УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
ДЕПАРТМАН ЗА ФИЗИКУ

# Теорема виријала у астрофизици

- Дипломски рад -

Кандидат:
Марина Павловић

Ментор:
Проф. др Милан Пантић

Нови Сад, септембар 2017.

*Овим путем се захваљујем ментору проф.др Милану Пантићу, на конструктивним сугестијама и одвојеном времену за израду рада и на свесрдној подршци и помоћи. Такође, захваљујем се свим професорима на пренесеном знању и стрпљењу у току студија.*

*Велико хвала мојој породици, пријатељима и колегама који су увек били уз мене и пружали ми подршку.*

# Садржај

# УВОД

Слободно се може рећи да већина студената физике препознаје име Теорема Виријала, мало њих може да је дефинише тачно и да препозна њену величину. То је углавном резултат њеног разноликог развоја и донекле непознатог порекла. Један од циљева физике 19. века, био је развој свеобухватне теорије о понашању затворених гасова, што је резултовало у оно што је данас познато као термодинамика и статистичка механика.

Теорема виријала је у последњем веку све више примењивана за решавање фундаменталних проблема у физици, а поготово у астрофизици, космологији, молекуларној физици и квантној механици и у статистичкој механици. Упркос њеној великој корисности, бројним применама и једноставношћу, теорема виријала се ретко помиње у основним курсевима физике.

На самом почетку, упознаћемо се мало са историјатом и развојем теореме виријала и са њеним основним извођењем. Највећи део овог рада биће посвећен примени теореме виријала у звезданој астрофизици са посебним освртом на системе у којима су присутна магнетна поља и ротациона кретања. Као пример навешћемо стабилност белих патуљака и неутронских звезда, као типови објеката који су до сада најмање истражени. За сам крај и увид у невероватну моћ ове теореме, навешћемо њену примену у модерној физици. Најлепши примери примене теореме у физици новог доба јесте свет квантно-механичких система и прве хипотезе о постојању тамне материје у астрофизици.

# Поглавље 1

## 1. Кратки историјски преглед

У великој мери инспирисан радом Карнота на топлотним моторима, Клаузијус започиње дуго истраживање о механичкој природи топлоте 1851. године. Ова двадесетогодишња студија довела је до формулисања онога што сада можемо видети као најранију јасну презентацију теореме виријала. 13. јуна 1870. године Клаузијус је одржао предавање испред Удружења за природне и медицинске науке Доње Рајне. У овом предавању, Клаузијус наводи теорему као "*The mean vis viva of the system is equal to its virial*". У 19. веку, било је уобичајено да се додели латинско име за било коју специјалну карактеристику једног система. Тако, као што је познато свим студентима небеске механике, *vis viva* интеграл је у стварности укупна кинетичка енергија система. Клаузијус се такође осврће латинској речи virias (множина речи Vis), што у преводу значи снага, да би добио име за термин који је укључен у другој половини његове теореме. Ова скаларна величина коју је назвао *Вириал*, може бити представљена у виду сила $F_i$ које делују у систему као $\frac{1}{2}\langle\sum_i F_i \cdot r_i\rangle$, и може бити показано да је ова величина једнака половини потенцијалне енергије система. Дакле, у савременом језику енергије, Клаузијус би закључио да је просечна кинетичка енергија система једнака 1/2 просечне потенцијалне енергије.

Након читавог века труда да теорема постане распрострањена и препознатљива, Рејли формулише генерализацију теореме 1903. године у којој се могу видети почеци тензорске теореме виријала обновљене од стране Паркера и касније интензивно развијенеод стране Чандрасекара 1960. године. Поинкер користи облик теореме виријала из 1911. године да истражи стабилност објеката у различитим теоријама космологије. Током 1940. године Паул Леду развија варијациони облик теореме за добијање пулсационих периода звезда и за испитивање њихове стабилности. Чандрасекар и Ферми продужују теорему виријала 1953. године укључујући присуство магнетног поља.

Године 1772. Краљевска академија наука у Паризу објављује Ј. Л. Лагранжов „есеј о проблему три тела." У овом есеју је развио оно што се може тумачити као Лагранжов идентитет за три тела. Наравно термини као што су "момент инерције", "потенцијал" и "кинетичка енергија" не појављују се, али је основна математичка формулација присутна. Чини се да је ово остао посебан случај повезан са проблемом три тела до зиме 1842-43. године када је Карл Јакоби генерализовао Лагранжов резултат на n-тела. Он наставља у истом поглављу да развија критеријум стабилности код система са n тела који носи његово име. Ово је заиста веома кратак корак од тог тренутка до оног који ће касније бити познат као Класична теорема виријала. Тешко је замислити да је Клаузијус био свестан свог рада. Међутим, постоје неке значајне и битне разлике између Клаузијусове теореме виријала и онога што се може закључити из формулације идентитета Лагранжаод стране Јакобија. Ове разлике су се још више примећивале с обзиром на стање физике током друге половине 19. века. Страст за уједињењем које прожима физику 20-ог века није био постојећи у време Јакобија и Клаузијуса. Истраживања топлоте и класична динамика гравитационих система, сматране су за две различите дисциплине. Формулација статистичке механике која сада даје неку меру јединства између ове две дисциплине није постигнута. Карактеризација својстава гаса у погледу своје унутрашње и кинетичке енергије још није развијена. Сама чињеница да је Клаузијусу потребан нови термин, *вириал*, за теорему, јасно представља проблем за повезивање са унутрашњом енергијом у гасу. Поред тога, иако се користи средње време приликом извођења теореме, јасно се из развоја види да се очекује да ово усредњавање треба тумачити као усредњавање по фази или по ансамблу. Ова чињеница у ствари представља велику разлику између теореме коју је навео Клаузијус и оне која се добија преко Лагранжовог идентитета.

## 1.1 Сама природа теореме

До сада могли смо већ добити осећај за саму примењивост теореме. Не само да је примењива код динамичких и термохемијских система, већ, како ћемо касније видети, ова теорема може да буде формулисана и код релативистичких (у смислу специјалне релативности) система, система са брзинама које зависе од сила које су присутне у самом систему, вискозним системима, системима који показују макроскопска кретања, као што је ротација, системи са магнетним пољима, па чак и неким системима који захтевају општу релативност за њихов опис. Пошто теорема представља основну структуралну везу по којој систем мора да се понаша, применом Клаузијусових варијација за теорему, може се очекивати да она пружи информације о динамичком понашању и начину на који присуство додатних феномена (нпр, ротација, магнетна поља, итд) утичу на то понашање.

У оквиру класичне механике, већина наведених система се може описати решавањем једначина сила које представљају систем. Ове једначине се обично могу добити применом формализама Лагранжа и Хамилтонијана, или из Болцманове једначине кретања. На жалост, те једначине ће, генерално, бити нелинеарне, другог реда, векторске диференцијалне једначине, за које добијамо решења у затвореној форми само у посебним случајевима. Иако та решења могу да се добију нумеричким путем, увид у понашање система као целине је веома тешко добити на овај начин. Међутим,теорема виријала се углавном примењује у скаларној форми на глобалном нивоу. То заиста смањује комплексност из описа векторским путем, за разлику од скалара, који омогућавају директно решавање једначина. Ово упрошћавање доводи до истовременог губитка информација и не можемо очекивати да се добије потпуни опис физичких система, како би било могуће из решавања једначина силе.

Постоје два начина гледања на разлог за ове немогућности успостављања комплетног физичког описа структуре система са становишта енергетске репрезентације. Прво, број одвојених скаларних једначина има мање на располагању са становишта енергије него са становишта силе. Енергетска репрезентација даје једначине које укључују само енергију или скаларе налик енергији док једначине силе, као векторске једначине, дају најмање три одвојене скаларне једначине. Ако сумирамо ове аргументе долазимо до закључка да више информација добијамо од векторских него од скаларних једначина.

Други начин гледања на проблем је, што треба напоменути да су енергије обично први интеграли сила. Интеграција функције води до губљења информација везаних за саму функцију. Стога, пошто је резултат процеса интеграције губитак података, не можемо очекивати од једначине за енергију (која представља први интеграл једначине силе), да добијемо потпуну слику система као што би решење једначине силе дало. Међутим, овај губитак детаљне структуре се донекле компензује. Најпре, у стању је да реши настале једначине због њихове веће једноставности, и друго, може да размотри теже проблеме чија је детаљна формулација тренутно ван оквира савремене физике.

## 1.2 Развој теореме виријала

### 1.2.1 Основне једначине

Пре него што се пређе на извођење теореме виријала, потребно је да се преиспита порекло основних структурних једначина звездане астрофизике. Ово, не само да пружа увид у основне законе очување, имплицитно претпостављаних у опису физичких система, али и по својој општости у потпуности графички илуструје комплексност описа који тежимо да заобиђемо. Сваки опис физичког система почиње имплицитно или експлицитно из одређених закона очувања. За такав систем се сматра да је скуп честица, које су одређене просторном локацијом (координатама) и одређеним импулсом, које се крећу под утицајем познатих сила. Ако се ради о независности координата и импулса, онда се може изградити вишедимензионални простор кроз који ће се честице кретати по јединственим трајекторијама, које ће описивати њихову историју.

Ово је у суштини изјава детерминизма, а у класичном смислу је формулисана са шест-димензионалним простором, који се зове фазни простор, састоји се од три димензије координата и три линеарно независне димензије импулса. Ако посматрамо инфинитезимално малу запремину овог простора, можемо формулисати врло општи закон очувања који једноставно каже да је број честица које прођу кроз ову запремину, једнак броју створених или уништених честица у њој.

Математичка формулација овог закона се обично назива Болцмановом једначином кретања, и узима следећу форму:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \dot{x}_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \sum_{i=1}^{3} \dot{p}_i \frac{\partial \psi}{\partial p_i} = S \qquad (1.2.1)$$

или у векторској нотацији:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \psi + \vec{\mathrm{f}} \cdot \nabla_p \psi = \mathrm{S} \qquad (1.2.2)$$

где ψ претставља густину честица у фазном простору, f је векторска сума свих сила које делују на честице, а S претставља „стопу стварања“ честица у тој запремини. Одређивање ψ, као функцију координата и импулса, даје комплетну слику система. Међутим, ретко се покушава решити ова једначина, већ се она поједностављује уз помоћ једначина звезданих структура. То се обично ради узимањем 'импулса' ових једначина, за различите координате. На пример, узимајући да је интеграл ψ над целокупним простором заправо ρ, густина материје, и да нема честице које могу поседовати неограничен импулс, усредњавањем једначине (1.2.2) по целокупној запремини простора, добићемо:

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathrm{t}} + \nabla \cdot (\vec{\mathrm{u}}\rho) = \bar{S} \qquad (1.2.3)$$

где је u просечна брзина струјања честица дефинисана као:

$$\vec{\mathrm{u}} = \frac{1}{\rho}\int \psi \vec{\mathrm{v}} \mathrm{d}\vec{\mathrm{v}} \qquad (1.2.4)$$

За системе код којих нема стварања и уништавања масе, једначина (1.2.3) представља закон одржања масе. Ако поново помножимо једначину (1.2.2) са брзином честица и усредњимо у односу на укупну просторну брзину, добиће се, након математичког решавања, Ојлер-Лагранжева једначина хидродинамичког протока.

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{t}} + (\vec{\mathrm{u}} \cdot \nabla)\vec{\mathrm{u}} = -\nabla\psi - \frac{1}{\rho}\sigma_{ij} - \frac{1}{\rho}\int S(\vec{\mathrm{v}} - \vec{\mathrm{u}})\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}} \qquad (1.2.5)$$

Овде се претпоставља да су силе f, изведене из потенцијала ψ. Знак $\sigma_{ij}$ претставља тензор пртиска и узима следећу форму:

$$\sigma_{ij} = \int \psi(\vec{\mathrm{v}} - \vec{\mathrm{u}})(\vec{\mathrm{v}} - \vec{\mathrm{u}})\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}} \qquad (1.2.6)$$

Те прилично импресиване једначине можемо знатно поједноставити у случају када многи судари повећају хаотичност кретања честица, у односу на средњу брзину кретања. Под овим условима задњи члан на десној страни једначине (1.2.5) нестаје и тензор притиска постаје дијагоналан са свим једнаким елементима. Његова дивергенција онда постаје градијент скалара познат као притисак гаса P. Ако се размотре само системи који не показују пренос честица долазимо до познате једначине хидростатичке равнотеже

$$\nabla \mathrm{P} = -\rho\nabla\psi \qquad (1.2.7)$$

Множењем ове једначине са v и усредњавањем по v, од Болцманове једначине кретања долазимо до једначине закона одржања импулса. Једначина (1.2.7) и Пуасонова једначина за потенцијал:

$$\nabla^2\psi = -4\pi \mathrm{G}\rho \qquad (1.2.8)$$

граде комплетни закон одржања импулса.

Множењем једначине (1.2.7) са $v^2$, и усредњавањем по свим брзинама, долазимо до закона одржања енергије, који када се комбинује са законима за идеални гас даје:

$$\rho\frac{dE}{dt} + \rho\nabla \cdot \vec{\mathrm{v}} = \rho\varepsilon + \chi - \nabla \cdot \vec{\mathrm{F}} \qquad (1.2.9)$$

Овде је F радијални флукс, ε укупна стопа произведене енергије, а χ је енергија створена вискозним кретањем. Ако у систему немамо никакав пренос масе, и сва енергија потиче од радијације, имамо стање радијационе равнотеже

$$\nabla \cdot \vec{\mathrm{F}} = \rho\varepsilon \qquad (1.2.10)$$

За статичке конфигурације система, са сферном симетријом, ови закони одржања узимају своје познате облике:

Закон одржања масе: $\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho$

Закон одржања импулса: $\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho}{r^2}$ (1.2.11)

Закон одржања енергије: $\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho\varepsilon$ , $L(r) = 4\pi r^2 F$

## 1.3 Класично извођење теореме виријала

Теорема виријала се често наводи у различитим облицима који имају мало различита тумачења. У принципу, ми ћемо поновити верзију коју је дао Клаузијус који изражава теорему виријала као однос између просечне вредности кинетичке и потенцијалне енергије система у стабилном стању или квази-стабилном стању. Пошто је разумевање било које теореме повезано са њеним пореклом, ми ћемо провести неко време приликом извођења теореме виријала из првих постављених принципа. Већина текстова звездане или класичне динамике изводе теорему из Лагранжовог идентитета. Ландау и Лифшиц дали су елоквентану деривацију за одговарајуће електромагнетно поље. Чандрасекар прати приступ Клаузијуса, док Голдстеин даје векторско извођење чврсто укорењено у оригиналном приступу и то је у суштини форма коју ћемо прво развијати. Посматрамо систем са честицама масе $m_i$ и векторима положаја $r_i$ које су подвргнуте примењеним силама (укључујући и принудне силе) $\mathrm{f_i}$. Њутнове једначине кретања за систем су тада

$$\dot{\vec{p}}_i = \frac{d(m_i \vec{v}_i)}{dt} = \vec{f}_i \qquad (1.3.1)$$

Сада дефинишимо

$$G = \sum_i \vec{p}_i \cdot \vec{r}_i = \sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \cdot \vec{r}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \frac{d(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \sum_i m_i \overrightarrow{r_i^2} \right) \qquad (1.3.2)$$

Израз у великој загради представља момент инерције (по дефиницији) тачке, и та тачка је сада почетак координатног система за дате векторе положаја$r_i$. Тада имамо:

$$G = \frac{1}{2} \frac{dI}{dt} \qquad (1.3.3)$$

где је I момент инерције у односу на координатни почетак.

Потражимо извод (1.3.2) по t

$$\frac{dG}{dt} = \sum \dot{\vec{r}_i} \cdot \vec{p}_i + \sum \dot{\vec{p}_i} \vec{r}_i \qquad (1.3.4)$$

При томе је

$$\sum_i \dot{\vec{r}_i} \cdot \vec{p}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{r}_i} \cdot \vec{r}_i = \sum_i m_i \dot{\vec{v}_i}^2 = 2T \qquad (1.3.5)$$

где је T тотална кинетичка енергија система којем одговара дати координатни почетак. Међутим, како је $\dot{p}_i$ стварно примењена сила која делује на систем (видети формулу 1.3.1), можемо једначину (1.3.4) преписати на следећи начин:

$$\frac{dG}{dt} = 2T + \sum_i \vec{f_i} \cdot \vec{r_i} \qquad (1.3.6)$$

Последњи симбол са десне стране је познат као *Вириал Клаузијуса*. Размотримо мало овај вириал. Претпоставимо да се силе $f_i$ изводе из потенцијала. Укупна сила која делује на једну честицу може се добити сумирањем свих сила које на њу делују. Тако:

$$\vec{f_i} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{ij} \qquad (1.3.7)$$

где је $F_{ij}$ сила између i-те и j-те честице. Сада, ако дате силе поштују законе силе и изводе се из потенцијала, онда

$$\vec{F}_{ij} = \nabla_i m_i \Phi(\vec{r}_{ij}) = -\nabla_i a_{ij} \overline{\vec{r}_{ij}^{\,n}} \qquad (1.3.8)$$

Знак минус испред ∇-оператора нам показује да градијент требамо узети из координатног система у чијем почетку се налази i-та честица. Ако у обзир укључимо једначину (1.3.8) имамо

$$\vec{F}_{ij} = -n a_{ij} \vec{r}_{ij}^{\,(n-2)} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \qquad (1.3.9)$$

Како је сила која делује на i-ту честицу од стране j-те честице, супротног смера али потпуно истог интензитета са силом која делује на j-ту честицу од стране i-те честице, једначину можемо написати:

$$\vec{f_i} = \sum_j \vec{F}_{ij} = \sum_{j>i} \vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji} \qquad (1.3.10)$$

Заменом једначине (1.3.10) у дефиницији за вириал Клаузијуса, добијамо

$$\sum_i \vec{f_i} \cdot \vec{r_i} = \sum_i \cdot \sum_{j>i} \vec{F}_{ij} \cdot \vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot \vec{r_j} \qquad (1.3.11)$$

Заменом једначине (1.3.9) затим у једначину (1.3.11) добијамо

$$\frac{dG}{dt} = 2T - nU \qquad (1.3.12)$$

где је U укупна потенцијална енергија. За гравитациони потенцијал n=-1, долазимо до формуле која је позната као Лагражов идентитет

$$\frac{dG}{dt} = \frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} = 2T + \Omega \qquad (1.3.13)$$

Да бисмо дошли до познате форме теореме виријала, морамо једначину усредњити по временском интервалу ($T_0$). Теорема виријала се зато некад назива статистичка теорема. Интегрисањем једначине (1.3.12) добијамо:

$$\frac{1}{T}\int_0^{T_0}\frac{dG}{dt}dt = \frac{2}{T_0}\int_0^{T_0}T(t)dt - \frac{n}{T_0}\int_0^{T_0}U(t)dt \qquad (1.3.14)$$

Затим, користећи дефиницију средње вредности имамо:

$$\frac{1}{T_0}[G(T_0) - G(0)] = 2\bar{T} - n\bar{U} \qquad (1.3.15)$$

Ако је кретање система у времену $T_0$ периодично, онда лева страна једначине (1.3.15) нестаје. Ако је кретање система ограничено ($G(t) < \infty$), онда леву страну једначине можемо смањивати до бесконачности, усредњавањем по дужем временском интервалу. Стога, ако се систем налази у стабилном стању, момент инерције (I), је константан и системом управља гравитација.

$$\boxed{2\bar{T} + \bar{\Omega} = 0} \qquad (1.3.16)$$

Треба напоменути да ова формулација теореме виријала обухвата усредњавање по времену неодређене дужине. Ако неко жели да користи теорему виријала да одреди да ли је систем у убрзаној експанзији или контракцији, мора водити рачуна о томе како добија просечну кинетичку и потенцијалну енергију.

## 1.4 Силе које зависе од брзине и теорема виријала

Постоји додатна карактеристика теореме виријала, како је она наведена у једначини (1.3.16) коју треба поменути. Ако се у силе које делују на систем укључују и оне које зависе од брзине, резултат теореме је непромењен. Да би демонстрирали ово, посматрамо исти систем са масом $m_i$ подвргнут слама $f_i$ који може бити подељене у оне које зависе од брзине ($\overrightarrow{w_i}$), и самосталне силе ($z_i$). Тада једначину кретања можемо написати као:

$$\dot{\vec{p}}_i = \vec{f}_i = \overrightarrow{w_i} + \vec{z}_i \qquad (1.4.1)$$

Ако ово убацимо у једначину (1.3.6), добијамо

$$\frac{dG}{dt} - \sum_i \overrightarrow{w_i} \cdot \vec{r_i} = 2T + \sum_i \vec{z}_i \cdot \vec{r_i} \qquad (1.4.2)$$

Ако се убаце силе које зависе од брзине можемо написати:

$$\overrightarrow{w_i} = \alpha_i \vec{v}_i = \alpha_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} \qquad (1.4.3)$$

Опет можемо усредњити по времену као и у једначини (1.3.12), тада имамо

$$\frac{1}{T_0}\int_0^{T_0}\sum_i \frac{dG}{dt}dt - \frac{1}{T_0}\int_0^{T_0} \alpha_{\,i} \frac{d\vec{r_i}}{dt}\cdot\vec{r_i}dt = 2\bar{T} - n\bar{U} \qquad (1.4.4)$$

где $\bar{U}$ претставља средњу потенцијалну енергију за „независне“ силе. Решавањем интеграла са леве стране добијамо:

$$\frac{1}{T_0}[G(T_0) - G(0)] + \frac{1}{2T_0}\sum_i \alpha_{\,i}\left[\vec{r_i}^{\,2}(T_0) - \vec{r_i}^{\,2}(0)\right] = 2\bar{T} - n\bar{U} \qquad (1.4.5)$$

Тако, ако је кретање периодично, обе величине са леве стране једначине нестају ако је време $T_0$ једнако периоду система.

## 1.5 Репрезентација континуалних поља и теорема виријала

Иако све варијације теореме виријала потичу из система са бесконачно много тачака масе $m_i$, на којима делују силе $f_i$ изведене из потенцијала, корисно је погледати и формализам који укључује системе са континуалном густином материје. Ово се посебно узима у обзир ако се истражују звездане средине, где је оваква репрезентација материје увелико присутна.

Полазимо од једначине (1.3.1) и њеном аналогијом у континуму. Нека се масе $m_i$ добијају множењем густине ρ(r) и инфинитезимално мале запремине ΔV, тако једначина (1.3.1) постаје:

$$\vec{f_i} = \frac{d}{dt}(\rho\vec{v}\Delta V) = \vec{v}\Delta V\frac{d\rho}{dt} + \rho\Delta V\frac{d\vec{v}}{dt} + \rho\vec{v}\frac{d(\Delta V)}{dt} \qquad (1.5.1)$$

Закон одржања масе захтева

$$\frac{dm_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho\Delta V) = \Delta V\frac{d\rho}{dt} + \rho\frac{d(\Delta V)}{dt} = 0 \qquad (1.5.2)$$

Множењем ове једначине са v видимо да су први и последњи члан са десне стране једначине једнаки и супротног знака. Тако, ако дефинишемо „густину сила“ **f**, тако да $f\Delta V = f_i$, можемо прећи на континуалну репрезентацију једначине (1.3.1):

$$f(\vec{r}) = \rho(\vec{r})\frac{d}{dt}[\vec{v}(\vec{r})] = \dot{\vec{p}}(\vec{r}) \qquad (1.5.3)$$

Сада можемо дефинисати $G$ у симболима континуалних величина тако да

$$G = \int_V \vec{p}\cdot\vec{r}dV = \int_V \rho\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\vec{r}dV = \frac{1}{2}\int_V \rho\frac{d}{dt}(\vec{r}\cdot\vec{r})dV = \frac{1}{2}\int_V \rho\frac{d\vec{r}^{\,2}}{dt}dV \qquad (1.5.4)$$

тј.

$$G = \frac{1}{2}\int_V \frac{d}{dt}\left(\rho\vec{r}^{\,2}\right)dV - \frac{1}{2}\int_V \vec{r}^{\,2}\frac{d\rho}{dt}dV \qquad (1.5.5)$$

Како закон о одржању масе захтева да маса у запремини $V$ буде константна, тако цео члан $\frac{dm(V^`)}{dt} = 0$, и дефинишемо подзапремину V` као:

$$\frac{d}{dt}\left(\int_{V^`} \rho dV\right) = \int_{V^`} \frac{d\rho}{dt} dV \qquad (1.5.6)$$

Други интеграл у једначини (1.5.5) узима вредност нула. Ако узмемо да је почетна запремина V довољно велика да садржи све објекте у систему, можемо писати једначину

$$G = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_V \left(\rho\vec{r}^2\right) dV = \frac{1}{2}\frac{dI}{dt} \qquad (1.5.7)$$

Са истим огранчењем на V, можемо дефинисати једначину (1.5.4)

$$\frac{dG}{dt} = \int \left[\vec{p}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} + \vec{r}\cdot\frac{d\vec{p}}{dt}\right] dV = \int \left(\rho\vec{v}^2 + \vec{r}\cdot\vec{f}\right) dV \qquad (1.5.8)$$

Први члан испод интеграла је густина кинетичке енергије, тако да интеграција по запремини претставља кинетичку енергију. Укупна кинетичка енергија у запремини је онда једнака:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2} = 2T + \int \vec{f}\cdot\vec{r} dV \qquad (1.5.9)$$

Значајна пажња се мора применити код рачуна другог члана у једначини (1.5.9) који је у основи вириал Клаузијуса. Након мало математике, директном заменом градијента потенцијала и дефиницији Клаузијусовог вириала добија се

$$\int \vec{f}\cdot\vec{r} dV = -\frac{n}{2}\iint_{VV^`} \rho(\vec{r})\rho(\vec{r}^`)(\vec{r}-\vec{r}^`)\cdot(\vec{r}-\vec{r}^`)(|\vec{r}-\vec{r}^`|)^{n-2} dV^` dV = n\left[\frac{1}{2}\iint_{VV^`} \rho(\vec{r})\rho(\vec{r}^`)(|\vec{r}-\vec{r}^`|)^{n} dV^` dV\right] \qquad (1.5.10)$$

Дупла интеграција представља потенцијалну енергију $\rho(\vec{r})$ у односу на $\rho(\vec{r}^`)$, и $\rho(\vec{r}^`)$ у односу на $\rho(\vec{r})$, то је два пута укупне потенцијалне енергије. Тако, видимо да вириал има исти облик као и код једначине (1.3.12), односно

$$\int \vec{f}\cdot\vec{r} dV = -nU \qquad (1.5.11)$$

Заменом ове форме у једначину (1.5.9) и узимајући n=-1, води до истог закључка као и код Лагранжевог идентитета у форми

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2} = 2T + \Omega \qquad (1.5.12)$$

Тако Лагранжев идентитет и теорема виријала важе код континуалне дистрибуције густине, као што смо могли и да претпоставимо.

Током досадашњег извођења смо прећутно претпостављали да су наведене силе гравитационог порекла као што је сила била -ρ∇Φ. Јасно, ако би сила зависила од неког другог својства материје, процена ће ићи као и до сада са резултатом код ког би вириал поново био-nU, где је U укупна потенцијална енергија система.

# Поглавље 2

## 2. Савремени аспекти теореме виријала

У овом поглављу настављамо са извођењем теореме виријала али на нешто другачији начин, који се користи за савремену употребу. Размотрићемо ефекте релативистичких принципа на извођење теореме виријала, и како велике брзине модификују саму теорему. Поред тога, Лагранжев идентитет је примењљив на системе који нису у равнотежи, па самим тим, можемо увести и релативистичке ефекте. Навешћемо извођења посебно са ефектима специјалне теорије релативности, а посебно у општој теорији релативности, па ћемо на крају навести и неке примене обе од теорија.

Тензорска репрезентација теореме је у ствари покушај да се поврате неке од информација изгубљене приликом решавања скаларних једначина раније описаних. Иако се клица ове идеје може пронаћи већ од 1903. године у раду Рејлија, она се није појављивала све до 1950-тих када су Паркер, Чандрасекар и Ферми нашли концепт, посебно користан у раду са присуством магнетних поља. Концепт је додатно проширио Лебовиц (у низу радова са Чандрасекаром 1960-тих), приликом проучавања разних конфигурација гасова. Међутим, најпрегледније порекло је вероватно оно које је представио Чандрасекар 1961. године и поједностављену верзију овог извођења ћемо представити овде.

Видећемо такође, да увођењем ефеката специјалне релативности, када се брзине система приближавају брзини светлости, мора обавезно доћи до неких промена у односу на класично извођење. Чандрасекар је приликом истраживања белих патуљака видео да се вредност Т приближава Ω, што бисмо и требали да докажемо у даљем опису.

Јако је битно да приликом самог извођења видимо како ће неке компликације, као што су присуство ротације као микроскопског кретања, или система у целини, као и присуство магнетних поља, који су свакако присутни у звезданим системима, утицати на само важење и општост теореме.

### 2.1 Тензорска теорема виријала

У овом тренутку, потребно је истаћи да је извођење у поглављу 1 у суштини потекло из једначина кретања система који се разматра. Извођење поприма облик множењем тих једначина кретања са вектором положаја и сумирањем по целој запремини. Финални корак укључује даље сумирање по времену. То значи да је теорема виријала резултат узимања просторних момената самих једначина кретања и истраживања њиховог временског понашања. Оваквом анализом долазимо до основних закона одржања у физици, па није изненађујуће да и теорема виријала треба да има исту снагу и општост као и ови закони.

Размотримо систем без притиска аналоган оном који је описан у поглављу 1 одељак 2 и занемаримо вискозне силе и микроскопске силе, као што су ротације и магнетна поља. Под овим условима, једначина (1.2.4) постаје:

$$\rho\ \frac{\partial\vec{u}}{\partial \mathrm{t}} + \rho(\vec{\mathrm{u}}\cdot\nabla)\vec{\mathrm{u}} = -\rho\nabla\Phi = \rho\frac{d\vec{\mathrm{u}}}{dt} \qquad (2.1.1)$$

што је у ствари векторска репрезентација једначине (1.2.4) или једначине (1.3.1) у поглављу 1, ми у суштини скаларно множимо једначину (1.2.4) са вектором положаја r и интегралимо по запремини да бисмо добили скаларну једначину. Овде предлажемо да се множе векторски једначине (1.2.1) са вектором положаја, производећи тако тензорску једначину која се може сматрати као скуп једначина које се односе на различите компоненте насталих тензора. Тако, наша почетна тачка је

$$\int_V\ \rho\vec{\mathrm{r}}\frac{d\vec{\mathrm{u}}}{dt}dV = \int_V\ \rho\vec{\mathrm{r}}\,\nabla\Phi\mathrm{dV} \qquad (2.1.2)$$

Члан на десној страни једначине можемо слободно назвати вириалним тензором. Сада као и раније, нека потенцијал буде

$$\Phi(\vec{r}) = \int_{V`}\ \rho\left(\vec{\mathrm{r}`}\right)(|\vec{r}-\vec{r}`|)^n dV` \qquad (2.1.3)$$

Ако сада пратимо потпуно исти поступак као и раније, само користећи векторски производ уместо скаларног, добијамо тензор у облику;

$$\int_V\ \rho\vec{\mathrm{r}}\nabla\Phi\mathrm{dV} = n\left\{\frac{1}{2}\iint_{VV`}\rho(\vec{\mathrm{r}})\rho(\vec{\mathrm{r}}`)(\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}}`)(\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}}`)(|\vec{r}-\vec{r}`|)^{n-2}dV`dV\right\} \qquad (2.1.4)$$

Ако дефинишемо

$$\mathcal{J} = \int_V\ (\rho\vec{\mathrm{r}}\vec{\mathrm{r}})dV$$

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}\int_V\ (\rho\vec{\mathrm{u}}\vec{\mathrm{u}})dV \qquad (2.1.5)$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\iint\limits_{VV`}\rho(\vec{\mathrm{r}})\rho(\vec{\mathrm{r}}`)(\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}}`)(\vec{\mathrm{r}}-\vec{\mathrm{r}}`)(|\vec{r}-\vec{r}`|)^{n-2}dV`dV$$

Једначина (2.1) постаје

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\mathcal{J}}{dt^2} = 2\mathcal{T} + \mathrm{n}\mathcal{H} \qquad (2.1.6)$$

што је у ствари тензорска репрезентација Лагранжевог идентитета, где $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ претставља нешто што називамо тензор момента инерције, $\boldsymbol{\mathcal{T}}$ тензор кинетичке енергије, $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ тензор потенцијалне енергије (видети додатак). Међутим, неки увид у примењивост оваквог приступа се може видети ако развијемо један члан тензорског виријала.

$$\int_V\ \rho\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\frac{d\vec{r}}{dt}\right)dV = \int_{\mathrm{V}}\ \rho\frac{d}{dt}\left(\vec{x}_i\frac{d\vec{x_j}}{dt}\right)dV \qquad (2.1.7)$$

Како је овај тензор очигледно симетричан, користећи закон о одржању масе, добијамо

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\left(\vec{x_i}\frac{d\vec{x_j}}{dt} - \vec{x}_j\frac{d\vec{x_i}}{dt}\right)dV = 0 \qquad (2.1.8)$$

Ова једначина нам једноставно каже да је угаони момент $x_k$ константан.

## 2.2 Специјална теорија релативности и теорема виријала

До сада смо разматрали само теорему виријала која се добија од Њутнове једначине кретања. Будући да су системи као што су бели патуљаци, где је динамички притисак, које је избалансиран са гравитацијом, добијен од честица чије су енергије много веће од енергија које смо до сада посматрали, прикладно је да се истражи у којој мери ћемо морати да модификујемо теорему виријала, тако да укључимо ефекте специјалне релативности. За системе у равнотежи, теорема виријала каже 2T = Ω. Како се брзине честице приближавају брзини светлости, кинетичка енергија се повећава до бесконачности. Ово се може протумачити као резултат неограниченог повећања масе честице. Ово повећање ће утицати на гравитациону потенцијалну енергију, али ефекат је много већи. Тако можемо очекивати, у релативистском систему, да потенцијална енергија мора бити мања од 2T, да би се одржала равнотежа. Закључак до којег је дошао Чандрасекар приликом истраживања унутрашње енергије белих патуљака, да систем постаје релативистички дегенерисан, вредност T се приближава **Ω** и то "мора бити дефиниција теореме виријала за честице које се крећу брзином приближној брзини светлости. "

Да би се добио нешто општији резултат релативистичког облика Лагранжевог идентитета, вратићемо се у дискусију о релативистичкој механици Ландауа и Лифшица, коју смо поменули у поглављу 1. Као што већина дискусија у пољу механике углавном почињу нешто другачијом перспективом, испитајмо кореспонденцију са полазне тачке једначина кретања усвојеним у претходним поглављима. Уопште, већина поставки механике поља почињу са изјавом да

$$\partial \cdot \sigma = 0 \qquad (2.2.1)$$

где је σ, Максвелов тензор напона, а $\boldsymbol{\partial}$ претставља такозвани оператор набла у четири димензије. Ово у суштини значи, да постоји довољно велика запремина у простор-времену, тако да је ван ове запремине Максвелов тензор једнак нули. Ова констатација постаје очигледна ако искористимо Гаусову теорему дивергенције, и добијамо:

$$\int_R \partial \cdot \sigma dR = \int_S \sigma dS = 0 \qquad (2.2.2)$$

Укратко, једначина (2.2.1) представља закон очувања. Већ смо видели да су фундаментални закони очувања физике изведени из Болцманове једначине кретања, као и остале једначине кретања.

У Лоренцовом координатном ситему, Ландау и Лившиц, дају четворокомпонентну брзину честице као

$$U_\alpha = \frac{dx_\alpha}{ds}. \quad \alpha = 0 \dots 3 \qquad (2.2.3)$$

где је ${ds}/{dt} = c(1 - v^2/c^2)^{-1/2} = \gamma c$

Компоненте тензора енергије-импулса су

$$\sigma_{\alpha\beta} = \rho c u_\alpha u_\beta \left({ds}/{dt}\right) \qquad (2.2.4)$$

Како је $\sum_{\alpha=0}^{3} {u_\alpha}^2 = -1$, траг једначине (2.2.4) је

$$\sum_{\alpha=0}^{3} \sigma_{\alpha\alpha} = -\,\rho c^2 \gamma \qquad (2.2.5)$$

У тродимензионом простору, компоненте закона одржања израженог једначином (2.2.1) могу се приказати као

$$\frac{1}{ic}\frac{\partial \sigma_{j0}}{\partial \mathrm{t}} + \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial \sigma_{j0}}{\partial \mathrm{t}} = c\,\frac{\partial(\rho u_j)}{\partial \mathrm{t}} + \sum_{k=0}^{3} \frac{\partial \sigma_{jk}}{\partial x_k} = 0 \qquad (2.2.6)$$

Заменом члана σ, и понављајући математичке операције као код ранијих извођења, добија се

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{d}{dt} \int_V \frac{\rho}{2}\frac{d}{dt}\left(x_j x_j/\gamma\right) dV = \Omega + T + \int_V \gamma\tau dV \qquad (2.2.7)$$

где τ претставља густину кинетичке енергије за релативистичке честице. Поново, користећи закон одржања масе, ово постаје

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2} \int_V \left(\rho x_j x_j/\gamma\right) dV = \Omega + T + \int_V \tau\gamma dV \qquad (2.2.8)$$

где, ако запремински интеграл са леве стране означимо као релативистички момент инерције, можемо писати

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(I_r) = \Omega + T + \int_V \tau\gamma dV \qquad (2.2.9)$$

Ако узмемо лимес $\gamma \to 1$, onda $I_r \to$ I, добијамо већ познати Лагранжев идентитет. У релативистичком лимиту, поправљамо Чандрасекарово решење за стабилне системе као T + Ω = 0. Тако, може се слободно рећи да је једначина (2.2.9) израз за Лагранжев идентитет укључујући и ефекте специјалне релативности.

## 2.3 Општа теорија релативности и теорема виријала

Развој квантне теорије и формулисање опште теорије релативности вероватно представљају два најзначајнија достигнућа физике у двадесетом веку. У светлу опште природе, и широкој примењивости теореме виријала, изненађујуће је да је учињен мали покушај у том периоду да се формулише сама теорема у контексту опште релативности. Можда је то била последица недостатка физичких феномена који захтевају општу релативност за њихов опис.

Друга тачка потешкоће се састоји од природе саме теорије. Општа теорија релативности, као и многе успешне теорије, као што је теорија поља баве се функцијама дефинисаним у тачки.

Практично свака верзија теореме виријала наглашава своју глобалну природу. Ова разлика постаје озбиљан проблем када се покуша да се додели физичко тумачење величина које су представљене просторним интегралима. Проблем дефинисања микроскопских објеката у општој релативности је представљало потешкоћу за дефинисање теорије од самог почетка. Иако је остварен континуирани напредак, не постоји никаква потпуно општа формулација теореме виријала у оквиру опште релативности у овом тренутку. То свакако не значи да таква формулација не може постојати. Заиста, оно што смо до сада видели би требало да убеди чак највећег скептика да таква формулација мора да постоји јер су у основи порекла саме теореме виријала, основни закони одржања у природи. Сада ћемо поближе да погледамо настанак неких од ових проблема. Ово се може постићи узимајући у обзир да су Ајнштајнове једначине и чланови у њима реда $1/c^2$. То је приступ који је усвојио Ајнштајн, а који је прихватио и Хофман у свом приступу релативистичком проблему n-тела, а успешно га примењује и Чандрасекар у својој хидродинамици. Иако постоје ефикасније технике за обрачун феномена вишег реда, као што су гравитационо зрачење, овај пут почаствован је приступ адекватан за израчунавање првог реда (тј $c^2$), услов познатији као пост-њутновски услов. У првој половини 1960-их година, приликом проучавања хидродинамике за различита течна тела, Чандрасекар је развио теорему виријала до изузетно софистицираног нивоа. Један од најважнијих догађаја приликом решавања овог проблема јесте напор да се укључе ефекти првог реда у општу релативност. У импресивном и дуготрајаном раду током 1965. године, Чандрасекар је развио пост-њутновске једначине хидродинамике, укључујући и формулацију теореме виријала. Један од основних проблема са општом теоријом релативности је њена нелинеарност. Физичке особине материје су представљене геометријом простора, и на тај начин одређују исту. То је та нелинеарност која изазива толико проблема са теоријом и са којом се Ајнштајн, Инфилд, Хофман теорија (АИХ) бави директно.

Основни приступ претпоставља да се метрички тензор може написати уз мале пертурбације равног еуклидског простора као:

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = \mathcal{G}^0{}_{\alpha\beta} + Ђ_{\alpha\beta} \qquad (2.3.1)$$

где је $Ђ_{\alpha\beta}$ мали члан реда $c^{-2}$ или чак мањи. Ово нам допушта да одредимо елементе тензора енергије-импулса, до чланова реда $c^{-2}$

$$\sigma_{\alpha\beta} = (\varepsilon + P)u_\alpha u_\beta - P\mathcal{G}_{\alpha\beta} \qquad (2.3.2)$$

Ајнштајнове једначине поља могу се представити помоћу Ричијевог тензора и тензора енергије-импулса

$$R_{\alpha\beta} = -\frac{8\pi G}{c^4}\left(\sigma_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}J\mathcal{G}_{\alpha\beta}\right) \qquad (2.3.3)$$

где је J траг тензора $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$. Ричијев тензор је геометријски и даје информације о самом простору.

Апроксимација АИХ даје рецепт за решавање једначине поља. У принципу поступак одређује метричке коефицијенте за ред више него што је првобитно наведено. Овај поступак се може поновити, али и даље постоје нерешени проблеми као конвергенција шеме уопште. У сваком тренутку може се користити пертурбовани простор и рецепт за добијање једначина кретања и за генерисање низа пертурбованих једначина кретања. Релативистички рецепт где слободне честице прате геодетске путеве је логички еквивалентан навођењу четвородимензионог тензора енергије-импулса који је једнак нули. Тада

$$\partial \cdot \sigma_{\alpha\beta} = 0 \qquad (2.3.4)$$

Био је то услов који нам је требао у одељку 3 да добијемо облик теореме виријала погодан за специјалну релативност. Нажалост, процес узимања дивергенције губи један ред апроксимације и на тај начин није могуће ићи директно из пертурбованог простора на једначину кретања, која не одржава исти ниво прецизности. Морамо прво поћи од једначине поља и АИХ апроксимационе шеме. У циљу праћења овог рецепта морамо прво поћи са апроксимирањем простора $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$. Овде се традиционално позивамо на принцип еквивалентности који захтева да

$$\text{Ђ}_{\alpha\beta} = -\frac{2\Psi}{c^2}\delta_{\alpha\beta} + O(< 1/c^3) \qquad (2.3.5)$$

Са овим, као полазном тачком, можемо наставити са усклађивањем плана и добити једначине кретања. Као и за многе апроксимативне шеме, математичком манипулацијом лако губимо увид у физички смисао. Међутим, напредак је брз у пољу као што је ово, и оно што је био оригинални истраживачки напор Чандрасекара 1965. године постаје "домаћи задатак" за Мизнера, Торна и Вилера 1972. године.

Прво, посматрамо енергију као материју, и морамо наћи њене једначине кретања. Ово је последица специјалне релативности. Искривљеност простора се такође мења или бар компликује, и због тога је погодно дефинисати густину $\rho^*$, која подлаже једначини континуитета

$$\frac{\partial\rho^*}{\partial \mathrm{t}} + \nabla\cdot(\rho^* u) = 0 \qquad (2.3.6)$$

где је $\rho^* = {\rho^*}_0[1 + (u^2 + 3\Psi)/c^2]$.

Због потребе поједностављења, Чандрасекар сматра да је прикладно да се дефинише нешто измењен облик густине која експлицитно садржи унутрашњу енергију гаса и има благо измењену једначину континуитета.

$$\frac{\partial\sigma}{\partial \mathrm{t}} + \nabla\cdot\left(\sigma \mathrm{u} + \frac{1}{c^2}\left(\rho_0\frac{\partial\Psi}{\partial \mathrm{t}} - \frac{\partial\rho_0}{\partial \mathrm{t}}\right)\right) = 0 \qquad (2.3.7)$$

где је $$\sigma = \rho_0\left[1 + \left(u^2 + 2\Psi + \Pi + P/\rho_0\right)/c^2\right]$$

Члан $\Pi/c^2$ представља унутрашњу енергију гаса, а P локални притисак у гасу.

Општа теорија релативности је нелинеарна теорија и тако треба очекивати услове које одражавају ову нелинеарност. Они ће бити различитих типова. Прво треба очекивати ефекте Њутновских потенцијала Ψ, који утиче на метрику директно што заузврат модификује Ψ. Ови услови су заиста присутни али Миснер, Торн и Вилер показују да могу бити представљени директни интегралима преко масовне дистрибуције. Друго, како су материја и простор везани заједно, кретање материје ће "привлачити" простор, што ће увести услове код потенцијала, који зависе од брзине, а који се користе за презентовање ових услова.

Разни аутори користе различите врсте потенцијала да би објаснили нелинеарност ових услова. Имајући ово на уму, Чандрасекарове једначине кретања постају

$$\frac{\partial(\sigma u)}{\partial t} - \rho_0 \nabla\Psi + \nabla\left[\left(1 + 2\Psi/c^2\right)P\right] + \frac{\rho_0}{c^2}\left\{\frac{d}{dt}\left[4u\Psi - \frac{7}{2}Y - \frac{1}{2}\nabla(|Y|)\right] + 4u\cdot(\nabla Y) - \frac{1}{2}(u\cdot\nabla)\left[Y - \frac{1}{2}\nabla(|Y|)\right]\right\} + \frac{1}{2\pi G c^2}\left[\nabla^2\Phi\nabla\Psi + \nabla^2\Psi\nabla\Phi\right] = 0 \qquad (2.3.8)$$

Разни потенцијали које смо овде увели, могу бити дефинисани чињеницом да задовољавају Пуасонове једначине у форми:

$$\nabla^2\Psi = -4\pi G\rho_0$$

$$\nabla^2\Phi = -4\pi G\rho_0\varphi \qquad (2.3.9)$$

$$\nabla^2 Y = -4\pi G\rho_0 u$$

где је $\varphi = u^2 + \Psi + \frac{1}{2}\Pi + \frac{3}{2}\left(P/\rho_0\right)$. Y је векторски потенцијал чији је извор исти као код Њутновог потенцијала мереног у области локалног поља брзине. Слично томе, Φ је скаларни потенцијал чији је извор поново исти као код Њутновског потенцијала, али допуњен функцијом $\varphi$ која је повезана са укупном унутрашњом енергијом.

Поставља се питање, да ли ми можемо да схватимао смисао различитих чланова у једначини (2.3.8). Прва два терма су у основи Њутнова, и заиста занемарујући допринос масе у енергији c = ρo, видимо да су они идентични првом члану у Њутн-Ојлер-Лагранжевој једначини хидродинамичког протока. Први део трећег члана је само градијент притиска. Преостали допринос форме резултата градијента притиска, закривљеност простора, уведен у присуству материје, је и можда наочекиванија релативистичка корекција. Преостали тензори су нелинеарни чланови интеракције, које смо поменули раније. Дуг израз у загради садржи ефекте "повлачења" простора од стране материје и индуковане чланове зависне од брзине. Последњи терм представља директан ефекат потенцијала материја-енергија на простор и овај ефекат, заузврат, пропагира се на самим потенцијалима.

Ако узмемо добијене једначине кретања за систем, процедура за добијање општег релативистичког облика Лагранжевог идентитета је иста као у претходним поглављима. Ради једноставности, ми ћемо извести скаларну верзију Лагранжевог идентитета тако што ћемо узети скаларни производ једначине (2.3.8) и вектора положаја $\vec{r}$ . Требамо очекивати исту процедуру као и код класичног извођења, али са разликама које уводи сама разлика између $\rho_0$, ρ *, и σ. Поред тога, узимамо запремину која је довољно велика тако да запремински интеграл дивергенције нестаје. У том смислу, треба напоменути, да ако узета запремина обухвата читав систем, по теореми дивергенције следи:

$$\int_V \nabla\vec{A}dV = \frac{1}{3}\int_V \nabla\cdot\left(\hat{1}\,\vec{A}\right)dV = 0 \qquad (2.3.10)$$

Тако, интеграљењем једначине кретања по датој запремини, имамо

$$\frac{d}{dt}\int_V \left\{\sigma\vec{u} + \frac{\rho_0}{c^2}\left[4\vec{u}\Psi - \frac{7}{2}Y - \nabla(|Y|)\right]\right\} dV = 0 \equiv \frac{d}{dt}\int_V \vec{K}dV \qquad (2.3.11)$$

Једначина (2.3.11) претставља закон о одржању линеарног импулса. Ово је користан резултат за поједностављење једначине (2.3.8) и сада се можемо припремити за запис Лагранжевог идентитета. Такође, назовимо интеграл у једначини (2.3.11) као локална линеарна густина импулса K. Затим, направимо скаларни производ једначине (2.3.8) са $\vec{r}$

$$\vec{r} \cdot \frac{d\vec{K}}{dt} - \rho_0 \cdot \nabla\left[\Psi + P\left(1 + 2\Psi/c^2\right)\right] + 4\frac{\rho}{c^2}\vec{r} \cdot [\vec{u} \cdot (\nabla\Psi)] - \frac{1}{2}\vec{r} \cdot (\vec{u} \cdot \nabla)[Y - \nabla(|Y|)] - \frac{2\rho}{c^2}(\varphi\vec{r} \cdot \nabla\Psi + \vec{r} \cdot \nabla\Phi) \qquad (2.3.12)$$

Након вишеструке парцијалне интеграције, и користећи теорему дивергенције, добија се

$$\frac{d}{dt}\int_V \left(\vec{r} \cdot \vec{K}\right)dV = 2T + \Omega + 3\int_V (1 + 2\Psi/c^2)PdV + \frac{1}{c^2}\left[4W + \langle\Phi\rangle - \frac{7}{4}Y - \frac{1}{4}Z\right], \quad (2.3.13)$$

gde je

$$T = \frac{1}{2}\int_V \sigma\vec{u}^2 dV$$

$$\Omega = -\frac{1}{2}\int_V \rho_0\Psi dV$$

$$W = \int_\nabla \rho_0\vec{u}^2\Psi dV \qquad (2.3.14)$$

$$\langle\Phi\rangle = \int_V \rho_0\Psi\varphi dV$$

$$Y = \int_V \rho_0\vec{u} \cdot Y dV$$

$$Z = \iint_{VV`} \left\{\rho_0\rho_0`\left[\left(\vec{u} \cdot (\vec{r} - \vec{r}`)\right)(\vec{u}` \cdot (\vec{r} - \vec{r}`)) \big/ |\vec{r} - \vec{r}`|^3\right]\right\}$$

Ово можемо написати много познатије ако препишемо леву страну једначине (2.3.13) тако да

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_V^+ \sigma\vec{r}^2 dV\right) + \frac{1}{c^2}\frac{d}{dt}\int_V \rho_0\left[4\Psi(\vec{r} \cdot \vec{u}) - \frac{7}{2}\vec{r} \cdot Y - \vec{r} \cdot \nabla(|Y|)\right]dV = 2T + \Omega + 3\int_V (1 + 2\Psi/c^2)PdV + \frac{1}{c^2}\left[4W + \langle\Phi\rangle - \frac{7}{2}Y - \frac{1}{4}Z\right] \qquad (2.3.15)$$

Први члан са леве стране једначине (2.3.15) је $\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2}$. Други члан потиче од корекције простора која произилази из потенцијала и "повлачења" као мера унутрашњег кретања. Прва два терма на десној страни су оно што би се могло очекивати у класичној механици, док наредни члан може бити у вези са укупном унутрашњом енергијом.

Овај члан директно указује на промене у простору које долазе од присуства материје. Остали чланови потичу од енергије а прва два (W и $\langle \Phi \rangle$), представљају релативистичке корекције које произилазе из промене потенцијала изазване променом простора, који пак потиче од самог потенцијала.

Писање Лагранжевог идентитета као у једначини (2.3.15) наглашава порекло различитих чланова да ли су класични или релативистички. Иако би чланови у оваквом поретку, требало да буду довољни да опишу већину појава у звезданој астрофизици, можемо се упитати да ли би чланови вишег реда, или других теорија гравитације, дали некакве значајне корекције у теореми виријала.

## 2.4 Компликације: Магнетно поље, унутрашња енергија, и ротација

Пуна моћ и корисност теореме виријала заправо не постану видљиве док се не схвати да не морамо бити посебно специфични о тачној природи потенцијала и кинетичких енергија које се појављују у ранијим извођењима. Тако присуство компликација од стране сила могу бити укључене уколико се оне изводе из потенцијала. Слично док год укупну кинетичку енергију можемо изразити преко чланова енергије који произилазе од микроскопских кретања и унутрашњих термалних кретања, неће бити проблем и теорему виријала изразити преко ових чланова, који претстављају познате параметре система. Приликом извођења може се наставити на само овај начин или да се врати на првобитне једначине кретања за систем. Ми ћемо дискутовати оба приступа.

У првом поглављу смо изводили Ојлер-Лагранжеву једначину хидродинамике. Ове једначине кретања су потпуно универзалне и адекватне су за описивање ефеката који настају приликом ротације и присуства магнетних поља, ако притом водимо рачуна о координатном систему и тензору притиска р. Имајући ово на уму, можемо преписати једначину (1.2.4) уз напомену да је лева страна тотални извод по времену и да тензор притиска може експлицитно бити раздвојен да би укључио присуство електромагнетних поља. Тако

$$\frac{\partial \vec{\mathrm{u}}}{\partial \mathrm{t}} = -\nabla\Phi - \frac{1}{\rho}\nabla\cdot\left(\mathrm{p}_g + \sigma\right) - \frac{1}{\rho}\int S(\vec{v}-\vec{u})d\vec{v} \qquad (2.4.1)$$

где се тензор $\mathrm{p}_g$ односи само на гасни притисак, а тензор $\sigma$ претстављаа Максвелов тензор напона за електромагнетно поље који је облика:

$$\sigma_{ij} = E_i D_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\sum_k E_k D_k + H_i B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\sum_k H_k B_k \qquad (2.4.2)$$

У скоро свим случајевима у астрофизици, прикладно је игнорисати утицај електричних и магнетних ефеката, који компликују везу између E, D, B и H. У одсуству ових сила, дивергенција једначине (2.4.2) даје(видети додатак):

$$\nabla\cdot\sigma = \frac{1}{4\pi}\left\{\vec{D}\rho_e - \vec{D}\times\left(\nabla\times\vec{\mathrm{D}}\right) + c^2\left[\vec{H}\times\left(\nabla\times\vec{\mathrm{H}}\right)\right]\right\} \qquad (2.4.3)$$

што претстављa Лоренцову силу у датој средини. Погодно је када користимо конфигурацију у којој је ротација униформна посматрати проблем у коротирајућем координатном систему. Ово омогућава да се види ефекат кретања микроскопских маса, и на тај начин процени њихова интеракција са другим макроскопским својствима система. Поред тога,такво систематско кретање је представљено помоћу брзине u. Стога као што смо одвојили ефекте електромагнетног поља од тензора притиска, хајде да експлицитно представимо ефекте ротације.

Приликом трансформације из инерцијалног координатног система у неинерцијални ротациони координатни систем, морамо векторима увести одговарајуће привремене промене. Голдштен даје посебне рачуне да би се ово постигло помоћу оператора.

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_{inertial}(\dots) = \left(\frac{d}{dt}\right)_{non-inertial}(\dots) + w \times (\dots) \qquad (2.4.4)$$

где је $w$, угаона брзина тачке. Ако допустимо

$$\vec{u} = \overrightarrow{\mathrm{w}} + (\vec{w} \times \vec{r}) \qquad (2.4.5)$$

онда једначина кретања за униформне ротације постаје

$$\frac{d\vec{w}}{dt} + 2(\vec{w} \times \overrightarrow{\mathrm{w}}) + \vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = -\nabla\Phi - \frac{1}{\rho}[\nabla \cdot (\mathrm{p} + \sigma)] - \frac{1}{\rho}\int_S S(\vec{v})d\vec{v} \qquad (2.4.6)$$

Може се показати да код униформних ротација члан

$$\vec{w} \times (\vec{w} \times \vec{r}) = \frac{1}{2}\nabla[(\vec{w} \times \vec{r}) \cdot (\vec{w} \times \vec{r})] \qquad (2.4.7)$$

тако да се може комбиновати са гравитационим потенцијалом и $\frac{1}{2}(\vec{w} \times \vec{r})$ се може сматрати "ротационим потенцијалом". Израз $2(\vec{w} \times \vec{w})$ је познат као "кориолисова сила". Пошто су и тензор притиска и Максвелов тензор нормално "фиксни" на телу, треба очекивати да ће њихова формулација у ротирајућем систему бити једноставнија. Тешко је наставити даље са једначинама кретања без неких поједностављивања. Најкорисније и такође разумно је да се претпостави да су сви сударни процеси изотропани у простору. Ово даје два резултата. Прво, члан који претставља судар на десној страни једначине кретања одлази у нулу када се интегрише по свим просторним брзинама. Друго, тензор гасног притиска $\mathrm{p}_g$ постаје дијагоналан, са свим једнаким елементима и може се тада писати $\nabla \cdot \mathrm{p}_g = P$, где је P скаларни гасни притисак. То практично гарантује постојање скаларне једначине стања, која ће бити корисна касније, када желимо повезати P са унутрашњом енергијом. Како се скоро сви астрофизички проблеми односе на плазму, можемо сматрати дате конфигурације као високо проводне па се стога може занемарити допринос Максвеловог тензора електричног поља. Користећи ове претпоставке, и једначине (2.4.3) и (2.4.7), једначина кретања постаје

$$\frac{d\vec{w}}{dt} + 2(\vec{w} \times \vec{w}) = -\nabla\left[\Phi + (\vec{w} \times \vec{r})^2\right] - \nabla\mathrm{P}/\rho - \frac{1}{4\pi\rho}\left[\vec{H} \times \left(\nabla \times \overrightarrow{\mathrm{H}}\right)\right] \qquad (2.4.8)$$

Као што смо и раније радили, помножићемо ову једначину кретања са ρr, затим интегралити по целој запремини, генеришући тако општи израз за тензор у Лагранжевом идентитету, који укључује ротацију и магнетна поља

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\mathfrak{l}) + 2\vec{w}\cdot\vec{\mathfrak{l}} = 2\mathrm{T} + n\mathcal{H} + \vec{w}\cdot(\hat{1}\vec{w}) - \omega^2 1 - \int_V \vec{r}\nabla \mathrm{P dV} - \frac{1}{4\pi}\int_V r[\vec{H}\times(\nabla\times\vec{\mathrm{H}})]dV$$
(2.4.9)

где су $\mathfrak{l}$, T и $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ момент инерције, и тензори кинетичке и потенцијалне енергије. $\mathfrak{l}$ је тензор сличан тензору угаоног момента. У циљу поједностављења последња два члана, треба напоменути да су они изведени из дивергенције два тензора. Тако можемо искористити правила теореме дивергенције да бисмо их поједноставили:

$$\int_V \vec{r}\nabla\cdot(\mathrm{p}+\sigma)\mathrm{dV} = \int_V \nabla\cdot[\vec{r}(\mathrm{p}+\sigma)]dV - \int_V (\nabla\vec{\mathrm{r}})\cdot(\mathrm{p}+\sigma)\mathrm{dV} \qquad (2.4.10)$$

Теорема дивергенције каже да се први интеграл може написати као површински интеграл и ако узмемо запремину довољно велику, увек можемо писати да је он једнак нули. Међутим, како магнетна поља делују изван граница које се сматрају границама површине, задржавамо на тренутак и ове чланове. Тако

$$\int_V \nabla\cdot[\vec{r}(\mathrm{p}+\sigma)]dV = \int_S \vec{r}\cdot(\mathrm{p}+\sigma)\cdot\mathrm{dS} = \mathcal{S} \qquad (2.4.11)$$

Површински члан може бити записан као

$$\mathcal{S}_{ij} = \frac{1}{4\pi}\int_S x_j(H_i\textstyle\sum_k H_k)dS_k - \frac{1}{8\pi}\int_S x_j H^2 dS_i - \int_S P_0 x_j dS_i \qquad (2.4.12)$$

Имајући у виду да је $\nabla\vec{\mathrm{r}} = \vec{r}_0$, где је $\vec{r}_0$ орт вектора $\vec{\mathrm{r}}$, други интеграл у једначини (2.4.10) постаје

$$\int_V 1\,(\mathrm{p}+\sigma)dV = \int_V 1\,(P + H^2/8\pi)dV + \frac{1}{4\pi}\int_V (HH)dV \qquad (2.4.13)$$

Ако дефинишемо $\mathcal{M} \equiv \frac{1}{8\pi}\int_{\mathrm{V}} (HH)dV$ (2.4.14)

долазимо до финалне форме тензора код Лагранжевог идентитета који укључује и ротацију и магнетна поља

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\mathfrak{l}}{dt^2} + 2\vec{w}\cdot\vec{\mathfrak{l}} = 2[\mathrm{T}-\mathcal{M}] + n\mathcal{H} + \vec{w}\cdot(1\,\vec{w}) - \vec{w}^2\,1 + 1\left(\int_V (P + H^2/8\pi)dV\right) + \mathcal{S} \qquad (2.4.15)$$

где је $\vec{\mathfrak{l}}_{ijk} = \int_V \rho(\vec{r}_k\vec{r}_i\overline{\omega}_j - \overline{\omega}_k\vec{r}_i\vec{r}_k)dV$

Прошли смо кроз тензорска извођења како би показали комплетну општост овог формализма. Тензорске компоненте у једначинама су од суштинске важности за проучавање не-радијалних осцилација и друге сличне појаве које се не могу представити једноставним скаларним приступом. Међутим, лакше је увидети физички значај овог приступа гледајући скаларни дупликат једначине (2.4.15).

Из дефиниције за $\mathfrak{l}$, у једначини (2.6.3), јасно је да се скраћени облик израза може написати као

$$2\int_V \rho\vec{r}\cdot(\vec{w}\times\vec{w})dV = -2\vec{w}\cdot\int_V \rho(\vec{w}\times\vec{r})dV = 2\vec{w}\cdot\int_V ldV \qquad (2.4.16)$$

где је $l$ запреминска густина угаоног момента импулса на материји која настаје због Кориолисових сила. Опет можемо изабрати сверни координатни систем тако да $ldV$даје нулу, па овај члан мора нестати из једначине. Како је **w**=wxr, можемо проширити леву страну једначине (2.4.16) путем идентитета који се односе на вектор троструког производа, и добити

$$\int_V \rho\vec{r}\cdot[\vec{w}\times(\vec{w}\times\vec{r})]dV = \int_V \rho\vec{r}\cdot(\vec{w}\times\vec{v})dV = \int_V \rho[\vec{r}\times\vec{w}]\cdot\vec{v}dV = \int_V \rho\overrightarrow{v^2}dV = 2\boldsymbol{\mathcal{R}} \qquad (2.4.17)$$

где је $\boldsymbol{\mathcal{R}}$ укупна ротациона енергија. Заменом и скраћивањем ових тензора у једначину (2.4.15) добијамо много једноставнији резултат.

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\mathrm{l}}{dt^2} = 2(T+\mathcal{R}) + \boldsymbol{\mathcal{M}} - \Omega + nU + 3\int_V PdV + \sum_i \mathcal{S}_{ii} \qquad (2.4.18)$$

До сада смо мало рекли о запреминском интегралу притиска. Како се чак и у тензорској репрезентацији овај члан појављује као скалар, није било губитка приликом самог одлагања за развијање овог интеграла све до сад. Из закона термодинамике можемо написати интеграл топлотне енергије U као

$$U = \int_V \rho c_v J dV \qquad (2.4.19)$$

gде је $c_v$ специфична топлота при константној запремини и температури. Такође знамо да је кинетичка енергија датог материјала дата са

$$\varepsilon = \frac{3}{2}NkJ = \frac{3}{2}\rho\left(c_p - c_v\right)J - \frac{3}{2}P \qquad (2.4.20)$$

Комбинујући ова два израза, можемо доћи до формуле за укупну унутрашњу топлотну енергију

$$\mathcal{U} = \frac{2}{3}\int_V \frac{\varepsilon dV}{(c_p/c_v - 1)} = \int_V \frac{PdV}{(c_p/c_v - 1)} \qquad (2.4.21)$$

Ако ставимо да је $\gamma = c_p/c_v$ , и ако допустимо да она буде константна по целокупној запремини, и ако занемаримо површинске чланове у једначини (2.4.18), тада можемо написати скаларну форму Лагранжевог идентитета као:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2} = 2(T+\mathcal{R}) + \mathcal{M} - \Omega + 3(\gamma - 1)U \qquad (2.4.22)$$

На почетку ове дискусије смо рекли да се Лагранжев идентитет може извести или помоћу једначина кретања или ако се пажљиво размотри смисао потенцијала и кинетичких енергија. На пример, први и последњи члан са десне стране једначине (2.4.22) претстављају допринос укупној кинетичкој енергији система путем микроскопских кретања, ротације и термалног кретања. Преостали чланови представљају допринос укупној потенцијалној енергији. Тако можемо схватити да је 3(γ-1)$\mathcal{U}$ половина кинетичке енергије која настаје топлотним кретањем, па формулу (2.4.22) можемо одмах избрисати. Међутим ово се неће десити за једначину (2.4.15) варијациона форма ове једначине биће искоришћена у следећем поглављу.

# Поглавље 3

## 3. ВАРИАЦИОНЕ ФОРМЕ ТЕОРЕМЕ ВИРИЈАЛА

Пертурбациона анализа је један стари метод у коме се истражује понашање система у познатом стању, претпостављајући да постоје мале варијације независно променљивих које описују систем.

Истражићемо како специфичне аналитичке технике утичу на извођење теореме виријала. Као и у претходним поглављима, почећемо са нешто једноставнијим проблемима, да бисмо се касније пребацили на комплексније. Са оваквим приступом, требали бисмо доћи до експлицитне форме једноставног скаларног облика теореме, који је погодан за описивање само-гравитирајућих система.

У другом поглављу смо увели присуство магнетних поља и ротационих кретања, а сада ћемо видети како ће варијационе форме ових ефеката мењати једначине кретања и утицати на неке основне астрофизичке величине, као што је период пулсирања код звезда.

Као једну од највећих примена теореме виријала, навешћемо неке начине како да одредимо стабилност самогравитирајућих, пулсирајућих звезданих система, који се свакако не налазе у стању еквилибријума. Битно је напоменути да ћемо се током извијења задржати на сверно симетричним системима код којих су присутне само радијалне пулсације.

## 3.1 Варијације и пертурбације и њихове импликације на теорему виријала

Средство које служи за описивање ових промена код независно променљивих налазимо у самим једначинама које описују почетно стање система. Једначине које се обично користе за овакву врсту анализе су једначине кретања. На пример, ако посматрамо једначину кретања за објекат који се креће под утицајем тачкастог потенцијала φ

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\nabla\Phi \qquad (3.1.1)$$

Са претпоставком да је решење у почетном тренутку $r_0(t)$ познато, и задовољава једначину (3.1.1) са специфичним потенцијалом $\varphi_0$. Како једначина (3.1.1) описује сваки систем са познатим потенцијалом, можемо дефинисати

$$\Phi = \Phi_0 + \delta\Phi \qquad (3.1.2)$$

$$\vec{r} = \overrightarrow{r_0} + \delta\vec{r}$$

Једначина (3.1.1) захтева

$$\frac{d^2(\vec{r}+\delta\vec{r})}{dt^2} = -\nabla(\Phi + \delta\Phi) \qquad (3.1.3)$$

Међутим, како су и ∇ и d/dt линеарни оператори, једначина (3.1.3) постаје

$$\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} + \frac{d^2\delta\vec{r}}{dt^2} = -\nabla\,\Phi - \nabla\delta\Phi \qquad (3.1.4)$$

Али како већ познајемо

$$\frac{d^2\vec{r}_0}{dt^2} = -\nabla\Phi_0 \qquad (3.1.5)$$

Тако убацујући једначину (3.1.5) у једначину (3.1.4) добијамо

$$\frac{d^2\delta\vec{r}}{dt^2} = -\nabla\delta\Phi \qquad (3.1.6)$$

коју називамо пертурбована једначина кретања, где је $\delta\Phi$ мала пертурбација која условљава и пертурбацију $\delta\vec{r}$. Кратак приступ који доводи до истог резултата је да се "преузму варијације" из једначине (3.1.1) где δ оператер није под утичајем временског и просторног извода. Ова техника "ради" јер су временски и просторни оператори у једначинама кретања линеарни, стога ће свака линеарна пертурбација датог решења производити збир првобитних једначина кретања од пертурбоване једначине кретања. Није неопходно да једна пертурбација једначине доводи до губљења информације о систему. Јасно је да су било које једначине које описују структуру система предмет овог типа анализе. Према томе, ако се узме варијација једначине кретања која даје корисне резултате, не значи да ће и варијациони облик момената ових једначина садржати интересантне информације. Ово је навело Павла Леду да развије варијациони облик скаларне теореме виријала, помоћу којег смо у стању да предвидимо пулсационе периоде звезда.

Варијациони приступ даје диференцијалне једначине које описују параметарске односе пертурбованог система, и почетног стања система. Ако се деси да то стање буде равнотежно, варијациона анализа једначине кретања ће дати опис кретања система у равнотежној конфигурацији. Варијациона анализа просторних момената би онда могла да опише макроскопска својства тог кретања. Ово заиста јесте тачно, као што Леду показује утврђивањем можда најочигледнију макроскопску особину таквог кретања, пулсационог периода система. Чандрасекар налази тензорску форму теореме виријала корисну за одређивање не-радијалне начине осцилације звезда. Поред тога, он и Ферми истражују ефекте магнетног поља на пулсирање звезде.

## 3.2 Радијално пулсирање код самогравитирајућих система. Звезде

У овом одељку ћемо користити теорему виријала, да бисмо добили израз за фреквенцију радијалних пулсација у гасној сфери. Овај приступ ће се заснивати на уношењу мале варијације у теорему виријала, и коришћењем неколико закона конзервације, добити изразе за варијацију момента инерције, кинетичке енергије и потенцијалне енергије у функцији времена.

Из ранијих извођења, подсетимо се Лагранжевог идентитета

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2} = 2T + \Omega \qquad (3.2.1)$$

У оваквом облику, немамо усредњавање по времену, па се једначина мора употребити у динамичком систему у било ком тренутку времена. Размотримо сада звезду радијуса R. Нека r буде растојање од центра симетрије до било које тачке у конфигурацији. Закон о одржању масе захтева

$$m(\vec{r}_0 + \delta\vec{r}) = m(\vec{r}_0) \qquad (3.2.2)$$

Ми желимо да нађемо варијације $\delta$I, $\delta T$ и $\delta\Omega$ од величина I, T и Ω, од почетних величина $I_0$,$T_0$ и $\Omega_0$. Вариациона форма теореме виријала онда постаје

$$\frac{1}{2}\frac{d^2\delta\mathrm{I}}{dt^2} = 2\delta T + \delta\Omega \qquad (3.2.3)$$

По дефиницији имамо

$$I = \int_0^M \vec{r}^2 dm(\vec{r}) \qquad (3.2.4)$$

Тако добијамо

$$\delta\mathrm{I} = \int_0^M 2\vec{r}\delta\vec{r}dm(\vec{r}) + \int_0^M \vec{r}^2\delta[dm(\vec{r})] \qquad (3.2.5)$$

По закону одржања масе имамо $\delta m(r) = 0$ за свако r, d($\delta m(r)) = \delta(dm(r)) = 0$ за свако r, други интеграл такође нестаје, па добијамо

$$\delta\mathrm{I} = \int_0^M 2\vec{r}\delta\vec{r}dm(\vec{r}) \qquad (3.2.6)$$

Сада из једначине (3.54) имамо

$$\frac{dI}{dm(r)} = \vec{r}^2 \qquad (3.2.7)$$

Како ово мора увек да важи, мора да важи и у тренутку равнотеже за $r_0$. Тако имамо

$$dI_0 = {\vec{r}_0}^2 dm(\vec{r}) \qquad (3.2.8)$$

Тако, до првог реда тачности, можемо једначину (3.2.6) преписати

$$\delta I = 2\int_0^{I_0} \frac{\delta\vec{r}}{\vec{r_0}} dI_0 \qquad (3.2.9)$$

На исти начин можемо проценити варијацију гравитационе потенцијалне енергије у односу на мале варијације у r и писати

$$\delta\Omega = 2\int_0^{\Omega_0} \frac{\delta\vec{r}}{\vec{r_0}} d\Omega_0 \qquad (3.2.10)$$

Све што сада остаје јесте да се утврди варијација укупне кинетичке енергије T. У првој апроксимацији допринос у једначини (3.2.3) има само термална кинетичка енергија (видети додатак)

$$2\delta T \cong 3\int_0^M \frac{P_0}{\rho_0}(\gamma-1)\frac{\delta\rho_0}{\rho_0} dm(\vec{r}) \qquad (3.2.11)$$

Да би олакшали добијање израза за $\frac{\delta\rho_0}{\rho_0}$, одредићемо временску зависност пулсације од $r_0$. Ради поједностављења, претпоставимо да је кретање просто периодично. Тако дефинишемо величину ξ као

$$\xi = \frac{\delta\vec{r}}{\vec{r_0}} = \xi_0 e^{i\sigma t} \qquad (3.2.12)$$

где $2\pi/\sigma$ представља период осциловања, па можемо преписати варијацију I и **Ω**, на следећи начин

$$\delta I = 2e^{i\sigma t}\int_0^{I_0} \xi_0 dI_0 \qquad (3.2.13)$$

$$\delta\Omega = -e^{i\sigma t}\int_0^{\Omega_0} \xi_0 d\Omega_0$$

Закон о одржању масе захтева

$$\frac{\delta\rho}{\rho_0} = -\left(3\xi_0 + r_0\frac{d\xi_0}{d\vec{r}_0}\right)e^{i\sigma t} \qquad (3.2.14)$$

Убацивањем овога у једначину за варијацију кинетичке енергије добијамо

$$2\delta T = -3\int_0^M \frac{P_0}{\rho_0}(\gamma-1)\left(3\xi_0 + \vec{r_0}\frac{d\xi_0}{d\vec{r_0}}\right)e^{i\sigma t} dm(\vec{r_0}) \qquad (3.2.15)$$

Једначина (3.2.15) може бити поједностављена

$$2\delta T = -3e^{i\sigma t}\int_0^M \frac{P_0\xi_0}{\rho_0}\frac{d}{d\vec{r_0}} dm(\vec{r_0}) + 3e^{i\sigma t}\int_0^{\Omega_0} \xi_0(\gamma-1)d\,\Omega_0 \qquad (3.2.16)$$

Сада имамо целокупан материјал потребан за извођење варијационе форме теореме виријала до првог реда тачности. Убацивањем једначина (3.2.13) и (3.2.16) у једначину (3.2.3) добијамо

$$-\sigma^2 e^{i\sigma t}\int_0^{I_0} \xi_0 dI_0 = 3e^{i\sigma t}\int_0^M \frac{P_0\xi_0\vec{r}_0}{\rho_0}\frac{d\gamma}{d\vec{r}_0} dm(\vec{r_0}) + 3e^{i\sigma t}\int_0^{\Omega_0} \xi_0(\gamma-1)d\,\Omega_0 - e^{i\sigma t}\int_0^{\Omega_0} \xi d\Omega_0 \qquad (3.2.17)$$

Решавањем по $\sigma^2$, који је повезан са периодом пулсирања, добијамо

$$\sigma^2 = \frac{-\int_0^{\Omega_0} \xi_0 (3\gamma - 4) d\Omega_0 + 3\int_0^{M} \frac{P_0 \xi_0 \overrightarrow{r_0}}{\rho_0} \frac{d\gamma}{d\overrightarrow{r_0}} dm(\vec{r})}{\int_0^{I_0} \xi_0 dI_0} \quad (3.2.18)$$

За модел где је познато равнотежно стање, интеграли у једначини (3.2.18) могу се проценити, и фреквенција на којој су радијалне пулсације стабилне може се израчунати. Међутим, ради посматрања понашања пулсирајућих звезда, можемо претпоставити да је звезда довољно хомогена и да је γ константа. Такође, претпоставимо да пулсирање изазива повећање спољашњег зрачења линеарно. Под овим претпоставкама, једначина (3.2.18) се своди на крајње једноставну форму

$$\sigma^2 = \frac{(3\gamma - 4)\Omega_0}{I_0} \quad (3.2.19)$$

У циљу добијања осећаја за формулу коју смо извели, покушаћемо да проценимо неке апроксимације пуслационе фреквенције. За сферу униформне густине имамо

$$\Omega_0 = \frac{3}{5}\frac{GM^2}{R_0} \quad (3.2.20)$$

За сферу, момент инерције око осе, једнак је 3/2 момента инерције у центру и дат је са

$$I_z = \frac{2}{5} M R_0^2 = \frac{3}{2} I_0 \quad (3.2.21)$$

тако имамо

$$I_0 = \frac{4MR_0^2}{15} \quad (3.2.22)$$

Теорија о структури звезда имплицира да $\gamma > 4/3$. Ако узмемо $\gamma = 5/3$, прикладно за потпуно конвективне звезде, имамо

$$\sigma^2 = \frac{9}{4}\frac{GM}{R_0^3} \quad (3.2.23)$$

или $\sigma^2 = 3\pi G\bar{\rho}$. Подсетимо се да је период T једнак $2\pi/\sigma$, па добијамо

$$T = \left(\sqrt{\frac{4\pi}{3G}}\right)\rho^{-\frac{1}{2}} \quad (3.2.24)$$

Видимо да теорија даје период који је пропорцијалан корену главне густине. За овај закон се показало да задовољава структуре класичних цефеида. Требамо напоменути да ће ова особина бити сачувана чак и у интегралној форми једначине (3.2.18), само ће се променити константа пропорционалности. Ако проценимо ову константу из једначине (3.2.24) добијамо

$$T \cong 7.92 \cdot 10^3 \bar{\rho}^{-\frac{1}{2}} s \quad (3.2.25)$$

Ако узмемо посматрану вредност за густину Цефеидних променљивих између $10^{-3}$ и $10^{-6}$kg / cm$^3$ , долазимо до следеће процене за период код ових звезда.

$$0.3d < T < 90d \qquad (3.2.26)$$

Отворено признајемо да се до ове процене стигло на најгрубљи начин, међутим, утешно је да се резултат лепо слаже са посматрачким резултатима за период Цефеида. Такође треба напоменути да за већину звезда израз у једначини (3.2.23) за $\sigma^2$ представља доњу границу. Како маса постаје централно концентрисана, величина гравитационе енергије ће се повећати, док ће се момент инерције смањити. Чак и за разумне расподеле густине вредности у једначини (3.2.23) се не разликују више од једног реда величине. Ово би значило да би вредност за период обрачунат на овај начин требало да буде тачан унутар фактора 2 или 3. Тако, без решавања једначина силе, процена за веома важан параметар у опису пулсирања гасне сфере као што је период, за који је сфера у равнотежи са радијалном пулсацијом, може се одредити.

## 3.3 Утицај магнетне и ротационе енергије на пулсирајуће системе

Сада ћемо размотрити какав ће ефекат увођење магнетне и ротационе енергије у пулсирајући систем произвести на фреквенцију пулсирања тог система. Важно је напоменути да ће решење таквог проблема у погледу једначина силе бити тешко заиста јер би захтевало детаљно познавање геометрије магнетног поља кроз звезду. Међутим, како наш приступ изражава фреквенцију пулсирања кроз запремински интеграл, биће потребно само познавати укупну магнетну и ротациону енергију.

Како би поједноставили математичко извођење, увешћемо неке претпоставке до којих смо дошли у предходним поглављима.

1. Сва одступања од равнотежног стања сматраћемо малим.
2. Радијативни притисак се занемарује.
3. $\gamma$ је константна кроз цео систем.

Већ смо видели да Лагранжев идентитет можемо записати тако да укључује и ефекте магнетне и ротационе енергије. Једна од тачака приликом извођења, која ће захтевати мало више пажње, јесте укључивање површинских почетних услова, због чињенице да звездана магнетна поља излазе изван површине саме звезде. Међутим, хајде да за почетак занемаримо ове услове јер ће они скоро увек бити јако мали, и као такви неће утицати на општост самог решења. Тада, можемо написати скаларну форму Лагранжевог идентитета

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2} = 2T_к + \Omega + \mathcal{M} \qquad (3.3.1)$$

где је $T_к$ укупна кинетичка енергија укључујући ротациону, а $\mathcal{M}$ је укупна магнетна енергија. Сада, хајде да раставимо укупну кинетичку енергију на суму од три енергије $\boldsymbol{\mathcal{J}}_1$, $\boldsymbol{\mathcal{J}}_2$ и $\boldsymbol{\mathcal{J}}_3$, где је $\boldsymbol{\mathcal{J}}_1$ кинетичка енергија која настаје пулсационим кретањем, $\boldsymbol{\mathcal{J}}_2$ је кинетичка енергија гаса која произилази из термалних кретања, а $\mathcal{J}_3$ кинетичка енергија ротације. Допринос кинетичкој енергији (у смислу честичног кретања) од елемената масе је:

$$d\mathcal{J}_2 = \frac{3}{2}kTdn = \frac{3}{2}RTdm = \frac{3}{2}\left(c_p - c_v\right)Tdm \qquad (3.3.2)$$

где је T температура гаса а R гасна константа. Унутрашња енергија dU елемента масе је

$$dU = c_v T dm \qquad (3.3.3)$$

Комбинујући једначине (3.3.2) и (3.3.3) и дефиниције за γ ($\gamma = c_p/c_v$ ) добијамо:

$$d\mathcal{J}_2 = \frac{3}{2}(\gamma - 1)dU \qquad (3.3.4)$$

Интеграцијом добијамо:

$$2\mathcal{J}_2 = 3(\gamma - 1)U \qquad (3.3.5)$$

Сада можемо писати теорему виријала за овакав систем као

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I}{dt^2} = 2\mathcal{J}_1 + 2\mathcal{J}_3 + 3(\gamma - 1)U + \Omega + \mathcal{M} \qquad (3.3.6)$$

Вариациона форма постаје

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\delta I) = 2\delta\mathcal{J}_3 + 3(\gamma - 1)U + \delta\Omega + \delta\mathcal{M} \qquad (3.3.7)$$

Не постоји члан који садржи варијацију по γ, јер смо на почетку рекли да он представља константу у систему. У секцији 2 смо показали да можемо занемарити варијацију пулсационе кинетичке енергије. Тада

$$2\delta\mathcal{J}_1 = 0 \qquad (3.3.8)$$

Како смо већ обрачунали варијацију кинетичке енергије гаса, можемо лакше наћи варијацију унутрашње енергије δU у смислу количине. Као резултат претпоставке да је γ константа, можемо узети варијацију једначине (3.3.5) и добити

$$2\delta\mathcal{J}_2 = 3(\gamma - 1)\delta U \qquad (3.3.9)$$

Сада, ако на даље претпоставимо периодичну форму пулсирања, и линеарно повећавање амплитуде ($\xi_0 = const$), једначина (3.2.15) даје следећи израз за варијацију кинетичке енергије гаса

$$2\delta\mathcal{J}_2 = -3\int_0^M \frac{3P_0\xi_0}{\rho_0}(\gamma - 1)e^{i\sigma t}dm(\vec{r}_0) \qquad (3.3.10)$$

$$2\delta\mathcal{J}_2 = -3(\gamma - 1)\xi_0 e^{i\sigma t}\int_V 3P_0 dV$$

Комбинујући једначине (3.3.10) и (3.3.9) добијамо

$$\delta U = -\xi_0 e^{i\sigma t} \int_V 3P_0 dV \qquad (3.3.11)$$

Ако желимо да изразимо облик варијације који укључује и чланове других енергија присутних у систему, претпоставимо да је систем у квазистабилном стању. Са овом претпоставком, релевантне величине су усредњене по једном периоду пулсирања$\langle {d^2 I}/{dt^2} \rangle \geq 0$. Такође претпоставимо да су остале величине у равнотежи са конфигурацијом. Теорема виријала тада постаје

$$2\mathcal{J}_1(0) + 2\mathcal{J}_2(0) + 2\mathcal{J}_3(0) + \Omega_0 + \mathcal{M} = 0 \qquad (3.3.12)$$

Сада, на основу основне кинетичке теорије гасова имамо

$$\mathcal{J}_2 = \frac{3}{2} \int_V P_0 dV \qquad (3.3.13)$$

Такође, како се систем нити шири нити сакупља

$$\mathcal{J}_1(0) = \langle \mathcal{J}_1 \rangle = 0 \qquad (3.3.14)$$

Ако искористимо ове резултате и заменимо средње вредности датих величина из једначине (3.3.12) са равнотежним, имамо

$$-3 \int_V P_0 dV = 2\mathcal{J}_3(0) + \Omega_0 + \mathcal{M}_0 \qquad (3.3.15)$$

Изједначавањем леве стране једначине (3.3.15) са десном страном једначине (3.3.11) коначно добијамо

$$\delta U = \xi_0 e^{i\sigma t}(2\mathcal{J}_3(0) + \Omega_0 + \mathcal{M}_0) \qquad (3.3.16)$$

Већ смо нашли изразе за варијацију гравитационе енергије и момента инерције у предходном одељку. Користећи претпоставке које смо сада користили, уз константну пертурбацију $\xi_0$, ови изрази постају

$$\delta I = 2\xi_0 e^{i\sigma t} I_0 \qquad (3.3.17)$$

$$\delta\Omega = \xi_0 e^{i\sigma t} \Omega_0$$

Требамо сада доћи до израза за варијацију магнетне и ротационе енергије како бисмо проценили једначину (3.3.7)

Размотримо прво ротациону енергију. Сада, елемент масе који ротира око осе угаоном брзином ω произвешће елементарни угаони момент.

$$dL = \vec{\omega}(\vec{x}^2 + \vec{y}^2) dm(\vec{r}) = \omega r^2 \sin^2\theta \, dm(r) \qquad (3.3.18)$$

Овде је x-y раван нормална на осу ротације а θ је поларни угао мерен од осе ротације. Такав елемент масе произвешће угаони момент који има ротациону кинетичку енергију дату са

$$\mathcal{J}_3 = \frac{1}{2} \int_0^L \omega dL \qquad (3.3.19)$$

Тако ће укупна кинетичка енергија бити

$$2\delta\mathcal{J}_3 = \delta\int_0^L \omega dL = \int_0^L \delta\omega dL + \int_0^L \omega d(\delta L) \qquad (3.3.20)$$

Међутим, закон о очувању угаоног момента захтева да L буде константан током пулсације. Тако је варијација L нула и последњи интеграл са десне стране једначине (3.3.20) нестаје, па добијамо

$$2\delta\mathcal{J}_3 = \int_0^L \delta\omega dL + \int_0^L \frac{\delta\omega_0}{\omega_0}\omega_0 dL \qquad (3.3.21)$$

где је $\omega_0$ ротациона брзина равнотежног стања. Сада ако се осврнемо на закон очувања момента импулса, видимо

$$\omega r^2 \sin\theta = const \qquad (3.3.22)$$

Како разматрамо само радијалне пулсације, δθ иде у нулу, а варијациона једначина постаје

$$\delta\omega r^2 \sin\theta + 2\omega r\delta r\sin\theta = 0 \qquad (3.3.23)$$

Ово је еквивалентно са законом одржања „момента импулса у љусци“.

Ако једначину (3.3.23)посматрамо у равнотежном положају, добијамо израз тачности првог реда.

$$\frac{\delta\omega_0}{\omega_0} = \frac{2\delta\vec{r}}{\vec{r_0}} = -2\xi_0 e^{i\sigma t} \qquad (3.3.24)$$

Супституција овога у једначину (3.3.21) води до:

$$2\delta\mathcal{J}_3 = -\int_0^L \left(2\xi_0 e^{i\sigma t}\omega_0\right) dL_0 \qquad (3.3.25)$$

Ако, ради једноставности, на даље претпоставимо да је угаоно брзина константна у целом систему, добијамо врло једноставну једначину за варијацију ротационе енергије

$$2\delta\mathcal{J}_3 = -\left(2\xi_0 e^{i\sigma t}\omega_0\right) L_0 \qquad (3.3.26)$$

где је $L_0$ укупни момент импулса система.

Сада остаје само да утврдимо варијацију магнетне енергије. Да бисмо дефинисали варијацију укупне магнетне енергије, потребно је увести координатни систем који је прикладан геометрији самог магнетног поља, али и геометрији целокупне конфигурације. Иако је конфигурација сферно симетрична, геометрија магнетног поља није позната. Ми ћемо размотрити прво по Декартовим координатама, а касније ћемо смањивати наше резултате за форму која се слаже са предходно добијеним резултатима. Укупна магнетна енергија је дефинисана:

$$\mathcal{M} = \int_0^M \frac{\left|\vec{H}\right|^2}{8\pi\rho} dm(\vec{r}) \qquad (3.3.27)$$

Тако, означавањем Декартових координата са $x_1$; $x_2$ и $x_3$, варијациона форма магнетне енергије биће:

$$\delta\mathcal{M} = \frac{1}{4\pi}\int_0^M \frac{\vec{H}\cdot\delta\vec{H}}{\rho} dm(\vec{r}) - \frac{1}{8\pi}\int_0^M \left|\vec{H}\right|^2 \frac{\delta\rho}{\rho^2} dm(\vec{r}) \qquad (3.3.28)$$

или у Декартовим координатама

$$\delta\mathcal{M} = \frac{1}{4\pi}\iiint \sum_i \vec{H}_i \delta\vec{H}_i d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 d\vec{x}_3 - \frac{1}{8\pi}\iiint \left|\vec{H}\right|^2 \frac{\delta\rho}{\rho} d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 d\vec{x}_3 \qquad (3.3.29)$$

Иако смо већ добили израз за $\frac{\delta\rho}{\rho}$, у секцији 3, увођење Декартових координата, прикладно је изразити ову варијацију у облику чланова варијације координата $\eta_i$

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \vec{\eta}_i}{\partial \vec{x}_i} \qquad (3.3.30)$$

Пре него што проценимо формулу за варијацију магнетне енергије, морамо дефинисати варијацију магнетног поља $\delta H_i$. Поприлично дуго извођење, које нећемо наводити, води на закључак да варијацију магнетног поља можемо изразити преко варијације координата и то

$$\frac{\delta\rho}{\rho} = -\sum_j \vec{H}_j \left( \frac{\partial \vec{\eta}_i}{\partial \vec{x}_j} - \vec{H}_i \frac{\partial \vec{\eta}_j}{\partial \vec{x}_i} \right) \qquad (3.3.31)$$

Ако заменимо изразе (3.3.31), и (3.3.30) у (3.3.19) имамо

$$\delta\mathcal{M} = \frac{1}{4\pi} \iiint \sum_{ij} \overrightarrow{H_i} \vec{H}_j \frac{\partial \vec{\eta}_i}{\partial \vec{x}_j} d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 d\vec{x}_3 - \frac{1}{4\pi} \iiint \sum_{ij} \vec{H}_i^2 \frac{\partial \vec{\eta}_i}{\partial \vec{x}_j} d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 d\vec{x}_3 + \frac{1}{8\pi} \iiint \vec{H}^2 \sum_j \frac{\partial \vec{\eta}_j}{\partial \vec{x}_j} d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 d\vec{x}_3$$
(3.3.32)

Ако искомбинујемо други и трећи члан добијамо

$$\delta\mathcal{M} = \frac{1}{4\pi} \iiint \sum_{ij} \vec{H}_i \vec{H}_j \frac{\partial \vec{\eta}_i}{\partial \vec{x}_j} d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 d\vec{x}_3 + \frac{1}{8\pi} \iiint \vec{H}^2 \sum_j \frac{\partial \vec{\eta}_j}{\partial \vec{x}_j} d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 d\vec{x}_3 \qquad (3.3.33)$$

Сада, ако претпоставимо да је $\vec{\eta_\iota}$ функција само од $\vec{x_\iota}$, тада ће сума по j у првом члану нестати, и преостали резултат је

$$\delta\mathcal{M} = \frac{1}{8\pi} \iiint \left( \sum_i 2\vec{H}_i^2 \frac{\partial \vec{\eta}_j}{\partial \vec{x}_j} - \left|\vec{H}\right|^2 \frac{\partial \vec{\eta}_i}{\partial \vec{x}_i} \right) d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 d\vec{x}_3 \qquad (3.3.34)$$

У овом тренутку, прикладно је да се поново преиспита природа варијације $\eta_i$. Раније смо претпоставили да је $\xi_0$ константа у систему. Еквивалентна претпоставка за $\eta_i$ је

$$\vec{\eta_\iota} = const \;\; \vec{x}_i \qquad (3.3.35)$$

Заменом ове експлицитне варијације у једначину (3.3.34), добијамо

$$\delta\mathcal{M} = -\frac{const}{8\pi} \iiint \left|\vec{H}\right|^2 d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 d\vec{x}_3 \qquad (3.3.36)$$

Сада, како желимо да размотримо исти начин пулсирајуће форме као и раније, захтевамо

$$\eta = \delta r \qquad (3.3.37)$$

Или $\frac{\eta}{r} = \xi = \xi_0 e^{i\sigma t} \hat{r}$ (3.3.38)

Користећи дефиницију за $\eta_i$, и једначину (3.3.36), имамо

$$const \left( \frac{x_i + x_j + x_k}{r} \right) = \xi = \xi_0 e^{i\sigma t} \qquad (3.3.39)$$

Ова релација може бити тачна само ако размотримо да су пулсације три координате $(\eta_i)$, у истој фази и једнаких амплитуда, и ако

$$const = \xi_0 e^{i\sigma t} \qquad (3.3.40)$$

Сада, користећи дефиницију за масу дате запремине у Декартовим координатама, и вредност константе у (3.3.36), можемо преписати варијацију магнетне енергије као

$$\delta\mathcal{M} = -\xi_0 e^{i\sigma t}\left(\frac{1}{8\pi}\int_0^M \frac{\vec{H}^2}{\rho}\, dm(\vec{r})\right) \qquad (3.3.41)$$

Ако искористимо једначину (3.3.26) можемо једначину варијационе магнетне енергије написати за равнотежно стање

$$\delta\mathcal{M} = -\xi_0 e^{i\sigma t}\mathcal{M}_0 \qquad (3.3.42)$$

Добили смо и последњи израз који нам треба за одређивање варијационе форме теореме виријала (ј-на 3.3.7). можемо сада заменити једначине (3.3.16), (3.3.26) и (3.3.42) у једначину (3.3.7)

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(2\xi_0 e^{i\sigma t} I_0\right) = -2e^{i\sigma t}\xi_0\omega_0 L_0 + 3(\gamma-1)\left(\xi_0 e^{i\sigma t}\right)(\omega_0 L_0 + \Omega_0 + \mathcal{M}_0) - \xi_0 e^{i\sigma t}\Omega_0 - \xi_0 e^{i\sigma t}\mathcal{M}_0$$
(3.3.43)

Поједностављивањем једначине (3.3.43) добијамо

$$\sigma^2 = \frac{-(3\gamma-4)(\Omega_0 + \mathcal{M}_0) + (5-3\gamma)\omega_0 L_0}{I_0} \qquad (3.3.44)$$

Иако смо навели неке стриктне апроксимације изводећи једначину (3.3.44), не требамо се бринути, јер нису све од великог значаја. Претпоставка константности $\xi_0$ и $\gamma$ је направљена ради интеграљења у члановима оригиналних параметара. Ако је неопходно, ову апроксимацију можемо изоставити и интегралан приступ, сличан једначини (3.2.18) се може извести. Међутим, рад потребан да се добије овакав израз није тривијалан и да би био користан мора се знати детаљан модел. Мора се знати и геометрија магнетног поља звезде да би се добили интеграли који произилазе из таквих резултата. Такође, да би се проучавала еволуција $\sigma^2$, потребно је много нумеричког рада. За проучавање ефеката који настају при променама $\gamma, \Omega_0, \mathcal{M}_0, \omega_0,$ и $L_0$, једначина (3.3.42) је адекватнија и много лакша за решавање. Ако допустимо да $\eta_0$ и $\omega_0$ оду у нулу, онда једначина (3.3.44) постаје идентична предходно изведеној једначини (3.2.19) допуштајући да само $\omega_0$ иде у нулу долазимо до истог резултата до кога су дошли Чандрасекар и Лимбер (1954.). Ако $\omega_0$ није нула, а $\mathcal{M}_0$ нула, израз прелази у онај ког је извео Ледо (1945.). Не треба да буде изненађујуће ако магнетна енергија улази као додатак гравитационој енергији. Обе су потенцијалне енергије, и како су основне једначине скаларне по природи, можемо очекивати да крајњи резултат само „модификује“ гравитациону енергију. Међутим, ротациона енергија је кинетичка по природи и као таква не треба да улази у крајњи резултат на исти начин као и магнетна енергија. Хајде да кратко истражимо ефекат на $\sigma^2$, а притом и на период пулсирања у присуству магнетне и ротационе енергије. Тада

$$T = 2\pi/\sigma \qquad (3.3.45)$$

Повећање σ довди до смањења периода респективно. Сада, како је $\gamma > 4/3$, и гравитациона потенцијална енергија по дефиницији негативна, први члан у једначини (3.3.44) ће бити позитиван само ако је:

$$|\Omega_0| > \mathcal{M}_0 \qquad (3.3.46)$$

Увођење магнетног поља доводи до смањења $\sigma^2$, и на тај начин продужава период пулсирања. Међутим, додавање ротационе енергије ($\omega_0$и $L_0$), настоји да повећа $\sigma^2$ док год је $\gamma > 5/3$. Када је $\gamma > 5/3$ увођење ротационе енергије не утиче на период пулсирања. Ако је $\gamma < 4/3$, утицај ротације је сличан утицају магнетног поља.

## 3.4 Варијационе форме површинских чланова

Приликом извођења теореме виријала, напоменули смо раније да теорема дивергенције води до одређених површинских интеграла, које смо генерално игнорисали. Формално они се могу занемарити ако границе површине коју посматрамо означимо као бесконачне. Међутим, у реалности, ово је неприкладна претпоставка за звезде јер оне имају дефинисане границе простирања. Код звезда које поседују магнетно поље које се простире далеко изван саме површине, површински интеграли морају бити укључени. Они се обично занемарују јер се њихов допринос укупном магнетном пољу сматра малим у односу на допринос запреминских интеграла. Иако ово може бити тачно за звезде које поседују једноставна поља, тешко да се може искористити за друге гасовите конфигурације као што су бљескови. Из наведеног разлога, хајде да размотримо како ови површински чланови утичу на варијациони формализам разматран у претходном одељку. Да бисмо олакшали прорачун, претпоставимо да је звезда скоро сферична и да су пулсације радијалне. Када би магнетно поље било јако, ово очигледно не би могло да важи, и морали бисмо да користимо комплетну тензорску теорему виријала. Међутим, једноставност коју постижемо коришћењем скаларне теореме виријала, оправдава приступ за потребе илустрације. Хајде да кренемо од самог порекла теореме, као што је претставио и Чандрасекар. Једначина кретања за гас без отпорности је

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} = -\nabla\rho + \rho\nabla\Phi + \frac{1}{4\pi}\left(\nabla \times \vec{\mathrm{H}}\right) \times \vec{H} \qquad (3.4.1)$$

Коришћењем идентитета $\left(\nabla \times \vec{\mathrm{H}}\right) \times \vec{H} = \left(\vec{H} \cdot \nabla\right)\vec{H} - \nabla\left(\vec{H} \cdot \vec{H}\right)$, и узимањем скаларног производа једначине (3.4.1) и вектора положаја r, и касније интеграљењем по целом простору ограђеном границама површине, добијамо

$$\int_V \rho\vec{r}\frac{d\vec{u}}{dt}dV = -\int_V \vec{r} \cdot \nabla \mathrm{P} \mathrm{dV} + \int_V \rho\vec{r} \cdot \nabla\Phi \mathrm{dV} + \frac{1}{4\pi}\int_V \vec{r} \cdot \left(\vec{H} \cdot \nabla\right)\vec{H} dV - \frac{1}{8\pi}\int_V \vec{r} \cdot \nabla\left(\vec{H}\right)^2 dV \quad (3.4.2)$$

Као и у секцији 3, ово постаје:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2} - 2T = 3(\Gamma - 1)U + \Omega + \mathcal{M} - \int_S P_0\vec{r} \cdot d\vec{S} - \frac{1}{8\pi}\int_S \vec{H}_0^2\vec{r} \cdot d\vec{S} + \frac{1}{4\pi}\int_S \left(\vec{r}_0 \cdot \vec{H}_0\right)\left(\vec{H}_0 \cdot d\vec{S}\right) \quad (3.4.3)$$

Где су $P_0$ и $H_0$ гасни притисак и магнетно поље присутни на површини $r_0$. Сада нас занима понашање три интеграла у једначини (3.4.3), док смо остале чланове до сада сматрали познатим. Размотримо сада ефекат површинског члана који настаје због притиска, тако што ћемо узети варијацију површинског интеграла притиска.

$$\delta \int_S \ P_0\overrightarrow{r_0} \cdot d\vec{S} = \int_S \ \delta P_0\overrightarrow{r_0} \cdot d\vec{S} + \int_S \ P_0\delta\overrightarrow{r_0} \cdot d\vec{S} + \int_S \ P_0\overrightarrow{r_0} \cdot d\big(\overrightarrow{\delta S}\big) \qquad (3.4.4)$$

Само за радијалне варијације

$$d\big(\delta\vec{S}\big) = 2\overrightarrow{r_0}\delta\vec{r}_0 \sin\theta d\theta d\varphi = 2\xi\vec{r}_0^{\,2} \sin\theta d\theta d\varphi = 2\xi d\vec{S} \qquad (3.4.5)$$

где је, као у секцији 2, $\xi = \delta\vec{r}/\vec{r}$. Већ смо показали да за адјабатске пулсације важи

$$\frac{\delta P}{P} = \gamma\frac{\delta\rho}{\rho} = -\gamma\left(3\xi + \vec{r}\frac{d\xi}{d\vec{r}}\right) \qquad (3.4.6)$$

Комбинујући једначине (3.4.5) и (3.4.6) са једначином (3.4.4) добијамо

$$\delta \int_S \ P_0\overrightarrow{r_0} \cdot d\vec{S} = 3(\gamma - 1) \int_S \ \xi P_0\overrightarrow{r_0} \cdot d\vec{S} - \gamma \int_S \ \left(\vec{r}_0 \frac{d\xi}{dt}\bigg|_{r_0}\right)\overrightarrow{r_0} \cdot d\vec{S} \qquad (3.4.7)$$

Раније смо претпоставили да је ξ константан кроз целу звезду, па стога његов извод тежи нули. Овде захтевамо да извод нестане на површини да бисмо упростили једначину (3.4.7) да добијемо

$$\delta \int_S \ P_0\overrightarrow{r_0} \cdot d\vec{S} = 3(\gamma - 1)\, \xi \int_S \ P_0\overrightarrow{r_0} \cdot d\vec{S} \qquad (3.4.8)$$

Сада размотримо варијацију два магнетна интеграла у једначини (3.4.3)

$$\delta\left[\frac{1}{8\pi}\int_S \ 2\big(\vec{r}_0 \cdot \vec{H}_0\big)\big(\overrightarrow{H_0} \cdot \overrightarrow{dS}\big) - \frac{1}{8\pi}\int_S \ \vec{H}_0^2\vec{r}_0 \cdot d\vec{S}\right] = \frac{1}{8\pi}\int_S \ 2\big(\delta\vec{r}_0 \cdot \vec{H}_0\big)\big(\vec{H}_0 \cdot d\vec{S}\big) + \frac{1}{8\pi}\int_S \ 2\big(\overrightarrow{r_0} \cdot \delta\vec{H}_0\big)\big(\overrightarrow{H_0} \cdot d\vec{S}\big) + \frac{1}{8\pi}\int_S \ 2\big(\overrightarrow{r_0} \cdot \vec{H}_0\big)\big(\delta\vec{H}_0 \cdot d\vec{S}\big) + \frac{1}{8\pi}\int_S \ 2\big(\overrightarrow{r_0} \cdot \vec{H}_0\big)\big(\vec{H}_0 \cdot \delta d\vec{S}\big) + \frac{1}{8\pi}\int_S \ 2\big(\vec{H}_0 \cdot \delta\vec{H}_0\big)\big(\vec{H}_0 \cdot d\vec{S}\big) - \frac{1}{8\pi}\int_S \ \vec{H}_0^2\delta\vec{r}_0 \cdot d\vec{S} - \frac{1}{8\pi}\int_S \ \vec{H}_0^2\overrightarrow{r_0} \cdot d\delta\vec{S} \qquad (3.4.9)$$

Овај израз се заиста упрошћава коришћењем

$$\delta\vec{H} = 2\xi\vec{H}_0 \qquad (3.4.10)$$

Користећи овај резултат, једначину (3.4.5) и дефиницију за ξ, једначина (3.4.9) постаје

$$\delta Q_m = -\frac{\xi}{8\pi}\left[\int_S \ 2\big(\overrightarrow{r_0} \cdot \vec{H}_0\big)\big(\vec{H}_0 \cdot d\vec{S}\big)\right] - \int_S \ \vec{H}_0^2\overrightarrow{r_0} \cdot d\vec{S} \qquad (3.4.11)$$

где $Q_m$ претставља оригинални магнетни члан који се појављује у једначини (3.4.3) тако варијација површинских чланова може бити претстављена као

$$\delta Q_m = -\xi Q_m$$

$$\delta Q_p = 3(\gamma - 1)\xi Q_P \qquad (3.4.12)$$

Ако претпоставимо да су пулсације линеарне, као и у претходним поглављима, тада ће израз за фреквенцију пулсације бити

$$\sigma^2 = \frac{(3\gamma-4)(\Omega_0+\mathcal{M}_0)-(5-3\gamma)\omega_0 L_0+(3\gamma-1)Q_p-Q_m}{I_0} \qquad (3.4.13)$$

Како је $\gamma > 4/3$, допринос површинских чланова притиска доводи до повећања $\sigma^2$ и веће стабилности самог система. У суштини, овај резултат доводи до тога да нестабилан систем мора да се супростави површинском притиску или повећањем или смањењем површине. Тако резултат потпуно зависи од геометрије магнетног поља. Ефекат геометрије магнетног поља може бити јаснији сматрајући звезду сферичном, тако да је вектор положаја увек нормалан на површину. Под оваквим условима $Q_m$ постаје

$$Q_m = \frac{1}{8\pi}\int_S \left[2\left(\widehat{H_0}\cdot\hat{r}\right)^2 - 1\right]\vec{H}_0^2\vec{r}d\vec{S} = \frac{1}{8\pi}\int_S \cos\beta \vec{H}_0^2\vec{r}d\vec{S} \qquad (3.4.14)$$

где је β локални угао између магнетног поља и радијус вектора. У сваком случају очигледно је да је

$$|Q_m| < \frac{1}{8\pi}\int_S \vec{H}_0^2\vec{r}d\vec{S} = \frac{1}{2}R_0^3\overline{H_0^2} \qquad (3.4.15)$$

Вредно је нагласити да у случају да магнетно поље расте са дубином, овај члан може бити истог реда величине као унутрашња енергија магнетног поља и мора бити уврштен. Надаље, да ли је локална дистрибуција величине $Q_m$ позитивна или негативна, зависи од тога да ли је локална вредност β већа или мања од $\pi/4$. Како позитивна вредност $Q_m$ доводи до повећања $\sigma^2$, поља која показују локални угао у односу на радијус вектор већи од $\pi/4$, теже да стабилизују систем, док јача поља доводе до нестабилности. Ова једноставност резултата произилази из чињенице да ће радијално кретање тежити више да сабије поље тангенцијално у односу на кретање, него под углом од 45 степени, и на тај начин уклањати енергију из кретања. Насупрот томе, радијално поље ће хранити пертурбацију која доводи до нестабилности.

Једна ствар постаје одмах јасна из ове дискусије. Ако је $Q_m$ битан члан у једначини (3.25), радијалне пулсације се неће појавити.

## 3.5 Теорема виријала и стабилност

У последњој секцији навели смо како површински чланови утичу на стабилност система ког посматрамо. Овај процес представља једну од највећих примена теореме виријала. Међутим пре него што почнемо детаљно извођење теореме виријала за ову сврху, морамо се на тренутак осврнути самом термину стабилност.

Када тражимо значење речи обично се осврћемо речнику. Овај приступ доводи до следеће дефиниције.

Стабилнос: особина тела које је изазвана, да када се поремети стање равнотеже или стабилног кретања, развије силе које ће тежити да тело врате у првобитно стање.

Реч стабилност је често повезана са речју еквилибријум. Међутим постоје многе динамичке ситуације које су далеко од еквилибријума, а које би и најскептичнија особа назвала стабилним. Један од најбољих примера за астрономе поготово, јесте звезда. Не могу се све звезде сматрати стабилним, али већина њих у главном низу јесу. Како звезде нису заиста у стању еквилибријума (у равнотежном стању), него више у стабилном стању, видимо да морамо проширити нашу концепцију стабилности и да укључимо неке динамичке системе. Нормална дефиниција равнотежног стања захтева да сума свих сила које делују у систему буде нула. Овај концепт може бити проширен на динамичке системе ако захтевамо да генерализоване силе ($Q_i$), које делују у систему, буду једнаке нули. Концепт генерализованих сила може бити најпростије приказан као

$$Q_i = \sum_i \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_i} \qquad (3.5.1)$$

где $F_j$ претставља физичке силе које делују у систему на j-ту честицу, а $q_i$ представља било који сет линеарно независних координата, које су адекватне за описивање система. У конзервативним системима, све силе се изводе из потенцијала φ. Тако, генерализоване силе могу бити написане као

$$Q_i = -\sum_j \nabla_j \Phi \cdot \frac{d\vec{r}_j}{dq_i} = \sum_j \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \vec{r}_j}\right) \vec{r_j} \cdot \left(\frac{\partial \vec{r_j}}{\partial q_i}\right) = -\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{q}_i} \qquad (3.5.2)$$

Тако, ако желимо да генерализоване силе нестају, потенцијална енергија мора бити у екстрему

$$Q_i = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathrm{q}_i^2}\right)\Bigg|_{q_i = q_i(0)} = 0 \qquad (3.5.3)$$

Сада, ако узмемо ову дефиницију за еквилибријум, можемо наставити за тражењем дефиниције стабилног еквилибријума. Ако је потенцијални екстрем наведен у једначини (3.5.3) минимум, онда се за еквилибријум каже да је стабилан. На тај начин наметнути услови на потенцијал су

$$Q_i = -\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathrm{q}_i^2}\right)\Bigg|_{q_i = q_i(0)} > 0 \qquad (3.5.4)$$

Да бисмо видели да ли је ова дефиниција стабилности доследна оној из речника, размотрићемо следеће аргументе. Претпоставимо да је систем изведен из стања равнотеже, повећањем укупне енергије од оне у еквилибријуму. Сваки поремећај у еквилибријуму ће довести до повећања потенцијалне енергије. Како закон о одржању енергије мора и даље да важи, то значи да кинетичка енергија мора да се смањи. Ово значи да ће све честице смањивати своју брзину и у неком тренутку она ће достићи нулу. Тако ће кретање система бити ограничено. Ако пак поремећај доведе до смањења потенцијалне енергије, онда ће брзина моћи да се повећава без граница. Свакако ћемо такво кретање назвати нестабилним.

У скорије време, почело се са коришћењем теореме виријала као оруђа за вршење линеаризације система, уместо да се дефинише стање система. Међутим, дефинисање стабилног стања система је инспирисало Јакобија да развије репрезентацију Лагранжевог идентитета за n тела, из кога се у кратким корацима долази до теореме виријала. Да бисмо видели колико је блиска теорема виријала са стабилношћу хајде да резимирамо неке аргументе до којих је дошао Јакоби. У поглављу 1 дошли смо до упрошћеног израза Лагранжевог идентитета за самогравитирајуће системе као:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2} = 2T + \Omega \qquad (3.5.5)$$

Можемо са сигурношћу рећи да ако је $\frac{d^2I}{dt^2} > 0$ за свако t, систем би морао имати макар једну честицу чије би позиционе координате расле без граница. Систем би био нестабилан. Мађутим, како обе величине и T и $\Omega$ варирају у току времена, било би тешко нешто рећи а приори о $\frac{d^2I}{dt^2}$ из самог Лагранжевог идентитета. Тако је Јакоби претпоставио константност укупне енергије ($E = T + \Omega = const$), и уз помоћ чињенице да је за самогравитирајуће системе $\Omega > 0$, модификовао једначину (3.5.5)

$$\frac{1}{2}\frac{d^2I}{dt^2} = 2E - \Omega > 2E \qquad (3.5.6)$$

Самим тим ако је $E > 0$, онда је и $\frac{d^2I}{dt^2} > 0$, па је систем нестабилан. Ово је познато као Јакобијев критеријум стабилности и обезбеђује довољне (али не и потребне) услове да би систем био нестабилан. Константност E са временом претставља вредни критеријум за стабилност и због тога га и Јакоби користи.

Сада, хајде да видимо како су повезани варијациона форма теореме виријала и стабилност, имајући на уму да је варијациони приступ у ствари линеарна анализа. Поглавље 3 је већином било посвећено добијању израза за фреквенцију пулсирајућих система. Развили смо вредност за фреквенцију у стању енергетске равнотеже система. Међутим овај израз је нити позитиван нити негативан. У претходној секцији смо дискутовали само значење позитивних вредности, док негативне вредности фреквенција нису имале очигледан физички значај. Хајде да се осврнемо опет самој природи претпостављених пулсација, да бисмо дубље испитали значење ових фреквенција пулсирања. У секцији 2 (једначина (3.2.12)) претпоставили смо да су пулсације периодичне и облика:

$$\frac{\delta\vec{r}}{\vec{r}} = \xi_0 e^{i\sigma t} \qquad (3.5.7)$$

где је σ фреквенција пулсирања, а $\xi_0$ независтан од времена. Сада када бисмо направили формалну везу између σ и периода пулсације, и узели да је σ чисто имагинарна велићина, можемо писати

$$\sigma = \pm 2\pi i / t_0 \qquad (3.5.8)$$

где је $t_0$ реалан број. Комбинујући једначине (3.5.7) и (3.5.8) добијамо:

$$\frac{\delta\vec{r}}{\vec{r}} = \xi_0 e^{\pm 2\pi t/t_0} \qquad (3.5.9)$$

Тако пулсације постају по природи експоненцијалне. Ако је знак σ негативан, онда ће знак експоненцијалног члана у једначина (3.5.9) бити позитиван и пулсације би расле до бесконачности са степеном раста који одређује $t_0$.

Можемо бити у искушењу да претпоставимо негативан знак једначине (3.5.9), и тако осигурамо стабилан систем у коме пулсације полако нестају, иако је $\sigma^2 < 0$. Ово би било погрешно. Специфично решење би било потпуно дефинисано за ограничени услов у t=0. Надаље, претпоставимо да је присутан пун континум пертурбација, резултујућа форма је мала али неизбежна, полазне форме перфектно произведене из статистичких флуктуација. Тада, ако постоји само један случај где је $\sigma^2 < 0$, нестабилност тог мода ће расти без граница. Тада ово постаје довољан услов да систем буде нестабилан у стриктном смислу речи:

$$\sigma^2 < 0 \qquad (3.5.10)$$

Вредно је напоменути да се овај критеријум примењује на цео систем, и представља глобални услов стабилности. Међутим, може постати локални услов, узимајући инфитезималну запремину и површинске услове дискутоване у секцији 4.

Сада ћемо да видимо какве последице ово има на стабилност звезда. У другој секцији утврдили смо израз за фреквенцију пулсирања гравитирајуће гасне сфере (једначина 3.2.19). Сада, ако употребимо једначину нестабилног система (3.5.10), видимо да ће сфера постати нестабилна, када

$$-\frac{(3\gamma-4)\Omega_0}{I_0} < 0 \qquad (3.5.11)$$

Како је момент инерције ($I_0$) у суштини позитиван, а гравитациона потенцијална енергија негативна, једначина (3.5.11) постаје:

$$(3\gamma - 4) < 0 \qquad (3.5.12)$$

тј. $\gamma < {}^{4}/_{3}$. Тада, звезда постаје нестабилна када је γ мањи од 4/3. Ово је позната изјава нестабилне креације демонстрирана од стране Чандрасекара у својој књизи Звездане структуре. Он је даље показао да је гас код кога је γ једнака 4/3 одговара гасу код кога целокупни притисак потиче од радијације. Ако размотримо остале критеријуме за стабилност (једначина 3.5.12), можемо видети да је неопходан услов за стабилност хомогених, неротирајућих гасних сфера:

$$\gamma > {}^{4}/_{3} \qquad (3.5.13)$$

Тако, имајући што више информација колико је могуће из израза за пулсирање изведеног у секцији 2, хајде да се окренемо општој формули која произилази из наше анализе у секцији 3. Подсетимо се крајње једначине за фреквенцију пулсирања:

$$\sigma^2 = \frac{-(3\gamma-4)(\Omega_0+\mathcal{M}_0)-(5-3\gamma)\omega_0 L_0}{I_0} \qquad (3.5.14)$$

Размотримо прво гасну сферу која не ротира, али која поседује магнетно поље. Једначина (3.5.14) постаје:

$$\sigma^2 = \frac{-(3\gamma-4)(\Omega_0+\mathcal{M}_0)}{I_0} \qquad (3.5.15)$$

Ако ово убацимо у једначину нестабилних система (3.5.10) добијамо:

$$-(3\gamma-4)(\Omega_0+\mathcal{M}_0) < 0 \qquad (3.5.16)$$

Ако сада претпоставимо

$$\gamma > 4/3 \qquad (3.5.17)$$

имамо довољан услов за нестабилност у присуству магнетне енергије:

$$\mathcal{M}_0 > |\Omega_0| \qquad (3.5.18)$$

На следећи начин можемо доћи до грубе процене величине магнетног поља потребног да поремети звезду. Гравитациона потенцијална енергија сфере униформне густине је:

$$\Omega = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \qquad (3.5.19)$$

Док је магнетна енергија:

$$\mathcal{M} = -\frac{1}{8}\iiint\left|\vec{H}\right|^2 d\vec{x}_1 d\vec{x}_2 d\vec{x}_3 = \frac{R^3\overline{|H|^2}}{6} \qquad (3.5.20)$$

Комбинујући једначине (3.5.19) и (3.5.20) видимо да је корен средње квадратне вредности магнетног поља довољног да поремети сферу униформне густине:

$$\sqrt{\overline{|H|^2}} > 2\cdot 10^8 \frac{M}{R^2} gaus \qquad (3.5.21)$$

где су M и R задати у соларним јединицама. Тако за главни низ А, звезда са $M = 4M_0$ и $R = 5R_0$, имамо:

$$H_{rms} > 3\cdot 10^7 gaus \qquad (3.5.22)$$

Међутим за звезду типа $M = 100M_0 R = 2600R_0$ имамо:

$$H_{rms} > 3000 gaus \qquad (3.5.23)$$

Из ових аргумената можемо закључити, да за звезде главног низа, екстремно јако магнето поље биће довољно да доведе до нестабилности звезде. Међутим за необично велику звезду, довољно поље постаје много слабије. Могли бисмо ући у расправу да је наша груба процена за Ω толико груба да је безначајна због велике концентрације масе у центру великих звезда. Међутим, треба се назначити да је магнетно поље које можемо посматрати, нужно, површинско поље, стога нам оно даје доњу границу магнетне енергије. Тако, можемо се надати да се наша граница за магнетно поље приближна реалности.

Интересантно је напоменути да једначина нестабилности (3.5.16) дозвољава постојање гаса са $\gamma < 4/3$, пружајући тако магнетну енергију која превазилази гравитациону енергију. Заиста, једначина нестабилности (3.25) захтева неопходан услов за стабилност сваке конфигурације код које је $\mathcal{M} > |\Omega|$, тада би γ био мањи од 4/3. Међутим, такође је тачно да је физички смисао гаса са $\gamma < 4/3$ мало нејасан.

Ако размотримо ротирајућу конфигурацију без магнетног поља, једначина (3.5.12) у комбинацији са једначином нестабилности (3.5.10) постаје:

$$(5-3\gamma)\omega_0 L_0 > (3\gamma-4)\Omega_0 \qquad (3.5.24)$$

Ако ограничимо γ да буде мањи од 5/3, имамо:

$$\omega_0 L_0 > \frac{(3\gamma-4)\Omega_0}{(5-3\gamma)} \qquad (3.5.25)$$

Како је $\Omega_0$ по дефиницији негативан, видимо да ће услов стабилности увек бити задовољен са било којом вредношћу $\omega_0$. Тако, за све познате звезде, критеријум стабилности за ротацију није нарочито користан.

Све ово, међутим, не имплицира да су ротациони услови непотребни. Штавише, Ледо је показао да ротационе брзине до којих се дошло раније, могу водити до варијације периода пулсације и до 20%. Хајде да на кратко размотримо нестабилне креације код којих су присутне и ротациона и магнетна енергија. Наиме

$$(3\gamma-4)(\Omega_0+\mathcal{M}_0)-(5-3\gamma)\omega_0 L_0 > 0 \qquad (3.5.26)$$

Као и раније, услови нису задовољени осим ако $|\Omega_0| > \mathcal{M}_0$. Међутим, чак и у случајевима где је $|\Omega_0| > \mathcal{M}_0$, услови не морају бити задовољени због присуства ротационих чланова. Тако, очигледно је ако је $4/3 < \gamma < 5/3$, присуство ротације ће потпомоћи стабилност звезде. Овај резултат није интуитиван. Физичко објашњење резултата може се показати на следећи начин.

Разматрамо пулсирајуће конфигурације са ротационом и магнетном енергијом. Како се систем шири или сакупља, одређена количина енергије биће потрошена на успоравање или убрзавање ротације да би се момент импулса одржао константним. Ова енергија се мора добити од кинетичке енергије самог гаса, а како она зависи од присутних потенцијалних енергија, на крају мора доћи од гравитационе и магнетне енергије. На тај начин, количина пренешене енергије од гравитационе и магнетне, зависиће од γ. Такође како гравитациона и магнетна енергија морају бити преведене у ротациону, енергија није више у могућности да „храни“ пулсације, што доводи до ремећења звезда.

Сада се можемо запитати колико треба бити максимално повећање магнетног поља да се обезбеди додатна ротациона стабилност. Из нашег предходног истраживања о критеријуму ротационе стабилности, можемо очекивати да ће резултат бити мали. Како су критеријуми стабилности били мали у односу на магнетну нестабилност, можемо очекивати да ће утицај ротације бити мали у односу на магнетну енергију. Ако размотримо униформан систем са $\gamma = 3/2$, који ротира критичном брзином, можемо видети да магнетно поље може бити повећано само за 0,3% пре него што дође опет до нестабилности. Тако закључујемо да иако је стабилност потпомогнута ротацијом, ово повећање није значајно.

У овом тренутку, прикладно је дати неке закључке укључујући све критеријуме за стабилност везане за стабилност радијалних пулсација. Много боље би било да укључимо интегралну форму израза за фреквенцију пулсирања. Међутим, резултити до којих можемо доћи коришћењем интегралне форме и специфичних модела, могу само довести до разлике у степену форме коју смо овде извели. Само нам остаје да се надамо да овај степен разлике не буде превелик. Чандрасекар и Ферми су показали да сфера под утицајем јаког диполног поља, тежи да буде „спљоштена“ на исти начин до којег би довела ротација. Једном када је сферна симетрија нарушена, било присуством јаког магнетног поља или брзе ротације, концепт радијалне пулсације постаје недоследан. Као што смо и раније поменули, анализа оваквог проблема захтева коришћење тензорске теореме виријала и значајан увид у тип пертурбације.

До сада, дискусија се сводила на проблеме који укључују динамичку стабилност, око које, како се чини, имамо мало аргумената. Динамички нестабилан систем ће се дезинтегрисати експоненцијално, у временској скали која одговара хидродинамичкој временској скали система. Таква дискусија је обично јако дволична, да неће доћи до никаквих компликација коришћењем речи нестабилан. Ово није случај у погледу секуларне стабилности.

Појам секуларне стабилности, укључује одговор система на мале дисипативне силе, као што је вискозност, и тако мора зависити донекле од природе ових сила. Временска скала потребна за извођење нестабилности биће регулисана силама и стога мора бити дугачка. Можда једна од најочигледнијих дискусија овог термина јесте Хантерова, који наводи да постоји мање универзалан договор значења овог термина. Он наглашава да се појављују потешкоће у ротационим системима, то јест присуство кориолисових сила, који воде до очите дискусије између динамичких и секуларно стабилних система. Као што смо видели у поглављу 2, секција 5, присуство кориолисових сила нестаје прикладним избором координатног система, тако да оне немају утицај на баланс енергије у систему. Међутим, њихове варијације не нестају и стога ће имати утицај на пулсациону анализу. Како су уопштено силе конзервативне, први резултат није изненађујућ, и како радијално кретање масе у ротационом координатном систему мора реаговати на закон одржања импулса, није ни други. Сада, ако постоје дисипативне силе, као што је вискозна сила, могуће је прерасподелити локални импулс, док се очувава глобални, тако да се никад не достигне стање равнотеже. Додатно, осим за глобално ограничење укупног импулса, нема ограничења у преласку ротационог поља у термална. Заиста, присуство дисипативних сила гарантује да се ово мора десити. Тада, нестабилност у присуству ових сила се мора десити, иначе не би могле бити детектоване. Овај закључак јесте разлог за дефинисање квалитативне разлике између случаја са униформном ротацијом и диференцијалном, јер у првом случају не морамо укључити дисипативне силе, док у другом приступу морају бити експлицитно наведене. Ово представља центар дугог низа радова од стране Острикера и других, који су се бавили стабилношћу разноврсних система са диференцијалном ротацијом. Међутим у приоритету ових радова, очито стоји да су системи које су посматрали, без вискозних сила, па самим тим проблем не представља прецизност анализе, већ могућност примене саме анализе на физичке системе. У пракси, вискозност гаса у многим звездама јесте занемарљива, па ће самим тим проучавање нестабилности до које долази у присуству вискозних сила бити веома дугачко гледајући потребну временску скалу.

Не можемо очекивати да у неколико пасуса решимо спор за који је требало више од деценије да се развије. Међутим, вредно је да се напомене скорији извештаји који у суштини кажу да је тензорски виријални приступ стабилности погрешан. Присуство дисипативних сила може бити укључено у једначине кретања, и као такво, појављује се и у резултату тензорског решења Лагранжевог идентитета. Резултат анализе стабилности би онда на прави начин одражавало присуство ових сила, и тако био завистан од њихове специфичне природе. Закључујемо као и раније, да присуство сила које зависе од брзине, не утиче на теорему виријала, осим ако ове силе не зауставе или униште систем за време које користимо приликом усредњавања Лагранжевог идентитета. У овом тренутку, оштра критика теореме виријала је корисна колико и порицање ваљаности закона очувања.

# Поглавље 4

## 4. НЕКЕ ПРИМЕНЕ ТЕОРЕМЕ ВИРИЈАЛА У ЗВЕЗДАНОЈ АСТРОФИЗИЦИ

Верујемо да су до сада сви импресионирани великом спектру проблема које може да реши теорема виријала. Неки проблеми напоменути у последњем поглављу пружају увид у постигнућа достигнута коришћењем теореме, међутим, тип објеката који смо експлицитно дискутовали, поготово нормалне звезде, су за сада процењене као потпуно испитане. У циљу илустровања моћи ове изузетне теореме, не може се одолети а да се не помену неки од објеката који су мање истражени, као што су бели патуљци и неутронске звезде. Као и у претходним поглављима, задржаћемо се на утицај ротације и магнетних поља на стабилност ових типова звезда.

Битно је да се напомене, да ћемо приликом анализе стабилности белих патуљака, користити масе које су близу Чандрасекарових маса. На самом крају овог поглавља навешћемо неке основне величине, као што је полупречник звезде (Шварцшилдов радијус), до којег је звезда стабилна.

### 4.1 Пулсирајућа стабилност белих патуљака

Током 1960-их, напредан развој посматрачке астрономије наводи проблеме, који захтевају од теоретичара да постулирају постојање широког спектра објеката, који су раније разматрани само у академским интересима. Термини као што су, супермасивне звезде, неутронске звезде, црне рупе, постају одомаћени у литератури астрофизике. Многи од ових објеката су толико кондензовани да захтевају примену Опште теорије релативности или неке друге науке о гравитацији, за њихово описивање. Када се једном постулира постојање нових објеката, паметно је да се тај објекат подвргне анализи стабилности. Како се ефекти опште релативности могу видети у ефективном порасту гравитационе силе, можемо очекивати присуство смањене стабилности која је јако битна. Изненађујућ је утицај ових ефеката, које обично сматрамо малим или занемарљивим.

Инспирисан коментарима Ричарда Фајнмана из 1963. године, В.А.Фовлер примећује да ће ефекти опште релативности водити до предвиђене нестабилности код супермасивних звезда. Након што су приметили да услови за нестабилност такође постоје и код масивних белих патуљака, Чандрасекар и Трупер показују, путем детаљних прорачуна, да бели патуљак постаје нестабилан када се његов пречник смањи до отприлике 246 Шварцшилдовог радијуса, односно 1000км. Ово одговара маси од 1,5% масе испод добро познате Чандрасекарове границе за масу дегенерисаних објеката. Током наредних 15 година, ова нестабилност привлачи много пажње, и ми сада нећемо препричати целокупне напоре за њено решавање. Размотрићемо, из ове перспективе и теореме виријала, како можемо предвидети резултат без великих прорачуна.

Можемо приметити да ће анализа стабилности и пост њутновска форма теореме виријала, представљена у поглављу 2 ( једначина 2.4.15), представљати основу за описивање ових ефеката. Међутим, процена релативистичких чланова са десне стране једначине (2.4.15) је екстремно захтевна. Уместо тога, претпостављајући сферну симетрију можемо поћи од сферносиметричних једначина кретања које су дали Малцер и Торн. Тако

$$y\frac{d}{dt}\left(y\frac{dr}{dt}\right) = -\frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}\left[\frac{1+\frac{y^2}{c^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{2Gm(r)}{rc^2}}{1+\frac{P}{\rho c^2}}\right] - \frac{Gm(r)}{r^2} - \frac{4\pi G\rho r}{c^2} \qquad (4.1.1)$$

где је $y = \frac{\rho + P/_{c^2}}{\rho_0}$. Ако преусмеримо нашу пажњу на објекте који се налазе у стању еквилибријума, никаква радијална кретања великих размера не могу постојати. Тако члан који у себи садржи $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$, може бити занемарен па формула (4.1.1) постаје:

$$y^2\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{1}{\rho}\frac{dP}{dr}\left[\frac{1-\frac{2Gm(r)}{rc^2}}{1+\frac{P}{\rho c^2}}\right] - \frac{Gm(r)}{r^2} - \frac{4\pi GPr}{c^2} \qquad (4.1.2)$$

или у постњутновској апроксимацији:

$$\rho y^2\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dP}{dt}\left[1 - \frac{P}{\rho c^2} - \frac{2Gm(r)}{rc^2} - \cdots -\right] = \frac{Gm(r)\rho}{r^2} - \frac{4\pi GP\rho r}{c^2} \qquad (4.1.3)$$

У хидростатичкој равнотежи, члан $dP/dr$ је дат од стране Опенхајмера као:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\left(\rho + P/_{c^2}\right)\left[m(r) + 4\pi r^3 P/_{c^2}\right]}{r^2\left(1 - 2Gm(r)/_{rc^2}\right)} \qquad (4.1.4)$$

односно

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{Gm(r)\rho}{r^2} + \frac{1}{c^2}\left[\frac{2G^2m^2(r)\rho}{r^4} + \frac{Gm(r)\rho}{r^2} + 4\pi G\rho^2\right] + 0\left(\frac{1}{c^4}\right) \qquad (4.1.5)$$

Ако $\frac{dP}{dr}$ задржимо експлицитно за проширење првог члана једначине (4.1.3), сви остали релативистички чланови у једначини (4.1.5) биће реда $\frac{1}{c^4}$. Тако једначина (4.1.3) постаје:

$$\rho y^2\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{dP}{dr} - \frac{Gm(r)\rho}{r^2}\left[1 + \frac{P}{\rho c^2} + \frac{2Gm(r)}{rc^2} + \cdots +\right] - \frac{4\pi GP\rho r}{c^2} \qquad (4.1.6)$$

Ако опет формирамо Лагранжев идентитет множењем са r и интеграљењем по целој запремини, имамо:

$$\int_V \left(\rho y^2 r\frac{d^2r}{dt^2}\right)dV = -\int_0^R 4\pi r^3\frac{dP}{dr}dr - \int_V \frac{Gm(r)\rho}{r}dV - \int_V \frac{Gm(r)\rho}{rc^2} - 2\int_V \left(\frac{G^2m^2(r)}{rc^2}\right)dV - \int_V \left(\frac{4\pi GP\rho r^2}{c^2}\right)dV \qquad (4.1.7)$$

Последњи интеграл можемо интегралити парцијално (видети додатак), па добијамо:

$$\int_V \left(\frac{4\pi GP\rho r^2}{c^2}\right)dV = \int_V \left(\frac{G^2m^2(r)}{r^2c^2}\right)dV \qquad (4.1.8)$$

Након једноставног рачуна, први интеграл постаје

$$\int_0^R 4\pi r^3 \left(\frac{dP}{dr}\right) dr = \int_0^R 4\pi r^3 dP = 4\pi r^3 P|_0^R - \int_0^R 12\pi\, r^2 P dr = -3\int_V \; PdV \qquad (4.1.9)$$

Коришћењем резултата добијених из једначина (4.1.8) и (4.1.9, и убацивањем у једначину (4.1.7), примећујући да први члан са десне стране једначине (4.1.9) иде у нулу, затим преписивајући леву страну једначине у члановима релативистичког момента инерције, добијамо:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I_r}{dt^2} = 3\int_V \; PdV - \Omega - \frac{1}{c^2}\int_V \; \frac{Gm(r)P}{r} dV - \frac{3}{c^2}\int_V \; \frac{G^2 m^2(r)\rho}{r^2} dV \qquad (4.1.10)$$

Што је еквивалентно једначини (2.4.15) у поглављу 2. За сферичне звезде само мало једноставнији. Дошли смо до истог резултата као и у Њутновском приступу, за звезде у хидростатичкој равнотежи.

Узимајући варијацију једначине (4.1.10) као и у поглављу 3, имамо:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\delta I_r) = 3\delta\left[\int_V \; PdV\right] - \delta\Omega - \frac{1}{c^2}\delta\left[\int_V \; \frac{Gm(r)P}{r} dV\right] - \frac{3}{c^2}\delta\left[\int_V \; \frac{G^2 m^2(r)\rho}{r^2} dV\right] (4.1.11)$$

Претпоставимо да варијација ових величина потиче од варијације независне променљиве δr. Надаље претпоставимо $\frac{\delta r}{r} = \xi_0 e^{i\sigma t}$, где је $\xi_0$ константа, и да је варијација адјабатска. Како можемо писати густину укупне топлотне енергије као $(\Gamma_1 - 1)u = P$, први члан постаје:

$$3\delta\left[\int_V \; PdV\right] = 3 < \Gamma_1 - 1 > \delta U \qquad (4.1.12)$$

Једначина (3.2.10) (поглавље 3) води до:

$$\delta\Omega = -\xi\Omega \qquad (4.1.13)$$

Нека је $\Omega_1 = \frac{3}{2}\int_0^M \frac{G^2 m^2(r)}{r^2 c^2} dm(r)$ (4.1.14)

Варијација последњег члана једначине (4.1.11) је:

$$2\delta\Omega_1 = \frac{3}{c^2}\int_0^M G^2 m^2(r)\delta\left(\frac{1}{r^2}\right) dm(r) = -\,2\xi\Omega_1 \qquad (4.1.15)$$

Погодно је (нарочито за релативистичке услове) да се нормализује до бездимензионог члана $(2GM/Rc^2)$. Тако:

$$\Omega_1 = \frac{3}{2}Mc^2\int \frac{1}{4}\left(\frac{2GM}{Rc^2}\right)^2 \left(\frac{m^2(r)}{M}\right)\left(\frac{R}{r}\right)^2 \frac{dm(r)}{dM} = \frac{3}{8}Mc^2\left(\frac{2GM}{Rc^2}\right)^2 \int_0^1 (q/x)^2 dq \qquad (4.1.16)$$

где су димензионе променљиве q=m(r)/M, и x=r/R. Остали чланови у једначини (4.1.11) могу бити нормализовани на сличан начин ако узмемо у обзир хомологну зависност од P, облика:

$$P = \eta G m^2(r)/r^4 \qquad (4.1.17)$$

где је $\eta$ бездимензиони фактор скале. Тако можемо допустити

$$P_1 = \frac{1}{c^2}\int_V \frac{Gm(r)PdV}{r^2} = \frac{1}{c^2}\int_0^R \frac{4\pi\eta G^2 m^3(r) r^2 dr}{r^5} = Mc^2\left[\frac{2MG}{Rc^2}\right]^2 \int_0^1 \pi\eta\left(\frac{q}{x}\right)^3 dx \qquad (4.1.18)$$

Као и у једначини (4.1.16), интеграл у једначини (4.1.18) је бездимензиони и одређен је моделом равнотеже. Тада, остали део једначине (4.1.18):

$$\delta P_1 = -2\xi P_1 \qquad (4.1.19)$$

Заменом P са $\Gamma_1 - 1$, и допуштајући:

$$U_1 = \frac{1}{c^2}\int_V \frac{uGm(r)}{r} dV = \frac{1}{\langle\Gamma_1 - 1\rangle} P_1 \qquad (4.1.20)$$

једначина (4.1.11) постаје:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\delta I_r) = 3\langle\Gamma_1 - 1\rangle\delta U - \delta\Omega + \langle\Gamma_1 - 1\rangle\delta U_1 - 2\delta\Omega_1 \qquad (4.1.21)$$

Сада, како је унутрашња енергија U, спојена са свим осталим члановима, укључучујучи и релативистичке, морамо да их елиминишемо, само ћемо то радити на мало другачији начин него у поглављу 3. Како укупна енергија мора бити константна, њена варијација је нула. Тако,

$$\delta E = 0 = \delta U - \delta\Omega + \delta U_1 - \delta\Omega_1 \qquad (4.1.22)$$

и једначина (4.1.21) постаје:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\delta I_r) = \langle 3\Gamma_1 - 4\rangle\delta\Omega - 2\langle\Gamma_1 - 1\rangle\delta U_1 - \langle 3\Gamma_1 - 5\rangle\delta\Omega_1 \qquad (4.1.23)$$

Мењајући варијациону форму једначине (4.1.13) (4.1.15 и 4.1.19 у j-ну 4.1.23), и примећијићи да ће двострука временска диференцијација пертурбације дата као $\sigma^2$ у првом члану, једначина (4.1.23) постаје:

$$\sigma^2 I_r \bar{y} = \langle 3\Gamma_1 - 4\rangle\Omega - 4\langle\Gamma_1 - 1\rangle U_1 + 2\langle 3\Gamma_1 - 5\rangle\Omega_1 \qquad (4.1.24)$$

Ако нормирамо $\Omega_0$, који за политропне лопте има облик:

$$\Omega_0 = \left(\frac{3}{5-n}\right)\frac{GM}{R} = \left(\frac{1}{5-n}\right)\frac{3}{2}\left(\frac{2GM}{Rc^2}\right)Mc^2 \qquad (4.1.25)$$

И ако именујемо димензиони интеграл у једначини (4.1.16) и (4.1.18), $\varsigma_1$ и $\varsigma_2$, респективно, једначина (4.1.24) постаје:

$$\sigma^2 I_r \bar{y} = Mc^2\left(\frac{2GM}{Rc^2}\right)\left[\frac{3}{2(5-n)}\langle 3\Gamma_1 - 4\rangle - \left(\frac{2GM}{Rc^2}\right)\left(4\varsigma_1\langle\Gamma_1 - 1\rangle + 2\varsigma_2\langle 5 - 3\Gamma_1\rangle\right)\right] \qquad (4.1.26)$$

Како је средњи фактор релативности $\bar{y}$ увек позитиван, овај израз може да буде критеријум за стабилност као и у поглављу 3. То је:

$$\left(\frac{R_S}{R}\right)(4\varsigma_1\langle\Gamma_1 - 1\rangle + 2\varsigma_2\langle 5 - 3\Gamma_1\rangle) < \left(\frac{3\langle 3\Gamma_1 - 4\rangle}{2(5-n)}\right) \qquad (4.1.27)$$

где смо искористили чињеницу да је Шварцшилдов радијус ($R_S$) $2GM/c^2$. Ово сада можемо искористити да проучимо стабилност белих патуљака јер се њихова маса приближава Чандрасекаровој граници. Када се ово деси, једначина стања се приближава електронском дегенерисаном релативистичком гасу, политропног индекса n=3.

Како $n \to 3$, и $\Gamma_1 \to {}^4/_3$, и систем постаје нестабилан. Нека је:

$$\Gamma_1 = \frac{4}{3} + \varepsilon \qquad (4.1.28)$$

Једначина (4.1.27) постаје (користећи Фоловерово решење за $\varsigma_1$ и $\varsigma_2$):

$$\frac{9\varepsilon}{4} - \frac{R_S}{R_0}\left(\frac{4}{3}\varsigma_1 + 2\varsigma_2\right) = \frac{9}{4}\varepsilon - 2.5\frac{R_S}{R_0} \geq 0 \qquad (4.1.29)$$

$$\frac{R_S}{R_0} > \frac{1.13}{\varepsilon}$$

Тако, ако замислимо низ белих патуљака са растућом масом, вредност $\frac{R_S}{R_0}$ ће монотоно опадати као резултат релације маса-радијус за беле патуљке, а $\frac{1}{\varepsilon}$ ће монотоно расти како се систем приближава комплетној релативистичкој дегенерацији. Очито, мора постојати тренутак када систем постаје нестабилан и колапсира. Међутим, да бисмо нашли тај тренутак, морамо истражити како се ε мења са повећањем масе. За ово се осврћемо интересантном раду Фолкера и Грибена, који тврде:

$$\varepsilon \cong \frac{2x^{-2}}{3} \qquad (4.1.30)$$

где је x, Чандрасекаров параметар дегенерације.

Сада, наш услов нестабилности може бити написан као:

$$\frac{R_S}{R_0} > 1.7\overline{x^2} \qquad (4.1.31)$$

Све што остаје је да се испита просечна вредност параметра дегенерације x, за који можемо очекивати већу вредност од јединице. Чандрасекар тврди:

$$\rho_e = Bx^3 = (8\pi m_e^4 c^3/3h^3)x^3 \qquad (4.1.32)$$

Сада занемарујући инверзни β распад, локална густина се може грубо дати као $\rho = m_p\rho_e/m_e$и

$$x^3 = \left[\frac{3h^3}{8\pi m_e^3 c^3 m_p}\right]\rho \qquad (4.1.33)$$

Допустимо да ρ буде дат као средња вредност;

$$\overline{x^2} = \left[\frac{9h^3}{(32\pi^2 m_e^3 c^3 m_p)}\right]^{2/3} \frac{M^{2/3}}{R^2} \qquad (4.1.34)$$

Нормирањем R Шварцшилдовим радијусом, добијамо:

$$\overline{x^2} = 7 \cdot 10^6 (M_0/M)^{4/3} (R_S/R_0)^2 \qquad (4.1.35)$$

Ово може бити ригорозно комбиновано са једначином (4.1.31) да бисмо добили вредност за $R_0/R_S$. Међутим како је цео овај аргумент дат илустративно, можемо такође претпоставити масу као граничну за беле патуљке. Тада једначина (4.1.31) постаје:

$$(R_0/R_S) > 228(M_0/M)^{4/9} \cong 200 \qquad (4.1.36)$$

Требамо напоменути да ће резултат бити валидан само у Њутновској апроксимацији, и да ће претстављати нижу границу нестабилности. Интересантан резултат је да Општа теорија релативности постаје битна. Ово је исти резултат до кога је дошао Фовлер проучавајући супермасивне звезде које поседују радијативни притисак, коришћењем пост њутновске апроксимације. Требамо напоменути да стављање $R_0$ у релацију маса-радијус за беле патуљке, предлаже редуковање критичке масе за 1,5%. Стога, Чандрасекарова граница за масу белих патуљака, иако доста велика, и даље представља одличну апроксимацију.

## 4.2 Утицај ротације и магнетног поља на гравитациону нестабилност белих патуљака

У овом тренутку читалац се може жалити на то да је извођење у присуству нестабилности проузроковане Општом релативношћу, веома кратко. Дужи резултати могу се добити мало другачијим приступом од оног који смо користили раније. Овакав један приступ је успешан код увођења сферне симетрије. Међутим, пре него што уђемо у демонстрацију ефикасности овог приступа, хајде да видимо какав ће утицај ротација и присуство магнетног поља имати на резултате изведене у претходној секцији. Фовлер је показао да јако мала ротација доводи до стабилности у односу на гравитациону нестабилност супермасивних звезда, па се самим тим можемо запитати како ће ротација утицати на стабилност белих патуљака. Међутим, ситуација је код белих патуљака мало другачија. Овде је гравитационо поље много јаче, па морамо очекивати много више ротационе енергије која ће успевати да надјача ово поље и звезду доведе у стање стабилности. Претпоставимо да ефекти ротације и магнетног поља нису толико екстремни да значајно промене сферну симетрију.

Под оваквим условима, Њутновски приступ из поглавља 3, биће довољан за прорачунавање додатних чланова у једначини кретања, и обезбедиће захтевану варијациону анализу. У поглављу 3, дефинисали смо ротациону кинетичку енергију $\mathcal{J}_3$ и магнетну енергију $\mathcal{M}_0$, као:

$$\mathcal{J}_3 = \int_0^L \frac{1}{2} \omega dL \qquad (4.2.1)$$

$$\mathcal{M} = \int_V \frac{H^2}{8\pi} dV$$

чије су варијације:

$$\delta\mathcal{J}_3 = -2\xi\mathcal{J}_3(0) \qquad (4.2.2)$$

$$\delta\mathcal{M} = -\xi\mathcal{M}$$

Ако ово убацимо у варијациону форму Лагранжевог идентитета из секције 1 (једначина 4.1.21), добијамо:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\delta I_r) = 3\langle\Gamma_1 - 1\rangle\delta U - \delta\Omega + 2\delta\mathcal{J}_3 + \delta\mathcal{M} + \langle\Gamma_1 - 1\rangle\delta U_1 - 2\delta\Omega_1 \qquad \textit{(4.2.3)}$$

Сада, услов за варијацију тоталне енергије постаје:

$$\delta E = 0 = \delta U - \delta\Omega + \delta\mathcal{J}_3 + \delta\mathcal{M} + \delta U_1 - \delta\Omega_1 \qquad (4.2.4)$$

Који нам омогућава да препишемо једначину (4.2.3) као:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\delta I_r) = \langle 3\Gamma_1 - 4\rangle(\delta U - \delta\mathcal{M}) - 2\langle\Gamma_1 - 1\rangle\delta U_1 + \langle 5 - 3\Gamma_1\rangle(\delta\mathcal{J}_3 - \delta\Omega_1) \qquad (4.2.5)$$

Заменом вредности за варијације добијамо израз аналоган једначини (4.1.24):

$$\sigma^2 I_r \bar{y} = \langle 3\Gamma_1 - 4\rangle(\Omega_0 - \mathcal{M}_0) - 4\langle\Gamma_1 - 1\rangle U_1 + 2\langle 3\Gamma_1 - 5\rangle[\Omega_1 - \mathcal{J}_3(0)] \qquad (4.2.6)$$

Ови изрази разликују се од оних у поглављу 3, само по томе што је овде гравитациона потенцијална енергија узета као позитивна величина. Да бисмо наставили даље, морамо да нормирамо ротациону енергију и магнетно поље. Размотримо случај са крутом ротацијом па тако:

$$\mathcal{J}_3 = \frac{1}{2}\omega^2 I_z = \frac{1}{3}\omega^2 I \qquad (4.2.7)$$

Овде занемарујемо релативистичку корекцију за I и узимамо $I = \alpha M R^2$. Нормализујмо угаону брзину ω по критичној вредности Рош модела. Тада је:

$$\omega^2 = w^2\left(\frac{8GM}{27R_0^3}\right) = \frac{4w^2c^2}{27R_0}\left(\frac{2GM}{R_0c^2}\right) \qquad (4.2.8)$$

Ово свакако не значи да у овом приступу примењујемо Рош модел на беле патуљке, већ нам он само даје погодан фактор скале. Тако имамо:

$$\mathcal{J}_3 = \frac{4\alpha}{81} w^2 M c^2 \left(\frac{R_S}{R_0}\right) \qquad (4.2.9)$$

На сличан начин хајде да нормализујемо магнетну енергију, као ону довољну да доведе до колапса звезде. У поглављу 3 смо рекли, да у одсуству других ефеката, $\mathcal{M}_0 > |\Omega|$ би било довољно да доведе до нестабилности звезде. Узимајући ово као константу нормализације добијамо:

$$\mathcal{M}_0 = \left[\frac{3}{2(5-n)}\right]\mathcal{H}^2 Mc^2\left(\frac{R_S}{R_0}\right) \qquad (4.2.10)$$

Под оваквим условима можемо очекивати максималне вредности за w и $\boldsymbol{\mathcal{H}}$

$$w = 1 \qquad (4.2.11)$$

$$\mathcal{H} = 1$$

Док би увођење сферне симетрије свакако довело до смањења на $w > 0$ и $\mathcal{H} > 0.3$. Стављајући ове вредности за $\mathcal{J}_3$ и $\mathcal{M}_0$ , заједно са предходно одређеним ω, $U_1$, и $\Omega_1$ у једначину (4.28) долазимо до услова стабилности аналогном једначини (4.1.27). Наиме:

$$\left(\frac{R_S}{R}\right)(4\varsigma_1\langle\Gamma_1 - 1\rangle + 2\varsigma_2\langle 5 - 3\Gamma_1\rangle) < \left(\frac{3\langle 3\Gamma_1 - 4\rangle(1-\mathcal{H}^2)}{2(5-n)}\right) + \frac{8\alpha w^2}{81} \qquad (4.2.12)$$

Као и раније, пређимо на случај n=3, па тако:

$$\left(\frac{R_S}{R}\right)\left(\frac{4}{3}\varsigma_1 + 2\varsigma_2\right) < \frac{9}{2}\varepsilon(1-\mathcal{H}^2) + \frac{8\alpha w^2}{81} \qquad (4.2.13)$$

Са $\alpha = 0.113$, за политропне лопте n=3, и опет коришћењем Фовлерове вредности за $\varsigma_1$ и $\varsigma_2$, ово постаје:

$$\left(\frac{R_S}{R_0}\right) < 0.89\varepsilon(1-\mathcal{H}^2) + 4.4\cdot 10^{-3}w^2 \qquad (4.2.14)$$

Користећи исту анализу за ε као и раније:

$$\left(\frac{R_S}{R_0}\right) < 8.4\cdot 10^{-8}(1-\mathcal{H}^2)(M/M_0)^{4/3}\left(\frac{R_S}{R_0}\right) + 4.4\cdot 10^{-3}w^2 \qquad (4.2.15)$$

И узимајући М близу Чандрасекарове границе, имамо:

$$\left(\frac{R_0}{R_S}\right)^3 + \left(\frac{R_0}{R_S}\right)\frac{4.4\cdot 10^4 w^2}{(1-\mathcal{H}^2)} - \frac{9.3\cdot 10^{-6}}{(1-\mathcal{H}^2)} > 0 \qquad (4.2.16)$$

За референтну тачку, вредно је напоменути величину нормализационих величина тако да вредности величина w и $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ буду одржане у границама перспективе. Ако претпоставимо да радимо са објектима реда величине $10^3$км, тако да је поље потребно да уништи звезду реда $3\cdot 10^{15}\ gaus$, а критична екваторијална брзина реда $10^4 km/s$. Најјаче посматрано поље до сада, код белих патуљака је $10^8 gaus$. Иако се претпоставља да код великих белих патуљака овај број може да достигне $10^{12} gaus$, до сада није уочено овако велико поље. Тако, прихватљива горња граница за $\boldsymbol{\mathcal{H}}$ би била реда величине $10^{-3}$. Ако за тренутак занемаримо ротацију, једначина (4.2.14) може бити написана као:

$$\left(\frac{R_0}{R_s}\right) > 210(1-\mathcal{H}^2)^{-1/3} \qquad (4.2.17)$$

Очигледно је да ће једини ефекат имати поље које делује са Општом релативношћу за довођење звезде до урушавања. Међутим, да би поље довело до приметне разлике, мора бити велико. За нашу дату горњу границу од $H = 10^{-3}$, морали бисмо да повећамо радијус, до величине за коју се нестабилност повећава за 1%.

Ситуација у погледу ротације је много тежа за решавање. Ако узмемо H=0 , једначина (4.2.14) постаје:

$$\left(\frac{R_0}{R_s}\right)^3 + \left(\frac{R_0}{R_s}\right) 4.1 \cdot 10^4 w^2 - 9.3 \cdot 10^{-6} > 0 \qquad (4.2.18)$$

Додатни, користан израз за екваторијалну брзину који одговара датој w је:

$$v_{eq} = R_{eq}\omega = \frac{2cw}{3\sqrt{3}}\left(\frac{R_s}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} = 1.15 \cdot 10^5 w \left(\frac{R_s}{R_0}\right)^{\frac{1}{2}} [km/s] \qquad (4.2.19)$$

Ако изаберемо неколико репрезентативних вредности за w, и решимо једначину (4.2.17), добијамо резултате који су дати испод, и повезани са вредностима $\left(\frac{R_0}{R_s}\right)$ и $v_{eq}$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| W | 0 | 0.1 | 0.5 | 1.0 |
| $v_{eq}$ (km/s) | 0 | 794 | 4128 | 9453 |
| $\left(\frac{R_0}{R_s}\right)$ | 210 | 209 | 194 | 148 |

Иако је ових неколико величина довољно да дочара да иако ротација доводи до стабилизације звезде, у смислу да јој дозвољава да узме мањи полупречник пре колапса, ипак, за разлику од магнетних поља, ефекат је занемарљив. Можемо претпоставити да објекат врши круту ротацију. У случају диференцијалне ротације, диференцијално поље брзина морало би имати веома високу вредност. Чини се да би додатно смицање произвело значајну динамичку нестабилност.

Тако, видели смо да ни ротација ни присуство магнетног поља, не могу значајно утицати на чињеницу да ће бели патуљак постати нестабилан када његов полупречник достигне вредности од 1000км. Класично, звезде достижу ову тачку када имају око, и мању масу, од неколико процената масе од Чандрасекарове границе. То није граница која настаје као промена у једначини стања која нас држи даље од посматрања већих белих патуљака. Присуство нестабилности као продукта Опште релативности, уништава масивније звезде.

Могли бисмо одбацити овај аргумент јер смо користили масе које су близу Чандрасекарове границе. Међутим, када неко покуша да генерализује резултат једног проблема на други, прави концептуалну грешку која може довести до много већих грешака у генерализацији. Као што ћемо видети у наредној секцији, ово је заиста случај са неутронским звездама.

## 4.3 Стабилност неутронских звезда

Друга класа објеката чије је постојање утврђено током 1960-их јесу неутронске звезде. Честа је погрешка да се неутронске звезде сматрају за беле патуљке који су колапсирали, с обзиром на њихову сличну масу. У реалности, односи радијуса белог патуљка и неутронске звезде износе 1000 пута, што представља и однос радијуса звезде главног низа (Сунца) и белог патуљка. Друго погрешно схватање односи се на граничну масу неутронске звезде. Популарна је претпоставка, како се до граничне масе за беле патуљке дошло преко промена у једначини стања, да се таквом променом може доћи и до граничне масе за неутронске звезде. Тачно је да постоји гранична маса за ове објекте, али она не произилази из једначине стања.

Промене у једначини стања, мењају резултат код Чандрасекарове границе зато што електрони достижу брзине блиске брзини светлости. Када би дошло до овога код неутронских звезда, конфигурација система би морала и даље да задовољава теорему виријала.

Хајде да за тренутак занемаримо ефекте Опште релативности и позабавимо се само са специјалном релативношћу и одговарајућем облику теореме виријала који смо извели у поглављу 2. (ј-на 2.2.9)

$$\frac{1}{2}\frac{d^2 I_r}{dt^2} = \Omega + T + \int_V (\tau/\gamma) dV \qquad (4.3.1)$$

где је сада $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$.

Како неутрони постају релативистички онда $\gamma^{-1} \to 0$, и $T = \alpha M c^2$ где је $\alpha \gg 1$. Можемо написати гравитациону потенцијалну енергију као:

$$\Omega = -\eta \frac{GM^2}{R_0} = -\frac{\eta M c^2}{2}\left(\frac{R_s}{R_0}\right) \qquad (4.3.2)$$

Варијациона форма теореме виријала ће захтевати:

$$T + \Omega < 0 \qquad (4.3.3)$$

па тако имамо

$$Mc^2[\alpha - (\eta/2)(R_s/R_0)] < 0 \qquad (4.3.4)$$

или $(R_s/R_0) > (\eta/2\alpha)$. Како је $\eta$ реда величине јединице и $\alpha \gg 1$, ово ће захтевати да објекат има радијус мањи од Шварцшилдовог, да би био стабилан у односу на радијалне пулсације. Овај аргумент може се критиковати јер смо занемарили Општу релативност, која у суштини повећава ефикасност гравитације. Можда би „повећана гравитација“ помогла стабилизацији звезде у односу на убрзано повећање унутрашње енергије. Међутим, ако се базирамо на анализу у секцији 1, како

$\Gamma \to 4/3$, нека врста нестабилности која доводи до колапса белих патуљака, појавиће се и у неутронској звезди. Тачна вредност $(R_0/R_s)$ при којој долази до овакве нестабилности зависиће од једначине стања којом се описује систем, као и од модела који се користи. Међутим, како корекциони чланови Опште релативности пуно превазилазе вредности истих код белих патуљака, можемо очекивати да вредност Γ више зависи од релативистичке границе од 4/3 од раније. Ово је заиста случај који јасно показује Тропер, приликом разматрања општих својстава релативистичких адјабатских флуидних сфера. Његов закључак био је да се нестабилност увек јавља пре него гас постане релативистички услед високог притиска. Нажалост, не можемо квантитативно применити резултате из секције 1, јер начин на који се Γ приближава 4/3 (или начин на који Γ зависи од 5/3) зависи од детаља у једначини стања. Међутим приликом нашег извођења можемо доћи до осећаја за нестабилност, претпостављајући да компресијом долази до смањења Γ са 5/3 на 3/2. Заменом ове вредности у једначину (4.1.27) и коришћењем Фовлерове вредности за $\varsigma_1$ и $\varsigma_2$, за политропну лопту индекса 2, долазимо до границе за стабилност:

$$\left(\frac{R_0}{R_s}\right) > 4.3 \qquad (4.3.5)$$

Тако $R_0$ за неутронске зведе мора бити веће од 12км. Како типични модели указују на радијусе од 10км, вредност од 3/2за Γ јесте репрезентативна, али је и даље далеко од релативистичке вредности од 4/3.

Дискусија у секцији 2 води до веровања да нити ротација нити магнетна поља не могу значајно модификовати почетак нестабилности који се јавља услед ефеката опште релативности. До овога квантитативно можемо доћи ако у једначину (4.2.10) уведемо политропну лопту индекса 2. Да бисмо дошли до доброг резултата, морамо моменту инерције увести фактор а. Интеграљењем $4\pi\int_0^R r^2\rho dr$ парцијално, можемо показати:

$$\alpha = \left[1 + \frac{\frac{6}{\xi_1^2}\int_0^{\xi_1}\xi\theta d\xi}{\xi_1^2\frac{d\theta}{d\xi}\Big|_{\xi_1}}\right] \qquad (4.3.6)$$

који за n=2, даје $\alpha = 0.345$. Убацивањем у једнаћину (4.2.13) добијамо:

$$\left(\frac{R_s}{R_0}\right) < 0.234(1-\mathcal{H}^2) + 3.2\cdot 10^{-2}w^2 \qquad (4.3.7)$$

Ефекти ротације и магнетног поља су исти и за неутронске звезде као и за беле патуљке. Међутим, како је $R_0$ само неколико пута већи од Шварцшилдовог, нормализација поља и ротационих брзина мора бити огромна. За неутронску звезду радијуса 10км, одговарајуће магнетно поље достиже $10^{18} gaus$, док ротационе брзине које одговарају w=1, морају бити 10% од брзине светлости. Ове вредности достижу оне код најекстремнијих пулсара. Ови резултати су и очекивани приликом анализе белих патуљака.

Започели смо ову дискусију иницирањем да ће анализа бити пуно поједностављена, а ипак смо дошли до веома корисних квалитативних резултата. Како закон маса-радијус за било коју дегенерисану једначину стања обезбеђује за било коју звезду смањење радијуса са повећањем масе, можемо гарантовати да ће резултујуће смањење Γ, повећати нестабилност конфигурација са радијусима од неколико Шварцшилдових. Тако ће постојати горња граница за масу неутронске звезде. Порекло ове границе је концептуално идентично као и за беле патуљке. Као и за беле патуљке, ова граница ће се мењати у присуству ротације и магнетног поља, само у случају њихових екстремних величина. У дискусији смо увели чланове опште релативности $0\left(\frac{1}{c^2}\right)$, и неко може очекивати да ће виши чланови утицати на резултат. Међутим, ниједан од ових чланова неће имати значајну улогу осим ако конфигурација постане мања од неколико Шварцшилдових радијуса.

# Поглавље 5

## Теорема виријала и њена примена у модерној физици

У досадашњем раду, бавили смо се применом теореме виријала искључиво у астрофизичким проблемима. У овом поглављу, осврнућемо се неким модерним проблемима у физици и навести како можемо ову невероватну теорему користити у квантној механици, и неким битним астрофизичким проблемима новог доба, као што су налажење унутрашње температуре звезде и можда један од најзанимљивијег проблема данашњице, тамну материју.

Тамна материја је хипотетичка форма материје. Она је морала бити постулирана да би се објаснили проблеми који нису могли бити објашњени познатим формама материје. Претпоставља се да се овај облик материје састоји од тешких, спорих, ненаелектрисаних, безбојних, слабо интерагујућих честица. Таква врста честице за сада не постоји у честичној физици. Права природа тамне материје још увек није позната.

Ако посматрамо космичко позадинско зрачење, можемо наћи теоријску расподелу материје у универзуму. Само 5% густине енергије у универзуму чини барионска материја (звезде и планете). Видљива материја чини 0.5%. док тамна материја заузима део густине од 26,7%. Највећи део, око 70% одлази на тамну енергију. Тамном енергијом се у овом раду нећемо бавити.

Овакав закључак се јако касно појавио у физици. Почетком 20ог века претпостављало се да дистрибуција луминозне материје одговара тачно расподели материје у универзуму. Тек је 1920. године професор Фриц Звицки уочио нешто другачије када је посматрао скуп галаксија у сазвежђу Береникина коса. Покушао је на оснву кретања да израчуна колико би масе требало постојати у датом јату, рачунски резултати се нису поклапали са посматрачким. Тада се знала да у теорији нешто треба мењати.

## 5.1 Унутрашња температура звезде

Налажење спољашње температуре звезде претставља једноставан проблем, који се лако решава коришћењем Планковог закона зрачења црног тела. Међутим, овај приступ не можемо користити ако желимо да нађемо унутрашњу температуру саме звезде. Овакав проблем најбоље решавамо применом теореме виријала. Претпоставимо да је звезда сфера радијуса R и масе $M_S$. Њена укупна гравитациона потенцијална енергија биће:

$$V = -\frac{3GM_S^2}{5R} \qquad (5.1.1)$$

Ако претпоставимо да један атом који се креће у унутрашњости звезде има кинетичку енергију $\langle K_e \rangle$, која је дата као:

$$\langle K_e \rangle = \frac{3}{2} k \langle T_s \rangle \qquad (5.1.2)$$

где је $\langle T_s \rangle$, температура у унутрашњости звезде а k је Болцмнова константа. Ако укупан број атома у унутрашњости звезде означимо са N, онда применом теореме виријала добијамо да је:

$$-\langle V \rangle/2 \approx -\frac{3GM_s^2}{10R} = N\frac{3}{2}k\langle T_s \rangle \qquad (5.1.3)$$

а одатле:

$$\langle T_s \rangle \approx \frac{GM_s^2}{5kNR} = \frac{GM_s^2 m}{5kR} \qquad (5.1.4)$$

где је $m = \frac{M_s}{N}$, просечна маса атома у звезди. Звезде главног низа на ХР дијаграму (објаснити шта је ХР дијаграм), као што је наше Сунце, сачињене су углавном од атома водоника ($\sim 61\%$), и атома хелијума ($\sim 38\%$), тако да масу атома можемо апроксимирати на око $m = 2.2 * 10^{-27} kg$. Маса Сунца је око $M_0 = 2 * 10^{30} kg$, а радијус можемо апроксимирати на око $70 * 10^6 km$. Увођење ових константи у j-ни (5.1.4), даје просечну температуру у унутрашњости Сунца око $10^7 K$. Ово је изванредан резултат добијен простим прорачунима, који захтева малу количину експерименталних података, који су приступачни и које можемо добити мерењем са Земље.

## 5.2 Квантна механика

Теорема виријала се често примењује код решавања проблема у квантној механици. Такође, има велику примену и у молекулској физици. Као илустрацију, покушајмо да пронађемо сопствену функцију атома водониковог типа. За било коју таласну функцију ϕ, и енергију E, средња (очекивана) вредност Хамилтонијана $\langle \varphi | H | \varphi \rangle$, је једнака суми средњих вредности $\langle T \rangle_\varphi$ и $\langle V \rangle_\varphi$.

$$\langle H \rangle_\varphi = E = \langle T \rangle_\varphi + \langle V \rangle_\varphi = \langle \vec{p}^2/2m \rangle - \langle e^2/\vec{r} \rangle \qquad (5.2.1)$$

Сада квантована верзија теореме виријала може бити приказана као:

$$\langle T \rangle_\varphi = -\frac{1}{2}\langle V \rangle_\varphi \qquad (5.2.2)$$

Увођењем овога, за енергију добијамо:

$$E = -\langle V \rangle/2 = -\langle e^2/\vec{r} \rangle \qquad (5.2.3)$$

Ако је атом у n-том енергетском стању, његова енергија је добро позната:

$$E_n = -\frac{2m\pi^2 e^4}{n^2 h^2} = E \qquad (5.2.4)$$

Последње две једначине нам могу дати резултат за просечни радијус атома:

$$\langle 1/\vec{r} \rangle_n = 1/(a_0 n^2) \qquad (5.2.5)$$

где је $a_0$ радијус атома у Боровом моделу - Боров радијус. Коначно добијамо

$$\langle r_n \rangle \approx n^2 a_0 \qquad (5.2.6)$$

Ово представља радијалну даљину (дистанцу), где вероватноћа налажења електрона, у атому водониковог типа, достиже свој максимум.

Други веома значајан пример примене теореме виријала у квантној механици јесте проликом проучавања порекла хемијских веза у молекулу, и приликом проучавања каноничких примера у квантној механици, као што је хармонијски осцилатор.

## 5.3 Прве хипотезе о тамној материји

Галактичко јато је скуп више галаксија које су гравитационо везане. Откривено је на хиљаде галактичких јата, и почело се са њиховим записивањем у каталоге још 1950. године. Њихове типичне масе и радијуси су дати као $2-9*10^{14}M_0$ и $1-5Mpc$, респективно. Спиралне галаксије такође претстављају везане системе, и састоје се од звезда и међузвезданог гаса. Велику луминозност и концентрацију регуларне материје у галаксијама можемо видети у танком диску, где звезде и гас ротирају, по скоро кружним орбитама, око галактичког центра.

Нека M буде укупна маса једне галаксије (под претпоставком да је концентрисана у центру), и нека v и R буду брзина и полупречник галаксије, респективно. Посматрамо звезду масе m која се налази на периферији галаксије. Гравитациона сила која делује на њу може се изједначити са центрипеталном силом:

$$\frac{m\vec{v}^2}{R}=\frac{GMm}{R^2}\ ili\ M=\frac{R\vec{v}^2}{G} \qquad (5.3.1)$$

где је M у ствари укупна маса унутар орбите звезде, која је одговорна за интеракцију. Тада имамо:

$$\vec{v}=\sqrt{\frac{GM}{R}} \qquad (5.3.2)$$

Како је еволуција свемира, у космологији, описана преко густине, битно је да и овде повежемо брзину кретања са густином ρ(R), за дату дистрибуцију масе M(R) датој у једначини (5.3.1)

$$\vec{v}=\sqrt{\frac{GM(R)}{R}}\propto\sqrt{G}=const \qquad (5.3.3)$$

Са друге стране, знамо радијалну густину материје;

$$\rho(\vec{r})\propto R^{-2} \qquad (5.3.4)$$

Ако искористимо теорему виријала да бисмо описали кретање звезде, галаксије илибило који други гравитационо везани систем, можемо писати:

$$\langle T\rangle=-\frac{1}{2}\langle V\rangle \qquad (5.3.5)$$

Да бисмо добили везу између брзине кретања звезде и њене масе, сматрамо да галаксија има сферну дистрибуцију масе M, полупречника R и средње фустине ρ. Потенцијалну енергију онда можемо писати као:

$$V=-\frac{3}{5}\frac{GM^2}{R} \qquad (5.3.6)$$

За N звезда масе m у галаксији, укупна кинетичка енергија је:

$$T=\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i^2 \qquad (5.3.7)$$

Применом теореме виријала на сваку од звезда добијамо:

$$-\frac{m}{N}\sum_{i=1}^{N}\vec{v}_i^2=\frac{V}{N} \qquad (5.3.8)$$

где брзина v укључује радијалну компоненту, зениталну и азимуталну. Тада за средњу брзину можемо писати:

$$\langle \vec{v}^2 \rangle = \langle \vec{v}_r^2 \rangle + \langle \vec{v}_\theta^2 \rangle + \langle \vec{v}_\varphi^2 \rangle = 3\langle \vec{v}_r^2 \rangle \qquad (5.3.9)$$

А како радимо са статистичким средњим вредностима, следи:

$$\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \vec{v}_i^2 = \langle \vec{v}_i^2 \rangle = 3\langle \vec{v}_r^2 \rangle = 3\sigma \qquad (5.3.10)$$

где је σ стандардна девијација. Сада, заменом једначине (5.3.6) и једначине (5.3.7) у једначину (5.3.5) добијамо:

$$-3m\sigma_r^2 \approx -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{NR} \qquad (5.3.11)$$

Ако узмемо да је $M = Nm$, коначно добијамо израз за дисперзију брзине као:

$$\sigma_r^2 \approx \frac{GM_{virial}}{5R} \qquad (5.3.12)$$

Овај израз у сустини претставља везу између дисперзије брзине галаксије и њене масе. Сада, ако узмемо доплерово ширење линија у спектру зрачења интерстеларног гаса у галаксији, можемо са сигурношћу наћи ротациону брзину кретања различитих региона у галаксији. Ако сада упоредимо резултате за брзину кретања галаксије, које смо добили спектралном анализом са оном коју смо добили користећи теорему виријала, долазимо до резултата да је за исту масу М, брзина добивена коришћењем првог поступка, много већа од оне добивене коришћењем теореме виријала.

Ф. Звицки је први применио теорему виријала на галактичка јата. Он је пронашао да у оваквим системима мора постојати 100 пута више масе него што су спектралне анализе дале. Он је закључио да мора постојати нека нелуминозна материја у јатима, која би додала неопходну екстра масу, која би била одговорна за велике брзине кретања.

Напоменимо да се маса галаксије може наћи преко њене луминозности и површинске температуре. Знајући полупречник галаксије R, могуће је наћи гравитационо убрзање $g = \frac{GM}{R^2}$, на површини галаксије. Из овога је могуће наћи густини галаксије и упоредити је са критичном густином свемира која је дата са:

$$\rho_c \equiv \frac{3H_0^2}{8\pi G} \qquad (5.3.13)$$

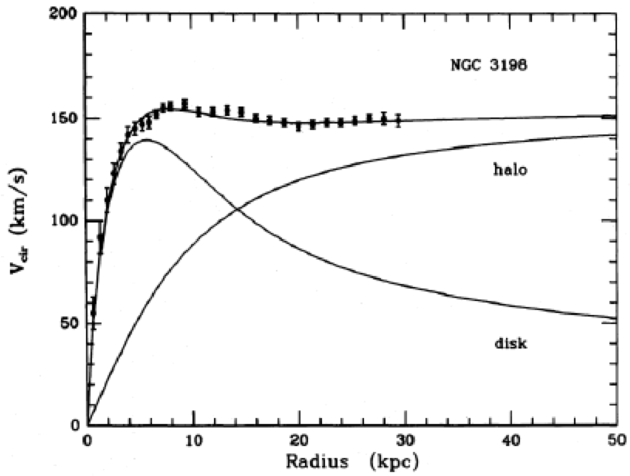
где је $H_0$ Хаблова константа, а дата једначина је названа Фридманова једначина.

Опет, густина нађена преко теореме виријала, већа је него критична густина, па самим тим нам треба хипотеза о Тамној материји, или нека друга хипотеза, која ће нам објаснити овакве разлике.

Када се анализира космичко позадинско зрачење, може се добити расподела масе у универзуму. Само 5% густине енергије у универзуму потиче од барионске материје (футнота за барионску материју). Видљива материје чини само 0.5% универзума. Утицај тамне материје је много већи, од 26.8%. Највећи удео има тамна енергија од око 70%.

За ово се дуго није знало. Почетком 20-ог века сматрало се да расподела луминозне материје у свемиру, тачно одговара расподели масе. Тек је 1920. године, већ поменуто истраживање Фрица Звицког дало прве индикације о постојању неке друге материје, коју не можемо видети. Међутим њефово откриће је било игнорисано. Оне је, 1932.године био једини који је у ствари разумео значај присуства тамне материје. Он ју је звао материја која недостаје. Оно што он тада није знао јесте, да ли ову тамну материју стварају тамни објекти као што су галаксије које ми не можемо видети, или је то нешто сасвим другачије.

## 5.3.1 Криве ротације галаксија




**Слика 1: Ротациона крива за NGC 3198 (Спирална галаксија у сазвежђу Велики Медвед)**

Било је потребно још 50 година од Звицковог истраживања, да тамна материја привуче пажњу. Америчка астрономкиња Вера Рубин, даје овоме велики допринос. Она посматра ротационе криве галаксија сличних Млечном путу. Она такође посматра једначину (5.3.3). Из ње можемо закључити да, што је објекат масивнији, веће је гравитационо привлачење. Такође, што се објекат налази даље од центра, требало би спорије да се креће, зато што опада гравитационо привлачење. Ово би требало да важи и за галаксије. У центру галаксије, густина је скоро константна и маса расте са квадратом растојања. У центру, ротационе брзине објеката се повећавају линеарно са полупречником растојања. Крива ротације би требало да опада. Теоретска крива би требало да изгледа као крива диска на слици 1. Оно што је Вера измерила, јесте да са повећањем растојања од центра, брзина околног гаса и прашине остаје константна све до видљиве границе саме галаксије. Она је закључила да ту мора постојати нека додатна маса. Да нема ове масе, галаксија би се распала. Једини начин да се реши овај парадокс јесте да се претпостави да постоји хало око галаксије сачињен од материје коју не можемо видети.

## 5.3.2 галактичко јато метак (Bullet cluster)

**Слика 2: Галактичко јато Метак: плаво-гравитациони потенцијал, црвено-емитовани гас у х-зрачењу спектра**

2006. године дошло се до још једног важног открића. Посматран је судар два галактичка јата, назван галактичко јато Метак. Спектрална анализа овог региона показује да судар изазива јако одбијање индивидуалних компоненти ових јата. Звезде и галаксије у овим јатима пролазе једна поред друге без икаквих интеракција. Хомогено распоређен облак гаса значајно интерагује и ствара слику која подсећа на метак, слика 2. Максимум гравитационог потенцијала се не налази у максимуму видљиве материје. Закључак је да мора постојати додатна расподела тамне материје. Већа количина материје се не налази на позицији на којој се и очекивало, већ усамом облаку гаса. Пре судара, тамна материја је била хомогено распоређена у галаксији као и у самом облаку гаса. Али, како гас интерагује приликом судара, тамна материја не интерагује ни са самим собом ни са другим облицима материје. Она наставља да путује кроз облак гаса, као што је и приказано на слици 2.

### 5.3.3 Потрага за тамном материјом

Постојање тамне материје је постулирано, јер гравитацијапостојеће видљиве материје у универзуму, ни приближно није довољна да би се објаснило сузбијање материје у раном периоду свемира. Научници се и даље питају да ли је она састављена од неких нових, до сада непознатих, честица, или пак од обичне материје коју не можемо видети.

Црне рупе могу бити једно од решења. Оне не емитују светлост, привлаче материју и детектују се преко гравитационог сажимања. Такође, разматрају се у све врсте масивних хало објеката, као што су браон патуљци. Они се скривају у халоима галаксија, имају велику масу и не емитују светлост. Проблем је што њих нема довољно да би објаснили постојећу количину тамне материје.

Неутрини су такође погодни. Као и тамна материја, и они пролазе кроз регуларну материју без икакве интеракције са њом. Међутим, они су прелаки да би се објаснио гравитациони утицај тамне материје преко њих. Такође, они су и пребрзи. Њихова брзина би спречила сажимање свемира.

Након што су одбачене све до сада познате честице, научници сматрају да би нова честица, која чини тамну материју, требала да има следећа физичка својства:

1. Јака гравитациона сила
2. Слаба интеракција са другим честицама
3. Ненаелектрисана
4. Масивна
5. Велика стабилност (13.7 $*10^9$година)

Постоји предлог, да се у теорији, промене Њутнови закони гравитације, да би се објаснио проблем ротације галаксије.

# Закључак

На самом почетку овог рада, у кратким цртама је описан историјски развој теореме виријала. Дато је класично извођење теореме и описана је верзија коју је дао Клаузијус, која у ствари претставља однос средње кинетичке и потенцијалне енергије система у стабилном и квази-стабилном стању. Такође смо видели да ако у систем уведемо и силе које зависе од брзине, резултат теореме остаје непромењен. Лагранжев идентитет и теорема виријала такође важе и код система са континуалном дистрибуцијом густине, каква је присутна код звезда и звезданих система.

Да бисмо дошли до закључка у којој мери морамо модификовати теорему виријала ако укључимо ефекте специјалне релативности, који свакако владају у звезданим срединама, морали смо увести други приступ, тензорску теорему виријала. Дошли смо до закључка да за честице које се крећу приближно брзином светлости, вредност средње кинетичке енергије, приближава се вредношћу средње потенцијалне енергије.

Било је јако битно да се види како мале варијације и пертурбације неких од основних величина утичу на теорему виријала. Павле Леду је успео да изведе варијациони облик скаларне теореме виријала и да на основу њега израчуна пулсационе периоде звезда. Резултати за пилсационе периоде добијени на овај начин, лепо су се слагали са посматрачким резултатима добијеним за периде пулсације код Цефеида. Овим приступом смо такође дошли до закључка да увођење магнетне енергије као вид пертурбације доводи до повећања периода пулсирања звезда, док увођење ротационе енергије која је свакако присутна у звездама не доводи до никакве промене периода пулсирања.

Када смо теорему виријала применили на стабилност белих патуљака, видели смо да се раније добивена Чандрасекарова граница за полупречник (масу) ових звезда, након које они постају нестабилни, добра апсоксимација, и да увођење магнетног поља и ротације као један вид кретања белих патуљака, не утиче много на промену ове границе, сем ако су њихове вредности екстремне. Ефекти ротације и магнетног поља су исти и за неутронске звезде као и за беле патуљке.

На самом крају рада, поменута је примена теореме виријала у модерној физици. Видели смо да је принцип налажења унутрашње температуре звезда јако сложен, а да се применом наше теореме, може решити на много једноставнији начин. Велику примену теорема виријала постиже и у квантној механици, приликом налажења таласне функције електрона у атому водониковог типа. Применом теореме на галактичка јата, дошло се, први пут у историји, до закључка да у јатима мора постојати нека нелуминозна материја која би била одговорна за велике брзине кретања, касније названа тамна материја.

## Литература

1. George W. Collins- The Virial Theorem In Stellar Astrophysics, The Ohio State University (1977)

2. Celso L. Ladera- The Virial Theorem and its applications in the teaching of Modern Physics, Universidad Simón Bolívar, (2010)

3. Jorge Cham- Dark Matters - A Tales from the Road Comic (2011)

4. Sanders R.H.- The Dark Matter Problem- A Historical Perspectiv,Cambridge University Press (2010)

5. J.C. Fabris and H.E.S. Velten- MOND virial theorem applied to a galaxy cluster, Universidade Federal do Esp´ırito Santo, Vit´oria, Esp´ırito Santo, Brasil(2009)

6. Marco Loreggia, Anna Sancassani, Giulia Zuin-The Virial Theorem and its astronomicalapplications, Università degli Studi di Padova (2013)

7. Alex Sugarbaker- Early Evidence for Dark Matter: The Virial Theorem and Rotation Curves, Stanford University (2007)

8. Klapdor-Kleingrothaus H.V- Dark Matter in Astro- and Particle Physics

9. Kurth, Rudolf- Introduction to the Mechanics of Stellar Systems,

10. Bergmann, P. G.- Introduction to the Theory of Relativity, (1942)

11. Collins, G.W.- The Fundamentals of Stellar Astrophysics, New York (1989)

12. Thorne, K. S.- Stellar Evolution, M.I.T. Press, Cambridge (1972)

# Биографија

Рођена сам 6.6.1993. године у Лесковцу. Основну школу 8. Октобар у Власотинцу завршавам 2008. године, када уписујем Гимназију „Стеван Јаковљевић“, природно-математички смер, такође у Власотинцу. По завршетку средње школе, 2012. године, уписујем основне студије физике на Природно-Математичком факултету у Новом Саду, смер астрономија са астрофизиком. Током студија учествовала сам на манифестацијама као што су Фестивал науке, Ноћ истраживача и студентска астрономска радионица (САР) у Београду и Новом Саду. 2016. године сам такође присуствовала Студентској Видојевичкој Астрономској пракси (СВАП).

У Новом Саду, 2017. године

Додатак раду:

Теорема виријала у астрофизици

# Поглавље 2

## 2.1

Члан на левој страни једначине (2.1.2) постаје:

$$\int_V \rho\vec{r}\frac{d\vec{u}}{dt}dV = \int_V \rho\vec{r}\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}dV = \int_V \rho\vec{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}d\vec{r}}{dt}\right)dV - \int_V \rho\frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d\vec{r}}{dt}dV \qquad (2.1.2.1)$$

Трећи члан се даље може поједноставити па можемо писати:

$$\int_V \rho\vec{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}d\vec{r}}{dt}\right)dV = \frac{1}{2}\int_V \rho\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}\vec{r})dV = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_V \rho\vec{r}\vec{r}\right)dV \qquad (2.1.2.2)$$

Да бисмо добили трећи члан у једначини (2.1.4), претпоставили смо да је запремина довољно велика да садржи целокупну масу у систему, па закон одржања масе узима облик:

$$\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_V \rho\vec{r}\vec{r}\right)dV = \int_V \rho\vec{u}\vec{u}dV + \int_V \rho\vec{r}\nabla\Phi dV \qquad (2.1.2.3)$$

## 2.2

Како је:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}\left(\vec{D}\vec{D} + c^2\vec{H}\vec{H} - \frac{1}{2}1\left(\overrightarrow{D^2} + c^2\vec{H}^2\right)\right) \qquad (2.2.2.1)$$

Ако тражимо дивергенцију $\sigma$, добија се:

$$\nabla\cdot\sigma = \frac{1}{4\pi}\left\{(\vec{D}\cdot\nabla)\vec{D} + \vec{D}(\nabla\cdot\vec{D}) + c^2(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H} + c^2\vec{H}(\nabla\cdot\vec{H}) - \frac{1}{2}\nabla(\vec{D}\cdot\vec{D} + c^2\vec{H}\cdot\vec{H})\right\} \qquad (2.2.2.2)$$

Ако се позовемо на Максеволе законе онда је $\nabla\cdot\vec{D} = \rho_e, \nabla\cdot\vec{H} = 0$, ово постаје:

$$\nabla\cdot\sigma = \frac{1}{4\pi}\left\{(\vec{D}\cdot\nabla)\vec{D} + \vec{D}\rho_e + c^2(\vec{H}\cdot\nabla)\vec{H} - \frac{1}{2}\nabla(\vec{D}\cdot\vec{D} + c^2\vec{H}\cdot\vec{H})\right\} \qquad (2.2.2.3)$$

Ако искористимо векторски идентитет:

$$\nabla(\vec{A}\cdot\vec{G}) = \vec{A}\times(\nabla\times\vec{G}) + (\vec{A}\cdot\nabla)\vec{G} + \vec{G}\times(\nabla\times\vec{A}) + (\vec{G}\cdot\nabla)\vec{A} \qquad (2.2.2.4)$$

За дивергенцију тражене једначине добијамо:

$$\nabla\cdot\sigma = \frac{1}{4\pi}\{\vec{D}\rho_e - \vec{D}\times(\nabla\times\vec{D}) + c^2[\vec{H}\times(\nabla\times\vec{H})]\} \qquad (2.2.2.5)$$

# Поглавље 3

## 3.2

Можемо укупну енергију писати као суму две енергије $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_2$, где је $\mathcal{J}_1$ кинетичка енергија која потиче од кретања самог гаса које је последица самих пулсација.

$$\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2}\int_0^R 4\pi\vec{r}^2\rho\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 d\vec{r} = \frac{1}{2}\int_0^M \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)^2 dm(\vec{r}) \qquad (3.2.2.1)$$

Варијација ове величине је:

$$\delta\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2}\int_0^M \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)\left(\frac{d\delta\vec{r}}{dt}\right) dm(\vec{r}) \qquad (3.2.2.2)$$

Међутим, из дефиниције за $\delta\vec{r}$ видимо да је $\vec{r} = \vec{r}_0 + \delta\vec{r}$,

Како из дефиниције $\vec{r}_0$ не сме да варира у времену, једначина за варијацију енергије постаје:

$$\delta\mathcal{J}_1 = \frac{1}{2}\int_0^{\mathrm{M}} \left(\frac{d(\delta\vec{r})}{dt}\right)^2 dm(\vec{r}) \qquad (3.2.2.3)$$

За укупни кинетичку енергију можемо писати:

$$\delta\mathrm{T} = \delta\mathcal{J}_1 + \delta\mathcal{J}_2 \approx \delta\mathcal{J}_2 \qquad (3.2.2.4)$$

Јер је члан у $\delta\mathcal{J}_1$ другог реда, који је доста слабији па се занемарује.
Ако сада размотримо кинетичку енергију идеалног гаса у малој запремини:

$$\delta\mathcal{J}_2 = \frac{3}{2}NkTdV \qquad (3.2.2.5)$$

Притисак гаса је дат са: $P_g = NkT$ и $dm(\vec{r}) = \rho dV$, добијамо:

$$\delta\mathcal{J}_2 = \frac{3}{2}\frac{P_g}{\rho} dm(\vec{r}) \qquad (3.2.2.6)$$

Тако, дупла кинетичка енергија гасне сфере која потиче од термалног кретања је:

$$2\mathcal{J}_2 = 3\int_0^M \frac{P_g}{\rho} dm(\vec{r}) \qquad (3.2.2.7)$$

Занемарујући радијациони притисак, тако да укупни притисак буде једнак гасном притиску, и подсећајући се да је варијација $dm(r)$ једнака нули, за варијацију укупне кинетичке енергије добија се:

$$2\delta\mathrm{T} = 2\delta\mathcal{J}_2 = 3\int_0^M \delta\left(\frac{P_g}{\rho}\right) dm(\vec{r}) \qquad (3.2.2.8)$$

Сада мжемо претпоставити да су пулсације адјабатске те можемо писати:

$$\frac{\delta P}{P} = \gamma \frac{\delta \rho}{\rho} \qquad (3.2.2.9)$$

Где је $\gamma = {}^{c_p}/_{c_v}$. Сада:

$$\delta\left(\frac{P}{\rho}\right) = \frac{\rho\delta P - P\delta\rho}{\rho^2} = \frac{\left({}^{\delta P}/_{P}\right)\rho - \delta\rho}{\left({}^{\rho^2}/_{P}\right)} = \frac{P}{\rho^2[(\gamma-1)\delta\rho_0]} \qquad (3.2.2.10)$$

Тако, ако посматрамо стање еквилибријума и убацимо све до сада наведено, са тим да задржимо само чланове првог реда, за варијацију укупне кинетичке енергије добијамо:

$$2\delta T \cong 3\int_0^M \frac{P_0}{\rho_0}(\gamma-1)\frac{\delta\rho_0}{\rho_0}\,dm(\vec{r}) \qquad (3.2.2.11)$$

# Поглавље 4

## 4.1

Парцијално интеграљење у једначини (4.1.7):

$$\int_V \left(\frac{4\pi GP\vec{r}^2}{c^2}\right)dV = \frac{4\pi GPr^2 m(\vec{r})}{c^2}\bigg|_0^R - \int_0^R \frac{4\pi G\vec{r}^2 m(\vec{r})}{c^2}\frac{dP}{d\vec{r}}d\vec{r} - \int_0^R \frac{8\pi Gm(\vec{r})}{c}\vec{r}d\vec{r} =$$

$$= \int_V \frac{G^2 m^2(\vec{r})\rho}{\vec{r}^2 c^2}dV - \frac{8\pi G}{c^2}m(\vec{r})P\vec{r}\bigg|_0^R + \frac{8\pi G}{c^2}\int_0^R m(\vec{r})\left[P + \frac{dP}{d\vec{r}}\right]d\vec{r} =$$

$$= \int_V \frac{G^2 m^2(\vec{r})\rho}{\vec{r}^2 c^2}dV + \frac{8\pi G}{c^2}m(\vec{r})P(\vec{r})\bigg|_0^R - \frac{8\pi G}{c^2}\int_0^R m(\vec{r})\frac{dP}{d\vec{r}}d\vec{r} + \frac{8\pi G}{c^2}\int_0^R m(\vec{r})\frac{dP}{d\vec{r}}d\vec{r} \qquad (4.1.1.1)$$

Трећи члан нестаје како је $m(0) = 0, P(R) = 0$, последња два интеграла се потиру и одавде следи:

$$\int_V \left(\frac{4\pi GP\rho\vec{r}^2}{c^2}\right)dV = \int_V \left(\frac{G^2 m^2(\vec{r})}{\vec{r}^2 c^2}\right)dV \qquad (4.1.1.2)$$

УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ
КЉУЧНА ДОКУМЕНТАЦИЈСКА ИНФОРМАЦИЈА

*Редни број*
**РБР**
*Идентификациони број*
**ИБР**
*Тип документације:* Монографска документација
**ТД**
*Тип записа:* Текстуални штампани материјал
**ТЗ**
*Врста рада:* Дипломски рад
**ВР**
*Аутор:* Марина Павловић
**АУ**
*Ментор:* Проф. др Милан Пантић
**МН**
*Наслов рада:* Теорема виријала у астрофизици
**НР**
*Језик публикације:* српски (ћирилица)
**ЈП**
*Језик извода:* српски/енглески
**ЈИ**
*Земља публиковања:* Република Србија
**ЗП**
*Уже географско подручје:* Војводина
**УГП**
*Година:* 2017
**ГО**
*Издавач:* Ауторски репринт
**ИЗ**
*Место и адреса:* Природно-математички факултет, Трг Доситеја Обрадовића 4, Нови Сад
**МА**
*Физички опис рада:* 5 поглавља/68 страна/2 слике
**ФО**
*Научна област:* Физика
**НО**
*Научна дисциплина:* Теоријска астрофизика
**НД**
*Предметна одредница:* Теорема Виријала/ астрофизика звезда

**ПО**
*чува се:* Библиотека департмана за физику, ПМФ-а у Новом Саду
**ЧУ**
*Важна напомена:* Нема
**ВН**
*Извод:* У раду је анализирана теорема виријала кроз пет поглавља савремене физике (Општа и срецијална теорија релативности, квантна механика, теоријска астрофизика). Испоставило се да ова теорема има широку примену код решавања проблема у квантној механици и статистичкој физици, као и код савременог астрофизичког проблема, постојање тамне материје.
**ИЗ**
*Датум прихватања теме од НН већа:* Новембар, 2015
**ДП**
*датум одбране:* 15.9.2017
**ДО**
*Чланови комисије:*
**КО**
*Председник:* Др Слободан Радошевић, доцент
*Члан:* Проф. др Милан Пантић, редовни професор
*Члан:* Проф. др Игор Савић, ванредни професор

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS
KEY WORDS DOCUMENTATION

*Accession number*:
**ANO**
*Identification number*:
**INO**
*Document type*: Monograph publication
**DT**
*Type of record*: Textual printed material
**TR**
*Content code*: Final paper
**CC**
*Author*: Marina Pavlović
**AU**
*Mentor*: Prof.dr Milan Pantić
**MN**
*Title*: The Virial theorem in astrophysics
**TI**
*Language of text*: srpski (ćirilica)
**LT**
*Language of abstract*: English
**LA**
*Contry of publication*: Republika Srbija
**CP**
*Locality of publication*: Vojvodina
**LP**
*Publication year*: 2017.
**PY**
*Publisher*: Author's reprint
**PU**
*Publication place*: Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
**PP**
*Physical description:* 5 chapters/68 pages/2 pictures
**PD**
*Scientific field*: Physics
**SF**
*Scientific discipline*: Theoretical astrophysics
**SD**
*Subject/Key words*: Virial theorem, Stellar astrophysics
**SKW**

*Holding data*: Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4
**HD**
*Note*: none
**N**
*Abstract:* In this paper, virial theorem is analyzed through five chapters of modern physics (General and special theory of relativity, quantum mechanics, theoretical astrophysics). It shows that this theory has a broad application in solving problems in quantum mechanics and statistical physics, as well as in solving the contemporary astrophysical problem of existence of dark matter.
**AB**
*Accepted by the Scientific Board*: November, 2015.
**ASB**
*Defended on*: 15.9.2017
**DO**
*Thesis defend board*:
**DB**
*President:* Dr Slobodan Radošević, Docent
*Member:* Prof. dr Milan Pantić, Full professor
*Member*: Prof. dr Igor Savić, Assistant professor