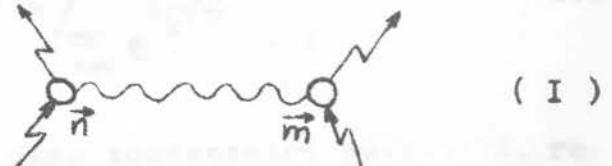
Osnovni problem predstavlja nalaženje vertexa M_{11} , M_{20} i M_{02} . Ovde ćemo pokazati na hamiltonijanu H_D , koji opisuje dinamičku interakciju izmedju bozona, kako se nalaze vertexi, a potpuno analogno se nalazi i za hamiltonijane H_δ , H_{C_1} i H_{C_2} .

Koristeći formulu (8.11) možemo pisati:

$$\begin{aligned} H_D(\text{eff}) = & - \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}, \vec{m}} I_{\vec{n}\vec{m}} (b_{\vec{n}}^+(\circ) b_{\vec{m}}^+(\circ) b_{\vec{m}}^-(\circ) b_{\vec{n}}^-(\circ)) + b_{\vec{n}}^+(\vec{k}) b_{\vec{m}}^+(\vec{k}) b_{\vec{m}}^-(\vec{k}) b_{\vec{n}}^-(\vec{k}) + \\ & + b_{\vec{n}}^+(\circ) b_{\vec{m}}^+(\vec{k}) b_{\vec{n}}^-(\vec{k}) b_{\vec{m}}^-(\circ) + b_{\vec{n}}^+(\circ) b_{\vec{m}}^+(\vec{k}) b_{\vec{n}}^-(\vec{k}) b_{\vec{m}}^-(\circ) + b_{\vec{n}}^+(\vec{k}) b_{\vec{m}}^+(\circ) b_{\vec{n}}^-(\circ) b_{\vec{m}}^-(\vec{k}) + \\ & + b_{\vec{n}}^+(\vec{k}) b_{\vec{m}}^+(\circ) b_{\vec{n}}^-(\vec{k}) b_{\vec{m}}^-(\circ) + b_{\vec{n}}^+(\circ) b_{\vec{m}}^+(\vec{k}) b_{\vec{n}}^-(\vec{k}) b_{\vec{m}}^-(\vec{k}) + b_{\vec{n}}^+(\vec{k}) b_{\vec{m}}^+(\vec{k}) b_{\vec{n}}^-(\circ) b_{\vec{m}}^-(\circ) \end{aligned} \quad (8.17)$$

Ovde su ispušteni procesi u kojima se javlja neparan broj nadkon-denzatnih operatora, jer su zbog ortogonalnosti bozonskih talasnih funkcija svojstvene vrednosti ovih članova ravne nuli. Ako krajevima potencijala $-\frac{1}{2} I_{\vec{n}\vec{m}}$ korespondiramo vertexe \vec{n} i \vec{m} , a za simboličko predstavljanje operatara ostajemo pri gore navedenoj konvenciji, možemo pisati:

$$-\frac{1}{2} I_{\vec{n}\vec{m}} b_{\vec{n}}^+(\circ) b_{\vec{m}}^+(\circ) b_{\vec{m}}^-(\circ) b_{\vec{n}}^-(\circ) =$$



$$-\frac{1}{2} I_{\vec{n}\vec{m}} b_{\vec{n}}^+(\vec{k}) b_{\vec{m}}^+(\vec{k}) b_{\vec{m}}^-(\vec{k}) b_{\vec{n}}^-(\vec{k}) =$$

(II)

$$-\frac{1}{2} I_{\vec{n}\vec{m}} b_{\vec{n}}^+(\circ) b_{\vec{m}}^+(\vec{k}) b_{\vec{n}}^-(\circ) b_{\vec{m}}^-(\vec{k}) =$$

(III)



$$-\frac{1}{2} I_{\vec{n}\vec{m}} b_{\vec{n}}^{+}(o) b_{\vec{m}}^{+}(\vec{k}) b_{\vec{m}}^{(o)} b_{\vec{n}}^{(\vec{k})} = \quad \text{(IV)}$$

$$-\frac{1}{2} I_{\vec{n}\vec{m}} b_{\vec{n}}^{+}(\vec{k}) b_{\vec{m}}^{+}(o) b_{\vec{m}}^{(o)} b_{\vec{n}}^{(o)} = \quad \text{(V)}$$

$$-\frac{1}{2} I_{\vec{n}\vec{m}} b_{\vec{n}}^{+}(\vec{k}) b_{\vec{m}}^{+}(o) b_{\vec{m}}^{(o)} b_{\vec{n}}^{(\vec{k})} = \quad \text{(VI)}$$

$$-\frac{1}{2} I_{\vec{n}\vec{m}} b_{\vec{n}}^{+}(o) b_{\vec{m}}^{+}(o) b_{\vec{m}}^{(\vec{k})} b_{\vec{n}}^{(\vec{k})} = \quad \text{(VII)}$$

$$-\frac{1}{2} I_{\vec{n}\vec{m}} b_{\vec{n}}^{+}(\vec{k}) b_{\vec{m}}^{+}(\vec{k}) b_{\vec{m}}^{(o)} b_{\vec{m}}^{(o)} = \quad \text{(VIII)}$$

Talasastom linijom predstavljen je potencijal $I_{\vec{n}\vec{m}}$.

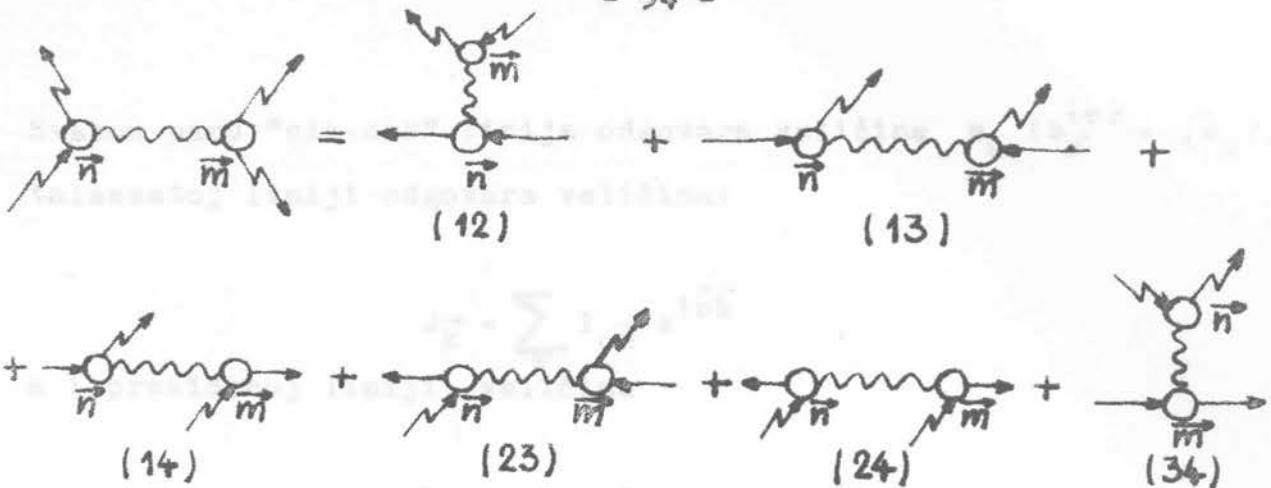
Obzirom na sliku 8.1 i formulu (8.12), vertexu M_{11} odgovaraju dijagrami (II), (III) i (V), vertexu M_{20} odgovara dijagram (VIII) i vertexu M_{02} dijagram (VII). Dijagrami (IV) i (VI) ne uzimaju se u obzir, jer bi oni (obratiti pažnju na smer pravih linija) ušli u sistem jednačina za funkcije $G^{N,N}$ i $G^{N,N+2}$. Dijagram (II) računa se običnom tehnikom i iznosi:

$$= 2 \quad + 2 \quad \text{(8.18)}$$

gde isprekidana linija predstavlja srednji broj nadkondenzatnih bozona:

$$\left\langle b_{\vec{n}}^{+}(\vec{k}) b_{\vec{n}}^{(\vec{k})} \right\rangle = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k} \neq 0} \frac{1}{e^{\frac{E_{\vec{k}}/\theta}{T}} - 1} \quad \text{(8.19)}$$

Dijagram (I), u kojem figurišu samo kondenzatni operatori, računa se na osnovu teoreme Hugenholla-Painsa (videti /7/ Gl.V), po kojoj je dijagram (I) jednak sumi svih mogućih dijagonama koji se dobijaju zamenom para kondenzatnih linija parom nadkondenzatnih linija. Znači:



S1, 8.2

Na osnovu sl. 8.2 (obratiti pažnju na smer pravih linija !) dolazimo do zaključka da dijagrami (14) i (34) daju popravke vertexu M_{11} od kondenzatnih procesa, dijagram (13) je popravka vertexu M_{20} , a dijagram (24) popravka vertexu M_{02} . Ostali dijagrami sa slike ne uzimaju se u obzir, jer pripadaju sistemu jednačina za $G^{N,N}$ i $G^{N,N+2}$. Prema tome za hamiltonijan H_D dobijamo:

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2} \sum_{n,m} I_{nm} B_n^+ B_m^+ B_m^- B_n^- = 2 \\
 & + 2 \xrightarrow{\text{Diagram}} + 2 \xrightarrow{\text{Diagram}} + \\
 & + 2 \xrightarrow{\text{Diagram}} + 2 \xrightarrow{\text{Diagram}} + \\
 & + 2 \xrightarrow{\text{Diagram}} + 2 \xrightarrow{\text{Diagram}} + \\
 & + 2 \xleftarrow{\text{Diagram}} + 2 \xleftarrow{\text{Diagram}} +
 \end{aligned} \tag{8.20}$$

Prva četiri dijagrama sa (8.20) definisu vertex M_{11} ; peti dijagram definise vertex M_{20} ; a šesti dijagram vertex M_{02} . Posle prije transformacija dijagrami u (8.20) postaju:

$$-\frac{1}{2} 2(\text{Diagram 1}) + \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} + \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} + \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} + \text{Diagram 8}) \quad (8.21)$$

Svakom paru "cik-cak" linija odgovara veličina n_0 ($b_n^{(0)} \sim \sqrt{n_0}$), talasastoj liniji odgovara veličina:

$$J_{\vec{k}} = \sum_n I_{on} e^{ink},$$

a isprekidanoj liniji, veličina

$$n_{\vec{k}} = \frac{1}{e^{\frac{E_{\vec{k}}/\Theta}{k}} - 1}.$$

Po unutrašnjim impulsima (\vec{q}) sa (8.21) vrši se integracija (sumacija). Pošto se pri računanju vertexa ulazna i izlazna linija odbacuju, možemo na osnovu svega što je rečeno, napisati:

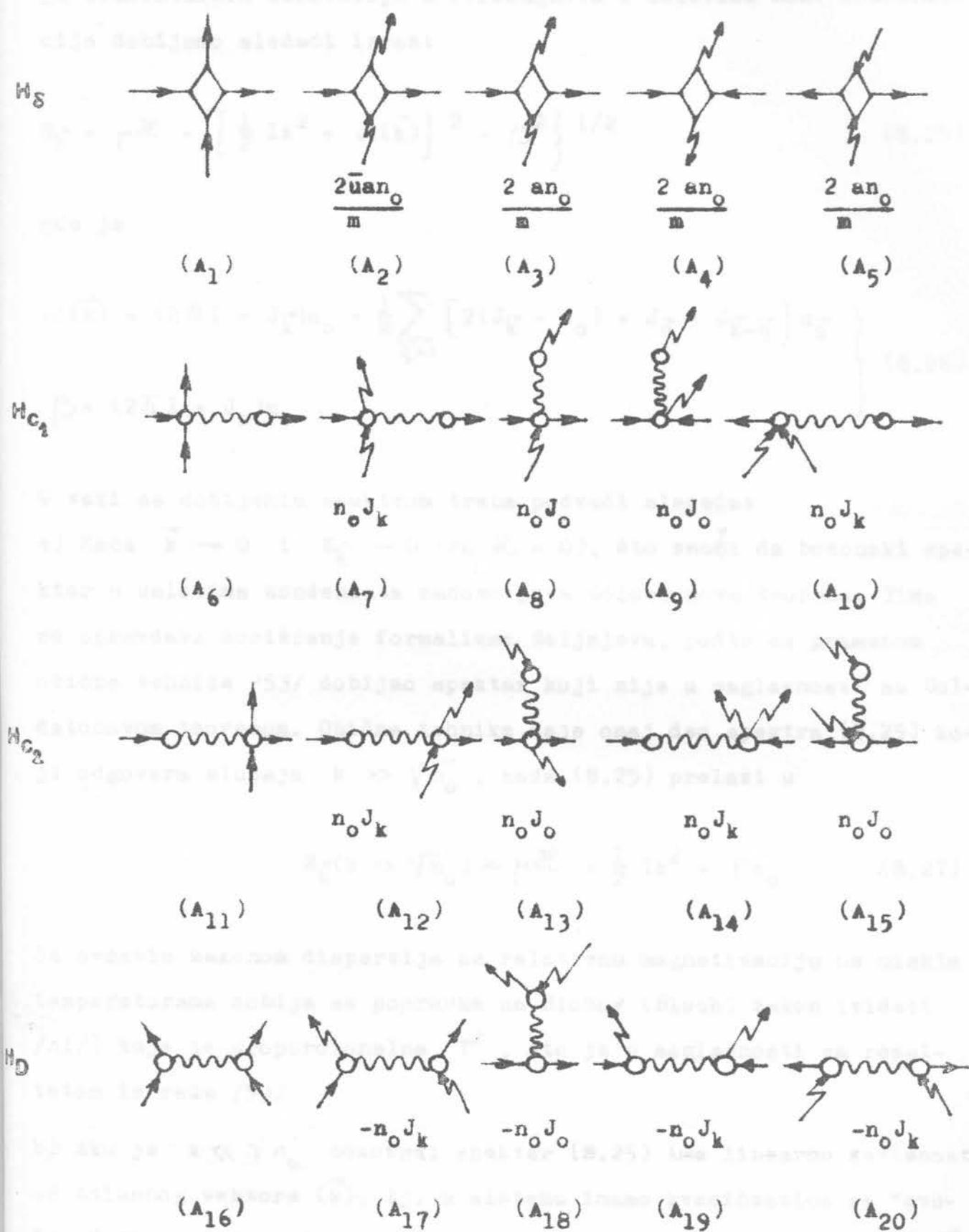
$$\left. \begin{aligned} M_{11}^{(D)}(\vec{k}) &= -n_0(J_0 + J_{\vec{k}}) - \frac{1}{2} \sum_{\vec{q} \neq 0} n_{\vec{q}}(J_0 + J_{\vec{k}-\vec{q}}) \\ M_{20}^{(D)}(\vec{k}) &= M_{02}^{(D)}(\vec{k}) = -n_0 J_{\vec{k}} \end{aligned} \right\} \quad (8.22)$$

Na isti način se računaju doprinosi vertexima koji dolaze od hamiltonijana H_δ , H_{C_1} i H_{C_2} . Odgovarajući dijagrami u impulsnom prostoru za ceo hamiltonijan interakcije (kinematičke i dinamičke) $H_\delta + H_{C_1} + H_{C_2} + H_D$ dati su na slici 8.3.

Na ovoj slici čisto kondenzatni dijagrami već su preračunati po teoremi Hugenholtzca i Painsa, dok se dijagrami A_1 ; A_6 , A_{11} i A_{16} računaju običnom tehnikom što nećemo ovde navesti. Posle ovih računanja i uz pomoć slike 8.3, možemo napisati:

$$M_{11}(\vec{k}) = n_0(8\pi I + J_0 + J_{\vec{k}}) + \frac{1}{2} \sum_{\vec{q} \neq 0} n_{\vec{q}}(8\pi I + 2J_{\vec{k}} + 2J_{\vec{q}} - J_0 - J_{\vec{k}-\vec{q}}) \quad (8.23)$$

$$M_{20}(\vec{k}) = M_{02}(\vec{k}) = n_0(4\pi I + J_0) \quad (8.24)$$



Na osnovu jednačina (8.15) i (8.16) te (8.23) i (8.24), za energiju elementarnih eksitacija u feromagnetu u uslovima Bose kondenzacije dobijamo sledeći izraz:

$$E_{\vec{k}} = \mu \mathcal{H} + \left\{ \left[\frac{1}{2} I k^2 + \alpha(\vec{k}) \right]^2 - \beta^2 \right\}^{1/2} \quad (8.25)$$

Uvjetno je da je $\beta = 0$, nešto je

$$\alpha(\vec{k}) = (2\pi I + J_{\vec{k}})n_0 + \sum_{\vec{q} \neq 0} \left[2(J_{\vec{k}} - J_0) + J_{\vec{q}} - J_{\vec{k}-\vec{q}} \right] n_{\vec{q}} \quad (8.26)$$

U vezi sa dobijenim spektrom treba podvući sledeće:

- a) Kada $\vec{k} \rightarrow 0$ i $E_{\vec{k}} \rightarrow 0$ (za $\mathcal{H} = 0$), što znači da bozonski spektar u uslovima kondenzata zadovoljava Goldstonovu teoremu. Time se opravdava korišćenje formalizma Beljajeva, pošto se primenom obične tehnike /53/ dobijao spektar koji nije u saglasnosti sa Goldstonovom teoremom. Obična tehnika daje onaj deo spektra (8.25) koji odgovara slučaju $k \gg \sqrt{n_0}$, kada (8.25) prelazi u

$$E_{\vec{k}}(k \gg \sqrt{n_0}) \approx \mu \mathcal{H} + \frac{1}{2} I k^2 + \varphi_{n_0} \quad (8.27)$$

Sa ovakvim zakonom disperzije za relativnu magnetizaciju na niskim temperaturama dobija se popravka na Blohov (Bloch) zakon (videti /41/) koja je proporcionalna T^2 , što je u saglasnosti sa rezultatom iz rada /53/.

- b) Ako je $k \ll \sqrt{n_0}$ bozonski spektar (8.25) ima linearnu zavisnost od talasnog vektora (\vec{k}), tj. u sistemu imamo kvazičestice sa "zvučnom" disperzijom. Koeficijent proporcionalnosti u izrazu $E_{\vec{k}} \approx C |\vec{k}|$

predstavlja brzinu zvučnih talasa u sistemu.

c) Ako je $|k| \gg \sqrt{n_0}$ formula (8.25) daje kvadratni zakon disperzije: $E_k \approx \text{const} + \frac{1}{2} I k^2$, tj. sličnu situaciju kao i kad nema kondenzata.

Napomenimo na kraju, da u slučaju slabog spoljašnjeg magnetnog polja ($\mu\mathcal{H} \ll \mathcal{T}_I$), ili kada je $\mathcal{H} = 0$, na osnovu formule (8.8) za amplitudu rasejanja dobijamo:

$$f = \frac{a}{2} \frac{3}{\pi - 3} \gg a,$$

tj. ona postaje mnogo veća od konstante rešetke. To znači da pri sudaru dva bozona na jednom čvoru nije došlo do rasejanja već do slepljivanja tih bozona, odnosno do obrazovanja nove kvazičestice. Prema tome u sistemu magnona, u slučaju slabih magnetnih polja, po- red rasejanja dolazi i do vezivanja magnona, što utiče na vreme života kvazičestica (damping), te u ovom slučaju nije sigurno da je osnovni uslov za postojanje kondenzata $T_c > T_f$ zadovoljen, pa ne možemo predpostaviti da u sistemu magnona dolazi do Bose kondenzacije. Zbog toga ovde neće biti razmatran slučaj $\mu\mathcal{H} \ll \mathcal{T}_I$.

9. Reformulisana BCS teorija superprovodljivosti

a) BCS teorija u paulionskoj reprezentaciji

U 2. paragrafu I Glave data je kratka analiza BCS modela superprovodljivosti i to u fermionskoj reprezentaciji. Sada ćemo detaljno ispitati hamiltonijan BCS modela, ali tako što ćemo sa Fermi operatora preći na Pauli operatore i analizu izvršiti u paulionskoj slici.

Modelni hamiltonijan BCS teorije ima oblik:

$$H_{BCS} = \sum_{\vec{p}} 2E(\vec{p}) \left[a_{\vec{p}}^{\dagger} \left(\frac{1}{2} \right) a_{\vec{p}} \left(\frac{1}{2} \right) \right] - \frac{1}{2} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} W_{\vec{p}\vec{p}'} a_{\vec{p}}^{\dagger} \left(\frac{1}{2} \right) a_{-\vec{p}'}^{\dagger} \left(-\frac{1}{2} \right) a_{-\vec{p}'} \left(-\frac{1}{2} \right) a_{\vec{p}} \left(\frac{1}{2} \right) \quad (9.1)$$

gde su: $a_{\vec{p}}^{\dagger} (\pm \frac{1}{2})$ i $a_{\vec{p}} (\pm \frac{1}{2})$ (Fermi) operatori kreacije i anihilacije elektrona; $W_{\vec{p}\vec{p}'}$ - potencijal interakcije (privlačni) izmedju elektrona i

$$E(\vec{p}) = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{p_F^2}{2m_e} , \quad |\vec{p}| = p \quad (9.2)$$

m_e predstavlja masu elektrona, a \vec{p}_F radius Fermi sfere. Impulsi \vec{p} i \vec{p}' se menjaju u intervalu $[\vec{p}_F - \vec{p}_G ; \vec{p}_F + \vec{p}_G]$ i $p_G \ll p_F$.

Svojstvena stanja ovog hamiltonijana leže u Hilbertovom prostoru \mathcal{H} , čija se stanja dobijaju kao direktni proizvod stanja

$$\begin{aligned} |n_{\vec{p}}^+ = 0, n_{\vec{p}}^- = 0\rangle &\equiv |00\rangle \\ |n_{\vec{p}}^+ = 1, n_{\vec{p}}^- = 1\rangle &\equiv |11\rangle \end{aligned} \quad , \quad \left. \right\} \quad (9.3)$$

gde su $n_{\vec{p}}^+$ i $n_{\vec{p}}^-$ svojstvene vrednosti operatora $\hat{n}_{\vec{p}}^+ = a_{\vec{p}}^{\dagger} \left(\frac{1}{2} \right) a_{\vec{p}} \left(\frac{1}{2} \right)$ i $\hat{n}_{\vec{p}}^- = a_{-\vec{p}}^{\dagger} \left(-\frac{1}{2} \right) a_{-\vec{p}} \left(-\frac{1}{2} \right)$.

Ako uvedemo sledeće operatore:

$$\mathcal{T}_{\vec{p}}^+ = a_{\vec{p}}^{\dagger} \left(\frac{1}{2} \right) a_{-\vec{p}}^{\dagger} \left(-\frac{1}{2} \right) ; \quad \mathcal{T}_{\vec{p}}^- = a_{-\vec{p}} \left(-\frac{1}{2} \right) a_{\vec{p}} \left(\frac{1}{2} \right) , \quad (9.4)$$

lako je videti da u Hilbertovom prostoru \mathcal{H} važe relacije:

$$a_{\vec{p}}^{\dagger} \left(\frac{1}{2} \right) a_{\vec{p}} \left(\frac{1}{2} \right) = a_{-\vec{p}}^{\dagger} \left(-\frac{1}{2} \right) a_{-\vec{p}} \left(-\frac{1}{2} \right) = \mathcal{T}_{\vec{p}}^+ \mathcal{T}_{\vec{p}}^- , \quad (9.5)$$

i sledeće komutacione relacije:

$$\left. \begin{aligned} [\tilde{\pi}_{\vec{p}}, \tilde{\pi}_{\vec{p}'}^+] &= \delta_{\vec{p}\vec{p}'}(1 - 2\tilde{\pi}_{\vec{p}}^+\tilde{\pi}_{\vec{p}}^-) \\ [\tilde{\pi}_{\vec{p}}, \tilde{\pi}_{\vec{p}'}^-] &= [\tilde{\pi}_{\vec{p}}^+, \tilde{\pi}_{\vec{p}'}^+] = 0 \\ \tilde{\pi}_{\vec{p}}^2 &= \tilde{\pi}_{\vec{p}}^{+2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (9.6)$$

tj. $\tilde{\pi}_{\vec{p}}$ i $\tilde{\pi}_{\vec{p}}^+$ predstavljaju Pauli operatore.

Izražen preko operatora $\tilde{\pi}_{\vec{p}}$ i $\tilde{\pi}_{\vec{p}}^+$, hamiltonijan (9.1) ima sledeći oblik:

$$\tilde{H}_{BCS} = \sum_{\vec{p}} 2E(\vec{p})\tilde{\pi}_{\vec{p}}^+\tilde{\pi}_{\vec{p}}^- - \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}, \vec{p}'} u_{\vec{p}\vec{p}'} \tilde{\pi}_{\vec{p}}^+\tilde{\pi}_{\vec{p}'}^- \quad (9.7)$$

Gornji hamiltonijan možemo dijagonalizovati kanonskom transformacijom Pauli operatora $\tilde{\pi}_{\vec{p}}$, $\tilde{\pi}_{\vec{p}}^+$ u nove Pauli operatore $P_{\vec{p}}$ i $P_{\vec{p}}^+$. Ta transformacija ima sledeći oblik /48/:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\pi}_{\vec{p}}^+ &= \sqrt{u_{\vec{p}} v_{\vec{p}}} - 2 \sqrt{u_{\vec{p}} v_{\vec{p}}} P_{\vec{p}}^+ P_{\vec{p}}^- + u_{\vec{p}} P_{\vec{p}}^+ - v_{\vec{p}} P_{\vec{p}}^- \\ \tilde{\pi}_{\vec{p}}^- &= \sqrt{u_{\vec{p}} v_{\vec{p}}} - 2 \sqrt{u_{\vec{p}} v_{\vec{p}}} P_{\vec{p}}^+ P_{\vec{p}}^- + u_{\vec{p}} P_{\vec{p}}^- - v_{\vec{p}} P_{\vec{p}}^+ \end{aligned} \right\} \quad (9.8)$$

gde su $u_{\vec{p}}$ i $v_{\vec{p}}$ realne funkcije koje zadovoljavaju sledeći uslov:

$$u_{\vec{p}} + v_{\vec{p}} = \pm 1 \quad (9.9)$$

U novim operatorima $P_{\vec{p}}$, $P_{\vec{p}}^+$ hamiltonijan (9.7) dobija sledeći oblik:

$$H_{BCS} = H^{(0)} + H^{(1)} + H_d^{(2)} + H_{nd}^{(2)} + H^{(3)} + H^{(4)} \quad (9.10)$$

gde je

... (nije moguće do zapisati)

$$H^{(0)} = \sum_{\vec{p}} \left[2E(\vec{p}) v_{\vec{p}} (u_{\vec{p}} + v_{\vec{p}}) - \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}'} w_{\vec{p}\vec{p}'} \sqrt{u_{\vec{p}} v_{\vec{p}} u_{\vec{p}'} v_{\vec{p}'}} \right]$$

$$H^{(1)} = \sum_{\vec{p}} X_1(\vec{p})(P_{\vec{p}}^+ P_{\vec{p}}^-) ; \quad X_1(\vec{p}) = 2E(\vec{p})(u_{\vec{p}} + v_{\vec{p}}) \sqrt{u_{\vec{p}} v_{\vec{p}}} - \\ - \frac{1}{V}(u_{\vec{p}} - v_{\vec{p}}) \sum_{\vec{p}'} w_{\vec{p}\vec{p}'} \sqrt{u_{\vec{p}'} v_{\vec{p}'}}$$

$$H_d^{(2)} = \sum_{\vec{p}} X_2(\vec{p}) P_{\vec{p}}^+ P_{\vec{p}}^- ; \quad X_2(\vec{p}) = 2E(\vec{p})(u_{\vec{p}} + v_{\vec{p}})(u_{\vec{p}} - v_{\vec{p}}) + \\ + \frac{1}{V} \sqrt{u_{\vec{p}} v_{\vec{p}}} \sum_{\vec{p}'} w_{\vec{p}\vec{p}'} \sqrt{u_{\vec{p}'} v_{\vec{p}'}}$$

$$H_{nd}^{(2)} = \sum_{\vec{p} \neq \vec{p}'} \left[Y(\vec{p}, \vec{p}') P_{\vec{p}}^+ P_{\vec{p}'}^- + Z(\vec{p}, \vec{p}') (P_{\vec{p}}^+ P_{\vec{p}'}^+ + P_{\vec{p}}^- P_{\vec{p}'}^-) \right]$$

$$Y(\vec{p}, \vec{p}') = - \frac{1}{V} w_{\vec{p}\vec{p}'} (u_{\vec{p}} u_{\vec{p}'} + v_{\vec{p}} v_{\vec{p}'}) ; \quad Z(\vec{p}, \vec{p}') = \frac{1}{V} w_{\vec{p}\vec{p}'} u_{\vec{p}} v_{\vec{p}'}$$

$$H^{(3)} = \sum_{\vec{p} \neq \vec{p}'} T(\vec{p}, \vec{p}') (P_{\vec{p}}^+ P_{\vec{p}'}^+ P_{\vec{p}}^- P_{\vec{p}'}^- + P_{\vec{p}}^+ P_{\vec{p}'}^- P_{\vec{p}}^- P_{\vec{p}'}^+)$$

$$T(\vec{p}, \vec{p}') = \frac{2}{V} w_{\vec{p}\vec{p}'} (u_{\vec{p}} - v_{\vec{p}'}) \sqrt{u_{\vec{p}} v_{\vec{p}'}}$$

$$H^{(4)} = \sum V(\vec{p}, \vec{p}') P_{\vec{p}}^+ P_{\vec{p}'}^+ P_{\vec{p}}^- P_{\vec{p}'}^-$$

$$V(\vec{p}, \vec{p}') = - \frac{4}{V} w_{\vec{p}\vec{p}'} \sqrt{u_{\vec{p}} v_{\vec{p}} u_{\vec{p}'} v_{\vec{p}'}}$$

Kao što vidimo kompletan hamiltonijan sistema sadrži član $H^{(1)}$, koji je linearan po Pauli operatorima $P_{\vec{p}}$. Ovo znači da hamiltonijan nije "stabilizovan", ili, drugim rečima, da mu energija osnovnog stanja nije dobro definisana. Obsirom da se u (9.10) pojavljuju proizvoljne funkcije $u_{\vec{p}}$ i $v_{\vec{p}}$, mi ih možemo odrediti tako da hamiltonijan (9.10) postane stabilan, odnosno da je $H^{(1)} = 0$. Ovo nas dovodi do uslova:

$$2E(\vec{p})(u_{\vec{p}} + v_{\vec{p}}) \sqrt{u_{\vec{p}} v_{\vec{p}}} - (u_{\vec{p}} - v_{\vec{p}}) \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}'} w_{\vec{p}\vec{p}'} \sqrt{u_{\vec{p}'} v_{\vec{p}'}} = 0 \quad (9.12)$$

Ako uvedemo oznaku:

$$\Delta_{\vec{p}} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{p}'} w_{\vec{p}\vec{p}'} \sqrt{u_{\vec{p}'} v_{\vec{p}'}} \quad (9.13)$$

rešavajući simultano jednačine (9.9) i (9.12) za $u_{\vec{p}}$ i $v_{\vec{p}}$ dobijamo sledeće relacije:

$$\left. \begin{aligned} u_{\vec{p}} &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E(\vec{p})}{\sqrt{E^2(\vec{p}) + \Delta_{\vec{p}}^2}} \right) \\ v_{\vec{p}} &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E(\vec{p})}{\sqrt{E^2(\vec{p}) + \Delta_{\vec{p}}^2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.14)$$

odnosno

$$u_{\vec{p}} - v_{\vec{p}} = \frac{E(\vec{p})}{\sqrt{E^2(\vec{p}) + \Delta_{\vec{p}}^2}} \quad ; \quad \sqrt{u_{\vec{p}} v_{\vec{p}}} = \frac{1}{2} \frac{\Delta_{\vec{p}}}{\sqrt{E^2(\vec{p}) + \Delta_{\vec{p}}^2}} \quad (9.15)$$

Ako u hamiltonijanu (9.11) zanemarimo članove $H_{nd}^{(2)}$, $H^{(3)}$ i $H^{(4)}$, dobijamo dijagonalizovani hamiltonijan u sledećem obliku:

$$H_d^{(2)} = \sum_{\vec{p}} \sqrt{E^2(\vec{p}) + \Delta_{\vec{p}}^2} (P_{\vec{p}\vec{p}}^+ P_{\vec{p}\vec{p}}^- + P_{-\vec{p}\vec{p}}^+ P_{-\vec{p}\vec{p}}^-) \quad (9.16)$$

Vidimo da smo dobili isti rezultat za spektar elementarnih eksitacija kao i u BCS teoriji. Razlika se sastoji u tome što superfluidno kretanje, u ovoj slici, ne vrše dva tipa Fermi eksitacija, već paulionske eksitacije sa suprotno usmerenim impulsima. Napomenimo još da se iz jednačine (9.13), (9.14) i (9.15) dobija za energetski gap isti rezultat kao i u BCS teoriji (formula (2.34)).

b) Novi model superprovodljivosti

Obzirom na suštinsku analogiju izmedju fenomena superfluidnosti i superprovodljivosti, koju smo više puta navodili, jasno je da superprovodljivost u stvari predstavlja superfluidno kretanje bozona u provodniku (kuperovskih parova u BCS modelu). Ta činjenica nas upravo navodi na pomisao da u hamiltonijanu (9.10) predjemo sa Pauli operatora $P_{\vec{p}}$ i $P_{\vec{p}}^+$ na Bose operatora $B_{\vec{p}}$ i $B_{\vec{p}}^+$ i ispitamo spektar elementarnih eksitacija u bozonskoj reprezentaciji. U tom cilju koristićemo egzaktnu bozonsku reprezentaciju Pauli operatora /33/:

$$P_{\vec{p}}^+ = B_{\vec{p}}^+ \left[\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-2)^{\nu}}{(1+\nu)!} B_{\vec{p}}^+ B_{\vec{p}}^- \right]^{1/2},$$

$$P_{\vec{p}}^+ P_{\vec{p}}^- = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-2)^{\nu}}{(1+\nu)!} (B_{\vec{p}}^+)^{\nu+1} B_{\vec{p}}^{-\nu-1} \quad (9.17)$$

Jasno je da u novoj, bozonskoj, reprezentaciji BCS teorija prelazi u teoriju bozonskog sistema sa višečestičnim interakcijama specijalnog tipa. Ako se u novom hamiltonijanu zadržimo na dvočestičnim interakcijama kao dominantnim, dolazimo do sledećeg, novog, modela hamiltonijana u teoriji superprovodljivosti:

$$\tilde{H} = \tilde{H}^{(0)} + \tilde{H}^{(1)} + \tilde{H}_d^{(2)} + \tilde{H}_{nd}^{(2)} + \tilde{H}^{(3)} + \tilde{H}_4^{(4)} \quad (9.18)$$

gde je

$$\tilde{H}^{(0)} = H^{(0)}, \quad \tilde{H}^{(1)} = \sum_{\vec{p}} X_1(\vec{p})(B_{\vec{p}}^+ + B_{\vec{p}}^-)$$

$$\tilde{H}_d^{(2)} = \sum_{\vec{p}} X_2(\vec{p}) B_{\vec{p}}^+ B_{\vec{p}}^-$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{H}_{nd}^{(2)} &= \sum_{\vec{p} \neq \vec{p}'} \left[Y(\vec{p}, \vec{p}') B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}'} + Z(\vec{p}, \vec{p}') (B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}}^{\dagger} + B_{\vec{p}} B_{\vec{p}'}) \right] \\
 \tilde{H}^{(3)} &= - \sum_{\vec{p}} X_1(\vec{p}) (B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}} + B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}} B_{\vec{p}}) + \sum_{\vec{p} \neq \vec{p}'} T(\vec{p}, \vec{p}') (B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}'} + B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}} B_{\vec{p}'}) \\
 \tilde{H}^{(4)} &= - \sum_{\vec{p}} X_2(\vec{p}) B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}} B_{\vec{p}} - \sum_{\vec{p} \neq \vec{p}'} Y(\vec{p}, \vec{p}') (B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}'} B_{\vec{p}'} + B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}'} B_{\vec{p}}) - \\
 &\quad - \sum_{\vec{p} \neq \vec{p}'} Z(\vec{p}, \vec{p}') (B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}} + B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}'} + B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}} B_{\vec{p}} B_{\vec{p}'} + \\
 &\quad + B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}} B_{\vec{p}'} B_{\vec{p}}) + \sum_{\vec{p} \neq \vec{p}'} V(\vec{p}, \vec{p}') B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}}^{\dagger} B_{\vec{p}'} B_{\vec{p}}
 \end{aligned} \tag{9.19}$$

U daljoj analizi koristićemo gornji hamiltonijan sa sledećom redefinicijom impulsa i energije:

$$\begin{aligned}
 \vec{p} &\rightarrow \vec{k} = \vec{p} - \vec{p}_F \quad , \quad \vec{k} \in [-\vec{p}_G, \vec{p}_G] \\
 E(\vec{p}) &\rightarrow E(\vec{k}) = \frac{k^2}{2m_e} + \frac{p_F}{m} k \cos \Phi_{\vec{p}_F, \vec{k}} \approx \frac{k^2}{2m_e} + v_F k \\
 v_F &= \frac{p_F}{m_e} \quad , \quad W_{\vec{p}\vec{p}'} \rightarrow W_{\vec{k}+\vec{p}_F, \vec{k}'+\vec{p}_F} = U_{\vec{k}\vec{k}'}
 \end{aligned} \tag{9.20}$$

Ako u sistemu bozona ne dolazi do Bose kondenzacije tada novi hamiltonijan ne daje ništa bitno novo u odnosu na standardnu BCS teoriju. Međutim, u slučaju kada dolazi do Bose kondenzacije dobijamo potpuno različitu fizičku situaciju, koju treba razmotriti metodom Bogoliubova /49/.

U skladu sa tom teorijom, za operatore kondenzatnih bozona stavićemo:

$$B_O^+ = B^+ = \sqrt{N_O} \tag{9.21}$$

gde je N_O broj kondenzatnih bozona. Ako sada izjednačimo sa nulom

hamiltonijan $\tilde{H}^{(1)}$ koji je linearan po Bose operatorima, za funkcije $u_{\vec{k}}$ i $v_{\vec{k}}$ dobijamo sledeće uslove:

$$\left. \begin{aligned} v_0 &= u_0 = \pm \frac{1}{2} \\ u_{\vec{k}} &= \pm \frac{1}{2} \left(1 + \frac{E(\vec{k})}{\sqrt{E^2(\vec{k}) + \Phi_k^2}} \right) \\ v_{\vec{k}} &= \pm \frac{1}{2} \left(1 - \frac{E(\vec{k})}{\sqrt{E^2(\vec{k}) + \Phi_k^2}} \right) \end{aligned} \right\} \quad (9.22)$$

gde je

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{\vec{k}} &= \Delta_{\vec{k}} - \delta_{\vec{k}}, \quad \Delta_{\vec{k}} = \frac{1}{V} \sum_{\vec{k}'} U_{\vec{k}\vec{k}'} \sqrt{u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'}} \\ \delta_{\vec{k}} &= \frac{U_{0\vec{k}}}{V} \end{aligned} \right\} \quad (9.23)$$

Na ovom mestu važno je istaći da sa ovakvim izborom funkcija u_0 i v_0 , svi efekti koji potiču od članova hamiltonijana koji opisuju kinematičku interakciju (dodatni članovi koji su posledice egzaktnе Bose reprezentacije Pauli operatora) se uključuju samo u energiju osnovnog stanja. Što se tiče zakona disperzije, to praktično znači da se on može dobiti jednostavno zamenom Pauli operatora u hamiltonijanu (9.10) sa Bose operatorima. U isto vreme, takvim izborom funkcija u_0 i v_0 , svi fizički rezultati su nesavrsni od izbora znaka u uslovu $u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} = \pm 1$.

Imajući u vidu uslove (9.22), za dijagonalni deo hamiltonijana dobijamo:

$$\tilde{H}_d^{(2)} = \sum_{\vec{k} \neq 0} \sqrt{E^2(\vec{k}) + \Phi_k^2} (B_{\vec{k}}^\dagger B_{\vec{k}} + B_{-\vec{k}}^\dagger B_{-\vec{k}}) \quad (9.24)$$

Za izračunavanje energetskog gепа $\Delta_{\vec{k}}$, na osnovу formula (9.22) i (9.23) dobijамо sledećу integralnu jednačину:

$$\Delta_{\vec{k}} = \frac{1}{2V} \sum_{\vec{k}'} \frac{U_{\vec{k}\vec{k}'} (\Delta_{\vec{k}'} - \delta_{\vec{k}'})}{\sqrt{E^2(\vec{k}') + (\Delta_{\vec{k}'} - \delta_{\vec{k}'})^2}} \quad (9.25)$$

Kao što se vidi iz gornjег izlaganja, основна разлика између ових резултата и резултата BCS теорије јесте у појави члана $\delta_{\vec{k}}$ у енергетском гепу $\Phi_{\vec{k}}$, који је последица постојања кондензатних бозона. Ако је $\delta_{\vec{k}} = 0$, гornji резултати идентични су са резултатима BCS теорије.

Analizirajмо сада енергетски геп $\Phi_{\vec{k}}$, уз неке апроксимације. Ако занемаримо у гепу $\Phi_{\vec{k}}$ зависност од импулса \vec{k} и бозонски систем посматрамо у апроксимацији тврдих сфера (узимамо да је маса бозона приближно једнака маси електрона и да је дужина разсјаја приближно $5 \cdot 10^{-8}$ cm), за геп Φ у случају да је $\Phi \gg v_F p_G$ добijамо sledeћу вредност:

$$\Phi = -4 C_0 [eV] \quad (9.26)$$

где је $C_0 = \frac{N}{V}$ и N - укупни број електрона. Ако узмемо да је $v_F \approx 10^7$ cm s⁻¹, $p_G \approx 10^{-22}$ g cm s⁻¹, услов $\Phi \gg v_F p_G$ биće испуњен ако је

$$C_0 \gg 10^{-3} \quad (9.27)$$

Обзиром да је енергетски геп пропорционалан температуре пре лаза из суперпроводне у нормалну fazу (formula (2.35)), ако се на неки начин постigne висока концентрација кондензатних бозона ($C_0 \approx 1$ napr.) из (9.26) sledi да је суперпроводљивост могућа и на врло високим температурама. Овај резултат, који је без сумње врло интересантан, (у BCS теорији такав се резултат не може добити, јер је $\Delta_{BCS} \approx p_G v_F$), захтева ипак допунска објашњења, нарочито кад је у пitanju

superprovodnosti na visokim temperaturama. Praktična težnja koja praktična konstatacija superprovodnika na niskim temperaturama.

Kao što se vidi iz izloženog, ovde je uveden nov model superprovodnika. Treba pre svega objasniti da se ovde zaista radi o novom modelu, a ne o jednoj varijanti BCS teorije. Bogoliubov je pokazao /50/, da rezultati BCS teorije predstavljaju maksimum koji se iz BCS modela može izvući. Drugim rečima nikakvo novo reprezentovanje Pauli operatora ili povećanje tačnosti pri rešavanju ne-linearne integralne jednačine za gip ne mogu bitno izmeniti do sada dobijene zaključke.

U prilazu koji je ovde korišćen prelaz na novi model učinjen je na onom mestu gde se beskonačni bosonski redovi koji reprezentuju Pauli operatore zamenjuju polinomima trećeg odnosno četvrtog reda. Korišćenje celokupnog reda dovelo bi do rezultata BCS teorije.

Osnovna fizička ideja koja leži u ovom novom modelu je ta da se kinematička interakcija, čiji su delovi zanemareni, troši u procesu stvaranja superprovodnika na vezivanje elektrona u stabilne parove. Odavde je očigledno da se ovaj model ne odnosi na superprovodnike prve vrste (čiste metale) već samo na intermetalna jedinjenja kao superprovodnika. Model daje ideju da prilikom izgradnje intermetalnog jedinjenja treba birati takve komponente koje se vezuju homeopolarnim silama dva elektrona, tako da sam par elektrona predstavlja vezivni element intermetalnog jedinjenja. Jedno od intermetalnih jedinjenja ovog tipa bilo bi smeša litijuma i kalaja u odnosu 1 : 1 . O ostalim intermetalnim jedinjenjima ovog tipa može se detaljnije videti u referenci /51/.

Treba odmah naglasiti da se napred pomenutim postupkom mogu konstruisati intermetalna jedinjenja sa visokom koncentracijom parova koji prema modelu prezentiranom ovde mogu dovesti do

superprovodnosti na visokim temperaturama. Praktična teškoća koja nastupa u vezi sa ovim sastoji se u tome što su parovi koji obezbedjuju dovoljno veliki gap istovremeno i vezivni elementi samog intermetalnog jedinjenja, pa prema tome bilo kakvo razgradjivanje ovih parova i proticanje superkonduktivne struje dovodi u opasnost hemijsku stabilnost intermetalnog jedinjenja. Nije isključeno da je ovo imao u vidu Matias koji u svojoj knjizi /20/ str. doslovno kaže: "visokotemperaturski superprovodnik se može konstruisati, ali je on hemijski veoma nestabilan".

Uz ovaj rezultat treba reći da je u skladu sa sistemom kvalifikacija, Preus kri-

Kao rezime ovog paragrafa moglo bi se reći, ukoliko su sva rasudjivanja ispravna i ukoliko je i Matias u pravu, da se problem realizacije visokotemperaturskog superprovodnika manje sastoji u tome da se konstruiše intermetalno jedinjenje sa visokim gapom, a više u tome kako da se to jedinjenje ne raspade.

Uz ovaj rezultat treba reći da je u skladu sa sistemom kvalifikacija, Preus kri-

Kao osnovni karakteri su autorizovani L. K. Keldish i uključuju dva faktora:

1) Preus životna vrednost mora biti duže od vrednosti napredovanja aerodinamike novosti, i

2) Integracija kvalifikacija dovodi do kinetičkih jenama sa superfluidnu tečnost.

Ova dva uslova bila su provjeravane sa svim previdbenim sistemima sa superfluidnom osnovom lepljivom.

U glosi II analisirana je Boe konsenzacija u skladu sa optičkim pobudjenju molekularnih kristala. Iz Preus sistema kvalifikacija je apsolutna velikina koncentracije sa kemijskim signifikativnim

Z A K L J U Č A K

na naredi neodričenja podneđene predložene. Navedeno je ispitano mogućnost kondenzacije novih elektronskih valova - polarnih. Povezano je da u uslovima kondenzacije najbolje rezultanti veliči spektar daju oblik tanke toruse - polarnih.

U Glavi I disertacije izložene su u osnovnim crtama teorija superfluidnog stanja tečnog He^4 i teorija superprovodljivosti metala. Kao što je poznato obe ove teorije objašnjavaju fenomen Bose kondenzacije i njegove posledice u sistemu čestica. Da li razmatranja u ovoj glavi posvećena su analizi mogućnosti da se superfluidno stanje realizuje u sistemu kvazičestica. Prema kriterijumima koji su danas prihvaćeni od većine teoretičara Bose kondenzacija u sistemu kvazičestica je:

- a) statistička fluktuacija, a ne stalan proces;
- b) u sistemu kvazičestica nema superfluidnog prenosa mase već energije, impulsa i drugih karakteristika;
- c) ona je moguća samo ako se sistem kvazičestica ponaša kao slabonidealni Bose gas, tj. ona je rezultat interakcije kvazičestica.

Kao osnovni, korišćeni su kriterijumi L.V. Keldiša i oni su dvojaki:

- 1) Vreme života kvazičestica mora biti duže od vremena uspostavljanja termodinamičke ravnoteže, i
- 2) interakcija kvazičestica dovodi do kinetičkih jednačina za superfluidnu tečnost.

Ova dva uslova bila su proveravana za sve kvazičestične sisteme čije su superfluidne osobine ispitivane.

U glavi II analizirana je Bose kondenzacija u sistemu optičkih pobudjenja molekularnih kristala. Za Frenkelove eksitone nadjen je spektar u uslovima kondenzacije sa korelacijama koje slede:

de usled neodržanja nadkondenzatnih eksiton. Takodje je ispitana mogućnost kondenzacije normalnih elektromagnetskih talasa - polaritona. Pokazano je da u uslovima kondenzacije najbolje populisani delovi spektra imaju isti oblik kao fononsko - rotorska kriva Landaua za tečni helijum. U ovoj glavi je takođe ispitivan uticaj mehaničkih oscilacija na kondenzaciju eksiton. Ispostavilo se da u nekim intervalima impulsa fononi mogu da dovedu do pojave Bose kondenzacije eksiton. U nekim drugim intervalima impulsa virtualna razmena fonona dovodi do obrazovanja eksitonskih kaplji koje takođe imaju pozitivan minimum fazne brzine pa se prema tome mogu kretati bez trenja.

Treba naglasiti da je prilikom ispitivanja uticaja mehaničkih oscilacija na Bose kondenzaciju eksiton korišćen redefinisihamiltonijan eksiton - fonon interakcije, čije su detaljno izvodjenje i neke posledice date u apendiksu B. Osnovna ideja se sastoji u tome, da se po pomacima centra mase molekula razvijaju ne samo matrični elementi interakcije nego i eksitonski operatori. Ova ideja inspirisana je Doplerovim efektom u zagrejanim gasovima a testirana je na poznatom Urbahovom (Urbach) pravilu, gde je dala izvanredno dobro slaganje sa eksperimentom. Eksiton - fonon interakcija u svojoj standardnoj formi ne može da objasni Doplerov efekat, a u slučaju Urbahovog pravila dovodi do katastrofalnih neslaganja sa eksperimentom.

U Glavi III analizirana je Bose kondenzacija i superfluidnost u sistemu spinskih talasa. Pokazano je da je ona mogućna samo u onim slučajevima kada se feromagnet nalazi u jakom spoljašnjem magnetnom polju. Spektar je ispitivan dijagramskom tehnikom Beljajeva, a najinteresantniji je svakako zaključak o pojavi "magnonskog zvuka" u sistemu nadkondenzatnih magnona sa malim impulsima.

U ovoj glavi dat je i novi model superprovodnika. Osnovna ideja za novi model su stabilni kuperovski parovi čiju stabilnost treba obezbiti prilikom konstrukcije provodnika. Ako se u ovome uspe onda provodnik može biti superprovodan i na daleko višim temperaturama od dosad poznatih. Predložena je i realizacija superprovodnika ovog tipa i to bi bila intermetalna jedinjenja sa kovalentno spregnutim elektronskim parovima kao vezivnim elementom samog jedinjenja. Očigledno je da kretanje ovakvih parova, koje dovodi do superkonduktivnosti, istovremeno razgradjuje jedinjenje, pa bi se uopšteno moglo reći da se ovim modelom problem superkonduktivnosti prebacuje na drugi teren: umesto da se traži visok energetski gep, treba tražiti uslove za hemijsku stabilizaciju materijala u kome visok energetski gep već postoji.

Sve izvršene analize pokazuju da prisustvo kondenzata u sistemu kvazičestica daje sistemu čitav niz novih osobina koje su interesantne i sa teorijske i sa praktične tačke gledišta. Nažalost u ovoj oblasti eksperimenti prilično zaostaju za teorijom, pa danas nemamo čak ni pouzdane eksperimentalne testove za rezultate teorijskih analiza, a još više smo vremenski udaljeni od praktične realizacije efekata koji se za sada samo teorijski predviđaju.

A P E N D I K S

A. Operator elektron-fonon interakcije

Na konstantnoj elektronskoj mrežici, po čemu u zavisnosti funkcija od periodičnosti Hamiltonijan sistema elektrona koji se kreću u periodičnom polju kristala može se napisati u sledećem obliku:

$$H = \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^{\dagger} a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}\vec{m}} V_{\vec{n}\vec{m}} a_{\vec{n}}^{\dagger} a_{\vec{m}} \quad (\text{A.1})$$

Oznake koje su ovde upotrebljene imaju sledeći smisao:

$E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ - kinetička energija elektrona

$a_{\vec{k}}^{\dagger}$ i $a_{\vec{k}}$ - kreacioni i anihilacioni operatori elektrona sa impulsom \vec{k}

$V_{\vec{n}\vec{m}}$ - matrični elementi operatora periodičnog kristalnog polja u kojem se kreće posmatrani elektron

$a_{\vec{n}}^{\dagger}$ i $a_{\vec{m}}^{\dagger}$ - kreiraju odnosno anihiliraju elektrone u čvorovima rešetke \vec{n} i \vec{m} .

Hamiltonijan (A.1) napisan je pod predpostavkom da joni kristalne rešetke miruju u svojim ravnotežnim položajima. Ukoliko je temperatura različita od nule, joni počinju da osciluju oko svojih ravnotežnih položaja, što matematički možemo izraziti na sledeći način:

$$\vec{n} \rightarrow \vec{n} + \vec{u}_{\vec{n}} \quad ; \quad \vec{m} \rightarrow \vec{m} + \vec{u}_{\vec{m}} \quad (\text{A.2})$$

gde su $\vec{u}_{\vec{n}}$ i $\vec{u}_{\vec{m}}$ pomeraji jona iz ravnotežnog položaja i očigledno su funkcije koordinata i vremena.

Pošto su matrični elementi $V_{\vec{n}\vec{m}}$ kristalnog polja funkcije samo razlike vektora \vec{n} i \vec{m} možemo pisati:

$$V_{\vec{n}\vec{m}} \approx V(\vec{n}-\vec{m}) \rightarrow V[\vec{n}-\vec{m} + (\vec{u}_{\vec{n}}-\vec{u}_{\vec{m}})]$$

Pri niskim temperaturama pomeraji \vec{u}_n i \vec{u}_m su mali u odnosu na konstantu kristalne rešetke, pa ćemo u razvoju funkcije V po jonskim pomeranjima zadržati samo linearne članove.

$$V[\vec{n}-\vec{m}] + (\vec{u}_{\vec{n}} - \vec{u}_{\vec{m}}) = V(\vec{n}-\vec{m}) + (\vec{u}_{\vec{n}} - \vec{u}_{\vec{m}}) v_{\vec{n}\vec{m}} V(\vec{n}-\vec{m}) \quad (A.3)$$

Ako vrednost matričnog elementa iz (A.3) zamenimo u hamiltonijan (A.1) on dobija dopunski član koji karakteriše interakciju elektrona sa oscilacijama rešetke, ili kraće, elektron-fonon interakciju. Formulu (A.1) možemo prema tome napisati u obliku:

$$\tilde{H} = H + H_{int} \quad (A.4)$$

gdje je

$$H = \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}, \vec{m}} V(\vec{n}-\vec{m}) a_{\vec{n}}^+ a_{\vec{m}} \quad (A.5)$$

$$H_{int} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{n}, \vec{m}} v_{\vec{n}-\vec{m}} V(\vec{n}-\vec{m}) a_{\vec{n}}^+ a_{\vec{m}} (\vec{u}_{\vec{n}} - \vec{u}_{\vec{m}}) \quad (A.6)$$

Poslednji izraz upeava i predstavlja hamiltonijan elektron-fonon interakcije.

Hamiltonijan elektron-fonon interakcije napisaćemo u impulsnoj reprezentaciji, koja je pogodnija za analizu elektron-fonon interakcije. U tom cilju u izrazu (A.6) izvršićemo sledeće Furije transformacije:

$$V(\vec{n}-\vec{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}_1} v_{\vec{k}_1} e^{i\vec{k}_1(\vec{n}-\vec{m})}$$

$$a_{\vec{n}}^+ = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{\vec{k}_2} a_{\vec{k}_2}^+ e^{-i\vec{k}_2 \vec{n}}$$

$$a_{\vec{m}} = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}} e^{i\vec{k} \vec{m}}$$

dok ćemo pomeraje \hat{u}_n^+ i \hat{u}_m^+ razložiti po fononskim operatorima b_q^+ i b_q^{\dagger} na standardan način:

$$\hat{u}_n^+ = \sum_{\vec{q}j} \left(\frac{\hbar}{2MN\omega_{qj}^+} \right)^{1/2} \hat{l}_{qj}^+ (b_{-\vec{q}j} + b_{\vec{q}j}^{\dagger}) e^{-i\vec{q}\vec{n}} \quad (\text{A.7})$$

U gornjoj formuli M je masa jona, indeks j numeriše tri polarizacije fonona, vektori \hat{l}_{qj}^+ su polarizacioni vektori i

$$\omega_{qj}^+ = c_j |\vec{q}| = c_j q \quad (\text{A.8})$$

su frekvence za fonone odgovarajuće polarizacije (c_j su brzine prostiranja zvuka za longitudinalnu i dve transverzalne fononske grane).

Pošto na niskim temperaturama elektron interaguje isključivo sa longitudinalnim fononima, u izrazu (A.7) izostavicemo sumu po j i zadržati samo longitudinalnu komponentu za koju ćemo uzeti ove oznake:

$$\omega_{qj}^+ \rightarrow \omega_q^+ = cq \quad , \quad \hat{l}_{qj}^+ \rightarrow \hat{l} || \vec{q}$$

$$b_{\vec{q}j}^+, b_{\vec{q}j}^{\dagger} \rightarrow b_{\vec{q}}^+, b_{\vec{q}}^{\dagger}$$

Ako imamo u vidu da je

$$\nabla_{\vec{n}-\vec{m}}^+ V(\vec{n}-\vec{m}) = \nabla_{\vec{n}-\vec{m}}^+ \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}_1} v_{\vec{k}_1}^+ e^{i\vec{k}_1(\vec{n}-\vec{m})} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}_1} \vec{k}_1 v_{\vec{k}_1}^+ e^{i\vec{k}_1(\vec{n}-\vec{m})}$$

možemo pisati

$$\begin{aligned} H_{\text{int}} &= \frac{i}{2N^{5/2}} \sum_{\vec{k}\vec{q}\vec{k}_1\vec{k}_2} \left(\frac{\hbar}{2M\omega_q^+} \right)^{1/2} \vec{k}_1 \hat{l}_q^+ v_{\vec{k}_1}^+ a_{\vec{k}_2}^{\dagger} a_{\vec{k}}^{\dagger} \times \\ &\times (b_{-\vec{q}}^+ + b_{\vec{q}}^{\dagger}) \sum_{\vec{n}\vec{m}} \{ e^{i\vec{n}(\vec{k}_1-\vec{k}_2-\vec{q}) + i\vec{m}(\vec{k}-\vec{k}_1)} - e^{i\vec{n}(\vec{k}_1-\vec{k}_2) + i\vec{m}(-\vec{k}_1+\vec{k}_2-\vec{q})} \} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Uzimajući u obzir da je:

$$\sum_n e^{in(\vec{k}-\vec{q})} = N \delta_{\vec{k},\vec{q}}$$

izraz (A.9) možemo konačno napisati u sledećem obliku:

$$H_{int} = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{\vec{k}\vec{q}} F(\vec{k},\vec{q}) a_{\vec{k}-\vec{q}}^+ a_{\vec{k}}^- (b_{-\vec{q}} + b_{\vec{q}}^+) \quad (A.10)$$

gde je

$$F(\vec{k},\vec{q}) = \frac{i}{2} \left(\frac{\hbar}{2M\omega_q^+} \right)^{1/2} [k_I^+ v_{\vec{k}}^- (\vec{k}-\vec{q}) I_{\vec{q}}^+ v_{\vec{k}-\vec{q}}^-] \quad (A.11)$$

B. Operator eksiton-fonon interakcije

Hamiltonijan eksiton-fonon interakcije u standardnom obliku dobija se na sledeći način. Polazimo od eksitonskog hamiltonijana, kojeg ćemo napisati odmah preko Bose operatora (u Hajter-London-ovoj aproksimaciji):

$$H = \sum_n \Delta B_n^+ B_n^- + \sum_{nm} D_{nm}^+ B_m^+ B_n^- + \sum_{nm} M_{nm}^+ B_m^+ B_n^- \quad (B.1)$$

gde je Δ - energija eksitacije izolovanog molekula, a D_{nm} i M_{nm} su matrični elementi operatora dipol-dipolne interakcije među molekulima kristala.

Ovako napisan hamiltonijan važi za slučaj kada se svi molekuli nalaze u svojim ravnotežnim položajima, tj. ne uzimaju se u obzir njihove oscilacije. Oscilovanje molekula oko ravnotežnih položaja matematički ćemo izraziti slično kao i u Apendiksu A, tj.

$$\vec{n} \rightarrow \vec{n} + \vec{u}_n^+ \quad ; \quad \vec{m} \rightarrow \vec{m} + \vec{u}_m^+ \quad (B.2)$$

Pomeranje molekula iz ravnotežnih položaja \vec{u}_n^+ i \vec{u}_m^+ na niskim temperaturama možemo tretirati kao veličine koje su mnogo manje od konstante kristalne rešetke, tako da matrične elemente D_{n-m}^{+} i M_{n-m}^{+} možemo razviti u red po malim pomeranjima molekula, tj. možemo pisati:

$$D_{n-m}^{+} + D_{n+\vec{u}_n^+-\vec{u}_m^+-\vec{u}_m^+}^{+} = D_{n-m}^{+} + (\vec{u}_n^+-\vec{u}_m^+) V_{n-m}^{+} D_{n-m}^{+} + \dots \quad (B.3a)$$

$$M_{n-m}^{+} + M_{n+\vec{u}_n^+-\vec{u}_m^+-\vec{u}_m^+}^{+} = M_{n-m}^{+} + (\vec{u}_n^+-\vec{u}_m^+) V_{n-m}^{+} M_{n-m}^{+} + \dots \quad (B.3b)$$

Ako sada matrične elemente iz (B.3a) i (B.3b) vratimo u (B.1), eksitonski hamiltonijan će dobiti očigledno neke dodatne članove koji upravo i karakterišu eksiton-fonon interakciju. Predjemo li u impulsni prostor, pomoću Furije transformacija

$$B_n^{+} = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^{+} e^{i\vec{k}\vec{n}}$$

$D_{n-m}^{+} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} D_{\vec{k}}^{+} e^{i\vec{k}(\vec{n}-\vec{m})}$
 $M_{n-m}^{+} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} M_{\vec{k}}^{+} e^{i\vec{k}(\vec{n}-\vec{m})}$

Izrazimo eksiton-fonon interakciju u karakterističnim eksiton-fononskim procesima. Osim onih u kojima su uključeni eksiton-fononski procesi, obzirom da je eksiton-fonon interakcija jake izraze, možemo u razliku od (B.1) da eksponentijske funkcije razvite u red po malim pomeranjima \vec{u}_n^+ i \vec{u}_m^+ (fononski pomeraji) i zadržati one i pomeranja molekula \vec{u}_n^+ i \vec{u}_m^+ izrazimo preko fononskih operatora formulom (A.7), operator eksiton-fonon interakcije, u impulsnoj reprezentaciji, dobija sledeći oblik:

$$\tilde{H}_{int} = \frac{i}{N^{1/2}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}, \vec{j}} \left(\frac{\hbar}{2m\omega_{qj}^{+}} \right)^{1/2} \{ D_q^{+} (\vec{q} \vec{l}_{qj}^{+}) + M_k^{+} (\vec{k} \vec{l}_{qj}^{+}) + M_{k-q}^{+} [(\vec{k}-\vec{q}) \vec{l}_{qj}^{+}] \} B_{\vec{k}-\vec{q}}^{+} B_{\vec{k}}^{+} (b_{-\vec{q}j}^{+} + b_{qj}^{+}) \quad (B.4)$$

Nova ideja u prilazu eksiton-fonon interakciji sastoji se u tome da i eksitonske operatorne B_n^+ i $B_{n+u_n}^+$ možemo smatrati kao funkcije vektora kristalne rešetke \vec{n} te i njih možemo razviti u red po malim pomerajima rešetke \vec{u}_n^+ . Detaljno je ovaj novi prilaz eksiton-fonon interakciji razmatran u radu /43/, a ovde ćemo samo ukratko pokazati do kakvih promena dovodi u odnosu na standardni hamiltonijan eksiton-fonon interakcije (B.4)

Na osnovu onog što je upravo rečeno možemo pisati:

$$B_n^+ \rightarrow B_{n+u_n}^+ = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}}^+ e^{i\vec{k}(\vec{n}+\vec{u}_n^+)} \quad (B.5)$$

pozvana su izvedene uvek u skladu sa zakonom pomeranja i fonona. Na primjer Ullmanovog (Ullman) pravila pokazano je kako novi prilaz eksiton-fonon interakciji dovodi do veljeg slaganja sa eksperimentalnim rezultatima.

$$D_{n-m}^+ + D_{n+u_n^+-m-u_m^+}^+ = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} M_{\vec{k}}^+ e^{i\vec{k}(\vec{n}+\vec{u}_n^+-\vec{m}-\vec{u}_m^+)} \quad (B.6)$$

$$M_{n-m}^+ + M_{n+u_n^+-m-u_m^+}^+ = \frac{1}{N} M \quad (B.7)$$

Zamenom izraza (B.5) i (B.6) u formula (B.1) dobili bi smo hamiltonijan sistema eksitona i hamiltonijan eksiton-fonon interakcije u kojem su uključeni svi multifononski procesi. Obzirom da na niskim temperaturama anharmonizam nije jako izražen, možemo u izrazima (B.5) i (B.6) eksponencijalne funkcije razviti u red po malim veličinama \vec{u}_n^+ i \vec{u}_m^+ (fononski pomeraji) i zadržati onu tačnost koja je dovoljna u konkretnom slučaju. Ako posmatramo samo jednofononske procese, kao u hamiltonijanu (B.4), za hamiltonijan eksiton-fonon interakcije dobijamo sledeći izraz:

$$H_{int} = \frac{1}{N^{1/2}} \sum_{\vec{k}\vec{q}} \left(\frac{\hbar}{2m\omega_q} \right)^{1/2} (\vec{q}\vec{l}_q^+) [\Delta + D_0^+ + M_{\vec{k}}^+ + D_{\vec{k}+\vec{q}}^+ + M(\vec{k}-\vec{q})] B_{\vec{k}-\vec{q}}^+ B_{\vec{k}}^+ (B.7)$$

U ovoj formuli lagerajuće da se tenuog \vec{k} i \vec{q} povezuju u skladu sa elektromagnetskom po-

Uporedjujući formulu (B.7) sa formulom koju daje standardni prilaz (B.4), primećujemo da novi prilaz unosi kao bitnu promenu pojavu energije eksitacije izolovanog molekula (Δ) u hamiltonijan eksiton-fonon interakcije. Time je konstanta eksiton-fonon interakcije povećana za skoro dva reda veličine. Osim toga treba podvući da kod jednofononskih procesa eksitonii interaguju samo sa longitudinalnom fononskom granom dok u standardnom prilazu postoji (doduše veoma slaba) interakcija i sa transverzalnim granama.

Logično je sada postaviti pitanje: koji prilaz eksiton-fonon interakcije bolje objašnjava pojave u kristalooptici povezane sa interakcijom optičkin pobudjenja i fonona. Na primeru Urbahovog (Urbach) pravila pokazaćemo kako novi prilaz eksiton-fonon interakciji dovodi do boljeg slaganja sa eksperimentalnim podacima.

Pod Urbahovim pravilom podrazumeva se empirijski dobijena formula koja opisuje zavisnost koeficijenta apsorpcije svetlosti od temperaturu i ima sledeći oblik:

$$\chi(\omega) = \chi(\omega_0) e^{-\frac{\sigma(\omega_0 - \omega)}{\theta}} \quad (B.8)$$

gde je ω_0 - eksitonska energija, ω - energija upadne svetlosti i θ - temperatura u energetskim jedinicama. σ predstavlja konstantu koja za niz kristala ima vrednost oko jedinice i ne zavisi od kristalne strukture.

Teorijsko objašnjenje Urbahovog pravila bazira na činjenici da je koeficijent apsorpcije svetlosti χ proporcionalan imaginarnom delu tensora dielektrične konstante ϵ_{ij} . Tenzor dielektrične konstante teorijski se može dobiti procedurom koju su prvi razvili Djalušinski i Pitajevski /53/ i koja je detaljno data i u monografiji Agranovića /33/ Gl. IV. Ovde se nećemo zadržavati na detaljima već ćemo spomenuti samo osnovne ideje te procedure.

U osnovi leži činjenica da se tenser ϵ_{ij} može povezati linearnom vezom sa funkcijama Grina elektromagnetskog polja

$G_{ij}(\vec{r}-\vec{r}', t-t') = \langle |\hat{E}_i(\vec{r}, t), \hat{E}_j(\vec{r}', t')| \rangle$ gde su \hat{E}_i i \hat{E}_j operatori komponente vektora jačine električnog polja. Funkcije G_{ij} računaju se tako što se operatori jačine električnog polja razlože po eksitonskim operatorima pa se eksitonske Grinove funkcije izračunavaju tako što se uzima u obzir postojanje eksiton-fonon interakcije. Sam račun je jako glomazan te ga nećemo izvesti već ćemo navesti samo neke rezultate.

Ako hamiltonijan eksiton-fonon interakcije uzmemo u standardnoj formi tada za konstantu σ u formuli (B.8) dobijamo sledeći izraz (/33/ str. 170):

$$\sigma \sim \frac{ma^2 \omega_D^2}{2D_0} \quad (B.9)$$

gde je m - masa molekula, a - konstanta kristalne rešetke, ω_D - Debajeva frekvencija i D_0 - matrični element interakcije molekula. Zamenivši u (B.9) numeričke vrednosti odgovarajućih veličina za organske kristale, za brojnu vrednost konstante σ dobijamo vrednosti od 30 - 50, što je daleko od eksperimentalno izmerene vrednosti ($\sigma \sim 1$).

Koristeći hamiltonijan eksiton-fonon interakcije u novoj slici, odnosno formuli (B.7), za konstantu σ dobijamo sledeći izraz:

$$\sigma = \frac{mv^2}{2\Delta} \quad (B.10)$$

gde je v - brzina zvuka u kristalu, a Δ - energija pobudjenja izolovanog molekula. Zamenivši u (B.10) numeričku vrednost za konstantu σ dobijamo vrednost blisku jedinici, što se odlično slaže sa eksperimentom.

Napomenimo još da je u radu /43/ pomoću hamiltonijana eksiton-fonon interakcije (B.7) izračunato i širenje eksitonskih linija luminescencije usled eksiton-fonon interakcije i da je dobijeno odlično slaganje sa eksperimentalnim rezultatima. Sve to govori u prilog tome da je novi prilaz eksiton-fonon interakciji u dobroj saglasnosti sa eksperimentalnim rezultatima.

L I T E R A T U R A

- /21/ J.M. Blatt, V.F. Weisskopf, PHYSICS OF ELEMENTARY PARTICLES AND FIELDS, Academic Press, New York, 1952.
- /22/ С.А. Бородавко, ВЛИЯНИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА СВЕРХТЕНУЧЕСТЬ, ЖЭТФ, 11, 1 (1941).
- /23/ В.М. Капитонов, СВЕРХТЕНУЧЕСТЬ В МАГНИТНОМ ПОЛЯХ, ЖЭТФ, 11, 581 (1941).
- /24/ И.М. Халатников, ТЕОРИЯ СВЕРХТЕНУЧЕСТИ, Изд. "НАУКА", Москва, 1971.
- /25/ Нэрзон Хуанг, СТАТИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА, Изд. "Мир", Москва, 1966.
- /26/ L. Tisza, Nature, 141, 913 (1938).
- /27/ Л.Д. Ландау, ЖЭТФ, 11, 592 (1941);
ЖЭТФ, 14, 112 (1944).
- /28/ Henshaw, D., Woods, A., Phys. Rev. 121, 1266 (1961).
- /29/ А.А. Абриносов, Л.П. Горнов, И.Е. Дзялошинский, МЕТОДЫ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ В СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ, Физматгиз, Москва, 1962.
- /30/ Feynman, R.P., PROGRESS IN LOW TEMP. PHYS., ed. C.J. Gorter, Vol. 1, Amsterdam, 1955.
- /31/ Feynman, R.P., Phys. Rev., 94, 262 (1954).
- /32/ Sunakawa et. al., Prog. Theor. Phys., 41, 919 (1969).
- /33/ Sunakawa et. al., Prog. Theor. Phys., 44, 565 (1970).
- /34/ H.K. Onnes, Akad. van Wetenschappen (Amsterdam), 14, 113, 818 (1911).
- /35/ J. File, R.G. Mills, Phys. Rev. Letters, 10, 93 (1963).
- /36/ Frölich, H., Phys. Rev., 79, 845 (1950).
- /37/ Cooper, L.N., Phys. Rev., 104, 1189 (1956).
- /38/ Bardeen, J., Cooper, L.N., Schrieffer, J.R., Phys. Rev., 108, 1175 (1957).
- /39/ Н.Н. Боголюбов, Ж ТФ, 34, 58 (1958).
- /40/ А.С. Давыдов, КВАНТОВАЯ МЕХАНИКА, Изд. ФМ Москва 1963.
- /41/ П. де Жен, СВЕРХПРОВОДИМОСТЬ МЕТАЛОВ И СПЛАВОВ, Изд. "Мир" Москва 1968.
- /42/ Matthias, B.T., PROGRESS IN LOW TEMPERATURE, Vol. II, Interscience Publishers, New York 1957.

- /21/ J.M. Blatt, K.W. Böer, W. Brand, Phys. Rev., 126, 1261 (1962)
- /22/ С.А. Мосаленко, ФТТ, 4, 276 (1962)
- /23/ R.C. Casella, Jour. Appl. Phys., 34, 1703 (1963)
- /24/ Л.В. Нелдиш, А.Н. Козлов, ЖЭТФ, 54, 978 (1968)
- /25/ В.М. Агранович, Б.С. Тошич, ЖЭТФ, 53, 149 (1967)
- /26/ P. Bocchieri, F. Seneci, Nuovo Cimento, 18 B, 392 (1965)
- /27/ В.А. Гергель, Р.Ф. Назаринов, Р.А. Суриев, ЖЭТФ, 53, 566 (1962)
- /28/ В.А. Гергель, Р.Ф. Назаринов, Р.А. Суриев, ЖЭТФ, 54, 298 (1968)
- /29/ W. Kohn, D. Sherrington, Rev. Mod. Phys., 40, 1 (1970)
- /30/ И.В. Нелдиш, ИНГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЭКСИТОНОВ, У КНИЗИ
ПРОБЛЕМЫ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ, "Наука"
Москва 1972.
- /31/ Р. Нокс, ТЕОРИЯ ЭКСИТОНОВ, Изд. "Мир", Москва 1966.
- /32/ В.М. Агранович, В.Л. Гинзбург, КРИСТАЛООПТИКА С УЧЕТОМ
ПРОСТОРАНСТВЕННОЙ ДИСПЕРЕИИ И ТЕОРИЯ ЭКСИТОНОВ
Изд. "Наука" 1965.
- /33/ В.М. Агранович, ТЕОРИЯ ЭКСИТОНОВ, Изд. "Наука", Москва 1968.
- /34/ S.D. Stojanović, B.S. Tošić, Zbornik radova Prirodno-mat.
fakulteta, Novi Sad, 1973.
- /35/ Henrik Konvert: Privatno saopštenje
- /36/ И.М. Лифшиц, ЖЭТФ, 18, 293 (1948)
- /37/ О.А. Дубовский, Ю.В. Конобеев, ФТТ, 7, 945 (1965)
- /38/ Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц, ИНВАНТОВАЯ МЕХАНИКА, Физматгиз 1963.
- /39/ М. Лэнс, ФЛУНТУАЦИИ И ИНГЕРЕНТНЫЕ ЯВЛЕНИЯ, Изд. "Мир" 1974.
- /40/ F.W. Cummings, J.R. Johnston, Phys. Rev., 151, No. 1, 105
(1966)
- /41/ С.В. Тябликов, МЕТОДЫ ИНВАНТОВОЙ ТЕОРИИ МАГНЕТИЗМА, Изд. "Наука"; Москва 1965.
- /42/ В. Гаитлер, ИНВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ, НЛ, Москва 1956.
- /43/ D.V. Kapor, S.D. Stojanović, M.J. Škrinjar, B.S. Tošić,
"Redefinicija hamiltonijana eksiton-fonon interakcije i neke posledice" (poslato u štampu)
- /44/ D.B. Chesnut, Journal of Chem. Phys., 41(2), 472 (1964)
- /45/ N. Nagasawa et al., Jour. of the Physical Soc. of Japan,
38(2), 593 (1975)

- /46/ Дж. Бирнс, СЦИНТИЛЛАЦИОННЫЕ СЧЕТЧИКИ, ИЛ, Москва 1955.
- /47/ O. Simpson, Proc. Roy. Soc., A 238, 402 (1957)
- /48/ V. Veljković, D.I. Lalović, Phys. Rev., B 11, No. 11,
4242 (1975)
- /49/ N.N. Bogoliubov, Journ. of Phys., 9, 23 (1947)
- /50/ Н.Н. Боголюбов, Собранные сочинения, Том I, II, III,
Изд. "Наука" 1969 - 1971.
- /51/ V. Veljković, B.S. Tošić, J. Janjić, Scripta Metallurgica
Vol. 9 (1975)
- /52/ С.Т. Беляев, ЖЭТФ, 34, 417 (1958)
433 (1958)
- /53/ M.J. Škrinjar, B.S. Tošić, Phys. Stat. Sol., 31, 757 (1969)
- /54/ И.Е. Дзялошинский, Л.П. Питтаевский, ЖЭТФ, 36, 1797 (1959)