

Ово дело је заштићено лиценцом Креативне заједнице Ауторство – некомерцијално – без прерада<sup>1</sup>.

This work is licensed under a Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License.



---

<sup>1</sup> Опис лиценци Креативне заједнице доступан је на адреси [creativecommons.org.rs/?page\\_id=74](https://creativecommons.org.rs/?page_id=74).

*"Сва права задржава издавач. Забрањена је свака употреба или трансформација електронског документа осим оних који су експлицитно дозвољени Creative Commons лиценцом која је наведена на почетку публикације."*

*"Sva prava zadržava izdavač. Zabranjena je svaka upotreba ili transformacija elektronskog dokumenta osim onih koji su eksplicitno dozvoljeni Creative Commons licencom koja je navedena na početku publikacije."*

---



**УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ  
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ  
ФАКУЛТЕТ  
ДЕПАРТМАН ЗА ФИЗИКУ**



Петар Мали

Соња Гомбар

Слободан Радошевић

**Математичка физика**

Нови Сад, 2026.

**Аутори:**

Петар Мали, ванредни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду  
Соња Гомбар, научни сарадник Природно-математичког факултета у Новом Саду  
Слободан Радошевић, редовни професор Природно-математичког факултета у Новом Саду

**Рецензенти:**

др Милан Пантић, редовни професор  
Природно-математичког факултета у Новом Саду

др Божидар Николић, ванредни професор  
Физичког факултета у Београду

др Милица Рутоњски, ванредни професор  
Природно-математичког факултета у Новом Саду

**Издавач:** Природно-математички факултет у Новом Саду, Департман за физику

**За издавача:** Проф. др Срђан Рончевић, декан

Употреба уџбеника *Математичка физика* је одобрена од стране Наставног-научно већа Природно-математичког факултета у Новом Саду на седници одржаној 14. маја 2026. године (решење број 0602-07-156/26-7).

електронско издање

CIP – Каталогизација у публикацији  
Библиотеке Матице српске, Нови Сад

51-7:53(075.8)(076)

**МАЛИ, Петар, 1986-**

Математичка физика [Електронски извор]/ Петар Мали, Соња Гомбар, Слободан Радошевић, – Нови Сад : Природно-математички факултет, Департман за физику, 2026. - 265 стр. : илустр.

Системски захтеви: нису наведени. – Начин приступа (URL):

[https://www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/fizika/mali\\_gombar\\_radosevic\\_matematicka\\_fizika.pdf](https://www.pmf.uns.ac.rs/studije/epublikacije/fizika/mali_gombar_radosevic_matematicka_fizika.pdf) - Запис заснован на стању на дан 18. 6. 2026.

- Библиографија: стр. 261-265.

ISBN 978-86-7031-675-1

1. Гомбар, Соња, 1993- [аутор] 2. Радошевић, Слободан, 1981- [аутор]

а) Математичка физика

COBISS.SR – ID 196115977

---

*Будмили Мали*



# Садржај

<b>Предговор</b>	<b>9</b>
<b>1 Интегралне трансформације са применама у физици</b>	<b>13</b>
1.1 Фуријеова трансформација . . . . .	13
1.1.1 Дефиниција и особине . . . . .	14
1.1.2 Фуријеова трансформација као унитарни оператор . . . . .	27
1.1.3 Фуријеова трансформација нормираних Ермитових функција . . . . .	28
1.1.4 Конволуција . . . . .	30
1.1.5 Фуријеова косинусна трансформација . . . . .	36
1.1.6 Фуријеова синусна трансформација . . . . .	37
1.1.7 Тродимензиона Фуријеова трансформација . . . . .	39
1.1.8 Фуријеова трансформација и квантна механика . . . . .	45
1.2 Лапласова трансформација . . . . .	50
1.2.1 Неке оперативне теореме везане за Лапласову трансформацију . . . . .	53
1.2.2 Лапласова трансформација Лагерових полинома . . . . .	58
1.2.3 Конволуција . . . . .	61
1.2.4 Примена Лапласове трансформације на решавање линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима . . . . .	64
1.2.5 Примена Лапласове трансформације на решавање линеарних диференцијалних једначина са променљивим коефицијентима . . . . .	67
1.2.6 Инверзна Лапласова трансформација. Бромвичев интеграл . . . . .	69
1.2.7 Класификација изолованих сингуларитета . . . . .	70
1.2.8 Резидуум за пол реда $k$ . . . . .	74
1.2.9 Примена рачуна остатака за тражење инверзне Лапласове трансформације . . . . .	74
<b>2 Интегралне једначине</b>	<b>77</b>
2.1 Интегралне једначине које се решавају Фуријеовом трансформацијом . . . . .	79
2.2 Интегралне једначине које се решавају Лапласовом трансформацијом . . . . .	80
2.3 Свођење Волтерине интегралне једначине прве врсте на Волтерину интегралну једначину друге врсте . . . . .	82
2.4 Пикаров метод сукцесивних апроксимација. Фредхолмова интегрална једначина . . . . .	84

2.5	Пикаров метод сукцесивних апроксимација. Волтерина интегрална једначина . . . . .	85
2.6	Итерирана језгра и резолвента. Случај Фредхолмове интегралне једначине	90
2.7	Итерирана језгра и резолвента. Случај Волтерине интегралне једначине .	94
<b>3</b>	<b>Хипергеометријске функције</b>	<b>97</b>
3.1	Гаусова хипергеометријска функција . . . . .	98
3.1.1	Интегрална репрезентација Гаусове хипергеометријске функције .	103
3.2	Конфлуентна хипергеометријска функција . . . . .	104
3.2.1	Интегрална репрезентација конфлуентне хипергеометријске функције . . . . .	108
3.3	Формуле диференцирања и рекурентне релације . . . . .	109
3.3.1	Суседне хипергеометријске функције . . . . .	113
3.3.2	Везе неких елементарних и специјалних функција са хипергеометријским . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Основе теорије група и симетрија са применама у физици</b>	<b>117</b>
4.1	Коначне групе . . . . .	119
4.1.1	Цикличне групе . . . . .	122
4.1.2	Директни производ група . . . . .	122
4.1.3	Хомоморфизам и изоморфизам група . . . . .	122
4.1.4	Групе четвртог реда . . . . .	123
4.1.5	Групе пермутација . . . . .	125
4.1.6	Диедарске групе . . . . .	128
4.1.7	Неке специјалне подгрупе . . . . .	134
4.1.8	Група кватерниона . . . . .	135
4.1.9	Класе конјугација . . . . .	136
4.1.10	Теорија репрезентација група . . . . .	137
4.1.11	Иредуцибилне репрезентације . . . . .	143
4.2	Директна сума и директни производ репрезентација . . . . .	153
4.2.1	Регуларна репрезентација . . . . .	154
4.3	Лијеве групе . . . . .	158
4.3.1	Лијева алгебра . . . . .	163
4.3.2	Група транслација . . . . .	164
4.3.3	Ротациона група . . . . .	165
4.3.4	Генератори ротација . . . . .	167
4.3.5	Спин векторске честице . . . . .	169
4.4	Лоренцова група . . . . .	171
4.5	Лијева алгебра Лоренцове групе . . . . .	174
4.6	$\mathfrak{su}(3)$ алгебра. Гел-Манове матрице . . . . .	176
4.6.1	Комутатори Гел-Манових матрица . . . . .	177
4.6.2	Ранг Лијеве алгебре . . . . .	178

<b>5</b>	<b>Паулијево решење за атом водониковог типа</b>	<b>179</b>
5.1	Лагранжев и Хамилтонов опис механичког система . . . . .	179
5.1.1	Лагранжев формализам . . . . .	179
5.1.2	Хамилтонов формализам . . . . .	185
5.2	Теорема Еми Нетер . . . . .	189
5.2.1	Инваријантност дејства и закони одржања . . . . .	189
5.2.2	Закони одржања и Поасонове заграде . . . . .	192
5.3	Класични Кеплеров проблем . . . . .	194
5.4	Алгебарски приступ квантном проблему . . . . .	199
5.4.1	Канонска квантизација . . . . .	200
5.4.2	Генератори ротација и транслација у квантној механици . . . . .	201
5.4.3	Оператори физичких величина у Кеплеровом проблему . . . . .	202
5.4.4	Особине Рунге-Ленцовог вектора у квантној теорији . . . . .	204
5.4.5	Спектар атома водониковог типа . . . . .	210
<b>6</b>	<b>Примена дискретне Фуријеове трансформације у чврстом стању</b>	<b>213</b>
6.1	Дискретизација применом цикличних граничних услова . . . . .	213
6.1.1	Бравеове кристалне решетке . . . . .	214
6.1.2	Реципрочне решетке . . . . .	216
6.2	Блохова теорема . . . . .	217
6.3	Примена цикличних граничних услова Борна и Фон Кармана . . . . .	218
6.4	Примери примене дискретне Фуријеове трансформације у чврстом стању	222
6.4.1	Интеракција измене . . . . .	222
6.4.2	Примери . . . . .	225
	<b>Прилог</b>	<b>243</b>
<b>A</b>	<b>Интегрални идентитети</b>	<b>243</b>
A.1	Поасонов интеграл . . . . .	243
A.2	Замена редоследа интеграције . . . . .	243
A.3	Диференцирање интеграла по параметру . . . . .	244
<b>B</b>	<b>Диракова делта функција и њене репрезентације</b>	<b>245</b>
<b>V</b>	<b>Особине комутатора</b>	<b>247</b>
<b>Г</b>	<b>Таблица основних Лапласових трансформација</b>	<b>249</b>
<b>Д</b>	<b>Специјалне функције</b>	<b>251</b>
Д.1	Ермитови полиноми . . . . .	251
Д.2	Лежандрови полиноми . . . . .	252
Д.3	Лагерови полиноми . . . . .	253
Д.4	Беселове функције . . . . .	255
Д.5	Чебишевљеви полиноми . . . . .	255
Д.6	Уопштене хипергеометријске функције . . . . .	256

Ћ Квантни ЛХО у Хајзенберговој матричној механици	257
Е Бозонске репрезентације спинских оператора	259
Литература	261

# Предговор

Материјал изложен у овом уџбенику прилагођен је предмету *Математичка физика*, који похађају студенти треће године основних академских студија на Департману за физику Природно-математичког факултета у Новом Саду. Поједини делови уџбеника могу се користити и у оквиру предмета *Симетрије у физици* и *Квантна статистичка физика* са четврте године основних академских студија.

Студенти у семестру који претходи предмету *Математичка физика* похађају курс *Основи математичке физике* у оквиру кога изучавају линеарну алгебру, тензорски рачун, векторску анализу, делове функционалне анализе, теорију оператора и специјалне функције кроз различите примене у физици. У овом уџбенику ослањамо се на знања стечена у оквиру наведеног предмета, као и на знања из претходно положених курсева математике на студијама физике. То је главни разлог зашто Главу 1, Интегралне трансформације са применама у физици, започињемо Фуријеовом трансформацијом без претходног увођења Фуријеовог реда, јер се ова тема обрађује на *Основама математичке физике*.

Интегралне трансформације са применама у физици су најобимнија глава овог уџбеника. У њој смо се усредсредили на методе и примере који се обрађују на основним студијама физике кроз различите претежно теоријске предмете. У овој глави обрађене су Фуријеова и Лапласова трансформација. При излагању Фуријеове трансформације посебан акценат стављен је на њену примену у квантној механици, где је објашњен прелазак са координатне на импулсну репрезентацију. При излагању Лапласове трансформације дискутована је њена примена у теорији осцилација и нуклеарној физици. У истој глави постављен је и даљи тон излагања, који је пропраћен великим бројем примера, јер сматрамо да је без њих веома тешко разумети концепте који се обрађују у уџбенику.

Интегралне једначине се на неким студијама физике уопште не обрађују, док се на другим изучавају и превише детаљно, па студенти буду изненађени што велики број метода за њихово решавање не срећу до краја студија ни на једном курсу. Зато смо настојали да уравнотежимо излагање на начин да студенти стекну основни увид у теорију интегралних једначина, али да то не буде преобимно. У овој глави обрађено је решавање интегралних једначина применом интегралних трансформација као и применом два апроксимативна метода: Пикаровим методом сукцесивних апроксимација и методом резолвенте. Због тога очекујемо да ће Глава 2, Интегралне једначине, бити и потребна и довољна за оно што студенте очекује до краја студија физике из ове области. Исто важи и за Главу 3, Хипергеометријске функције. У оквиру ове главе обрађене су детаљно Гаусова и конфлуентна хипергеометријска функција, али методи који су изложени применљиви су на уопштене хипергеометријске функције. У случају обе главе наведена

је пропратна литература за студенте који су више заинтересовани.

Теорија група је област која је веома значајна за физику, а посебно за физику кондензоване материје и физику елементарних честица, вероватно две гране у које касније услови највећи број наших студената. И поред тога, она се на основним академским студијама физике у Новом Саду не предаје толико дуго. Први пут је уведена у оквир курса *Математичка физика* 2014. године, кад је одлучено да се обимно градиво интегралних једначина смањи и уместо истог убади теорија група. У оквиру Главе 4 изложене су основе коначних и Лијевих група са акцентом на примену у физици.

Ослањајући се на неке резултате из теорије Лијевих група и Лијевих алгебри, који су изложени у Глави 4, у Глави 5 је приказан Паулијев прилаз проблему атома водониковог типа. Стандардни курсеви квантне механике обично дају предност Шредингеровом методу када је реч о овом важном егзактно решивом проблему. Паулијево решење се заснива на анализи класичног Кеплеровог проблема у Хамилтоновом формализму и алгебри оператора који се добијају од класичних динамичких променљивих поступком канонске квантизације. Будући да се операторске алгебре данас широко користе у анализи многочестичних квантних система, надамо се да детаљан приказ Паулијевог решења може послужити као добар пример за примену Лијевих алгебри у квантној механици и као увод у операторске приступе у анализи сложенијих система. Ради потпуности излагања, најпре је дат преглед класичне теорије, са посебним освртом на законе одржања, након чега је детаљно дискутован квантни случај.

Дискретна Фуријеова трансформација представља један од главних математичких алата у анализи периодичних кристалних структура у физици чврстог стања. Њена примена омогућава прелазак из директног у реципрочан простор, чиме се значајно поједностављује анализа електронских стања, опис колективних ексцитација и одређивање дисперзионих релација. Дискретизација дозвољених вредности таласног вектора постиже се ограничавањем кристалне решетке на коначну запремину и наметањем цикличних граничних услова. У Глави 6 приказане су основе примене дискретне Фуријеове трансформације у чврстом стању, уз поређење са континуалном Фуријеовом трансформацијом приказаном у Глави 1. Осим тога, дат је преглед кључних појмова физике чврстог стања, као и конкретни примери дискретне Фуријеове трансформације у овој области, уз посебан осврт на одређивање Фуријеове слике интеграла измене за различите кристалне структуре, дискретну Фуријеову трансформацију фермионских и бозонских оператора, као и одређивање дисперзионих релација. Алата и примери представљени у овој глави од посебног су значаја за курс *Квантна статистичка физика*, који студенти похађају на четвртој години основних академских студија физике.

Аутори дугују велику захвалност рецензентима рукописа: проф. др Милану Пантићу, редовном професору Природно-математичког факултета у Новом Саду, проф. др Божидару Николићу, ванредном професору Физичког факултета у Београду и проф. др Милици Рутоњски, ванредном професору Природно-математичког факултета у Новом Саду, чије су корисне сугестије у многоне побољшале текст. Аутори се такође захваљују и проф. др Бориши Кузелевићу, ванредном професору Природно-математичког факултета у Новом Саду, који је детаљно прочитао Главу 4 и дао бројне корисне сугестије. Захваљујемо се и проф. др Ивани Војновић, ванредном професору Природно-математичког факултета у Новом Саду, на корисним дискусијама. Захваљујемо се и студентима Петру Русову и Милици Живанчевић који су прочитали делове књиге и имали низ корисних сугестија.

Све преостале грешке настале су нашом кривицом и надамо се да ће нам заинтересовани читаоци указати на њих, пишући на неку од следећих адреса: [petar.mali@df.uns.ac.rs](mailto:petar.mali@df.uns.ac.rs), [sonja.gombar@df.uns.ac.rs](mailto:sonja.gombar@df.uns.ac.rs) или [slobodan@df.uns.ac.rs](mailto:slobodan@df.uns.ac.rs).

Ова књига је колективно дело, па је и одговорност за евентуалне пропусте заједничка. Ако је реч о похвалама, можемо бити и нешто одређенији: Главе 1–4 претежно је написао Петар Мали, Главу 5 Слободан Радошевић, а Главу 6 Соња Гомбар.

Аутори



# 1

## Интегралне трансформације са применама у физици

Интегралне трансформације представљају моћан математички алат којим се функције из једног простора (простор оригинала) пресликавају у други простор (простор слике), помоћу интеграла са одговарајућим језгром. Основна идеја примене ових трансформација је најчешће у томе да се неки сложени проблеми поједноставе након примене одговарајуће трансформације, затим реше у простору слике и да се на крају помоћу инверзне трансформације добије решење полазног проблема у простору оригинала. Поред самог решавања, примена интегралних трансформација може нам помоћи и у анализи различитих проблема. Интегралне трансформације се примењују на диференцијалне (обичне, парцијалне и фракционе), интегралне, интегро-диференцијалне и диференцне једначине и могу се користити за рачунање различитих интеграла и бесконачних сума. Због свега наведеног интегралне трансформације имају велику примену у физици и инжењерству. Широко поље примене интегралних трансформација је разлог што се оне изучавају на више курсева на основним студијама физике. У овом поглављу биће изложене Фуријеова и Лапласова трансформација, док су поред њих у употреби још и Мелинова, Хенкелова и друге трансформације.

### 1.1 Фуријеова трансформација

Периодичне функције са периодом  $L$  се могу развити у Фуријеов ред. Многи проблеми у физици доводе до функција које су аperiodичне. Вођени идејом да се свака аperiodична функција може представити као периодична функција са периодом  $L \rightarrow \infty$ , од Фуријеовог реда у овом граничном процесу долазимо до Фуријеове трансформације (видети [Hassani, S. (2013), Osgood, B. (2007)]).

### 1.1.1 Дефиниција и особине

**Дефиниција 1.1.** Фуријеова трансформација комплексне функције реалног аргумента<sup>1</sup>  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  је дефинисана са

$$\mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx = F(k). \quad (1.1)$$

Функција  $F(k)$  је у уопштем случају такође комплексна функција реалног аргумента  $k \in \mathbb{R}$ . Функцију  $f(x)$  зовемо оригинал, а функцију  $F(k)$  слика.

Да би Фуријеова трансформација функције постојала, функција  $f(x)$  мора да задовољава одређене услове. Један од њих је да функција мора бити интегрална у свакој коначној области. Такође, како је интервал интеграције бесконачан, конвергенција мора да буде задовољена. У пракси ово најчешће значи да је  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ . Довољан услов да Фуријеова трансформација постоји [Butkov, E. (1968)] је да је функција  $f(x)$  по модулу интегрална<sup>2</sup>  $L^1(\mathbb{R})$ , односно да важи

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty. \quad (1.2)$$

У теорији дистрибуција<sup>3</sup> показује се да је могуће проширити скуп објеката за које се може дефинисати Фуријеова трансформација. Односно, Фуријеова трансформација се може дефинисати и за нпр.  $1, x, x^2, \dots, x^n, \cos x, \sin x, e^{ikx}, \delta(x), \delta'(x), \dots, \delta^{(n)}(x)$ , где је  $\delta(x)$  Диракова делта функција. Сви ови објекти припадају простору  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ , тзв. простору темперираних дистрибуција<sup>4</sup> (за више детаља видети [Nikolsky, S.M. (1981), Станковић, Б., Пилиповић, С. (1983), Филиповић, Д. (2019)]). Свака функција која има највише полиномни раст и по модулу је интегрална на сваком коначном интервалу<sup>5</sup> може се идентификовати са елементом простора  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ . Међутим, треба водити рачуна да простор  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  садржи и елементе попут Диракове делта функције<sup>6</sup> и њених извода, који нису функције у обичном смислу [Митриновић, Д., Кечкић, Ј. (1994)]. Елементи простора  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  темперираних дистрибуција имају особину да ако узмемо Фуријеову трансформацију било ког од њих, добијамо елементе који су такође у  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ ,

$$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}). \quad (1.3)$$

<sup>1</sup>Под аргументом у дефиницији подразумевамо независно променљиву. Овај појам треба разликовати од аргумента комплексног броја.

<sup>2</sup>У случају реалне функције  $f(x)$  рекли бисмо апсолутно интегрална.

<sup>3</sup>У руској литератури користи се назив уопштена функција. У западној литератури термин дистрибуција први је употребио Лоран Шварц (Laurent Schwartz) (1915-2002), добитник Филдсове медаље 1950. године, и он је остао опште прихваћен [Филиповић, Д. (2019)].

<sup>4</sup>Темперирани дистрибуције зову се још и дистрибуције спорог раста. Простор темперираних дистрибуција  $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$  је дуални простор Шварцовог простора  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  који се састоји од скупа свих бесконачно диференцијабилних функција које су брзо опадајуће. Односно то су функције за које важи да је  $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^k |f^{(\ell)}(x)| < \infty$ , за све  $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ . Елементи простора  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  имају особину да ако узмемо Фуријеову трансформацију било ког од њих, добијамо елементе који су такође у  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , односно  $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Типични представници простора  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  су Ермитове функције, па тако и функција  $e^{-ax^2}$ ,  $a > 0$ . Приметите да функција  $e^{-a|x|}$ ,  $a > 0$  не припада простору  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ , јер није диференцијабилна у нули.

<sup>5</sup>Скуп по модулу интегралних функција на коначном интервалу се означава са  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ .

<sup>6</sup>Из историјских разлога је зовемо функцијом, јер ју је Пол Дирак (Paul Dirac) (1902-1984) на тај начин увео.

**Пример 1.1.** Наћи Фуријеову трансформацију у случају оригинала  $1, x, \sin x, \cos x, \delta(x)$ .  
**Решење.** Кренућемо од првог примера

$$\mathcal{F}[1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx = \sqrt{2\pi} \delta(k), \quad (1.4)$$

где смо у последњем кораку искористили интегралну репрезентацију делта функције  $\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dx$  (видети Додатак Б). Фуријеова трансформација линеарне функције  $f(x) = x$  дата је изразом

$$\mathcal{F}[x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ikx} dx = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{dk} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx = i\sqrt{2\pi} \delta'(k). \quad (1.5)$$

За диференцирање интеграла по параметру погледати Додатак А.3. У случају функције  $f(x) = \sin x$  можемо писати

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\sin x] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin x e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2i\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-1)x} dx - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k+1)x} dx \right) \\ &= \frac{2\pi}{2i\sqrt{2\pi}} \left( \delta(k-1) - \delta(k+1) \right) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \delta(k-1) - \delta(k+1) \right). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Поступак у случају функције  $f(x) = \cos x$  је аналоган поступку за  $f(x) = \sin x$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\cos x] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos x e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k-1)x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(k+1)x} dx \right) \\ &= \frac{2\pi}{2\sqrt{2\pi}} \left( \delta(k-1) + \delta(k+1) \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \delta(k-1) + \delta(k+1) \right). \end{aligned} \quad (1.7)$$

За последњи случај делта функције, која је заправо дистрибуција, важи (видети Додатак Б)

$$\mathcal{F}[\delta(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}. \quad (1.8)$$

■

Због присуства  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$ , тзв. кернела (језгра) трансформације, у (1.1) јасно је да је у општем случају  $F(k)$  комплексна функција, чак и када је  $f(x)$  реална функција. У специјалном случају када је  $f(x)$  реална парна функција,  $F(k)$  ће бити реална функција, док ако је  $f(x)$  реална непарна функција,  $F(k)$  ће бити чисто имагинарна. У то се лако можемо уверити ако на кернел трансформације применимо Ојлеров образац  $e^{-ikx} = \cos(kx) - i \sin(kx)$ . Тада је

$$\mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos(kx) - i \sin(kx)) dx \quad (1.9)$$

и, имајући у виду да је интеграл непарне функције у симетричним границама једнак нули, у случају када је  $f(x)$  реална парна функција, израз (1.9) постаје

$$\mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(kx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx, \quad (1.10)$$

док када је  $f(x)$  реална непарна функција, важи

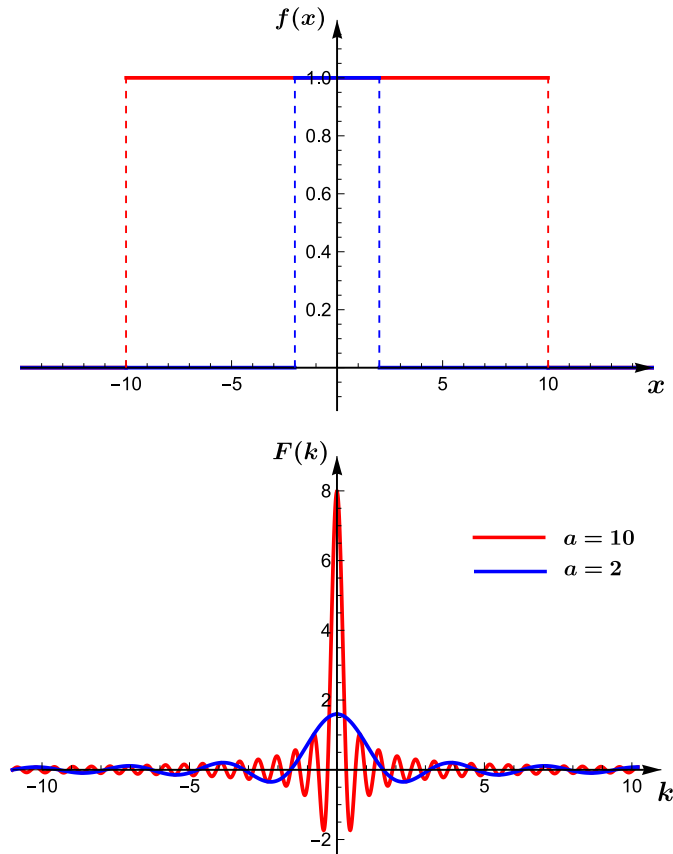
$$\mathcal{F}[f(x)] = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(kx) dx = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx. \quad (1.11)$$

**Пример 1.2.** Наћи Фуријеову трансформацију функције

$$f(x) = \begin{cases} A, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (1.12)$$

где су  $A$  и  $a$  позитивне константе.

**Решење:** Тражена Фуријеова трансформација је



Слика 1.1: Графички приказ функције (1.12) и њене Фуријеове трансформације за  $A = 1$ .

$$F(k) = \mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^a e^{-ikx} dx = \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(ka)}{k}. \quad (1.13)$$

Функција оригинал  $f(x)$  из примера се често зове правоугаона функција и у литератури можете наћи да се због свог облика означава и са  $\Pi(x)$  (видите Сliku 1.1). Запажамо да што је  $a$  мање, то је функција  $f(x)$  боље локализована. Док је у том случају функција  $F(k)$  расплнута на целој  $k$ -оси (Слика 1.1). За разлику од тога, што је  $a$  веће, то ће функција оригинал  $f(x)$  бити расплнута, док ће слика  $F(k)$  бити боље локализована. Размотримо гранични процес  $a \rightarrow \infty$ . У том случају функција  $f(x)$  је различита од нуле на целој  $x$ -оси, а  $F(k)$  ће бити

$$F(k) = \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin(ka)}{k} = \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \pi \delta(k), \quad (1.14)$$

где је у последњем кораку искоришћена тригонометријска репрезентација делта функције (видети Додатак Б). На основу овога видимо да што је функција  $f(x)$  боље локализована, то ће функција  $F(k)$  бити лошије локализована и обратно. Ово је повезано са Хајзенберговим релацијама неодређености и ова прича ће се даље провлачити кроз књигу (за више детаља видети Одељак 1.1.8). ■

**Пример 1.3.** Наћи Фуријеову трансформацију функције  $f(x) = e^{-ax^2}$ ,  $a > 0$ .

**Решење.** Фуријеову трансформацију задате функције наћи ћемо на три начина, да бисмо читаоцу показали што више приступа који су потенцијално корисни у различитим проблемима у физици.

*Први начин:* Полазећи од дефиниције Фуријеове трансформације, интегранд записујемо као једну експоненцијалну функцију

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(ax^2+ikx)} dx. \quad (1.15)$$

Трансформишимо израз у експоненту интегранда на следећи начин

$$ax^2 + ikx = (\sqrt{ax})^2 + ikx + y^2 - y^2, \quad (1.16)$$

тако да  $(\sqrt{ax})^2 + ikx + y^2$  буде квадрат бинорма. Одатле је  $y = \frac{ik}{2\sqrt{a}}$ . Заменом у израз (1.16) добија се

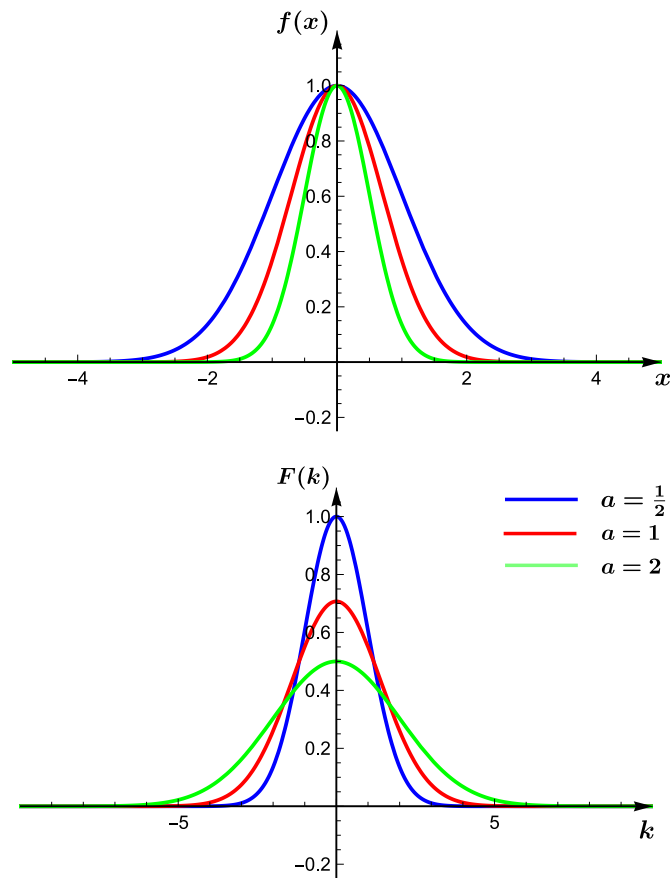
$$ax^2 + ikx = \left( \sqrt{ax} + \frac{ik}{2\sqrt{a}} \right)^2 - \frac{k^2}{4a}. \quad (1.17)$$

Сада ћемо трансформисани израз вратити у полазни интеграл

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\sqrt{ax} + \frac{ik}{2\sqrt{a}})^2} dx, \quad (1.18)$$

а након увођења смене  $u = \sqrt{ax} + \frac{ik}{2\sqrt{a}}$ ,  $du = \sqrt{a} dx$ , интеграл се своди на Поасонов (видети Додатак А.1)

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi a}} e^{-\frac{k^2}{4a}} \sqrt{\pi} = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}. \quad (1.19)$$



Слика 1.2: Графички приказ функције  $f(x) = e^{-ax^2}$  и њене Фуријеове трансформације  $F(k) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{k^2}{4a}}$ .

Добили смо да је Фуријеова трансформација гаусијане  $f(x) = e^{-ax^2}$  такође гаусијана  $F(k) = \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{k^2}{4a}}$ , која има максимум у координатном почетку као и функција оригинал (видети Сliku 1.2). Приметимо такође да што је функција  $f(x)$  боље локализована, то је  $F(k)$  расплинутија и обратно. Ова чињеница има везе са већ поменутиим релацијама неодређености. У специјалном случају  $a = \frac{1}{2}$  имамо да је  $\mathcal{F}[e^{-\frac{x^2}{2}}] = e^{-\frac{k^2}{2}}$ , при чему уочавамо исти облик функције и у простору оригинала и у простору слике. Тај случај можемо интерпретирати и на начин да је  $e^{-\frac{x^2}{2}}$  својствена функција<sup>7</sup> Фуријеове трансформације за својствену вредност 1. Такође, приметимо да смањивањем позитивних вредности  $a$  у простору слике добијамо функције  $F(k)$  које су боље локализоване, а поред тога имају и израженији максимум. Ово нас свакако наводи на закључак да одавде можемо извести још једну репрезентацију делта функције. Приметимо да је  $\lim_{a \rightarrow 0^+} e^{-ax^2} = 1$ . Такође уочимо да је  $\mathcal{F}[1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx$  и да то можемо повезати са интегралном репрезентацијом делта функције  $\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx$  (видети Додатак Б). Одатле следи да је  $\mathcal{F}[1] = \sqrt{2\pi}\delta(k) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{k^2}{4a}}$ . На основу последње једнакости добили смо још једну

<sup>7</sup>Више о својственим проблемима оператора можете наћи у [Мушицки, Ђ., Милић, Б. (1975); Радшевић, С., Мали, П. (2020)].

репрезентацију делта функције,  $\delta(k) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$ .

*Други начин:* Полазећи од

$$F'(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} (-ix) dx = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-ax^2} e^{-ikx} dx, \quad (1.20)$$

применом парцијалне интеграције за  $u = e^{-ikx}$ ,  $dv = x e^{-ax^2} dx$  добијамо да је  $F'(k) = -\frac{k}{2a} F(k)$ , што је диференцијална једначина која раздваја променљиве. Њено опште решење је  $F(k) = C e^{-\frac{k^2}{4a}}$ . Како је  $F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} e^{-ikx} dx$ , имамо да је  $C = F(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}$ . На основу тога је  $F(k) = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}$ .

*Трећи начин:* Како је  $f(x) = e^{-ax^2}$  реална парна функција, онда је

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos(kx) dx. \quad (1.21)$$

Коришћењем Тејлоровог развоја за косинус,  $\cos(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n} x^{2n}}{(2n)!}$ , добија се

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n} x^{2n}}{(2n)!} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx. \quad (1.22)$$

Увођењем смене  $u = ax^2$  долазимо до

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n}}{(2n)!} \int_0^{\infty} \frac{u^n}{a^n} e^{-u} \frac{du}{2a\sqrt{\frac{u}{a}}} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{k^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{2a^{n+\frac{1}{2}}} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right). \quad (1.23)$$

За позитивну вредност аргумента  $x > 0$  гама функција се може дефинисати помоћу интеграла  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ . Применом функционалне једначине за гама функцију,  $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ , и математичке индукције добија се да је  $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}$ , где је  $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1) = \prod_{k=1}^n (2k-1)$ . Заменом овог израза у (1.23), коришћењем идентитета  $(2n)! = (2n)!!(2n-1)!! = 2^n n!(2n-1)!!$ , где је  $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n) = \prod_{k=1}^n (2k)$ , и сређивањем долазимо до

$$\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \frac{1}{\sqrt{2a}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{k^2}{4a}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}. \quad (1.24)$$

У последњем кораку је искоришћен развој у ред експоненцијалне функције. ■

**Пример 1.4.** Наћи Фуријеову трансформацију функције  $f(x) = e^{-a|x|}$ ,  $a > 0$ .

**Решење** *Први начин:* Како је  $f(x)$  реална парна функција онда је

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{-a|x|}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-a|x|} \cos(kx) dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(kx) dx. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Последњи интеграл се може решавати парцијалном интеграцијом, а можемо приступити и на следећи начин. Пошто је

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos(kx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left[ \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-ikx} dx \right], \quad (1.26)$$

где је  $\operatorname{Re}$  ознака за реални део интеграла, налазимо

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-ikx} dx = \int_0^{\infty} e^{-(a+ik)x} dx = -\frac{e^{-(a+ik)x}}{a+ik} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a+ik} = \frac{a-ik}{a^2+k^2}. \quad (1.27)$$

Одатле је

$$\mathcal{F}[e^{-a|x|}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left[ \frac{a-ik}{a^2+k^2} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+k^2}. \quad (1.28)$$

Слика  $F(k)$  из овог примера је тзв. лоренцијана<sup>8</sup>. Функција оригинал  $f(x)$  и њена Фуријеова трансформација  $F(k)$  представљене су на Слици 1.3. Из овог примера можемо извести још једну репрезентацију делта функције. Приметимо да је  $\lim_{a \rightarrow 0^+} e^{-a|x|} = 1$ . Такође, уочимо да је  $\mathcal{F}[1] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx$  и да то можемо повезати са интегралном репрезентацијом делта функције  $\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dx$  (видети Додатак Б). Одавде следи да је  $\mathcal{F}[1] = \sqrt{2\pi} \delta(k) = \lim_{a \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+k^2}$ . На основу последње једнакости добили смо још једну репрезентацију делта функције  $\delta(k) = \frac{1}{\pi} \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{a}{a^2+k^2}$ .

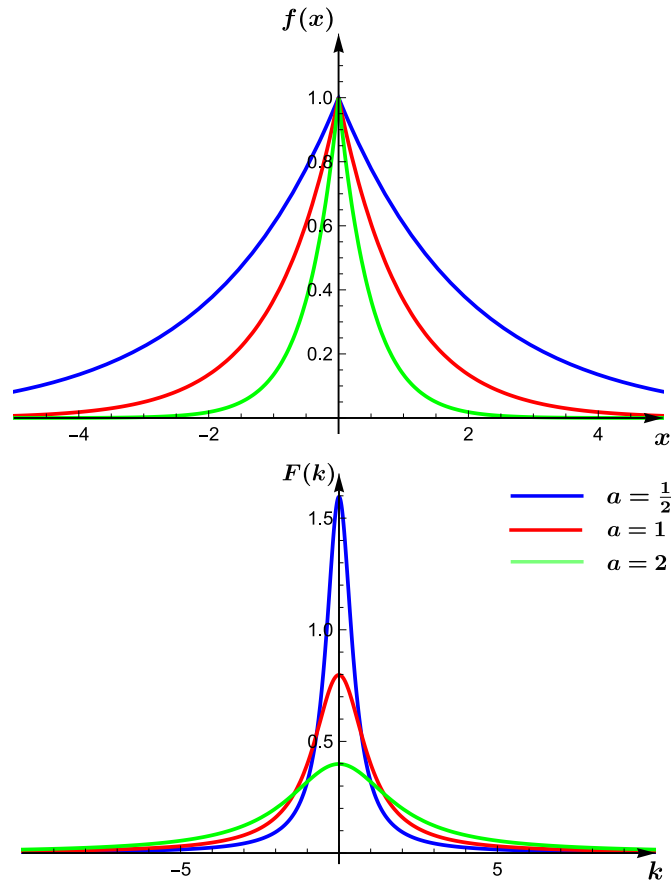
*Други начин* Можемо писати и

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[e^{-a|x|}] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-a|x|} e^{-ikx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{ax} e^{-ikx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-ax} e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{(a-ik)x} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-(a+ik)x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{(a-ik)x}}{a-ik} \Big|_{-\infty}^0 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(a+ik)x}}{a+ik} \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{a-ik} + \frac{1}{a+ik} \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+k^2}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

■

Приметимо да су у претходним примерима функције оригинали  $f(x)$  реалне парне функције, те су њима одговарајуће слике  $F(k)$  реалне функције. Уочимо и да су функције  $F(k)$  у претходним примерима парне функције. О томе ће бити речи након увођења инверзне Фуријеове трансформације. За Фуријеову трансформацију важе следеће особине:

<sup>8</sup>Лоренцијана носи име по нобеловцу Хендрику Антону Лоренцу (Hendrik Antoon Lorentz) (1853-1928), који је заслужан и за Лоренцове трансформације и Лоренцову силу. Ово је потребно нагласити како се не би погрешно помислило да је названа по Лудвигу Валентину Лоренцу (Ludvig Valentin Lorenz) (1829-1891), који је у електромагнетизам увео услов  $\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ , познат као Лоренцова калибрација.



Слика 1.3: Графички приказ функције  $f(x) = e^{-a|x|}$  и њене Фуријеове трансформације  $F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2+k^2}$ .

**Тврђење 1.1.** Линеарност Фуријеове трансформације:

$$\mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha \mathcal{F}[f(x)] + \beta \mathcal{F}[g(x)], \quad (1.30)$$

где су  $\alpha$  и  $\beta$  комплексни бројеви.

*Доказ.* Ова особина директно следи из линеарности несвојственог интеграла

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\alpha f(x) + \beta g(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} [\alpha f(x) + \beta g(x)] e^{-ikx} dx \\ &= \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx + \frac{\beta}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx \\ &= \alpha \mathcal{F}[f(x)] + \beta \mathcal{F}[g(x)]. \end{aligned} \quad (1.31)$$

■

**Тврђење 1.2.** (Теорема о скалирању) Ако је  $\mathcal{F}[f(x)] = F(k)$ , онда је

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{k}{a}\right), \quad a > 0. \quad (1.32)$$

*Доказ.* У дефиницији Фуријеове трансформације

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(ax)e^{-ikx} dx \quad (1.33)$$

уводимо смену  $u = ax$ ,  $du = adx$ , одакле добијамо

$$\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\frac{k}{a}u} du = \frac{1}{a} F\left(\frac{k}{a}\right). \quad (1.34)$$

Ову особину зовео скалирање, јер уколико независно променљиву  $x$  помножимо ненегативним бројем  $a$ , мењамо скалу коју посматрамо. ■

Код оваквог скалирања интересантно је посебно разматрати случајеве  $a > 1$  и  $a < 1$ . Упоредимо у случају када је  $a > 1$  функције  $f(ax)$  и  $f(x)$ . У овом случају ће  $f(ax)$  бити боље локализована у односу на  $f(x)$ , док ће слика од  $f(ax)$  бити лошије локализована у односу на слику од  $f(x)$  (видети Примере 1.3 и 1.4). Ако је  $a < 1$ , онда је функција  $f(ax)$  развученија по  $x$ -оси у односу на  $f(x)$ , док ће слика функције  $f(ax)$  бити боље локализована на  $k$ -оси од слике  $f(x)$ . Ово тврђење је могло да се формулише и докаже и у општијој форми

$$\mathcal{F}[f(bx)] = \frac{1}{|b|} F\left(\frac{k}{b}\right), b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (1.35)$$

**Тврђење 1.3.** (Теорема о транслацији аргумената оригинала) Ако је  $\mathcal{F}[f(x)] = F(k)$ , онда је

$$\mathcal{F}[f(x - a)] = e^{-ika} F(k), a \in \mathbb{R}. \quad (1.36)$$

Транслација аргумента оригинала доводи до множења са фазним фактором слике.

*Доказ.* У дефиницији Фуријеове трансформације

$$\mathcal{F}[f(x - a)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a)e^{-ikx} dx \quad (1.37)$$

уводимо смену  $u = x - a$ ,  $du = dx$ , одакле добијамо

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x - a)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-ik(u+a)} du = e^{-ika} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-iku} du \\ &= e^{-ika} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx = e^{-ika} F(k). \end{aligned} \quad (1.38)$$

■

**Пример 1.5.** Наћи Фуријеову трансформацију функције

$$f(x) = e^{-a(x-3)^2}, \quad a > 0 \quad (1.39)$$

**Решење.** Коришћењем Тврђења 1.3 добија се

$$\mathcal{F}[e^{-a(x-3)^2}] = e^{-3ik} \mathcal{F}[e^{-ax^2}]. \quad (1.40)$$

Након тога, на основу Примера 1.3, добијамо

$$\mathcal{F}[e^{-a(x-3)^2}] = e^{-3ik} \frac{1}{\sqrt{2a}} e^{-\frac{k^2}{4a}}. \quad (1.41)$$

■

**Тврђење 1.4.** (Теорема о атенуацији (уригушењу) оригинала) Ако је  $\mathcal{F}[f(x)] = F(k)$ , онда је

$$\mathcal{F}[f(x)e^{-ax}] = F(k - ia), a > 0. \quad (1.42)$$

Атенуација оригинала доводи до translације аргумента слике.

*Доказ.* Полазећи од дефиниције Фуријеове трансформације, можемо писати

$$\mathcal{F}[f(x)e^{-ax}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ax} e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(k-ia)x} dx = F(k - ia). \quad (1.43)$$

■

Да бисмо дошли до следеће особине, претпоставимо да постоји  $\mathcal{F}[f'(x)]$ . Онда  $\mathcal{F}[f'(x)]$  налазимо применом парцијалне интеграције. Бирајући  $u = e^{-ikx}$  и  $dv = f'(x)dx$ , добијамо

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f'(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x)e^{-ikx} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \\ &= ik\mathcal{F}[f(x)]. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Ако Фуријеова трансформација функције постоји, то обично значи да  $f(x) \rightarrow 0$  када  $x \rightarrow \pm\infty$ , што је искоришћено у претходном изразу<sup>9</sup>. Настављајући истом процедуром, добијамо

$$\mathcal{F}[f''(x)] = ik\mathcal{F}[f'(x)] = -k^2\mathcal{F}[f(x)]. \quad (1.45)$$

**Тврђење 1.5.** Фуријеова трансформација  $n$ -тог извода функције је дата са

$$\mathcal{F}[f^{(n)}(x)] = (ik)^n \mathcal{F}[f(x)]. \quad (1.46)$$

*Доказ.* Доказује се применом математичке индукције. ■

**Тврђење 1.6.** За Фуријеову трансформацију дефинисану са

$$\mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx = F(k) \quad (1.47)$$

инверзна Фуријеова трансформација је

$$\mathcal{F}^{-1}[F(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk = f(x). \quad (1.48)$$

<sup>9</sup>У случајевима када овај услов није испуњен, а Фуријеова трансформација постоји,  $f(x)$  можемо третирати као дистрибуцију [Butkov, E. (1968)]. Свака класична функција може да се посматра и као дистрибуција.

*Доказ.* Леву и десну страну једнакости

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx \quad (1.49)$$

помножимо са  $e^{ikx'}$  и проинтегралимо по  $k$  у границама од  $-\infty$  до  $\infty$ . Тако добијамо

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx'} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x'-x)}}_{2\pi\delta(x'-x)} = \sqrt{2\pi} f(x'), \quad (1.50)$$

односно

$$f(x') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx'} dk. \quad (1.51)$$

Преласком са  $x'$  на  $x$  директно долазимо до

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)e^{ikx} dk = \mathcal{F}^{-1}[F(k)]. \quad (1.52)$$

У доказу смо искористили интегралну репрезентацију делта функције (видети Додатак Б). ■

У специјалном случају када је  $F(k)$  реална парна функција,  $f(x)$  ће бити реална функција, док ако је  $F(k)$  реална непарна функција,  $f(x)$  ће бити чисто имагинарна. У то се лако можемо уверити ако на језгро инверзне трансформације применимо Ојлеров образац  $e^{ikx} = \cos(kx) + i \sin(kx)$ . Тада је

$$\mathcal{F}^{-1}[F(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k)(\cos(kx) + i \sin(kx)) dk \quad (1.53)$$

и, имајући у виду да је интеграл непарне функције у симетричним границама једнак нули, у случају када је  $F(k)$  реална парна функција израз (1.53) постаје

$$\mathcal{F}^{-1}[F(k)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \cos(kx) dk = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(k) \cos(kx) dk, \quad (1.54)$$

док када је  $F(k)$  реална непарна функција,

$$\mathcal{F}^{-1}[F(k)] = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \sin(kx) dk = i\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F(k) \sin(kx) dk. \quad (1.55)$$

Одавде видимо и разлог зашто су у Примерима 1.2 и 1.3  $F(k)$  парне функције.

Једна од најважнијих особина Фуријеове трансформације је Парсевалов идентитет:

**Тврђење 1.7.** (*Парсевалов идентитет*) За Фуријеову трансформацију важи Парсевалов идентитет

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk. \quad (1.56)$$

*Доказ.* Парсевалов идентитет се једноставно доказује коришћењем  $|f(x)|^2 = f^*(x)f(x)$ ,  $|F(k)|^2 = F^*(k)F(k)$

$$|F(k)|^2 = F^*(k)F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{ikx} f^*(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-iky} f(y). \quad (1.57)$$

Након интеграције по  $k$  добија се

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y) \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x-y)}}_{\delta(x-y)} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx, \end{aligned} \quad (1.58)$$

што је и требало доказати. ■

Ова теорема зове се још и Планшерелова теорема. Она нам каже да је  $\|f\|_{L^2} = \|F\|_{L^2}$ , где је  $\|f\|_{L^2} = (\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx)^{\frac{1}{2}}$  док је  $\|F\|_{L^2} = (\int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk)^{\frac{1}{2}}$ , односно да је Фуријеова трансформација  $L^2(\mathbb{R})$  функције  $L^2(\mathbb{R})$  функција. Специјално, ако је оригинал функција која је нормирана на јединицу, онда ће и слика бити нормирана на јединицу, што је од великог значаја за квантну механику. Приметимо да су у Примерима 1.2, 1.3 и 1.4, када је  $a$  коначно, све функције оригинали из  $L^2(\mathbb{R})$ . На основу Парсеваловог идентитета знамо да су и слике у датим примерима из  $L^2(\mathbb{R})$ . Ово нам може користити и за рачунање разних интеграла.

**Пример 1.6.** Посматрајмо функцију

$$f(x) = \begin{cases} A, & |x| \leq a \\ 0, & |x| > a \end{cases} \quad (1.59)$$

где су  $A$  и  $a$  позитивне константе, из Примера 1.2. Када су  $a$  и  $A$  коначни, онда  $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{-a}^a |A|^2 dx = A^2 \int_{-a}^a dx = 2A^2a < \infty. \quad (1.60)$$

Како је њена Фуријеова трансформација  $F(k) = \frac{2A}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin(ka)}{k}$ , примењујући Парсевалов идентитет, добијамо

$$\|F\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk = \frac{4A^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2} dk = 2A^2a = \|f\|_{L^2}^2. \quad (1.61)$$

На основу тога дошли смо до решења интеграла

$$I(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2} dk = \pi a. \quad (1.62)$$

Одатле, диференцирањем леве и десне стране једнакости по параметру  $a$ , долазимо до

$$I'(a) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2 \sin(ka) \cos(ka) k}{k^2} dk = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(2ka)}{k} dk = \pi. \quad (1.63)$$

Увођењем смене  $u = 2ka, du = 2adk$ , долазимо до решења познатог Дирихлеовог интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \pi, \quad (1.64)$$

односно

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{\pi}{2}. \quad (1.65)$$

■

**Пример 1.7.** Посматрајмо функцију  $f(x) = e^{-a|x|}$ ,  $a > 0$ , из Примера 1.4. Уверимо се да  $f \in L^2(\mathbb{R})$

$$\|f\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2a|x|} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-2ax} dx = \frac{1}{a} < \infty. \quad (1.66)$$

Како је њена Фуријеова трансформација  $F(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2}$ , имајући у виду Парсевалов идентитет, знамо да је

$$\|F\|_{L^2}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk = \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a^2}{(a^2 + k^2)^2} dk = \frac{1}{a} = \|f\|_{L^2}^2. \quad (1.67)$$

На основу тога дошли смо до решења интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{(a^2 + k^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}. \quad (1.68)$$

■

У математичкој литератури узима се да су аргумент оригинала и слике бездимензионе величине. У литератури из физике имамо понекад и овај случај, али поред тога имамо још два веома значајна случаја. Када аргумент оригинала има димензију дужине  $[x] = L$ , онда аргумент слике има димензију таласног броја  $[k] = L^{-1}$ . То можемо закључити из тога што експонент у  $e^{-ikx}$  мора да буде бездимензион. Други значајан случај је када аргумент оригинала има димензију времена, а аргумент слике димензију фреквенције. Тада можемо писати

$$\mathcal{F}[f(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = F(\omega), \quad (1.69)$$

односно

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = f(t). \quad (1.70)$$

У различитој литератури се користе различите дефиниције Фуријеове трансформације. Такође, различити програмски језици и различита програмска окружења користе различите дефиниције Фуријеове трансформације. Напишимо општије Фуријеову трансформацију

$$\mathcal{F}[f(x)] = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ibkx} dx = F(k). \quad (1.71)$$

У овој књизи користимо дефиницију са  $a = 0$  и  $b = -1$ . Исту дефиницију користе и [Griffiths, D.J. Schroeter, D.F. (2018); Weinberg, S. (2012); Радосевић, С., Мали, П. (2020); Урумов, В. (1996); Пантић, М. (2024); Cohen-Tannoudji, С., Diu, В., Laloë, F. (1977)]. Wolfram Mathematica користи дефиницију са  $a = 0$  и  $b = 1$ , коју користи и [Butkov, E. (1968)]. Обе ове дефиниције се користе у квантној механици и зовемо их симетричним дефиницијама Фуријеове трансформације, јер се и у директној и инверзној трансформацији појављује фактор  $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ . У процесирању сигнала у електротехници се најчешће користи дефиниција са  $a = 0, b = -2\pi$  (видети нпр. [Osgood, В. (2007)]). У Python програмском окружењу, користећи библиотеку SymPy, у употреби је такође дефиниција са  $a = 0, b = -2\pi$ . Одговарајућа инверзна трансформација трансформације (1.71) је дата са

$$\mathcal{F}^{-1}[F(k)] = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1+a}}} \int_{-\infty}^{\infty} F(k) e^{-ibkx} dk = f(x). \quad (1.72)$$

Општи облик Парсевалог идентитета (Планшерелове теореме) има форму

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{(2\pi)^a |b|} \int_{-\infty}^{\infty} |F(k)|^2 dk. \quad (1.73)$$

### 1.1.2 Фуријеова трансформација као унитарни оператор

Оператор  $\mathcal{K}$  је унитаран ако задовољава услов  $\mathcal{K}\mathcal{K}^\dagger = \mathcal{K}^\dagger\mathcal{K} = I$ , односно  $\mathcal{K}^\dagger = \mathcal{K}^{-1}$ , где је  $\mathcal{K}^\dagger$  ознака за адјунговани, а  $\mathcal{K}^{-1}$  за инверзни оператор оператора  $\mathcal{K}$ . Поставља се питање шта је адјунговани оператор за неки интегрални оператор. Код матрица је то транспоновање матрице и комплексно конјуговање њених елемената. Код интегралних оператора морамо се строго држати дефиниције

$$(f, \mathcal{K}g) = (\mathcal{K}^\dagger f, g), \quad (1.74)$$

где  $(, )$  означава одговарајући скаларни производ. Нека је дејство интегралног оператора дато са

$$\mathcal{K}g = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, y)g(y)dy, \quad (1.75)$$

односно

$$(f, \mathcal{K}g) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy K(x, y)g(y), \quad (1.76)$$

где је  $K(x, y)$  кернел (језгро) интегралног оператора. Претпоставимо да можемо да заменимо редослед интеграције

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy K(x, y)g(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy g(y) \int_{-\infty}^{\infty} dx K(x, y)f^*(x), \quad (1.77)$$

и извршимо замену  $x \longleftrightarrow y$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx f^*(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy K(x, y) g(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy K(y, x) f^*(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx g(x) \int_{-\infty}^{\infty} dy [K^*(y, x) f(y)]^* \\ &= (\mathcal{K}^\dagger f, g). \end{aligned} \quad (1.78)$$

Ово значи да ако је интегрални оператор  $\mathcal{K}$  репрезентован кернелом  $K(x, y)$ , онда је интегрални оператор  $\mathcal{K}^\dagger$  репрезентован кернелом  $K^*(y, x)$ . Код симетричне Фуријеове трансформације кернел је  $K(x, k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx}$ , одакле је  $K^*(k, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ixk} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ . На основу тога што је  $K^*(k, x)$  кернел инверзне Фуријеове трансформације, знамо да је симетрична Фуријеова трансформација унитарна операција. Због самог увођења скаларног производа овде функције морају бити по модулу квадратно интеграбилне  $L^2(\mathbb{R})$ .

### 1.1.3 Фуријеова трансформација нормираних Ермитових функција

Нормиране Ермитове функције су од великог значаја у квантној механици јер су решења временски независне Шредингерове једначине за квантни линеарни хармонијски осцилатор (ЛХО). Временски независна Шредингерова једначина је својствени проблем хамилтонијана и решавањем овог својственог проблема у случају квантног ЛХО добијају се својствене функције

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha}}{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(\sqrt{\alpha} x) e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.79)$$

где је  $\alpha = \frac{m\omega}{\hbar}$  и својствене вредности

$$E_n = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.80)$$

при чему је  $m$  маса честица,  $\omega$  је кружна фреквенција, а  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$  редукована Планкова константа<sup>10</sup>. Како је димензија  $[\alpha] = [\frac{m\omega}{\hbar}] = L^{-2}$  (инверзни квадрат дужине) видимо да аргумент од  $H_n(\sqrt{\alpha} x)$  нема димензију, као ни степен експоненцијалне функције. Стога је  $[\psi_n(x)] = [\sqrt{\sqrt{\alpha}}] = L^{-\frac{1}{2}}$ . Увођењем ознаке  $\xi = \sqrt{\alpha} x$  Ермитови полиноми могу бити дефинисани Родриговом формулом

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} e^{-\xi^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.81)$$

одакле је најлакше добити првих неколико Ермитових полинома  $H_0(\xi) = 1$ ,  $H_1(\xi) = 2\xi$ ,  $H_2(\xi) = 4\xi^2 - 2$ ,  $H_3(\xi) = 8\xi^3 - 12\xi$ ,  $H_4(\xi) = 16\xi^4 - 48\xi^2 + 12$ ,  $H_5(\xi) = 32\xi^5 - 160\xi^3 + 120\xi$ . За Ермитове полиноме важи<sup>11</sup>  $H_n(-\xi) = (-1)^n H_n(\xi)$  и највиши степен сваког од ових

<sup>10</sup>У даљем тексту  $\hbar$  ћемо звати Планкова константа. Ову константу је први увео Дирак, па би се могла звати и Диракова константа.

<sup>11</sup>Како видимо да су Ермитови полиноми или парни или непарни, и сама Ермитова функција ће бити или парна или непарна, односно и у једном и у другом случају смеђиваће се парне и непарне функције.

полинома је  $2^n \xi^n$ , односно  $H_n(\xi) = 2^n \xi^n + \dots$ . Ермитови полиноми се такође могу добити из функције генератрисе (изводнице)

$$G(\xi, s) = e^{\xi^2 - (s-\xi)^2} = e^{-s^2 + 2s\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\xi) \frac{s^n}{n!}. \quad (1.82)$$

Овако дефинисани Ермитови полиноми задовољавају диференцијалну једначину

$$\frac{d^2 H_n(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH_n(\xi)}{d\xi} + 2nH_n(\xi) = 0, \quad (1.83)$$

повезани су рекурентним релацијама

$$\frac{dH_n(\xi)}{d\xi} = 2nH_{n-1}(\xi), \quad \xi H_n(\xi) = nH_{n-1}(\xi) + \frac{1}{2}H_{n+1}(\xi) \quad (1.84)$$

и за њих важи нормирање

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{n,m}. \quad (1.85)$$

**Тврђење 1.8.** За нормиране Ермитове функције, својствене функције хамилтонијана у проблему квантног ЛХО,

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{\sqrt{\alpha}}{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(\sqrt{\alpha}x) e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}, \quad (1.86)$$

важи

$$\mathcal{F}[\psi_n(x)] = (-i)^n \psi_n\left(\frac{k}{\alpha}\right). \quad (1.87)$$

*Доказ.* Ради поједностављивања рачуна узмимо да је  $\alpha = 1$ . Лева и десна страна релације

$$e^{-s^2 + 2sx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(x) \quad (1.88)$$

се помноже са  $e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Добија се

$$e^{-s^2 + 2sx} e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (1.89)$$

Примени се Фуријеова трансформација на обе стране једнакости, након чега се може писати

$$e^{-s^2} \mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2} + 2sx}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \mathcal{F}\left[H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\right]. \quad (1.90)$$

Интеграл на левој страни једнакости (1.90) решава се свођењем на потпуни квадрат

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left[e^{-\frac{x^2}{2}+2sx}\right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} e^{-\frac{x^2}{2}+2sx} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{ik-2s}{\sqrt{2}}\right)^2} e^{\frac{(ik-2s)^2}{2}} \\ &= e^{\frac{(ik-2s)^2}{2}}.\end{aligned}\tag{1.91}$$

Заменом (1.91) у (1.90) добија се

$$e^{s^2} e^{-\frac{k^2}{2}} e^{-2iks} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \mathcal{F}\left[H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\right].\tag{1.92}$$

Даље се трансформише лева страна једнакости (1.92)

$$e^{s^2} e^{-\frac{k^2}{2}} e^{-2iks} = e^{-\frac{k^2}{2}} e^{-(-is)^2+2k(-is)} = e^{-\frac{k^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n s^n}{n!} H_n(k)\tag{1.93}$$

и очигледно је

$$\mathcal{F}\left[H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}\right] = (-i)^n H_n(k) e^{-\frac{k^2}{2}}.\tag{1.94}$$

Сада желимо да вратимо скалирање са  $\sqrt{\alpha}$ . На основу Тврђења 1.2 је  $\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{k}{a}\right)$ ,  $a > 0$ . У случају (1.94) је  $f(x) = H_n(x) e^{-\frac{x^2}{2}}$ , а  $F(k) = (-i)^n H_n(k) e^{-\frac{k^2}{2}}$ , док је  $a = \sqrt{\alpha}$ . Односно

$$\mathcal{F}\left[H_n(\sqrt{\alpha}x) e^{-\frac{\alpha x^2}{2}}\right] = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} (-i)^n H_n\left(\frac{k}{\sqrt{\alpha}}\right) e^{-\frac{k^2}{2\alpha}}.\tag{1.95}$$

Множењем леве и десне стране једнакости (1.95) са  $\sqrt{\frac{\sqrt{\alpha}}{2^n n! \sqrt{\pi}}}$  добија се

$$\mathcal{F}[\psi_n(x)] = (-i)^n \psi_n\left(\frac{k}{\alpha}\right),\tag{1.96}$$

што је и требало доказати. ■

### 1.1.4 Конволуција

У случају интегралних трансформација, па тако и Фуријеове трансформације, конволуција оригинала је она операција која након примене интегралне трансформације прелази у производ слика. Користећи дефиницију Фуријеове трансформације из овог поглавља  $\mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx = F(k)$ ,  $\mathcal{F}[g(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-ikx} dx = G(k)$  конволуција функција  $f(x) * g(x)$  мора да задовољава особину да је

$$\mathcal{F}[f(x) * g(x)] = F(k)G(k).\tag{1.97}$$

**Дефиниција 1.2.** Конволуција је дефинисана са

$$(f * g)(x) = f(x) * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy, \quad (1.98)$$

за  $f \in L^1(\mathbb{R})$ ,  $g \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  за скоро све  $x \in \mathbb{R}$  [Abels, H. (2011); Brezis, H. (2011)]. Уз додатак да у том случају  $f * g \in L^p(\mathbb{R})$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ .

**Тврђење 1.9.** За функције  $f, g \in L^1(\mathbb{R})$  важи

$$\mathcal{F}[f(x) * g(x)] = F(k)G(k). \quad (1.99)$$

*Доказ.* Применимо Фуријеову трансформацију на (1.98)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x) * g(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy g(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)e^{-ikx} dx. \end{aligned} \quad (1.100)$$

Увођењем смене  $x-y = z$  у другом интегралу добија се

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f(x) * g(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy g(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-ik(y+z)} dz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy g(y) e^{-iky} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z)e^{-ikz} dz \\ &= G(k)F(k) = F(k)G(k). \end{aligned} \quad (1.101)$$

■

Ова теорема важи за много ширу класу функција, али не важи генерално и зато смо у теорему прецизирали јак услов да су функције  $L^1(\mathbb{R})$ . У наредним примерима уверићемо се да је њено важење много шире, али у оквирима теорије дистрибуција. За Фуријеову трансформацију (1.71) конволуција ће бити дефинисана са

$$f(x) * g(x) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy. \quad (1.102)$$

Конвенција коју користимо у књизи је  $a = 0, b = -1$ . Лако је уверити се да овим избором добијамо израз из Дефиниције 1.2.

**Тврђење 1.10.** Неке особине конволуције су:

1) комутативност

$$f * g = g * f$$

2) асоцијативност

$$f * (g * h) = (f * g) * h$$

3) дистрибутивност

$$f * (g + h) = f * g + f * h$$

4) конволуција са делта функцијом<sup>12</sup>

$$f * \delta = \delta * f = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f.$$

где  $f, g, h \in L^1(\mathbb{R})$  и  $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ .

<sup>12</sup>У теорији дистрибуција  $\delta$  је дистрибуција са компактним носачем и због тога овај идентитет важи [Станковић, Б., Пилиповић, С. (1983)].

*Доказ.* 1) Ако у изразу за конволуцију (1.98)

$$f(x) * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy, \quad (1.103)$$

уведемо смену  $u = x - y$ ,  $du = -dy$ , добија се

$$\begin{aligned} f(x) * g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} f(u)g(x-u)(-du) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(x-u)f(u)du \\ &= g(x) * f(x). \end{aligned} \quad (1.104)$$

2)

$$\begin{aligned} f(x) * (g(x) * h(x)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)(g * h)(y)dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y) \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(y-z)h(z)dz \right] dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y-z)h(z)dzdy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y-z)h(z)dydz. \end{aligned} \quad (1.105)$$

У последњем кораку смо заменили редослед интеграције. У унутрашњем интегралу (за који је  $z = \text{const}$ ) уводимо смену  $v = y - z$ ,  $dv = dy$ , чиме добијамо да је

$$\begin{aligned} f(x) * (g(x) * h(x)) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-(v+z))g(v)h(z)dvdz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f((x-z)-v)g(v)h(z)dvdz \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x-z)h(z)dz \\ &= (f(x) * g(x)) * h(x). \end{aligned} \quad (1.106)$$

3) Директна је последица чињенице да је интеграл линеаран оператор.

4) Користећи особину делта функције да укида интеграл, лако се добија

$$f(x) * \delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\delta(y)dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x). \quad (1.107)$$

■

**Пример 1.8.** Наћи конволуцију функција  $\chi_{[a,b]}(x)$  и  $g(x) = x^2$ , где је  $\chi_{[a,b]}$  карактеристична функција дефинисана на следећи начин

$$\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1, & a \leq x \leq b \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases} \quad (1.108)$$

**Решење.** *Први начин:* Директном применом Дефиниције 1.2 добијамо

$$\chi_{[a,b]}(x) * x^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]}(x-y)y^2dy, \quad (1.109)$$

где је

$$\chi_{[a,b]}(x-y) = \begin{cases} 1, & a \leq x-y \leq b \\ 0, & x-y \notin [a,b]. \end{cases} \quad (1.110)$$

Како се интеграција врши по  $y$ , неједнакост  $a \leq x-y \leq b$ , можемо написати као две неједнакости  $a \leq x-y$  и  $x-y \leq b$ , што даљим сређивањем доводи до  $y \leq x-a$  и  $y \geq x-b$ . На основу тога једнакост (1.109) постаје

$$\chi_{[a,b]}(x) * x^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x-b}^{x-a} y^2 dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{y^3}{3} \Big|_{x-b}^{x-a} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(x-a)^3 - (x-b)^3}{3}. \quad (1.111)$$

*Други начин:* Користећи комутативност конволуције, у случају функција из овог примера, Дефиниција 1.2 своди се на

$$\chi_{[a,b]}(x) * x^2 = x^2 * \chi_{[a,b]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b (x-y)^2 dy = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b (x-y)^2 d(x-y), \quad (1.112)$$

односно

$$\chi_{[a,b]}(x) * x^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{(x-a)^3 - (x-b)^3}{3}. \quad (1.113)$$

НАПОМЕНА 1: Приметимо да се добијена конволуција може записати као

$$\chi_{[a,b]}(x) * x^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ (b-a)x^2 - (b^2 - a^2)x + \frac{b^3 - a^3}{3} \right], \quad (1.114)$$

односно конволуцијом  $\chi_{[a,b]}(x)$  са квадратним полиномом добија се квадратни полином. Важи и општије, конволуцијом  $\chi_{[a,b]}(x)$  са произвољним полиномом степена  $n$  добија се полином степена  $n$

$$\chi_{[a,b]}(x) * P_n(x) = \tilde{P}_n(x). \quad (1.115)$$

НАПОМЕНА 2: Налажењем одговарајућих Фуријеових трансформација оригинала

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\chi_{[a,b]}(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[a,b]}(x) e^{-ikx} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-ikx} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{ik}, \end{aligned} \quad (1.116)$$

$$\mathcal{F}[x^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ikx} dx = -\sqrt{2\pi} \delta''(k), \quad (1.117)$$

добијамо да је производ слика

$$\mathcal{F}[\chi_{[a,b]}(x)] \mathcal{F}[x^2] = -\frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{ik} \delta''(k), \quad (1.118)$$

док је Фуријеова трансформација конволуције

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\chi_{[a,b]}(x) * x^2] &= \mathcal{F}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[(b-a)x^2 - (b^2 - a^2)x + \frac{b^3 - a^3}{3}\right]\right] \\ &= -(b-a)\delta''(k) - i(b^2 - a^2)\delta'(k) + \frac{b^3 - a^3}{3}\delta(k).\end{aligned}\quad (1.119)$$

Делује да релација  $\mathcal{F}[f(x) * g(x)] = F(k)G(k)$  овде не важи. Ипак, детаљнијим испитивањем уверићемо се да је ова релација задовољена. У том циљу, размотримо производ  $h(k)\delta''(k)$ , развијмо  $h(k)$  у Тејлоров ред око нуле и задржимо у развоју чланове до другог степена  $k$

$$h(k) = h(0) + h'(0)k + \frac{h''(0)}{2!}k^2, \quad (1.120)$$

јер виши степени неће давати допринос због  $\delta''(k)$ . На основу тога је

$$h(k)\delta''(k) = h(0)\delta''(k) + h'(0)k\delta''(k) + \frac{h''(0)}{2!}k^2\delta''(k). \quad (1.121)$$

Користећи интегралну репрезентацију делта функције  $\delta(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{iqk} dq$ , имамо да је  $\delta'(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} iqe^{iqk} dq$  и  $\delta''(k) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} q^2 e^{iqk} dq$ , те (1.121) постаје

$$h(k)\delta''(k) = h(0)\delta''(k) - 2h'(0)\delta'(k) + h''(0)\delta(k). \quad (1.122)$$

Како је у случају који разматрамо  $h(k) = -\frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{ik}$ , диференцирањем и заменом  $k = 0$  у изразима добијамо да и у овом случају важи

$$\mathcal{F}[f(x) * g(x)] = F(k)G(k). \quad (1.123)$$

НАПОМЕНА 3: Приметимо да смо у овом примеру израчунали конволуцију две функције, од којих је  $\chi_{[a,b]}(x)$  у  $L^p(\mathbb{R})$  простору (за било које  $1 \leq p \leq \infty$ ), а  $x^2$  је у  $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$  простору. Конволуција две функције може да буде добро дефинисана и када немамо случај да је једна функција из  $L^1(\mathbb{R})$ , а друга из  $L^p(\mathbb{R})$  простора [Mikusiński, J. (1978)].

**Пример 1.9.** Наћи конволуцију функција  $f(x) = \cos x$  и  $g(x) = e^{-a|x|}$ ,  $a > 0$ .

**Решење** *Први начин:*

$$\begin{aligned}f(x) * g(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(x-y)e^{-a|y|} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 \cos(x-y)e^{ay} dy \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \cos(x-y)e^{-ay} dy.\end{aligned}\quad (1.124)$$

У интегралу који садржи  $e^{ay}$  уводимо смену  $-y = t$ , па након сређивања и примене тригонометријског идентитета  $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y$ , добијамо

$$f(x) * g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \cos x \int_0^{\infty} e^{-ay} \cos y dy = \frac{\sqrt{2}a \cos x}{(a^2 + 1)\sqrt{\pi}}. \quad (1.125)$$

*Други начин:* Искористимо комутативност конволуције

$$g(x) * f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x-y|} \cos y dy. \quad (1.126)$$

Увођењем смене  $t = x - y$ ,  $dt = -dy$ , (1.126) постаје

$$g(x) * f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\infty}^{-\infty} e^{-a|t|} \cos(x+t) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \cos(x+t) dt. \quad (1.127)$$

Применом адиционе формуле  $\cos(x+t) = \cos x \cos t - \sin x \sin t$  добијамо

$$\begin{aligned} g(x) * f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} (\cos x \cos t - \sin x \sin t) dt \\ &= \frac{\cos x}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \cos t dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2 \cos x \int_0^{\infty} e^{-at} \cos t dt \\ &= \frac{\sqrt{2} a \cos x}{(a^2 + 1)\sqrt{\pi}}. \end{aligned} \quad (1.128)$$

НАПОМЕНА: Раније смо показали да је

$$\mathcal{F}[\cos x] = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \delta(k-1) + \delta(k+1) \right) \quad (1.129)$$

и да је

$$\mathcal{F}[e^{-a|x|}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2}. \quad (1.130)$$

Како је

$$\mathcal{F} \left[ \frac{\sqrt{2} a \cos x}{(a^2 + 1)\sqrt{\pi}} \right] = \frac{a}{a^2 + 1} \left( \delta(k-1) + \delta(k+1) \right), \quad (1.131)$$

то значи да је

$$\mathcal{F}[\cos x * e^{-a|x|}] = \mathcal{F}[\cos x] \cdot \mathcal{F}[e^{-a|x|}]. \quad (1.132)$$

Ово је последица чињенице да су делта функције различите од нуле само у тачкама  $k = 1$  и  $k = -1$ , па је

$$\frac{a}{a^2 + 1} \left( \delta(k-1) + \delta(k+1) \right) = \frac{a}{a^2 + k^2} \left( \delta(k-1) + \delta(k+1) \right). \quad (1.133)$$

■

### 1.1.5 Фуријеова косинусна трансформација

Као што је показано раније, у случају реалне парне функције  $f(x)$  Фуријеова трансформација је дефинисана са

$$\mathcal{F}[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx = F(k). \quad (1.134)$$

Ова трансформација може бити дефинисана и за неке функције  $f(x)$  које нису реалне парне. У том случају трансформацију ћемо звати Фуријеова косинусна трансформација. У следећој дефиницији, поред Фуријеове косинусне трансформације дефинисаћемо и одговарајућу инверзну трансформацију.

**Дефиниција 1.3.** Фуријеова косинусна трансформација је дефинисана са

$$\mathcal{F}_C[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx = F_C(k), \quad k \in [0, \infty). \quad (1.135)$$

Инверзна Фуријеова косинусна трансформација у том случају је дефинисана са

$$\mathcal{F}_C^{-1}[F_C(k)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_C(k) \cos(kx) dk = f(x), \quad x \in [0, \infty). \quad (1.136)$$

Инверзну Фуријеову косинусну трансформацију тражимо на следећи начин. Једнакост

$$F_C(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx \quad (1.137)$$

множимо са  $\cos(kx')$  и интегралимо по  $k$  у границама  $[0, \infty)$ :

$$\int_0^{\infty} F_C(k) \cos(kx') dk = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx f(x) \int_0^{\infty} dk \cos(kx) \cos(kx'). \quad (1.138)$$

Примењујући адициону формулу  $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$  и тригонометријску репрезентацију делта функције, десна страна једнакости (1.138) постаје

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx f(x) \int_0^{\infty} dk \frac{1}{2} [\cos(k(x - x')) + \cos(k(x + x'))] \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx f(x) \left[ \int_0^{\infty} dk \cos(k(x - x')) + \int_0^{\infty} dk \cos(k(x + x')) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dx f(x) \left[ \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} dk \cos(k(x - x')) + \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} dk \cos(k(x + x')) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dx f(x) \left[ \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\sin(\beta(x - x'))}{x - x'} + \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\sin(\beta(x + x'))}{x + x'} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dx f(x) [\pi \delta(x - x') + \pi \delta(x + x')] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} dx f(x) \delta(x - x') + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} dx f(x) \delta(x + x') \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} f(x'), \end{aligned} \quad (1.139)$$

где смо искористили идентитет  $\int_0^\infty dx f(x)\delta(x+x') = 0$ , јер  $x' \in [0, \infty)$ . Враћањем у (1.138) добијамо

$$f(x') = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_C(k) \cos(kx') dk, \quad (1.140)$$

што је израз за инверзну Фуријеову косинусну трансформацију.

**Пример 1.10.** Показати да важи  $\mathcal{F}_C \left[ e^{-\frac{x^2}{2}} \right] = e^{-\frac{k^2}{2}}$ .

**Решење.**

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_C \left[ e^{-\frac{x^2}{2}} \right] &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(kx) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left[ \int_0^\infty e^{-ikx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{Re} \left[ \int_0^\infty e^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{ik}{\sqrt{2}}\right)^2} e^{-\frac{k^2}{2}} dx \right] \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{k^2}{2}} \sqrt{2} \operatorname{Re} \left[ \int_0^\infty e^{-z^2} dz \right] = e^{-\frac{k^2}{2}}. \end{aligned} \quad (1.141)$$

Овај резултат можемо интерпретирати и на начин да је  $e^{-\frac{x^2}{2}}$  својствена функција за Фуријеову косинусну трансформацију којој одговара својствена вредност 1.

НАПОМЕНА: У случају када је  $f(x)$  реална и парна функција, њена Фуријеова трансформација и Фуријеова косинусна трансформација су једнаке. Дакле, важи

$$\mathcal{F} \left[ e^{-\frac{x^2}{2}} \right] = e^{-\frac{k^2}{2}}. \quad (1.142)$$

■

### 1.1.6 Фуријеова синусна трансформација

У случају реалне непарне функције  $f(x)$  Фуријеова трансформација је дефинисана са

$$\mathcal{F}[f(x)] = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(kx) dx = F(k). \quad (1.143)$$

Независно од парности функције  $f(x)$  уводимо дефиницију Фуријеове синусне трансформације и њој инверзне трансформације:

**Дефиниција 1.4.** Фуријеова синусна трансформација дефинисана је са

$$\mathcal{F}_S[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(x) \sin(kx) dx = F_S(k), \quad k \in [0, \infty). \quad (1.144)$$

Инверзна Фуријеова синусна трансформација у том случају је дефинисана као

$$\mathcal{F}_S^{-1}[F_S(k)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty F_S(k) \sin(kx) dk = f(x), \quad x \in [0, \infty). \quad (1.145)$$

Поступак тражења инверзне Фуријеове синусне трансформације аналоган је одређивању инверзне Фуријеове косинусне трансформације. Дакле, једнакост

$$F_S(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx \quad (1.146)$$

множимо са  $\sin(kx')$  и интегралимо по  $k$  у границама  $[0, \infty)$  :

$$\int_0^{\infty} F_S(k) \sin(kx') dk = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx f(x) \int_0^{\infty} dk \sin(kx) \sin(kx'). \quad (1.147)$$

Затим примењујемо адициону формулу  $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$  и тригонометријску репрезентацију делта функције и тиме трансформишемо десну страну једнакости (1.147)

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx f(x) \int_0^{\infty} dk \frac{1}{2} [\cos(k(x - x')) - \cos(k(x + x'))]. \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} dx f(x) \left[ \int_0^{\infty} dk \cos(k(x - x')) - \int_0^{\infty} dk \cos(k(x + x')) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dx f(x) \left[ \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} dk \cos(k(x - x')) - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} dk \cos(k(x + x')) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dx f(x) \left[ \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\sin(\beta(x - x'))}{x - x'} - \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\sin(\beta(x + x'))}{x + x'} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} dx f(x) [\pi \delta(x - x') - \pi \delta(x + x')] \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} dx f(x) \delta(x - x') - \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} dx f(x) \delta(x + x') \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} f(x'). \end{aligned} \quad (1.148)$$

Враћањем у (1.147) добијамо

$$f(x') = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} F_S(k) \sin(kx') dk, \quad (1.149)$$

што је израз за инверзну Фуријеову синусну трансформацију.

**Пример 1.11.** Користећи познате резултате

$$\mathcal{F}_C \left[ x^{-\frac{1}{2}} \right] = k^{-\frac{1}{2}}, \quad \mathcal{F}_S \left[ x^{-\frac{1}{2}} \right] = k^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.150)$$

израчунати Френелове интеграле  $\int_0^{\infty} \cos(y^2) dy$  и  $\int_0^{\infty} \sin(y^2) dy$ .

**Решење.** Експлицитно написане једначине из (1.150) гласе

$$\mathcal{F}_C[x^{-\frac{1}{2}}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} x^{-\frac{1}{2}} \cos(kx) dx = k^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.151)$$

$$\mathcal{F}_S[x^{-\frac{1}{2}}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \sin(kx) dx = k^{-\frac{1}{2}}. \quad (1.152)$$

Специјално, за  $k = 1$ , налазимо

$$\int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \cos(x) dx = \int_0^\infty x^{-\frac{1}{2}} \sin(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (1.153)$$

Увођењем смене  $y = x^{\frac{1}{2}}$  добијамо

$$2 \int_0^\infty \cos(y^2) dy = 2 \int_0^\infty \sin(y^2) dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad (1.154)$$

односно, коначно је

$$\int_0^\infty \cos(y^2) dy = \int_0^\infty \sin(y^2) dy = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (1.155)$$

■

### 1.1.7 Тродимензиона Фуријеова трансформација

Фуријеова трансформација се може уопштити и дефинисати и за више димензија. У случају  $n$ -димензионе Фуријеове трансформације користимо следећу дефиницију:

**Дефиниција 1.5.** Фуријеова трансформација у  $n$ -димензија је дефинисана са

$$\mathcal{F}[f(\mathbf{x})] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n \mathbf{x}, \quad (1.156)$$

док је одговарајућа инверзна трансформација дата са

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\mathbf{k})] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d^n \mathbf{k}. \quad (1.157)$$

Због своје честе употребе у физици посебно ћемо разматрати тродимензиону Фуријеову трансформацију:

**Дефиниција 1.6.** Тродимензиона Фуријеова трансформација дефинисана је са

$$\mathcal{F}[f(\mathbf{r})] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} f(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3 \mathbf{r} = F(\mathbf{k}) \quad (1.158)$$

док је одговарајућа инверзна трансформација

$$\mathcal{F}^{-1}[F(\mathbf{k})] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} F(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3 \mathbf{k} = f(\mathbf{r}). \quad (1.159)$$

Ову дефиницију у Декартовим координатама можемо записати на следећи начин:

$$F(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z) e^{-i(k_x x + k_y y + k_z z)} dx dy dz = \mathcal{F}[f(\mathbf{r})], \quad (1.160)$$

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_x, k_y, k_z) e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} dk_x dk_y dk_z = \mathcal{F}^{-1}[F(\mathbf{k})]. \quad (1.161)$$

Проблеми које ћемо разматрати у овој Глави везани су за тражење Фуријеове трансформације сферносиметричних функција  $f(\mathbf{r}) = f(r)$ . Неки од примера оваквих функција су функција основног стања оператора енергије у проблему атома водоника, Јукавин потенцијал итд. Код сферносиметричних функција проблеме је најједноставније решавати у сферним координатама. При томе се коректан прелазак на сферне координате врши у неколико корака. Прво ћемо искористити слободу оријентације вектора  $\mathbf{k} \in V^*$  у одговарајућем координатном систему. Будући да је (у односу на интеграцију у  $V = \mathbb{R}^3$ ) дуални вектор  $\mathbf{k}$  константан, можемо га оријентисати тако да буде  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}^{3*}$  (еквивалентно, можемо одабрати координатни систем тако да је  $\mathbf{k} = k\mathbf{e}^{3*}$ ). Овим избором добијамо  $k_1 x^1 + k_2 x^2 + k_3 x^3 \rightarrow kx^3$ , па у аргументу експоненцијалне функције фигурише само координата  $x^3$ . Сада је могуће прећи на сферне координате у  $V = \mathbb{R}^3$ , па се коначно добија

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kx^3 = kr \cos \theta. \quad (1.162)$$

Како је у сферним координатама  $d^3\mathbf{r} = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$ , где су  $\theta$  и  $\varphi$  стандардни углови сферног координатног система у  $V = \mathbb{R}^3$ , Фуријеова трансформација сферносиметричне функције постаје

$$\mathcal{F}[f(r)] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} r^2 f(r) \sin \theta e^{-ikr \cos \theta} d\varphi d\theta dr. \quad (1.163)$$

**Пример 1.12.** Наћи тродимензиону Фуријеову трансформацију функције

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^2}. \quad (1.164)$$

При томе користити познати резултат

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}, \quad (1.165)$$

(видети Пример 1.6).

**Решење.** Према општем изразу (1.158), тродимензиона Фуријеова трансформација је дата интегралом

$$\mathcal{F}[f(r)] = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{r} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} f(r), \quad (1.166)$$

где је сада  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_1 x^1 + k_2 x^2 + k_3 x^3$ . Пошто је функција  $f(\mathbf{r}) = 1/r^2$  сферносиметрична, за очекивати је да се интеграл из (1.166) најлакше рачуна у сферним координатама простора  $V = \mathbb{R}^3$ .

$$\mathcal{F} \left[ \frac{1}{r^2} \right] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty r^2 dr \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-ikr \cos \theta} \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{r^2} \quad (1.167)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2\pi}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty dr \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-ikr \cos \theta} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty dr \frac{2}{kr} \sin(kr) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{k} \end{aligned} \quad (1.168)$$

при чему је у претпоследњем кораку уведена очигледна смена  $kr = x$ .

НАПОМЕНА: На почетку решења овог задатка је наглашено да крајњи резултат не зависи од оријентације вектора  $\mathbf{k} \in V^*$  (мада избор  $\mathbf{k} = ke^{3*}$  максимално поједностављује рачунање интеграла). Како бисмо се уверили у то, оријентишимо вектор  $\mathbf{k}$  дуж  $k_1$  правца. Тада уместо (1.162) добијамо

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = kx^1 = kr \sin \theta \cos \varphi, \quad (1.169)$$

па се Фуријеова трансформација своди на рачунање интеграла

$$\mathcal{F} \left[ \frac{1}{r^2} \right] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-ikr \sin \theta \cos \varphi}. \quad (1.170)$$

У угаони део горњег интеграла уводимо смене дефинисане релацијама

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos \varphi &= \cos \tilde{\theta}, \\ \sin \theta \sin \varphi &= \sin \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi}, \\ \cos \theta &= \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\varphi}. \end{aligned} \quad (1.171)$$

Из (1.171) се лако види да су старе променљиве експлицитно изражене помоћу нових са

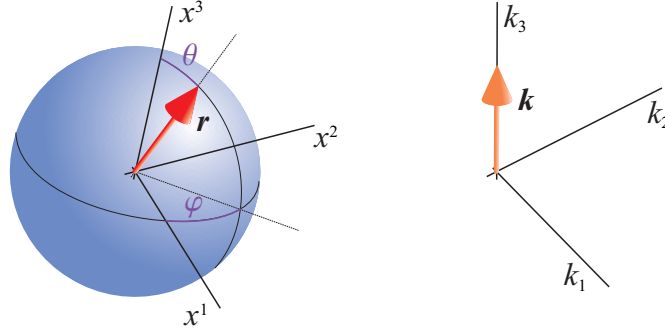
$$\varphi = \arctan \left[ \tan \tilde{\theta} \cos \tilde{\varphi} \right], \quad \theta = \arccos \left[ \sin \tilde{\theta} \sin \tilde{\varphi} \right], \quad (1.172)$$

па угаони елемент прелази у

$$d\varphi d\theta \sin \theta \rightarrow d\tilde{\varphi} d\tilde{\theta} \sin \theta \left( \tilde{\theta}, \tilde{\varphi} \right) \left| \frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})} \right|. \quad (1.173)$$

На основу (1.172) можемо израчунати тражене парцијалне изводе, што је остављено за самосталну вежбу. Крајњи резултат је

$$\left| \frac{\partial(\theta, \varphi)}{\partial(\tilde{\theta}, \tilde{\varphi})} \right| = \frac{\sin \tilde{\theta}}{\sin \theta}. \quad (1.174)$$



Слика 1.4: Два координатна система коришћена приликом рачунања интеграла из (1.166).

Замењујући (1.174) у (1.173), добијамо

$$d\varphi d\theta \sin \theta \rightarrow d\tilde{\varphi} d\tilde{\theta} \sin \theta \left( \tilde{\theta}, \tilde{\varphi} \right) \frac{\sin \tilde{\theta}}{\sin \theta \left( \tilde{\theta}, \tilde{\varphi} \right)} = d\tilde{\varphi} d\tilde{\theta} \sin \tilde{\theta}. \quad (1.175)$$

Дакле, елемент интеграције у новим променљивим поново има стандардни облик карактеристичан за сферне координате. Користећи (1.175) и (1.171) у (1.170), налазимо

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[ \frac{1}{r^2} \right] &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \sin \theta e^{-ikr \sin \theta \cos \varphi} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty dr \int_0^{2\pi} d\tilde{\varphi} \int_0^\pi d\tilde{\theta} \sin \tilde{\theta} e^{-ikr \cos \tilde{\theta}}, \end{aligned} \quad (1.176)$$

што се поклапа са интегралом из (1.167) и интеграл  $\mathcal{F}[r^{-2}]$  заиста има исту вредност без обзира да ли је вектор  $\mathbf{k} \in V^*$  оријентисан дуж  $k_3$  или  $k_1$  осе. На сличан, али знатно компликованији начин се може дискутовати и случај произвољне оријентације вектора  $\mathbf{k} \in V^*$ . Иначе, из (1.171) се види да нове променљиве  $\tilde{\theta}$  и  $\tilde{\varphi}$  дефинишу сферне углове у координатном систему који је добијен од стандардног једноставном ротацијом оса  $x^1 \rightarrow x^3, x^3 \rightarrow x^2, x^2 \rightarrow x^1$ .

■

**Тврђење 1.11.** Тродимензиона Фуријеова трансформација сферносиметричне функције  $f(\mathbf{r}) = f(r)$  може бити записана као Фуријеова синусна трансформација:

$$\mathcal{F}[f(r)] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} f(r) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d^3\mathbf{r} = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [r f(r)] \sin(kr) dr = \frac{1}{k} \mathcal{F}_S[r f(r)]. \quad (1.177)$$

*Доказ.* Са већ раније одабраним правцем вектора  $\mathbf{k}$ , имамо да је  $\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} = kr \cos \theta$ , односно да је  $e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = e^{-ikr \cos \theta}$ . Заменом овог израза у тродимензиону Фуријеову трансформацију

и расписивањем елемента запремине у сферним координатама добија се

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f(r)] &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_0^\infty dr r^2 \int_0^\pi d\theta \sin\theta e^{-ikr \cos\theta} \int_0^{2\pi} d\varphi f(r) \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^\infty dr r^2 \frac{2 \sin(kr)}{kr} f(r) \\ &= \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty dr [rf(r)] \sin(kr) = \frac{1}{k} \mathcal{F}_S[rf(r)],\end{aligned}$$

чиме је тврђење доказано. У горњем рачуну интеграција по  $\varphi$  је тривијална и даје само  $2\pi$ . Након тога извршили смо интеграцију по  $\theta$ , користећи смену  $u = -ikr \cos\theta$ ,  $du = ikr \sin\theta d\theta$ ,

$$\int_0^\pi \sin\theta e^{-ikr \cos\theta} d\theta = \int_{-ikr}^{ikr} e^u \frac{du}{ikr} = \frac{1}{ikr} e^u \Big|_{-ikr}^{ikr} = \frac{2}{kr} \sin(kr). \quad (1.178)$$

На самом крају остала је интеграција по  $r$ . ■

**Пример 1.13.** Нормирати таласну функцију основног стања атома водоника  $\psi(r) = Ce^{-\frac{r}{a_0}}$ , где је  $a_0 > 0$  први Боров радијус. На тако нормирану таласну функцију применити Фуријеову трансформацију.

**Решење.** Услов нормирања гласи

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(r)|^2 d^3\mathbf{r} = 1. \quad (1.179)$$

Елемент запремине у сферним координатама је дат са  $d^3\mathbf{r} = r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$ , а како је функција сферносиметрична, нормирање се своди на

$$4\pi|C|^2 \int_0^\infty r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}} dr = 1. \quad (1.180)$$

Увођењем смене  $u = \frac{2r}{a_0}$ ,  $du = \frac{2}{a_0} dr$ , добија се

$$4\pi|C|^2 \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 \int_0^\infty u^2 e^{-u} du = 4\pi|C|^2 \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 \Gamma(3) = 4\pi|C|^2 \left(\frac{a_0}{2}\right)^3 2! = 1, \quad (1.181)$$

где је искоришћена дефиниција гама функције  $\Gamma(x) = \int_0^\infty u^{x-1} e^{-u} du$ . Одатле је  $|C|^2 = \frac{1}{\pi a_0^3}$ . Бирамо константу  $C$  да буде реална и позитивна,  $C = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}}$ , одакле је  $\psi(r) = \sqrt{\frac{1}{\pi a_0^3}} e^{-\frac{r}{a_0}}$ . Фуријеова трансформација овако нормиране функције<sup>13</sup> је

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[\psi(r)] &= \frac{1}{k} \mathcal{F}_S[r\psi(r)] = \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty [r\psi(r)] \sin(kr) dr \\ &= \frac{1}{k} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\pi a_0^3}} \int_0^\infty r e^{-\frac{r}{a_0}} \sin(kr) dr \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{a_0^{\frac{3}{2}}}{(1 + a_0^2 k^2)^2}.\end{aligned} \quad (1.182)$$

<sup>13</sup>Приметимо да је у овом случају димензија таласне функције  $[\psi(r)] = L^{-\frac{3}{2}}$ , односно димензија таласне функције зависи од димензије простора у ком се решава Шредингера једначина.

Да бисмо решили интеграл који се појављује у последњем изразу, прво рачунамо помоћни интеграл

$$\begin{aligned} I(a, k) &= \int_0^{\infty} e^{-ar} \sin(kr) dr = \text{Im} \left[ \int_0^{\infty} e^{-ar} e^{ikr} dr \right] = \text{Im} \left[ \int_0^{\infty} e^{-(a-ik)r} dr \right] \\ &= \text{Im} \left[ \frac{1}{a-ik} \right] = \frac{k}{a^2 + k^2}, \end{aligned} \quad (1.183)$$

а затим га диференцирамо по параметру  $a$ . Добија се

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} I(a, k) &= \frac{\partial}{\partial a} \int_0^{\infty} e^{-ar} \sin(kr) dr = - \int_0^{\infty} r e^{-ar} \sin(kr) dr \\ &= \frac{\partial}{\partial a} \frac{k}{a^2 + k^2} = \frac{-2ak}{(a^2 + k^2)^2}, \end{aligned} \quad (1.184)$$

односно

$$\int_0^{\infty} r e^{-ar} \sin(kr) dr = \frac{2ak}{(a^2 + k^2)^2}. \quad (1.185)$$

■

**Пример 1.14.** Наћи Фуријеову трансформацију функције  $f(\mathbf{r}) = \frac{e^{-ar}}{r}$ ,  $a > 0$ .

**Решење.** Применом Тврђења 1.11 налазимо

$$\mathcal{F} \left[ \frac{e^{-ar}}{r} \right] = \frac{1}{k} \mathcal{F}_S[e^{-ar}] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k} \int_0^{\infty} dr e^{-ar} \sin(kr) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^2 + k^2}. \quad (1.186)$$

НАПОМЕНА 1: У лимесу  $a \rightarrow 0$ , налазимо

$$\mathcal{F} \left[ \frac{1}{r} \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{k^2}. \quad (1.187)$$

НАПОМЕНА 2: Функција  $f(\mathbf{r}) = \frac{e^{-ar}}{r}$  се у физичарској литератури често идентификује са Јукавиним потенцијалом.

НАПОМЕНА 3: Код рачунања корелационе функције у оквиру Ландауове теорије фазних прелаза потребно је наћи инверзну Фуријеову трансформацију  $f(r) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \frac{1}{a^2 + k^2} \right]$ . У експоненту функције  $f(r)$  ће тада фигурирати корелациона дужина. ■

Фуријеова трансформација се може дефинисати и за векторске функције векторског аргумента:

**Дефиниција 1.7.** Фуријеова трансформација векторске функције векторског аргумента  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  је дата са

$$\mathcal{F}[\mathbf{u}(\mathbf{r})] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{u}(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{r} = \mathbf{U}(\mathbf{k}). \quad (1.188)$$

Одговарајућа инверзна трансформација је

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathbf{U}(\mathbf{k})] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{U}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d^3 \mathbf{k} = \mathbf{u}(\mathbf{r}). \quad (1.189)$$

**Тврђење 1.12.** За дивергенцију и ротор важе релације

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}(\mathbf{r})) = \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{i}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{U}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})d^3\mathbf{k}, \quad (1.190)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u}(\mathbf{r})) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{i}\mathbf{k} \times (\mathbf{U}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})d^3\mathbf{k}. \quad (1.191)$$

*Доказ.* Тражењем дивергенције и ротора леве и десне стране једнакости

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{U}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}d^3\mathbf{k} \quad (1.192)$$

добија се

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \cdot (\mathbf{U}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})d^3\mathbf{k}, \quad (1.193)$$

$$\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \times (\mathbf{U}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})d^3\mathbf{k}. \quad (1.194)$$

Дејством дивергенције и ротора на  $\mathbf{A}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$  добија се

$$\operatorname{div}(\mathbf{A}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \nabla \cdot (\mathbf{A}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \mathbf{i}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{A}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}), \quad (1.195)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{A}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \nabla \times (\mathbf{A}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \mathbf{i}\mathbf{k} \times (\mathbf{A}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}). \quad (1.196)$$

За више детаља погледати ([Радосевић, С., Мали, П. (2020)]). Када набла делује на функцију од  $\mathbf{r}$ , подразумева се да је  $\nabla = \nabla_{\mathbf{r}}$ , односно за оператор  $\nabla$ ,  $\mathbf{k}$  је константан вектор, па је и  $\mathbf{U}(\mathbf{k})$  константан вектор. На основу свега наведеног је

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}(\mathbf{r})) = \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \mathbf{i}\mathbf{k} \cdot (\mathbf{U}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}), \quad (1.197)$$

$$\operatorname{rot}(\mathbf{u}(\mathbf{r})) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int_{\mathbb{R}^3} d^3\mathbf{k} \mathbf{i}\mathbf{k} \times (\mathbf{U}(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}). \quad (1.198)$$

■

### 1.1.8 Фуријеова трансформација и квантна механика

У квантној механици функција стања не може да зависи и од координате и од импулса. То бране релације неодређености. Због тога уводимо тзв. координатну репрезентацију, где функција стања зависи од координате  $x$ , и импулсну репрезентацију, где

функција стања зависи од импулса  $p_x \equiv p$ . Напишимо сада Фуријеову трансформацију функције  $\psi(x)$

$$\Psi(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-ikx} dx \quad (1.199)$$

и одговарајућу инверзну трансформацију

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(k) e^{ikx} dk. \quad (1.200)$$

Како су ово једнодимензионе трансформације<sup>14</sup>,  $x$  представља координату, а  $k$  таласни број. Ако желимо прећи на импулс користимо линеарну везу  $p = \hbar k$ . Одатле је  $dp = \hbar dk$ , те можемо писати

$$\Psi(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx, \quad (1.201)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(p) e^{\frac{ipx}{\hbar}} dp. \quad (1.202)$$

Увођењем  $\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \Psi(p)$  долазимо до симетричне дефиниције која се користи у квантној механици

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx, \quad (1.203)$$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}(p) e^{\frac{ipx}{\hbar}} dp. \quad (1.204)$$

У координатној репрезентацији оператор координате  $\hat{x}$  је мултипликативан, док је оператор импулса  $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$  диференцијалан. Ови оператори задовољавају комутациону релацију  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$  како у координатној, тако и у импулсној репрезентацији. У координатној репрезентацији у то се можемо уверити делујући комутатором  $[x, -i\hbar \frac{d}{dx}]$  (видети Додатак В) на произвољну диференцијабилну функцију  $f(x)$ :

$$\begin{aligned} \left[ x, -i\hbar \frac{d}{dx} \right] f(x) &= -i\hbar \left( x \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx} x \right) f(x) = -i\hbar \left( x \frac{df}{dx} - \frac{d}{dx} (xf(x)) \right) \\ &= -i\hbar \left( x \frac{df}{dx} - f(x) - x \frac{df}{dx} \right) = i\hbar f(x). \end{aligned} \quad (1.205)$$

Како смо одабрали произвољну диференцијабилну функцију  $f(x)$ , онда важи да је  $[x, -i\hbar \frac{d}{dx}] = i\hbar$ .

У импулсној репрезентацији је оператор  $\hat{p}$  мултипликативан, а оператор  $\hat{x} = i\hbar \frac{d}{dp}$  диференцијалан. Уверимо се да и у импулсној репрезентацији ови оператори морају да

<sup>14</sup>У тродимензионој трансформацији координата би била замењена радијус вектором  $\mathbf{r}$ , а таласни број таласним вектором  $\mathbf{k}$ .

задовољавају исту комутациону релацију. Делујући комутатором  $\left[ i\hbar \frac{d}{dp}, p \right]$  на произвољну диференцијабилну функцију  $\tilde{f}(p)$ , добијамо

$$\left[ i\hbar \frac{d}{dp}, p \right] \tilde{f}(p) = i\hbar \left( \frac{d}{dp} p - p \frac{d}{dp} \right) \tilde{f}(p) = i\hbar \left( \tilde{f}(p) + p \frac{d\tilde{f}}{dp} - p \frac{d\tilde{f}}{dp} \right) = i\hbar \tilde{f}(p). \quad (1.206)$$

Како је  $\tilde{f}(p)$  произвољна диференцијабилна функција, онда важи  $[i\hbar \frac{d}{dp}, p] = i\hbar$ . Према томе, комутациона релација<sup>15</sup>  $[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$  је задовољена и у координатној и у импулсној репрезентацији.

**Тврђење 1.13.** За функције стања у координатној и импулсној репрезентацији важе следеће релације

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) \left( -i\hbar \frac{d}{dx} \right) \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^*(p) p \tilde{\psi}(p) dp, \quad (1.207)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x) x \psi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^*(p) \left( i\hbar \frac{d}{dp} \right) \tilde{\psi}(p) dp. \quad (1.208)$$

*Доказ.* Таласна функција  $\psi(x) \in L^2(\mathbb{R})$  и самим тим  $\psi(x) \rightarrow 0$ , када  $x \rightarrow \pm\infty$ . Исто важи и за функцију стања  $\tilde{\psi}(p)$ ,  $\tilde{\psi}(p) \in L^2(\mathbb{R})$  и самим тим  $\tilde{\psi}(p) \rightarrow 0$ , када  $p \rightarrow \pm\infty$ . Након што се искористе Фуријеове трансформације, добија се

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^*(p) p \tilde{\psi}(p) dp = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x') e^{\frac{ipx'}{\hbar}} p e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \psi(x) dx dx' dp, \quad (1.209)$$

односно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\psi}^*(p) p \tilde{\psi}(p) dp = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x') e^{\frac{ipx'}{\hbar}} \psi(x) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \right) dx dx' dp. \quad (1.210)$$

Применом парцијалне интеграције

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial x} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \right) dx = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} \frac{d\psi}{dx} dx \quad (1.211)$$

и коришћењем интегралне репрезентације делта функције

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ip(x'-x)/\hbar} dp = \delta(x - x') \quad (1.212)$$

једнакост (1.210) прелази у (1.207). Аналогним поступком доказује се и (1.208). ■

Применом Фуријеове трансформације на сваки члан временски независне Шредингерове једначине у координатној репрезентацији добићемо Шредингерову једначину у импулсној репрезентацији. У импулсној репрезентацији она не мора у општем случају да буде диференцијална једначина, у шта се можемо уверити у следећем примеру.

<sup>15</sup>Како су  $\hat{x}$  и  $\hat{p}$  ермитски оператори, њихов комутатор је по дефиницији косоермитски оператор.

**Пример 1.15.** Написати временски независну Шредингерову једначину

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (1.213)$$

у импулсној репрезентацији ако се честица креће у потенцијалу  $V(x) = V_0 \cos(bx)$ .

**Решење** У задатом проблему  $\psi(x)$  је  $L^2(\mathbb{R})$  функција, а како разматрамо везана стања  $\psi(x) \rightarrow 0$  када  $x \rightarrow \pm\infty$ , она је самим тим и  $L^1(\mathbb{R})$  функција. Примени се Фуријеова трансформација на сваки члан диференцијалне једначине,

$$\mathcal{F} \left[ -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) \right] + \mathcal{F} [V(x)\psi(x)] = \mathcal{F} [E\psi(x)] \quad (1.214)$$

и искористи се линеарност Фуријеове трансформације

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \mathcal{F} \left[ \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) \right] + \mathcal{F} [V(x)\psi(x)] = E\mathcal{F} [\psi(x)]. \quad (1.215)$$

На основу дефиниције Фуријеове трансформације је

$$\mathcal{F}[\psi(x)] = \tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(x) e^{\frac{-ipx}{\hbar}}, \quad (1.216)$$

а производ  $V(x)\psi(x)$  се може записати као

$$V(x)\psi(x) = \mathcal{F}^{-1} \left[ \tilde{V}(p) * \tilde{\psi}(p) \right], \quad (1.217)$$

где је

$$\tilde{V}(p) * \tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dp' \tilde{V}(p-p') \tilde{\psi}(p'), \quad (1.218)$$

а  $\tilde{V}(p)$  и  $\tilde{\psi}(p)$  су Фуријеове трансформације од  $V(x)$  и  $\psi(x)$ , респективно. На основу (1.216)-(1.218) се види да једначина (1.213) у импулсној репрезентацији има форму

$$\frac{p^2}{2m} \tilde{\psi}(p) + \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(p-p') \tilde{\psi}(p') dp' = E\tilde{\psi}(p). \quad (1.219)$$

Да би се једначина (1.219) написала у импулсној репрезентацији за задати потенцијал, потребно је наћи  $\tilde{V}(p)$ . Користећи дефиницију (1.203), добијамо

$$\begin{aligned} \tilde{V}(p) &= \frac{V_0}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\frac{-ipx}{\hbar}} \cos(bx) \\ &= \frac{V_0}{2\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{\frac{-ipx}{\hbar}} (e^{ibx} + e^{-ibx}) \\ &= \frac{V_0}{2\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[ e^{i(\hbar b - p)\frac{x}{\hbar}} + e^{-i(\hbar b + p)\frac{x}{\hbar}} \right]. \end{aligned} \quad (1.220)$$

Преостали интеграл се решава сменом  $\xi = x/\hbar$ , чиме се своди на  $\delta$  функције. Коначан резултат је

$$\tilde{V}(p) = V_0 \sqrt{\frac{\hbar\pi}{2}} [\delta(\hbar b - p) + \delta(\hbar b + p)]. \quad (1.221)$$

Заменом (1.221) у (1.218) добијамо

$$\tilde{V}(p) * \tilde{\psi}(p) = \frac{V_0}{2} [\tilde{\psi}(p - \hbar b) + \tilde{\psi}(p + \hbar b)], \quad (1.222)$$

односно, Шредингерова једначина (1.213) за честицу у потенцијалу  $V(x) = V_0 \cos(bx)$ , написана у импулсној репрезентацији, гласи

$$\frac{p^2}{2m} \tilde{\psi}(p) + \frac{V_0}{2} [\tilde{\psi}(p - \hbar b) + \tilde{\psi}(p + \hbar b)] = E \tilde{\psi}(p). \quad (1.223)$$

Приметимо да је једначина (1.223) диференцна, док је једначина од које смо кренули (1.213) диференцијална. ■

Наравно, и у импулсној репрезентацији се може добити диференцијална једначина и то се дешава у проблему квантног ЛХО-а.

**Пример 1.16.** Написати временски независну Шредингерову једначину

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x) \quad (1.224)$$

у импулсној репрезентацији ако се честица креће у потенцијалу  $V(x) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ .

**Решење** У задатом проблему  $\psi(x)$  је  $L^2(\mathbb{R})$  функција, а како разматрамо везана стања  $\psi(x) \rightarrow 0$  када  $x \rightarrow \pm\infty$ , те је самим тим и  $L^1(\mathbb{R})$  функција. Примена Фуријеове трансформације на први члан једначине (1.224) даје

$$\mathcal{F} \left[ \frac{d^2 \psi}{dx^2} \right] = \frac{ip}{\hbar} \mathcal{F} \left[ \frac{d\psi}{dx} \right] = -\frac{p^2}{\hbar^2} \mathcal{F}[\psi(x)] = -\frac{p^2}{\hbar^2} \tilde{\psi}(p). \quad (1.225)$$

Други члан се своди на конволуцију

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[V(x)\psi(x)] &= \mathcal{F}[\mathcal{F}^{-1}[\tilde{V}(p) * \tilde{\psi}(p)]] = \tilde{V}(p) * \tilde{\psi}(p) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(p - p') \tilde{\psi}(p') dp'. \end{aligned} \quad (1.226)$$

Пре примене конволуције неопходно је наћи Фуријеову трансформацију потенцијала  $V(x)$

$$\begin{aligned} \tilde{V}(p) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} V(x) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m\omega^2 x^2}{2} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx \\ &= \frac{m\omega^2}{2\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx. \end{aligned} \quad (1.227)$$

Пођимо од интегралне репрезентације делта функције, дате са

$$\delta(p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx. \quad (1.228)$$

Њени изводи су

$$\delta'(p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \left( -\frac{ix}{\hbar} \right) e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx = -\frac{i}{2\pi\hbar^2} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx \quad (1.229)$$

и

$$\delta''(p) = -\frac{1}{2\pi\hbar^3} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{ipx}{\hbar}} dx. \quad (1.230)$$

Одатле је

$$\tilde{V}(p) = -\frac{m\omega^2}{2\sqrt{2\pi\hbar}} 2\pi\hbar^3 \delta''(p) = -\frac{m\omega^2 \sqrt{\pi\hbar^{\frac{5}{2}}}}{\sqrt{2}} \delta''(p). \quad (1.231)$$

За изводе делта функције важи (видети Додатак Б)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n)}(x) f(x) dx = - \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n-1)}(x) f'(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(n-2)}(x) f''(x) dx, \quad (1.232)$$

односно

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta''(x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f''(x) dx = f''(0). \quad (1.233)$$

Конволуција постаје

$$\begin{aligned} \tilde{V}(p) * \tilde{\psi}(p) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \frac{m\omega^2 \sqrt{\pi\hbar^{\frac{5}{2}}}}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \delta''(p-p') \tilde{\psi}(p') dp' \\ &= -\frac{m\omega^2 \hbar^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(p-p') \tilde{\psi}''(p') dp' \\ &= -\frac{m\omega^2 \hbar^2}{2} \tilde{\psi}''(p). \end{aligned} \quad (1.234)$$

Заменом у Шредингерову једначину добија се

$$\frac{p^2}{2m} \tilde{\psi}(p) - \frac{m\omega^2 \hbar^2}{2} \tilde{\psi}''(p) = E \tilde{\psi}(p), \quad (1.235)$$

односно

$$\frac{d^2 \tilde{\psi}(p)}{dp^2} + \frac{2mE - p^2}{m^2 \omega^2 \hbar^2} \tilde{\psi}(p) = 0. \quad (1.236)$$

■

## 1.2 Лапласова трансформација

**Дефиниција 1.8.** Лапласова трансформација комплексне функције реалне независно променљиве  $f(t), t \geq 0$  дефинише се као

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt = F(p). \quad (1.237)$$

Функција  $F(p)$  је у општем случају комплексна функција комплексне независно променљиве  $p \in \mathbb{C}$ . Функцију  $f(t)$  зовемо оригинал, а функцију  $F(p)$  слика.

С обзиром да је  $t \in [0, \infty)$ , независно променљива  $t$  је у физици углавном време, али видећемо у даљем тексту да то није увек случај.

Довољан услов да би постојала Лапласова трансформација функције  $f(t)$  је да функција буде део по део непрекидна и експоненцијално ограничена<sup>16</sup>

$$|f(t)| \leq Ce^{kt}, \quad C > 0, k \geq 0, t \geq 0, \quad (1.238)$$

где су  $C$  и  $k$  константе. Тада интеграл којим је дефинисана Лапласова трансформација апсолутно конвергира за  $\operatorname{Re}(p) > k$ .

**Пример 1.17.** Функција  $\sin(at)$ ,  $a \in \mathbb{R}$  је експоненцијално ограничена, јер је

$$|\sin(at)| \leq 1e^{0t}. \quad (1.239)$$

Функције  $\frac{1}{t}$ ,  $e^{t^2}$ ,  $\frac{e^t}{\sqrt{t}}$  нису експоненцијално ограничене. ■

Поменути услов је довољан, али не и потребан јер, рецимо, постоји Лапласова трансформација од  $\frac{e^t}{\sqrt{t}}$ , иако дата функција није експоненцијално ограничена

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^t}{\sqrt{t}}\right] = \sqrt{\frac{\pi}{p-1}}, \quad \operatorname{Re}(p) > 1. \quad (1.240)$$

У то се можемо уверити применом парцијалне интеграције

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{e^t}{\sqrt{t}}\right] &= \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-(p-1)t} dt = 2(p-1) \int_0^\infty t^{\frac{1}{2}} e^{-(p-1)t} dt \\ &= \frac{2}{(p-1)^{\frac{1}{2}}} \int_0^\infty u^{\frac{1}{2}} e^{-u} du \\ &= \frac{2\Gamma(\frac{3}{2})}{(p-1)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{p-1}}, \quad \operatorname{Re}(p) > 1. \end{aligned} \quad (1.241)$$

Према томе, иако по деловима непрекидне функције које су експоненцијално ограничене увек имају Лапласову трансформацију, одатле не следи нужно да је свака функција  $F(p)$  слика такве функције. Следећа теорема даје услов који функција  $F(p)$  мора да задовољава да би била слика по деловима непрекидне функције која је експоненцијално ограничена.

**Тврђење 1.14.** Нека је функција  $f(t)$  дефинисана за  $t \geq 0$  по деловима непрекидна и нека је експоненцијално ограничена. Ако је  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ , онда је

$$\lim_{\operatorname{Re}(p) \rightarrow \infty} F(p) = 0. \quad (1.242)$$

<sup>16</sup>У литератури се може наћи још и да функција  $f(t)$  мора бити експоненцијалног типа (енгл. of exponential type) или експоненцијалног раста [Курепа, С., Краљевић, Х. (1986)].

*Доказ.* Како је функција  $f(t)$  експоненцијално ограничена  $|f(t)| \leq Ce^{kt}$ ,  $C > 0, k \geq 0$ , онда је

$$\begin{aligned} |F(p)| &= \left| \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt \right| \leq \int_0^\infty |f(t)e^{-pt}| dt = \int_0^\infty |f(t)| |e^{-pt}| dt \\ &\leq \int_0^\infty Ce^{kt} e^{-\operatorname{Re}(p)t} dt = \frac{C}{\operatorname{Re}(p) - k}, \end{aligned} \quad (1.243)$$

где је  $\operatorname{Re}(p) > k$ . Пуштајући лимес  $\operatorname{Re}(p) \rightarrow \infty$  у последњем изразу, тврђење је доказано. Такође смо искористили да је

$$|e^{-pt}| = |e^{-(\operatorname{Re}(p)+i\operatorname{Im}(p))t}| = |e^{-\operatorname{Re}(p)t}| |e^{-i\operatorname{Im}(p)t}| = e^{-\operatorname{Re}(p)t}. \quad (1.244)$$

■

**Пример 1.18.** Наћи Лапласову трансформацију следећих оригинала  $1, \sin(at), \cos(at), t^n, e^{at}, e^{(a+bi)t}$  за  $a, b \in \mathbb{R}$  и  $n \in \mathbb{N}$ .

**Решење.** Одговарајуће Лапласове трансформације налазимо полазећи од Дефиниције 1.8. Лапласову трансформацију константне функције  $f(t) = 1$  налазимо директном интеграцијом

$$\mathcal{L}[1] = \int_0^\infty e^{-pt} dt = -\frac{e^{-pt}}{p} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0. \quad (1.245)$$

Лапласове трансформације функција  $f(t) = \sin(at)$  и  $f(t) = \cos(at)$  налазимо применом парцијалне интеграције

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \int_0^\infty \sin(at)e^{-pt} dt = \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad (1.246)$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)] = \int_0^\infty \cos(at)e^{-pt} dt = \frac{p}{p^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0. \quad (1.247)$$

Свођењем на гама функцију увођењем смене  $\tau = pt$ ,  $d\tau = p dt$ , долазимо до Лапласове трансформације функције  $f(t) = t^n$ ,

$$\mathcal{L}[t^n] = \int_0^\infty t^n e^{-pt} dt = \int_0^\infty \left(\frac{\tau}{p}\right)^n e^{-\tau} \frac{1}{p} d\tau = \frac{\Gamma(n+1)}{p^{n+1}} = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0. \quad (1.248)$$

Лапласове трансформације две експоненцијалне функције такође налазимо директном интеграцијом и видимо да конвергирају у истој области

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^\infty e^{at} e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-(p-a)t} dt = -\frac{e^{-(p-a)t}}{p-a} \Big|_0^\infty = \frac{1}{p-a}, \quad \operatorname{Re}(p) > a, \quad (1.249)$$

$$\mathcal{L}[e^{(a+ib)t}] = \int_0^\infty e^{(a+ib)t} e^{-pt} dt = \int_0^\infty e^{-(p-(a+ib))t} dt = \frac{1}{p-(a+ib)}, \quad \operatorname{Re}(p) > a. \quad (1.250)$$

За крај можемо приметити да је  $\mathcal{L}[1]$ , специјалан случај  $\mathcal{L}[e^{at}]$  за  $a = 0$ . Такође је специјалан случај  $\mathcal{L}[t^n]$  за  $n = 0$  и  $\mathcal{L}[\cos(at)]$  за  $a = 0$ .

■

За разлику од Фуријеове трансформације, код које се у литератури среће више различитих дефиниција и конвенција, ознаке и дефиниције Лапласове трансформације углавном су стандардизоване. Још једна важна разлика између ове две трансформације огледа се у томе што је код Лапласове трансформације, по правилу, теже одредити инверзну него директну трансформацију, док су код Фуријеове трансформације директна и инверзна трансформација у суштини подједнако сложене.

На основу релације

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{p^2 + a^2}$$

следи да је

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{a}{p^2 + a^2} \right] = \sin(at),$$

где  $\mathcal{L}^{-1}$  означава инверзну Лапласову трансформацију. Слично, из једнакости

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$$

добива се

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{n!}{p^{n+1}} \right] = t^n.$$

На тај начин формира се и одговарајућа таблица Лапласових трансформација (видети Додатак  $\Gamma$ ), која омогућава одређивање многих инверзних Лапласових трансформација и без непосредног познавања дефиниције инверзне трансформације. Сама инверзна Лапласова трансформација такође је дефинисана интегралом, па је, према томе, и она линеаран оператор. Више детаља о одређивању инверзне Лапласове трансформације биће дато у Одељку 1.2.6.

### 1.2.1 Неке оперативне теореме везане за Лапласову трансформацију

**Тврђење 1.15.** Линеарност Лапласове трансформације:

$$\mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)], \quad (1.251)$$

где су  $\alpha$  и  $\beta$  комплексни бројеви.

*Доказ.* Ова особина директно следи из линеарности несвојственог интеграла

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)] &= \int_0^{\infty} [\alpha f(t) + \beta g(t)] e^{-pt} dt \\ &= \alpha \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt + \beta \int_0^{\infty} g(t) e^{-pt} dt \\ &= \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)]. \end{aligned} \quad (1.252)$$

■

**Тврђење 1.16.** (Теорема о скалирању) Ако је  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ ,  $\operatorname{Re}(p) > k$  и  $a > 0$ , онда је и  $\operatorname{Re}(p) > ak$  и важи

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right). \quad (1.253)$$

*Доказ.* Примењујући дефиницију Лапласове трансформације

$$\mathcal{L}[f(at)] = \int_0^{\infty} f(at)e^{-pt} dt, \quad (1.254)$$

након увођења смене  $u = at, du = a dt$ , добија се

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(u)e^{-\frac{p}{a}u} du = \frac{1}{a} F\left(\frac{p}{a}\right). \quad (1.255)$$

■

**Тврђење 1.17.** (Прва теорема померања) Ако је  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ ,  $\operatorname{Re}(p) > 0$ , тада је

$$\mathcal{L}[f(t)e^{at}] = F(p - a), \operatorname{Re}(p) > a, a \in \mathbb{R}. \quad (1.256)$$

*Доказ.* Директном применом Лапласове трансформације, за  $\operatorname{Re}(p) > a$ , добија се

$$\mathcal{L}[f(t)e^{at}] = \int_0^{\infty} f(t)e^{at}e^{-pt} dt = \int_0^{\infty} f(t)e^{-(p-a)t} dt = F(p - a). \quad (1.257)$$

■

У наредним тврђењима ћемо узети да су оригинали функције експоненцијалног реда  $k$ ,  $\operatorname{Re}(p) > k$ , без посебне напомене.

**Тврђење 1.18.** (Друга теорема померања) Ако је  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ , онда је

$$\mathcal{L}[\theta_a(t)f(t - a)] = e^{-ap}F(p), a \geq 0, \quad (1.258)$$

где је<sup>17</sup>

$$\theta_a(t) = \theta(t - a) = \begin{cases} 1, & t \geq a \\ 0, & t < a. \end{cases} \quad (1.259)$$

*Доказ.* У изразу

$$\mathcal{L}[\theta_a(t)f(t - a)] = \int_0^{\infty} \theta_a(t)f(t - a)e^{-pt} dt = \int_a^{\infty} f(t - a)e^{-pt} dt, \quad (1.260)$$

увођењем смене  $\tau = t - a$ ,  $d\tau = dt$ , добија се

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\theta_a(t)f(t - a)] &= \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p(\tau+a)} d\tau = e^{-pa} \int_0^{\infty} f(\tau)e^{-p\tau} d\tau \\ &= e^{-pa} F(p). \end{aligned} \quad (1.261)$$

■

---

<sup>17</sup>Хевисајдова функција је  $\theta(t)$  је дефинисана са  $\theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$

**Тврђење 1.19.** (Теорема о диференцирању оригинала) Ако је  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$  и ако је  $f'(t)$  оригинал, онда је

$$\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0). \quad (1.262)$$

*Доказ.* На основу дефиниције Лапласове трансформације, уз примену парцијалне интеграције, имамо

$$\mathcal{L}[f'(t)] = \int_0^{\infty} f'(t)e^{-pt} dt = f(t)e^{-pt} \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = pF(p) - f(0), \quad (1.263)$$

чиме је доказ завршен. ■

Релација (1.262) за налажење Лапласове трансформације извода оригинала се може проширити на други извод на следећи начин. Ако су  $f'(t)$  и  $f''(t)$  оригинали, како је  $f''(t) = (f'(t))'$ , тада је

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f''(t)] &= \mathcal{L}[(f'(t))'] = p\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) = p[pF(p) - f(0)] - f'(0) \\ &= p^2F(p) - pf(0) - f'(0). \end{aligned} \quad (1.264)$$

Слично, ако су  $f'(t)$ ,  $f''(t)$  и  $f'''(t)$  оригинали, како је  $f'''(t) = (f''(t))'$ , тада је

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f'''(t)] &= \mathcal{L}[(f''(t))'] = p\mathcal{L}[f''(t)] - f''(0) = p[p^2F(p) - pf(0) - f'(0)] - f''(0) \\ &= p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0). \end{aligned} \quad (1.265)$$

Ова теорема се може уопштити на Лапласову трансформацију  $n$ -тог извода. Ако су  $f'(t), \dots, f^{(n)}(t)$  оригинали, онда важи једнакост која се може доказати применом математичке индукције

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f^{(n)}(t)] &= p^n F(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \\ &= p^n \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=0}^{n-1} p^k f^{(n-k-1)}(0) \\ &= p^n \mathcal{L}[f(t)] - \sum_{k=1}^n p^{n-k} f^{(k-1)}(0). \end{aligned} \quad (1.266)$$

**Пример 1.19.** Користећи претходно тврђење, без интеграције израчунати Лапласове трансформације оригинала  $1, t, e^{at}, \sin(at)$ .

**Решење.** Када је  $f(t) = 1$ , тада је  $f'(t) = 0$ . Одатле је

$$0 = \mathcal{L}[0] = p\mathcal{L}[1] - f(0) = p\mathcal{L}[1] - 1, \quad (1.267)$$

одакле добијамо  $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}$ .

Нека је  $f(t) = t$ . Тада је  $f'(t) = 1$  и  $f(0) = 0$ . На основу претходног резултата  $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}$ , имамо

$$\frac{1}{p} = \mathcal{L}[1] = p\mathcal{L}[t], \quad (1.268)$$

па је одатле  $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{p^2}$ .

Аналогно настављамо, нека је  $f(t) = e^{at}$ . Тада је  $f'(t) = ae^{at}$  и  $f(0) = 1$ . Применом претходне теореме имамо

$$\mathcal{L}[ae^{at}] = a\mathcal{L}[e^{at}] = p\mathcal{L}[e^{at}] - 1, \quad (1.269)$$

одакле добијамо  $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a}$ .

Коначно, нека је  $f(t) = \sin(at)$ ,  $f'(t) = a \cos(at)$ ,  $f''(t) = -a^2 \sin(at)$ ,  $f(0) = 0$ ,  $f'(0) = a$ . Применимо у овом случају (1.264) и добијамо

$$\mathcal{L}[-a^2 \sin(at)] = -a^2 \mathcal{L}[\sin(at)] = p^2 \mathcal{L}[\sin(at)] - a. \quad (1.270)$$

Одатле коначно добијамо  $\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{p^2+a^2}$ . ■

**Тврђење 1.20.** (Теорема о диференцирању слике) Ако је  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$ , онда је

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p) = (-1)^n \frac{d^n F}{dp^n}, n \in \mathbb{N}. \quad (1.271)$$

*Доказ.* Полазећи од дефиниције Лапласове трансформације  $F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt$ , узастопним диференцирањем једнакости по  $p$  добија се

$$\begin{aligned} F'(p) &= - \int_0^\infty t f(t) e^{-pt} dt, \\ F''(p) &= \int_0^\infty t^2 f(t) e^{-pt} dt, \\ F'''(p) &= - \int_0^\infty t^3 f(t) e^{-pt} dt, \\ F^{(4)}(p) &= \int_0^\infty t^4 f(t) e^{-pt} dt, \end{aligned}$$

одакле уочавамо правило

$$F^{(n)}(p) = (-1)^n \int_0^\infty t^n f(t) e^{-pt} dt, \quad (1.272)$$

односно

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(p). \quad (1.273)$$

Строго доказ вршимо математичком индукцијом. За  $n = 1$  имамо  $F'(p) = - \int_0^\infty t f(t) e^{-pt} dt$ , односно  $\mathcal{L}[t f(t)] = -F'(p)$ . За  $n = m$  индукцијска хипотеза је да је  $\mathcal{L}[t^m f(t)] = (-1)^m F^{(m)}(p)$ , што је еквивалентно са  $F^{(m)}(p) = (-1)^m \mathcal{L}[t^m f(t)]$ . Проверавамо сада индукцијски скок  $n = m + 1$ :

$$F^{(m+1)}(p) = \frac{d}{dp} F^{(m)}(p) = (-1)^{m+1} \int_0^\infty t^{m+1} f(t) e^{-pt} dt = (-1)^{m+1} \mathcal{L}[t^{m+1} f(t)], \quad (1.274)$$

чиме је теорема доказана. ■

**Тврђење 1.21.** (Теорема о интеграцији слике) Ако је  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$  и ако интеграл  $\int_p^\infty F(u)du$  постоји, онда је

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_p^\infty F(u)du. \quad (1.275)$$

*Доказ.* Применом дефиниције Лапласове трансформације, добијамо

$$\begin{aligned} \int_p^\infty F(u)du &= \int_p^\infty du \int_0^\infty f(t)e^{-ut}dt = \int_0^\infty f(t)dt \int_p^\infty e^{-ut}du \\ &= \int_0^\infty dt f(t) \frac{e^{-ut}}{t} \Big|_p^\infty = \int_0^\infty \frac{f(t)}{t} e^{-pt} dt \\ &= \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]. \end{aligned} \quad (1.276)$$

Ова теорема има једноставну последицу. Ако у једнакости (1.275) пустимо лимес  $p \rightarrow 0$ , добијамо

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^\infty F(u)du. \quad (1.277)$$

**Пример 1.20.** Применом теореме о интеграцији слике израчунати Дирихлеов интеграл  $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ .

**Решење.** Полазећи од  $\mathcal{L}[\sin t] = \frac{1}{p^2+1}$ , применом (1.277) имамо

$$\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt = \int_0^\infty \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg} u \Big|_0^\infty = \frac{\pi}{2}. \quad (1.278)$$

**Тврђење 1.22.** (Теорема о почетној вредности) Ако су  $f(t)$  и  $f'(t)$  оригинали, онда важи

$$f(0) = \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{p \rightarrow \infty} pF(p), \quad p \in \mathbb{R}. \quad (1.279)$$

*Доказ.* Применом парцијалне интеграције у Дефиницији 1.8

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-pt}f(t) \Big|_0^\infty + \frac{1}{p} \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt, \quad (1.280)$$

добија се да је

$$p\mathcal{L}[f(t)] = f(0) + \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt. \quad (1.281)$$

Одатле је

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p\mathcal{L}[f(t)] = f(0) + \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^\infty f'(t)e^{-pt}dt = f(0), \quad (1.282)$$

што је и требало доказати. ■

**Пример 1.21.** Претпоставимо да знамо да су слике оригинала  $\sin(at)$  и  $\cos(at)$  функције  $\frac{a}{p^2+a^2}$  и  $\frac{p}{p^2+a^2}$ , али да нисмо сигурни који оригинал одговара којој слици. На основу Тврђења 1.22 утврдити која слика одговара ком оригиналу.

**Решење.** Рачунајући граничне вредности

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{a}{p^2 + a^2} = 0, \quad (1.283)$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p \frac{p}{p^2 + a^2} = 1 \quad (1.284)$$

и знајући да је  $\sin(0) = 0$ ,  $\cos(0) = 1$ , лако налазимо да је

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad (1.285)$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{p}{p^2 + a^2}. \quad (1.286)$$

■

## 1.2.2 Лапласова трансформација Лагерових полинома

Решавањем временски независне Шредингерове једначине у квантној механици за атом водоника, у сферним координатама се врши сепарација на радијални и угаони део. Одговарајућа стационарна стања која се добијају решавањем ове једначине су

$$\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r)Y_l^m(\theta, \varphi), \quad (1.287)$$

где је  $R_{nl}(r)$  радијална функција, а  $Y_l^m(\theta, \varphi)$  су сферни хармоници. За везана стања  $n = 1, 2, \dots$  радијални део има облик [Симоновић, Н., Капор, Д. (2018); Милановић, В., Радвановић, Ј., Вуковић, Н. (2025); Пантић, М. (2024)]

$$R_{nl}(r) = N_{nl} e^{-\frac{r}{na_0}} \left( \frac{2r}{na_0} \right)^l L_{n-l}^{2l+1} \left( \frac{2r}{na_0} \right), \quad (1.288)$$

где је  $a_0$  Боров радијус,  $N_{nl}$  константа нормирања, а  $L_{n-l}^{2l+1} \left( \frac{2r}{na_0} \right)$  асоцирани (придружен) Лагеров полином. Како је веза измеђе асоцираних Лагерових и Лагерових полинома дата са

$$L_{\beta}^{\gamma} = \frac{d^{\gamma} L_{\beta}}{dx^{\gamma}}, \quad (1.289)$$

исправно је рећи и да у радијалном делу решења Шредингерове једначине за атом водоника фигуришу Лагерови полиноми. Дефиниције Лагерових полинома до на константу нормирања могу да се разликују од књиге до књиге. Ми ћемо користити следећи

скуп конзистентних дефиниција: Лагерови полиноми степена  $n$  се добијају из Родригове формуле

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.290)$$

или из функције генератрисе (изводнице)

$$f(x, s) = \frac{1}{1-s} e^{-\frac{xs}{1-s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} s^n, \quad |s| < 1. \quad (1.291)$$

За овако дефинисане Лагерове полиноме нормирање је дато помоћу интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = (n!)^2 \delta_{nm}. \quad (1.292)$$

Лагерови полиноми задовољавају Лагерову диференцијалну једначину

$$x \frac{d^2 L_n}{dx^2} + (1-x) \frac{dL_n}{dx} + nL_n = 0 \quad (1.293)$$

и рекурентне релације

$$L_{n+1} + (x - 2n - 1)L_n + n^2 L_{n-1} = 0, \quad (1.294)$$

$$nL_{n-1} + \frac{dL_n}{dx} - n \frac{dL_{n-1}}{dx} = 0. \quad (1.295)$$

Како су Лагерови полиноми ортогонални полиноми на интервалу  $[0, \infty)$  са тежинском функцијом  $e^{-x}$  (видети (1.292)), на њих има смисла применити Лапласову трансформацију која се примењује на истом интервалу интеграције.

**Тврђење 1.23.**

$$\mathcal{L}[L_n(x)] = \frac{n!(p-1)^n}{p^{n+1}} \quad (1.296)$$

где је  $L_n(x)$  Лагеров полином  $n$ -тог степена.

*Доказ. Први начин:* Полазимо од Родригове формуле за Лагерове полиноме

$$\mathcal{L}[L_n(x)] = \mathcal{L} \left[ e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \right], \quad (1.297)$$

на основу чега је

$$\mathcal{L}[e^{-x} L_n(x)] = \mathcal{L} \left[ \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \right]. \quad (1.298)$$

Искористимо Лапласову трансформацију  $n$ -тог извода функције (видети (1.266))

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[ \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) \right] &= p^n \mathcal{L}[x^n e^{-x}] - \sum_{k=1}^n p^{n-k} \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (x^n e^{-x}) \Big|_{x=0} \\ &= p^n \mathcal{L}[x^n e^{-x}]. \end{aligned} \quad (1.299)$$

На основу Тврђења 1.17 и  $\mathcal{L}[x^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}$ , добија се

$$\mathcal{L}[e^{-x}L_n(x)] = \mathcal{L}\left[\frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})\right] = p^n \frac{n!}{(p+1)^{n+1}}. \quad (1.300)$$

Поновном применом Тврђења 1.17 добија се

$$\mathcal{L}[L_n(x)] = (p-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad (1.301)$$

што је требало доказати.

*Други начин:* На функцију генератрису  $f(x, s) = \frac{1}{1-s}e^{-\frac{xs}{1-s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} s^n$  примени се Лапласова трансформација

$$\mathcal{L}[f(x, s)] = F(p, s). \quad (1.302)$$

Приликом примене Лапласове трансформације  $s$  је константа:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{1}{1-s}e^{-\frac{xs}{1-s}}\right] &= \frac{1}{1-s}\mathcal{L}[e^{-\frac{xs}{1-s}}] = \frac{1}{1-s}\mathcal{L}[e^{-\frac{s}{1-s}x}] \\ &= \frac{1}{1-s} \frac{1}{p + \frac{s}{1-s}}. \end{aligned} \quad (1.303)$$

Из једнакости Лапласових трансформација добија се

$$\frac{1}{1-s} \frac{1}{p + \frac{s}{1-s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \mathcal{L}[L_n(x)], \quad (1.304)$$

односно након трансформисања леве стране једнакости

$$\frac{1}{p} \frac{1}{1-s(1-\frac{1}{p})} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \mathcal{L}[L_n(x)]. \quad (1.305)$$

Приметимо да се на левој страни једнакости појављује сума геометријског реда<sup>18</sup>

$$\frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \mathcal{L}[L_n(x)], \quad (1.306)$$

односно

$$\frac{1}{p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n n! = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} \mathcal{L}[L_n(x)]. \quad (1.307)$$

Упоредивањем два реда добија се

$$\mathcal{L}[L_n(x)] = \frac{1}{p} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^n n! = \frac{n!(p-1)^n}{p^{n+1}}. \quad (1.308)$$

<sup>18</sup>Сума геометријског реда је  $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ ,  $|x| < 1$ .

НАПОМЕНА: На основу Тврђења 1.22, добија се

$$L_n(0) = \lim_{p \rightarrow \infty} p(p-1)^n \frac{n!}{p^{n+1}} = n! \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{(p-1)^n}{p^n} = n!. \quad (1.309)$$

■

### 1.2.3 Конволуција

Конволуција оригинала у случају Лапласове трансформације је она операција која након примене Лапласове трансформације прелази у производ слика. Користећи дефиницију Лапласове трансформације из овог поглавља  $\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-pt} dt = F(p)$ ,  $\mathcal{L}[g(t)] = \int_0^\infty g(t)e^{-pt} dt = G(p)$ , конволуција функција  $f(t) * g(t)$  мора да задовољава особину да је

$$\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(p)G(p). \quad (1.310)$$

**Дефиниција 1.9.** У случају Лапласове трансформације конволуција је дефинисана са

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau) d\tau. \quad (1.311)$$

**Тврђење 1.24.** Ако је  $\mathcal{L}[f(t)] = F(p)$  и  $\mathcal{L}[g(t)] = G(p)$ , тада је  $\mathcal{L}[f(t) * g(t)] = F(p)G(p)$ .

*Доказ.* Нека су  $F(p) = \int_0^\infty f(u)e^{-pu} du$  и  $G(p) = \int_0^\infty g(v)e^{-pv} dv$ . Тада важи

$$F(p)G(p) = \int_0^\infty f(u)e^{-pu} du \int_0^\infty g(v)e^{-pv} dv = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-p(u+v)} f(u)g(v) du dv. \quad (1.312)$$

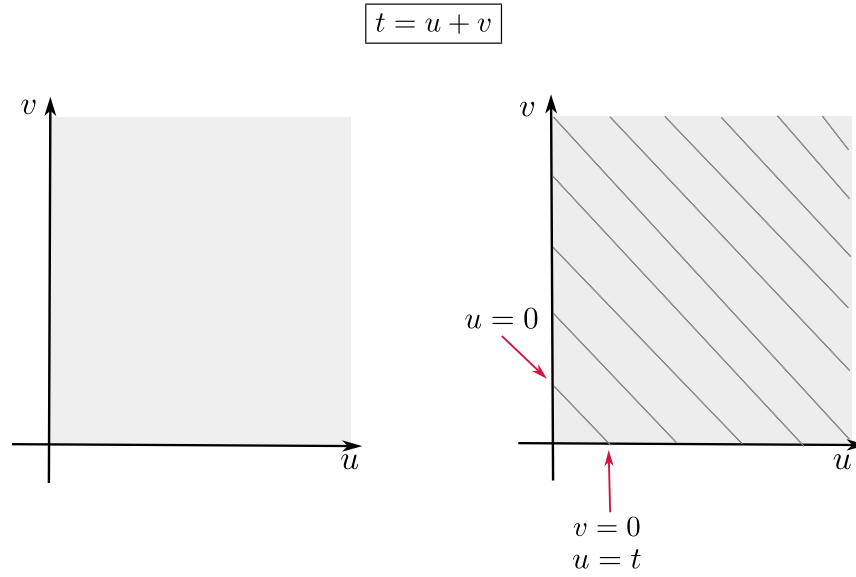
Уведимо нову променљиву  $t = u + v$  и то на начин да ћемо  $u$  као стару променљиву задржати, а  $v$  заменити,  $v = t - u$  (видети Слику 1.5). Приликом смене променљивих морамо израчунати Јакобијан трансформације и он у овом случају износи

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial u} & \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial u} & \frac{\partial v}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \quad (1.313)$$

Интеграција по  $u$  и  $v$  покрива цео први квадрант  $uv$  равни. Након смене променљивих можемо се уверити да ће за интеграцију по  $u$  доња граница бити  $u = 0$  (што је  $v$ -оса), док ће горња граница бити  $v = 0$ , што је у овом случају  $u = t$ . Да би област интеграције поново била први квадрант  $uv$  равни, интеграција по  $t$  иде у границама од нула до бесконачно.

$$\begin{aligned} F(p)G(p) &= \int_0^\infty \int_0^t e^{-pt} f(u)g(t-u) du dt = \int_0^\infty dt e^{-pt} \int_0^t f(u)g(t-u) du \\ &= \mathcal{L}[f(t) * g(t)]. \end{aligned} \quad (1.314)$$

■



Слика 1.5: Увођење смене  $t = u + v$  у изразу (1.312).

**Тврђење 1.25.** Неке особине конволуције су:

1) комутативност

$$f * g = g * f,$$

2) асоцијативност

$$f * (g * h) = (f * g) * h,$$

3) дистрибутивност

$$f * (g + h) = f * g + f * h,$$

4) конволуција са делта функцијом

$$f * \delta = \delta * f = f.$$

*Доказ.* 1) Полазећи од дефиниције конволуције, увођењем смене  $u = t - \tau$ ,  $du = -d\tau$ , добија се

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= - \int_t^0 f(t-u)g(u)du = \int_0^t f(t-u)g(u)du \\ &= \int_0^t g(u)f(t-u)du = g(t) * f(t). \end{aligned} \quad (1.315)$$

2) Нека је

$$a(t) = g(t) * h(t) = \int_0^t g(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad (1.316)$$

$$b(t) = f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \quad (1.317)$$

Треба доказати једнакост  $f * a = b * h$ .

$$\begin{aligned}
f(t) * a(t) &= \int_0^t f(\sigma) a(t - \sigma) d\sigma \\
&= \int_0^t f(\sigma) \left( \int_0^{t-\sigma} g(\tau) h(t - \sigma - \tau) d\tau \right) d\sigma \\
&= \int_0^t \int_0^{t-\sigma} f(\sigma) g(\tau) h(t - \sigma - \tau) d\tau d\sigma.
\end{aligned} \tag{1.318}$$

Заменом редоследа интеграције добијамо

$$f(t) * a(t) = \int_0^t \int_0^{t-\tau} f(\sigma) g(\tau) h(t - \sigma - \tau) d\sigma d\tau. \tag{1.319}$$

Сада уводимо смену  $u = \sigma + \tau$ . Тада је  $\sigma = u - \tau$ ,  $du = d\sigma$ , па следи

$$(f * a)(t) = \int_0^t \int_\tau^t f(u - \tau) g(\tau) h(t - u) du d\tau. \tag{1.320}$$

Поновном променом редоследа интеграције добијамо

$$(f * a)(t) = \int_0^t \left( \int_0^u f(u - \tau) g(\tau) d\tau \right) h(t - u) du. \tag{1.321}$$

Пошто је

$$\int_0^u f(u - \tau) g(\tau) d\tau = (f * g)(u) = b(u), \tag{1.322}$$

следи

$$(f * a)(t) = \int_0^t b(u) h(t - u) du = (b * h)(t). \tag{1.323}$$

Дакле,

$$f * (g * h) = (f * g) * h. \tag{1.324}$$

3) Следи директно из линеарности интеграла.

4) Следи директно из дефиниције конволуције

$$f(t) * \delta(t) = \int_0^t f(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = f(t). \tag{1.325}$$

■

**Пример 1.22.** Наћи конволуцију функција  $f_1(t) = t^\alpha$  и  $f_2(t) = t^\beta$ ,  $\alpha, \beta \geq 0$ .

**Решење.** *Први начин:* По дефиницији конволуције (1.311) је

$$t^\alpha * t^\beta = \int_0^t \tau^\alpha (t - \tau)^\beta d\tau. \tag{1.326}$$

Претходни интеграл се сменом  $\tau = t\xi$ ,  $d\tau = t d\xi$  своди на Ојлерову бета функцију

$$\begin{aligned} t^\alpha * t^\beta &= \int_0^1 t^\alpha \xi^\alpha (t - t\xi)^\beta t d\xi = t^{\alpha+\beta+1} \int_0^1 \xi^\alpha (1 - \xi)^\beta d\xi \\ &= B(\alpha + 1, \beta + 1) t^{\alpha+\beta+1} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)} t^{\alpha+\beta+1}. \end{aligned} \quad (1.327)$$

*Други начин:* Одговарајуће Лапласове трансформације су  $\mathcal{L}[t^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{p^{\alpha+1}}$  и  $\mathcal{L}[t^\beta] = \frac{\Gamma(\beta+1)}{p^{\beta+1}}$  и обе су дефинисане за  $\text{Re}(p) > 0$ . Производ слика је  $\mathcal{L}[t^\alpha]\mathcal{L}[t^\beta] = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{p^{\alpha+\beta+2}}$ . Конволуција је одатле

$$\begin{aligned} t^\alpha * t^\beta &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{p^{\alpha+\beta+2}} \right] = \Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1) \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{p^{\alpha+\beta+2}} \right] \\ &= \frac{\Gamma(\alpha + 1)\Gamma(\beta + 1)}{\Gamma(\alpha + \beta + 2)} t^{\alpha+\beta+1}. \end{aligned} \quad (1.328)$$

■

#### 1.2.4 Примена Лапласове трансформације на решавање линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима

Лапласова трансформација има велику примену на решавање линеарних диференцијалних једначина са константним коефицијентима. Идеја је да дату диференцијалну једначину Лапласовом трансформацијом преведемо у алгебарску, која је знатно једноставнија за решавање. Након што решимо алгебарску једначину, применом инверзне Лапласове трансформације долазимо до решења полазне диференцијалне једначине. Лапласова трансформација се углавном примењује у проблемима у физици где је независно променљива време. Стога је од велике употребне вредности у разним проблемима механике, електромагнетизма, електронике и нуклеарне физике. Већина диференцијалних једначина у временском домену од значаја за физику су диференцијалне једначине другог реда. Због тога дајемо шематски приказ (видети Слику 1.6) примене Лапласове трансформације на диференцијалну једначину другог реда са константним коефицијентима  $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = f(t)$ , где су потребна два почетна услова<sup>19</sup>  $y(0) = y_0, y'(0) = y'_0$ . Уверимо се у то на неколико примера из теорије осцилација [Бујановић, Б. (2013)].

**Пример 1.23.** Решити диференцијалну једначину линеарног хармонијског осцилатора

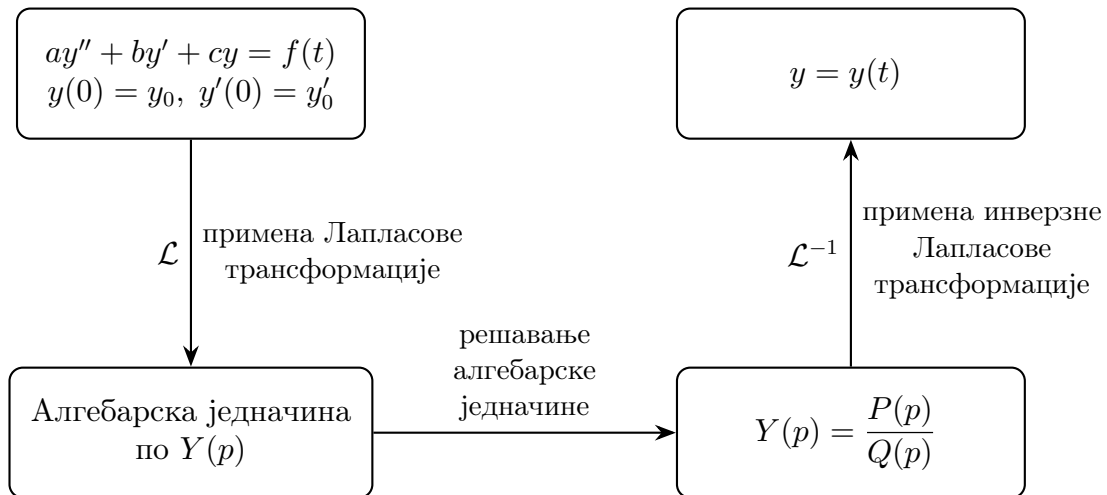
$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad \omega > 0 \quad (1.329)$$

где је  $x(0) = A, \dot{x}(0) = B$  и  $A, B, \omega$  су константе.

**Решење.** Ово је диференцијална једначина другог реда по времену. Применом Лапласове трансформације на сваки члан диференцијалне једначине добијамо

$$\mathcal{L}[\ddot{x}(t)] + \omega^2 \mathcal{L}[x(t)] = 0. \quad (1.330)$$

<sup>19</sup>За диференцијалну једначину првог реда  $y'(t) + ay(t) = f(t)$  потребан је један почетан услов  $y(0) = y_0$ .



Слика 1.6: Шема примене Лапласове трансформације на решавање диференцијалне једначине другог реда са константним коефицијентима.

Користећи да је  $\mathcal{L}[x(t)] = X(p)$ , добијамо алгебарску једначину по  $X(p)$

$$p^2 X(p) - px(0) - \dot{x}(0) + \omega^2 X(p) = 0. \quad (1.331)$$

Решавањем алгебарске једначине добијамо  $X(p) = \frac{Ap+B}{p^2+\omega^2}$ , одакле инверзном Лапласовом трансформацијом (видети Додатак Г) долазимо до решења полазне диференцијалне једначине

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{Ap+B}{p^2+\omega^2} \right] = A \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{p}{p^2+\omega^2} \right] + \frac{B}{\omega} \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\omega}{p^2+\omega^2} \right] \\ &= A \cos(\omega t) + \frac{B}{\omega} \sin(\omega t). \end{aligned} \quad (1.332)$$

НАПОМЕНА: У литератури је често опште решење диференцијалне једначине за линеарни хармонијски осцилатор дато са  $x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0)$ , где су константе  $x_0$  и  $\varphi_0$ , респективно, амплитуда и почетна фаза. Одатле је  $v(t) = \dot{x}(t) = x_0 \omega \cos(\omega t + \varphi_0)$ . За овако записано опште решење почетни услови су дати са  $x(0) = x_0 \sin(\varphi_0)$  и  $\dot{x}(0) = x_0 \omega \cos(\varphi_0)$ . Заменом ових вредности за  $x(0)$  и  $\dot{x}(0)$  у (1.332) уместо константи  $A$  и  $B$  добијамо

$$x(t) = x_0 \sin(\varphi_0) \cos(\omega t) + x_0 \cos(\varphi_0) \sin(\omega t), \quad (1.333)$$

што је након примене адиционих формула

$$x(t) = x_0 \sin(\omega t + \varphi_0). \quad (1.334)$$

■

**Пример 1.24.** Решити диференцијалну једначину пригушених осцилација

$$\ddot{x}(t) + 2\delta \dot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0, \quad (1.335)$$

за  $x(0) = A$ ,  $\dot{x}(0) = B$ , где су  $A, B, \omega, \delta$  константе и  $0 < \delta < \omega$ .

**Решење.** Применом Лапласове трансформације на сваки члан диференцијалне једначине добија се алгебарска једначина

$$p^2 X(p) - Ap - B + 2\delta(pX(p) - A) + \omega^2 X(p) = 0. \quad (1.336)$$

Решавањем алгебарске једначине добијамо

$$X(p) = \frac{Ap + B + 2\delta A}{p^2 + 2\delta p + \omega^2}. \quad (1.337)$$

Именилац трансформишемо на начин

$$p^2 + 2\delta p + \omega^2 = p^2 + 2\delta p + \omega^2 + \delta^2 - \delta^2 = (p + \delta)^2 + \omega^2 - \delta^2, \quad (1.338)$$

а бројилац

$$Ap + B + 2\delta A = Ap + B + \delta A + \delta A = A(p + \delta) + B + \delta A. \quad (1.339)$$

Одатле је

$$X(p) = A \frac{p + \delta}{(p + \delta)^2 + \omega^2 - \delta^2} + \frac{B + \delta A}{(p + \delta)^2 + \omega^2 - \delta^2}. \quad (1.340)$$

Како је  $\omega^2 - \delta^2 > 0$ , можемо писати да је  $\Omega^2 = \omega^2 - \delta^2$ . Након тога инверзном Лапласовом трансформацијом (видети Додатак Г) долазимо до решења полазне диференцијалне једначине

$$x(t) = e^{-\delta t} \left[ A \cos(\Omega t) + \frac{B + \delta A}{\Omega} \sin(\Omega t) \right]. \quad (1.341)$$

■

Лапласова трансформација се може примењивати и на системе диференцијалних једначина са константним коефицијентима. Један такав пример су сукцесивни радио-активни распади.

**Пример 1.25.** Нека  $N_A$ ,  $N_B$  и  $N_C$  репрезентују бројеве језгара три изотопа чији се распад одиграва према шеми



где су  $\lambda_A$ ,  $\lambda_B$  константе распада и  $\lambda_A \neq \lambda_B$ . Изотоп C сматрамо стабилним. Тада су  $N_A(t)$ ,  $N_B(t)$  и  $N_C(t)$  решења система диференцијалних једначина

$$\begin{aligned} \frac{dN_A}{dt} &= -\lambda_A N_A, \\ \frac{dN_B}{dt} &= -\lambda_B N_B + \lambda_A N_A, \\ \frac{dN_C}{dt} &= \lambda_B N_B. \end{aligned}$$

Претпостављајући да је  $N_A(0) = N_0$ ,  $N_B(0) = 0$  и  $N_C(0) = 0$ , наћи  $N_A(t)$ ,  $N_B(t)$  и  $N_C(t)$ .

**Решење.** Применом Лапласове трансформације на сваки члан диференцијалне једначине добија се систем

$$\begin{aligned} p\tilde{N}_A(p) - N_0 &= -\lambda_A\tilde{N}_A(p), \\ p\tilde{N}_B(p) &= -\lambda_B\tilde{N}_B(p) + \lambda_A\tilde{N}_A(p), \\ p\tilde{N}_C(p) &= \lambda_B\tilde{N}_B(p), \end{aligned} \quad (1.343)$$

где су са тилдом означене одговарајуће Лапласове слике. Решавањем система добија се  $\tilde{N}_A(p) = \frac{N_0}{p+\lambda_A}$ ,  $\tilde{N}_B(p) = \frac{\lambda_A N_0}{(p+\lambda_A)(p+\lambda_B)}$  и  $\tilde{N}_C(p) = \frac{\lambda_A \lambda_B N_0}{p(p+\lambda_A)(p+\lambda_B)}$ . Одатле се применом инверзне Лапласове трансформације добија

$$\begin{aligned} N_A(t) &= N_0 e^{-\lambda_A t}, \\ N_B(t) &= N_0 \left( \frac{\lambda_A}{\lambda_B - \lambda_A} e^{-\lambda_A t} + \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} e^{-\lambda_B t} \right), \\ N_C(t) &= N_0 \left( 1 - \frac{\lambda_B}{\lambda_B - \lambda_A} e^{-\lambda_A t} - \frac{\lambda_A}{\lambda_A - \lambda_B} e^{-\lambda_B t} \right). \end{aligned} \quad (1.344)$$

■

### 1.2.5 Примена Лапласове трансформације на решавање линеарних диференцијалних једначина са променљивим коефицијентима

У случају када у линеарним диференцијалним једначинама коефицијенти нису константе, Лапласова трансформација има ограничену примену. У то се лако можемо уверити ако размотримо већ доказану особину Лапласове трансформације:

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n F}{dp^n}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1.345)$$

теорему о диференцирању слике. То ћемо илустровати на два примера.

**Пример 1.26.** Применом Лапласове трансформације на диференцијалну једначину другог реда  $y''(t) + t^2 y(t) = 0$  са почетним условима  $y(0) = A$ ,  $y'(0) = B$  добија се такође диференцијална једначина другог реда  $Y''(p) + p^2 Y(p) = Ap + B$ . ■

**Пример 1.27.** Применом Лапласове трансформације на диференцијалну једначину другог реда  $y''(t) + t^3 y(t) = 0$  са почетним условима  $y(0) = A$ ,  $y'(0) = B$  добија се диференцијална једначина трећег реда  $Y'''(p) - p^2 Y(p) = -Ap - B$ . ■

На основу ових примера видимо да је Лапласова трансформација у случају диференцијалних једначина другог или вишег реда са променљивим коефицијентима корисна једино када је највиши степен у диференцијалној једначини који множи функцију или њене изводе  $t^1 = t$ .

**Пример 1.28.** Применом Лапласове трансформације на диференцијалну једначину другог реда  $y''(t) + ty(t) = 0$  са почетним условима  $y(0) = A$ ,  $y'(0) = B$  добија се диференцијална једначина првог реда  $Y'(p) - p^2Y(p) = -Ap - B$ . ■

Диференцијална једначина овог типа на коју се Лапласова трансформација може успешно применити је, на пример, Лагерова диференцијална једначина.

**Пример 1.29.** Наћи партикуларно решење диференцијалне једначине

$$t \frac{d^2y}{dt^2} + (1-t) \frac{dy}{dt} = 0 \quad (1.346)$$

за почетне услове  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  применом Лапласове трансформације.

**Решење.** Лагерова диференцијална једначина има форму

$$t \frac{d^2y}{dt^2} + (1-t) \frac{dy}{dt} + ny(t) = 0. \quad (1.347)$$

Лагерови полиноми  $L_n(t)$  су партикуларно решење ове диференцијалне једначине. Лагеров полином  $L_0(t) = 1$  је партикуларно решење диференцијалне једначине (1.346) за почетне услове из задатка.

Применом Лапласове трансформације на сваки члан диференцијалне једначине (1.346) добија се

$$\mathcal{L}[ty''(t)] + \mathcal{L}[y'(t)] - \mathcal{L}[ty'(t)] = 0. \quad (1.348)$$

Уводећи  $\mathcal{L}[y(t)] = Y(p)$  и применом диференцирања интеграла по параметру добија се:

$$\mathcal{L}[y'(t)] = pY(p) - y(0) = pY(p) - 1, \quad (1.349)$$

$$\mathcal{L}[y''(t)] = p^2Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2Y(p) - p, \quad (1.350)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[ty'(t)] &= \int_0^\infty ty'(t)e^{-pt} dt = -\frac{d}{dp} \int_0^\infty y'(t)e^{-pt} dt \\ &= -\frac{d}{dp} \mathcal{L}[y'(t)] \\ &= -\frac{d}{dp} (pY(p) - 1) \\ &= -Y(p) - pY'(p), \end{aligned} \quad (1.351)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[ty''(t)] &= \int_0^\infty ty''(t)e^{-pt} dt = -\frac{d}{dp} \int_0^\infty y''(t)e^{-pt} dt \\ &= -\frac{d}{dp} \mathcal{L}[y''(t)] \\ &= -\frac{d}{dp} [p^2Y(p) - p] \\ &= -2pY(p) - p^2Y'(p) + 1. \end{aligned} \quad (1.352)$$

Заменом у (1.346) добија се диференцијална једначина првог реда која раздваја променљиве

$$p(p-1)\frac{dY(p)}{dp} + (p-1)Y(p) = 0, \quad (1.353)$$

чије је решење  $Y(p) = \frac{C}{p}$ . На основу  $\lim_{p \rightarrow \infty} pY(p) = y(0)$ , добија се да је  $C = 1$ . Одатле је  $Y(p) = \frac{1}{p}$  и  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = 1$  је партикуларно решење једначине (1.346) за почетне услове из примера. ■

### 1.2.6 Инверзна Лапласова трансформација. Бромвичев интеграл

Као што је раније напоменуто, за разлику од Фуријеове трансформације, где је подједнако компликовано наћи директну и инверзну трансформацију, тражење инверзне Лапласове трансформације је значајно компликованије од тражења директне Лапласове трансформације:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt = F(p), \quad (1.354)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt} dp = f(t), \quad (1.355)$$

где се код инверзне Лапласове трансформације интеграција врши у комплексној равни по правој линији  $\operatorname{Re} p = c$ , која је паралелна имагинарној оси.

До израза за инверзну Лапласову трансформацију долазимо полазећи од

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt, \quad (1.356)$$

тако што множимо леву и десну страну једнакости са  $e^{p\tau} dp$  и интегралимо у границама од  $c - i\beta$  до  $c + i\beta$ . Добија се

$$\begin{aligned} \int_{c-i\beta}^{c+i\beta} F(p)e^{p\tau} dp &= \int_0^{\infty} dt f(t) \int_{c-i\beta}^{c+i\beta} dp e^{p(\tau-t)} = \int_0^{\infty} dt f(t) \frac{e^{p(\tau-t)} \Big|_{c-i\beta}^{c+i\beta}}{\tau-t} \\ &= \int_0^{\infty} dt f(t) \frac{e^{(c+i\beta)(\tau-t)} - e^{(c-i\beta)(\tau-t)}}{\tau-t} \\ &= \int_0^{\infty} dt f(t) e^{c(\tau-t)} \frac{e^{i\beta(\tau-t)} - e^{-i\beta(\tau-t)}}{\tau-t} \\ &= 2i \int_0^{\infty} dt f(t) e^{c(\tau-t)} \frac{\sin \beta(\tau-t)}{\tau-t}. \end{aligned} \quad (1.357)$$

У граничном процесу  $\beta \rightarrow \infty$  израз постаје

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{p\tau} dp = 2i \int_0^{\infty} dt f(t) e^{c(\tau-t)} \underbrace{\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\sin \beta(\tau-t)}{\tau-t}}_{\pi \delta(\tau-t)} = 2i\pi f(\tau), \quad (1.358)$$

односно

$$f(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{p\tau} dp \quad (1.359)$$

и заменом  $\tau$  са  $t$  добија се израз (1.355). Да бисмо извели поступак за рачунање интеграла (1.355), тзв. Бромвичевог интеграла, подсетимо се најпре неких основних резултата из комплексне анализе [Курепа, С., Краљевић, Х. (1986); Стојаковић, М. (2010); Butkov, Е. (1968); Николић-Деспотовић, Д., Будинчевић, М. (1998)].

### 1.2.7 Класификација изолованих сингуларитета

**Дефиниција 1.10.** Функција  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  је аналитичка (холоморфна) у области  $D$ , ако је диференцијабилна у свакој тачки области  $D$ . За свако  $z_0 \in D$  постоји гранична вредност

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}. \quad (1.360)$$

Тачка  $z_0 \in \mathbb{C}$  је сингуларитет или сингуларна тачка функције  $f(z)$  ако функција  $f(z)$  није аналитичка у  $z = z_0$ . Тачка  $z_0 \in \mathbb{C}$  је изоловани сингуларитет ако постоји нека њена околина у којој не постоји ниједан други сингуларитет функције  $f(z)$ . Разликујемо три врсте изолованих сингуларитета:

- отклоњив (привидан) сингуларитет (сви коефицијенти из главног дела Лорановог реда једнаки су нули, односно нема чланова са негативним степенима);
- пол реда  $k$  (коначно много чланова из главног дела Лорановог реда је различито од нуле, односно коначно много чланова са негативним степенима);
- есенцијални сингуларитет (бесконачно много чланова различитих од нуле у главном делу Лорановог реда).

Лоранов ред комплексне функције у околини тачке  $z_0$  је дат са

$$\begin{aligned} f(z) &= \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{Лоранов ред}} = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(z-z_0)^n}_{\text{главни део Лорановог реда}} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n}_{\text{Тејлоров ред}} \\ &= \dots + \frac{c_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \dots \end{aligned} \quad (1.361)$$

Резидуум функције  $f(z)$ , у ознаци  $\text{Res}[f(z), z_0]$ , је коефицијент у Лорановом развоју уз члан  $\frac{1}{z-z_0}$ . Односно,  $\text{Res}[f(z), z = z_0] = c_{-1}$ .

Да бисмо илустровали ову дефиницију, у наредним примерима размотрићемо неколико функција са различитим типовима сингуларитета. Најпре наводимо функције које имају отклоњив (привидан) сингуларитет.

**Пример 1.30.** Уверити се да функције  $f(z) = \frac{z^2+1}{z-i}$ ,  $g(z) = \frac{\sin z}{z}$  и  $h(z) = \frac{e^z-1}{z}$  имају отклоњиве сингуларитете.

**Решење.** Функција

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z - i} \quad (1.362)$$

није дефинисана за  $z = i$ , али је за  $z \neq i$  ова функција  $f(z) = z + i$ . Тако да, ако додефинишемо да је  $f(i) = 2i$ , добили смо аналитичку функцију на  $\mathbb{C}$ . Овакво додефинисање се не може увек урадити, али када може, реч је о отклоњивом или привидном сингуларитету функције. Ово се може размотрити и преко граничне вредности

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2 + 1}{z - i} = 2i. \quad (1.363)$$

Дакле, критеријум може да се постави и на следећи начин. Када год при пуштању овакве граничне вредности добијамо број, у питању је отклоњив сингуларитет.

Размотримо сада функцију

$$g(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad (1.364)$$

Како је

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = 1, \quad (1.365)$$

функција има отклоњив сингуларитет у тачки  $z = 0$  и у том случају функција нема чланова у главном делу Лорановог развоја. У ово се можемо уверити на следећи начин

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad (1.366)$$

па је

$$g(z) = \frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \dots \quad (1.367)$$

Одатле, знајући да је резидуум функције једнак  $c_{-1}$ , имамо

$$\text{Res}[g(z), z = 0] = 0. \quad (1.368)$$

То ће увек важити код отклоњивог сингуларитета.

На крају размотримо и функцију

$$h(z) = \frac{e^z - 1}{z}. \quad (1.369)$$

Слично као у претходном случају

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1. \quad (1.370)$$

Користећи развој у ред  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , добија се

$$\frac{e^z - 1}{z} = \frac{1}{z} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 \right) = \frac{1}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)!}, \quad (1.371)$$

одакле видимо да нема чланова у главном делу Лорановог развоја,

$$\operatorname{Res}[h(z), z = 0] = 0. \quad (1.372)$$

■

У случају тражења инверзне Лапласове трансформације најзначајнији ће нам бити полови функција. Ако постоји природан број  $k$  такав да је  $c_{-k} \neq 0$  и  $c_{-n} = 0$ , за сваки природан број  $n > k$ , онда функција  $f(z)$  у тачки  $z_0$  има пол реда  $k$ . Потребан и довољан услов да функција  $f(z)$  у тачки  $z_0$  има пол је да је

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty. \quad (1.373)$$

**Пример 1.31.** Испитати у којим тачкама следеће функције имају полове и одредити резидууме функција у тим тачкама

а)

$$f(z) = -\frac{2}{(z+3)^3} + \frac{5}{z+3} + 1 + (z+3), \quad (1.374)$$

б)

$$f(z) = \frac{3}{z^5 - z^3}. \quad (1.375)$$

**Решење.** а) Функција

$$f(z) = -\frac{2}{(z+3)^3} + \frac{5}{z+3} + 1 + (z+3) \quad (1.376)$$

има пол реда 3 у тачки  $z = -3$ . Резидуум функције у датој тачки је

$$\operatorname{Res}[f(z), z = -3] = 5. \quad (1.377)$$

б) Функција

$$f(z) = \frac{3}{z^5 - z^3} = \frac{3}{z^3(z-1)(z+1)} \quad (1.378)$$

има пол трећег реда у тачки  $z = 0$  и полове првог реда у тачкама  $z = 1$  и  $z = -1$ . Свођењем на елементарне разломке се добија

$$\frac{3}{z^3(z-1)(z+1)} = -\frac{3}{z^3} - \frac{3}{z} + \frac{\frac{3}{2}}{z-1} + \frac{\frac{3}{2}}{z+1}, \quad (1.379)$$

одакле налазимо

$$\operatorname{Res}[f(z), z = 0] = -3, \quad (1.380)$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z = 1] = \frac{3}{2}, \quad (1.381)$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z = -1] = \frac{3}{2}. \quad (1.382)$$

■

За крај смо оставили есенцијални сингуларитет.

**Пример 1.32.** Уверимо се да функције  $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$  и  $g(z) = \sin\left(\frac{2}{z}\right)$  имају есенцијалне сингуларитете у тачки  $z = 0$ . Израчунати резидууме функција у датој тачки.

**Решење.** Функција

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \dots \quad (1.383)$$

има есенцијални сингуларитет у тачки  $z = 0$ , јер има бесконачно много чланова у главном делу Лорановог развоја. Резидуум ове функције у тачки  $z = 0$  је

$$\operatorname{Res}[f(z), z = 0] = 1. \quad (1.384)$$

Функција

$$g(z) = \sin\left(\frac{2}{z}\right) \quad (1.385)$$

има такође бесконачно много чланова у главном делу Лорановог развоја

$$\sin\left(\frac{2}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{1}{z^{2n+1}} = \frac{2}{z} - \frac{4}{3z^3} + \frac{4}{15z^5} - \frac{8}{315z^7} + \dots \quad (1.386)$$

Резидуум је коефицијент уз  $1/z$ , па је

$$\operatorname{Res}[g(z), z = 0] = 2. \quad (1.387)$$

■

Наравно, функција може да има и есенцијални сингуларитет и пол. На пример, функција  $f(z) = \frac{e^{\frac{1}{z}}}{z-6}$  у тачки  $z = 0$  има есенцијални сингуларитет, а у тачки  $z = 6$  пол првог реда.

### 1.2.8 Резидуум за пол реда $k$

Ако функција  $f(z)$  у тачки  $z = z_0$  има пол реда  $k$ , онда има  $k$  коефицијената са негативним индексом различитих од нуле у Лорановом развоју. Ако функција  $f(z)$  има пол првог реда (прост пол) у тачки  $z = z_0$ , онда је Лоранов развој дате функције дат са

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (1.388)$$

Множењем (1.388) са  $(z - z_0)$  добија се

$$(z - z_0)f(z) = c_{-1} + c_0(z - z_0) + c_1(z - z_0)^2 + c_2(z - z_0)^3 + \dots \quad (1.389)$$

и одатле је

$$\text{Res}[f(z), z = z_0] = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)f(z). \quad (1.390)$$

Ако функција  $f(z)$  има пол реда  $k \geq 2$  у тачки  $z = z_0$ , онда је Лоранов развој дате функције дат са

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + c_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (1.391)$$

Множењем (1.391) са  $(z - z_0)^k$  добија се

$$(z - z_0)^k f(z) = c_{-k} + \dots + c_{-1}(z - z_0)^{k-1} + c_0(z - z_0)^k + c_1(z - z_0)^{k+1} \dots \quad (1.392)$$

и након диференцирања  $(k - 1)$  пута

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)] = (k - 1)!c_{-1} + k!c_0(z - z_0) + \dots \quad (1.393)$$

долази се до израза [Butkov, E. (1968); Курепа, С., Краљевић, Х. (1986)]

$$\text{Res}[f(z), z = z_0] = c_{-1} = \frac{1}{(k - 1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)]. \quad (1.394)$$

Приметимо да се стављањем  $k = 1$  у (1.394) добија (1.390). Стога се релација (1.394) може користити за  $k \geq 1$ .

### 1.2.9 Примена рачуна остатака за тражење инверзне Лапласове трансформације

**Тврђење 1.26.** Нека је  $D \subset \mathbb{C}$  област и нека је  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  аналитичка функција. Ако је  $L$  проста<sup>20</sup>, затворена, позитивно оријентисана, по деловима глатка крива, таква да су  $L$  и њена унутрашњост садржане у  $D$ , тада важи

$$\oint_L f(z) dz = 0. \quad (1.395)$$

<sup>20</sup>Нема самопресецања.

**Тврђење 1.27.** Нека је  $D \subset \mathbb{C}$  област и нека је  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  аналитичка функција у области  $D$  осим у коначно много изолованих сингуларних тачака  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in D$ . Ако је  $L$  проста, затворена, позитивно оријентисана, по деловима глатка крива, таква да су  $L$  и њена унутрашњост садржане у  $D$ , тада важи

$$\oint_L f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z = \alpha_k]. \quad (1.396)$$

Да бисмо Тврђење 1.27 применили на тражење инверзне Лапласове трансформације, погледајмо контуру дату на Слици 1.7. Тачку  $c$  смо одабрали тако да се сви сингуларитети налазе лево од ње. Посматрајмо интеграл  $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} F(p)e^{pt}dp$  по тој контури. Њега можемо поделити на рачунање интеграла по дужи  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\uparrow} F(p)e^{pt}dp$  и рачунање интеграла по „трбуху”  $\frac{1}{2\pi i} \int_{\curvearrowright} F(p)e^{pt}dp$ , односно можемо писати

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}} F(p)e^{pt}dp = \frac{1}{2\pi i} \int_{\uparrow} F(p)e^{pt}dp + \frac{1}{2\pi i} \int_{\curvearrowright} F(p)e^{pt}dp. \quad (1.397)$$

Нису сви сингуларитети функције  $F(p)$  обухваћени датом контуром. Неки се налазе и ван ње. На Слици 1.7 је представљено да је један од њих  $\alpha_4$ . Када би интеграл по дужи прешао у интеграл по правој, он би одговарао инверзној Лапласовој трансформацији (видети (1.359)). То добијамо пуштањем граничног процеса  $R \rightarrow \infty$  и на тај начин новодобијена контура обухвата све сингуларитете функције  $F(p)$ . Како пуштањем лимеса  $R \rightarrow \infty$  област „трбуха” иде ка све негативнијим вредностима  $\text{Re}(p)$ , а интегранд садржи  $e^{pt}$ , интеграл по „трбуху” ће у граничном процесу бити нула. Ово се може показати и мајорацијом. Одатле имамо

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} F(p)e^{pt}dp = \sum_{k=1}^n \text{Res}[F(p)e^{pt}, p = \alpha_k]. \quad (1.398)$$

**Пример 1.33.** Наћи инверзну Лапласову трансформацију функције  $F(p) = 2/p^5$  применом рачуна остатака.

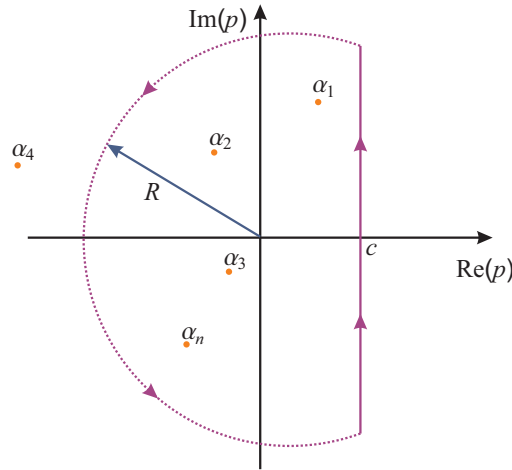
**Решење.** Пошто је тачка  $p = 0$  пол петог реда, резидуум од  $F(p) = \frac{2}{p^5}e^{pt}$  је одређен са

$$f(t) = \text{Res} \left[ \frac{2}{p^5}e^{pt}, p = 0 \right] = \frac{1}{4!} \lim_{p \rightarrow 0} \frac{d^4}{dp^4} \left[ p^5 \frac{2}{p^5}e^{pt} \right] = \frac{t^4}{12}. \quad (1.399)$$

■

**Пример 1.34.** Применом рачуна остатака наћи инверзну Лапласову трансформацију:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{2p+1}{p(p^2+1)} \right]. \quad (1.400)$$



Слика 1.7: Контура у комплексној равни за рачунање Бромвичевог интеграла.

**Решење.** Пошто је слика функције у комплексном простору дата са  $F(p) = \frac{2p+1}{p(p^2+1)}$ , имамо  $e^{pt}F(p) = \frac{e^{pt}(2p+1)}{p(p^2+1)} = \frac{e^{pt}(2p+1)}{p(p-i)(p+i)}$ . Функција  $e^{pt}F(p)$  има три проста пола  $p = 0$ ,  $p = i$  и  $p = -i$ , а одговарајући резидууми су:

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} [e^{pt}F(p), p = 0] &= 1, \\ \operatorname{Res} [e^{pt}F(p), p = i] &= -\frac{(1+2i)e^{it}}{2}, \\ \operatorname{Res} [e^{pt}F(p), p = -i] &= -\frac{(1-2i)e^{-it}}{2}. \end{aligned} \quad (1.401)$$

Дакле, тражена инверзна Лапласова трансформација је

$$\mathcal{L}^{-1}[F(p)] = 1 - \frac{(1+2i)e^{it}}{2} - \frac{(1-2i)e^{-it}}{2} = 1 - \cos t + 2 \sin t. \quad (1.402)$$

■

## 2

# Интегралне једначине

Интегралне једначине су врста једначина у којима се непозната функција јавља под знаком интеграла. Студенти најчешће први пут срећу интегралне једначине у проблемима одређивања електростатичког поља на основу задате расподеле наелектрисања и интегралног облика Гаусовог закона. Како се на основним студијама разматрају искључиво случајеви високе симетрије расподеле наелектрисања, електростатичко поље се може наћи и без формалног решавања интегралне једначине. Наравно, таква поједностављења нису могућа у општем случају.

Други познати пример интегралне једначине у физици се јавља у квантној механици. Испоставља се да је проблеме из теорије временски зависних пертурбација погодније решавати тако што се Шредингерова једначина сведе на одговарајућу интегралну једначину за еволуциони оператор. На тај начин се долази до добро познатог решења израженог помоћу Дајсоновог хронолошког оператора [Хербут, Ф. (1999); Тошић, Б. (1978); Пантић, М. (2024)]. Са друге стране, интегралне једначине играју кључну улогу и у теорији расејања, где се Шредингерова једначина преводи у еквивалентну интегралну једначину [Пантић, М. (2024); Хербут, Ф. (1999)]. Вероватно није потребно посебно наглашавати да постоје и многи други примери примене интегралних једначина у физици.

Верује се да је прву интегралну једначину решио Нилс Абел (Niels Abel) (1802-1829) 1826. године, али њихово систематско проучавање започело је радовима Вита Волтере (Vito Volterra) (1860-1940) и Ивара Фредхолма (Ivar Fredholm) (1866-1927) крајем 19. века. Волтера и Фредхолм су радили на различитим класама интегралних једначина, али коришћењем сличних идеја. Данас је теорија интегралних једначина веома развијена и постоје многе књиге које дискутују велики број различитих врста интегралних једначина и садрже упутства за њихово решавање. Један пример такве техничке књиге са аналитичким и нумеричким рецептима за решавање више од 2000 интегралних једначина је [Polyanin, A.D., Mahzhirov, A.V. (2008)]. Такође, постоји развијена систематизација интегралних једначина коју прати методологија решавања прилагођена одређеним типовима једначина.

У односу на начин на који непозната функција фигурише под знаком интеграла, интегралне једначине се деле на линеарне и нелинеарне. Све интегралне једначине које се појављују у овом поглављу могу бити записане у форми

$$h(x)\varphi(x) + \int_{\alpha}^{\beta} K(x,t)F[\varphi(t)]dt = f(x). \quad (2.1)$$

У једначини (2.1) непозната функција је  $\varphi(x)$ , док су познате функције  $h(x)$ ,  $f(x)$ ,  $K(x, t)$ ,  $F[\varphi(t)]$ , као и одговарајуће границе интеграције. Функција  $K(x, t)$  је језгро интегралне једначине. Већина интегралних једначина из овог поглавља су линеарне интегралне једначине и имају форму

$$h(x)\varphi(x) + \int_{\alpha}^{\beta} K(x, t)\varphi(t)dt = f(x). \quad (2.2)$$

Друга важна подела интегралних једначина је у односу на границе интеграције. Тако разликујемо два типа:

- Волтерине интегралне једначине (са променљивим границама интеграције):  $\alpha$  или  $\beta$  су функције од  $x$ .
- Фредхолмове интегралне једначине (са фиксним границама интеграције):  $\alpha$  и  $\beta$  су константе.

Трећа подела је у односу на то да ли се непозната функција појављује искључиво у интегранду или не. У том смислу интегралне једначине могу бити:

- I врсте (непозната функција се јавља само у интегранду):  $h(x) \equiv 0$
- II врсте (иначе).

Четврта подела је у зависности од тога да ли је позната функција  $f(x)$  једнака нули или различита од нуле. Ако је  $f(x) = 0$ , интегрална једначина је хомогена, иначе је нехомогена.

Коначно, пета подела коришћена у овом поглављу се односи на језгро интегралне једначине. Према облику језгра разликујемо неколико типова интегралних једначина. У овом поглављу разматрамо искључиво једначине са диференцијалним  $K(x, t) = K(x - t)$  или сепарабилним језгром  $K(x, t) = K_1(x)K_2(t)$ . Више информација о сваком од наведених типова интегралних једначина, читалац може наћи у специјализованој литератури наведеној на крају овог уводног текста.

Пошто је услов за интеграбилност функције слабији од услова за диференцијабилност, свака диференцијална једначина се може свести на интегралну једначину. Интегралне једначине из овог поглавља су решаване методом интегралних трансформација, методом резолвенте и методом сукцесивних апроксимација. Детаљна упутства за примену наведених метода се могу наћи у одговарајућој литератури. Неки технички детаљи који се појављују у већем броју примера су дати у Додацима. Од приступачних књига на енглеском и српском језику, које се баве проблематиком интегралних једначина, овде издвајамо [Krasnov, M., Kiselev, A., Makarenko, G. (1971); Јанковић, С., Кнежевић-Миљановић, Ј. (2007); Митриновић, Д., Кечкић, Ј. (1994); Stone M., Goldbart, P. (2009); Hassani, S. (2013); Mathews, J., Walker, R. (1970); Бертолино М. (2010)].

## 2.1 Интегралне једначине које се решавају Фуријеовом трансформацијом

Интегрална једначина која се може решити применом Фуријеове трансформације је Фредхолмова интегрална једначина друге врсте са диференцијалним језгром

$$\varphi(x) + \int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad (2.3)$$

где су  $f(x)$  и  $K(x)$  познате функције, а  $\varphi(x)$  је непозната функција. Ово је интегрална једначина конволуционог типа, јер је други члан пропорционалан конволуцији језгра и непознате функције. Применом Фуријеове трансформације на сваки члан интегралне једначине:

$$\mathcal{F}[\varphi(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)e^{-ikx} dx = \Phi(k), \quad (2.4)$$

$$\mathcal{F}[K(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} K(x)e^{-ikx} dx = \tilde{K}(k), \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\varphi(t)dt\right] &= \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[K(x) * \varphi(x)] = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}[K(x)]\mathcal{F}[\varphi(x)] \\ &= \sqrt{2\pi}\tilde{K}(k)\Phi(k), \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\mathcal{F}[f(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ikx} dx = F(k), \quad (2.7)$$

добивамо алгебарску једначину

$$\Phi(k) + \sqrt{2\pi}\tilde{K}(k)\Phi(k) = F(k), \quad (2.8)$$

чије је решење  $\Phi(k) = \frac{F(k)}{1 + \sqrt{2\pi}\tilde{K}(k)}$ , под условом  $1 + \sqrt{2\pi}\tilde{K}(k) \neq 0$ . Применом инверзне Фуријеове трансформације добијамо решење полазне интегралне једначине

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{F(k)}{1 + \sqrt{2\pi}\tilde{K}(k)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k)}{1 + \sqrt{2\pi}\tilde{K}(k)} e^{ikx} dk. \quad (2.9)$$

На сличан начин, применом Фуријеове трансформације се решава и Фредхолмова интегрална једначина прве врсте

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-t)\varphi(t)dt = f(x). \quad (2.10)$$

Спровођењем аналогног поступка долази се до алгебарске једначине

$$\sqrt{2\pi}\tilde{K}(k)\Phi(k) = F(k), \quad (2.11)$$

чије је решење  $\Phi(k) = \frac{F(k)}{\sqrt{2\pi}\tilde{K}(k)}$ , под условом  $\tilde{K}(k) \neq 0$ . Након Фуријеове инверзије добијамо решење полазне интегралне једначине

$$\varphi(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[\frac{F(k)}{\sqrt{2\pi}\tilde{K}(k)}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k)}{\sqrt{2\pi}\tilde{K}(k)} e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(k)}{\tilde{K}(k)} e^{ikx} dk. \quad (2.12)$$

**Пример 2.1.** Решити Фредхолмову интегралну једначину

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-z)^2} \Phi(z) dz = e^{-x^2} \quad (2.13)$$

применом Фуријеове трансформације.

**Решење.** Применимо Фуријеову трансформацију на сваки члан интегралне једначине (2.13). Прво уводимо слику непознате функције

$$\mathcal{F}[\Phi(x)] = \tilde{\Phi}(k). \quad (2.14)$$

Пошто је (видети Пример 1.3)

$$\mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-\frac{k^2}{4}}, \quad (2.15)$$

а у преосталом интегралу препознајемо конволуцију

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-z)^2} \Phi(z) dz\right] &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}\left[e^{-x^2} * \Phi(x)\right] \\ &= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}\left[e^{-x^2}\right] \cdot \mathcal{F}[\Phi(x)], \end{aligned} \quad (2.16)$$

на основу (2.16) и (2.13) налазимо  $\tilde{\Phi}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ . Примена инверзне Фуријеове трансформације даје

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk = \delta(x). \quad (2.17)$$

■

Доказали смо да су Фуријеове трансформације нормираних Ермитових функција нормиране Ермитове функције (видети Тврђење 1.8). На основу тога знамо да су Ермитове функције решења интегралне једначине

$$\varphi(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-itx} \varphi(t). \quad (2.18)$$

При томе на основу наведене теореме знамо да су за параметар  $\lambda$  једине могуће вредности  $\lambda = \pm \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \pm \frac{i}{\sqrt{2\pi}}$ .

## 2.2 Интегралне једначине које се решавају Лапласовом трансформацијом

Интегрална једначина која се може решити применом Лапласове трансформације је Волтерина интегрална једначина друге врсте са диференцијалним језгром

$$\varphi(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt = f(x), \quad (2.19)$$

где су  $f(x)$  и  $K(x)$  познате функције, а  $\varphi(x)$  је непозната функција. Ову интегралну једначину зовемо интегралном једначином конволуционог типа, јер други члан представља конволуцију  $K(x) * \varphi(x)$ . Претпостављамо да су функције  $K(x)$  и  $f(x)$  довољно глатке и да су експоненцијално ограничене  $|K(x)| \leq C_K e^{k_K x}$ ,  $C_K > 0, k_K \geq 0, x \geq 0$  и  $|f(x)| \leq C_f e^{k_f x}$ ,  $C_f > 0, k_f \geq 0, x \geq 0$ . У том случају ће увек важити да је и решење интегралне једначине, функција  $\varphi(x)$ , експоненцијално ограничена функција  $|\varphi(x)| \leq C_\varphi e^{k_\varphi x}$ ,  $C_\varphi > 0, k_\varphi \geq 0, x \geq 0$ . Овде треба додатно нагласити да су  $C_K, C_f, C_\varphi, k_K, k_f, k_\varphi$  константе. Применимо Лапласову трансформацију на сваки члан интегралне једначине (2.19):

$$\mathcal{L}[\varphi(x)] + \mathcal{L}\left[\int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt\right] = \mathcal{L}[f(x)], \quad (2.20)$$

при чему је

$$\mathcal{L}[\varphi(x)] = \int_0^\infty \varphi(x)e^{-px}dx = \Phi(p), \quad (2.21)$$

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^\infty f(x)e^{-px}dx = F(p), \quad (2.22)$$

$$\mathcal{L}[K(x)] = \int_0^\infty K(x)e^{-px}dx = \tilde{K}(p), \quad (2.23)$$

и  $\operatorname{Re}(p) > \max(k_K, k_f, k_\varphi)$ . Препознавши да је

$$K(x) * \varphi(x) = \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt \quad (2.24)$$

конволуција, закључујемо да је

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt\right] = \tilde{K}(p)\Phi(p). \quad (2.25)$$

Након примене Лапласове трансформације интегрална једначина се своди на алгебарску једначину

$$\Phi(p) + \tilde{K}(p)\Phi(p) = F(p), \quad (2.26)$$

чије је решење

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 + \tilde{K}(p)}, \quad (\tilde{K}(p) \neq -1). \quad (2.27)$$

Решење интегралне једначине добијамо налажењем инверзне Лапласове трансформације

$$\varphi(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{F(p)}{1 + \tilde{K}(p)}\right] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{F(p)}{1 + \tilde{K}(p)} e^{px} dp. \quad (2.28)$$

**Пример 2.2.** Решити Волтерину интегралну једначину

$$\varphi(x) = e^x - \int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt \quad (2.29)$$

применом Лапласове трансформације.

**Решење.** Проблем решавамо применом Лапласове трансформације на сваки члан интегралне једначине. Тако уводимо слику непознате функције

$$\mathcal{L}[\varphi(x)] = \Phi(p), \quad (2.30)$$

док је

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^x] &= \frac{1}{p-1}, \\ \mathcal{L}\left[\int_0^x e^{x-t}\varphi(t)dt\right] &= \mathcal{L}[e^x * \varphi(x)] = \frac{\Phi(p)}{p-1}, \end{aligned} \quad (2.31)$$

при чему смо искористили дефиницију конволуције за Лапласову трансформацију. На овај начин добија се линеарна алгебарска једначина по  $\Phi(p)$  чије је решење  $\Phi(p) = \frac{1}{p}$ . Дакле, решење одговарајуће интегралне једначине је

$$\varphi(x) = \mathcal{L}^{-1}[\Phi(p)] = 1. \quad (2.32)$$

НАПОМЕНА 1: Приметимо да је језгро  $K(x, t) = e^{x-t}$  из овог примера истовремено и диференчно и сепарабилно.

НАПОМЕНА 2: Заменом  $x = 0$  у једначини (2.29) директно видимо да је  $\varphi(0) = e^0 = 1$ . ■

### 2.3 Свођење Волтерине интегралне једначине прве врсте на Волтерину интегралну једначину друге врсте

Волтерина интегрална једначина прве врсте је

$$\int_0^x K(x, t)\varphi(t)dt = f(x). \quad (2.33)$$

Претпоставимо да су  $K \in C^1(\{(x, t) : 0 \leq t \leq x \leq b\})$ ,  $f \in C^1([0, b])$  диференцијабилне функције и да важи  $K(x, x) \neq 0, x \in [0, b]$ . Диференцирањем (2.33) по параметру  $x$  добијамо

$$\int_0^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \varphi(t)dt + K(x, x)\varphi(x) = f'(x). \quad (2.34)$$

Како смо претпоставили да је  $K(x, x) \neq 0, x \in [0, b]$ , једначину (2.34) можемо поделити са  $K(x, x)$ , чиме се добија

$$\int_0^x \frac{1}{K(x, x)} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} \varphi(t)dt + \varphi(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)}. \quad (2.35)$$

Увођењем  $\tilde{K}(x, t) = \frac{1}{K(x, x)} \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}$ ,  $\tilde{f}(x) = \frac{f'(x)}{K(x, x)}$  добија се интегрална једначина

$$\varphi(x) + \int_0^x \tilde{K}(x, t)\varphi(t)dt = \tilde{f}(x), \quad (2.36)$$

што је Волтерина интегрална једначина друге врсте.

**Пример 2.3.** Свести Волтерину интегралну једначину прве врсте

$$\int_0^x \cos(x - t)\varphi(t)dt = x \quad (2.37)$$

на Волтерину интегралну једначину друге врсте, а затим и полазну и тако добијену једначину решити применом Лапласове трансформације.

**Решење.** Примењујући формулу за диференцирање интеграла по параметру [видети једначину (A.6)] на једначину (2.37), налазимо

$$-\int_0^x \sin(x - t)\varphi(t)dt + \varphi(x) \cos 0 = 1.$$

На овај начин смо добили интегралну једначину

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x \sin(x - t)\varphi(t)dt, \quad (2.38)$$

која је је Волтерина интегрална једначина друге врсте. Решићемо је применом Лапласове трансформације. Као и у претходним примерима, уводимо Лапласову трансформацију сваког члана једначине (2.38):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\varphi(x)] &= \Phi(p), & \mathcal{L}[1] &= \frac{1}{p}, \\ \mathcal{L}\left[\int_0^x dt \sin(x - t)\varphi(t)\right] &= \mathcal{L}[\sin x * \varphi(x)] = \frac{1}{1 + p^2}\Phi(p). \end{aligned}$$

Тако добијамо алгебарску једначину по  $\Phi(p)$

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^2 + 1}\Phi(p),$$

одакле једноставно налазимо слику непознате функције  $\varphi(x)$

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3}.$$

Дакле, решење полазне интегралне једначине је

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Покажимо сада да прелаз на Волтерину интегралну једначину друге врсте није нужан, тј. да се Волтерина једначина прве врсте може директно решити применом Лапласове трансформације на сваки њен члан. У том случају имамо

$$\mathcal{L}\left[\int_0^x \cos(x - t)\varphi(t)dt\right] = \mathcal{L}[x], \quad (2.39)$$

што, имајући у виду да је члан на левој страни Лапласова трансформација конволуције  $\cos x * \varphi(x)$ , даје

$$\mathcal{L}[\cos x]\mathcal{L}[\varphi(x)] = \frac{1}{p^2}. \quad (2.40)$$

Одатле је

$$\frac{p}{p^2 + 1}\Phi(p) = \frac{1}{p^2}, \quad (2.41)$$

тј.

$$\Phi(p) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p^3}, \quad (2.42)$$

односно

$$\varphi(x) = 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Видимо да се у оба случаја, решавајући било Волтерину интегралну једначину прве или друге врсте, применом Лапласове трансформације добија исто решење полазне интегралне једначине. ■

Један од главних разлога за свођење Волтерине интегралне једначине прве врсте на Волтерину интегралну једначину друге врсте јесте могућност примене апроксимативних метода, као што су метод sukcesивних апроксимација и метод резолвенте.

## 2.4 Пикаров метод sukcesивних апроксимација. Фредхолмова интегрална једначина

Пикаров метод sukcesивних апроксимација је итеративни метод решавања интегралних једначина. Размотримо Фредхолмову интегралну једначину

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt. \quad (2.43)$$

Циљ овог метода је да се конструише низ функција  $\{\varphi_n\}$  коришћењем рекурентне формуле

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi_{n-1}(t)dt. \quad (2.44)$$

Функције  $\varphi_n(x)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  су апроксимације траженог решења, док је  $\varphi_0(x)$  произвољно одабрана нулта апроксимација. Под условом

$$|\lambda| < \frac{1}{\sqrt{\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)dxdt}}, \quad (2.45)$$

низ  $\varphi_n(x)$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  конвергира јединственом решењу интегралне једначине  $\varphi(x)$ .

**Пример 2.4.** Решити интегралну једначину

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^1 xt^2\varphi(t)dt \quad (2.46)$$

Пикаровим методом сукцесивних апроксимација.

**Решење.** Пођимо од  $\varphi_0(x) = 1$ . Применом метода сукцесивних апроксимација добијамо:  $\varphi_1(x) = 1 + \frac{1}{3}x$ ,  $\varphi_2(x) = 1 + \frac{5}{12}x$ ,  $\varphi_3(x) = 1 + \frac{7}{16}x$ ,  $\varphi_4(x) = 1 + \frac{85}{192}x$ ,  $\varphi_5(x) = 1 + \frac{341}{768}x$ ... Приметимо да све апроксимације траженог решења имају облик  $\varphi_n(x) = 1 + a_n x$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$ , где је  $a_0 = 0$ . Можемо уочити везу  $a_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}a_n$ ,  $a_0 = 0$ . Проблем се своди на налажење граничне вредности низа. Претпоставимо да низ конвергира. У том случају је  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = a$  и имамо

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{4}a, \quad (2.47)$$

одакле добијамо  $a = \frac{4}{9}$ . Одатле је решење интегралне једначине  $\varphi(x) = 1 + ax = 1 + \frac{4}{9}x$ . ■

## 2.5 Пикаров метод сукцесивних апроксимација. Волтерина интегрална једначина

Пикаров метод сукцесивних апроксимација може се применити и на Волтерину интегралну једначину

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi(t)dt. \quad (2.48)$$

На аналоган начин се конструише низ функција  $\{\varphi_n\}$ , коришћењем рекурентне формуле

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi_{n-1}(t)dt. \quad (2.49)$$

У случају Волтерине интегралне једначине, ако су  $f(x)$  и  $K(x, t)$  непрекидне функције, низ сукцесивних апроксимација увек конвергира ка јединственом решењу  $\varphi(x)$ .

**Пример 2.5.** Пикаровим методом сукцесивних апроксимација решити интегралну једначину

$$\varphi(x) = x + 1 - \int_0^x \varphi(t)dt, \quad (2.50)$$

полазећи од две различите нулте апроксимације  $\varphi_0(x) = 1$  и  $\varphi_0(x) = x + 1$ .

**Решење.** Полазимо од  $\varphi_0(x) = 1$ . Наредна апроксимација је

$$\varphi_1(x) = x + 1 - \int_0^x dt = x + 1 - x = 1. \quad (2.51)$$

Одатле је  $\varphi_n(x) = 1, n = 1, 2, \dots$ , тако да је  $\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1$ .

У другом случају полазимо од функције  $\varphi_0(x) = x + 1$ . Наредна апроксимација је

$$\varphi_1(x) = x + 1 - \int_0^x (t + 1)dt = 1 - \frac{x^2}{2}, \quad (2.52)$$

па затим

$$\varphi_2(x) = x + 1 - \int_0^x \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)dt = 1 + \frac{x^3}{3 \cdot 2}, \quad (2.53)$$

$$\varphi_3(x) = x + 1 - \int_0^x \left(1 + \frac{t^3}{3 \cdot 2}\right)dt = 1 - \frac{x^4}{4 \cdot 3 \cdot 2}. \quad (2.54)$$

Математичком индукцијом можемо показати да је

$$\varphi_n(x) = 1 - (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}, \quad (2.55)$$

одакле је

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right] = 1. \quad (2.56)$$

Дакле, добили смо исто решење  $\varphi(x) = 1$  за оба избора нулте апроксимације.

НАПОМЕНА: Ова једначина може да буде решена и без примене метода сукцесивних апроксимација.

*Први начин:* Диференцирањем интегралне једначине по  $x$ , за шта користимо Додатак А.3, добија се линеарна диференцијална једначина првог реда

$$\varphi'(x) = 1 - \varphi(x), \quad (2.57)$$

чије је опште решење  $\varphi(x) = 1 + Ce^{-x}$ . Заменом  $x = 0$  у полазну интегралну једначину добија се

$$\varphi(0) = 1 + C = 0 + 1 - \int_0^0 \varphi(t)dt = 1, \quad (2.58)$$

одакле је  $C = 0$  и решење интегралне једначине је  $\varphi(x) = 1$ .

*Други начин:* Применом Лапласове трансформације на сваки члан интегралне једначине

$$\mathcal{L}[\varphi(x)] = \mathcal{L}[x] + \mathcal{L}[1] - \mathcal{L}[1 * \varphi(x)], \quad (2.59)$$

где је  $\mathcal{L}[\varphi(x)] = \Phi(p)$ , добија се  $\Phi(p) = \frac{1}{p}$ . Одатле је  $\varphi(x) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = 1$ .

■

**Пример 2.6.** Решити интегралну једначину

$$\varphi(x) = \int_0^x 2t(1 + \varphi(t)) dt \quad (2.60)$$

Пикаровим методом сукцесивних апроксимација полазећи од  $\varphi_0(x) = 0$ .

**Решење.** Низ апроксимативних решења у овом случају почиње са

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) &= \int_0^x 2t(1 + \varphi_0(t)) dt = \int_0^x 2t dt = x^2, \\ \varphi_2(x) &= \int_0^x 2t(1 + \varphi_1(t)) dt = \int_0^x 2t(1 + t^2) dt = x^2 + \frac{x^4}{2}, \\ \varphi_3(x) &= \int_0^x 2t(1 + \varphi_2(t)) dt = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}. \end{aligned}$$

Индукцијом се може строго показати да је

$$\varphi_n(x) = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \dots + \frac{x^{2n}}{n!}. \quad (2.61)$$

Одатле је решење интегралне једначине

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = e^{x^2} - 1.$$

НАПОМЕНА: Ова интегрална једначина може да буде решена и без примене метода сукцесивних апроксимација. Диференцирањем интегралне једначине по  $x$ , видети Додатак А.3, добија се линеарна диференцијална једначина првог реда која раздваја променљиве

$$\varphi'(x) = 2x(1 + \varphi(x)), \quad (2.62)$$

чије је опште решење  $\varphi(x) = Ce^{x^2} - 1$ . Из услова  $\varphi(0) = 0$ , следи да је  $C = 1$ , одакле је решење полазне интегралне једначине  $\varphi(x) = e^{x^2} - 1$ .

■

**Пример 2.7.** Решити интегралну једначину

$$\varphi(x) = \frac{x^3}{3} - 2x - \int_0^x \varphi(t) dt \quad (2.63)$$

Пикаровим методом сукцесивних апроксимација, полазећи од  $\varphi_0(x) = x^2$ .

**Решење.** Низ апроксимативних решења је у овом случају дат са  $\varphi_1(x) = -2x$ ,  $\varphi_2(x) = \frac{2x^3}{3!} - 2x + x^2$ ,  $\varphi_3(x) = -\frac{2x^4}{4!} - 2x + x^2$ ,  $\varphi_4(x) = \frac{2x^5}{5!} - 2x + x^2, \dots$  Методом математичке индукције може се показати да је

$$\varphi_n(x) = (-1)^n \frac{2x^{n+1}}{(n+1)!} - 2x + x^2. \quad (2.64)$$

Одатле је решење интегралне једначине

$$\varphi(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(x) = -2x + x^2. \quad (2.65)$$

■

Пикаров метод сукцесивних апроксимација се може применити и на нелинеарне Волтерине интегралне једначине.

**Пример 2.8.** Пикаровим методом сукцесивних апроксимација решити интегралну једначину

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1 + \varphi^2(t)}{1 + t^2} dt, \quad (2.66)$$

полазећи од нулте апроксимације  $\varphi_0(x) = 0$ ,  $\varphi_0(x) = x$ .

**Решење.** Пикаров метод сукцесивних апроксимација за интегралну једначину (2.66) заснива се на итеративној шеми

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{1 + \varphi_n^2(t)}{1 + t^2} dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.67)$$

при чему је  $\varphi_0(x)$  задана нулта апроксимација. Најпре ћемо одредити решење интегралне једначине (2.66) без примене метода сукцесивних апроксимација, а затим приказати Пикарове апроксимације за задате почетне функције. Диференцирањем једначине (2.66) по променљивој  $x$  (видети Додатак А.3) добијамо диференцијалну једначину

$$\varphi'(x) = \frac{1 + \varphi^2(x)}{1 + x^2}, \quad \varphi(0) = 0. \quad (2.68)$$

Из (2.66) непосредно следи почетни услов  $\varphi(0) = 0$ . Једначина (2.68) је диференцијална једначина која раздваја променљиве, па имамо

$$\frac{d\varphi}{1 + \varphi^2} = \frac{dx}{1 + x^2}. \quad (2.69)$$

Интеграцијом диференцијалне једначине добија се

$$\arctan \varphi(x) = \arctan x + C. \quad (2.70)$$

Из услова  $\varphi(0) = 0$  следи  $\arctan \varphi(0) = \arctan 0 = 0$ , па је  $C = 0$ . Дакле,

$$\arctan \varphi(x) = \arctan x, \quad (2.71)$$

одакле закључујемо да је

$$\varphi(x) = x. \quad (2.72)$$

Ако у итеративној формули (2.67) узмемо

$$\varphi_0(x) = 0, \quad (2.73)$$

онда је

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{1 + \varphi_0^2(t)}{1 + t^2} dt = \int_0^x \frac{1}{1 + t^2} dt = \arctan x. \quad (2.74)$$

Даље,

$$\varphi_2(x) = \int_0^x \frac{1 + \varphi_1^2(t)}{1 + t^2} dt = \int_0^x \frac{1 + \arctan^2 t}{1 + t^2} dt. \quad (2.75)$$

Уведимо смену  $u = \arctan t$ ,  $du = \frac{dt}{1+t^2}$ . Тада добијамо

$$\varphi_2(x) = \int_0^{\arctan x} (1 + u^2) du = \arctan x + \frac{(\arctan x)^3}{3}. \quad (2.76)$$

За трећу апроксимацију важи

$$\varphi_3(x) = \int_0^x \frac{1 + \varphi_2^2(t)}{1 + t^2} dt. \quad (2.77)$$

Пошто је  $\varphi_2(t) = \arctan t + \frac{(\arctan t)^3}{3}$ , уз исту смену  $u = \arctan t$  следи

$$\varphi_3(x) = \int_0^{\arctan x} \left[ 1 + \left( u + \frac{u^3}{3} \right)^2 \right] du. \quad (2.78)$$

Сређивањем интегранда добијамо  $1 + \left( u + \frac{u^3}{3} \right)^2 = 1 + u^2 + \frac{2}{3}u^4 + \frac{1}{9}u^6$ , па је

$$\varphi_3(x) = \int_0^{\arctan x} \left( 1 + u^2 + \frac{2}{3}u^4 + \frac{1}{9}u^6 \right) du, \quad (2.79)$$

одакле је

$$\varphi_3(x) = \arctan x + \frac{(\arctan x)^3}{3} + \frac{2}{15}(\arctan x)^5 + \frac{1}{63}(\arctan x)^7. \quad (2.80)$$

Према томе, прве Пикарове апроксимације су

$$\varphi_0(x) = 0, \quad (2.81)$$

$$\varphi_1(x) = \arctan x, \quad (2.82)$$

$$\varphi_2(x) = \arctan x + \frac{(\arctan x)^3}{3}, \quad (2.83)$$

$$\varphi_3(x) = \arctan x + \frac{(\arctan x)^3}{3} + \frac{2}{15}(\arctan x)^5 + \frac{1}{63}(\arctan x)^7. \quad (2.84)$$

Може се показати да овај низ конвергира решењу  $\varphi(x) = x$ . Ако сада у (2.67) узмемо

$$\varphi_0(x) = x, \quad (2.85)$$

онда добијамо

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{1+t^2}{1+t^2} dt = \int_0^x 1 dt = x. \quad (2.86)$$

Дакле,

$$\varphi_1(x) = x = \varphi_0(x), \quad (2.87)$$

па индукцијом непосредно следи

$$\varphi_n(x) = x, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.88)$$

односно већ нулта апроксимација даје тачно решење. ■

## 2.6 Итерирана језгра и резолвента. Случај Фредхолмове интегралне једначине

Размотримо Фредхолмову интегралну једначину

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)dt, \quad (2.89)$$

где  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $K : [a, b] \times [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  и нека су познате функције непрекидне,  $f \in C([a, b])$ ,  $K \in C([a, b] \times [a, b])$ . Такође, ако је  $\max_{(x,t) \in [a,b] \times [a,b]} |K(x, t)| = M$ , онда постоји јединствено решење ове интегралне једначине  $\varphi \in C([a, b])$  за  $|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}$ . Тражимо решење у облику степеног реда по параметру  $\lambda$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x), \quad x \in [a, b] \quad (2.90)$$

у ком треба одредити функције  $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots \in C([a, b])$  и област вредности за параметар  $\lambda$ , тако да функционални ред апсолутно и униформно конвергира на  $[a, b]$ . Заменом (2.90) у интегралну једначину (2.89) добија се:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b dt K(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(t) \\ &= f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_a^b dt K(x, t) \varphi_n(t). \end{aligned} \quad (2.91)$$

Расписивањем сума и изједначавањем коефицијената уз исте степене  $\lambda$  долазимо до

$$\varphi_0(x) = f(x), \quad (2.92)$$

$$\varphi_n(x) = \int_a^b K(x, t)\varphi_{n-1}(t)dt, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.93)$$

Одатле је

$$\varphi_1(x) = \int_a^b dt K(x, t) f(t), \quad (2.94)$$

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \int_a^b dt K(x, t) \varphi_1(t) = \int_a^b dt K(x, t) \int_a^b dt_1 K(t, t_1) f(t_1) \\ &= \int_a^b dt_1 f(t_1) \int_a^b dt K(x, t) K(t, t_1) \\ &= \int_a^b dt_1 f(t_1) K_2(x, t_1) \\ &= \int_a^b dt f(t) K_2(x, t), \end{aligned} \quad (2.95)$$

где је

$$K_2(x, t) = \int_a^b dz K(x, z) K(z, t). \quad (2.96)$$

Даљим поступком добијамо

$$K_1(x, t) = K(x, t), \quad K_{n+1}(x, t) = \int_a^b K(x, z) K_n(z, t) dz, \quad (2.97)$$

где је

$$\varphi_n(x) = \int_a^b dt f(t) K_n(x, t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.98)$$

Функције  $K_n(x, t)$ ,  $n = 1, 2, \dots$  зову се итерирана језгра. Враћањем у интегралну једначину (2.89) добија се

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= f(x) + \lambda \int_a^b dt K(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(t) \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b dt K(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_a^b dz f(z) K_n(t, z) \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b dz f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \int_a^b dt K(x, t) K_n(t, z) \\ &= f(x) + \lambda \int_a^b dz f(z) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, z). \end{aligned} \quad (2.99)$$

Функција

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t) \quad (2.100)$$

је резолвента Фредхолмове интегралне једначине, а ред  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t)$  је Нојманов ред. У оквиру овог метода проблем се своди на налажење резолvente за дату интегралну једначину. Када нађемо резолвенту, решење полазне интегралне једначине је

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b dt f(t) R(x, t; \lambda), \quad x \in [a, b]. \quad (2.101)$$

**Пример 2.9.** Решити интегралну једначину

$$\varphi(x) = \sin^5 x + \lambda \int_0^{\pi/2} dt \sin x \cos t \varphi(t) \quad (2.102)$$

методом резолvente, за  $|\lambda| < 2$ .

**Решење.** Најпре испишујемо итерирана језгра

$$\begin{aligned} K_1(x, t) &= \sin x \cos t, \\ K_2(x, t) &= \int_0^{\pi/2} dz K_1(x, z) K_1(z, t) = \sin x \cos t \int_0^{\pi/2} dz \sin z \cos z \\ &= \frac{\sin x \cos t}{2}. \end{aligned}$$

Рачунањем виших итерација се долази до општег резултата

$$K_{n+1}(x, t) = \frac{\sin x \cos t}{2^n},$$

што значи да је резолвента дата са

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t) = \sin x \cos t \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^n.$$

Преостали ред се може сумирати за  $|\lambda| < 2$ . Тада је  $R(x, t; \lambda) = \frac{2 \sin x \cos t}{2-\lambda}$  и коначно решење гласи

$$\varphi(x) = \sin^5 x + \lambda \int_0^{\pi/2} dt \frac{2 \sin x \cos t}{2-\lambda} \sin^5 t = \sin^5 x + \frac{\lambda}{3(2-\lambda)} \sin x.$$

■

**Дефиниција 2.1.** Два језгра  $K(x, t)$  и  $\tilde{K}(x, t)$  су ортогонална на интервалу  $[a, b]$  ако важи

$$\int_a^b K(x, z) \tilde{K}(z, t) dz = \int_a^b \tilde{K}(x, z) K(z, t) dz = 0. \quad (2.103)$$

**Пример 2.10.** Проверити да ли су језгра  $K(x, t) = xt$  и  $\tilde{K}(x, t) = x^2 t^2$  ортогонална на интервалу  $[-1, 1]$ .

**Решење.** Језгра  $K(x, t) = xt$  и  $\tilde{K}(x, t) = x^2 t^2$  су ортогонална на интервалу  $[-1, 1]$  ако важи

$$\int_{-1}^1 K(x, z) \tilde{K}(z, t) dz = \int_{-1}^1 \tilde{K}(x, z) K(z, t) dz = 0. \quad (2.104)$$

Заменом  $K(x, t) = xt$  и  $\tilde{K}(x, t) = x^2t^2$  у претходну једначину лако налазимо

$$\int_{-1}^1 K(x, z)\tilde{K}(z, t)dz = \int_{-1}^1 dz(xz)(z^2t^2) = xt^2 \int_{-1}^1 dzz^3 = 0,$$

као и

$$\int_{-1}^1 \tilde{K}(x, z)K(z, t)dz = \int_{-1}^1 dz(x^2z^2)(zt) = x^2t \int_{-1}^1 dzz^3 = 0,$$

на основу чега закључујемо да језгра из примера јесу ортогонална на датом интервалу. ■

**Тврђење 2.1.** Ако су  $M(x, t)$  и  $N(x, t)$  два ортогонална језгра на интервалу интеграције  $[a, b]$ , онда је резолвента  $R(x, t; \lambda)$  која одговара језгру  $K(x, t) = M(x, t) + N(x, t)$  једнака суми резолвенти  $R_M(x, t; \lambda)$  и  $R_N(x, t; \lambda)$ , које одговарају ортогоналним језгрима.

**Пример 2.11.** Наћи резолвенту за језгро  $K(x, t) = xt + x^2t^2$ ,  $-1 \leq x \leq 1, -1 \leq t \leq 1$ .

**Решење.** Како су језгра  $M(x, t) = xt$  и  $N(x, t) = x^2t^2$  ортогонална на интервалу  $[-1, 1]$  (погледати Пример 2.10 у овом поглављу), можемо посматрати два независна језгра и њихове одговарајуће резолвенте. За  $M(x, t) = xt$  налазимо прву серију итеративних језгара

$$\begin{aligned} M(x, t) &= xt, \\ M_2(x, t) &= \int_{-1}^1 dzM(x, z)M(z, t) = \frac{2}{3}xt, \\ &\dots \\ M_{n+1}(x, t) &= \left(\frac{2}{3}\right)^n xt. \end{aligned}$$

Одавде налазимо резолвенту језгра  $M(x, t)$

$$R_M(x, t; \lambda) = \frac{3xt}{3 - 2\lambda}, \quad |\lambda| < \frac{3}{2}.$$

Аналогним поступком добијамо и резолвенту за језгро  $N(x, t)$

$$\begin{aligned} N(x, t) &= x^2t^2 \\ N_2(x, t) &= \int_{-1}^1 dzN(x, z)N(z, t) = \frac{2}{5}x^2t^2, \\ &\dots \\ N_{n+1}(x, t) &= \left(\frac{2}{5}\right)^n x^2t^2. \end{aligned}$$

Дакле, резолвента језгра  $N(x, t)$  гласи

$$R_N(x, t; \lambda) = \frac{5x^2t^2}{5 - 2\lambda}, \quad |\lambda| < \frac{5}{2}.$$

Најзад, резолвента језгра  $K(x, t) = xt + x^2t^2$  је дата са

$$R(x, t; \lambda) = R_M(x, t; \lambda) + R_N(x, t; \lambda) = \frac{3xt}{3 - 2\lambda} + \frac{5x^2t^2}{5 - 2\lambda}, \quad |\lambda| < \frac{3}{2}.$$

■

## 2.7 Итерирана језгра и резолвента. Случај Волтерине интегралне једначине

Метод резолвенте може се применити и на Волтерину интегралну једначину

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x dt K(x, t) \varphi(t). \quad (2.105)$$

Као и у случају Фредхолмове интегралне једначине, решење тражимо у облику степеног реда по параметру  $\lambda$

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x). \quad (2.106)$$

Заменом (2.106) у интегралну једначину (2.105) добија се:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x dt K(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \varphi_n(t) \\ &= f(x) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{n+1} \int_0^x dt K(x, t) \varphi_n(t). \end{aligned} \quad (2.107)$$

Спровођењем аналогне процедуре као у случају Фредхолмове интегралне једначине, расписивањем сума и изједначавањем коефицијената уз исте степене  $\lambda$ , добија се

$$\varphi_0(x) = f(x), \quad (2.108)$$

$$\varphi_n(x) = \int_0^x dt K(x, t) \varphi_{n-1}(t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.109)$$

Одатле имамо

$$\varphi_1(x) = \int_0^x dt K(x, t) f(t), \quad (2.110)$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x dt K(x, t) \varphi_1(t) = \int_0^x dt K(x, t) \int_0^t dt_1 K(t, t_1) f(t_1). \quad (2.111)$$

Сада долазимо до највеће разлике у методу резолвенте за Фредхолмову и Волтерину интегралну једначину, јер овде морамо да извршимо замену редоследа интеграције, при чему границе интеграције нису фиксне. Замена редоследа интеграције је описана у Додатку А.2. Применом исте у овом случају добијамо

$$\begin{aligned} \varphi_2(x) &= \int_0^x dt K(x, t) \int_0^t dt_1 K(t, t_1) f(t_1) \\ &= \int_0^x dt_1 f(t_1) \int_{t_1}^x dt K(x, t) K(t, t_1) \\ &= \int_0^x dt_1 f(t_1) K_2(x, t_1), \end{aligned} \quad (2.112)$$

где је

$$K_2(x, t_1) = \int_{t_1}^x dt K(x, t) K(t, t_1). \quad (2.113)$$

У процедури итерације језгара због поједностављења нотације прећи ћемо са  $t_1$  на  $t$ . У том случају можемо писати

$$K_2(x, t) = \int_t^x dz K(x, z) K(z, t), \quad (2.114)$$

$$K_{n+1}(x, t) = \int_t^x dz K(x, z) K_n(z, t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.115)$$

а  $n$ -та итерација решења интегралне једначине је

$$\varphi_n(x) = \int_0^x dt f(t) K_n(x, t), \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.116)$$

Слично као и у случају Фредхолмове интегралне једначине добијамо резолвенту изражену преко Нојмановог реда

$$R(x, t; \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(x, t), \quad (2.117)$$

а решење интегралне једначине након што се одреди резолвента је

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x dt f(t) R(x, t; \lambda). \quad (2.118)$$

**Пример 2.12.** Методом резолвенте решити интегралну једначину

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x dt e^{x^2-t^2} \varphi(t). \quad (2.119)$$

**Решење.** Из интегралне једначине (2.119) види се да је  $\lambda = 1$ , као и да је  $K(x, t) = e^{x^2-t^2}$ . Одговарајућа итеративна језгра су

$$\begin{aligned} K_2(x, t) &= \int_t^x dz K(x, z) K(z, t) = (x-t)e^{x^2-t^2}, \\ K_3(x, t) &= \int_t^x dz K(x, z) K_2(z, t) = \frac{(x-t)^2}{2} e^{x^2-t^2}, \\ K_4(x, t) &= \int_t^x dz K(x, z) K_3(z, t) = \frac{(x-t)^3}{3!} e^{x^2-t^2}. \end{aligned}$$

На основу ова три итеративна језгра уочава се општи израз

$$K_n(x, t) = \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{x^2-t^2},$$

чија се исправност може потврдити математичком индукцијом. Дакле,

$$R(x, t; 1) = \sum_{n=0}^{\infty} 1^n K_{n+1}(x, t) = e^{x^2-t^2} e^{x-t}. \quad (2.120)$$

Решење интегралне једначине је

$$\varphi(x) = e^{x^2} + \int_0^x dt R(x, t; 1) e^{t^2},$$

одакле директна интеграција даје

$$\varphi(x) = e^{x^2+x}. \quad (2.121)$$

■

## 3

# Хипергеометријске функције

За физику су најважније диференцијалне једначине другог реда. Њихова партикуларна решења, која се често појављују у физичким проблемима, добила су специјална имена и заузимају важно место у математичкој физици. Међу њима се посебно издвајају Лежандрови, Чебишевљеви, Лагерови и Ермитови полиноми, као и Беселове функције. Све наведене функције, заједно са елементарним и бројним другим специјалним функцијама, могу се добити као посебни случајеви уопштених хипергеометријских функција при одговарајућем избору параметара. Сходно томе, диференцијалне једначине другог реда које одређују ове функције представљају специјалне случајеве хипергеометријских диференцијалних једначина. Уопштена хипергеометријска функција дефинише се помоћу реда<sup>1</sup>

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n (a_2)_n \cdots (a_p)_n}{n! (b_1)_n (b_2)_n \cdots (b_q)_n} x^n, \quad (3.2)$$

где су

$$(a_i)_0 = 1, \quad (a_i)_n = a_i(a_i + 1) \cdots (a_i + n - 1), \quad n \geq 1, i = 1, \dots, p \quad (3.3)$$

$$(b_j)_0 = 1, \quad (b_j)_n = b_j(b_j + 1) \cdots (b_j + n - 1), \quad n \geq 1, j = 1, \dots, q \quad (3.4)$$

Похамерови симболи. Када параметри  $a_i, i = 1, \dots, p$  и  $b_j, j = 1, \dots, q$  нису једнаки бројевима  $0, -1, -2, \dots$ , важи и репрезентација

$$(a_i)_n = \frac{\Gamma(a_i + n)}{\Gamma(a_i)}, \quad (b_j)_n = \frac{\Gamma(b_j + n)}{\Gamma(b_j)}, \quad (3.5)$$

која ће углавном бити коришћена у даљем тексту.

<sup>1</sup>Користи се и запис [Awad, M., Koepf, W., Mohammed, A., Rakha, M., Rathie, A. (2021)]

$${}_pF_q\left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{n! (b_1)_n \cdots (b_q)_n} x^n. \quad (3.1)$$

Доказује се да ред (3.2), за  $p \leq q$ , конвергира за све коначне вредности променљиве  $x$ , осим за неке вредности параметара за које функција није дефинисана. У случају  $p = q + 1$  ред конвергира за  $|x| < 1$ , док за  $p > q + 1$  дивергира за свако  $x \neq 0$  осим у случају када се ред пресеца. У тексту који следи изложићемо теорију на примерима Гаусове и конфлуентне хипергеометријске функције. Више о теорији хипергеометријских функција можете наћи у [Arfken, G.B., Weber H.J., Harris F.E. (2013); Hassani, S. (2013); Игњатовић, С. (2015); Aomoto, K. Kita, M. (2011)].

### 3.1 Гаусова хипергеометријска функција

Линеарна диференцијална једначина другог реда

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dx^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]\frac{dy}{dx} - \alpha\beta y(x) = 0, \quad (3.6)$$

где су  $\alpha, \beta, \gamma$  константе, у литератури је позната као Гаусова хипергеометријска једначина. Регуларно-сингуларне тачке ове једначине су  $x = 0, 1$  и  $\infty$ . С обзиром да је  $x = 0$  регуларно-сингуларна тачка диференцијалне једначине (3.6), њено решење тражимо Фробенијусовом методом у форми степеног реда<sup>2</sup>

$$y(x) = x^k \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu+k}. \quad (3.7)$$

Тада је

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (\nu + k) x^{\nu+k-1}, \quad (3.8)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (\nu + k)(\nu + k - 1) x^{\nu+k-2}. \quad (3.9)$$

Након враћања у једначину (3.6) и сређивања добија се

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} (\nu + k)(\nu + k - 1 + \gamma) x^{\nu+k-1} - \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + k + \alpha)(\nu + k + \beta) a_{\nu} x^{\nu+k} = 0. \quad (3.10)$$

Изједначавањем коефицијената уз најнижи степен  $x^{k-1}$ , добија се

$$a_0 k(k - 1 + \gamma) = 0. \quad (3.11)$$

Остаје

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu} (\nu + k)(\nu + k - 1 + \gamma) x^{\nu+k-1} - \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + k + \alpha)(\nu + k + \beta) a_{\nu} x^{\nu+k} = 0. \quad (3.12)$$

<sup>2</sup>Више о појму регуларно-сингуларне тачке и Фробенијусовој методи решавања диференцијалних једначина помоћу редова можете наћи у [Чолић, М. (2020); Николић-Деспотовић, Д. (1989)].

Суме у (3.12) се једноставно могу довести на исти степен. Сменом индекса у првој суми подеси се да она креће од нуле услед чега се, након сабирања чланова на левој страни једнакости, добија једна сума

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [a_{\nu+1}(\nu+k+1)(\nu+k+\gamma) - a_{\nu}(\nu+k+\alpha)(\nu+k+\beta)] x^{\nu+k} = 0, \quad (3.13)$$

што доводи до рекурентне релације

$$a_{\nu+1} = \frac{(\nu+k+\alpha)(\nu+k+\beta)}{(\nu+k+1)(\nu+k+\gamma)} a_{\nu}. \quad (3.14)$$

Ако је познат коефицијент  $a_0$  у развоју, могуће је одредити и сваки следећи коефицијент  $a_1, a_2, \dots$  преко дате рекурентне релације. Специјално, избором  $a_0 = 0$  и сваки следећи коефицијент би био нула. Стога се строго поставља услов  $a_0 \neq 0$ . Имајући ово у виду, из  $a_0 k(k-1+\gamma) = 0$  следе две могућности:  $k_1 = 0$  или  $k_2 = 1 - \gamma$ . За  $k_1 = 0$  рекурентна релација постаје

$$a_{\nu+1} = \frac{(\alpha+\nu)(\beta+\nu)}{(1+\nu)(\gamma+\nu)} a_{\nu}, \quad (3.15)$$

односно

$$a_{\nu+1} = \frac{(\alpha+\nu)(\alpha+\nu-1)\dots(\alpha+1)\alpha(\beta+\nu)(\beta+\nu-1)\dots(\beta+1)\beta}{(1+\nu)(1+\nu-1)\dots(1+1)1(\gamma+\nu)(\gamma+\nu-1)\dots(\gamma+1)\gamma} a_0. \quad (3.16)$$

Похамерови симболи у овом случају су

$$(\alpha)_{\nu} = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu-1), \quad (\alpha)_0 = 1, \quad (3.17)$$

$$(\beta)_{\nu} = \beta(\beta+1)\dots(\beta+\nu-1), \quad (\beta)_0 = 1, \quad (3.18)$$

$$(\gamma)_{\nu} = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+\nu-1), \quad (\gamma)_0 = 1, \quad (3.19)$$

$$a_{\nu} = \frac{(\alpha)_{\nu}(\beta)_{\nu}}{\nu!(\gamma)_{\nu}} a_0. \quad (3.20)$$

Партикуларно решење добијено за  $k_1 = 0$  је

$$y_1(x) = a_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu}(\beta)_{\nu}}{\nu!(\gamma)_{\nu}} x^{\nu} = a_0 \left[ 1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2\gamma(\gamma+1)} x^2 + \dots \right], \quad (3.21)$$

$$\gamma \neq 0, -1, -2, -3, \dots,$$

За реалне  $\alpha, \beta$  и  $\gamma$  (једини случај који овде разматрамо) ред конвергира за  $|x| < 1$ . Даље, за  $\gamma > \alpha + \beta$  ред конвергира и у тачкама  $x = \pm 1$ , те је област конвергенције  $-1 \leq x \leq 1$ .

За  $\alpha + \beta - 1 < \gamma \leq \alpha + \beta$  ред конвергира за  $-1 \leq x < 1$ , док у тачки  $x = 1$  дивергира. За  $\gamma \leq \alpha + \beta - 1$  ред конвергира само за  $-1 < x < 1$ , док у тачкама  $x = \pm 1$  дивергира. Међутим, ако је  $\alpha = -n$  или  $\beta = -n$ , где је  $n \in \mathbb{N}_0$ , тада се ред пресеца, па функција  $y_1(x)$  постаје полином степена  $n$  и самим тим је дефинисана за свако  $x \in \mathbb{R}$  (видети Пример 3.10). Испитивање конвергенције овог реда помоћу Даламберовог, Рабеовог и Гаусовог критеријума обрађено је у [Митриновић, Д. (1980)].

Партикуларно решење  $y_1(x)$  за  $a_0 = 1$ , зове се Гаусова хипергеометријска функција и обележава се са  ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$ . Индекс 2 указује да се два параметра  $\alpha$  и  $\beta$  налазе у бројиоцу, док индекс 1 означава да је  $\gamma$  једини параметар који фигурише у имениоцу<sup>3</sup>

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu}(\beta)_{\nu}}{\nu!(\gamma)_{\nu}} x^{\nu}. \quad (3.22)$$

Постоји очигледна симетрија у односу на измену параметара који фигуришу у бројиоцу, што се може записати као

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = {}_2F_1(\beta, \alpha; \gamma; x). \quad (3.23)$$

За  $k_2 = 1 - \gamma$  добија се решење

$$y_2(x) = a_0 x^{1-\gamma} {}_2F_1(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; x). \quad (3.24)$$

У случају када су партикуларна решења линеарно независна, што важи за  $\gamma \notin \mathbb{N}$ , опште решење је

$$y(x) = C {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) + D x^{1-\gamma} {}_2F_1(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1; 2 - \gamma; x). \quad (3.25)$$

где су  $C$  и  $D$  произвољне константе.

**Пример 3.1.** Доказати да важи

$$\text{а) } \ln(1+x) = {}_2F_1(1, 1; 2; -x)x$$

$$\text{б) } \arctan x = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -x^2\right)x$$

**Решење.** Гаусова хипергеометријска функција је дефинисана са

$${}_2F_1(a, b; c; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} \frac{x^n}{n!}, \quad (3.26)$$

при чему су

$$(a)_n = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}, \quad (b)_n = \frac{\Gamma(b+n)}{\Gamma(b)}, \quad (c)_n = \frac{\Gamma(c+n)}{\Gamma(c)} \quad (3.27)$$

Похамерови симболи. Важење једнакости које су наведене на почетку задатка можемо доказати развојем функција у Тејлорове редове.

а) Пошто је Тејлоров развој функције  $\ln(1+x)$  дат са

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad (3.28)$$

<sup>3</sup>Ако је ово јасно из контекста, може се користити скраћени запис  $F(\alpha, \beta; \gamma; x)$  (видети [Урумов, В. (1996); Игњатовић, С. (2015)]).

а Гаусова хипергеометријска функција на десној страни једнакости а) је

$${}_2F_1(1, 1; 2; -x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n(1)_n}{(2)_n n!} (-x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^n, \quad (3.29)$$

упоређивањем (3.28) и (3.29) лако видимо да важи релација а).

б) Развој у Тејлоров ред функције  $\arctan x$  је дат са

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad (3.30)$$

и очигледно се поклапа са Гаусовом хипергеометријском функцијом са десне стране једнакости б)

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; \frac{3}{2}; -x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2})_n(1)_n}{(\frac{3}{2})_n n!} (-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}. \quad (3.31)$$

При томе смо, за рачунање одговарајућих Похамерових симбола, користили релацију (3.27), као и да за природан број  $m$  важе релације

$$\Gamma(m+1) = m!, \quad \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2m-1)!!}{2^m} \sqrt{\pi}. \quad (3.32)$$

НАПОМЕНА: У већем броју рачунарских програма се трансцендентни број  $\pi$  дефинише као  $\pi = 4 \arctan 1$  јер се испоставља да та репрезентација омогућава да се релативно једноставно добије нумеричка вредност задовољавајуће прецизности. ■

**Пример 3.2.** Доказати да  ${}_2F_1(1, b; b; x)$  представља геометријски ред.

**Решење.** Полазећи од дефиниције хипергеометријске функције и Похамерових симбола, лако налазимо

$${}_2F_1(1, b; b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n(b)_n}{(b)_n n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n. \quad (3.33)$$

Добијени ред конвергира за  $|x| < 1$  и сума му је  $\frac{1}{1-x}$ .

НАПОМЕНА: У општијем случају

$${}_2F_1(a, b; b; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n(b)_n}{(b)_n n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n = (1-x)^{-a}, \quad |x| < 1 \quad (3.34)$$

добивамо ред који се назива хипергеометријским редом. Очигледно, ту лежи и корен назива хипергеометријска функција. Приметимо још да се исти хипергеометријски ред добија полазећи и од хипергеометријске функције  ${}_1F_0(a; -; x)$ . Ова ознака нам говори да развој дате функције нема Похамерових симбола у именуоцу. ■

Хипергеометријске функције су од великог значаја и за решавање различитих интеграла, јер се многи интеграла које не можемо решити аналитички могу свести на хипергеометријске функције. Овим поступком значајно се смањује грешка у нумеричким процедурама које након тога следе. Да бисмо на примеру показали како се комплетан елиптички интеграл прве врсте  $K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi$  може свести на Гаусову хипергеометријску функцију, уведимо два помоћна примера која ће нам у томе помоћи.

**Пример 3.3.** Доказати да важи

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \varphi \cos^{2q-1} \varphi d\varphi, \quad (3.35)$$

где је  $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx$ ,  $p > 0$ ,  $q > 0$  бета функција.

**Решење.** Тражени израз се добија сменом  $x = \sin^2 \varphi$ ,  $dx = 2 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi$  у дефиницији бета функције

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0, q > 0. \quad (3.36)$$

За више детаља везаних за бета функцију погледајте [Паунић, Ђ. (2009)]. ■

**Пример 3.4.** Доказати да важи

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x dx = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(m + 1/2)}{2 \Gamma(m + 1)}. \quad (3.37)$$

**Решење.** На основу претходног примера знамо да је

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x dx = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\right), \quad (3.38)$$

што се, коришћењем везе измеђе гама и бета функције

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad p, q > 0 \quad (3.39)$$

може записати у траженој форми

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(m + \frac{1}{2})}{\Gamma(m + 1)} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(m + \frac{1}{2})}{2 \Gamma(m + 1)}. \quad (3.40)$$

НАПОМЕНА 1: Треба приметити да се, на основу симетрије бета функције  $B(p, q) = B(q, p)$ , исти резултат добија и за интеграл  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x dx$ . ■

Након ових примера вратимо се на везу између комплетног елиптичког интеграла прве врсте и Гаусове хипергеометријске функције.

**Пример 3.5.** Проверити да ли је комплетан елиптички интеграл прве врсте

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} d\varphi \quad (3.41)$$

повезан са Гаусовом хипергеометријском функцијом на следећи начин:

$$K(k) = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right). \quad (3.42)$$

**Решење.** Тражени интеграл можемо упростити коришћењем биномног развоја (видети [Arfken, G.B., Weber H.J., Harris F.E. (2013)])

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n}{n!} x^{2n} = {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1; 1; x^2\right), \quad (3.43)$$

тако да (3.41) постаје

$$K(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi (1 - k^2 \sin^2 \varphi)^{-\frac{1}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n}{n!} (k^2 \sin^2 \varphi)^n. \quad (3.44)$$

Користећи, затим, релацију (3.35), налазимо

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} B\left(n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma(n+1)} = \frac{[\Gamma(1/2)]^2 (1/2)_n}{2(1)_n}, \quad (3.45)$$

где смо искористили дефиницију Похамерових симбола (3.27). Замена (3.45) у (3.44) даје

$$K(k) = \frac{[\Gamma(1/2)]^2}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n (1/2)_n}{(1)_n} \frac{k^{2n}}{n!} = \frac{\pi}{2} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; k^2\right), \quad (3.46)$$

што је тражена релација.

НАПОМЕНА: Елиптички интегрални овог типа појављују се код осциловања математичког клатна са произвољним отклоном [Милић, Б. (1997)]. Ако занемаримо отпор ваздуха, период математичког клатна за отклон за угао  $\varphi_0$  је дат са

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}} K\left(\sin\left(\frac{\varphi_0}{2}\right)\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; 1; \sin^2 \frac{\varphi_0}{2}\right), \quad (3.47)$$

где је  $l$  дужина клатна, а  $g$  гравитационо убрзање. ■

### 3.1.1 Интегрална репрезентација Гаусове хипергеометријске функције

Гаусова хипергеометријска функција има интегралну репрезентацију. Да бисмо дошли до ове репрезентације, прво у изразу за Гаусову хипергеометријску функцију (3.22) заменимо два Похамерова симбола односима гама функција и затим помножимо и поделимо десну страну једнакости са  $\Gamma(\gamma - \beta)$

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu} (\beta)_{\nu}}{\nu! (\gamma)_{\nu}} x^{\nu} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu} \frac{\Gamma(\beta+\nu)}{\Gamma(\beta)}}{\nu! \frac{\Gamma(\gamma+\nu)}{\Gamma(\gamma)}} x^{\nu} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu} \Gamma(\beta + \nu)}{\nu! \Gamma(\gamma + \nu)} x^{\nu} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta) \Gamma(\gamma - \beta)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu} \Gamma(\beta + \nu) \Gamma(\gamma - \beta)}{\Gamma(\gamma + \nu)} \frac{x^{\nu}}{\nu!}. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Множење и дељење са  $\Gamma(\gamma - \beta)$  је извршено да бисмо дошли до израза  $\frac{\Gamma(\beta+\nu)\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma+\nu)}$ , што је на основу (3.39)  $B(\beta + \nu, \gamma - \beta)$ . Одатле је

$$\begin{aligned} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha)_{\nu} B(\beta + \nu, \gamma - \beta) \frac{x^{\nu}}{\nu!} \\ &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha)_{\nu} \int_0^1 t^{\beta+\nu-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} \frac{x^{\nu}}{\nu!} dt, \end{aligned} \quad (3.49)$$

и с обзиром да је

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha)_{\nu} \frac{(xt)^{\nu}}{\nu!} = {}_2F_1(\alpha, \beta; \beta; xt) = (1 - xt)^{-\alpha} \quad (3.50)$$

хипергеометријски ред, добија се интегрална репрезентација Гаусове хипергеометријске функције

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \int_0^1 t^{\beta-1} (1-t)^{\gamma-\beta-1} (1-xt)^{-\alpha} dt. \quad (3.51)$$

Због симетрије Гаусове хипергеометријске функције (3.23), њена интегрална репрезентација је такође и

$${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} (1-xt)^{-\beta} dt. \quad (3.52)$$

Јасно је да ово нису једине интегралне репрезентације Гаусове хипергеометријске функције, самим тим што бета функција има више интегралних репрезентација.

## 3.2 Конфлуентна хипергеометријска функција

Ако се у Гаусовој хипергеометријској једначини уради смена аргумента  $x \rightarrow \frac{\tilde{x}}{\beta}$ ,  $\frac{dy}{dx} = \beta \frac{dy}{d\tilde{x}}$ ,  $\frac{d^2y}{dx^2} = \beta^2 \frac{d^2y}{d\tilde{x}^2}$ , добиће се диференцијална једначина

$$\tilde{x} \left( 1 - \frac{\tilde{x}}{\beta} \right) \frac{d^2y}{d\tilde{x}^2} + \left[ \gamma - (\alpha + \beta + 1) \frac{\tilde{x}}{\beta} \right] \frac{dy}{d\tilde{x}} - \alpha y(\tilde{x}) = 0, \quad (3.53)$$

која има три регуларно-сингуларне тачке  $\tilde{x} = 0, \beta$  и  $\infty$ . Посматрајмо лимес  $\beta \rightarrow \infty$  и независно променљиву након пуштања лимеса опет преименујмо у  $x$ . На тај начин добијамо диференцијалну једначину

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + (\gamma - x) \frac{dy}{dx} - \alpha y(x) = 0. \quad (3.54)$$

Једначина (3.54) зове се конфлуентна, Кумерова или дегенерисана хипергеометријска једначина. Разлог за то је што су се приликом пуштања лимеса две регуларно-сингуларне тачке  $\beta$  и  $\infty$  стопиле у једну. Пошто је  $x = 0$  регуларно-сингуларна тачка диференцијалне једначине (3.54), решење тражимо у форми Фробенијусовог реда

$$y(x) = x^k \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} x^{\nu+k}, \quad a_0 \neq 0. \quad (3.55)$$

Тада је

$$\frac{dy}{dx} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(\nu + k)x^{\nu+k-1}, \quad (3.56)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(\nu + k)(\nu + k - 1)x^{\nu+k-2}. \quad (3.57)$$

Након враћања у једначину (3.54) добија се

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu}(\nu + k)(\nu + k - 1 + \gamma)x^{\nu+k-1} - \sum_{\nu=0}^{\infty} (\nu + k + \alpha)a_{\nu}x^{\nu+k} = 0. \quad (3.58)$$

Изједначавањем коефицијента уз најнижи степен  $x^{k-1}$  добија се једначина

$$a_0k(k - 1 + \gamma) = 0. \quad (3.59)$$

За преостале коефицијенте, након померања индекса у првој суми, добијамо

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} [a_{\nu+1}(\nu + k + 1)(\nu + k + \gamma) - a_{\nu}(\nu + k + \alpha)]x^{\nu+k} = 0, \quad (3.60)$$

одакле следи рекурентна релација

$$a_{\nu+1} = \frac{\nu + k + \alpha}{(\nu + k + 1)(\nu + k + \gamma)}a_{\nu}. \quad (3.61)$$

Пошто је  $a_0 \neq 0$ , на основу (3.59) имамо две могућности

$$k_1 = 0, \quad k_2 = 1 - \gamma. \quad (3.62)$$

За прво решење, које одговара корену  $k_1 = 0$ , релација (3.61) постаје

$$a_{\nu+1} = \frac{\alpha + \nu}{(1 + \nu)(\gamma + \nu)}a_{\nu}, \quad (3.63)$$

па се узастопним коришћењем добија

$$a_{\nu} = \frac{(\alpha)_{\nu}}{\nu!(\gamma)_{\nu}}a_0. \quad (3.64)$$

Прво партикуларно решење је зато

$$y_1(x) = a_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu}}{\nu!(\gamma)_{\nu}}x^{\nu}, \quad \gamma \neq 0, -1, -2, \dots \quad (3.65)$$

и ред конвергира за свако коначно  $x$ . Ако је  $\alpha = -n$ , где је  $n \in \mathbb{N}_0$ , тада се ред пресеца (видети Пример 3.12), па функција  $y_1(x)$  постаје полином степена  $n$ . За избор  $a_0 = 1$  добија се конфлуентна (дегенерисана хипергеометријска) функција

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu}}{(\gamma)_{\nu}} \frac{x^{\nu}}{\nu!}. \quad (3.66)$$

Дакле, можемо писати

$$y_1(x) = a_0 {}_1F_1(\alpha; \gamma; x). \quad (3.67)$$

За други корен  $k_2 = 1 - \gamma$  рекурентна релација (3.61) даје

$$a_{\nu+1} = \frac{\alpha - \gamma + 1 + \nu}{(1 + \nu)(2 - \gamma + \nu)} a_\nu, \quad (3.68)$$

одакле следи

$$a_\nu = \frac{(\alpha - \gamma + 1)_\nu}{\nu!(2 - \gamma)_\nu} a_0. \quad (3.69)$$

Према томе, друго партикуларно решење је

$$y_2(x) = a_0 x^{1-\gamma} {}_1F_1(\alpha - \gamma + 1; 2 - \gamma; x). \quad (3.70)$$

Ако  $\gamma \notin \mathbb{N}$ , онда су  $y_1(x)$  и  $y_2(x)$  линеарно независна решења, па је опште решење једначине (3.54)

$$y(x) = C {}_1F_1(\alpha; \gamma; x) + D x^{1-\gamma} {}_1F_1(\alpha - \gamma + 1; 2 - \gamma; x), \quad (3.71)$$

где су  $C$  и  $D$  произвољне константе.

НАПОМЕНА 1: Функција  ${}_1F_1(\alpha; \gamma; x)$  често се означава и са  $M(\alpha, \gamma; x)$  и назива се и Кумерова функција прве врсте.

НАПОМЕНА 2: У случају када је  $\gamma \in \mathbb{N}$ ,  $y_2(x)$  захтева посебан третман и тада се обично уводи Трикомијева функција  $U(\alpha, \gamma; x)$ .

**Пример 3.6.** Показати да важи

а)  ${}_1F_1(\alpha; \alpha; x) = e^x$

б)  ${}_1F_1(1; 2; x) = \frac{e^x - 1}{x}$

**Решење.** Полазимо од дефиниције

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n x^n}{(\gamma)_n n!}. \quad (3.72)$$

а) Ако ставимо  $\gamma = \alpha$ , добијамо

$${}_1F_1(\alpha; \alpha; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x. \quad (3.73)$$

б) За  $\alpha = 1$  и  $\gamma = 2$  добијамо

$${}_1F_1(1; 2; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n x^n}{(2)_n n!}. \quad (3.74)$$

Пошто је

$$(1)_n = n!, \quad (2)_n = (n+1)!, \quad (3.75)$$

следи

$${}_1F_1(1; 2; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}. \quad (3.76)$$

Множењем са  $x$  налазимо

$$x {}_1F_1(1; 2; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = e^x - 1, \quad (3.77)$$

односно

$${}_1F_1(1; 2; x) = \frac{e^x - 1}{x}. \quad (3.78)$$

НАПОМЕНА: Експоненцијалну функцију  $e^x$  можемо изразити и преко хипергеометријске функције  ${}_0F_0(-; -; x)$ , чији развој не садржи Похамерове симболе ни у бројиоцу, ни у имениоцу. ■

**Пример 3.7.** Показати да важи

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right). \quad (3.79)$$

**Решење.** Функција грешке дефинисана је са

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (3.80)$$

Развијањем експоненцијалне функције у ред добијамо

$$e^{-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{n!}, \quad (3.81)$$

па интеграцијом по члановима следи

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(2n+1)} x^{2n+1}. \quad (3.82)$$

С друге стране,

$${}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} \frac{(-x^2)^n}{n!}. \quad (3.83)$$

Како важи

$$\frac{\left(\frac{1}{2}\right)_n}{\left(\frac{3}{2}\right)_n} = \frac{1}{2n+1}, \quad (3.84)$$

добијамо

$${}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!(2n+1)}. \quad (3.85)$$

Множењем са  $\frac{2x}{\sqrt{\pi}}$  добија се тражена релација. ■

**Пример 3.8.** Показати да за  $\alpha = -n$ , где је  $n = 0, 1, 2, \dots$ , дегенерисана хипергеометријска функција прелази у полином.

**Решење.** Ако је  $\alpha = -n$ , тада је

$$(-n)_\nu = 0, \quad \nu > n, \quad (3.86)$$

па се ред за  ${}_1F_1(-n; \gamma; x)$  прекида након коначно много чланова. Дакле, у том случају добијамо полином степена  $n$ . Прецизније, важи веза са придруженим Лагеровим полиномима

$${}_1F_1(-n; \gamma; x) = \frac{n!}{(\gamma)_n} L_n^{(\gamma-1)}(x). \quad (3.87)$$

■

**Тврђење 3.1.** (Кумерова формула) Ако је  $\gamma \neq 0, -1, -2, \dots$  онда важи

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; x) = e^x {}_1F_1(\gamma - \alpha; \gamma; -x). \quad (3.88)$$

### 3.2.1 Интегрална репрезентација конфлуентне хипергеометријске функције

Конфлуентну хипергеометријску функцију можемо дефинисати и као

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; x) = \lim_{\beta \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{x}{\beta}\right). \quad (3.89)$$

Одатле интегралну репрезентацију конфлуентне хипергеометријске функције добијамо као

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} {}_2F_1\left(\alpha, \beta; \gamma; \frac{x}{\beta}\right) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} \left(1 - \frac{xt}{\beta}\right)^{-\beta} dt. \quad (3.90)$$

Коришћењем идентитета

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{xt}{\beta}\right)^{-\beta} = \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{xt}{\beta}\right)^{-\frac{\beta}{xt}}\right]^{xt} = e^{xt}, \quad (3.91)$$

долазимо до крајњег израза за интегралну репрезентацију конфлуентне хипергеометријске функције

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; x) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma - \alpha)} \int_0^1 t^{\alpha-1} (1-t)^{\gamma-\alpha-1} e^{xt} dt. \quad (3.92)$$

### 3.3 Формуле диференцирања и рекурентне релације

Диференцирајмо Гаусову хипергеометријску функцију (3.22) по  $x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) &= \frac{d}{dx} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu}(\beta)_{\nu}}{\nu!(\gamma)_{\nu}} x^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu}(\beta)_{\nu}}{\nu!(\gamma)_{\nu}} \nu x^{\nu-1} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu}(\beta)_{\nu}}{(\nu-1)!(\gamma)_{\nu}} x^{\nu-1} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu+1}(\beta)_{\nu+1}}{\nu!(\gamma)_{\nu+1}} x^{\nu}, \end{aligned} \quad (3.93)$$

и трансформишимо Похамерове симболе

$$(\alpha)_{\nu+1} = \alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+\nu) = \alpha(\alpha+1)_{\nu}, \quad (3.94)$$

$$(\beta)_{\nu+1} = \beta(\beta+1)\dots(\beta+\nu) = \beta(\beta+1)_{\nu}, \quad (3.95)$$

$$(\gamma)_{\nu+1} = \gamma(\gamma+1)\dots(\gamma+\nu) = \gamma(\gamma+1)_{\nu}. \quad (3.96)$$

Одатле добијамо

$$\frac{d}{dx} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) = \frac{\alpha\beta}{\gamma} {}_2F_1(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; x). \quad (3.97)$$

Диференцирањем релације (3.97) по  $x$  и њеном поновном применим долазимо до

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x) &= \frac{\alpha\beta}{\gamma} \frac{d}{dx} {}_2F_1(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; x) \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} {}_2F_1(\alpha+2, \beta+2; \gamma+2; x). \end{aligned} \quad (3.98)$$

Како у Гаусовој хипергеометријској диференцијалној једначини (3.6) фигуришу нулти, први и други извод непознате функције и с обзиром да је Гаусова хипергеометријска функција њено партикуларно решење, уврштавањем (3.97) и (3.98) у дату једначину налазимо рекурентну релацију

$$\begin{aligned} &(\alpha+1)(\beta+1)x(1-x) {}_2F_1(\alpha+2, \beta+2; \gamma+2; x) + \\ &+ (\gamma+1)[\gamma - (\alpha+\beta+1)x] {}_2F_1(\alpha+1, \beta+1; \gamma+1; x) = \gamma(\gamma+1) {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x). \end{aligned} \quad (3.99)$$

**Пример 3.9.** Наћи која једнакост се добија применим формуле диференцирања (3.97) на функцију  ${}_2F_1(1, 1; 2; -x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ ,  $x \neq 0$ .

**Решење.** Применом формуле диференцирања (3.97) на Гаусову хипергеометријску функцију  ${}_2F_1(1, 1; 2; x)$ , добија се

$$\frac{d}{dx} {}_2F_1(1, 1; 2; x) = \frac{1}{2} {}_2F_1(2, 2; 3; x). \quad (3.100)$$

Како је у случају из примера независно променљива  $-x$ , имамо

$$\frac{d}{dx} {}_2F_1(1, 1; 2; -x) = -\frac{1}{2} {}_2F_1(2, 2; 3; -x), \quad (3.101)$$

док је

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\ln(1+x)}{x} \right) = \frac{\frac{x}{1+x} - \ln(1+x)}{x^2}. \quad (3.102)$$

Поређењем ова два израза добијамо

$${}_2F_1(2, 2; 3; -x) = \frac{2}{x^2} \left( \ln(1+x) - \frac{x}{1+x} \right). \quad (3.103)$$

■

**Пример 3.10.** Знајући да се Лежандрови полиноми могу изразити преко Гаусове хипергеометријске функције

$$P_n(x) = {}_2F_1 \left( -n, n+1; 1; \frac{1-x}{2} \right), \quad (3.104)$$

наћи шта се добија применом рекурентне релације (3.99) на хипергеометријску функцију  ${}_2F_1(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2})$ .

**Решење.** Уведимо смену  $z = \frac{1-x}{2}$ . Тада је

$$\frac{d}{dz} {}_2F_1(-n, n+1; 1; z) = -n(n+1) {}_2F_1(1-n, n+2; 2; z), \quad (3.105)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dz^2} {}_2F_1(-n, n+1; 1; z) &= \frac{-n(1-n)(n+1)(n+2)}{2} {}_2F_1(2-n, n+3; 3; z) \\ &= \frac{n(n-1)(n+1)(n+2)}{2} {}_2F_1(2-n, n+3; 3; z). \end{aligned} \quad (3.106)$$

Рекурентна релација је у овом случају

$$\begin{aligned} &- (n-1)(n+2)z(1-z) {}_2F_1(2-n, n+3; 3; z) + \\ &+ 2(1-2z) {}_2F_1(1-n, n+2; 2; z) = 2 {}_2F_1(-n, n+1; 1; z). \end{aligned} \quad (3.107)$$

Уведимо сада да је  $Y(z) = {}_2F_1(-n, n+1; 1; z)$ . Онда је  ${}_2F_1(1-n, n+2; 2; z) = -\frac{1}{n(n+1)} \frac{dY}{dz}$ ,  ${}_2F_1(2-n, n+3; 3; z) = \frac{2}{n(n-1)(n+1)(n+2)} \frac{d^2Y}{dz^2}$ . Враћањем у (3.107) добијамо диференцијалну једначину

$$z(1-z) \frac{d^2Y}{dz^2} + (1-2z) \frac{dY}{dz} + n(n+1)Y(z) = 0. \quad (3.108)$$

Сада прелазимо на Лежандров полином који је дефинисан са

$$P_n(x) = Y\left(\frac{1-x}{2}\right), \quad (3.109)$$

односно

$$P_n(x) = P_n(1-2z) = Y(z). \quad (3.110)$$

Диференцирањем имамо да је

$$Y'(z) = -2P'_n(1-2z) = -2P'_n(x), \quad (3.111)$$

$$Y''(z) = -2P''_n(1-2z)(-2) = 4P''_n(x). \quad (3.112)$$

Треба још утврдити како се трансформишу коефицијенти у једначини (3.108). Како је  $z = \frac{1-x}{2}$ , имамо да је  $1-z = 1 - \frac{1-x}{2} = \frac{1+x}{2}$ , па је  $z(1-z) = \frac{1-x^2}{4}$ , док је  $1-2z = x$ . Према томе, диференцијална једначина (3.108) поприма облик

$$\frac{1-x^2}{4}4P''_n(x) + x(-2P'_n(x)) + n(n+1)P_n(x) = 0, \quad (3.113)$$

и након сређивања

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0 \quad (3.114)$$

видимо да је ово Лежандрова диференцијална једначина. ■

Аналогно поступку за Гаусову хипергеометријску функцију, диференцирајмо конфлуентну хипергеометријску функцију (3.66) по  $x$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} {}_1F_1(\alpha; \gamma; x) &= \frac{d}{dx} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu}}{\nu!(\gamma)_{\nu}} x^{\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu}}{\nu!(\gamma)_{\nu}} \nu x^{\nu-1} \\ &= \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu}}{(\nu-1)!(\gamma)_{\nu}} x^{\nu-1} \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu+1}}{(\nu)!(\gamma)_{\nu+1}} x^{\nu}, \end{aligned} \quad (3.115)$$

и искористимо (3.94) и (3.96). Након тога налазимо

$$\frac{d}{dx} {}_1F_1(\alpha; \gamma; x) = \frac{\alpha}{\gamma} {}_1F_1(\alpha+1; \gamma+1; x). \quad (3.116)$$

Аналогним поступком као у случају Гаусове хипергеометријске функције, налазимо

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} {}_1F_1(\alpha; \gamma; x) &= \frac{\alpha}{\gamma} \frac{d}{dx} {}_1F_1(\alpha+1; \gamma+1; x) \\ &= \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} {}_1F_1(\alpha+2; \gamma+2; x), \end{aligned} \quad (3.117)$$

као и одговарајућу рекурентну релацију за конфлуентну хипергеометријску функцију

$$(\alpha+1)x {}_1F_1(\alpha+2; \gamma+2; x) + (\gamma+1)(\gamma-x) {}_1F_1(\alpha+1; \gamma+1; x) = \gamma(\gamma+1) {}_1F_1(\alpha; \gamma; x). \quad (3.118)$$

**Пример 3.11.** Испитати важење формула диференцирања и рекурентну релацију у случају функције  ${}_1F_1(1; 1; x) = e^x$ .

**Решење.** Заиста, на основу дефиниције дегенерисане хипергеометријске функције

$${}_1F_1(1; 1; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n}{n!(1)_n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x. \quad (3.119)$$

Одатле је

$$\frac{d}{dx} {}_1F_1(1; 1; x) = {}_1F_1(2; 2; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2)_n}{n!(2)_n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x, \quad (3.120)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} {}_1F_1(1; 1; x) = {}_1F_1(3; 3; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3)_n}{n!(3)_n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x. \quad (3.121)$$

Рекурентна релација (3.118) за  $\alpha = \gamma = 1$  постаје

$$2x {}_1F_1(3; 3; x) + 2(1-x) {}_1F_1(2; 2; x) = 2 {}_1F_1(1; 1; x). \quad (3.122)$$

Како су све три функције једнаке  $e^x$ , добијамо

$$2xe^x + 2(1-x)e^x = 2e^x, \quad (3.123)$$

што је очигледно тачно. ■

**Пример 3.12.** Испитати важење рекурентне релације (3.118) у случају Лагерових полинома  $L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}) = n! {}_1F_1(-n; 1; x)$ .

**Решење.** Применом формуле диференцирања (3.116) на конфлуентну хипергеометријску функцију  ${}_1F_1(-n; 1; x)$ , за  $\alpha = -n$ ,  $\gamma = 1$ , добија се

$$\frac{d}{dx} {}_1F_1(-n; 1; x) = -n {}_1F_1(1-n; 2; x). \quad (3.124)$$

Слично, коришћење (3.117) даје

$$\frac{d^2}{dx^2} {}_1F_1(-n; 1; x) = \frac{n(n-1)}{2} {}_1F_1(2-n; 3; x). \quad (3.125)$$

Рекурентна релација (3.118) у овом случају добија облик

$$(1-n)x {}_1F_1(2-n; 3; x) + 2(1-x) {}_1F_1(1-n; 2; x) = 2 {}_1F_1(-n; 1; x), \quad (3.126)$$

и након множења рекурентне релације са  $n!$  добијамо Лагерову диференцијалну једначину

$$x \frac{d^2 L_n}{dx^2} + (1-x) \frac{dL_n}{dx} + nL_n(x) = 0. \quad (3.127)$$

■

### 3.3.1 Суседне хипергеометријске функције

Хипергеометријске функције које имају исту независно променљиву  $x$ , а чији се један параметар разликује за јединицу, док су остали једнаки, називају се суседним хипергеометријским функцијама. На пример, за Гаусову хипергеометријску функцију  ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$  постоји шест суседних функција

$${}_2F_1(\alpha \pm 1, \beta; \gamma; x), \quad {}_2F_1(\alpha, \beta \pm 1; \gamma; x), \quad {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma \pm 1; x). \quad (3.128)$$

Између суседних функција се такође могу упоставити рекурентне релације. Пођимо од хипергеометријске функције

$${}_2F_1(\alpha + 1, \beta; \gamma; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1)_{\nu}(\beta)_{\nu}}{\nu!(\gamma)_{\nu}} x^{\nu} \quad (3.129)$$

и искористимо идентитет за Похамеров симбол

$$(\alpha + 1)_{\nu} = (\alpha + 1) \dots (\alpha + \nu) = \frac{\alpha + \nu}{\alpha} (\alpha)_{\nu}. \quad (3.130)$$

Заменом у ред добијамо

$${}_2F_1(\alpha + 1, \beta; \gamma; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha + \nu}{\alpha} \frac{(\alpha)_{\nu}(\beta)_{\nu}}{\nu!(\gamma)_{\nu}} x^{\nu}, \quad (3.131)$$

односно

$$\alpha {}_2F_1(\alpha + 1, \beta; \gamma; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\alpha + \nu) \frac{(\alpha)_{\nu}(\beta)_{\nu}}{\nu!(\gamma)_{\nu}} x^{\nu}. \quad (3.132)$$

На исти начин се долази до

$${}_2F_1(\alpha, \beta + 1; \gamma; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu}(\beta + 1)_{\nu}}{\nu!(\gamma)_{\nu}} x^{\nu}, \quad (3.133)$$

и коришћењем

$$(\beta + 1)_{\nu} = \frac{\beta + \nu}{\beta} (\beta)_{\nu}, \quad (3.134)$$

следи

$$\beta {}_2F_1(\alpha, \beta + 1; \gamma; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} (\beta + \nu) \frac{(\alpha)_{\nu}(\beta)_{\nu}}{\nu!(\gamma)_{\nu}} x^{\nu}. \quad (3.135)$$

Одужимањем (3.135) од (3.132) налазимо

$$\begin{aligned} & \alpha {}_2F_1(\alpha + 1, \beta; \gamma; x) - \beta {}_2F_1(\alpha, \beta + 1; \gamma; x) \\ &= \sum_{\nu=0}^{\infty} [(\alpha + \nu) - (\beta + \nu)] \frac{(\alpha)_{\nu}(\beta)_{\nu}}{\nu!(\gamma)_{\nu}} x^{\nu} \\ &= (\alpha - \beta) \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu}(\beta)_{\nu}}{\nu!(\gamma)_{\nu}} x^{\nu}. \end{aligned} \quad (3.136)$$

Према томе, коначно добијамо

$$\alpha {}_2F_1(\alpha + 1, \beta; \gamma; x) - \beta {}_2F_1(\alpha, \beta + 1; \gamma; x) = (\alpha - \beta) {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x). \quad (3.137)$$

Ово је једна рекурентна релација за суседне Гаусове хипергеометријске функције, а има их чак  $\binom{6}{2} = 15$  [Игњатовић, С. (2015)] и Гаус их је све пронашао за живота. У теорији хипергеометријских функција испитују се и везе између  ${}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$  и  ${}_2F_1(\alpha + l_1, \beta + l_2; \gamma + l_3; x)$ , где  $l_1, l_2, l_3 \in \mathbb{Z}$  [Aomoto, K. Kita, M. (2011)].

**Пример 3.13.** Знајући да се Лежандрови полиноми могу изразити преко Гаусове хипергеометријске функције

$$P_n(x) = {}_2F_1\left(-n, n + 1; 1; \frac{1-x}{2}\right), \quad (3.138)$$

применом рекурентних релација (3.137) и (3.99) на хипергеометријску функцију  ${}_2F_1(-n, n + 1; 1; \frac{1-x}{2})$  може се извести рекурентна релација за Лежандрове полиноме

$$(n + 1)P_{n+1}(x) = (2n + 1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x). \quad (3.139)$$

■

За конфлуентну хипергеометријску функцију  ${}_1F_1(\alpha; \gamma; x)$  постоје четири суседне функције

$${}_1F_1(\alpha \pm 1; \gamma; x), \quad {}_1F_1(\alpha; \gamma \pm 1; x). \quad (3.140)$$

Полазимо од развоја

$${}_1F_1(\alpha + 1; \gamma; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1)_{\nu} x^{\nu}}{(\gamma)_{\nu} \nu!}. \quad (3.141)$$

Како важи

$$(\alpha + 1)_{\nu} = \frac{\alpha + \nu}{\alpha} (\alpha)_{\nu}, \quad (3.142)$$

имамо

$${}_1F_1(\alpha + 1; \gamma; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha + \nu}{\alpha} \frac{(\alpha)_{\nu} x^{\nu}}{(\gamma)_{\nu} \nu!}. \quad (3.143)$$

Одатле следи

$${}_1F_1(\alpha + 1; \gamma; x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_{\nu} x^{\nu}}{(\gamma)_{\nu} \nu!} + \frac{1}{\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu \frac{(\alpha)_{\nu} x^{\nu}}{(\gamma)_{\nu} \nu!}. \quad (3.144)$$

Прва сума на десној страни једнакости је једнака

$${}_1F_1(\alpha; \gamma; x). \quad (3.145)$$

За другу суму користимо

$$(\alpha)_\nu = \alpha(\alpha + 1)_{\nu-1}, \quad \nu \geq 1, \quad (3.146)$$

и добијамо

$$\frac{1}{\alpha} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \frac{(\alpha)_\nu x^\nu}{(\gamma)_\nu \nu!} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\alpha + 1)_{\nu-1}}{(\gamma)_\nu} \frac{x^\nu}{(\nu - 1)!}. \quad (3.147)$$

Ако ставимо  $n = \nu - 1$ , следи

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(\alpha + 1)_{\nu-1}}{(\gamma)_\nu} \frac{x^\nu}{(\nu - 1)!} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1)_n x^n}{(\gamma)_{n+1} n!}. \quad (3.148)$$

Пошто је

$$(\gamma)_{n+1} = \gamma(\gamma + 1)_n, \quad (3.149)$$

добијамо

$$x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1)_n x^n}{(\gamma)_{n+1} n!} = \frac{x}{\gamma} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha + 1)_n x^n}{(\gamma + 1)_n n!} = \frac{x}{\gamma} {}_1F_1(\alpha + 1; \gamma + 1; x). \quad (3.150)$$

Према томе, долазимо до

$${}_1F_1(\alpha + 1; \gamma; x) = {}_1F_1(\alpha; \gamma; x) + \frac{x}{\gamma} {}_1F_1(\alpha + 1; \gamma + 1; x). \quad (3.151)$$

Ово је једна рекурентна релација за суседне конфлуентне хипергеометријске функције, а има их чак  $\binom{4}{2} = 6$  [Игњатовић, С. (2015)].

### 3.3.2 Везе неких елементарних и специјалних функција са хипергеометријским

За крај овог одељка наводимо релације које повезују функције које се често срећу у физици са њиховим репрезентацијама помоћу хипергеометријских функција. Одређен број релација је показан кроз примере, а остале се могу добити сличним путем.

Табела 3.1: Неке елементарне и специјалне функције изражене помоћу хипергеометријских функција

Име функције	Ознака	Хипергеометријска функција
Степена функција	$x^n$	$x^n {}_0F_0(-; -; 0)$
Експоненцијална функција	$e^x$	${}_0F_0(-; -; x)$
Природни логаритам	$\ln x$	$(x-1) {}_2F_1(1, 1; 2; 1-x)$
Синус	$\sin x$	$x {}_0F_1\left(-; \frac{3}{2}; -\frac{x^2}{4}\right)$
Косинус	$\cos x$	${}_0F_1\left(-; \frac{1}{2}; -\frac{x^2}{4}\right)$
Хиперболички синус	$\operatorname{sh} x$	$x {}_0F_1\left(-; \frac{3}{2}; \frac{x^2}{4}\right)$
Хиперболички косинус	$\operatorname{ch} x$	${}_0F_1\left(-; \frac{1}{2}; \frac{x^2}{4}\right)$
Аркус синус	$\arcsin x$	$x {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right)$
Аркус тангенс	$\arctan x$	$x {}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right)$
Функција грешке	$\operatorname{erf} x$	$\frac{2x}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right)$
Беселова функција прве врсте	$J_\nu(x)$	$\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1\left(-; \nu+1; -\frac{x^2}{4}\right)$
Лежандров полином	$P_n(x)$	${}_2F_1\left(-n, n+1; 1; \frac{1-x}{2}\right)$
Чебишевљево полином	$T_n(x)$	${}_2F_1\left(-n, n; \frac{1}{2}; \frac{1-x}{2}\right)$
Лагеров полином	$L_n(x)$	$n! {}_1F_1(-n; 1; x)$
Ермитов полином	$H_n(x)$	$(2x)^n {}_2F_0\left(\frac{1-n}{2}, -\frac{n}{2}; -; -\frac{1}{x^2}\right)$

## 4

# Основе теорије група и симетрија са применама у физици

Значај теорије симетрија и група за савремену физику је заиста тешко преувеличати. У практично свим областима истраживања, почевши од физике кондензоване материје па све до физике елементарних честица и космологије, анализа физичких појава се све више заснива на језику теорије група. Један од разлога за то може бити што се у физици разматрају све компликованији математички модели, а њихово разумевање је знатно олакшано ако се идентификују различите инваријанте које разматрани систем поседује. Инсистирање на значају инваријанти као основних одлика резултује ситуацијом да се неки модели истовремено користе у физици елементарних честица и физици кондензованог стања. Рецимо, нелинеарни  $\sigma$  модел се појављује у различитим теоријама које описују феномене везане за спонтано нарушење симетрије. Поред геометријских симетрија, које имају велику примену у кристалографији, или неких других апстрактних симетрија математичких модела, од великог значаја су и симетрије самих физичких закона (неки од текстова који јасно указују на значај симетрија у различитим областима савремене физике су [Фајнман, Р. (1999); Тарасов, Л. В. (2008); Хибш, Т. (2011); Дамњановић, М. (2000)]).

**Дефиниција 4.1.** Група је уређени пар скупа  $G$  и бинарне операције  $*$ , у ознаци  $(G, *)$ , тако да су задовољене следеће особине:

1. Затвореност:  $\forall a, b \in G, a * b \in G$ . (Алгебарска структура са овом особином се назива групоид.)
2. Асоцијативност:  $\forall a, b, c \in G, (a * b) * c = a * (b * c)$ . (Асоцијативни групоид се назива полугрупа.)
3. Постојање неутралног елемента:  $\exists e \in G$  тако да је  $\forall a \in G, e * a = a * e = a$ . Неутрални елемент је јединствен. (Полугрупа са неутралним елементом назива се моноид.)
4. Постојање инверзног елемента:  $\forall a \in G, \exists a^{-1} \in G$ , тако да је  $a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$ .

Специјално, ако за бинарну операцију важи особина комутативности:  $\forall a, b \in G, a * b = b * a$ , каже се да је група комутативна (Абелова).

У овој дефиницији за операцију је коришћена ознака  $*$  како бисмо нагласили да је у питању ма каква бинарна операција. У физици се за бинарну операцију најчешће користи ознака " $\cdot$ " коју углавном зовемо композиција, те ћемо у даљем тексту користити ту ознаку. Операција  $\cdot$  може бити множење бројева, множење матрица или нека потпуно апстрактна бинарна операција. За примене у физици од највећег значаја су композиције симетријских операција попут рефлексија, ротација или транслација. Према скупу (тзв. носачу групе), групе делимо на коначне и бесконачне. Коначне групе су оне које имају коначан број елемената. Наведимо неколико примера коначних и бесконачних група:

**Пример 4.1.** Група  $(\{-1, 1\}, \cdot)$  је коначна група која се састоји од два елемента  $-1$  и  $1$ , а бинарна операција је множење. Неутрални елемент за множење је  $1$ . Лако се може проверити да овај скуп задовољава све аксиоме групе наведене у Дефиницији 4.1. Пошто је очигледно да је бинарна операција у овом случају комутативна, група  $(\{-1, 1\}, \cdot)$  је Абелова. ■

**Пример 4.2.** Група  $(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$  или скраћено  $(\{\pm 1, \pm i\}, \cdot)$  је Абелова група од четири елемента. ■

**Пример 4.3.** Група  $(\mathbb{R}, +)$ , где  $\mathbb{R}$  представља скуп реалних бројева, а  $+$  је операција сабирања, бесконачна је група. Неутрални елемент у овом случају је  $0$ . Ово је такође Абелова група. ■

**Пример 4.4.** Група  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  је такође бесконачна Абелова група. Неутрални елемент за множење је  $1$ , као у Примерима 4.1 и 4.2. Приметите да би  $(\mathbb{R}, \cdot)$  био моноид, јер не постоји инверзни елемент за елемент  $0$ , односно не постоји  $a \in \mathbb{R}$  тако да је  $0 \cdot a = a \cdot 0 = 1$ . ■

**Тврђење 4.1.** У свакој групи  $(G, \cdot)$  важе закони скраћивања, односно  $\forall g, g_i, g_j \in G$  имамо:

$$g \cdot g_i = g \cdot g_j \Rightarrow g_i = g_j,$$

$$g_i \cdot g = g_j \cdot g \Rightarrow g_i = g_j.$$

*Доказ.* Једнакост  $g \cdot g_i = g \cdot g_j$  множимо са  $g^{-1}$  са леве стране. Одатле добијамо  $g_i = g_j$ . На сличан начин једнакост  $g_i \cdot g = g_j \cdot g$  множимо са десне стране са  $g^{-1}$ , одакле добијамо  $g_i = g_j$ . ■

**Тврђење 4.2.** У свакој групи  $(G, \cdot)$  важи  $(g_i \cdot g_j)^{-1} = g_j^{-1} \cdot g_i^{-1}$ ,  $\forall g_i, g_j \in G$ .

*Доказ.* Инверзни елемент елемента  $g_i \cdot g_j$  је онај који задовољава  $(g_i \cdot g_j) \cdot (g_i \cdot g_j)^{-1} = e$ . Проверимо да ли је  $g_j^{-1} \cdot g_i^{-1}$  инверзни елемент елемента  $g_i \cdot g_j$ . Применом асоцијативности је

$$g_i \cdot g_j \cdot g_j^{-1} \cdot g_i^{-1} = g_i \cdot (g_j \cdot g_j^{-1}) \cdot g_i^{-1} = g_i \cdot g_i^{-1} = e, \quad (4.1)$$

као и

$$g_j^{-1} \cdot g_i^{-1} \cdot g_i \cdot g_j = g_j^{-1} \cdot (g_i^{-1} \cdot g_i) \cdot g_j = g_j^{-1} \cdot g_j = e. \quad (4.2)$$

■

Табела 4.1: Таблица неке коначне групе  $(G, \cdot)$ 

$\cdot$	$e$	$g_1$	$g_2$	$\dots$	$g_m$	$\dots$
$e$						
$g_1$						
$g_2$						
$\vdots$						
$g_n$					$g_n \cdot g_m$	
$\vdots$						

**Дефиниција 4.2.** Ред групе  $(G, \cdot)$ , у ознаци  $|G|$ , је кардинални број<sup>1</sup> скупа  $G$ .

## 4.1 Коначне групе

Сконцентришимо се сада на коначне групе. У случају коначних група (тј. када скуп  $G$  има коначан број елемената  $|G| = n$ ) група може бити представљена у виду  $n \times n$  таблице коју зовемо Кејлијева таблица (видети Табелу 4.1). У Табели 4.2 је дат пример за групу са 6 елемената. У свакој врсти и свакој колони сваки елемент групе се појављује тачно једном. Алгебарска структура која се може представити оваквом таблицом се назива квазигрупа [Shcherbacov, V. (2017)].

**Дефиниција 4.3.** Групоид  $(G, \cdot)$  назива се квазигрупом ако и само ако (акко) за уређени пар  $(g_1, g_2) \in G \times G$  постоје јединствена решења  $x, y \in G$  једначина  $x \cdot g_1 = g_2$  и  $g_1 \cdot y = g_2$ .

Један од тежих услова за проверавање да ли је нека структура група у случају коначних група је асоцијативност, јер се мора проверавати за све комбинације од по три елемента.

**Тврђење 4.3.** Алгебарска структура која је истовремено полугрупа (асоцијативни групоид) и квазигрупа уједно је и група.

Може се десити да у случају групе  $(G, \cdot)$  постоји подскуп скупа  $G$ , у ознаци  $H \subseteq G$ , који у односу на исту операцију  $\cdot$  сачињава групу  $(H, \cdot)$ . Тада се каже да је  $H$  подгрупа од  $G$  и важи тврђење:

**Тврђење 4.4.** (Лагранжева теорема) Ред подгрупе  $|H|$  дели ред групе  $|G|$ .

<sup>1</sup>Кажемо да скупови  $A$  и  $B$  имају исти кардинални број ако и само ако постоји бијекција између  $A$  и  $B$ . Кардинални број ма ког коначног скупа је број елемената тог скупа. Кардинални број скупа природних бројева означавамо са  $\aleph_0$  и пишемо  $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ , док кардинални број скупа реалних бројева означавамо са  $\mathfrak{c}$  и пишемо  $|\mathbb{R}| = \mathfrak{c}$ . За сваки скуп који има кардинални број  $\aleph_0$  кажемо да је пребројив, док за сваки скуп који има исти кардинални број као  $\mathbb{R}$  кажемо да је кардиналности континуума. За бесконачан скуп који није пребројив кажемо да је непребројив. На пример, знамо да је  $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$ , а  $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = \mathfrak{c}$ .

Табела 4.2: Пример Кејлијеве таблице

$\cdot$	$e$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$
$e$	$e$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$
$g_1$	$g_1$	$e$	$g_4$	$g_5$	$g_2$	$g_3$
$g_2$	$g_2$	$g_5$	$e$	$g_4$	$g_3$	$g_1$
$g_3$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$e$	$g_1$	$g_2$
$g_4$	$g_4$	$g_3$	$g_1$	$g_2$	$g_5$	$e$
$g_5$	$g_5$	$g_2$	$g_3$	$g_1$	$e$	$g_4$

*Доказ.* Да би  $(H, \cdot)$  била подгрупа групе  $(G, \cdot)$  у скупу  $H$  се мора налазити неутрални елемент  $e$  групе  $(G, \cdot)$ . Изаберимо елемент  $g_1$  који се налази у  $G$ , а не налази се у  $H$ . Формирајмо скуп  $g_1H = \{g_1 \cdot h | h \in H\}$ . Скуп  $g_1H$  зовемо леви косет, зато што елементе  $H$  množимо са  $g_1$  са леве стране (видети Слику 4.1). Треба показати да скупови  $H$  и  $g_1H$  немају заједничких елемената. Претпоставимо супротно да је  $g_1 \cdot h_i = h_j$ , где  $h_i, h_j \in H$ . Одатле је  $(g_1 \cdot h_i) \cdot h_i^{-1} = h_j \cdot h_i^{-1}$ . Како је  $(H, \cdot)$  подгрупа групе  $(G, \cdot)$  знамо да  $h_j \cdot h_i^{-1} \in H$  (затвореност). На основу тога добијамо да и  $g_1 \in H$ , што је контрадикција. Одатле следи да скупови  $H$  и  $g_1H$  немају заједничких елемената. Настављамо са овим поступком док год постоје елементи који не припадају ни скупу  $H$  ни скупу  $g_1H$ . Нека је такав елемент  $g_2$ . Формирајмо леви косет  $g_2H = \{g_2 \cdot h | h \in H\}$ . На аналоган начин као и за  $g_1H$  доказује се да  $H$  и  $g_2H$  немају заједничких елемената. Уверимо се, претпостављајући супротно, да и  $g_1H$  и  $g_2H$  немају заједничких елемената. Претпоставимо да за неке  $h_i, h_j \in H$  важи  $g_1 \cdot h_i = g_2 \cdot h_j$ . Одатле је  $(g_1 \cdot h_i) \cdot h_j^{-1} = g_2$ , односно добијамо контрадикцију да  $g_2 \in g_1H$ . Одатле следи да  $g_1H$  и  $g_2H$  немају заједничких елемената. Настављајући са овим поступком у случају већих коначних група долазимо до косета  $g_1H, g_2H, \dots, g_nH$ . Оно што још треба доказати је да у сваком од ових косета има исто елемената као у  $H$ . Изаберимо косет  $gH$  и претпоставимо да има дупликате, односно да је  $g \cdot h_i = g \cdot h_j$  за  $h_i$  различито од  $h_j$ . Множећи ову једнакост са  $g^{-1}$  са леве стране добијамо  $h_i = h_j$ , што је контрадикција. Одатле сви косети имају исто елемената као и скуп  $H$ . ■

За сваку групу  $(G, \cdot)$  очигледно увек постоје две (тривијалне) подгрупе: сама група  $(G, \cdot)$  и  $(\{e\}, \cdot)$ , где је  $e$  неутрални елемент. Остале подгрупе зову се праве подгрупе. Поред појма ред групе уводи се и појам реда елемента групе. Да бисмо дефинисали овај појам, најпре треба дефинисати степен елемента групе.

**Дефиниција 4.4.** За свако  $g \in G$  дефинишемо степен елемента групе  $g^1 = g$ ,  $g^0 = e$ ,  $g^{n+1} = g \cdot g^n$ , те  $g^{-n} = (g^{-1})^n$  за свако  $n \in \mathbb{N}$ .

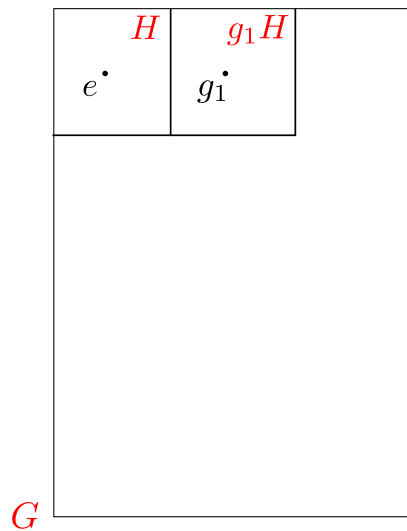
**Тврђење 4.5.** За степеновање важе уобичајена правила

$$g^m \cdot g^k = g^{m+k},$$

$$(g^m)^k = g^{mk},$$

где  $m, k \in \mathbb{Z}$ .

**Дефиниција 4.5.** Нека је  $g$  елемент групе  $(G, \cdot)$ . Кажемо да је  $m$  ред елемента  $g$  групе ако је  $m$  најмањи природан број за који важи  $g^m = e$ .

Слика 4.1: Визуелни приказ групе  $G$ , подгрупе  $H$  и левог косета  $g_1H$ .

**Пример 4.5.** Показати да група мора бити Абелова ако је ред сваког елемента групе, изузев неутралног елемента, 2.

**Решење.** *Први начин:* Посматрајмо два произвољна елемента групе  $G$ ,  $g_1, g_2 \in G$ . Како мора важити затвореност скупа у односу на операцију, важи  $g_1 \cdot g_2 = g_3$ , за неко  $g_3 \in G$ . Међутим, из услова задатка је ред сваког елемента 2 па је  $g_1^2 = g_2^2 = g_3^2 = e$ . Дакле,

$$g_3 \cdot g_2 = g_1 \cdot g_2 \cdot g_2 = g_1 \cdot g_2^2 = g_1. \quad (4.3)$$

Из (4.3) следи

$$g_3 \cdot g_1 = g_3 \cdot g_3 \cdot g_2 = g_3^2 \cdot g_2 = g_2. \quad (4.4)$$

Коначно, помоћу (4.4) налазимо

$$g_2 \cdot g_1 = g_3 \cdot g_1 \cdot g_1 = g_3. \quad (4.5)$$

Како су  $g_1, g_2, g_3$  произвољни елементи групе, а претпоставили смо да је  $g_1 \cdot g_2 = g_3$ , следи да је група  $(G, \cdot)$  Абелова.

*Други начин:* Како су сви елементи сем неутралног  $e$  другог реда, онда важи за произвољне елементе  $g_1, g_2 \in G$

$$(g_1 \cdot g_2)^2 = g_1 \cdot g_2 \cdot g_1 \cdot g_2 = e. \quad (4.6)$$

Одатле је

$$g_1^2 \cdot g_2 \cdot g_1 \cdot g_2^2 = g_1 \cdot g_2, \quad (4.7)$$

односно  $g_2 \cdot g_1 = g_1 \cdot g_2$ . ■

Од посебног значаја су групе где се степеновањем једног елемента могу добити сви елементи групе.

### 4.1.1 Цикличне групе

**Дефиниција 4.6.** Ако је  $G = \langle g \rangle = \{g^k | k \in \mathbb{Z}\}$  тада групу  $G$  зовемо цикличном групом, а елемент  $g$  генератором групе  $G$ .

Адитивна група  $(\mathbb{Z}, +)$  је стога бесконачна циклична група. Генератор  $g \in \mathbb{Z}$  је у том случају дефинисан са  $\langle g \rangle = \{kg | k \in \mathbb{Z}\}$ . Према томе, имамо два генератора<sup>2</sup> цикличне групе  $(\mathbb{Z}, +)$ , а то су 1 и  $-1$ .

Међу коначним цикличним групама тривијална је  $C_1$  и она садржи само неутрални елемент  $e$ . Циклична група са два елемента,  $C_2$  група, садржи поред неутралног елемента  $e$  и један елемент другог реда  $g$ .

**Тврђење 4.6.** Свака циклична група је Абелова.

*Доказ.* На основу Дефиниције 4.6 произвољна два елемента цикличне групе  $(G, \cdot)$ ,  $a$  и  $b$ , могу да буду изражена помоћу елемента  $g$ , којим је циклична група генерисана као  $a = g^n$ ,  $b = g^m$ , где  $m, n \in \mathbb{Z}$ . Одатле је  $a \cdot b = g^n \cdot g^m = g^{n+m}$ , док је  $b \cdot a = g^m \cdot g^n = g^{n+m}$ . Како су  $a$  и  $b$  два произвољно одабрана елемента групе  $(G, \cdot)$ , она је комутативна. ■

**Тврђење 4.7.** Ако је ред групе прост број, она је циклична.

*Доказ.* Нека је група  $(G, \cdot)$  реда  $p$ , где је  $p$  прост број. Како је  $p > 1$ , група садржи елемент  $a \neq e$ , где је  $e$  неутрални елемент. Нека је  $\langle a \rangle = \{a^m | m \in \mathbb{Z}\}$  подгрупа групе  $G$ . На основу Лагранжеве теореме  $|\langle a \rangle| |p$ . Како је  $p$  прост број, његови једини позитивни делитељи су 1 и  $p$ . Како је  $a \neq e$ , онда је  $|\langle a \rangle| = p$ , па је група циклична. ■

**Пример 4.6.** Доказати да је ма која права подгрупа групе реда 185 Абелова.

**Решење.** На основу Лагранжеве теореме следи да ма која нетривијална подгрупа мора имати ред који дели ред групе. Пошто је  $185 = 37 \cdot 5$ , а 37 и 5 прости бројеви, следи да је  $|H|$  прост број. Ако је ред групе прост број она је циклична, а свака циклична група је Абелова (видети Тврђења 4.6 и 4.7). ■

### 4.1.2 Директни производ група

**Дефиниција 4.7.** Нека су дате две групе  $(G, *)$  и  $(G', \bullet)$ . Директни производ група  $(G \times G', \cdot)$  дефинишемо са

$$(g_i, g'_i) \cdot (g_j, g'_j) = (g_i * g_j, g'_i \bullet g'_j), \quad \forall g_i, g_j \in G, \forall g'_i, g'_j \in G'.$$

На овај начин је дефинисана нова група чији је неутрални елемент  $(e, e')$ , док је инверзни елемент дефинисан са  $(g, g')^{-1} = (g^{-1}, g'^{-1})$ . При томе, лако се проверава да важи  $|G \times G'| = |G| |G'|$ .

### 4.1.3 Хомоморфизам и изоморфизам група

Уз наведене дефиниције везане за теорију група природно се уводе и одређене врсте пресликавања између различитих група. Слично као и у теорији векторских простора, дефинишемо хомоморфизам и изоморфизам.

<sup>2</sup>Било који од два генератора је довољан да се изгенерише група  $(\mathbb{Z}, +)$ .

**Дефиниција 4.8.** Нека су  $(G, *)$  и  $(G', \spadesuit)$  групе. Пресликавање  $f : G \rightarrow G'$  за које важи

$$(\forall g_1, g_2 \in G), f(g_1 * g_2) = f(g_1) \spadesuit f(g_2) \quad (4.8)$$

назива се хомоморфизам. Специјално, ако је  $f$  и бијекција, поменуто пресликавање се назива изоморфизам. Ако су  $(G, *)$  и  $(G', \spadesuit)$  изоморфне групе, пишемо  $G \cong G'$ .

**Пример 4.7.** Циклична група  $C_2$  изоморфна је са групама

$$(\{1, -1\}, \cdot), \quad \left( \left( \left\{ \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \cdot \right), \left( \left( \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \cdot \right) \right).$$

Такође је изоморфна групи симетрија хамилтонијана квантног линеарног хармонијског осцилатора  $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ . Група симетрија хамилтонијана квантног линеарног хармонијског осцилатора је  $(\{P, e\}, \cdot)$ , где је  $P$  оператор парности  $Px = -x$ , а  $e$  неутрални елемент (видети [Hassani, S. (2013)]). Све цикличне групе истог реда су изоморфне<sup>3</sup>. ■

За практичне примене од интереса је испитати да ли су две групе, задате одговарајућим Кејлијевим таблицама или генераторским релацијама, изоморфне. Одговор на ово питање у неким случајевима даје следеће тврђење:

**Тврђење 4.8.** Потребан услов да би две групе  $(G, *)$  и  $(G', \spadesuit)$  биле изоморфне је да важе следећа три услова:

1. Носачи група морају имати исти кардинални број  $|G| = |G'|$  (у случају коначних група ово значи да морају имати исти број елемената).
2. Ако је  $(G, *)$  Абелова група, и  $(G', \spadesuit)$  мора бити Абелова група и обрнуто.
3. Групе морају имати исти број елемената истог реда.

Ако су групе Абелове ово је и довољан услов. Такође, за све групе реда  $|G| < 16$  ово је и довољан услов<sup>4</sup>.

#### 4.1.4 Групе четвртог реда

До на изоморфизам имамо по једну групу првог, другог и трећег реда и то су све цикличне групе. Уверимо се да постоје, до на изоморфизам, две групе четвртог реда.

**Тврђење 4.9.** Постоје, до на изоморфизам, две групе четвртог реда.

*Доказ.* Нека се носач групе састоји од елемената  $\{e, a, b, c\}$ . Кренимо са попуњавањем Кејлијеве таблице.

<sup>3</sup>Све бесконачне цикличне групе изоморфне су са  $(\mathbb{Z}, +)$ .

<sup>4</sup>Постоји, до на изоморфизам, 14 група реда 16. Две групе реда 16,  $G_1 = Q_8 \times C_2$  (где је  $Q_8$  група кватерниона, а  $C_2$  циклична група реда 2) и група  $G_2$  дефинисана релацијама  $a^4 = b^4 = e$ ,  $aba = b$  нису изоморфне, иако обе нису Абелове и имају исти број елемената истог реда, јер имају различиту структуру центара групе [Wild, M.I (2005)].

Табела 4.3

·	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$			
$b$	$b$			
$c$	$c$			

Табела 4.4

·	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$e$	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$		
$c$	$c$	$b$		

Табела 4.5

·	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$e$	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$	$e$	$a$
$c$	$c$	$b$	$a$	$e$

Табела 4.6

·	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$e$	$c$	$b$
$b$	$b$	$c$	$a$	$e$
$c$	$c$	$b$	$e$	$a$

Дошли смо до члана  $a^2 = a \cdot a$  (видети Табелу 4.3). Имамо три могућности које треба да размотримо:  $a^2 = e$ ,  $a^2 = b$  и  $a^2 = c$ . Приметимо да се случајеви  $a^2 = b$  и  $a^2 = c$  не разликују, јер можемо да преименујемо  $b$  у  $c$ , односно  $c$  у  $b$ . Тако се разматрање своди на два случаја:  $a^2 = e$  и  $a^2 = b$ . Размотримо прво случај  $a^2 = e$  и сходно томе наставимо попуњавање Кејлијеве таблице на основу судоку правила (видети Табелу 4.4).

Сада се налазимо на новој раскрсници, јер  $b^2$  може да буде  $e$ , а може да буде и елемент  $a$ . Прво ћемо написати Кејлијеву таблицу за  $b^2 = e$  (видети Табелу 4.5). У случају  $b^2 = a$  Кејлијева таблица је дата у Табели 4.6. Како је у том случају елемент  $b$  четвртог реда, групе репрезентоване Кејлијевим таблицама Табела 4.5 и Табела 4.6 нису изоморфне. Прва од њих је такозвана Клајнова група  $V_4$ , док је друга циклична група  $C_4$ .

Остало је још да изанализирамо случај  $a^2 = b$  и да проверимо да ли добијемо нову групу која није изоморфна ни са Клајновом ни са цикличном групом. Попуњавањем Кејлијеве таблице долазимо до Табеле 4.7. Ако у последњој Кејлијевој таблицу само променимо редослед елемената добијемо Табелу 4.8. У Табели 4.8 преименовањем  $a$  у  $b$  и  $b$  у  $a$  добија се Табела 4.6. Тако да је дата група изоморфна са цикличном групом. На овој начин смо доказали да постоје само две групе четвртог реда, Клајнова група  $V_4$  (Табела 4.5) и циклична група  $C_4$  (Табела 4.6). ■

**Пример 4.8.** Написати Кејлијеву таблицу групе симетрија шаховске табле.

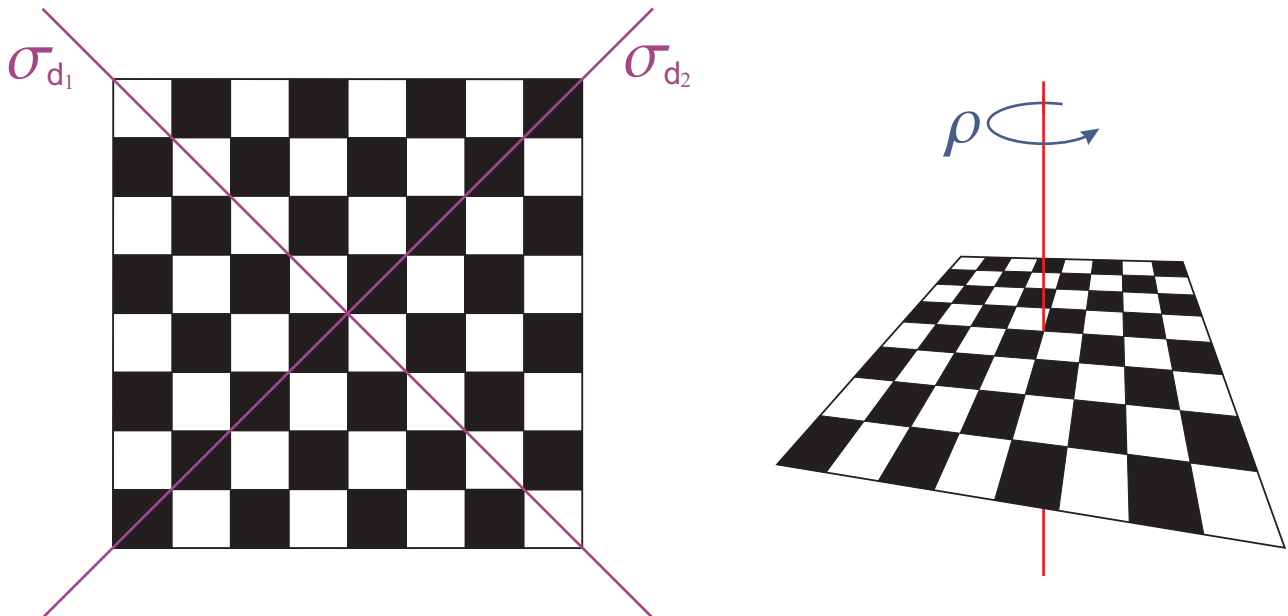
**Решење.** На Слици 4.2 је приказана шаховска табла са одговарајућим симетријским трансформацијама. Будући да на њој постоје црна и бела поља, група симетрија шаховске табле је мања од групе симетрија квадрата (видети Пример 4.12). Као и код празног квадрата, елементи симетрије шаховске табле су рефлексije у односу на две дијагонале ( $\sigma_{d_1}$  и  $\sigma_{d_2}$ ). Такође, шаховска табла је симетрична у односу на ротацију за  $\pi$  око осе која пролази нормално кроз центар табле. Овај елемент ћемо означити са  $\rho$ .

Табела 4.7

$\cdot$	$e$	$a$	$b$	$c$
$e$	$e$	$a$	$b$	$c$
$a$	$a$	$b$	$c$	$e$
$b$	$b$	$c$	$e$	$a$
$c$	$c$	$e$	$a$	$b$

Табела 4.8

$\cdot$	$e$	$b$	$a$	$c$
$e$	$e$	$b$	$a$	$c$
$b$	$b$	$e$	$c$	$a$
$a$	$a$	$c$	$b$	$e$
$c$	$c$	$a$	$e$	$b$



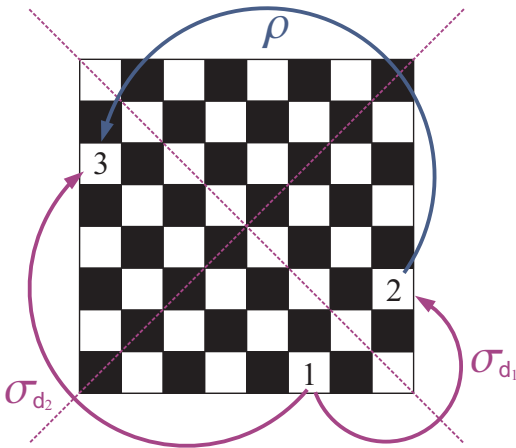
Слика 4.2: Операције симетрије шаховске табле.

Како бисмо одредили таблицу композиције, посматрајмо поље означено са 1 на Слици 4.3. Рефлексија  $\sigma_{d_1}$  преводи ово поље у поље означено са 2, тј.  $\sigma_{d_1}(1) = 2$ . Даље, ротација  $\rho$  преводи поље бр. 2 у поље бр. 3 ( $\rho(2) = 3$ ). Међутим, лако се види да важи  $3 = \sigma_{d_2}(1)$ , одакле наслућујемо везу  $\rho \cdot \sigma_{d_1} = \sigma_{d_2}$ . Наравно да за рачунање да ли је композиција две симетрије трећа симетрија није довољно да се погледа шта се дешава у једној тачки. Ово је само илустрација да видимо како дате симетрије делују. Детаљном провером можемо се уверити да важи да је  $\rho \cdot \sigma_{d_1} = \sigma_{d_2}$ . На сличан начин налазимо и остале композиције елемената симетрије. Према томе, група симетрија шаховске табле је одређена Кејлијевом таблицом представљеном у Табели 4.9. Како је Кејлијева таблица симетрична у односу на главну дијагоналу, група симетрија шаховске табле је Абелова.

НАПОМЕНА: Група симетрија шаховске табле је изоморфна Клајновој групи  $V_4$ . ■

#### 4.1.5 Групе пермутација

Пермутација неког скупа је бијективно пресликавање скупа у самог себе. Пермутације скупа  $\{1, 2, 3\}$  су  $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ ,



Слика 4.3: Примена елемената групе симетрија на шаховску таблу.

Табела 4.9: Таблица групе симетрија шаховске табле

$\cdot$	$e$	$\rho$	$\sigma_{d_1}$	$\sigma_{d_2}$
$e$	$e$	$\rho$	$\sigma_{d_1}$	$\sigma_{d_2}$
$\rho$	$\rho$	$e$	$\sigma_{d_2}$	$\sigma_{d_1}$
$\sigma_{d_1}$	$\sigma_{d_1}$	$\sigma_{d_2}$	$e$	$\rho$
$\sigma_{d_2}$	$\sigma_{d_2}$	$\sigma_{d_1}$	$\rho$	$e$

Табела 4.10: Кејлијева таблица групе  $S_3$

$\cdot$	$e$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$
$e$	$e$	$g_1$	$g_2$	$g_3$	$g_4$	$g_5$
$g_1$	$g_1$	$e$	$g_4$	$g_5$	$g_2$	$g_3$
$g_2$	$g_2$	$g_5$	$e$	$g_4$	$g_3$	$g_1$
$g_3$	$g_3$	$g_4$	$g_5$	$e$	$g_1$	$g_2$
$g_4$	$g_4$	$g_3$	$g_1$	$g_2$	$g_5$	$e$
$g_5$	$g_5$	$g_2$	$g_3$	$g_1$	$e$	$g_4$

$g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  и у односу на узастопну примену (композицију) чине групу<sup>5</sup>, коју означавамо са  $S_3$ . Кејлијева таблица  $S_3$  групе је дата у Табели 4.10.

Множење пермутација дефинише се као узастопна примена двеју пермутација, с тим да се увек прво примењује десна пермутација:

$$g_2 \cdot g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Дакле,  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ,  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ ,  $3 \rightarrow 1 \rightarrow 1$ . Ово је краћи начин записа  $g_2 \cdot g_4(1) = g_2(2) = 3$ ,  $g_2 \cdot g_4(2) = g_2(3) = 2$ ,  $g_2 \cdot g_4(3) = g_2(1) = 1$ . На овај начин смо добили да је  $g_2 \cdot g_4 = g_3$ . Размотримо још један пример:

$$g_4 \cdot g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (4.10)$$

Дакле,  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3$ ,  $2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ ,  $3 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ , односно  $g_4 \cdot g_4 = g_5$ . Понављањем поступка за остале производе у групи комплетирамо Кејлијеву таблицу  $S_3$  групе. Пермутације где се замењују два елемента, а остали остају фиксни зову се транспозиције. У случају

<sup>5</sup>Пермутације скупа  $\{1, 2\}$  су  $e = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  и  $g = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ . Оне такође чине групу  $S_2$  која је изоморфна са групом  $C_2$ . Ова група је садржана у групи  $S_3$  и чине је елементи  $g_1$  и  $e$  у односу на операцију композиције, јер само ова два елемента фиксирају елемент 3 скупа  $\{1, 2, 3\}$  над којим вршимо пермутације.

$S_3$  групе транспозиције су елементи  $g_1, g_2, g_3$ . Кажемо да је пермутација парна, ако је добијена композицијом парног броја транспозиција, у супротном је непарна. Самим тим све транспозиције су непарне пермутације, односно елементи  $g_1, g_2$  и  $g_3$  су непарне пермутације, док су  $e, g_4$  и  $g_5$  парне пермутације. Све транспозиције су по дефиницији елементи другог реда  $g_1^2 = g_2^2 = g_3^2 = e$ , док су  $g_4$  и  $g_5$  елементи трећег реда  $g_4^3 = g_5^3 = e$ . Група  $S_3$  није Абелова, на пример,  $g_1 \cdot g_2 = g_4$ , док је  $g_2 \cdot g_1 = g_5$ . Штавише, ова група је „далеко” од тога да буде Абелова јер је елемент  $e$  једини који комутира са свим елементима групе.

**Пример 4.9.** Наћи подгрупе групе пермутација  $S_3$ .

**Решење.** Тривијалне подгрупе су  $(\{e\}, \cdot)$  и  $S_3$ . Поред њих имамо и подгрупе  $(\{g_1, e\}, \cdot)$ ,  $(\{g_2, e\}, \cdot)$ ,  $(\{g_3, e\}, \cdot)$ ,  $(\{g_4, g_5, e\}, \cdot)$ . Дакле, међу правим подгрупама  $S_3$  групе налазе се три  $C_2$  групе и једна  $C_3$  група. ■

Пермутације играју кључну улогу у дефинисању Леви-Чивита симбола, који је користан за извођење разних идентитета у векторској алгебри, као и при дефинисању комутатора у појединим Лијевим алгебрама [Радошевић, С., Мали, П. (2020)].

**Пример 4.10.** Леви-Чивита симбол<sup>6</sup> или тотално антисиметрични симбол у три димензије је дефинисан са

$$\begin{aligned} \epsilon_{123} &= \epsilon_{231} = \epsilon_{312} = 1 \\ \epsilon_{132} &= \epsilon_{213} = \epsilon_{321} = -1 \\ \text{у свим осталим случајевима} \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma} &= 0, \end{aligned} \tag{4.11}$$

односно

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1, & \text{ако је } (\alpha, \beta, \gamma) \text{ парна пермутација од } (1, 2, 3), \\ -1, & \text{ако је } (\alpha, \beta, \gamma) \text{ непарна пермутација од } (1, 2, 3), \\ 0, & \text{у осталим случајевима.} \end{cases} \tag{4.12}$$

У специјалном случају тродимензионог реалног векторског простора је могуће дефинисати векторски производ  $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ . Векторски производ се може дефинисати на два начина, односно важи

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\alpha B_\beta \mathbf{e}_\gamma, \tag{4.13}$$

Са  $A_1, A_2, A_3$  и  $B_1, B_2, B_3$  означене су компоненте вектора  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  респективно, а скуп  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  је стандардни базис у тродимензионом простору. Слично се може доказати да у случају мешовитог производа вектора важи

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} A_\alpha B_\beta C_\gamma. \tag{4.14}$$

<sup>6</sup>Леви-Чивита симбол је тотално антисиметрични псеудотензор трећег реда [Кумерички, К. (2012)].

Такође, Паулијеве матрице<sup>7</sup>, које се користе за опис честица спина  $S = 1/2$  у квантној механици,

$$\sigma_1 = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

задовољавају комутационе релације

$$[\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = 2i \sum_{\gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\gamma. \quad (4.16)$$

За више детаља видети [Радошевић, С., Мали, П. (2020)]. ■

Пермутације скупа  $\{1, 2, 3, 4\}$  су:

$$\begin{aligned} e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}, g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}, g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, g_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, g_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \\ g_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, g_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, g_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, g_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, g_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, g_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ g_{12} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, g_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, g_{14} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, g_{15} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, g_{16} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, g_{17} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \\ g_{18} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, g_{19} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, g_{20} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, g_{21} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, g_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, g_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

и у односу на њихову композицију чине групу  $S_4$ . Међу наведеним елементима групе  $S_4$ , подгрупу изоморфну групи  $S_3$  чине елементи  $e, g_1, g_2, g_4, g_7$  и  $g_8$ , јер управо они пермутују скуп  $\{1, 2, 3\}$ , док елемент 4 остављају фиксним; од њих су транспозиције  $g_1, g_2$  и  $g_4$ , док су  $g_7$  и  $g_8$  пермутације које су елементи трећег реда. Транспозиције у целој групи  $S_4$  су елементи  $g_1, g_2, g_3, g_4, g_5$  и  $g_6$ , јер они замењују тачно два елемента скупа  $\{1, 2, 3, 4\}$ , а преостала два остављају фиксним. У групи пермутација на скупу од  $n$  елемената  $\{1, 2, \dots, n\}$   $S_n$ , имамо  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$  транспозиција. Ред групе пермутација  $S_n$  је  $|S_n| = n!$ .

**Тврђење 4.10.** Група  $S_n$  није Абелова за  $n \geq 3$ .

*Доказ.* Група  $S_3$  је подгрупа групе  $S_n$ ,  $n > 3$ , где фиксирамо бројеве 4, 5, 6, ...,  $n$ . Како  $S_3$  није Абелова група, самим тим то није ни  $S_n$ . ■

**Тврђење 4.11.** Свака коначна група изоморфна је некој подгрупи групе пермутација  $S_n$ .

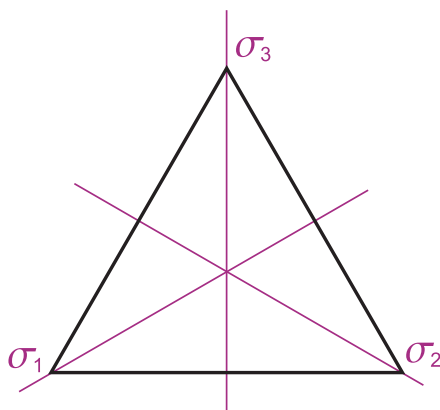
#### 4.1.6 Диедарске групе

Диедарске групе  $D_n$ ,  $n \geq 3$  су групе симетрија правилних  $n$ -тоуглова. Сваки правилни  $n$ -тоугао остаје непромењен ротацијом за ма који угао који је целобројни умножак од  $\frac{2\pi}{n}$  у односу на осу која пролази кроз његов центар. Има  $n$  оваквих ротација. Диедарске групе се састоје од  $n$  ротација (укључујући и неутрални елемент) и  $n$  рефлексција. Најједноставнија диедарска група је група симетрија једнакостраничног троугла,  $D_3$  група.

<sup>7</sup>Загонетка: Три сестре ермитске, унитарне и унимодуларне остадоше (нестадоше) без трага. Једна је пермутациона.

**Пример 4.11.** Наћи групу симетрија једнакостраничног троугла  $D_3$ .

**Решење.** Група симетрија једнакостраничног троугла се састоји од три рефлексije у односу на тежишне дужи троугла,  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$  (видети Сliku 4.4), две ротације  $\rho$  и  $\rho^2$  у односу на праву која пролази кроз центар једнакостраничног троугла (при чему  $\rho$  представља ротацију за  $120^\circ$  у позитивном математичком смеру) и идентичног пресликавања  $e$ .



Слика 4.4: Приказ рефлексija у  $D_3$  групи.

Одговарајућа Кејлијева таблица се лако налази и наведена је у Табели 4.11. Код попуњавања Кејлијеве таблице нам може користити чињеница да су све рефлексije елементи другог реда и да је композиција било које ротације и рефлексije увек рефлексija. На основу тога када израчунамо  $\sigma_1 \cdot \rho = \sigma_2$  (видети Сliku 4.5(a)), применимо Тврђење 4.2 и добијамо

$$(\sigma_1 \cdot \rho)^{-1} = \rho^{-1} \cdot \sigma_1^{-1} = \rho^2 \cdot \sigma_1 = \sigma_2^{-1} = \sigma_2, \quad (4.17)$$

односно

$$\rho^2 \cdot \sigma_1 = \sigma_2. \quad (4.18)$$

Слично, када израчунамо  $\sigma_1 \cdot \rho^2 = \sigma_3$  (видети Сliku 4.5(б)), применом Тврђења 4.2 имамо

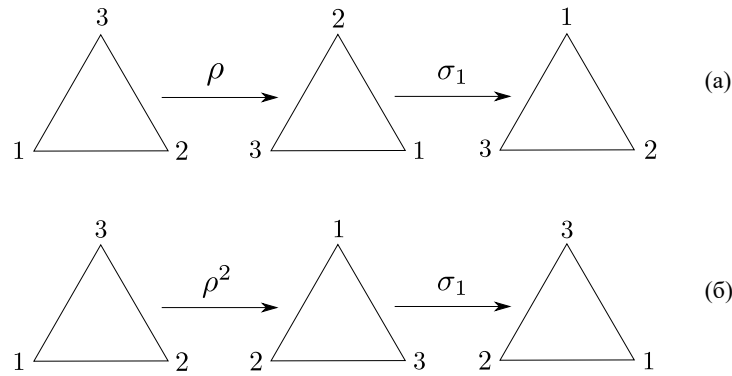
$$(\sigma_1 \cdot \rho^2)^{-1} = \rho \cdot \sigma_1 = \sigma_3^{-1} = \sigma_3, \quad (4.19)$$

односно

$$\rho \cdot \sigma_1 = \sigma_3. \quad (4.20)$$

■

Можемо се уверити да су групе  $D_3$  и  $S_3$  изоморфне, у ознаци  $D_3 \cong S_3$ . Рефлексije (огледања) у  $D_3$  групи одговарају транспозицијама, а ротације пермутацијама које не остављају ниједан елемент фиксним у  $S_3$  групи.

Слика 4.5: Приказ рачунања (а)  $\sigma_1 \cdot \rho$  и (б)  $\sigma_1 \cdot \rho^2$ .

Табела 4.11: Кејлијева таблица симетрија једнакостраничног троугла

$\cdot$	$e$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\rho$	$\rho^2$
$e$	$e$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\rho$	$\rho^2$
$\sigma_1$	$\sigma_1$	$e$	$\rho$	$\rho^2$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
$\sigma_2$	$\sigma_2$	$\rho^2$	$e$	$\rho$	$\sigma_3$	$\sigma_1$
$\sigma_3$	$\sigma_3$	$\rho$	$\rho^2$	$e$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
$\rho$	$\rho$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\rho^2$	$e$
$\rho^2$	$\rho^2$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$e$	$\rho$

НАПОМЕНА: Размотримо хомогену униформну призму чији су пресеци једнакостранични троуглови. Обележимо три равни у односу на које се може вршити рефлексива са  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . Комбиновањем ових рефлексива са  $C_3$  групом добија се  $C_{3v}$  група [Liboff, R. (2012)]. Група  $C_{3v}$  је такође изоморфна са групама  $D_3$  и  $S_3$  [Кумерички, К. (2012)].

Следећа по сложености диедарска група је група симетрија квадрата,  $D_4$  група.

**Пример 4.12.** Написати Кејлијеву таблицу групе симетрија квадрата  $D_4$ .

**Решење.** Елементи групе симетрија квадрата су неутрални елемент  $e$ , ротације  $\rho$ ,  $\rho^2$ ,  $\rho^3$ , где је  $\rho$  ротација за  $\pi/2$  у позитивном математичком смеру око осе која пролази кроз центар квадрата, огледања (рефлексиве) у односу на хоризонталну  $\sigma_h$  и вертикалну осу  $\sigma_v$ , као и огледања у односу на дијагонале  $\sigma_r$  и  $\sigma_l$  (видети Сliku 4.6). Према томе, ред групе  $D_4$  је  $|D_4| = 8$ .

Видимо да група није Абелова. Нпр.  $\rho \cdot \sigma_h = \sigma_r$ , (видети Сliku 4.7(а)) док је  $\sigma_h \cdot \rho = \sigma_l$  (видети Сliku 4.7(б)). На сличан начин као у случају  $D_3$  групе, можемо да искористимо Тврђење 4.2 и добијемо:

$$(\rho \cdot \sigma_h)^{-1} = \sigma_h \cdot \rho^3 = \sigma_r \quad (4.21)$$

и

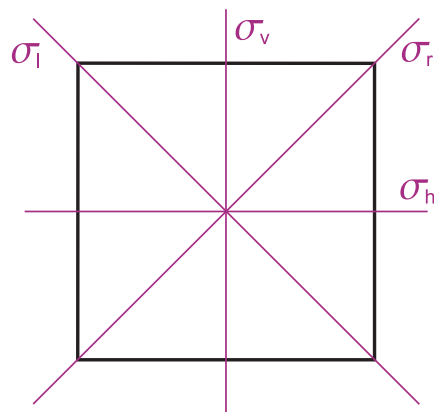
$$(\sigma_h \cdot \rho)^{-1} = \rho^3 \cdot \sigma_h = \sigma_l. \quad (4.22)$$

Кејлијева таблица групе  $D_4$  је дата у Табели 4.12.

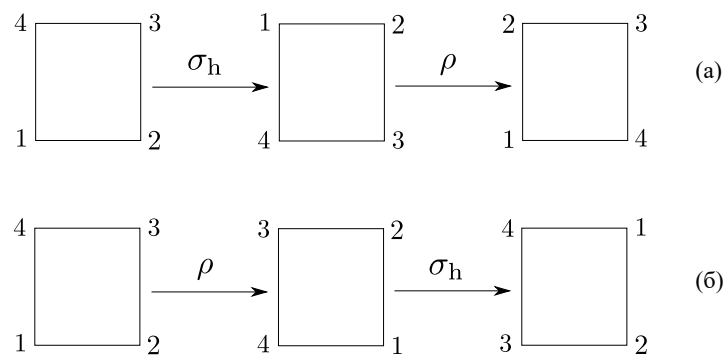
НАПОМЕНА: На основу Тврђења 4.11 мора постојати нека подгрупа групе пермутација

Табела 4.12: Таблица групе симетрија квадрата,  $D_4$

$\cdot$	$e$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\sigma_h$	$\sigma_v$	$\sigma_r$	$\sigma_l$
$e$	$e$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\sigma_h$	$\sigma_v$	$\sigma_r$	$\sigma_l$
$\rho$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$e$	$\sigma_r$	$\sigma_l$	$\sigma_v$	$\sigma_h$
$\rho^2$	$\rho^2$	$\rho^3$	$e$	$\rho$	$\sigma_v$	$\sigma_h$	$\sigma_l$	$\sigma_r$
$\rho^3$	$\rho^3$	$e$	$\rho$	$\rho^2$	$\sigma_l$	$\sigma_r$	$\sigma_h$	$\sigma_v$
$\sigma_h$	$\sigma_h$	$\sigma_l$	$\sigma_v$	$\sigma_r$	$e$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho$
$\sigma_v$	$\sigma_v$	$\sigma_r$	$\sigma_h$	$\sigma_l$	$\rho^2$	$e$	$\rho$	$\rho^3$
$\sigma_r$	$\sigma_r$	$\sigma_h$	$\sigma_l$	$\sigma_v$	$\rho$	$\rho^3$	$e$	$\rho^2$
$\sigma_l$	$\sigma_l$	$\sigma_v$	$\sigma_r$	$\sigma_h$	$\rho^3$	$\rho$	$\rho^2$	$e$



Слика 4.6: Приказ рефлексии у  $D_4$  групи.



Слика 4.7: Приказ рачунања (а)  $\rho \cdot \sigma_h$  и (б)  $\sigma_h \cdot \rho$ .

која је изоморфна групи  $D_4$ . Како квадрат има четири темена, то ће бити подгрупа  $S_4$

групе. Одговарајући елементи групе изражени као пермутације су

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \rho^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\sigma_h = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_v = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_r = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_l = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

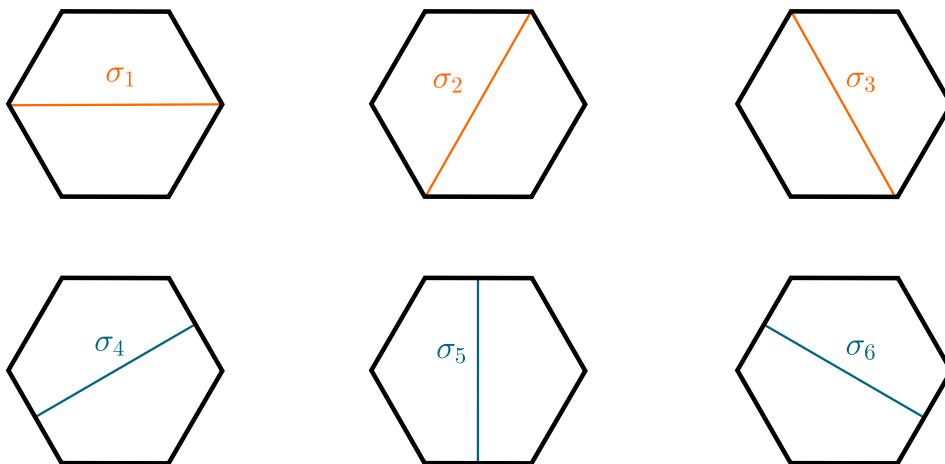
При томе су само  $\sigma_r$  и  $\sigma_l$  транспозиције. Поред њих су још  $\rho$  и  $\rho^3$  непарне пермутације. Елементи  $e, \rho^2, \sigma_h$  и  $\sigma_v$  су парне пермутације. Композицијом ових пермутација добија се Табела 4.12. ■

**Пример 4.13.** Написати Кејлијеву таблицу групе симетрија правилног шестоугла  $D_6$ .

**Решење.** Група симетрија правилног шестоугла састоји се од шест рефлексија  $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$  (видети Сliku 4.8) и шест ротација, укључујући и неутрални елемент. Рефлексије  $\sigma_1, \sigma_2$  и  $\sigma_3$ , означене наранџастом бојом, спајају темена страница, док рефлексије  $\sigma_4, \sigma_5$  и  $\sigma_6$ , означене плавом бојом, спајају средине наспрамних страница правилног шестоугла. Кејлијева таблица групе симетрија правилног шестоугла дата је у Табели 4.13. Ротација  $\rho$  је ротација за  $\frac{2\pi}{6}$  у позитивном математичком смеру око осе која пролази кроз центар правилног шестоугла. На Сlici 4.9 приказан је поступак за израчунавање  $\rho \cdot \sigma_2 = \sigma_5$  и  $\sigma_2 \cdot \rho = \sigma_4$ . Одатле је

$$(\rho \cdot \sigma_2)^{-1} = \sigma_2^{-1} \cdot \rho^{-1} = \sigma_2 \cdot \rho^5 = \sigma_5, \quad (4.23)$$

$$(\sigma_2 \cdot \rho)^{-1} = \rho^{-1} \cdot \sigma_2^{-1} = \rho^5 \cdot \sigma_2 = \sigma_4. \quad (4.24)$$

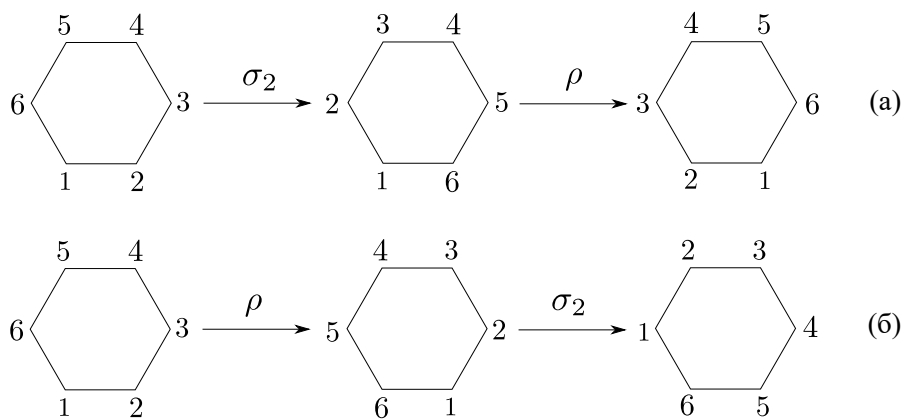


Слика 4.8: Приказ рефлексија у  $D_6$  групи.

НАПОМЕНА: На основу Тврђења 4.11 мора постојати нека подгрупа групе пермутација која је изоморфна групи  $D_6$ . Како правилан шестоугао има шест темена, то ће бити

Табела 4.13: Таблица групе симетрија правилног шестоугла,  $D_6$

$\cdot$	$e$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho^4$	$\rho^5$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_6$
$e$	$e$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho^4$	$\rho^5$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_6$
$\rho$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho^4$	$\rho^5$	$e$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_6$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_1$
$\rho^2$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho^4$	$\rho^5$	$e$	$\rho$	$\sigma_2$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$\sigma_5$	$\sigma_6$	$\sigma_4$
$\rho^3$	$\rho^3$	$\rho^4$	$\rho^5$	$e$	$\rho$	$\rho^2$	$\sigma_5$	$\sigma_6$	$\sigma_4$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$
$\rho^4$	$\rho^4$	$\rho^5$	$e$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\sigma_3$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_6$	$\sigma_4$	$\sigma_5$
$\rho^5$	$\rho^5$	$e$	$\rho$	$\rho^2$	$\rho^3$	$\rho^4$	$\sigma_6$	$\sigma_4$	$\sigma_5$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\sigma_3$
$\sigma_1$	$\sigma_1$	$\sigma_6$	$\sigma_3$	$\sigma_5$	$\sigma_2$	$\sigma_4$	$e$	$\rho^4$	$\rho^2$	$\rho^5$	$\rho^3$	$\rho$
$\sigma_2$	$\sigma_2$	$\sigma_4$	$\sigma_1$	$\sigma_6$	$\sigma_3$	$\sigma_5$	$\rho^2$	$e$	$\rho^4$	$\rho$	$\rho^5$	$\rho^3$
$\sigma_3$	$\sigma_3$	$\sigma_5$	$\sigma_2$	$\sigma_4$	$\sigma_1$	$\sigma_6$	$\rho^4$	$\rho^2$	$e$	$\rho^3$	$\rho$	$\rho^5$
$\sigma_4$	$\sigma_4$	$\sigma_1$	$\sigma_6$	$\sigma_3$	$\sigma_5$	$\sigma_2$	$\rho$	$\rho^5$	$\rho^3$	$e$	$\rho^4$	$\rho^2$
$\sigma_5$	$\sigma_5$	$\sigma_2$	$\sigma_4$	$\sigma_1$	$\sigma_6$	$\sigma_3$	$\rho^3$	$\rho$	$\rho^5$	$\rho^2$	$e$	$\rho^4$
$\sigma_6$	$\sigma_6$	$\sigma_3$	$\sigma_5$	$\sigma_2$	$\sigma_4$	$\sigma_1$	$\rho^5$	$\rho^3$	$\rho$	$\rho^4$	$\rho^2$	$e$



Слика 4.9: Приказ рачунања (а)  $\rho \cdot \sigma_2$  и (б)  $\sigma_2 \cdot \rho$ .

подгрупа  $S_6$  групе. Ако темена правилног шестоугла обележимо редом са 1, 2, 3, 4, 5, 6, тада ротација  $\rho$  одговара цикличном померању

$$1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 4 \mapsto 5 \mapsto 6 \mapsto 1,$$

док рефлексије  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$  одговарају осам симетрије шестоугла. Одговарајући

елементи групе изражени као пермутације су

$$\begin{aligned}
 e &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, & \rho &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, & \rho^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\
 \rho^3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, & \rho^4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, & \rho^5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \\
 \sigma_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}, & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, \\
 \sigma_4 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, & \sigma_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, & \sigma_6 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

При томе су елементи  $e, \rho^2, \rho^4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  парне пермутације, док су  $\rho, \rho^3, \rho^5, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$  непарне пермутације. Композицијом ових пермутација добија се Кејлијева таблица групе  $D_6$ . ■

Презентација групе је начин описивања групе преко скупа генератора и релација које дати генератори задовољавају. Презентација диедарске групе  $D_n$  је  $D_n = \langle \rho, \sigma \mid \rho^n = e, \sigma^2 = e, \sigma \cdot \rho \cdot \sigma = \rho^{-1} \rangle$ , где је  $\rho$  ротација за  $\frac{2\pi}{n}$ , а  $\sigma$  је рефлексација у односу на било коју осу.

#### 4.1.7 Неке специјалне подгрупе

**Дефиниција 4.9.** Подгрупа  $Z(G)$  групе  $(G, \cdot)$  зове се центар групе и представља скуп свих оних елемената  $G$  који комутирају са свим елементима  $G$ , дакле,  $Z(G) = \{g \in G \mid g \cdot g_i = g_i \cdot g, \forall g_i \in G\}$ .

Група је Абелова акко  $Z(G) = G$ . Центар групе нам на изванестан начин говори колико је нека група „близу” тога да буде Абелова [Долинка, И. (2018)].

**Пример 4.14.** Наћи центар групе за групе  $C_4, S_3$  и  $D_4$ .

**Решење.** Како је  $C_4$  Абелова група, њен центар је  $Z(C_4) = C_4$ . У случају групе  $S_3$  једини елемент који комутира са свим елементима групе је неутрални елемент, те је стога  $Z(S_3) = \{e\}$ . Код  $D_4$  групе два елемента комутирају са свим осталим елементима групе, па је  $Z(D_4) = \{e, \rho^2\}$ . ■

Како је  $D_3 \cong S_3$  знамо да је  $Z(D_3) = \{e\}$ , док је  $Z(D_4) = \{e, \rho^2\}$ . Шта је са осталим диедарским групама?

**Тврђење 4.12.** Центар диедарске групе  $Z(D_n) = \{e\}$  ако је  $n$  непаран број, а  $Z(D_n) = \{e, \rho^{\frac{n}{2}}\}$  ако је  $n$  паран број.

*Доказ.* Из презентације диедарске групе, где је  $\rho$  ротација за  $\frac{2\pi}{n}$  а  $\sigma$  произвољна рефлексација, имамо да је  $\sigma \cdot \rho \cdot \sigma = \rho^{-1}$ . Одатле је

$$(\sigma \cdot \rho \cdot \sigma)^k = \sigma \cdot \rho^k \cdot \sigma = \rho^{-k}. \quad (4.25)$$

Да би  $\rho^k$  комутирало са  $\sigma$ , потребно је да важи да је  $\rho^k = \rho^{-k}$ , што је еквивалентно са  $\rho^{2k} = e$ . Ако је  $n$  непаран број, једино решење је  $k = 0$ . Ако је  $n$  паран број, решење је и  $k = \frac{n}{2}$  поред  $k = 0$ . У случају када је  $n$  паран број центар групе је изоморфан са  $C_2$  групом. ■

**Дефиниција 4.10.** Подгрупа  $(H, \cdot)$  групе  $(G, \cdot)$  је нормална, у ознаци  $H \triangleleft G$ , ако  $\forall g \in G$ , важи  $g \cdot H = H \cdot g$ , тј. ако се сваки леви косет поклапа са одговарајућим десним косетом.

Очигледно су све подгрупе Абелових група нормалне. Такође и центар групе  $Z(G)$  је нормална подгрупа. У случају нормалних подгрупа леви косети су једнаки десним косетима.

### 4.1.8 Група кватерниона

Група кватерниона  $Q_8$  је група од 8 елемената  $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$  дефинисана са  $i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$ . Кренимо од релације  $i \cdot j \cdot k = -1$ . Множењем једнакости са  $k$  са десне стране добија се  $-i \cdot j = -k$ , односно  $i \cdot j = k$ . Инверзни елемент елемента  $i \cdot j$  је  $j \cdot i$ , јер је  $j \cdot i \cdot i \cdot j = 1$ . На основу тога, имамо да је  $j \cdot i \cdot k = 1$  и множењем једнакости са десне стране са  $k$  добијамо  $-j \cdot i = k$ , односно  $j \cdot i = -k$ . Даље множењем једнакости  $i \cdot j = k$  са леве стране са  $i$  добијамо  $-j = i \cdot k$ . Множењем  $-j = i \cdot k$  са десне стране са  $k$  добија се  $j \cdot k = i$ . Коначно множењем једнакости  $j \cdot i = -k$  са десне стране са  $i$  добијамо  $j = k \cdot i$ , а множењем  $i \cdot j = k$  са десне стране са  $j$  добија се  $-i = k \cdot j$ . Даље применом судоку правила добијамо целу Кејлијеву таблицу групе (видети Табелу 4.14).

Табела 4.14: Кејлијева таблица групе кватерниона  $Q_8$

$\cdot$	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
1	1	-1	i	-i	j	-j	k	-k
-1	-1	1	-i	i	-j	j	-k	k
i	i	-i	-1	1	k	-k	-j	j
-i	-i	i	1	-1	-k	k	j	-j
j	j	-j	-k	k	-1	1	i	-i
-j	-j	j	k	-k	1	-1	-i	i
k	k	-k	j	-j	-i	i	-1	1
-k	-k	k	-j	j	i	-i	1	-1

Група није Абелова јер Кејлијева таблица није симетрична у односу на главну дијагоналу.

**НАПОМЕНА 1:** Група кватерниона има веома занимљиву особину да, иако није комутативна, свака подгрупа јој је нормална. Подгрупе групе кватерниона су  $(\{1\}, \cdot)$ ,  $(\{1, -1\}, \cdot)$ ,

$(\{1, -1, i, -i\}, \cdot)$ ,  $(\{1, -1, j, -j\}, \cdot)$ ,  $(\{1, -1, k, -k\}, \cdot)$ ,  $Q_8$ .

**НАПОМЕНА 2:** Центар групе кватерниона је група  $Z(Q_8) = (\{1, -1\}, \cdot)$ .

Презентација групе кватерниона је  $Q_8 = \langle i, j \mid i^4 = 1, i^2 = j^2, i \cdot j = j \cdot i^{-1} \rangle$ .

### 4.1.9 Класе конјугација

**Дефиниција 4.11.** Елементи  $g_i$  и  $g_j$  групе  $(G, \cdot)$  међусобно су конјуговани ако постоји макар један елемент  $g \in G$  такав да важи

$$g_i = g \cdot g_j \cdot g^{-1}. \quad (4.26)$$

На овај начин је дефинисана једна релација еквиваленције на скупу  $G$ . Сваки елемент  $g_i$  је конјугован самом себи, јер је  $g_i = e \cdot g_i \cdot e$ , па је конјугација рефлексивна. Ако је  $g_j$  конјугован елементу  $g_i$ , тј. постоји  $g \in G$  тако да је  $g_j = g \cdot g_i \cdot g^{-1}$ , онда је и  $g_i$  конјугован елементу  $g_j$ , јер је  $g_i = g^{-1} \cdot g_j \cdot (g^{-1})^{-1}$ . На основу овога конјугација је и симетрична релација. Ако је  $g_j$  конјугован елементу  $g_i$  ( $g_j = g \cdot g_i \cdot g^{-1}$ , за неко  $g \in G$ ) и ако је  $g_k$  конјугован елементу  $g_j$  ( $g_k = \tilde{g} \cdot g_j \cdot \tilde{g}^{-1}$ , за неко  $\tilde{g} \in G$ ), онда је  $g_k$  конјугован елементу  $g_i$ , јер важи  $g_k = \tilde{g} \cdot g \cdot g_i \cdot g^{-1} \cdot \tilde{g}^{-1} = \tilde{g} \cdot g \cdot g_i \cdot (\tilde{g} \cdot g)^{-1}$ . Значи, конјугација је и транзитивна релација.

Скуп међусобно конјугованих елемената чини класу конјугације. Ред класе је број елемената у класи.

**Пример 4.15.** Показати да је скуп свих транспозиција једна класа конјугације у групи  $S_3$ .

**Решење.** Елементи  $g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $g_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $g_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$  су транспозиције. Рефлексивност важи, јер је нпр.

$$g_\alpha = e \cdot g_\alpha \cdot e, \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (4.27)$$

Из таблице  $S_3$  групе (видети Табелу 4.10) се види да је

$$g_4 \cdot g_5 = g_5 \cdot g_4 = e, \quad (4.28)$$

односно елементи  $g_4$  и  $g_5$  су један другом инверзни,  $g_5 = g_4^{-1}$ . Лако је проверити да је

$$g_4 \cdot g_1 \cdot g_5 = (g_4 \cdot g_1) \cdot g_5 = g_3 \cdot g_5 = g_2, \quad (4.29)$$

односно

$$g_4 \cdot g_1 \cdot g_4^{-1} = g_2. \quad (4.30)$$

Онда је

$$g_4^{-1} \cdot g_2 \cdot g_4 = g_4^{-1} \cdot g_4 \cdot g_1 \cdot g_4^{-1} \cdot g_4 = g_1, \quad (4.31)$$

па су елементи  $g_1$  и  $g_2$  конјуговани. Слично се показује да је

$$g_4 \cdot g_2 \cdot g_5 = g_1 \cdot g_5 = g_3, \quad (4.32)$$

односно

$$g_4 \cdot g_2 \cdot g_4^{-1} = g_3. \quad (4.33)$$

Како на основу ове релације следи да је

$$g_2 = g_4^{-1} \cdot g_3 \cdot g_4, \quad (4.34)$$

елементи  $g_2$  и  $g_3$  су конјуговани. На основу

$$g_4 \cdot g_3 \cdot g_5 = g_1 \quad (4.35)$$

и

$$g_3 = g_5 \cdot g_1 \cdot g_4 \quad (4.36)$$

добива се да су елементи  $g_1$  и  $g_3$  конјуговани. Испитивањем осталих комбинација  $g_2 \cdot g_1 \cdot g_2 = g_3$ ,  $g_3 \cdot g_1 \cdot g_3 = g_2$ ,  $g_1 \cdot g_2 \cdot g_1 = g_3$ ,  $g_3 \cdot g_2 \cdot g_3 = g_1$ ,  $g_2 \cdot g_3 \cdot g_2 = g_1$ ,  $g_1 \cdot g_3 \cdot g_1 = g_2$  видимо да  $g_1$ ,  $g_2$  и  $g_3$  нису конјуговани са елементима  $g_4$ ,  $g_5$  и  $e$ . Стога је скуп свих транспозиција класа конјугација у  $S_3$  групи.

НАПОМЕНА 1: Може се показати и општије да је скуп свих транспозиција класа конјугације у групи  $S_n$  [Дамњановић, М. (2016)].

НАПОМЕНА 2: Класе конјугација групе  $S_3$  су  $\{e\}$ ,  $\{g_1, g_2, g_3\}$  и  $\{g_4, g_5\}$ . ■

**Тврђење 4.13.** Ако су елементи у групи конјуговани, онда су истог реда.

*Доказ.* Неке су елементи  $g_i$  и  $g_j$  групе  $(G, \cdot)$  конјуговани

$$g_i = g \cdot g_j \cdot g^{-1}, \quad g \in G. \quad (4.37)$$

Нека је  $n$  ред елемента  $g_j$ , односно  $g_j^n = e$ . Тада је

$$g_i^n = (g \cdot g_j \cdot g^{-1})^n = g \cdot g_j^n \cdot g^{-1} = e. \quad (4.38)$$

Тиме тврђење још није доказано, јер је могуће да постоји и неко  $k < n$ , такво да је  $g_i^k = e$ . Нека је  $g_i$  елемент реда  $k$ . Тада из  $g_j = g^{-1} \cdot g_i \cdot g$  следи

$$g_j^k = g^{-1} \cdot g_i^k \cdot g = e. \quad (4.39)$$

Одавде видимо да уколико је елемент  $g_i$  реда  $k$  и елемент  $g_j$  мора бити реда  $k$ , односно елементи  $g_i$  и  $g_j$  су истог реда. ■

Корисна је и следећа теорема:

**Тврђење 4.14.** За коначну групу непарног реда не постоји елемент изузев неутралног који је конјугован са својим инверзним елементом.

Као што је већ напоменуто раније, теорија група се у физици обично користи за опис различитих симетријских трансформација. Будући да су физичке теорије често формулисане у оквирима векторских простора, за примене у физици је веома битна теорија репрезентација група.

#### 4.1.10 Теорија репрезентација група

**Дефиниција 4.12.** Скуп  $V$  зовемо векторским простором над пољем<sup>8</sup>  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  ако важи:

<sup>8</sup>Алгебарска структура  $(\mathbb{F}, +, \cdot)$  је поље ако и само ако су  $(\mathbb{F}, +)$  и  $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$  Абелове групе и  $\forall a, b, c \in \mathbb{F}$  важи  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ .

1.  $(V, \oplus)$  је Абелова група. Елементе векторског простора називамо векторима, а елементе поља  $\mathbb{F}$  скаларима. Операција  $\oplus$  означава сабирање вектора.
2. На скупу  $\mathbb{F} \times V$  је дефинисана операција  $\odot$  (множење вектора скаларом) тако да важи

- $a \odot (b \odot x) = (ab) \odot x, \forall a, b \in \mathbb{F}, \forall x \in V$
- $a \odot (x \oplus y) = (a \odot x) \oplus (a \odot y), \forall a \in \mathbb{F}, \forall x, y \in V$
- $(a + b) \odot x = (a \odot x) \oplus (b \odot x), \forall a, b \in \mathbb{F}, \forall x \in V$
- $1 \odot x = x, \forall x \in V.$

У наставку текста ћемо користити  $+$  и за сабирање вектора и за сабирање скалара, а за одговарајућа множења нећемо користити специјалну ознаку.

**Дефиниција 4.13.** Репрезентација групе  $G = \{g_i\}$  је хомоморфизам са групе  $G$  на групу линеарних оператора  $\mathcal{D} = \{D(g_i)\}$  који делују на неком векторском простору  $V$ .

Слово  $D$  потиче од немачке речи Darstellung која означава репрезентацију [Кумерички, К. (2012)]. У математичкој литератури се под појмом репрезентације строго подразумева хомоморфизам, док се у физичарској литератури под појмом репрезентације подразумевају и хомоморфизам и слика [Дамњановић, М. (2016)]. Без обзира на интерпретацију појма репрезентација, за произвољна два елемента  $g_1, g_2 \in G$  важи да је  $D(g_1 \cdot g_2) = D(g_1) \cdot D(g_2)$ . На основу тога из  $D(g_1 \cdot e) = D(g_1) \cdot D(e) = D(g_1)$  добијамо да је  $D(e)$  јединична матрица димензије која одговара димензији репрезентације. Димензија репрезентације је димензија векторског простора  $V$  на који оператори делују. Уколико је група оператора  $\mathcal{D}$  изоморфна групи  $G$ , кажемо да је репрезентација верна, а уколико то није случај, репрезентација је неверна. Нпр. верна репрезентација  $C_2$  групе је  $D(g) = -1, D(e) = 1$ , док је неверна репрезентација исте групе  $D_1(g) = 1, D_1(e) = 1$ . Обе ове репрезентације су једнодимензионе. Ми ћемо под појмом репрезентације подразумевати искључиво матричне репрезентације, уколико не нагласимо другачије, и елементи скупа  $\mathcal{D}$  ће бити квадратне матрице. Будући да је векторски простор  $V$  задат над пољем  $\mathbb{F}$ , онда и својства репрезентација, дата у тексту који следи, зависе од својстава тог поља. Више о теорији репрезентација група можете наћи у [Hamermesh, M. (2012); Zee, A. (2016); Arfken, G.B., Weber H.J., Harris F.E. (2013); Вуковић, М. (2003); Игњатовић, С. (2015); James, G. D.; Liebeck, M. W. (2001); Isaacs, I. M. (1994)].

**Дефиниција 4.14.** Две репрезентације  $\mathcal{D} = \{D(g_i)\}$  и  $\tilde{\mathcal{D}} = \{\tilde{D}(g_i)\}$  су еквивалентне ако постоји регуларна матрица  $S$  таква да је

$$\tilde{D}(g_i) = SD(g_i)S^{-1}, \forall g_i \in G. \quad (4.40)$$

**Пример 4.16.** Од дводимензионе репрезентације  $C_2$  групе  $D(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $D(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  добити њој еквивалентну репрезентацију применом трансформације сличности

за следећи избор регуларне матрице  $S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ .

**Решење.** Инверзна матрица матрице  $S$  је  $S^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ . Применом трансформације сличности добија се

$$\begin{aligned} \tilde{D}(g) &= SD(g)S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -7 & 5 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$\tilde{D}(e) = SD(e)S^{-1} = D(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.42)$$

Множењем матрица се можемо уверити да је  $\tilde{D}(g) \cdot \tilde{D}(g) = \tilde{D}(e)$ . ■

**Пример 4.17.** Од дводимензионе репрезентације  $C_2$  групе  $D(g) = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$ ,  $D(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  добити њој еквивалентну репрезентацију применом трансформације сличности

за следећи избор регуларне матрице  $S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ .

**Решење.** Матрица  $S$  је и симетрична и ортогонална, па је  $S^{-1} = S^T = S$ . На основу тога је

$$\tilde{D}(g) = SD(g)S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

$$\tilde{D}(e) = SD(e)S = D(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.44)$$

■

**Дефиниција 4.15.** Репрезентација  $\mathcal{D}$  групе  $G$  која делује на векторском простору  $V$  је редуцибилна уколико постоји нетривијални потпростор  $V'$  од  $V$  који је инваријантан на  $\mathcal{D}$

$$D(g_i)V' \subseteq V', \quad \forall g_i \in G. \quad (4.45)$$

Ако је репрезентација  $\mathcal{D}$  редуцибилна, онда може бити записана у форми блок матрица као

$$D(g_i) = \begin{bmatrix} D_1(g_i) & C(g_i) \\ 0 & D_2(g_i) \end{bmatrix}, \quad \forall g_i \in G. \quad (4.46)$$

Узмимо да су у овој декомпозицији  $D_1(g_i), g_i \in G$  матрице димензије  $n_1 \times n_1$ ,  $D_2(g_i), g_i \in G$  матрице димензије  $n_2 \times n_2$ ,  $C(g_i)$  матрице димензије  $n_1 \times n_2$ , док је нула матрица димензије  $n_2 \times n_1$ . Онда постоје потпростори  $V_1$  и  $V_2$  тако да је векторски простор  $V = V_1 \oplus V_2$ , при чему је  $\dim(V) = n_1 + n_2$ ,  $\dim(V_1) = n_1$  и  $\dim(V_2) = n_2$ . Тада матрице  $D_1(g_i), g_i \in G$  делују на потпростору  $V_1$ , док матрице  $D_2(g_i), g_i \in G$  делују на потпростору  $V_2$ , односно  $D_1 : V_1 \rightarrow V_1$ ,  $D_2 : V_2 \rightarrow V_2$ . Узмимо два елемента репрезентације

$$D(g_1) = \begin{bmatrix} D_1(g_1) & C(g_1) \\ 0 & D_2(g_1) \end{bmatrix}, \quad D(g_2) = \begin{bmatrix} D_1(g_2) & C(g_2) \\ 0 & D_2(g_2) \end{bmatrix}. \quad (4.47)$$

За њих важи:

$$\begin{aligned} D(g_1) \cdot D(g_2) &= \begin{bmatrix} D_1(g_1) & C(g_1) \\ 0 & D_2(g_1) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} D_1(g_2) & C(g_2) \\ 0 & D_2(g_2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} D_1(g_1) \cdot D_1(g_2) & D_1(g_1) \cdot C(g_2) + C(g_1) \cdot D_2(g_2) \\ 0 & D_2(g_1) \cdot D_2(g_2) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.48)$$

Како је  $\mathcal{D}$  репрезентација, онда мора да важи да је

$$D(g_1) \cdot D(g_2) = D(g_1 \cdot g_2) = \begin{bmatrix} D_1(g_1 \cdot g_2) & C(g_1 \cdot g_2) \\ 0 & D_2(g_1 \cdot g_2) \end{bmatrix}, \quad (4.49)$$

односно поређењем са (4.48) добијамо да је  $D_1(g_1 \cdot g_2) = D_1(g_1) \cdot D_1(g_2)$  и  $D_2(g_1 \cdot g_2) = D_2(g_1) \cdot D_2(g_2)$ . Како су  $g_1$  и  $g_2$  произвољно узети елементи групе  $G$ , онда су и  $\mathcal{D}_1 = \{D_1(g_i)\}$  и  $\mathcal{D}_2 = \{D_2(g_i)\}$  репрезентације групе  $G$ .

Специјално, код репрезентација коначних група увек се може изабрати базис тако да је  $C(g_i) = 0, \forall g_i \in G$ . Односно кажемо да су све редуцибилне репрезентације коначних група и потпуно редуцибилне и за њих важи да је

$$D(g_i) = \begin{bmatrix} D_1(g_i) & 0 \\ 0 & D_2(g_i) \end{bmatrix}, \forall g_i \in G. \quad (4.50)$$

Ако репрезентација није редуцибилна, кажемо да је иредуцибилна.

**Тврђење 4.15.** Свака коначна група има коначан број нееквивалентних иредуцибилних репрезентација.

**Дефиниција 4.16.** Карактер  $\chi$  репрезентације  $\mathcal{D} = \{D(g_i)\}$  групе  $G$  је скуп  $\chi = \{\chi(g_i) = \text{Tr}(D(g_i)) | g_i \in G\}$ . Вредност  $\chi(g_i) = \text{Tr}(D(g_i))$  називамо карактером елемента  $g_i$  у репрезентацији  $\mathcal{D}$ .

Из последње дефиниције и инваријантности трага у односу на цикличне пермутације, лако се види да еквивалентне репрезентације имају исте карактере. Ово опажање даје једноставан тест за проверу еквивалентности различитих репрезентација. Такође, види се да узајамно конјуговани елементи групе имају исте карактере. То значи да за дату репрезентацију (овај пут под репрезентацијом сматрамо скуп матрица), на основу

анализе карактера, лако можемо закључити који елементи репрезентације припадају једној класи конјугације. Коначно, испоставља се да је репрезентација иредуцибилна ако и само ако важи

$$\sum_{i=1}^n |\chi(g_i)|^2 = \sum_{i=1}^n |\chi_i|^2 = n, \quad (4.51)$$

где је  $n = |G|$  ред групе.

**Пример 4.18.** Испитати да ли је репрезентација групе  $S_3$ , дата скупом матрица

$$D(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D(a) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.52)$$

$$D(b) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}, \quad D(c) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.53)$$

$$D(d) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}, \quad D(f) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.54)$$

иредуцибилна.

**Решење.** Како ова репрезентација садржи шест различитих матрица, можемо закључити да је верна. Будући да су конјуговани елементи повезани трансформацијом сличности, матрице које их представљају морају имати исти траг. У овој верној репрезентацији уочавамо три матрице са истим трагом  $D(a), D(b), D(c)$ , те оне морају представљати транспозиције. Пермутације које не остављају ниједан елемент фиксним су  $D(d)$  и  $D(f)$ . Група  $S_3$  има три класе конјугације:  $\{e\}$ ,  $\{a, b, c\}$  и  $\{d, f\}$ . Поменуто класе конјугације садрже  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 3$  и  $n_3 = 2$  елемента, респективно, а одговарајући карактери су  $\chi_1 = 2$ ,  $\chi_2 = 0$ ,  $\chi_3 = -1$ . Дакле,

$$\sum_{i=1}^3 n_i |\chi_i|^2 = 1 \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 2 \cdot 1 = 6. \quad (4.55)$$

Како ова вредност одговара реду групе  $|S_3| = 3! = 6$ , репрезентација наведена у овом примеру је иредуцибилна.

НАПОМЕНА 1: Ова репрезентација је коришћена у анализи глуонске интеракције у тзв. Ландауовој калибрацији [Eichmann, G., Williams, R., Alkofer, R., Vujanovic, M. (2014)].

НАПОМЕНА 2: На основу Дефиниције 4.11 знамо да, ако су елементи  $g_i$  и  $g_j$  конјуговани, важиће и да је

$$D(g_i) = D(g \cdot g_j \cdot g^{-1}) \quad (4.56)$$

за неко  $g \in G$ . Знајући да је  $D$  репрезентација групе, онда важи и да је

$$D(g_i) = D(g) \cdot D(g_j) \cdot D(g^{-1}). \quad (4.57)$$

Узмемо траг једнакости (4.57) и, примењујући да је траг матрице инваријантан у односу на цикличне пермутације, добијамо

$$\text{Tr}(D(g_i)) = \text{Tr}(D(g) \cdot D(g_j) \cdot D(g^{-1})) = \text{Tr}(D(g_j) \cdot D(g^{-1}) \cdot D(g)) = \text{Tr}(D(g_j)), \quad (4.58)$$

односно конјуговани елементи у некој репрезентацији групе имају исте карактере. ■

**Пример 4.19.** За цикличну групу  $C_8$ , генерисану елементом  $a$ ,

а) одредити матрице репрезентације  $D$  знајући да је

$$D(a^5) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.59)$$

б) помоћу карактера закључити да ли је репрезентација редуцибилна или иредуцибилна.

**Решење.** а) Како је  $D$  репрезентација групе, за свака два елемента групе мора важити

$$D(g_i \cdot g_j) = D(g_i) \cdot D(g_j). \quad (4.60)$$

Такође,  $C_8$  је циклична група, па је

$$D(a^8) = D(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

при чему димензију матрице  $D(e)$  бирамо у складу са (4.59). Користећи сада (4.60), добијамо везу  $D(a^8) = D(e) = D(a^5) \cdot D(a^3)$ . Одавде се види да је  $D(a^3)$  матрица која је инверзна матрици  $D(a^5)$ . Будући да је  $D(a^5)$  унитарна матрица, њена инверзна матрица се добија адјунговањем (транспоновањем и комплексним конјуговањем). Одатле је

$$D(a^3) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

Користећи поново основну особину репрезентације (4.60), налазимо

$$D(a^6) = D(a^3) \cdot D(a^3) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Овим смо одредили четири елемента репрезентације групе  $C_8$ . Простим матричним множењем лако се одређују и преостали елементи:

$$D(a) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & i \\ i & -1 \end{bmatrix}, \quad D(a^2) = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(a^4) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad D(a^7) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 & -i \\ -i & -1 \end{bmatrix}.$$

б) Карактери елемената репрезентације су  $\chi(e) = 2, \chi(a) = -\sqrt{2}, \chi(a^2) = 0, \chi(a^3) = \sqrt{2}, \chi(a^4) = -2, \chi(a^5) = \sqrt{2}, \chi(a^6) = 0, \chi(a^7) = -\sqrt{2}$ .

На основу тога је

$$\sum_{i=1}^8 |\chi_i|^2 = 16 > 8 = |C_8|, \quad (4.61)$$

па је репрезентација редуцибилна (видети (4.51)).

НАПОМЕНА: Како су редуцибилне репрезентације коначних група и потпуно редуцибилне, а репрезентација из примера је дводимензиона редуцибилна репрезентација, мора постојати нека трансформација сличности која ће дијагонализовати све матрице ове репрезентације. Решимо својствени проблем унитарне матрице  $D(a^5)$ . Њене својствене

вредности су  $\lambda_1 = e^{-i\frac{\pi}{4}}$  и  $\lambda_2 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ , а нормирани својствени вектори су  $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  и

$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Од својствених вектора формирамо унитарну матрицу  $S^\dagger = S^{-1} = S =$

$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$  и применимо трансформацију сличности  $SD(g)S^\dagger = SD(g)S, g \in C_8$  на сваки

елемент репрезентације. На тај начин добијамо еквивалентну репрезентацију матрица

$\tilde{D}$ , чији су елементи  $\tilde{D}(a^k) = \begin{bmatrix} \omega^{3k} & 0 \\ 0 & \omega^{5k} \end{bmatrix} = \omega^{3k} \oplus \omega^{5k}, k = 1, \dots, 8$ , где је  $\omega = e^{i\frac{\pi}{4}}$ . Више

детаља везаних за дијагонализацију матрице унитарном трансформацијом можете наћи у [Радошевић, С., Мали, П. (2020)]. ■

Приметимо да су репрезентације дате у Примерима 4.18 и 4.19 унитарне, односно све матрице датих репрезентација су унитарне. Важи  $D^\dagger(g) \cdot D(g) = I, \forall g \in G$ . Заправо, једина репрезентација у овом поглављу која није унитарна је репрезентација  $\tilde{D}$  из Примера 4.16, а из истог примера видимо да је и она еквивалентна унитарној репрезентацији.

**Тврђење 4.16.** Све коначне групе имају унитарну репрезентацију.

Ово тврђење може бити од велике помоћи код налажења репрезентација коначних група. Интуитивно објашњење зашто би оно морало да важи можемо добити разматрајући једнодимензионе репрезентације група. У случају једнодимензионих репрезентација елементи репрезентације су комплексни бројеви чије множење мора да репродукује Кејлијеву таблицу групе. Ако је неки елемент групе реда  $m, g^m = e$ , комплексни број који га репрезентује  $D(g) = re^{i\varphi}$  мора бити такође реда  $m$ , односно мора да важи  $D(g^m) = (D(g))^m = r^m e^{im\varphi} = 1$ . Једина могућност да ово буде испуњено је да је  $r = 1$ , односно  $D(g) = e^{i\varphi}$ . У том случају је  $(D(g))^\dagger \cdot D(g) = e^{-i\varphi} e^{i\varphi} = 1$ . Како је  $g$  произвољно одабран елемент произвољне коначне групе, све једнодимензионе репрезентације коначних група су нужно унитарне.

#### 4.1.11 Иредуцибилне репрезентације

**Тврђење 4.17.** (Бурнсајдова теорема) Број иредуцибилних репрезентација неке коначне групе једнак је броју класа конјугације у датој групи.

Како је код Абелових група сваки елемент једна класа конјугације, број иредуцибилних репрезентација Абелових група једнак је реду групе. Такође, код Абелових група иредуцибилне репрезентације су једнодимензионе. Код рада са иредуцибилним репрезентацијама згодно је користити таблице карактера. Почнимо од  $C_2$  групе, која је циклична група генерисана елементом  $a$ ,  $a^2 = e$ . Она има две класе конјугације  $\{e\}$  и  $\{a\}$  и стога има две иредуцибилне репрезентације. Њена таблица карактера је дата са:

Табела 4.15: Таблица карактера  $C_2$  групе

$C_2$	$\{e\}$	$\{a\}$
$\chi^{(1)}$	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1

Код сваке коначне групе ред групе једнак је суми квадрата димензија иредуцибилних репрезентација дате групе. У овом случају  $|C_2| = 1^2 + 1^2$ , односно  $C_2$  група има две једнодимензионе иредуцибилне репрезентације: неверну  $\{D^{(1)}(e) = 1, D^{(1)}(a) = 1\}$  и верну  $\{D^{(2)}(e) = 1, D^{(2)}(a) = -1\}$ . Карактери су трагови матрица репрезентације  $\chi^{(1)}(e) = \text{Tr}(D^{(1)}(e)) = 1$  и  $\chi^{(1)}(a) = \text{Tr}(D^{(1)}(a)) = 1$ , а у случају једнодимензионих репрезентација они су и елементи репрезентације  $\chi^{(1)}(e) = \text{Tr}(D^{(1)}(e)) = D^{(1)}(e) = 1$  и  $\chi^{(1)}(a) = \text{Tr}(D^{(1)}(a)) = D^{(1)}(a) = 1$ . Слично, у случају друге репрезентације  $\chi^{(2)}(e) = \text{Tr}(D^{(2)}(e)) = D^{(2)}(e) = 1$  и  $\chi^{(2)}(a) = \text{Tr}(D^{(2)}(a)) = D^{(2)}(a) = -1$ . За карактере важе релације ортогоналности

$$\langle \chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{(\alpha)*}(g) \chi^{(\beta)}(g) = \delta_{\alpha, \beta}. \quad (4.62)$$

Можемо се уверити да је

$$\langle \chi^{(1)}, \chi^{(1)} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{(1)*}(g) \chi^{(1)}(g) = \frac{1}{2} (\chi^{(1)*}(e) \chi^{(1)}(e) + \chi^{(1)*}(a) \chi^{(1)}(a)) = 1, \quad (4.63)$$

$$\langle \chi^{(2)}, \chi^{(2)} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{(2)*}(g) \chi^{(2)}(g) = \frac{1}{2} (\chi^{(2)*}(e) \chi^{(2)}(e) + \chi^{(2)*}(a) \chi^{(2)}(a)) = 1, \quad (4.64)$$

$$\langle \chi^{(1)}, \chi^{(2)} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{(1)*}(g) \chi^{(2)}(g) = \frac{1}{2} (\chi^{(1)*}(e) \chi^{(2)}(e) + \chi^{(1)*}(a) \chi^{(2)}(a)) = 0. \quad (4.65)$$

Размотримо сада  $C_3$  групу. Ова група је генерисана елементом  $a$  трећег реда. Има три класе конјугације  $\{e\}$ ,  $\{a\}$ ,  $\{a^2\}$  и стога, како је реч о Абеловој групи, три једнодимензионе иредуцибилне репрезентације.

Комплексни бројеви  $w$  и  $w^*$ , заједно са јединицом, представљају сва решења кубне једначине  $x^3 = 1$  одакле следи таблица карактера  $C_3$  групе дата у Табели 4.16. Узимајући

$$w = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}, \quad w^* = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{4\pi}{3}},$$

Табела 4.16: Таблица карактера  $C_3$  групе

$C_3$	$\{e\}$	$\{a\}$	$\{a^2\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	$w$	$w^*$
$\chi^{(3)}$	1	$w^*$	$w$

Табела 4.17: Таблица карактера  $C_3$  групе

$C_3$	$\{e\}$	$\{a\}$	$\{a^2\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	$e^{i\frac{2\pi}{3}}$	$e^{i\frac{4\pi}{3}}$
$\chi^{(3)}$	1	$e^{i\frac{4\pi}{3}}$	$e^{i\frac{2\pi}{3}}$

добивамо таблицу карактера  $C_3$  групе (видети Табелу 4.17).

Група најмањег реда која није Абелова је група шестог реда. Постоји до на изоморфизам једна група шестог реда која није Абелова и то је  $S_3$  група.  $S_3$  група има 3 класе конјугације и стога има три иредуцибилне репрезентације. Класе конјугације за  $S_3$  групу су  $\{e\}$ ,  $\{g_1, g_2, g_3\}$  и  $\{g_4, g_5\}$ , где су  $g_1, g_2$  и  $g_3$  транспозиције. Одговарајућа таблица карактера за  $S_3$  групу је дата у Табели 4.18, где треба да одредимо карактере  $\alpha$  и  $\beta$  дводимензионе репрезентације.

Табела 4.18: Таблица карактера  $S_3$  групе

$S_3$	$\{e\}$	$\{g_1, g_2, g_3\}$	$\{g_4, g_5\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1
$\chi^{(3)}$	2	$\alpha$	$\beta$

Карактери  $\alpha$  и  $\beta$  одређују се из релација ортогоналности

$$\langle \chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)} \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \chi^{(\alpha)*}(g) \chi^{(\beta)}(g) = \delta_{\alpha, \beta}. \quad (4.66)$$

Одатле добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} 2 + 3\alpha + 2\beta &= 0, \\ 2 - 3\alpha + 2\beta &= 0. \end{aligned} \quad (4.67)$$

У систему једначина (4.67) бројеви 3 и 2 се појављују као бројеви елемената у одговарајућој класи конјугације. Решавањем система једначина добијамо да је  $\alpha = 0$ ,  $\beta = -1$ .

Табела 4.19: Таблица карактера  $S_3$  групе

$S_3$	$\{e\}$	$\{g_1, g_2, g_3\}$	$\{g_4, g_5\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	-1	1
$\chi^{(3)}$	2	0	-1

На основу тога добија се таблица карактера  $S_3$  групе дата у Табели 4.19.

Посматрајмо другу једнодимензиону иредуцибилну репрезентацију. Узимајући да је  $g_4 = g_5 = 1$ , док је  $g_1 = g_2 = g_3 = -1$ , можемо репродуковати Кејлијеву таблицу групе. Нпр.  $g_4 \cdot g_2 = g_1$ , што се слаже јер је  $1 \cdot (-1) = -1$ . Приметимо да из разлога репродукције Кејлијеве таблице не бисмо могли узети да је  $g_4 = g_5 = -1$ , а  $g_1 = g_2 = g_3 = 1$ , односно то не би била репрезентација групе  $S_3$ . Нпр. ако је  $g_4 = g_5 = -1$ , онда би било  $g_4 \cdot g_4 \neq g_5$ . Скаларни производ карактера две репрезентације је

$$\langle \chi^{(2)}, \chi^{(3)} \rangle = \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} \chi^{(2)*}(g) \chi^{(3)}(g) = 0. \quad (4.68)$$

Слично,

$$\langle \chi^{(2)}, \chi^{(2)} \rangle = \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} \chi^{(2)*}(g) \chi^{(2)}(g) = 1. \quad (4.69)$$

Односно,

$$\langle \chi^{(\alpha)}, \chi^{(\beta)} \rangle = \frac{1}{6} \sum_{g \in S_3} \chi^{(\alpha)*}(g) \chi^{(\beta)}(g) = \delta_{\alpha, \beta}. \quad (4.70)$$

Видимо да ниједна од две једнодимензионе иредуцибилне репрезентације  $S_3$  групе није верна, док може постојати дводимензиона иредуцибилна репрезентација  $S_3$  групе која јесте верна. Дводимензиону иредуцибилну репрезентацију  $S_3$  групе можемо наћи из изоморфизма  $S_3$  и  $D_3$ . У том случају  $\{g_4, g_5\}$  су ротације, док су  $\{g_1, g_2, g_3\}$  рефлексиије.

Матрице ротација добијамо из  $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ . За  $\theta = \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$  добијају се матрице:

$$D(g_5) = R\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$D(g_4) = R\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} \cos \frac{4\pi}{3} & -\sin \frac{4\pi}{3} \\ \sin \frac{4\pi}{3} & \cos \frac{4\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Специјално можемо видети и да је  $D(e) = R(0) = \begin{bmatrix} \cos 0 & -\sin 0 \\ \sin 0 & \cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Матрице

рефлексиија у овом случају су дате са  $\tilde{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ , где се за

$\theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$  добијају матрице:

$$D(g_1) = \tilde{R}(0) = \begin{bmatrix} \cos 0 & \sin 0 \\ \sin 0 & -\cos 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$D(g_2) = \tilde{R}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & \sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & -\cos \frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$D(g_3) = \tilde{R}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} \cos \frac{4\pi}{3} & \sin \frac{4\pi}{3} \\ \sin \frac{4\pi}{3} & -\cos \frac{4\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Видимо да матрице које одговарају елементима који припадају истој класи конјугације имају исти траг. На примеру  $D_6$  групе видећемо да обратно не важи. Проверимо сада

$$D(g_2) \cdot D(g_1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = D(g_5). \quad (4.71)$$

Множењем свих матрица репрезентације можемо се уверити да добијамо групу изоморфну  $S_3$  (видети Табелу 4.20).

**Пример 4.20.** Једнодимензионе репрезентације  $S_3$  групе налазе примену у системима идентичних честица у нерелативистичкој квантној механици. Размотримо систем од три идентичне честице, које се могу налазити у стањима  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$ . Потпуно симетрична таласна функција  $\Psi_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  у овом случају има облик:

$$\begin{aligned} \sqrt{6}\Psi_S &= \psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_2(\mathbf{r}_2)\psi_3(\mathbf{r}_3) + \psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_2(\mathbf{r}_3)\psi_3(\mathbf{r}_2) + \psi_1(\mathbf{r}_2)\psi_2(\mathbf{r}_1)\psi_3(\mathbf{r}_3) \\ &+ \psi_1(\mathbf{r}_2)\psi_2(\mathbf{r}_3)\psi_3(\mathbf{r}_1) + \psi_1(\mathbf{r}_3)\psi_2(\mathbf{r}_1)\psi_3(\mathbf{r}_2) + \psi_1(\mathbf{r}_3)\psi_2(\mathbf{r}_2)\psi_3(\mathbf{r}_1). \end{aligned}$$

Потпуно антисиметрична таласна функција  $\Psi_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  у овом случају има облик:

$$\begin{aligned} \sqrt{6}\Psi_A &= \psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_2(\mathbf{r}_2)\psi_3(\mathbf{r}_3) - \psi_1(\mathbf{r}_1)\psi_2(\mathbf{r}_3)\psi_3(\mathbf{r}_2) - \psi_1(\mathbf{r}_2)\psi_2(\mathbf{r}_1)\psi_3(\mathbf{r}_3) \\ &+ \psi_1(\mathbf{r}_2)\psi_2(\mathbf{r}_3)\psi_3(\mathbf{r}_1) + \psi_1(\mathbf{r}_3)\psi_2(\mathbf{r}_1)\psi_3(\mathbf{r}_2) - \psi_1(\mathbf{r}_3)\psi_2(\mathbf{r}_2)\psi_3(\mathbf{r}_1). \end{aligned}$$

Елементи репрезентација групе  $S_3$  пермутују индексе 1, 2 и 3 таласних функција. Стање  $\Psi_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  описује систем три бозона, а  $\Psi_A(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$  систем три фермиона. Више детаља се може наћи у [Шиф, Л. (1968); Хербут, Ф. (1999); Landau, L., Lifshitz, E. (1977)]. ■

Напишимо сада таблицу карактера  $D_4$  групе.  $D_4$  група има 8 елемената и 5 класа конјугације. Класе конјугације  $D_4$  групе су  $\{e\}, \{\rho^2\}$  (који се уз неутрални елемент налази у  $Z(D_4)$ ),  $\{\rho, \rho^3\}, \{\sigma_h, \sigma_v\}$  и  $\{\sigma_r, \sigma_1\}$ . Овој групи одговара таблица карактера приказана у Табели 4.21.

На основу релација ортогоналности добија се систем једначина

$$\begin{aligned} 2 + \alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\delta &= 0, \\ 2 + \alpha + 2\beta - 2\gamma - 2\delta &= 0, \\ 2 + \alpha - 2\beta + 2\gamma - 2\delta &= 0, \\ 2 + \alpha - 2\beta - 2\gamma + 2\delta &= 0, \end{aligned} \quad (4.72)$$

Табела 4.20: Кејлијева таблица групе  $S_3$ 

$\cdot$	$D(e)$	$D(g_1)$	$D(g_2)$	$D(g_3)$	$D(g_4)$	$D(g_5)$
$D(e)$	$D(e)$	$D(g_1)$	$D(g_2)$	$D(g_3)$	$D(g_4)$	$D(g_5)$
$D(g_1)$	$D(g_1)$	$D(e)$	$D(g_4)$	$D(g_5)$	$D(g_2)$	$D(g_3)$
$D(g_2)$	$D(g_2)$	$D(g_5)$	$D(e)$	$D(g_4)$	$D(g_3)$	$D(g_1)$
$D(g_3)$	$D(g_3)$	$D(g_4)$	$D(g_5)$	$D(e)$	$D(g_1)$	$D(g_2)$
$D(g_4)$	$D(g_4)$	$D(g_3)$	$D(g_1)$	$D(g_2)$	$D(g_5)$	$D(e)$
$D(g_5)$	$D(g_5)$	$D(g_2)$	$D(g_3)$	$D(g_1)$	$D(e)$	$D(g_4)$

Табела 4.21: Таблица карактера  $D_4$  групе

$D_4$	$\{e\}$	$\{\rho^2\}$	$\{\rho, \rho^3\}$	$\{\sigma_h, \sigma_v\}$	$\{\sigma_r, \sigma_1\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	1	1	-1	1	-1
$\chi^{(4)}$	1	1	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	2	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$

чије је решење  $\alpha = -2$ ,  $\beta = \gamma = \delta = 0$ . На основу тога је таблица карактера  $D_4$  групе дата у Табели 4.22.

Табела 4.22: Таблица карактера  $D_4$  групе

$D_4$	$\{e\}$	$\{\rho^2\}$	$\{\rho, \rho^3\}$	$\{\sigma_h, \sigma_v\}$	$\{\sigma_r, \sigma_1\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	1	1	-1	1	-1
$\chi^{(4)}$	1	1	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	2	-2	0	0	0

**Пример 4.21.** Испитати да ли сва множења Паулијевих матрица

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

генеришу групу изоморфну са диедарском групом  $D_4$ .

**Решење.** Множењем одговарајућих Паулијевих матрица се добија Кејлијева таблица приказана у Табели 4.23. Пошто се у Табели 4.23 сваки елемент у свакој врсти и свакој колони јавља тачно једном, скуп множења Паулијевих матрица  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  сачињава квазигрупу. На основу Тврђења 4.3 следи да је дати скуп група јер је множење коначних матрица асоцијативно. Добијена група је реда 8 и није Абелова. Даље, сваки елемент је

Табела 4.23: Таблица свих множења Паулијевих матрица  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ 

$\cdot$	1	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$i\sigma_3$	-1	$-\sigma_1$	$-\sigma_2$	$-i\sigma_3$
1	1	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$i\sigma_3$	-1	$-\sigma_1$	$-\sigma_2$	$-i\sigma_3$
$\sigma_1$	$\sigma_1$	1	$i\sigma_3$	$\sigma_2$	$-\sigma_1$	-1	$-i\sigma_3$	$-\sigma_2$
$\sigma_2$	$\sigma_2$	$-i\sigma_3$	1	$-\sigma_1$	$-\sigma_2$	$i\sigma_3$	-1	$\sigma_1$
$i\sigma_3$	$i\sigma_3$	$-\sigma_2$	$\sigma_1$	-1	$-i\sigma_3$	$\sigma_2$	$-\sigma_1$	1
-1	-1	$-\sigma_1$	$-\sigma_2$	$-i\sigma_3$	1	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$i\sigma_3$
$-\sigma_1$	$-\sigma_1$	-1	$-i\sigma_3$	$-\sigma_2$	$\sigma_1$	1	$i\sigma_3$	$\sigma_2$
$-\sigma_2$	$-\sigma_2$	$i\sigma_3$	-1	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$-i\sigma_3$	1	$-\sigma_1$
$-i\sigma_3$	$-i\sigma_3$	$\sigma_2$	$-\sigma_1$	1	$i\sigma_3$	$-\sigma_2$	$\sigma_1$	-1

сам себи инверзни изузев елемената  $\pm i\sigma_3$  ( $-i\sigma_3$  је инверзни елемент од  $i\sigma_3$ ). Неутрални елемент 1 ( $2 \times 2$  јединична матрица) је првог реда,  $\pm\sigma_1$ ,  $\pm\sigma_2$  и  $-1$  су елементи другог реда, док су  $\pm i\sigma_3$  елементи четвртог реда. Када се то упореди са диедарском групом  $D_4$ , видимо да имају исти број елемената истог реда и према Тврђењу 4.8, ове две групе су изоморфне. Видимо да у Табели 4.22 ова репрезентација одговара  $\chi^{(5)}$ . ■

Напишимо сада таблицу карактера групе  $Q_8$ . Класе конјугације групе  $Q_8$  су  $\{1\}, \{-1\}, \{i, -i\}, \{j, -j\}, \{k, -k\}$ . Ова група има исти број елемената (8) и класа конјугације (5) као и група  $D_4$ . И поред тога групе  $Q_8$  и  $D_4$  нису изоморфне. Група  $D_4$  има пет елемената другог реда  $\rho^2, \sigma_h, \sigma_v, \sigma_r, \sigma_1$ , док је  $-1$  једини елемент другог реда у групи  $Q_8$ . Таблица карактера групе  $Q_8$  дата је у Табели 4.24.

Табела 4.24: Таблица карактера  $Q_8$  групе

$Q_8$	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{i, -i\}$	$\{j, -j\}$	$\{k, -k\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	1	1	-1	1	-1
$\chi^{(4)}$	1	1	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	2	$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$

На основу релација ортогоналности добија се  $\alpha = -2, \beta = \gamma = \delta = 0$ , односно финална таблица карактера групе  $Q_8$  дата је у Табели 4.25. Групе  $Q_8$  и  $D_4$ , иако нису изоморфне, имају исту таблицу карактера. Ово нам говори да таблицу карактера треба користити само заједно са Кејлијевом таблицом групе. Она нам не говори ништа о редовима елемената групе. Ако су групе изоморфне, оне ће имати увек исту таблицу карактера. Обратно не важи.

**Пример 4.22.** Испитати да ли сва множења матрица

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \quad (4.73)$$

Табела 4.25: Таблица карактера  $Q_8$  групе

$Q_8$	$\{1\}$	$\{-1\}$	$\{i, -i\}$	$\{j, -j\}$	$\{k, -k\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	1	1	-1	1	-1
$\chi^{(4)}$	1	1	-1	-1	1
$\chi^{(5)}$	2	-2	0	0	0

чине групу. У случају да чине, испитати да ли је ова група изоморфна групи симетрија квадрата  $D_4$ .

**Решење.**

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I \quad (4.74)$$

$$A^3 = A \cdot A \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = -A \quad (4.75)$$

$$A^4 = I \quad (4.76)$$

$$B^2 = B \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I \quad (4.77)$$

$$B^3 = B \cdot B \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{bmatrix} = -B \quad (4.78)$$

$$B^4 = I \quad (4.79)$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix} = C \quad (4.80)$$

$$B \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix} = -C \quad (4.81)$$

Лако је показати да се преосталим множењима не добија ниједан нови елемент.  $A$ ,  $B$  и  $C$  су елементи четвртог реда. Група  $D_4$  има само два елемента четвртог реда,  $\rho$  и  $\rho^3$ , те стога ове групе нису изоморфне. Група из примера је изоморфна са групом кватерниона.

■

Табела 4.26: Таблица множења

$\cdot$	$I$	$-I$	$A$	$-A$	$B$	$-B$	$C$	$-C$
$I$	$I$	$-I$	$A$	$-A$	$B$	$-B$	$C$	$-C$
$-I$	$-I$	$I$	$-A$	$A$	$-B$	$B$	$-C$	$C$
$A$	$A$	$-A$	$-I$	$I$	$C$	$-C$	$-B$	$B$
$-A$	$-A$	$A$	$I$	$-I$	$-C$	$C$	$B$	$-B$
$B$	$B$	$-B$	$-C$	$C$	$-I$	$I$	$A$	$-A$
$-B$	$-B$	$B$	$C$	$-C$	$I$	$-I$	$-A$	$A$
$C$	$C$	$-C$	$B$	$-B$	$-A$	$A$	$-I$	$I$
$-C$	$-C$	$C$	$-B$	$B$	$A$	$-A$	$I$	$-I$

$D_6$  група има 6 класа конјугације и самим тим 6 иредуцибилних репрезентација. Од тога су четири једнодимензионе и две су дводимензионе  $4 \cdot 1^2 + 2 \cdot 2^2 = 12 = |D_6|$ . Таблица карактера дата је у Табели 4.27.

Табела 4.27: Таблица карактера  $D_6$  групе

$D_6$	$\{e\}$	$\{\rho^3\}$	$\{\rho, \rho^5\}$	$\{\rho^2, \rho^4\}$	$\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$	$\{\sigma_4, \sigma_5, \sigma_6\}$
$\chi^{(1)}$	1	1	1	1	1	1
$\chi^{(2)}$	1	1	1	1	-1	-1
$\chi^{(3)}$	1	-1	-1	1	-1	1
$\chi^{(4)}$	1	-1	-1	1	1	-1
$\chi^{(5)}$	2	-2	1	-1	0	0
$\chi^{(6)}$	2	2	-1	-1	0	0

Обратити пажњу да ако се узму матрице ротација  $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  за

$\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ , добијају се матрице:

$$D(\rho) = R\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{3} & -\sin \frac{\pi}{3} \\ \sin \frac{\pi}{3} & \cos \frac{\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$D(\rho^2) = R\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} \cos \frac{2\pi}{3} & -\sin \frac{2\pi}{3} \\ \sin \frac{2\pi}{3} & \cos \frac{2\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$D(\rho^3) = R(\pi) = \begin{bmatrix} \cos \pi & -\sin \pi \\ \sin \pi & \cos \pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$D(\rho^4) = R\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} \cos \frac{4\pi}{3} & -\sin \frac{4\pi}{3} \\ \sin \frac{4\pi}{3} & \cos \frac{4\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$D(\rho^5) = R\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} \cos \frac{5\pi}{3} & -\sin \frac{5\pi}{3} \\ \sin \frac{5\pi}{3} & \cos \frac{5\pi}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Видимо да трагови ових матрица одговарају у табlici карактера иредуцибилној репрезентацији  $\chi^{(5)}$ . Иако ове матрице заједно са јединичном чине иредуцибилну репрезентацију  $C_6$  групе, заједно са неких 6 матрица које представљају рефлексije чиниће дводимензиону иредуцибилну репрезентацију  $D_6$  групе. Разлог за ово је што неке од тих матрица рефлексija неће комутирати са ротацијама, јер  $D_6$  није Абелова група, док, како је  $C_6$  Абелова група, њене све иредуцибилне репрезентације су једнодимензионе. Уочимо на овом примеру матрица ротација да конјуговани елементи имају исте карактере.

Матрице рефлексija добијамо из  $\tilde{R}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$  за  $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ . Приметимо да за све ове матрице важи  $\text{Tr}(\tilde{R}(\theta)) = 0$  и  $\det(\tilde{R}(\theta)) = -1$ . Иако свака матрица рефлексija има траг нула, по 3 рефлексije чине једну класу конјугације и стога их је потребно пажљиво разврстати. Матрице рефлексija које одговарају елементима  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  представљају рефлексije у односу на дужи које спајају супротна темена правилног шестоугла:

$$D(\sigma_1) = \tilde{R}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$D(\sigma_2) = \tilde{R}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$D(\sigma_3) = \tilde{R}\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \text{ док су матрице које одговарају елементима } \sigma_4, \sigma_5 \text{ и}$$

$\sigma_6$  рефлексije у односу на дужи које спајају средине супротних страница правилног шестоугла

$$D(\sigma_4) = \tilde{R}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$$D(\sigma_5) = \tilde{R}(\pi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D(\sigma_6) = \tilde{R}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Узмимо исте матрице рефлексija за иредуцибилну репрезентацију  $\chi^{(6)}$ . Матрице ротација у овој иредуцибилној репрезентацији су  $D(\rho) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ,

$$D(\rho^2) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, D(\rho^3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, D(\rho^4) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, D(\rho^5) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

Репрезентације коначних група увек можемо изабрати да буду унитарне (видети Тврђење 4.16), па је  $D(g^{-1}) = (D(g))^{-1} = (D(g))^\dagger$ . Зато је

$$\chi(g^{-1}) = \text{Tr} D(g^{-1}) = \text{Tr} (D(g))^{-1} = \text{Tr} (D(g))^\dagger = \chi^*(g). \quad (4.82)$$

Отуда су вредности карактера реалне код класа конјугације код којих је сваки елемент конјугован свом инверзном елементу и због тога групе  $C_2$ ,  $S_3$ ,  $D_4$ ,  $Q_8$  и  $D_6$  имају реалне таблице карактера.

## 4.2 Директна сума и директни производ репрезентација

Ако су дате две репрезентације групе  $G$ , од њих је могуће конструисати нове репрезентације у виду директне суме и директног производа репрезентација.

**Дефиниција 4.17.** Нека су  $\mathcal{D} = \{D(g_i)\}$  и  $\tilde{\mathcal{D}} = \{\tilde{D}(g_i)\}$  репрезентације групе  $G$ . Онда је њихова директна сума

$$D(g_i) \oplus \tilde{D}(g_i) = \begin{bmatrix} D(g_i) & 0 \\ 0 & \tilde{D}(g_i) \end{bmatrix}, \forall g_i \in G \quad (4.83)$$

такође репрезентација групе  $G$ .

**Дефиниција 4.18.** Нека су  $\mathcal{D} = \{D(g_i)\}$  и  $\tilde{\mathcal{D}} = \{\tilde{D}(g_i)\}$  репрезентације групе  $G$ . Онда је и њихов директни (Кронекеров) производ<sup>9</sup>  $D(g_i) \otimes \tilde{D}(g_i), \forall g_i \in G$  такође репрезентација од  $G$ .

**Пример 4.23.** Дате су две репрезентације  $C_2$  групе:

$$D(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

и

$$\tilde{D}(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{D}(g) = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}.$$

Наћи директну суму и директни производ репрезентација.

**Решење.** Директна сума репрезентација је дата са

$$D(e) \oplus \tilde{D}(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.84)$$

<sup>9</sup>Ако је  $A$  матрица реда  $m \times n$ , а  $B$  матрица реда  $p \times q$ , тада је Кронекеров производ  $A \otimes B$  блок матрица реда  $pm \times qn$  облика

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}.$$

$$D(g) \oplus \tilde{D}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.85)$$

и можемо се уверити да је такође репрезентација  $C_2$  групе. Директни производ репрезентација

$$D(e) \otimes \tilde{D}(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} & 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.86)$$

$$D(g) \otimes \tilde{D}(g) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} & 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \\ 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} & 0 \cdot \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.87)$$

је исто репрезентација  $C_2$  групе. ■

### 4.2.1 Регуларна репрезентација

За сваку коначну групу може се дефинисати тзв. регуларна репрезентација која је саздана од пермутационих матрица реда који одговара реду групе. Замислимо шаховску таблу произвољне коначне димензије  $N \times N$  и на њој поставимо  $N$  топова тако да се међусобно не туку. На местима где се налазе топови ставимо јединице, а на свим осталим местима нуле. Матрица коју смо добили на тај начин је пермутациона. Један пример пермутационе матрице је Паулијева матрица  $\sigma_1 = \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ . Када ова матрица множи

неку матрицу  $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$  са леве стране, добија се

$$\sigma_1 \cdot A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}, \quad (4.88)$$

а када је множи са десне стране, добија се

$$A \cdot \sigma_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix}. \quad (4.89)$$

У оба случаја Паулијева  $\sigma_1$  матрица је само пермутовала елементе матрице  $A$ . Код множења са леве стране пермутовала је врсте, а код множења са десне стране колоне матрице  $A$ . Знајући да је Паулијева  $\sigma_1$  матрица пермутациона, лако можемо решити њен

својствени проблем. Како је  $\sigma_1$  ермитска матрица, она има реалне својствене вредности, а како је и унитарна, модул њених својствених вредности мора да буде  $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$ . Како је и  $\text{Tr}(\sigma_1) = 0$ , својствене вредности матрице  $\sigma_1$  су  $\lambda_1 = 1$  и  $\lambda_2 = -1$ . Знајући да је ова матрица пермутациона, њени нормирани својствени вектори су  $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  и

$$|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

**Пример 4.24.** Проверити да ли матрице  $D(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $D(g_1) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ,  
 $D(g_2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $D(g_3) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $D(g_4) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  и  $D(g_5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$  чине

репрезентацију  $S_3$  групе.

**Решење.** Има шест различитих матрица које су затворене за операцију множења матрица. Множењем матрица се можемо уверити да је  $D(g_i \cdot g_j) = D(g_i) \cdot D(g_j)$ , чиме наведени скуп матрица јесте репрезентација  $S_3$  групе. Матрице  $D(g_1), D(g_2), D(g_3)$  представљају транспозиције, док  $D(g_4)$  и  $D(g_5)$  представљају пермутације у  $S_3$  групи које не остављају ниједан елемент фиксним. Ово јесте репрезентација  $S_3$  групе и састоји се од пермутационих матрица, али није регуларна репрезентација. ■

Регуларна репрезентација постоји за сваку коначну групу и она је на неки начин дејство групе на саму себе. У случају регуларне репрезентације димензија векторског простора на који делују елементи репрезентације једнака је реду групе  $|G|$ . Нека су базисни вектори  $\{|g_i\rangle\}_{i=1}^{|G|}$ . За сваки елемент  $g \in G$  дејство оператора  $D(g)$  на базисне векторе је дефинисано са

$$D(g)|g_i\rangle = |g \cdot g_i\rangle, \quad (4.90)$$

односно важи

$$D(g_1) \cdot D(g_2)|g_i\rangle = |g_1 \cdot g_2 \cdot g_i\rangle = D(g_1 \cdot g_2)|g_i\rangle, \quad (4.91)$$

јер је  $D(g_1) \cdot D(g_2) = D(g_1 \cdot g_2)$ . Регуларна репрезентација је увек редуцибилна и може бити представљена као

$$D(g) = \bigoplus_{\mu} a_{\mu} D^{(\mu)}(g), \quad (4.92)$$

где је  $a_{\mu}$  цео број који показује колико пута се нека иредуцибилна репрезентација појављује у регуларној репрезентацији. Свака иредуцибилна репрезентација појављује се онолико пута колика је димензија дате иредуцибилне репрезентације.

**Пример 4.25.** Конструисати регуларну репрезентацију  $C_2$  групе.

**Решење.** Како  $C_2$  група садржи два елемента, онда базис векторског простора чине два вектора  $|e\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  и  $|g\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ . Дејство елемената операције на ове базисне векторе је дато са  $D(e)|e\rangle = |e \cdot e\rangle = |e\rangle$ ,  $D(g)|e\rangle = |g \cdot e\rangle = |g\rangle$ ,  $D(e)|g\rangle = |e \cdot g\rangle = |g\rangle$  и  $D(g)|g\rangle = |g \cdot g\rangle = |e\rangle$ . У овако одабраном базису

$$D(e) = \begin{bmatrix} \langle e|D(e)|e\rangle & \langle e|D(e)|g\rangle \\ \langle g|D(e)|e\rangle & \langle g|D(e)|g\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle e|e\rangle & \langle e|g\rangle \\ \langle g|e\rangle & \langle g|g\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.93)$$

$$D(g) = \begin{bmatrix} \langle e|D(g)|e\rangle & \langle e|D(g)|g\rangle \\ \langle g|D(g)|e\rangle & \langle g|D(g)|g\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle e|g\rangle & \langle e|e\rangle \\ \langle g|g\rangle & \langle g|e\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.94)$$

Матрица за  $D(g)$  у овако одабраном базису је Паулијева пермутациона матрица, чији смо својствени проблем разматрали и одредили смо да су њени својствени вектори  $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  и  $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ . Ређањем својствених вектора  $D(g)$  у колоне добија се унитарна матрица  $U^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ , чију инверзну матрицу добијамо транспоновањем и комплексним конјуговањем матричних елемената. Инверзну матрицу матрице  $U^\dagger$  означавамо са  $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ , односно ова матрица је сама себи инверзна. Трансформацију сличности примењујемо на све елементе репрезентације

$$UD(e)U^\dagger = \tilde{D}(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1 \oplus 1, \quad (4.95)$$

$$UD(g)U^\dagger = \tilde{D}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 1 \oplus -1. \quad (4.96)$$

$\tilde{D} = \{\tilde{D}(e), \tilde{D}(g)\}$  је еквивалентна репрезентација репрезентацији  $D = \{D(e), D(g)\}$ . На овај начин смо показали и да важи једнакост (4.92). ■

**Пример 4.26.** Конструисати регуларну репрезентацију  $S_3$  групе.

**Решење.** Група  $S_3$  има шест елемената, па је одговарајући векторски простор шестодимензион. Узећемо за базис стандардни базис овог простора:

$$|e\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |g_1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |g_2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |g_3\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, |g_4\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, |g_5\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица  $D(g_1)$  у овако одабраном базису је

$$\begin{bmatrix}
 \langle e|D(g_1)|e \rangle & \langle e|D(g_1)|g_1 \rangle & \langle e|D(g_1)|g_2 \rangle & \langle e|D(g_1)|g_3 \rangle & \langle e|D(g_1)|g_4 \rangle & \langle e|D(g_1)|g_5 \rangle \\
 \langle g_1|D(g_1)|e \rangle & \langle g_1|D(g_1)|g_1 \rangle & \langle g_1|D(g_1)|g_2 \rangle & \langle g_1|D(g_1)|g_3 \rangle & \langle g_1|D(g_1)|g_4 \rangle & \langle g_1|D(g_1)|g_5 \rangle \\
 \langle g_2|D(g_1)|e \rangle & \langle g_2|D(g_1)|g_1 \rangle & \langle g_2|D(g_1)|g_2 \rangle & \langle g_2|D(g_1)|g_3 \rangle & \langle g_2|D(g_1)|g_4 \rangle & \langle g_2|D(g_1)|g_5 \rangle \\
 \langle g_3|D(g_1)|e \rangle & \langle g_3|D(g_1)|g_1 \rangle & \langle g_3|D(g_1)|g_2 \rangle & \langle g_3|D(g_1)|g_3 \rangle & \langle g_3|D(g_1)|g_4 \rangle & \langle g_3|D(g_1)|g_5 \rangle \\
 \langle g_4|D(g_1)|e \rangle & \langle g_4|D(g_1)|g_1 \rangle & \langle g_4|D(g_1)|g_2 \rangle & \langle g_4|D(g_1)|g_3 \rangle & \langle g_4|D(g_1)|g_4 \rangle & \langle g_4|D(g_1)|g_5 \rangle \\
 \langle g_5|D(g_1)|e \rangle & \langle g_5|D(g_1)|g_1 \rangle & \langle g_5|D(g_1)|g_2 \rangle & \langle g_5|D(g_1)|g_3 \rangle & \langle g_5|D(g_1)|g_4 \rangle & \langle g_5|D(g_1)|g_5 \rangle
 \end{bmatrix}
 \quad (4.97)$$

што се даље своди на

$$\begin{aligned}
 D(g_1) &= \begin{bmatrix}
 \langle e|g_1 \rangle & \langle e|e \rangle & \langle e|g_4 \rangle & \langle e|g_5 \rangle & \langle e|g_2 \rangle & \langle e|g_3 \rangle \\
 \langle g_1|g_1 \rangle & \langle g_1|e \rangle & \langle g_1|g_4 \rangle & \langle g_1|g_5 \rangle & \langle g_1|g_2 \rangle & \langle g_1|g_3 \rangle \\
 \langle g_2|g_1 \rangle & \langle g_2|e \rangle & \langle g_2|g_4 \rangle & \langle g_2|g_5 \rangle & \langle g_2|g_2 \rangle & \langle g_2|g_3 \rangle \\
 \langle g_3|g_1 \rangle & \langle g_3|e \rangle & \langle g_3|g_4 \rangle & \langle g_3|g_5 \rangle & \langle g_3|g_2 \rangle & \langle g_3|g_3 \rangle \\
 \langle g_4|g_1 \rangle & \langle g_4|e \rangle & \langle g_4|g_4 \rangle & \langle g_4|g_5 \rangle & \langle g_4|g_2 \rangle & \langle g_4|g_3 \rangle \\
 \langle g_5|g_1 \rangle & \langle g_5|e \rangle & \langle g_5|g_4 \rangle & \langle g_5|g_5 \rangle & \langle g_5|g_2 \rangle & \langle g_5|g_3 \rangle
 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix}
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

На овај начин налазимо и остале матрице регуларне репрезентације:

$$\begin{aligned}
 D(e) &= \begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}, \quad D(g_2) = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}, \quad D(g_3) = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}, \\
 D(g_4) &= \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
 \end{bmatrix}, \quad D(g_5) = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Може се показати да је  $D = 1 \oplus 1' \oplus 2 \oplus 2$ , где 1 и 1' означавају две различите једнодимензионе иредуцибилне репрезентације. ■

### 4.3 Лијеве групе

Код увођења диедарских група видели смо да је група симетрија квадрата већа од групе симетрија једнакоугаоног троугла. А опет група симетрија правилног шестоугла је већа од групе симетрија квадрата. То значи да је правилан шестоугао симетричнији од квадрата, а да је квадрат симетричнији од једнакоугаоног троугла. Међутим, без обзира на то колико су велике, групе симетрија правилних  $n$ -тоуглова су све коначне. За разлику од тога, група симетрија круга је бесконачна. Свака ротација око осе која пролази кроз центар круга представља његову симетрију, а како је угао ротације произвољан реалан број из интервала  $[0, 2\pi)$ , следи да таквих симетрија има бесконачно много. Да будемо још прецизнији, таквих симетрија има непребројиво много. Такође, свака рефлексija у односу на било коју праву линију која пролази кроз центар круга је симетрија круга. Закључак је да је група симетрија круга континуална група.

Размотримо притисак-температура ( $PT$ ) фазни дијаграм, који се често проучава у термодинамици. На њему, у упрошћеној слици, уочавамо три основне фазе: чврсту, течну и гасовиту<sup>10</sup>, као и тројну и критичну тачку (видети Слику 4.10). Са  $PT$  дијаграма се види да се критична тачка налази између течне и гасовите фазе. То је крајња тачка криве фазне равнотеже, где престаје разлика између течне и гасовите фазе, тј. систем прелази у хомогени флуид. Природно се намеће питање зашто не постоји аналогна критична тачка између чврсте и течне фазе, односно да ли би се она могла појавити при довољно великом притиску. Одговор је негативан. Разлог лежи у суштинској разлици у симетрији ових фаза: чврста фаза поседује дискретну групу симетрија (условљену кристалном решетком), док течна фаза има континуалну групу симетрија (инваријантност на произвољне транслације и ротације). Критична тачка се, дакле, јавља између фаза које имају исту врсту — континуалну — симетрију, док између фаза са квалитативно различитим типовима симетрије она не постоји.

За опис континуалних симетрија у физици користе се Лијеве групе. Лијеве групе су групе код којих је скуп  $G$  уједно и глатка (диференцијабилна) многострукост. Код Лијевих група су композиција и узимање инверза глатка пресликавања. Глаткост пресликавања композиције и инверза значи да су пресликавања

$$\mu : G \times G \rightarrow G, \quad \mu(g, h) = gh, \quad (4.97)$$

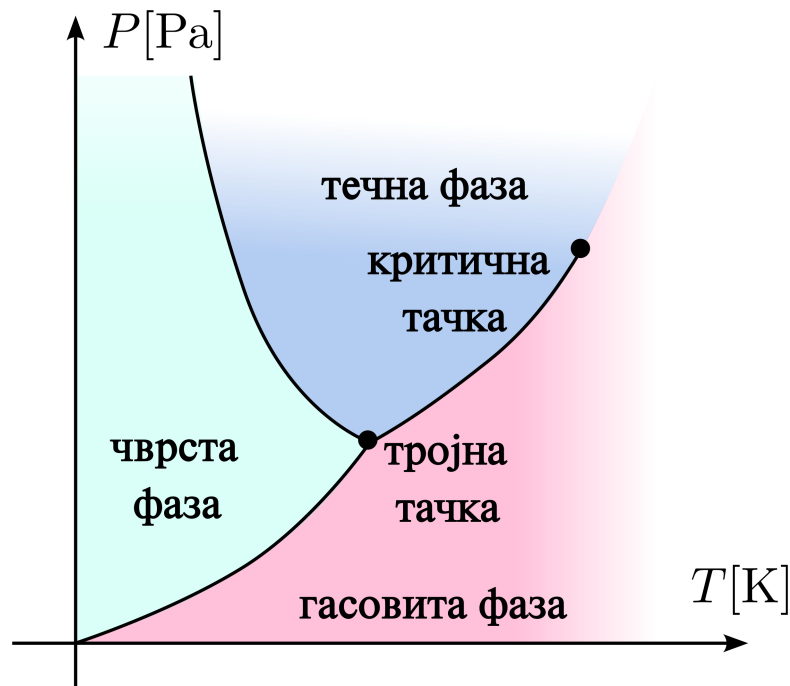
и

$$\iota : G \rightarrow G, \quad \iota(g) = g^{-1} \quad (4.98)$$

класе  $C^\infty$ . Најједноставнији пример Лијеве групе је  $(\mathbb{R}, +)$ , где је  $\mu : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  дато са  $\mu(x, y) = x + y$ , док је  $\iota : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  дато са  $\iota(x) = -x$ , јер су обе функције у  $C^\infty$ . Група  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$  је такође Лијева група, где је  $\mu(x, y) = xy$  и  $\iota(x) = \frac{1}{x}$ .

Ми ћемо се у овој глави углавном бавити Лијевим групама матрица. Тако ћемо најпре дефинисати општу (или генералну) линеарну групу (у ознаци  $GL_n(\mathbb{F})$ , где је  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  или  $\mathbb{R}$ ) као скуп свих инвертибилних матрица типа  $n \times n$  над пољем  $\mathbb{F}$ . При томе се подразумева да је операција композиције за  $GL_n(\mathbb{F})$  дата матричним множењем. У случају Лијевих група не важе многа тврђења која су важила у случају коначних група.

<sup>10</sup>Анализа се може знатно продубити разматрањем прелаза између различитих чврстих фаза, на пример прелаза из запремински центриране у површински центрирану кубну кристалну структуру.

Слика 4.10:  $PT$  фазни дијаграм.

Једно од њих је Лагранжева теорема, јер у случају Лијевих група имамо и елементе бесконачног реда. Штавише, и производ два елемента коначног реда може бити елемент бесконачног реда.

**Пример 4.27.** Производ два елемента другог реда  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  и  $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$  је елемент бесконачног реда  $AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Математичком индукцијом се можемо уверити да је  $(AB)^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ . Пример је преузет из [Груловић (1997)]. ■

Такође код група  $GL_n(\mathbb{R})$  центар има бесконачно много елемената.

**Пример 4.28.** Наћи центар групе  $GL_2(\mathbb{R})$ .

**Решење.** Сваки елемент групе  $GL_2(\mathbb{R})$  се може записати као

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{12} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_{21} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_{22} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.99)$$

где  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  и  $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ . Да би нека матрица  $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  припадала центру групе, довољно је да комутира са сваком од матрица  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  и да је  $ad - bc \neq 0$ . Размотримо шта повлачи комутирање са првом од матрица. Да би матрице комутирале

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.100)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.101)$$

мора да важи да је  $b = c = 0$ . Сада уз овај услов разматрамо комутирање са матрицом  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Важи да је

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.102)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.103)$$

одакле имамо да је  $a = d$ . Одатле је очито да је центар групе  $Z(GL_2(\mathbb{R})) = \{aI \mid a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$ , где је  $I$   $2 \times 2$  јединична матрица. ■

Приметимо да је  $GL_1(\mathbb{R})$  заправо  $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ , јер је то скуп инвертибилних матрица типа  $1 \times 1$  над пољем реалних бројева. Како реални бројеви комутирају,  $Z(GL_1(\mathbb{R})) = GL_1(\mathbb{R})$ .

Различите матричне Лијеве групе можемо увести као подгрупе од  $GL_n(\mathbb{C})$ .

**Дефиниција 4.19.** Матрична Лијева група  $G$  је подгрупа од  $GL_n(\mathbb{C})$  тако да важи следеће: ако је  $\{A_k\}$  низ матрица у  $G$  и

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = A, \quad (4.104)$$

тада  $A \in G$  или  $A$  није инвертибилна матрица.

Другим речима, Лијева група  $G$  је затворена подгрупа<sup>11</sup> од  $GL_n(\mathbb{C})$  [Hall, B. (2015)]. Димензија Лијеве групе је једнака броју независних реалних параметара који дефинишу одговарајућу матрицу. Тако је  $\dim[GL_n(\mathbb{R})] = n^2$  јер је матрица типа  $n \times n$  одређена са  $n^2$  реалних елемената. Слично,  $\dim[GL_n(\mathbb{C})] = 2n^2$ . Неке значајне Лијеве групе су

1. Специјална линеарна група

$$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\} \quad (4.105)$$

2. Унитарна група

$$U(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{C}) \mid A^\dagger A = AA^\dagger = I\} \quad (4.106)$$

3. Ортогонална група

$$O(n) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) \mid A^T A = AA^T = I\} \quad (4.107)$$

4. Специјална унитарна група

$$SU(n) = \{A \in U(n) \mid \det A = 1\} \quad (4.108)$$

5. Специјална ортогонална група

$$SO(n) = \{A \in O(n) \mid \det A = 1\} \quad (4.109)$$

6. Уопштена ортогонална група

$$O(n, k) = \{A \in GL_{n+k}(\mathbb{R}) \mid A^T g A = g\}, \quad (4.110)$$

где је

$$g = \text{diag} \left\{ \underbrace{1, 1, \dots, 1}_{n \text{ пута}}; \underbrace{-1, -1, \dots, -1}_{k \text{ пута}} \right\} \quad (4.111)$$

**Пример 4.29.** Испитати који скупови матрица формирају групу у односу на множење матрица

- $\{A \in SL_3(\mathbb{Z}) \mid a_{11} = 1\}$ ,
- $\left\{ A \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ ,
- $\left\{ A \in O_2(\mathbb{Q}) \mid A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ .

**Решење.** *Први начин:* Посматрајмо производ две матрице овог типа

$$\begin{bmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

<sup>11</sup>Мисли се на затвореност у тополошком смислу.

где су коефицијенти  $c_{ij}$  добијени множењем матрица. Да бисмо имали затвореност, потребно је да за сваки избор матрица  $A$  и  $B$  добијемо да је  $c_{11} = 1 + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1$ . Једини услов поред  $a_{11} = 1$  и да матрице имају целобројне матричне елементе, је да су детерминанте матрица једнаке 1. Нека је матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.113)$$

Тривијално рачунање детерминанте развојем по првој колони даје  $\det(A) = 1$ . Изаберимо матрицу

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.114)$$

Слично се можемо уверити да је детерминанта ове матрице 1. Међутим, кад нађемо производ ове две матрице  $C = A \cdot B$ , добијамо да је  $c_{11} = 6 \neq 1$ . Одатле следи да немамо затвореност, па  $\{A \in \text{SL}_3(\mathbb{Z}) \mid a_{11} = 1\}$  није група.

*Други начин:* Јасно је да одсуство затворености скупа за операцију можемо показати на различите начине. Можемо се уверити да матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a_{23} \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}. \quad (4.115)$$

има детерминанту 1 за ма коју целобројну вредност  $a_{23}$ . Множењем две овакве матрице добијамо да не постоји затвореност скупа, па  $\{A \in \text{SL}_3(\mathbb{Z}) \mid a_{11} = 1\}$  није група.

б) Из

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

следи да је  $a = 1$ ,  $c = 0$ . На основу тога елементи су облика  $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ ,  $b, d \in \mathbb{R}$ . Како

ове матрице нису регуларне за  $d = 0$ , елементи  $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $b \in \mathbb{R}$  немају инверзне, те стога задати скуп матрица у односу на операцију множења матрица није група.

в) Из

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.117)$$

слиди да је  $a = 1$ ,  $c = 0$ . На основу тога елементи су облика  $\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$ . Како су елементи ортогоналне матрице, онда важи да је

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + b^2 & bd \\ bd & d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.118)$$

На основу тога је  $b = 0$ ,  $d = \pm 1$  односно ово је група са елементима  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  и изоморфна је  $C_2$  групи. ■

### 4.3.1 Лијева алгебра

**Дефиниција 4.20.** Лијева алгебра над пољем  $\mathbb{F}$  ( $\mathbb{R}$  или  $\mathbb{C}$ ) је векторски простор  $\mathfrak{g}$  на ком је дефинисана операција  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  таква да важи  $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall x, y, z \in \mathfrak{g}$ :

1) затвореност

$$[x, y] \in \mathfrak{g}, \quad (4.119)$$

2) билинеарност

$$[\alpha x + \beta y, z] = \alpha[x, z] + \beta[y, z], \quad (4.120)$$

3) антисиметричност

$$[x, y] = -[y, x], \quad (4.121)$$

4) Јакобијев идентитет

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0. \quad (4.122)$$

**Пример 4.30.** Скуп свих реалних матрица типа  $n \times n$ ,  $A, B, C, \dots$  са операцијом сабирања матрица и множења матрица скаларом је векторски простор. Ако дефинишемо још комутатор матрица  $[A, B] = AB - BA$ , дати векторски простор са комутатором је Лијева алгебра. ■

С обзиром да је коначнодимензиона Лијева алгебра  $\mathfrak{g}$  векторски простор, можемо изабрати базис  $G_1, G_2, \dots, G_n$ . Тада се сваки елемент  $x \in \mathfrak{g}$  може записати као линеарна комбинација

$$x = \alpha_1 G_1 + \alpha_2 G_2 + \dots + \alpha_n G_n, \quad (4.123)$$

где  $\alpha_i, i = 1, \dots, n \in \mathbb{F}$ . Димензија векторског простора  $\mathfrak{g}$  је број вектора у неком његовом базису. Како базисни вектори генеришу векторски простор, зовемо их генераторима. Специјално, у случају Лијеве алгебре имамо као додатак и комутационе релације за генераторе

$$[G_\alpha, G_\beta] = \sum_{\gamma} f_{\alpha\beta\gamma} G_\gamma, \quad (4.124)$$

где су  $f_{\alpha\beta\gamma}$  структурне константе, које зависе од избора базиса у  $\mathfrak{g}$ . Ако Лијева алгебра потиче од неке Лијеве групе, онда су њени генератори заправо генератори инфинитезималних трансформација. Све Лијеве алгебре коришћене у овој глави биће коначнодимензионе.

### 4.3.2 Група транслација

Развој експоненцијалне функције у Тејлоров ред је дат са  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Исти развој важи и у комплексној анализи  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , а важи и у случају оператора  $e^{\alpha A} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} A^n$ . У случају мултипликативног оператора  $A = x$  имамо

$$e^{\alpha x} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha^2}{2!} x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} x^n, \quad (4.125)$$

а у случају диференцијалног оператора  $A = \frac{d}{dx}$

$$e^{\alpha \frac{d}{dx}} = 1 + \alpha \frac{d}{dx} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n}. \quad (4.126)$$

У случају мултипликативног оператора, као и диференцијалног оператора, ми посматрамо њихово дејство на неку диференцијабилну функцију  $f(x)$ . Дејством оператора  $e^{\alpha \frac{d}{dx}}$  на функцију  $f(x)$  добија се

$$e^{\alpha \frac{d}{dx}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} f(x) = f(x + \alpha). \quad (4.127)$$

У последњем кораку препознали смо развој у Тејлоров ред функције  $f(x + \alpha)$ . Посматрајући израз  $e^{\alpha \frac{d}{dx}} f(x) = f(x + \alpha)$ , видимо да је  $e^{\alpha \frac{d}{dx}}$  оператор транслације, а како је  $\alpha$  континуални параметар, можемо да извршимо произвољну транслацију аргумента функције. Композицијом ових оператора транслације можемо се уверити да они чине групу:

1) Затвореност: За  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  важи да је

$$e^{\alpha \frac{d}{dx}} e^{\beta \frac{d}{dx}} = e^{(\alpha+\beta) \frac{d}{dx}}, \quad (4.128)$$

2) Асоцијативност: Лако је уверити се да асоцијативност важи,

3) Неутрални елемент: Неутрални елемент имамо за  $\alpha = 0$ ,

4) Инверзни елемент: Инверзни елемент, елемента  $e^{\alpha \frac{d}{dx}}$  је  $e^{-\alpha \frac{d}{dx}}$ .

На основу тога скуп елемената  $g(\alpha) = e^{\alpha \frac{d}{dx}}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$  у односу на операцију композиције је Лијева група. У квантној механици то записујемо  $g(\alpha) = e^{-\alpha \frac{d}{dx}}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , јер је то транслација таласног пакета удесно за  $\alpha$ , па ћемо надаље користити ову дефиницију. Ова група има непребројиво много елемената, има један континуални параметар  $\alpha$  и испоставља се да има само један генератор.

**Дефиниција 4.21.** Генератор се дефинише као

$$G = i \left. \frac{dg}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = -i e^{-\alpha \frac{d}{dx}} \left. \frac{d}{dx} \right|_{\alpha=0} = -i \frac{d}{dx}, \quad (4.129)$$

одакле видимо да је генератор транслација дуж  $x$ -осе оператор импулса  $\hat{p}_x$ . Оваквим избором генератора елемент групе добијамо као  $g(\alpha) = e^{-i\alpha G}$ .

У литератури постоје различите конвенције за дефиницију генератора. Генератор се може дефинисати и као  $G = \left. \frac{dg}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$ , али у том случају он неће бити ермитски оператор (видети [Zee, A. (2016); Дамњановић, М. (2016)]). Користи се и конвенција  $G = -i \left. \frac{dg}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$ , у оквиру које ће генератор бити ермитски оператор (видети [Хибш, Т. (2011)]). У овом случају елементе групе добијамо као  $g(\alpha) = e^{i\alpha G}$ .

**Пример 4.31.** Написати временски независну Шредингерову једначину

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (4.130)$$

у импулсној репрезентацији ако се честица креће у потенцијалу  $V(x) = V_0 \cos(bx)$ .

**Решење.** Овај пример је већ разматран у Глави 1. У квантној механици оператор координате и оператор импулса задовољавају комутациону релацију

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar, \quad (4.131)$$

при чему смо оперatore означили капицама да бисмо избегли евентуалну забуну. У координатној репрезентацији је оператор  $\hat{x}$  мултипликативан, а оператор импулса диференцијалан  $\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx}$ . У импулсној репрезентацији је ситуација обрнута: оператор  $\hat{p}$  је мултипликативан, а оператор координате  $\hat{x} = i\hbar \frac{d}{dp}$  диференцијалан. Знаци у горњим дефиницијама су одабрани тако да комутациона релација (4.131) буде увек задовољена. Покушајмо овај проблем да решимо применом групе транслација, знајући да је  $e^{\alpha \frac{d}{dx}} \psi(x) = \psi(x + \alpha)$ . У том случају генератор групе транслација је оператор импулса. За транслације у импулсној репрезентацији важи  $e^{\alpha \frac{d}{dp}} \tilde{\psi}(p) = \tilde{\psi}(p + \alpha)$  и генератор транслација је оператор координате. У изразу за потенцијал  $V(x) = V_0 \cos(bx) = V_0(e^{ibx} + e^{-ibx})/2$ , прелазак у импулсну репрезентацију се може извршити заменом  $x \rightarrow i\hbar \frac{d}{dp}$ . Одатле се директно добија једначина

$$\frac{p^2}{2m} \tilde{\psi}(p) + \frac{V_0}{2} [\tilde{\psi}(p - \hbar b) + \tilde{\psi}(p + \hbar b)] = E\tilde{\psi}(p). \quad (4.132)$$

■

### 4.3.3 Ротациона група

Размотримо ротације у  $n$ -димензионом простору и вектор  $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \end{bmatrix}^T$ . Ротација је линеарна трансформација која очувава дужину вектора

$$x_i \rightarrow x'_i = \sum_{j=1}^n R_{ij} x_j = R_{ij} x_j, \quad (4.133)$$

где у наставку користимо Ајнштајнову конвенцију о сумирању по поновљеним индексима. Одатле је

$$x_i x_i = x'_i x'_i = x_j x_j = \delta_{jk} x_j x_k. \quad (4.134)$$

Такође је

$$x'_i x'_i = R_{ij} x_j R_{ik} x_k = R_{ij} R_{ik} x_j x_k = R_{ji}^T R_{ik} x_j x_k = (R^T R)_{jk} x_j x_k, \quad (4.135)$$

што значи да је  $(R^T R)_{jk} = \delta_{jk}$ , одакле директно следи

$$R^T R = I, \quad (4.136)$$

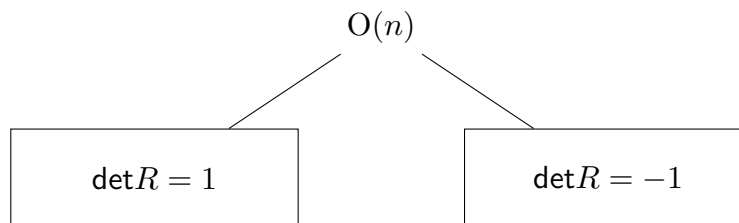
односно  $R$  је ортогонална матрица. За коначне матрице одатле важи да је  $RR^T = I$ . Специфицирајмо сада матрицу ротација у форми

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.137)$$

Видимо да када množимо овом матрицом вектор  $\mathbf{r} = [x_1 \ x_2 \ x_3]^T$ , координате  $x_1$  и  $x_2$  се мењају, док  $x_3$  остаје фиксно. У три димензије можемо увек замислити осу ротације и дефинисати  $R(\mathbf{n}, \theta)$ , где је  $\mathbf{n}$  јединични вектор који дефинише осу око које се врши ротација. Међутим, треба имати у виду да је овај начин размишљања последица чињенице да разматрамо тродимензиони простор. У две димензије овакве ротације посматрамо као ротације око координатног почетка. Нема треће димензије. Некада ипак замислимо ту трећу димензију, када нам то олакшава решавање проблема. У више димензија нема смисла специфицирати осу ротације. На пример, у четири димензије вектор је  $[x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4]^T$  и ако се ротација врши у  $x_1 x_2$  равни, читав потпростор остаје нетакнут. Стога у више од три димензије не говоримо о осам ротације. Можемо показати да матрице ротација чине групу у односу на множење матрица. Ово је ортогонална група и означава се са  $O(n)$ , где  $n$  представља тип  $n \times n$  матрица ротација, односно говори да се ротације врше у  $n$ -димензионом простору. Из  $R^T R = I$  имамо да је  $(\det R)^2 = 1$ , односно да је  $\det R = \pm 1$ . Елементе групе којима одговара услов  $\det R = 1$  називамо правим ротацијама. Размотримо у тродимензионом простору трансформацију  $x_1 \rightarrow -x_1, x_2 \rightarrow x_2,$

$x_3 \rightarrow x_3$ . Ова трансформација, записана матрицом  $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in O(3)$ , није ротација

већ рефлексја у односу на  $x_2 x_3$  раван. Можемо поставити питање зашто уопште да дозвољавамо да рефлексја буде у ротационој групи. Посматрајмо парност  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ , односно  $x_1 \rightarrow -x_1, x_2 \rightarrow -x_2, x_3 \rightarrow -x_3$ . Ово није ротација, али ће у просторима парне димензије инвертовање знака свих координата бити ротација. Тако да је једини начин генерализације да све ове трансформације убацимо у ротациону групу.



Слика 4.11:  $O(n)$  група.

Подгрупа  $O(n)$  групе коју чине матрице чија је детерминанта једнака јединици,  $\det R = 1$ , је специјална ортогонална група  $SO(n)$  (видети Сliku 4.11). Скуп матрица

чија је детерминанта  $\det R = -1$  не формира групу, јер нити садржи јединичну матрицу (неутрални елемент), нити је групоид. На основу  $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B$ , лако видимо да множењем две матрице које имају детерминанту  $-1$ , добијамо матрицу која има детерминанту једнаку  $1$ .

#### 4.3.4 Генератори ротација

Сва множења матрица ротација<sup>12</sup>

$$R_1(\theta_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ 0 & \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix}, \quad (4.138)$$

$$R_2(\theta_2) = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & 0 & \sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{bmatrix}, \quad (4.139)$$

$$R_3(\theta_3) = \begin{bmatrix} \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ \sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.140)$$

формирају  $SO(3)$  групу. Генераторе ротација добијамо из матрица ротација као:

$$\begin{aligned} J_1 &= i \left. \frac{dR_1(\theta_1)}{d\theta_1} \right|_{\theta_1=0} = i \left. \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sin \theta_1 & -\cos \theta_1 \\ 0 & \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \end{bmatrix} \right|_{\theta_1=0} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.141)$$

$$\begin{aligned} J_2 &= i \left. \frac{dR_2(\theta_2)}{d\theta_2} \right|_{\theta_2=0} = i \left. \begin{bmatrix} -\sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \end{bmatrix} \right|_{\theta_2=0} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.142)$$

<sup>12</sup>У матрици  $R_1(\theta_1)$ , где  $x_1$  остаје фиксно,  $-\sin \theta_1$  је матрични елемент који се налази у другој врсти и трећој колони матрице. У матрици  $R_2(\theta_2)$ , где  $x_2$  остаје фиксно,  $-\sin \theta_2$  је матрични елемент који се налази у трећој врсти и првој колони матрице. На крају, у матрици  $R_3(\theta_3)$ , где  $x_3$  остаје фиксно,  $-\sin \theta_3$  је матрични елемент који се налази у првој врсти и другој колони матрице. Стога, ако знамо да је једна од ових ротација активна и све остале су.

$$\begin{aligned}
J_3 &= i \left. \frac{dR_3(\theta_3)}{d\theta_3} \right|_{\theta_3=0} = i \left. \begin{bmatrix} -\sin \theta_3 & -\cos \theta_3 & 0 \\ \cos \theta_3 & -\sin \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right|_{\theta_3=0} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.143}$$

Генератори  $J_1, J_2, J_3$  чине базис Лијеве алгебре  $\mathfrak{so}(3)$ . Рачунањем комутатора одговарајућих генератора добија се

$$[J_\alpha, J_\beta] = i \sum_{\gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma \quad \alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}. \tag{4.144}$$

Уочимо, такође, да генератори ротација  $J_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$  имају траг нула, као и Паулијеве матрице. У случају коначних матрица  $A, B$  важи да је

$$\text{Tr}([A, B]) = \text{Tr}(AB - BA) = \text{Tr}(AB) - \text{Tr}(BA) = 0, \tag{4.145}$$

па како је сваки генератор ротација матрица која је једнака производу константе и комутатора друга два генератора ротација, сви генератори морају имају траг нула<sup>13</sup>. Приметимо да у овом случају имамо три континуална параметра  $\theta_1, \theta_2$  и  $\theta_3$  и три генератора ротација  $J_1, J_2, J_3$ . *Број генератора увек одговара броју континуалних параметра.* Лијева алгебра  $\mathfrak{so}(3)$  је изоморфна Лијевој алгебри  $\mathfrak{su}(2)$ , што игра фундаменталну улогу у теорији угаоног момента у квантној механици. Стандардни базис  $\mathfrak{su}(2)$  алгебре су матрице  $\frac{1}{2}\sigma_\alpha, \alpha = 1, 2, 3$  где су  $\sigma_\alpha$  Паулијеве матрице

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \tag{4.146}$$

које задовољавају комутационе релације

$$[\sigma_\alpha, \sigma_\beta] = 2i \sum_{\gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\gamma \quad \alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}. \tag{4.147}$$

Експоненцирањем генератора добијамо елементе групе

$$e^{-i\alpha_1 \frac{\sigma_1}{2}} = \cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) I - i \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \sigma_1 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) & -i \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \\ -i \sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \end{bmatrix}, \tag{4.148}$$

$$e^{-i\alpha_2 \frac{\sigma_2}{2}} = \cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) I - i \sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \sigma_2 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) & \cos\left(\frac{\alpha_2}{2}\right) \end{bmatrix}, \tag{4.149}$$

<sup>13</sup>У случају бесконачних матрица ово не важи. Штавише, за операторе анихилације и креације у проблему квантног ЛХО-а важи  $\text{Tr}([b, b^\dagger]) = \infty$  (видети Додатак **B**). Код бесконачних матрица не важи увек ни асоцијативност и, још занимљивије, за неку бесконачну матрицу  $A$  може да важи да је  $A \cdot (A \cdot A) \neq (A \cdot A) \cdot A$ .

$$e^{-i\alpha_3 \frac{\sigma_3}{2}} = \cos\left(\frac{\alpha_3}{2}\right) I - i \sin\left(\frac{\alpha_3}{2}\right) \sigma_3 = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\alpha_3}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\alpha_3}{2}} \end{bmatrix}. \quad (4.150)$$

Све ове матрице су унитарне и имају детерминанту 1, дакле припадају групи  $SU(2)$ .

### 4.3.5 Спин векторске честице

Најједноставнији и директан начин да се увиди разлика између орбиталног и сопственог угаоног момента је да се посматра таласна функција која је вектор у тродимензионом простору,  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r})$ , и да се одреде генератори ротација у том случају [Шиф, Л. (1968)]. За разлику од обичне таласне функције, која се у односу на ротације у  $\mathbb{R}^3$  понаша као скалар, у случају векторске таласне функције морамо водити рачуна да се поред аргумента  $\mathbf{r}$  трансформишу и саме компоненте таласне функције. Како бисмо одредили закон трансформације, посматрајмо следећи дијаграм

$$\begin{array}{ccc} \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) & \xrightarrow{R} & (R\boldsymbol{\psi})(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\psi}'(\bar{R}(\mathbf{r})) \\ \uparrow \boldsymbol{\psi} & & \nearrow \boldsymbol{\psi}' \\ \mathbf{r} & \xrightarrow{\bar{R}} & \bar{R}(\mathbf{r}) \end{array} \quad (4.151)$$

који описује како ротације делују на векторску таласну функцију (како на аргумент таласне функције, тако и на њене компоненте). Са  $\bar{R}$  је означена ротација која делује на вектор положаја а са  $R$  *истиа* ротација која делује на компоненте таласне функције. Дакле,  $\bar{R} : \mathbf{r} \rightarrow R\mathbf{r}$  и  $R : \boldsymbol{\psi}(\cdot) \rightarrow R\boldsymbol{\psi}(\cdot)$ . Са  $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r})$  је означена вредност векторског поља  $\boldsymbol{\psi}$  у тачки  $\mathbf{r}$ , док  $\boldsymbol{\psi}'$  представља трансформисано векторско поље (векторску таласну функцију) чију вредност у тој истој тачки  $\mathbf{r}$  желимо да одредимо. Са дијаграма видимо да је  $\boldsymbol{\psi}' = R \circ \boldsymbol{\psi} \circ \bar{R}^{-1} = (R\boldsymbol{\psi}) \circ \bar{R}^{-1}$ , што одговара закону трансформације

$$\boldsymbol{\psi}'(\mathbf{r}) = (R\boldsymbol{\psi})(\bar{R}^{-1}\mathbf{r}). \quad (4.152)$$

Генераторе ротације ћемо идентификовати када ову релацију напишемо у линеаризованом облику  $\boldsymbol{\psi}'(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) + \delta\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r})$ , где је

$$\delta\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) = -i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J}\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}), \quad (4.153)$$

при чему је  $\boldsymbol{\theta}$  вектор који специфицира ротацију а  $\mathbf{J}$  је, за сада, непознати векторски оператор.

Користећи инфинитезимални облик Ојлерове релације (видети, рецимо [Радосевић, С., Мали, П. (2020)]), која дефинише трансформацију вектора у односу на ротацију, можемо писати

$$\begin{aligned} (R\boldsymbol{\psi})(\bar{R}^{-1}\mathbf{r}) &= (\boldsymbol{\psi} + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\psi})(\mathbf{r} - \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}) + \mathcal{O}(\boldsymbol{\theta}^2) \\ &= \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) + \boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) - (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla\boldsymbol{\psi}(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(\boldsymbol{\theta}^2). \end{aligned} \quad (4.154)$$

Као што се види из последње релације, линеаризација нам омогућава да раздвојимо деловање ротације на компоненте таласне функције од дејства на аргумент (вектор положаја). Због тога смо сад у могућности да независно анализирамо ова два ефекта.

Погледајмо најпре члан који описује како се компоненте таласне функције мењају под дејством ротације:

$$\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\psi} = (\theta_2\psi_3 - \theta_3\psi_2)\mathbf{e}_1 + (\theta_3\psi_1 - \theta_1\psi_3)\mathbf{e}_2 + (\theta_1\psi_2 - \theta_2\psi_1)\mathbf{e}_3 \quad (4.155)$$

и препишимо га у матричној нотацији

$$\boldsymbol{\theta} \times \boldsymbol{\psi} = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix} \equiv (-i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{S})\boldsymbol{\psi}, \quad (4.156)$$

где су компоненте векторског оператора  $\mathbf{S}$  дате са

$$S_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad S_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.157)$$

Видимо да се матрице  $S_1$ ,  $S_2$  и  $S_3$  поклапају са генераторима ротације уведеним у Одељку 4.3.4. Према томе, задовољавају и исте комутационе релације

$$[S_\alpha, S_\beta] = i \sum_{\gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} S_\gamma. \quad (4.158)$$

Дакле, оператор  $\mathbf{S}$  генерише ротацију у простору компоненти таласне функције. Физичку величину којој је придружен оператор  $\mathbf{S}$  називамо сопствени угаони момент честице, односно спин.

Са друге стране, ефекат ротације на аргумент таласне функције се може записати као

$$(\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{r}) \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}) = (i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L})\psi(\mathbf{r}), \quad (4.159)$$

где смо дефинисали векторски диференцијани оператор

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times (-i\nabla) = \mathbf{r} \times \mathbf{p}. \quad (4.160)$$

Може се проверити да компоненте вектора  $\mathbf{L}$  задовољавају аналогне комутационе релације (видети Одељак 5.4.3)

$$[L_\alpha, L_\beta] = i \sum_{\gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma. \quad (4.161)$$

Оператор  $\mathbf{L}$  представља орбитални угаони момент честице и, као што видимо, он имплементира ротацију у простору вектора положаја. Односно, генерише ротацију аргумента таласне функције, делујући као диференцијални оператор.

Сумирајући, видимо да је дејство ротације на векторску таласну функцију дато са

$$\psi'(\mathbf{r}) = \psi(\mathbf{r}) - i(\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{J})\psi(\mathbf{r}) + \mathcal{O}(\boldsymbol{\theta}^2), \quad (4.162)$$

где је

$$\mathbf{J} = \mathbf{S} + \mathbf{L} \quad (4.163)$$

укупни момент импулса честице. Први сабирак представља спински оператор у  $S = 1$  репрезентацији и он генерише ротацију у простору компоненти таласне функције. Други оператор представља орбитални угаони момент и он као диференцијални оператор имплементира ротацију у простору аргумента таласне функције. Будући да  $\mathbf{S}$  и  $\mathbf{L}$  делују на различите променљиве (практично, делују у различитим Хилбертовим просторима), ови оператори међусобно комутирају и компоненте оператора  $\mathbf{J}$  задовољавају добро познате релације

$$[J_\alpha, J_\beta] = i \sum_{\gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma. \quad (4.164)$$

Пошто делује на аргумент таласне функције, оператор  $\mathbf{L}$  је присутан и у случају таласне функције која описује скаларну честицу ( $S = 0$ ) и која се у односу на ротацију трансформише као  $\psi'(\mathbf{r}) = \psi(\bar{R}^{-1}\mathbf{r})$ . Један пример примене оператора  $\mathbf{L}$  на квантно-механички опис динамике честица без спина је дат у наредној глави.

## 4.4 Лоренцова група

Лоренцове трансформације формирају групу коју означавамо са  $O(1, 3)$ . Оне су дефинисане релацијом

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (4.165)$$

при чему је

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}, \quad (4.166)$$

где је  $\eta = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$  метрички тензор Минковског. Релација (4.166) следи из тога што Лоренцове трансформације чувају норму квадривектора:

$$\eta_{\alpha\beta} x^\alpha x^\beta = \eta_{\mu\nu} x'^\mu x'^\nu = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta x^\alpha x^\beta, \quad (4.167)$$

одакле је  $\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}$ . То даље можемо записати као

$$\Lambda^\mu_\alpha \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}. \quad (4.168)$$

Користећи да је  $(\Lambda^T)_\alpha^\mu = \Lambda^\mu_\alpha$ , добија се

$$(\Lambda^T)_\alpha^\mu \eta_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}, \quad (4.169)$$

односно

$$\Lambda^T \eta \Lambda = \eta. \quad (4.170)$$

Кренућемо од последње релације да бисмо показали да Лоренцове трансформације чине групу:

1. Затвореност:

$$(\Lambda_1 \Lambda_2)^T \eta \Lambda_1 \Lambda_2 = \Lambda_2^T \underbrace{\Lambda_1^T \eta \Lambda_1}_\eta \Lambda_2 = \Lambda_2^T \eta \Lambda_2 = \eta. \quad (4.171)$$

Видимо да је за две Лоренцове трансформације  $\Lambda_1, \Lambda_2$  и  $\Lambda_1 \Lambda_2$  такође Лоренцова трансформација, односно, постоји затвореност скупа Лоренцових трансформација у односу на њихову узастопну примену.

2. Асоцијативност: Множење коначних матрица је асоцијативно. У овом случају разма-трамо  $4 \times 4$  матрице.

3. Неутрални елемент: Неутрални елемент је  $4 \times 4$  јединична матрица.

4. Инверзни елемент: За сваки елемент  $\Lambda$  требало би да постоји  $\Lambda^{-1}$ , тако да важи

$$\Lambda \Lambda^{-1} = \Lambda^{-1} \Lambda = I. \quad (4.172)$$

Ово ћемо доказати користећи

$$\det(\Lambda^T \eta \Lambda) = \det \eta, \quad (4.173)$$

одакле применом Бине-Кошијеве релације  $\det(AB) = \det(A)\det(B)$  добијамо

$$\det(\Lambda^T) \det(\Lambda) = (\det(\Lambda))^2 = 1, \quad (4.174)$$

односно

$$\det \Lambda = \pm 1. \quad (4.175)$$

Детерминанте су различите од нуле, те сваки елемент  $\Lambda$  има инверзну матрицу  $\Lambda^{-1}$ . Лако је утврдити да је инверзна матрица

$$\Lambda^{-1} = \eta^{-1} \Lambda^T \eta. \quad (4.176)$$

Елементи са детерминантом  $\det(\Lambda) = 1$  формирају подгрупу Лоренцове групе, коју означавамо са  $SO(1, 3)$ . Распишимо сада релацију

$$\eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta = \eta_{\alpha\beta}. \quad (4.177)$$

За  $\alpha = \beta = 0$ :

$$\eta_{00} \Lambda^0_0 \Lambda^0_0 + \eta_{11} \Lambda^1_0 \Lambda^1_0 + \eta_{22} \Lambda^2_0 \Lambda^2_0 + \eta_{33} \Lambda^3_0 \Lambda^3_0 = \eta_{00}, \quad (4.178)$$

одакле је

$$(\Lambda^0_0)^2 - \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 = 1, \quad (4.179)$$

тј.

$$(\Lambda^0_0)^2 = 1 + \sum_{i=1}^3 (\Lambda^i_0)^2 \geq 1, \quad (4.180)$$

што даје две могућности  $\Lambda^0_0 \geq 1$  или  $\Lambda^0_0 \leq -1$ . Избором  $\Lambda^0_0 \geq 1$  добијамо групу правих ортохроних Лоренцових трансформација, коју ћемо означити са  $SO(1,3)^\uparrow$  или  $L_+^\uparrow$ . Индекс  $+$  у  $L_+^\uparrow$  означава да су детерминанте матрица Лоренцових трансформација  $1$ ,  $\uparrow$  означава да су трансформације ортохроне, док је

$$L = \{\Lambda \in GL(\mathbb{R}^4) | \Lambda^T \eta \Lambda = \eta\}. \quad (4.181)$$

*Праве ортохроне Лоренцове трансформације су оне које користимо у специјалној теорији релативности.* Дефинишимо матрицу трансформација парности  $P$ , временске инверзије  $T$  и одговарајућег производа  $PT$ :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (4.182)$$

$$T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.183)$$

$$PT = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (4.184)$$

Целу Лоренцову групу можемо записати као

$$L = (L_+^\uparrow) \cup (PL_+^\uparrow) \cup (TL_+^\uparrow) \cup (PTL_+^\uparrow), \quad (4.185)$$

где одговарајуће скупове матрица можемо записати и на следећи начин

$$PL_+^\uparrow = L_-^\uparrow, \quad TL_+^\uparrow = L_+^\downarrow, \quad PTL_+^\uparrow = L_-^\downarrow, \quad (4.186)$$

при чему индекс  $-$  означава матрице са детерминантом  $-1$ , а  $\downarrow$  означава неортохроне Лоренцове трансформације. Приметимо да  $L_-^\uparrow$ ,  $L_+^\downarrow$ ,  $L_-^\downarrow$  нису групе, што је једноставно закључити, јер нису затворен скуп у односу на множење матрица из датог скупа или ниједан од датих скупова не садржи јединичну матрицу као неутрални елемент.

## 4.5 Лијева алгебра Лоренцове групе

Лијева алгебра Лоренцове групе  $\mathfrak{so}(1,3)$  сачињена је од шест генератора, од чега су три генератора ротација и три генератора бустова. Генератори ротација и бустова су  $4 \times 4$  матрице. Генератори ротација задовољавају комутационе релације

$$[J_\alpha, J_\beta] = i \sum_{\gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma \quad \alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.187)$$

Њих добијамо као

$$J_\alpha = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{J}_\alpha \end{bmatrix}, \quad \alpha = 1, 2, 3 \quad (4.188)$$

где је  $\tilde{J}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{J}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $\tilde{J}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ . Односно, генератори ротација

у Лијевој алгебри Лоренцове групе су:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.189)$$

За разлику од генератора ротација, генератори бустова нису ермитске, већ су косо-ермитске матрице  $K_\alpha^\dagger = -K_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2, 3$ :

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.190)$$

Одговарајуће комутационе релације за генераторе бустова су

$$[K_\alpha, K_\beta] = -i \sum_{\gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}, \quad (4.191)$$

а за генераторе ротација и бустова су

$$[J_\alpha, K_\beta] = i \sum_{\gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta\gamma} K_\gamma, \quad \alpha, \beta \in \{1, 2, 3\}. \quad (4.192)$$

Све комутационе релације генератора Лоренцове групе се често пишу на начин где се подразумева сумирање по поновљеном индексу<sup>14</sup>

$$[J_\alpha, J_\beta] = i \epsilon_{\alpha\beta\gamma} J_\gamma, \quad (4.193)$$

<sup>14</sup>То исто важи за комутационе релације генератора  $SO(3)$  и  $SU(2)$  групе, што ће бити коришћено у даљем тексту.

$$[K_\alpha, K_\beta] = -i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}J_\gamma, \quad (4.194)$$

$$[J_\alpha, K_\beta] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}K_\gamma. \quad (4.195)$$

Како изгледају одговарајући бустови, погледајмо на примеру генератора  $K_1$ , чијом се експоненцијалном функцијом  $\Lambda_1(\xi) = e^{-i\xi K_1}$  добија Лоренцов буст дуж  $x$ -осе. Због лакшег експоненцирања уведемо да је  $K_1 = iA_1$ , где је

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.196)$$

Степени матрице  $A_1$  се понављају

$$A_1^2 = A_1^4 = A_1^6 = \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = A_2, \quad (4.197)$$

док је  $A_1 = A_1^3 = A_1^5 = \dots$ . Одатле је

$$\Lambda_1(\xi) = e^{-i\xi K_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\xi K_1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{n!} A_1^n. \quad (4.198)$$

Овај ред се може представити као збир два реда, једног по парним, а другог по непарним индексима:

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\xi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^{2m}}{(2m)!} A_1^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^{2m+1}}{(2m+1)!} A_1^{2m+1} \\ &= I + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi^{2m}}{(2m)!} A_2 + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^{2m+1}}{(2m+1)!} A_1 \\ &= I + \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi^{2m}}{(2m)!} \right) A_2 + \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^{2m+1}}{(2m+1)!} \right) A_1. \end{aligned} \quad (4.199)$$

Преознајемо редове за хиперболичне функције

$$\cosh \xi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^{2m}}{(2m)!}, \quad \sinh \xi = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\xi^{2m+1}}{(2m+1)!}, \quad (4.200)$$

одакле непосредно следи

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\xi^{2m}}{(2m)!} = \cosh \xi - 1. \quad (4.201)$$

Према томе,

$$\Lambda_1(\xi) = I + (\cosh \xi - 1)A_2 + (\sinh \xi)A_1. \quad (4.202)$$

Уврштавањем матрица  $A_2$  и  $A_1$  добијамо

$$\Lambda_1(\xi) = \begin{bmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4.203)$$

што је управо матрица Лоренцовог буста дуж  $x$ -осе. Како је  $\tanh \xi = \beta = \frac{u}{c}$ ,  $\cosh \xi = \gamma$ ,  $\sinh \xi = \beta\gamma$  добија се

$$\Lambda_1 = \begin{bmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (4.204)$$

Комутационе релације генератора Лоренцове групе веома подсећају на оне за генераторе  $SU(2)$  групе, што можемо учинити још експлицитнијим увођењем новог базиса за Лијеву алгебру

$$\mathcal{N}_\alpha^\pm = \frac{1}{2}(J_\alpha \pm iK_\alpha), \quad \alpha = 1, 2, 3. \quad (4.205)$$

Нови генератори задовољавају комутационе релације

$$[\mathcal{N}_\alpha^\pm, \mathcal{N}_\beta^\pm] = i\epsilon_{\alpha\beta\gamma}\mathcal{N}_\gamma^\pm, \quad (4.206)$$

$$[\mathcal{N}_\alpha^+, \mathcal{N}_\beta^-] = 0, \quad (4.207)$$

где се подразумева сумирање по поновљеном индексу. Овиме смо показали да се Лијева алгебра  $\mathfrak{so}(1, 3)$  састоји од две копије Лијеве алгебре  $\mathfrak{su}(2)$ , односно да важи да је

$$\mathfrak{so}(1, 3) \cong \mathfrak{su}(2) \oplus \mathfrak{su}(2). \quad (4.208)$$

## 4.6 $\mathfrak{su}(3)$ алгебра. Гел-Манове матрице

У физици елементарних честица генератори  $SU(3)$  групе су Гел-Манове матрице:

$$\lambda_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.209)$$

$$\lambda_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}, \quad \lambda_8 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}. \quad (4.210)$$

Оне чине стандардни базис Лијеве алгебре  $\mathfrak{su}(3)$ . Све Гел-Манове матрице су ермитске  $\lambda_\alpha^\dagger = \lambda_\alpha$ , имају траг нула  $\text{Tr}(\lambda_\alpha) = 0$  и ортонормиране су у стандардној нормализацији

$$\text{Tr}(\lambda_\alpha \lambda_\beta) = 2\delta_{\alpha\beta}. \quad (4.211)$$

**Пример 4.32.** Одредити матрицу  $\lambda_8$  знајући да су Гел-Манове матрице емитске, нултог трага и да задовољавају релацију (4.211).

**Решење.** Из  $\text{Tr}(\lambda_3 \lambda_8) = 0$  следи да је  $a = b$ . Како све Гел-Манове матрице имају траг нула, знамо да је  $\text{Tr}(\lambda_8) = 0$ , одакле је  $c = -2a$ . На крају, из  $\text{Tr}(\lambda_8 \lambda_8) = 2$  имамо да је  $a^2 = \frac{1}{3}$ . Бирамо  $a$  реално и позитивно, одакле је  $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$ . На основу свега наведеног тражена Гел-Манова матрица је

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \quad (4.212)$$

■

### 4.6.1 Комутатори Гел-Манових матрица

Комутатори Гел-Манових матрица су дати са

$$[\lambda_\alpha, \lambda_\beta] = 2if_{\alpha\beta\gamma}\lambda_\gamma, \quad (4.213)$$

где су  $f_{\alpha\beta\gamma}$  структурне константе алгебре  $\mathfrak{su}(3)$ ,  $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \dots, 8$  и сумирање по поновљеном индексу се подразумева. Структурне константе  $f_{\alpha\beta\gamma}$  су потпуно антисиметричне по индексима  $f_{\alpha\beta\gamma} = -f_{\beta\alpha\gamma} = -f_{\alpha\gamma\beta}$ , односно непарном пермутацијом индекса појављује се знак минус као код Леви Чивита симбола. Бројеви  $f_{\alpha\beta\gamma}$  који нису нула су:  $f_{123} = 1$ ,  $f_{147} = f_{165} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{376} = \frac{1}{2}$ ,  $f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$  и остали које добијамо антисиметријом по индексима. На пример, из  $f_{165} = \frac{1}{2}$  имамо да је  $f_{156} = -\frac{1}{2}$ . За разлику од  $\mathfrak{su}(2)$ , где комутатор два генератора даје до на константу трећи генератор, у случају  $\mathfrak{su}(3)$  алгебре комутатор два генератора може да да и линеарну комбинацију више генератора. Уверимо се у то у следећем примеру:

**Пример 4.33.** Наћи комутатор матрица  $[\lambda_4, \lambda_5]$ .

**Решење.**

$$\begin{aligned} [\lambda_4, \lambda_5] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= 2i \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.214)$$

Видимо да добијена матрица не одговара ниједној од Гел-Манових матрица. Потражимо међу структурним константама оне које у индексима садрже 4 и 5. То су  $f_{345} = \frac{1}{2}$  и  $f_{458} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . У овом случају је

$$[\lambda_4, \lambda_5] = 2i (f_{453}\lambda_3 + f_{458}\lambda_8) = 2i \left( \frac{1}{2}\lambda_3 + \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda_8 \right). \quad (4.215)$$

■

Корисна формула за издвајање структурних константи, ако су познате Гел-Манове матрице, је

$$f_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{4i} \text{Tr}([\lambda_\alpha, \lambda_\beta]\lambda_\gamma). \quad (4.216)$$

### 4.6.2 Ранг Лијеве алгебре

**Дефиниција 4.22.** Ранг Лијеве алгебре је максималан број међусобно комутирајућих линеарно независних генератора који се могу дијагонализовати у погодно изабраном базису.

Ранг Лијеве алгебре  $\mathfrak{su}(3)$  једнак је 2, јер је то максималан број дијагоналних генератора у датој алгебри. Видимо да су  $\lambda_3$  и  $\lambda_8$  дијагоналне матрице. Али немојте се дати збунити. Ако имате неки скуп генератора који нема дијагоналних матрица, не значи да је ранг те Лијеве алгебра нула. У Дефиницији 4.22 речено је да је то максималан број генератора који могу бити дијагонални у неком базису и који су уз то линеарно независни. Вратимо се на Лијеву алгебру  $\mathfrak{so}(1, 3)$ . Она се састоји од чак шест генератора и у базису који смо одабрали у овом уџбенику ниједан од генератора није дијагонална матрица (видети (4.189) и (4.190)). Можемо се уверити да је  $[J_3, K_3] = 0$ . У базису који смо одабрали они нису дијагонални. Али можемо изабрати базис у ком ће бити дијагонални. Ранг Лијеве алгебре  $\mathfrak{so}(1, 3)$  је такође 2. Стандардни генератори Лијеве алгебре  $\mathfrak{so}(1, 3)$ , тј.  $J_1, J_2, J_3, K_1, K_2, K_3$ , чине базис ове алгебре као векторског простора димензије 6. Због тога су они линеарно независни. Уопште, када се говори о стандардним генераторима неке Лијеве алгебре, обично се мисли на базисне генераторе. Међутим, у ширем смислу могуће је узети и редувантни скуп елемената који генерише исту алгебру, па такав скуп не мора бити линеарно независан.

# 5

## Паулијево решење за атом водониковог типа

### 5.1 Лагранжев и Хамилтонов опис механичког система

#### 5.1.1 Лагранжев формализам

Претпоставимо да је систем описан Лагранжевом функцијом (коју ћемо звати једноставно и лагранжијаном)  $L(\{q^a, \dot{q}^a\})$ , која зависи од генералисаних координата  $q^a$ ,  $a = 1, 2, \dots, N$  и генералисаних брзина  $\dot{q}^a$ . Овакве системе ћемо називати Лагранжевим системима. Рецимо, у случају система од  $N'$  честица које се крећу у тродимензионом простору, при чему не постоје додатни услови који ограничавају положаје и брзине честица, важи  $N = 3N'$ . Скуп  $\{q^a, \dot{q}^a\}$  представља координате у тзв. простору кинематичких стања, који се обично означава као  $\mu$ -простор [Милић, Б. (1997)]. Чињеница да су  $\{q^a, \dot{q}^a\}$  независне координате на простору кинематичких стања се изражава помоћу релација

$$\frac{\partial q^a}{\partial q^b} = \frac{\partial \dot{q}^a}{\partial \dot{q}^b} = \delta_b^a, \quad \frac{\partial \dot{q}^a}{\partial q^b} = \frac{\partial q^a}{\partial \dot{q}^b} = 0, \quad (5.1)$$

при чему  $\delta_b^a$  означава Кронекеров симбол. Ми ћемо се у наставку углавном бавити системима код којих је  $\mu$ -простор еуклидски, односно узећемо да је простор кинематичких стања  $\mathbb{R}^{2N}$ . Укратко речено, лагранжијан је функција на простору кинематичких стања,  $L : \mu \rightarrow \mathbb{R}$ , а  $\{q^a, \dot{q}^a\}$  су координате на овом простору. Простор на којем су координате  $\{q^a\}$  се назива конфигурациони простор и у примерима које ћемо разматрати ће то бити  $\mathbb{R}^N$ .

Произвољна функција  $\mathbb{R} \rightarrow \mu, t \mapsto g(t)$  описује криву на простору кинематичких стања и има координатну репрезентацију

$$g(t) = [g^1(t) \ g^2(t) \ \dots \ g^N(t) \ g^{N+1}(t) \ \dots \ g^{2N}(t)]^T \quad (5.2)$$

где су

$$g^1(t) = q^1(g(t)), \quad g^2(t) = q^2(g(t)), \dots, \quad g^N(t) = q^N(g(t)), \quad (5.3)$$

$$g^{N+1}(t) = \dot{q}^1(g(t)), \dots, \quad g^{2N}(t) = \dot{q}^N(g(t)), \quad (5.4)$$

при чему, у општем случају, нема никакве везе између  $g^a(t)$  и  $g^{N+a}(t)$ . Са друге стране, временска еволуција система је функција  $t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^N$  и њене компоненте су решења Ојлер-Лагранжевих једначина

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \Big|_{f(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} \Big|_{f(t)} = 0. \quad (5.5)$$

Пошто, у случајевима које ћемо посматрати,  $L$  зависи од времена само посредно, извод  $d/dt$  дефинишемо помоћу<sup>1</sup>

$$\frac{dL}{dt} \Big|_{f(t)} = \frac{\partial L}{\partial q^a} \dot{q}^a + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \ddot{q}^a := \left( \dot{q}^a \frac{\partial L}{\partial q^a} + \ddot{q}^a \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) \Big|_{f(t)} \quad (5.6)$$

и израз у загради дефинише тотални извод по времену изражен помоћу координата  $\{q^a, \dot{q}^a, \ddot{q}^a\}$

$$\frac{d}{dt} := \dot{q}^a \frac{\partial}{\partial q^a} + \ddot{q}^a \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \quad (5.7)$$

при чему је

$$\ddot{q}^a(f(t)) := \frac{d}{dt} \dot{q}^a(f(t)) \equiv \frac{d^2 f^a}{dt^2}. \quad (5.8)$$

Оператор тоталног извода по времену се мора модификовати у случају када делује на функције које и експлицитно зависе од времена. Тада је

$$\frac{d}{dt} := \frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}^a \frac{\partial}{\partial q^a} + \ddot{q}^a \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a}. \quad (5.9)$$

Имајући овакву дефиницију оператора  $d/dt$ , можемо директно рачунати изводе различитих функција дефинисаних на  $\mu$ -простору, без потребе да уводимо помоћну функцију  $t \mapsto f(t) \in \mu$ .

Ојлер-Лагранжеве једначине, у општем случају, представљају систем од  $N$  обичних диференцијалних једначина другог реда. За решења ових једначина важи

$$f^1(t) = q^1(f(t)), \quad f^2(t) = q^2(f(t)), \dots, \quad f^N(t) = q^N(f(t)), \quad (5.10)$$

док је

$$\dot{q}^1(f(t)) := \frac{df^1(t)}{dt}, \dots, \quad \dot{q}^N(f(t)) := \frac{df^N(t)}{dt}, \quad (5.11)$$

<sup>1</sup>Ознака  $A := B$  сугерише да је величина  $A$  дефинисана помоћу израза који се налази на десној страни, односно, помоћу величине  $B$ .

тако да компоненте  $f^a(t) = q^a(f(t))$  и  $f^{a+N}(t) = \dot{q}^a(f(t))$  у простору кинематичких стања нису међусобно независне, иако одговарајуће координате  $q^a$  и  $\dot{q}^a$ , јесу. За проблеме којима ћемо се бавити у овој Глави, лагранжијан има облик  $L = T - U$ , где је кинетичка енергија  $T$  функција генерализаних координата и брзина, а потенцијална енергија  $U$  зависи само од генерализаних координата.

**Пример 5.1.** Као једноставан пример за илустрацију налажења Ојлер-Лагранжевих једначина, као и њиховог решења, посматрајмо дводимензиони хармонијски осцилатор. Простор кинематичких стања за овај систем је  $\mathbb{R}^4$  и за координате узимамо  $x, y, \dot{x}$  и  $\dot{y}$ . Пошто је кинетичка енергија дата са  $T = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2$ , где је  $m$  маса честице, а потенцијална енергија је  $U = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$ , где  $\omega$  представља кружну фреквенцију осцилатора, за лагранжијан добијамо

$$L = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - \frac{m\omega^2}{2} (x^2 + y^2). \quad (5.12)$$

Како је конфигурациони простор дводимензиони, решење Ојлер-Лагранжевих једначина је функција  $t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^2$  и можемо писати  $x(f(t)) \equiv f_x(t), y(f(t)) \equiv f_y(t)$ . За лагранжијан (5.12) је  $\partial L/\partial x = -m\omega^2 x$ ,  $\partial L/\partial \dot{x} = m\dot{x}$ ,  $\partial L/\partial y = -m\omega^2 y$  и  $\partial L/\partial \dot{y} = m\dot{y}$ , па имамо

$$\begin{aligned} -\frac{\partial L}{\partial x} \Big|_{f(t)} &= m\omega^2 x(f(t)) = m\omega^2 f_x(t), & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Big|_{f(t)} &= \frac{d}{dt} m\dot{x}(f(t)) = m \frac{d}{dt} \frac{df_x}{dt} = m \frac{d^2 f_x}{dt^2} \\ -\frac{\partial L}{\partial y} \Big|_{f(t)} &= m\omega^2 y(f(t)) = m\omega^2 f_y(t), & \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \Big|_{f(t)} &= m \frac{d^2 f_y}{dt^2}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Сада на основу (5.5) добијамо две независне диференцијалне једначине другог реда

$$\frac{d^2 f_x}{dt^2} + \omega^2 f_x = 0, \quad \frac{d^2 f_y}{dt^2} + \omega^2 f_y = 0 \quad (5.14)$$

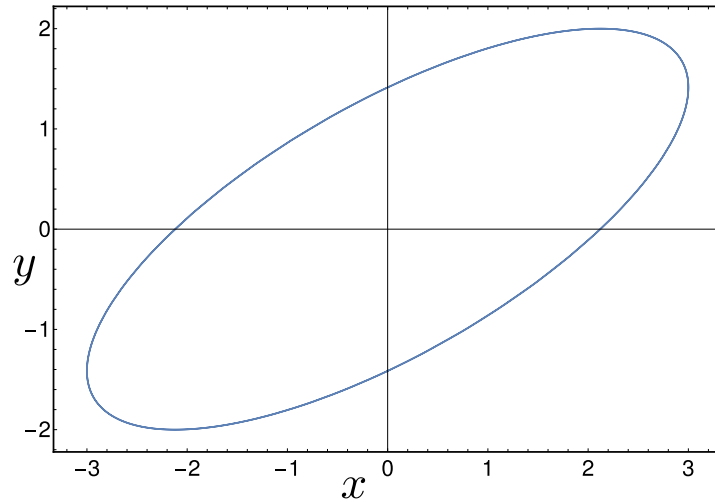
и њихова општа решења су дата са

$$t \mapsto f(t) = \begin{bmatrix} x_0 \cos(\omega t + \varphi_0^x) \\ y_0 \cos(\omega t + \varphi_0^y) \end{bmatrix}, \quad (5.15)$$

где је  $[x_0 \cos(\varphi_0^x) \ y_0 \sin(\varphi_0^y)]^T = f(0)$  почетни положај честице, а  $\varphi_0^x$  и  $\varphi_0^y$  су одговарајуће почетне фазе. На Сл. 5.1 је приказано једно такво решење. Са друге стране, еволуција система у простору кинематичких стања је дата са

$$t \mapsto \begin{bmatrix} x_0 \cos(\omega t + \varphi_0^x) \\ y_0 \cos(\omega t + \varphi_0^y) \\ -x_0 \omega \sin(\omega t + \varphi_0^x) \\ -y_0 \omega \sin(\omega t + \varphi_0^y) \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

За самосталну вежбу је остављено да се лагранжијан (5.12) напише у поларним координатама. Уверити се да, иако у Декартовим координатама кинетичка енергија зависи само од  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ , у поларним координатама кинетичка енергија зависи и од једне генерализане координате. ■



Слика 5.1: Решење (5.15) које описује трајекторију за дводимензиони осцилатор у конфигурационом простору. Почетни положај је  $(3, 2)$ , а почетне фазе су  $\pi/2$  и  $3\pi/4$ .

Као што је добро познато, систем једначина (5.5) се може добити из Хамилтоновог (варијационог) принципа [Миљих, Б. (1997)]. Централни објект у варијационом прилазу постаје функционал дејства,  $S[f]$ . У случају механичког система чија је Лагранжева функција  $L$  и чију еволуцију пратимо на временском интервалу  $(t_i, t_f)$ , функционал дејства је дат са

$$S[f] := \int_{t_i}^{t_f} dt L(\{q^a(f(t)), \dot{q}^a(f(t))\}) = \int_{t_i}^{t_f} dt L(\{q^a, \dot{q}^a\}) \circ f(t), \quad (5.17)$$

при чему су  $q^a(f(t))$  и  $\dot{q}^a(f(t))$  дефинисани у (5.10) и (5.11). Такође, претпоставићемо да је  $L$  глатка функција од  $\{q^a, \dot{q}^a\}$  [Olver, P. (2000)]. Коначно, композиција функција  $L(\{q^a, \dot{q}^a\}) \circ f(t)$  наглашава да подинтегрална функција у (5.17) зависи од времена кроз функцију  $t \mapsto f(t) \in \mathbb{R}^N$ . Односно, различите функције  $f(t)$ , при фиксираној функцији  $L(\{q^a, \dot{q}^a\})$ , дају различите вредности функционала  $S[f]$ . Уз ове претпоставке важи

**Тврђење 5.1.** Ојлер-Лагранжеве једначине (5.5) се добијају из услова стационарности дејства  $S[f]$  (тзв. варијациони принцип)

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} S[f + \epsilon\eta] = 0, \quad (5.18)$$

при чему је  $\eta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$  тзв. пробна функција – произвољна глатка функција која задовољава услов  $\eta(t_i) = \eta(t_f) = 0$ .

*Доказ.* Како бисмо показали да услов стационарности дејства заиста доводи до Ојлер-Лагранжевих једначина (5.5), искористићемо чињеницу да је  $L$  глатка функција коор-

дината  $\{q^a, \dot{q}^a\}$  на  $\mathbb{R}^{2N}$  и наћи ћемо члан линеаран по  $\epsilon$ :

$$\begin{aligned}
L\left(\{q^a(f(t) + \epsilon\eta(t)), \dot{q}^a(f(t) + \epsilon\eta(t))\}\right) &= L\left(\{q^a(f(t)), \dot{q}^a(f(t))\}\right) \\
&+ \left.\frac{\partial L}{\partial q^a}\right|_{f(t)} \epsilon q^a(\eta(t)) + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right|_{f(t)} \epsilon \dot{q}^a(\eta(t)) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= L\Big|_{f(t)} + \epsilon \left.\frac{\partial L}{\partial q^a}\right|_{f(t)} \eta^a(t) + \epsilon \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right|_{f(t)} \frac{d\eta^a(t)}{dt} + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\
&= L\Big|_{f(t)} + \epsilon \left.\frac{\partial L}{\partial q^a}\right|_{f(t)} \eta^a(t) + \epsilon \frac{d}{dt} \left( \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right|_{f(t)} \eta^a(t) \right) - \epsilon \frac{d}{dt} \left( \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right|_{f(t)} \right) \eta^a(t) + \mathcal{O}(\epsilon^2). \quad (5.19)
\end{aligned}$$

Замењујући (5.19) у (5.18) налазимо три врсте доприноса – оне који не зависе од  $\epsilon$ , оне који су линеарни по  $\epsilon$  и чланове вишег реда по  $\epsilon$ . Када применимо извод по  $\epsilon$  на те сабирке, и ставимо  $\epsilon = 0$  након тога, сви чланови који не зависе од  $\epsilon$ , као и они који су барем квадратни по  $\epsilon$ , ишчезавају. Тако остајемо на

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} dt \eta^a(t) \left( \left.\frac{\partial L}{\partial q^a}\right|_{f(t)} - \frac{d}{dt} \left( \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right|_{f(t)} \right) \right) + \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt} \left( \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right|_{f(t)} \eta^a(t) \right). \quad (5.20)$$

Међутим, пробна функција  $\eta$  ишчезава при  $t = t_i$  и  $t = t_f$ , па за други сабирак из претходне једнакости добијамо

$$\int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt} \left( \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right|_{f(t)} \eta^a(t) \right) = \left( \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right|_{f(t)} \eta^a(t) \right) \Big|_{t_i}^{t_f} = 0. \quad (5.21)$$

Према томе, услов стационарности дејства се своди на

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} dt \eta^a(t) \left( \left.\frac{\partial L}{\partial q^a}\right|_{f(t)} - \frac{d}{dt} \left( \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right|_{f(t)} \right) \right), \quad (5.22)$$

а ова једнакост ће бити испуњена за произвољно  $\eta$  ако важе Ојлер-Лагранжеве једначине (5.5). ■

Нека је  $\phi(\{q^a\}, t)$  произвољна (диференцијабилна) функција која зависи од генерализаних координата и времена. Тада лагранжијани  $L$  и

$$L' = L + \frac{d\phi}{dt} \quad (5.23)$$

описују исту временску еволуцију. Заиста, на основу (5.9) је

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial q^b} \dot{q}^b, \quad (5.24)$$

па имамо

$$\frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \left( \frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{\partial\phi}{\partial q^b} \dot{q}^b \right) = \frac{\partial^2\phi}{\partial t \partial \dot{q}^a} + \frac{\partial\phi}{\partial q^b} \delta_a^b = \frac{\partial\phi}{\partial q^a}, \quad (5.25)$$

као и

$$\frac{\partial}{\partial q^a} \left( \frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^a \partial q^b} \dot{q}^b + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial q^a}, \quad (5.26)$$

где смо искористили (5.1) и чињеницу да  $\partial\phi/\partial q^a$  не зависи од  $\dot{q}^a$ . Имајући ове изводе, можемо наћи Ојлер-Лагранжеве једначине за  $L'$ . Пошто је

$$\frac{\partial L'}{\partial q^a} = \frac{\partial}{\partial q^a} \left( L + \frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{\partial L}{\partial q^a} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^a \partial q^b} \dot{q}^b + \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial q^a}, \quad (5.27)$$

док

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^a} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}^a} \left( L + \frac{d\phi}{dt} \right) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} + \frac{\partial \phi}{\partial q^a} \quad (5.28)$$

директно даје

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^a} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \phi}{\partial q^a} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) + \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^a \partial t} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial q^a \partial q^b} \dot{q}^b. \quad (5.29)$$

Сада лако видимо да је

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^a} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q^a} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^a}, \quad (5.30)$$

тако да су и Ојлер-Лагранжеве једначине истоветне

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}^a} \Big|_{f(t)} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q^a} \Big|_{f(t)} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \Big|_{f(t)} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^a} \Big|_{f(t)}, \quad (5.31)$$

што је и требало показати. Треба приметити да постоји суштинска разлика између једначина (5.30) и Ојлер-Лагранжевих једначина (5.31). Док су Ојлер-Лагранжеве једначине диференцијалне једначине другог реда за непознате функције  $f^a(t)$ , једначине (5.30) представљају само везу између различитих координата  $q^a$ ,  $\dot{q}^a$  и  $\ddot{q}^a$ . Простори у којима су координате  $\{q^a, \dot{q}^a, \ddot{q}^a, \dots\}$  имају велику примену у теорији диференцијалних једначина, теоријској механици и теорији поља. Више детаља о њима се може наћи у [Olver, P. (2000); Saunders, D.J. (1980)]. Такође, инваријантност једначина кретања у односу на трансформацију лагранжијана из (5.23) се може анализирати и са становишта дејства. Одговарајући интеграл је

$$S'[f] = \int_{t_i}^{t_f} dt L' \left( \{f^a(t), \dot{f}^a(t)\} \right) = S[f] + \phi(t_f) - \phi(t_i). \quad (5.32)$$

Пошто  $\phi(t_f) - \phi(t_i)$  не зависи од произвољног временског тренутка између  $t_i$  и  $t_f$ , закључујемо да  $S[f]$  и  $S'[f]$  дају исте једначине кретања за било које  $t_i < t < t_f$ .

На овом месту ћемо се зауставити у анализи Лагранжевог приступа у механици честица и прећи ћемо на Хамилтонов метод. Више детаља о примени Ојлер-Лагранжевих једначина и варијационог принципа на проблеме из механике се може наћи у стандардним уџбеницима [Милић, Б. (1997); Мушицки, Ђ. (1987)], док је уопштење Лагранжевог метода на теорију поља описано у [Olver, P. (2000); Радошевић, С. (2022); Радошевић, С., Мали, П. (2020)].

### 5.1.2 Хамилтонов формализам

Као што смо дискутовали у претходном одељку, Лагранжев формализам је конструисан тако да опише кинематичко стање система честица. Међутим, често нам је од интереса да директно добијемо *динамичко стање* и Хамилтонов (канонски) приступ механици система честица се уводи из тог разлога. Као такав, он има велику примену у статистичкој механици, као и у канонском квантовању класичних система. Простор динамичких стања се назива фазни простор и често се означава са  $Z$ . За разлику од простора кинематичких стања, фазни простор природно носи тзв. симплектичку структуру која се огледа у постојању Поасонових заграда [Abraham, R., Marsden, J.E. (1980)]. За типичне лагранжијане које ћемо посматрати у наставку, а који су облика  $L = T - U$ , Хамилтонова функција је једноставно збир кинетичке и потенцијалне енергије,  $H = T + U$  [Милић, Б. (1997)].

Први корак ка Хамилтоновој формулацији класичне механике је дефинисање канонских импулса

$$p_a := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}, \quad (5.33)$$

Скуп  $\{q^a, p_a\}$ ,  $a = 1, 2, \dots, N$  представља координате на фазном простору за који ћемо у наставку претпоставити да је  $Z = \mathbb{R}^{2N}$ . Уместо релација (5.1), у фазном простору важи

$$\frac{\partial q^a}{\partial q^b} = \frac{\partial p_a}{\partial p_b} = \delta_b^a, \quad \frac{\partial q^a}{\partial p_b} = \frac{\partial p_a}{\partial q^b} = 0. \quad (5.34)$$

Ако усвојимо конвенцију о изводима по времену за координате у фазном простору, по узору на ону коришћену у конфигурационом простору, нову координату  $\dot{p}_a$  можемо дефинисати помоћу једначине (5.30)

$$\dot{p}_a = \frac{\partial L}{\partial q^a}. \quad (5.35)$$

Ова релација није погодна за дефинисање диференцијалне једначине јер  $L$  зависи од  $\{q^a, \dot{q}^a\}$  и доводила би до преплитања фазног простора и простора кинематичких стања. Како бисмо добили једначине које зависе само од координата на фазном простору, дефинисаћемо Хамилтонову функцију (краће, хамилтонијан), као Лежандрову трансформацију лагранжијана

$$H(\{q^a, p_a\}) := \sum_{a=1}^N p_a \dot{q}^a - L(\{q^a, \dot{q}^a\}), \quad (5.36)$$

при чему се подразумева да смо у Лагранжевој функцији елиминисали све генерализане брзине у корист канонских импулса. Да би тако нешто било могуће, неопходно је да се релације (5.33) могу решити по  $\dot{q}^a$ . У Њутновој механици система честица је то увек могуће урадити [Милић, Б. (1997)] јер су тада конфигурациони и фазни простор дуални једни другима (конфигурациони простор је заправо тангентно, а фазни простор је ко-

тангентно раслојење<sup>2</sup>). То је у исто време и разлог због којег индексе на генералисаним координатама пишемо као горње, а на импулсима као доње. Одговарајући елементи базиса простора  $\mathbb{R}^N$  ће бити писани као  $e_a$ , односно, као  $e^a$  уколико се односе на простор колона генералисаних брзина, односно импулса.

Да хамитонијан зависи само од генералисаних координата и импулса, можемо се уверити ако нађемо његов диференцијал. Из (5.36) следи

$$\begin{aligned} dH &= d\left(\sum_{a=1}^N p_a \dot{q}^a\right) - dL = \sum_{a=1}^N \left( dp_a \dot{q}^a + p_a d\dot{q}^a - \frac{\partial L}{\partial q^a} dq^a - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} d\dot{q}^a \right) \\ &= \sum_{a=1}^N \left( dp_a \dot{q}^a - dq^a \frac{\partial L}{\partial q^a} \right). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Будући да  $dH$  садржи само  $dq^a$  и  $dp_a$ , потврђујемо да је  $H$  заиста права функција на фазном простору. Ако сада искористимо везу (5.35), знајући да мора важити

$$dH(\{q^a, p_a\}) = \sum_{a=1}^N \left( dp_a \frac{\partial H}{\partial p_a} + dq^a \frac{\partial H}{\partial q^a} \right), \quad (5.38)$$

налазимо

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}, \quad \dot{p}_a = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \quad a = 1, 2, \dots, N. \quad (5.39)$$

Пошто леве стране ових релација зависе само од  $\{q^a, p_a\}$ , оне могу послужити да се помоћу њих добију диференцијалне једначине чија решења описују како се динамичко стање система мења са временом.

Нека је сада  $t \mapsto f(t) = [f^1(t) f^2(t) \cdots f^N(t) f_1(t) \cdots f_N(t)]$  крива на фазном простору, тако да је  $f^a(t) = q^a(f(t))$  и  $f_a = p_a(f(t))$ . Она ће описивати временску еволуцију динамичког стања система ако важи

$$\dot{q}^a(f(t)) \equiv \frac{df^a}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_a} \Big|_{f(t)}, \quad \dot{p}_a(f(t)) \equiv \frac{df_a}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q^a} \Big|_{f(t)}. \quad (5.40)$$

Ово су тзв. Хамилтонове једначине.

Једначине кретања у Хамилтоновим формализму можемо добити ако дејство, као интеграл Лагранжеве функције, изразимо помоћу хамилтонијана и позовемо се на варијациони принцип:

**Тврђење 5.2.** Хамилтонове једначине (5.40) се добијају из услова стационарности деј-

<sup>2</sup>Тангентно раслојење је простор који локално (од тачке до тачке) изгледа као  $\mathbb{R}^{2N}$ . Првих  $N$  координата неке тачке из тог простора описује положај тачке у  $N$  димензионом простору а преосталих  $N$  координата описује компоненте вектора који су тангентни вектори у тој тачки. Слично се дефинише и котангентно раслојење. Разлика је у томе што код котангентног раслојења последњих  $N$  координата описује компоненте дуалних вектора. Више детаља о овим просторима се може наћи у специјализованој литератури [Abraham, R., Marsden, J.E. (1980); Saunders, D.J. (1980); Olver, P. (2000)].

ства

$$\begin{aligned} S[f] &:= \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \sum_{a=1}^N p_a(f(t)) \dot{q}^a(f(t)) - H(q^a(f(t)), p_a(f(t))) \right) \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left( \sum_{a=1}^N f_a(t) \dot{f}^a(t) - H(f^a(t), f_a(t)) \right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

*Доказ.* Нека је, слично као у случају Тврђења 5.1,  $\eta : t \mapsto \eta(t) \in \mathbb{Z}$  пробна функција – произвољна глатка функција за коју важи  $\eta(t_i) = \eta(t_f) = 0$  и која је задата помоћу компоненти  $\eta^a = q^a(\eta(t))$ ,  $\eta_a = p_a(\eta(t))$ . Тада се услов стационарности дејства изражава као (у наставку подразумевамо сумирање по индексу  $a = 1, 2, \dots, N$ )

$$\left. \frac{d}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ (f_a(t) + \epsilon \eta_a(t)) (\dot{f}^a(t) + \epsilon \dot{\eta}^a(t)) - H(f^a(t) + \epsilon \eta^a(t), f_a(t) + \epsilon \eta_a(t)) \right] = 0.$$

Развијајући подинтегралну функцију у ред по степенима  $\epsilon$ , након рачунања извода и узимања  $\epsilon = 0$ , добијамо

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ f_a(t) \dot{\eta}^a(t) + \eta_a(t) \dot{f}^a(t) - \left. \frac{\partial H}{\partial p_a} \right|_{f(t)} \eta_a(t) - \left. \frac{\partial H}{\partial q^a} \right|_{f(t)} \eta^a(t) \right] \\ &= \int_{t_i}^{t_f} dt \eta_a(t) \left( \dot{f}^a(t) - \left. \frac{\partial H}{\partial p_a} \right|_{f(t)} \right) - \int_{t_i}^{t_f} dt \eta^a(t) \left( \dot{f}_a(t) + \left. \frac{\partial H}{\partial q^a} \right|_{f(t)} \right) \\ &\quad + \int_{t_i}^{t_f} dt \left[ \frac{d}{dt} (f_a(t) \eta^a(t)) \right], \end{aligned} \quad (5.42)$$

где смо искористили Лајбницево правило на производу  $f_a(t) \eta^a(t)$ . Подинтегрална функција у последњем интегралу је тотални диференцијал и цео тај допринос је једнак разлици  $f_a(t_f) \eta^a(t_f) - f_a(t_i) \eta^a(t_i)$ . Пошто пробна функција ишчезава у обе границе интеграције, тај сабирак можемо испустити из даље анализе. Услов стационарности дејства се сада може изразити помоћу два преостала интеграла као

$$0 = \int_{t_i}^{t_f} dt \eta_a(t) \left( \dot{q}^a - \left. \frac{\partial H}{\partial p_a} \right|_{f(t)} \right) - \int_{t_i}^{t_f} dt \eta^a(t) \left( \dot{p}_a + \left. \frac{\partial H}{\partial q^a} \right|_{f(t)} \right). \quad (5.43)$$

Будући да су компоненте пробне функције произвољне, једнакост ће бити испуњена ако важе Хамилтонове једначине (5.40). ■

Хамилтонов формализам се може искористити да се добије диференцијална једначина која описује временску еволуцију произвољне величине дефинисане на фазном простору. Нека је  $A(\{q^a, p_a\}, t)$  таква величина. При томе смо, ради општости, допустили да  $A$  и експлицитно зависи од времена. У случају механике честица, овакве величине могу описивати допринос у хамилтонијану који потиче од временски промењивог спољашњег магнетног и електричног поља. Користећи правило за диференцирање на фазном простору, налазимо

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \sum_{a=1}^N \left( \frac{\partial A}{\partial q^a} \dot{q}^a + \frac{\partial A}{\partial p_a} \dot{p}_a \right) \equiv \frac{\partial A}{\partial t} + [A, H]_{\text{PZ}}, \quad (5.44)$$

где смо дефинисали Поасонову заграду за две произвољне величине на фазном простору

$$\left[ A, B \right]_{\text{PZ}} := \sum_{a=1}^N \left( \frac{\partial A}{\partial q^a} \frac{\partial B}{\partial p_a} - \frac{\partial A}{\partial p_a} \frac{\partial B}{\partial q^a} \right). \quad (5.45)$$

Специјално, помоћу Поасонових заграда се Хамилтонове једначине могу записати у симетричном облику

$$\dot{q}^a = \left[ q^a, H \right]_{\text{PZ}}, \quad \dot{p}_a = \left[ p_a, H \right]_{\text{PZ}}. \quad (5.46)$$

Такође, на основу (5.45) налазимо

$$\left[ q^a, p_b \right]_{\text{PZ}} = \delta_b^a. \quad (5.47)$$

Парови величина који задовољавају релације (5.47) се називају канонске променљиве [Милић, Б. (1997)]. У случају Декартових координата, то су одговарајуће координатне функције, али за фазне просторе сложеније структуре, канонске променљиве могу нелинеарно зависити од координатних функција. Видети, рецимо [Radošević, S., Gombar, S., Rutonjski, M., Mali, P., Pantić, M., Pavkov-Hrvojević, M. (2026)], где је детаљно разматрана сфера  $S^2$  као фазни простор. Даље, видимо да релација

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \left[ A, H \right]_{\text{PZ}} = 0 \quad (5.48)$$

карактерише функцију на фазном простору која се не мења са временом, односно ону за коју важи закон одржања. У наставку ћемо дискутовати законе одржања енергије, импулса и момента импулса.

Поред очигледне чињенице да је Поасонова заграда произвољне величине  $A$  са константом једнака нули, као и да је  $\left[ A, A \right]_{\text{PZ}} = 0$ , Поасонове заграде имају неколико важних особина

$$\begin{aligned} \left[ A, B \right]_{\text{PZ}} &= - \left[ B, A \right]_{\text{PZ}}, & \left[ A, B + C \right]_{\text{PZ}} &= \left[ A, B \right]_{\text{PZ}} + \left[ A, C \right]_{\text{PZ}}, \\ \left[ A, BC \right]_{\text{PZ}} &= \left[ A, B \right]_{\text{PZ}} C + B \left[ A, C \right]_{\text{PZ}}, \\ \left[ A, \left[ B, C \right]_{\text{PZ}} \right]_{\text{PZ}} + \left[ C, \left[ A, B \right]_{\text{PZ}} \right]_{\text{PZ}} + \left[ B, \left[ C, A \right]_{\text{PZ}} \right]_{\text{PZ}} &= 0. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Све се доказују директно полазећи од дефиниције и њихово проверавање је остављено за самосталну вежбу. Занимљиво је да аналоган сет алгебарских релација задовољавају и комутатори који се појављују у канонској формулацији квантне механике [видети Додатак В]. Управо ова формална сличност између Поасонових заграда и комутатора омогућава да се алгебарско решење за атом водениковог типа нађе на основу аналогиче са класичним Кеплеровим проблемом.

## 5.2 Теорема Еми Нетер

### 5.2.1 Инваријантност дејства и закони одржања

Према савременом схватању [Weinberg, S. (2008)], закони одржања су последица симетрија физичког система. Рецимо, изотропност простора захтева да дејство које описује систем честица буде инваријантно у односу на ротације око произвољне осе и ова симетрија има за последицу закон одржања момента импулса [видети Пример 5.3 у наставку текста]. Општи став који описује симетрије физичког система је познат под називом *теорема Еми Нетер* и у овом одељку ћемо дискутовати специјалан случај теореме примењив на механичке системе честица.

Пре него што пређемо на саму теорему, потребно је да специфицирамо шта подразумевамо под симетријом физичког система. Ако је  $t \rightarrow f(t)$  функција која описује временску еволуцију система у конфигурационом простору, под трансформацијом подразумевамо прелазак на неку нову конфигурацију  $f(t) + \delta f(t)$ , где је

$$\delta f = \varepsilon^i \mathcal{F}_i^a (f, \dot{f}) e_a, \quad (5.50)$$

тако да  $\{e_a\}$  представља базис у конфигурационом простору  $\mathbb{R}^N$ ,  $\varepsilon^i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  су константни параметри, а  $\mathcal{F}_i^a$  су функције кинематичког стања. Трансформације овог типа називамо континуалним глобалним трансформацијама пошто параметри  $\varepsilon^i$  не зависе од времена. Под овим претпоставкама важи [Мушицки, Ђ. (1987); Arnold, V. I. (2013)]

**Тврђење 5.3** (Теорема Еми Нетер). Нека је дејство  $S[f]$  инваријантно у односу на континуалне глобалне трансформације  $f \rightarrow f + \delta f$ , где је  $\delta f$  произвољна инфинитезимална варијација функције која описује положаје честица система. Тада, на конфигурацијама  $f(t)$  које задовољавају једначине кретања, постоји  $n$  величина  $Q_i$  које се не мењају са временом,  $\dot{Q}_i = 0$  при чему је  $n$  број параметара који одређују трансформацију  $\delta f$ .

*Доказ.* Имајући на уму велики значај ове теореме, њен доказ је релативно једноставан. Претпоставимо, за тренутак, да параметри  $\varepsilon^i$  нису константни већ да зависе од времена на произвољан начин, уз услов  $\varepsilon^i(t_i) = \varepsilon^i(t_f) = 0$ . Трансформација функција  $f \rightarrow f + \delta f$  индукује трансформацију дејства  $S \rightarrow S + \delta S$ . При томе  $\delta S$  мора бити облика

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \dot{\varepsilon}^i(t) Q_i(t) \quad (5.51)$$

како би важило  $\delta S = 0$  у случају константних параметара  $\varepsilon^i$ ;  $Q_i(t)$  су, за сада, произвољне функције. Односно,

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{d}{dt} \left( \varepsilon^i(t) Q_i(t) \right) - \int_{t_i}^{t_f} dt \varepsilon^i(t) \frac{dQ_i(t)}{dt}. \quad (5.52)$$

Претпоставимо сада да су задовољене једначине кретања. Услови  $\varepsilon^i(t_i) = \varepsilon^i(t_f) = 0$  нам омогућавају да третирамо  $\delta f$  као пробну функцију и на основу Тврђења 5.1 знамо да

је тада  $\delta S = 0$ . Међутим, овај услов гарантује и ишчезавање првог интеграла из (5.52), па тако остаје

$$0 = - \int_{t_i}^{t_f} dt \varepsilon^i(t) \frac{dQ_i(t)}{dt}. \quad (5.53)$$

Последња једнакост ће бити испуњена за произвољне  $\varepsilon^i(t)$  и  $t \in (t_i, t_f)$  само ако је  $\dot{Q}_i = 0$ , чиме је доказ завршен. ■

Уколико је, поред инваријантности дејства, лагранжијан инваријантан у односу на трансформације  $f \rightarrow f + \delta f$ , можемо наћи и експлицитан облик функција  $Q_i(t)$ . Односно, можемо дефинисати одговарајуће функције на простору кинематичких стања  $\mathcal{Q}_i(\{q^a, \dot{q}^a\})$ . Веза између њих је дата са

$$Q_i(t) = \mathcal{Q}_i(\{q^a(f(t)), \dot{q}^a(f(t))\}) = \mathcal{Q}_i(\{f^a(t), \dot{f}^a(t)\}). \quad (5.54)$$

Другим речима,  $Q_i = \mathcal{Q}_i \circ f$ . При томе, на основу анализе из Одељка 5.1.1, знамо да је довољно да се лагранжијан мења до на извод неке функције по времену.

Претпоставимо да се, за сада произвољна, крива на конфигурационом простору  $t \mapsto f(t)$  трансформише као  $f \rightarrow f + \delta f$ . Ова трансформација индукује промену лагранжијана  $L \rightarrow L + \delta L$ , где је  $\delta L$  линеарно по  $\varepsilon^i$ . Услов инваријантности Ојлер-Лагранжевих једначина у овом случају гласи  $\delta L = dg(t)/dt$ , где је  $g$  произвољна функција а извод  $d/dt$  треба схватити у смислу оператора (5.9). Понављајући поступак из доказа Тврђења 5.1, видимо да се услов инваријантности лагранжијана може записати као

$$\delta L = \delta f^a \left( \left. \frac{\partial L}{\partial q^a} \right|_{f(t)} - \frac{d}{dt} \left( \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \right|_{f(t)} \right) \right) + \frac{d}{dt} \left( \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta f^a \right|_{f(t)} \right) = \frac{dg}{dt}. \quad (5.55)$$

Ако сада претпоставимо да је  $f(t)$  решење Ојлер-Лагранжевих једначина, односно да  $t \mapsto f(t)$  описује временску еволуцију конфигурације система, прва заграда у претходној једнакости ишчезава. Дакле, услов инваријантности Ојлер-Лагранжевих једначина доводи до

$$\frac{d}{dt} \left[ \left( \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \delta f^a \right|_{f(t)} - g \right) \right] = 0. \quad (5.56)$$

Односно, важи

$$\frac{d}{dt} \left[ \left. \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \mathcal{F}_i^a(\{q^a, \dot{q}^a\}) \right|_{f(t)} - g_i \right] = 0, \quad (5.57)$$

где смо дефинисали  $g = \varepsilon^i g_i$ . Дакле, функције  $Q_i$  на простору кинематичких стања су дате са

$$Q_i(\{q^a, \dot{q}^a\}) := \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \mathcal{F}_i^a(\{q^a, \dot{q}^a\}) - g_i(\{q^a, \dot{q}^a\}) \quad (5.58)$$

и  $Q_i = \mathcal{Q}_i \circ f$ , где  $f$  описује временску еволуцију система, представљају интеграле кретања. Погледајмо сада три основна примера која ће нам бити потребна у наставку излагања.

**Пример 5.2.** Претпоставимо да је систем који посматрамо просторно хомоген. Тада лагранжијан мора бити инваријантан у односу на глобалне транслације. Другим речима, ако  $f(t)$  описује положаје честица у тренутку  $t$ , функција  $f(t) + \varepsilon^a e_a$  мора обезбедити подједнако добар опис истог система у тренутку  $t$ . Према томе, у овом случају имамо  $\delta f = \varepsilon^a e_a$  и  $\mathcal{F}_i^a = \delta_i^a$ , па из услова  $\delta L = 0$  налазимо функције  $\mathcal{Q}_i$

$$\mathcal{Q}_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}. \quad (5.59)$$

Знајући да је  $\partial L / \partial \dot{q}^a = p_a$ , видимо да је величина за коју важи закон одржања

$$\mathcal{Q} = \sum_{a=1}^N \mathcal{Q}_a e^a = \sum_{a=1}^N p_a e^a \equiv P \quad (5.60)$$

укупан импулс свих честица. ■

**Пример 5.3.** Пошто ћемо у овом примеру користити векторски производ, увешћемо другачије бројање честица. Претпоставимо да се систем састоји од  $N'$  честица које се крећу у тродимензионом простору, тако да  $q_a^\alpha$  означава  $\alpha$  координату положаја  $a$ -те честице. Временску еволуцију положаја ове честице описује функција  $\mathbf{f}_a(t) = f_a^\alpha(t) e_\alpha$ . Ако претпоставимо да је простор изотропан, лагранжијан мора бити инваријантан у односу на ротације око неке осе. Ако је оса ротације одређена вектором  $\boldsymbol{\theta} = \theta^\alpha e_\alpha$ , тада трансформација<sup>3</sup>  $\mathbf{f}_a(t) \rightarrow \mathbf{f}_a(t) + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{f}_a(t)$  мора оставити лагранжијан непоромењеним,  $\delta L = 0$ . Пошто је  $\delta \mathbf{f}_a = \epsilon_{\alpha\beta}^{\gamma} \theta^\alpha f_a^\beta e_\gamma$ , директно налазимо  $\mathcal{F}_\alpha^\gamma(\mathbf{f}_a) = \epsilon_{\alpha\beta}^{\gamma} f_a^\beta(t)$  (Како овде експлицитно користимо Декартове координате у простору  $\mathbb{R}^3$ , не правимо разлику између горњих и доњих индекса који нумеришу компоненте вектора или ортове; један индекс у Леви-Чивита симболу је писан као горњи због општег облика функција  $\mathcal{F}_i^a$ ). Односно,  $\mathcal{F}_\alpha^\gamma(\mathbf{q}_a) = \epsilon_{\alpha\beta}^{\gamma} q_a^\beta$ . Према томе, у случају изотропног простора, величина која се не мења са временом је

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \sum_{a=1}^{N'} \mathcal{Q}_a = \sum_{a=1}^{N'} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a^\alpha} \mathcal{F}_\alpha^\gamma(\mathbf{q}_a) e^\alpha = \sum_{a=1}^{N'} \sum_{\alpha, \beta, \gamma=1}^3 \epsilon_{\alpha\beta}^{\gamma} q_a^\beta p_{a,\gamma} e^\alpha \\ &= \sum_{a=1}^{N'} \mathbf{q}_a \times \mathbf{p}_a = \sum_{a=1}^{N'} \mathbf{l}_a \equiv \mathbf{L}, \end{aligned} \quad (5.61)$$

што препознајемо као укупан момент импулса система честица. ■

**Пример 5.4.** Коначно, претпоставимо да је ток времена хомоген, тако да опис система не сме зависити од тренутка који смо изабрали за почетак мерења времена. Овај услов је испуњен у инерцијалним системима [Милић, Б. (1997)], а одговарајућа симетрија лагранжијана је инваријантност у односу на трансформације  $t \rightarrow t + \varepsilon$ . Транслагација у времену индукује промену функција  $f^a, f^a(t) \rightarrow f^a(t + \varepsilon) = f^a(t) + \varepsilon \dot{f}^a(t) + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$ . Одавде директно налазимо функције  $\mathcal{F}_i^a = \dot{f}^a$  – у случају временске транслагације постоји само један

<sup>3</sup>У [Радосевић, С., Мали, П. (2020)], Глава 1, је показано како се овај облик трансформације векторске величине добија полазећи од Ојлерове формуле.

параметар  $\varepsilon$  и  $\mathcal{F}^a(\{q^a, \dot{q}^a\}) = \dot{q}^a$ . Међутим, код временских транслација се Лагранжева функција мења до на тотални извод, јер је

$$\begin{aligned} L\left(\{f^a + \varepsilon \dot{f}^a, \dot{f}^a + \varepsilon \ddot{f}^a\}\right) &= L\left(\{f^a\}, \{\dot{f}^a\}\right) + \left.\frac{\partial L}{\partial q^a}\right|_{f(t)} \varepsilon \dot{f}^a + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a}\right|_{f(t)} \varepsilon \ddot{f}^a + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ &= L + \varepsilon \frac{dL}{dt} + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Дакле,  $\mathcal{F}^a = \dot{q}^a$ ,  $g = L$  и на основу (5.58) добијамо

$$\mathcal{Q} = \sum_{a=1}^N \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \dot{q}^a - L = \sum_{a=1}^N p_a \dot{q}^a - L \equiv H. \quad (5.63)$$

Према томе, инваријантност лагранжијана у односу на временске транслације доводи до закона одржања механичке енергије. ■

### 5.2.2 Закони одржања и Поасонове заграде

Законе одржања можемо разматрати и у Хамилтоновом формализму. Суштина тог прилаза је садржана у релацији (5.44) која описује временску еволуцију динамичке величине дефинисане на фазном простору. Као што смо већ приметили, услов да нека величина, изражена помоћу канонских промењивих, не зависи од времена је дат са (5.48). У наставку ћемо се ограничити на величине које не зависе експлицитно од времена, тако да се једнакост  $dA/dt = 0$  своди на

$$\left[A, H\right]_{\text{PZ}} = 0. \quad (5.64)$$

На пример, закон одржања енергије је директна последица једноставне особине Поасонових заграда,  $[H, H]_{\text{PZ}} = 0$ .

Формализам Поасонових заграда нам омогућава и да законе одржања повежемо са симетријским трансформацијама у фазном простору. Претпоставимо, за почетак, трансформацију која делује на координате  $q^a$  тако да је

$$\delta q^a = \varepsilon^i \mathcal{F}_i^a(\{q^a\}), \quad (5.65)$$

као и да ова трансформација оставља Лагранжијан инваријантним. То значи да величине

$$\mathcal{Q}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^a} \mathcal{F}_i^a(\{q^a\}) = p_a \mathcal{F}_i^a(\{q^a\}) \quad (5.66)$$

индукују законе одржања на кофигурацијама  $f(t)$  које задовољавају једначине кретања

$$\frac{d}{dt} \mathcal{Q}_i \circ f(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{Q}_i(t) = 0. \quad (5.67)$$

Сада видимо да је

$$\left[q^a, \varepsilon^i \mathcal{Q}_i\right]_{\text{PZ}} = \left[q^a, \varepsilon^i p_a \mathcal{F}_i^a(\{q^a\})\right]_{\text{PZ}} = \varepsilon^i \mathcal{F}_i^a(\{q^a\}) = \delta q^a. \quad (5.68)$$

Дакле, Поасонова заграда координате са  $\varepsilon^i Q_i$  индукује трансформацију координатних функција која одговара трансформацији (5.50) у случају када функције  $\mathcal{F}_i^a$  не зависе од  $\dot{q}^a$ .

**Пример 5.5.** Као први пример узмимо физички систем код којег важи закон одржања импулса. Тада је  $Q_a = p_a$  и налазимо

$$\left[ q^a, \varepsilon^b p_b \right]_{\text{PZ}} = \varepsilon^a. \quad (5.69)$$

Према томе, импулс (као величина за коју важи закон одржања), делујући Поасоновом заградом на координату, индукује трансформацију  $q^a \rightarrow q^a + \varepsilon^a$ . Ова трансформација одговара транслацији и у том смислу импулс можемо схватити као генератор транслација. Слично, код једночестичног система за који важи закон одржања момента импулса је  $Q_c = l_c = \varepsilon_{cbd} q_b p_d$ , па имамо

$$\left[ q_a, \theta_c \varepsilon_{cbd} q_b p_d \right]_{\text{PZ}} = \theta_c \varepsilon_{cba} q_b = (\boldsymbol{\theta} \times \mathbf{q})_a. \quad (5.70)$$

Ово значи да момент импулса делује на координату као генератор ротација јер је одговарајућа трансформација  $\mathbf{q} \rightarrow \mathbf{q} + \boldsymbol{\theta} \times \mathbf{q}$ . На овом месту ћемо још забележити да важи

$$\left[ q_a, l_b \right]_{\text{PZ}} = \varepsilon_{abc} q_c, \quad (5.71)$$

што је само други начин исказивања чињенице да се (у тродимензионом простору) координата трансформише као векторска величина. ■

Закон одржања енергије се не може дискутовати на основу (5.66) и (5.68) јер  $\mathcal{F}_i^a$  зависи од  $\dot{q}$ . Ипак, на основу (5.40) уочавамо да (кроз Поасонове заграде) хамилтонијан индукује трансформацију  $q^a \rightarrow q^a + \varepsilon \dot{q}^a$ , што одговара трансформацији конфигурације  $f(t) \rightarrow f(t + \varepsilon)$ . Према томе, видимо да Хамилтонов оператор генерише временску транслацију.

За испитивање симетрија Хамилтонове функције није довољно да знамо само законе трансформације координата. Друге две динамичке величине чији закони трансформације ће нам требати су импулс и момент импулса. Правила њихове трансформације можемо директно добити анализирајући одговарајуће Поасонове заграде. Рецимо, у односу на ротације, које генерише момент импулса, импулс и момент импулса се трансформишу као векторске величине

$$\left[ p_a, l_b \right]_{\text{PZ}} = \varepsilon_{abc} p_c, \quad \left[ l_a, l_b \right]_{\text{PZ}} = \varepsilon_{abc} l_c. \quad (5.72)$$

Проверавање исправности ових релација је остављено за самосталну вежбу.

**Пример 5.6.** Користећи Поасонове заграде из (5.71) и (5.72) можемо директно показати инваријантност неких скаларних функција у односу на ротације. Прва од њих је  $\mathbf{p}^2$ , која се појављује у кинетичкој енергији система честица. На основу особина Поасонових заграда наведених у (5.49), можемо писати

$$\left[ l_a, \mathbf{p}^2 \right]_{\text{PZ}} = \left[ l_a, \sum_b p_b p_b \right]_{\text{PZ}} = 2 \sum_b p_b \left[ l_a, p_b \right]_{\text{PZ}} = 2 \sum_{bc} \varepsilon_{abc} p_b p_c = 0 \quad (5.73)$$

јер је  $\epsilon_{abc}$  антисиметрично у односу на замену индекса  $b$  и  $c$  а  $p_b p_c$  је симетрично. Као други важан пример узећемо произвољну сферносиметричну функцију  $f(|\mathbf{r}|) \equiv f(r)$ , где је  $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Стављајући  $l_a = \sum_{bc} \epsilon_{abc} x_b p_c$ , налазимо

$$\left[ l_a, f(r) \right]_{\text{PZ}} = \sum_{b,c=1}^3 \epsilon_{abc} x_b \left[ p_c, f(r) \right]_{\text{PZ}}. \quad (5.74)$$

Преосталу Поасонову заграду можемо израчунати полазећи од дефиниције (5.45). Директна замена даје

$$\left[ p_c, f(r) \right]_{\text{PZ}} = \sum_{d=1}^3 \left( \frac{\partial p_c}{\partial x_d} \frac{\partial f}{\partial p_d} - \frac{\partial p_c}{\partial p_d} \frac{\partial f}{\partial x_d} \right) = - \sum_{d=1}^3 \delta_{cd} \frac{df}{dr} \frac{x_d}{r} = - \frac{df}{dr} \frac{x_c}{r} = - \frac{\partial f}{\partial x_c}. \quad (5.75)$$

Замењујући (5.75) у (5.74) налазимо

$$\left[ l_a, f(r) \right]_{\text{PZ}} = - \frac{1}{r} \frac{df}{dr} \sum_{b,c=1}^3 \epsilon_{abc} x_b x_c = 0 \quad (5.76)$$

из истог разлога из којег је ишчезла Поасонова заграда (5.73). ■

Сумирајући све до сада везано за симетрије, законе одржања и Поасонове заграде, можемо рећи да у случају система који је инваријантан у односу на временске трансформације (тј. код којег Хамилтонова функција не зависи од времена) и ротације у тродимензионом простору, важе закони одржања енергије и момента импулса. Односно,

$$\left[ H, l_a \right]_{\text{PZ}} = 0, \quad (5.77)$$

уз тривијални услов  $[H, H]_{\text{PZ}} = 0$ . Компоненте импулса и компоненте момента импулса задовољавају релације (5.72).

### 5.3 Класични Кеплеров проблем

Кеплеров проблем описује кретање два тела, маса  $m_1$  и  $m_2$ , под утицајем централне привлачне силе чији интензитет опада са квадратом растојања између тела. Анализа Кеплеровог проблема се у великој мери поједностављује ако се Хамилтонова функција напише у тзв. систему центра маса. Она тада има облик [Милић, Б. (1997); Weinberg, S. (2012); Шиф, Л. (1968); Hall, В. С. (2013)]

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{K}{|\mathbf{r}|}, \quad (5.78)$$

где је  $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$  редукована маса,  $K$  је позитивна константа а  $|\mathbf{r}|$  означава интензитет вектора положаја,  $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Пратећи стандардну нотацију, у наставку ћемо компоненте вектора положаја означавати са  $x_a$ ,  $a = 1, 2, 3$ . У случају

оригиналног проблема, који се односио на одређивање путања планета под утицајем гравитационог поља Сунца,  $K = Gm_1m_2$ , где  $G$  означава гравитациону константу. Ми ћемо у наставку анализирати кретање наелектрисаних честица под дејством Кулонове силе у атому водониковог типа. Тада је  $K = Ze^2/(4\pi\epsilon_0)$ , при чему  $e > 0$  означава елементарно наелектрисување, а  $Z$  је број протона у језгру.

Овај хамилтонијан има неколико занимљивих особина. Прва је последица очигледних симетрија.

**Тврђење 5.4.** За систем описан хамилтонијаном (5.78) су укупна енергија и момент импулса константе кретања.

*Доказ.* Закон одржања енергије следи из чињенице да Хамилтонова функција не зависи експлицитно од времена, па  $[H, H]_{PZ} = 0$  доводи до  $dH/dt = 0$ . Са друге стране, хамилтонијан је ротационо инваријантан због чега је  $[l_a, H]_{PZ} = 0$ , одакле следи  $l = \text{const}$ . Резултат  $[l_a, H]_{PZ} = 0$  се добија директно на основу анализе из Примера 5.6 узимајући  $f(|\mathbf{r}|) = |\mathbf{r}|^{-1}$ . ■

Дакле, директна последица ротационе инваријантности потенцијалне енергије (самим тим и укупне Хамилтонове функције) је закон одржања момента импулса и то за последицу има да се кретање два тела одвија у једној равни. Такође, у зависности од почетних услова, путања може бити један од конусних пресека [Милић, Б. (1997); Olver, Р. (2000)]. Конкретно, затворене путање одговарају елипсама и јављају се у случају када је укупна енергија одређена хамилтонијаном (5.78) негативна.

Ротациона симетрија хамилтонијана је довољна да обезбеди путању која лежи у равни, али није довољна да осигура затворену путању. То указује да постоји још једна векторска величина, чији је закон одржања повезан са специјалним обликом путање, тј. са фиксном трајекторијом. То је тзв. вектор Рунге-Ленца [видети Сliku 5.2]

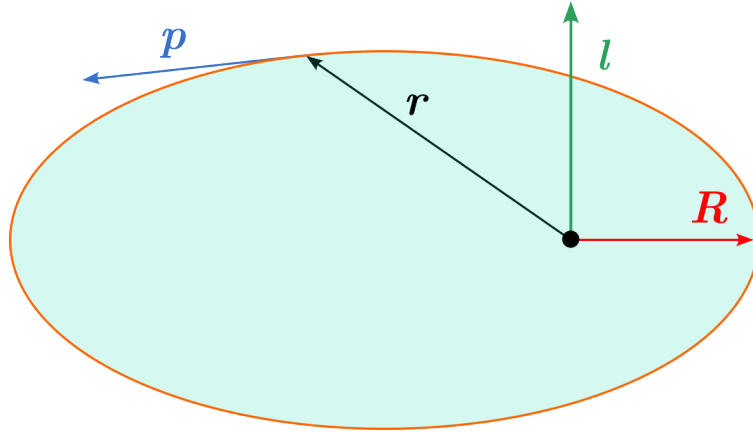
$$\mathbf{R} = \frac{1}{\mu} \mathbf{p} \times \mathbf{l} - \frac{K}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r} \quad (5.79)$$

где је  $\mathbf{r}$  вектор положаја,  $\mathbf{p}$  вектор импулса а  $\mathbf{l}$  вектор момента импулса честице масе  $\mu$ . Вектор  $\mathbf{R}$  је усмерен дуж велике полуосе елипсе и његов закон одржања је пример тзв. динамичке симетрије. Динамичка симетрија је повезана са специјалним обликом силе  $\mathbf{F} = -K\mathbf{r}/|\mathbf{r}|^3$ , односно потенцијалне енергије  $U = -K/|\mathbf{r}|$ . Заиста, показује се да у системима код којих су дозвољене поправке на Њутнов потенцијал, путање честица више нису затворене [Шиф, Ј. (1968)]. На основу дискусије из Одељка 5.2.2, константност Рунге-Ленцовог вектора је последица релације ишчезавања Поасонове заграде вектора  $\mathbf{R}$  и хамилтонијана

**Тврђење 5.5.** Вектор Рунге-Ленца је константа кретања Кеплеровог проблема.

*Доказ.* Имајући у виду дефиниције Хамилтонове функције (5.78) и Рунге-Ленцовог вектора (5.79), видимо да се  $\dot{\mathbf{R}} = 0$  показује рачунањем

$$\left[ \frac{1}{\mu} \mathbf{p} \times \mathbf{l} - \frac{K}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r}, \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{K}{|\mathbf{r}|} \right]_{PZ} = 0. \quad (5.80)$$



Слика 5.2: Вектор положаја ( $\mathbf{r}$ ), импулса ( $\mathbf{p}$ ), момента импулса ( $\mathbf{l}$ ) и Рунге-Ленцов вектор ( $\mathbf{R}$ ) за честицу масе  $\mu$  која се креће по елиптичкој путањи.

Као што смо већ видели,  $[l_a, |\mathbf{r}|^{-1}]_{\text{PZ}} = [l_a, \mathbf{p}^2]_{\text{PZ}} = 0$ . Такође,

$$\left[ p_a, \mathbf{p}^2 \right]_{\text{PZ}} = \left[ \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right]_{\text{PZ}} = 0. \quad (5.81)$$

Према томе,

$$\left[ \mathbf{R}, H \right]_{\text{PZ}} = - \left[ \frac{1}{\mu} \mathbf{p} \times \mathbf{l}, \frac{K}{|\mathbf{r}|} \right]_{\text{PZ}} - \left[ \frac{K}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r}, \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} \right]_{\text{PZ}} = 0 \quad (5.82)$$

је услов који индукује на константност вектора  $\mathbf{R}$ . Пошто је [видети (5.75)]

$$\begin{aligned} \left[ \frac{1}{\mu} \mathbf{p} \times \mathbf{l}, \frac{K}{|\mathbf{r}|} \right]_{\text{PZ}} &= \frac{K}{\mu} \epsilon_{abc} \left[ p_a, \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right]_{\text{PZ}} l_b e_c = - \frac{K}{\mu} \epsilon_{abc} \frac{\partial}{\partial x_a} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right) l_b e_c \\ &= \frac{K}{\mu} \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{l}}{|\mathbf{r}|^3}, \end{aligned} \quad (5.83)$$

уз  $\mathbf{r} \times \mathbf{l} = \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}|\mathbf{r}|^2$ , као и

$$\begin{aligned} \left[ \frac{K}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r}, \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} \right]_{\text{PZ}} &= 2 \frac{K}{2\mu} p_b e_a \left[ \frac{x_a}{|\mathbf{r}|}, p_b \right]_{\text{PZ}} = \frac{K}{\mu} p_b e_a \frac{1}{|\mathbf{r}|} \left[ x_a, p_b \right]_{\text{PZ}} + \frac{K}{\mu} p_b e_a x_a \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}|}, p_b \right]_{\text{PZ}} \\ &= \frac{K}{\mu} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r}|} - \frac{K}{\mu} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}, \end{aligned} \quad (5.84)$$

налазимо

$$\left[ \mathbf{R}, H \right]_{\text{PZ}} = - \frac{K}{\mu} \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}) - \mathbf{p}|\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{K}{\mu} \frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{r}|} + \frac{K}{\mu} \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}) \mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} = \mathbf{0} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad (5.85)$$

што је и требало показати. До овог резултата се може доћи и директно, рачунањем извода вектора  $\mathbf{R}$  по времену, уз коришћење Њутнове једначине. ■

Сада ћемо погледати још неке особине класичног Рунге-Ленцовог вектора. Аналогне релације су од великог значаја за Паулијево алгебарско решење атома водониковог типа.

**Тврђење 5.6.** Рунге-Ленцов вектор задовољава следеће релације:

1.  $\mathbf{R} \cdot \mathbf{l} = 0$ ,
2.  $\mathbf{R}^2 = \frac{2H}{\mu} \mathbf{l}^2 + K^2$ ,
3.  $\left[ R_a, l_b \right]_{\text{PZ}} = \epsilon_{abc} R_c$
4.  $\left[ R_a, R_b \right]_{\text{PZ}} = -\frac{2H}{\mu} \epsilon_{abc} l_c$ ,

где  $H$  представља хамилтонијан (5.78).

*Доказ.* Прва релација се доказује лако користећи

$$(\mathbf{p} \times \mathbf{l}) \cdot \mathbf{l} = \mathbf{p} \cdot (\mathbf{l} \times \mathbf{l}) = 0, \quad \mathbf{r} \cdot \mathbf{l} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = 0. \quad (5.86)$$

Другу релацију доказујемо директним рачуном

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^2 &= \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{p} \times \mathbf{l} - \frac{K}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r} \right) \cdot \left( \frac{1}{\mu} \mathbf{p} \times \mathbf{l} - \frac{K}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r} \right) \\ &= \frac{1}{\mu^2} \mathbf{l} \cdot \left( (\mathbf{p} \times \mathbf{l}) \times \mathbf{p} \right) - \frac{2K}{\mu |\mathbf{r}|} (\mathbf{p} \times \mathbf{l}) \cdot \mathbf{r} + K^2 \\ &= \frac{1}{\mu^2} \mathbf{p}^2 \mathbf{l}^2 - \frac{2K}{\mu |\mathbf{r}|} \mathbf{l}^2 + K^2, \end{aligned} \quad (5.87)$$

при чему смо искористили  $(\mathbf{p} \times \mathbf{l})^2 = \mathbf{l} \cdot (\mathbf{l} \mathbf{p}^2 - \mathbf{p}(\mathbf{l} \cdot \mathbf{p}))$ ,  $(\mathbf{p} \times \mathbf{l}) \cdot \mathbf{r} = \mathbf{l}^2$ , као и  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{l} = 0$ . Према томе, добијамо

$$\mathbf{R}^2 = \frac{2\mathbf{l}^2 \mathbf{p}^2}{\mu} - \frac{2\mathbf{l}^2 K}{\mu |\mathbf{r}|} + K^2 = \frac{2H}{\mu} \mathbf{l}^2 + K^2. \quad (5.88)$$

На сличан начин доказујемо и трећу релацију која потврђује да је  $\mathbf{R}$  заиста векторска величина. Полазећи од дефиниције, видимо да се проблем своди на рачунање три Поасонове заграде

$$\left[ R_a, l_b \right]_{\text{PZ}} = \frac{\epsilon_{a\beta\gamma}}{\mu} p_\beta \left[ l_\gamma, l_b \right]_{\text{PZ}} + \frac{\epsilon_{a\beta\gamma}}{\mu} l_\gamma \left[ p_\beta, l_b \right]_{\text{PZ}} - \frac{K}{|\mathbf{r}|} \left[ x_a, l_b \right]_{\text{PZ}}, \quad (5.89)$$

јер је  $[l_a, |\mathbf{r}|^{-1}]_{\text{PZ}} = 0$ . Користећи Поасонове заграде (5.71) и (5.72), као и познату особину Леви-Чивита симбола  $\epsilon_{a\beta\gamma} \epsilon_{a\mu\nu} = \delta_{\beta\mu} \delta_{\gamma\nu} - \delta_{\beta\nu} \delta_{\gamma\mu}$ , добијамо

$$\left[ R_a, l_b \right]_{\text{PZ}} = \frac{1}{\mu} (p_a l_b - p_b l_a) - \frac{K}{|\mathbf{r}|} \epsilon_{abc} x_c. \quad (5.90)$$

Међутим,  $p_a l_b - p_b l_a = \epsilon_{abc} (\mathbf{p} \times \mathbf{l})_c$ , тако да се добија

$$\left[ R_a, l_b \right]_{\text{PZ}} = \epsilon_{abc} \left( \frac{(\mathbf{p} \times \mathbf{l})_c}{\mu} - \frac{K}{|\mathbf{r}|} x_c \right) = \epsilon_{abc} R_c. \quad (5.91)$$

Коначно, израчунаћемо и Поасонове заграде за две произвољне компоненте вектора  $\mathbf{R}$ . По дефиницији је

$$\begin{aligned} [R_a, R_b]_{\text{PZ}} &= \left[ \frac{1}{\mu} \epsilon_{a\alpha\beta} p_\alpha l_\beta - \frac{Kx_a}{|\mathbf{r}|}, \frac{1}{\mu} \epsilon_{b\mu\nu} p_\mu l_\nu - \frac{Kx_b}{|\mathbf{r}|} \right]_{\text{PZ}} \\ &= \frac{1}{\mu^2} \epsilon_{a\alpha\beta} \epsilon_{b\mu\nu} [p_\alpha l_\beta, p_\mu l_\nu]_{\text{PZ}} - \frac{K}{\mu} \epsilon_{a\alpha\beta} \left[ p_\alpha l_\beta, \frac{x_b}{|\mathbf{r}|} \right]_{\text{PZ}} - \frac{K}{\mu} \epsilon_{b\mu\nu} \left[ \frac{x_a}{|\mathbf{r}|}, p_\mu l_\nu \right]_{\text{PZ}}, \end{aligned} \quad (5.92)$$

те се проблем своди на рачунање ове три Поасонове заграде. Рачунаћемо их редом. Пошто је

$$\begin{aligned} [p_\alpha l_\beta, p_\mu l_\nu]_{\text{PZ}} &= p_\mu [p_\alpha l_\beta, l_\nu]_{\text{PZ}} + l_\nu [p_\alpha l_\beta, p_\mu]_{\text{PZ}} \\ &= p_\mu p_\alpha [l_\beta, l_\nu]_{\text{PZ}} + p_\mu l_\beta [p_\alpha, l_\nu]_{\text{PZ}} + p_\alpha l_\nu [l_\beta, p_\mu]_{\text{PZ}} \\ &= p_\mu p_\alpha \epsilon_{\beta\nu\gamma} l_\gamma + p_\mu l_\beta \epsilon_{\alpha\nu\gamma} p_\gamma + p_\alpha l_\nu \epsilon_{\beta\mu\gamma} p_\gamma, \end{aligned} \quad (5.93)$$

јер важи  $[p_\mu, p_\nu]_{\text{PZ}} = 0$ , први сабирак из (5.92) се своди на збир три сабирка који садрже производе три Леви-Чивита симбола. Израчунаћемо их један по један:

$$\begin{aligned} \epsilon_{a\alpha\beta} \epsilon_{b\mu\nu} \epsilon_{\beta\nu\gamma} p_\mu p_\alpha l_\gamma &= \epsilon_{a\alpha\beta} (\delta_{b\gamma} \delta_{\mu\beta} - \delta_{b\beta} \delta_{\mu\gamma}) p_\mu p_\alpha l_\gamma = \epsilon_{a\alpha\beta} p_\beta p_\alpha l_b - \epsilon_{a\alpha\beta} p_\mu p_\alpha l_\mu \\ &= l_b (\mathbf{p} \times \mathbf{p})_a - \epsilon_{a\alpha\beta} p_\alpha \mathbf{p} \cdot \mathbf{l} = 0, \end{aligned} \quad (5.94)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{a\alpha\beta} \epsilon_{b\mu\nu} \epsilon_{\alpha\nu\gamma} p_\mu l_\beta p_\gamma &= \epsilon_{a\alpha\beta} (\delta_{b\gamma} \delta_{\mu\alpha} - \delta_{b\alpha} \delta_{\mu\gamma}) p_\mu l_\beta p_\gamma = \epsilon_{a\alpha\beta} p_\alpha l_\beta p_b - \epsilon_{a\beta\gamma} p_\mu l_\beta p_\mu \\ &= (\mathbf{p} \times \mathbf{l})_a p_b - \mathbf{p}^2 \epsilon_{a\beta\gamma} l_\beta, \end{aligned} \quad (5.95)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{a\alpha\beta} \epsilon_{b\mu\nu} \epsilon_{\beta\mu\gamma} p_\alpha l_\nu p_\gamma &= \epsilon_{a\alpha\beta} (\delta_{\nu\gamma} \delta_{b\beta} - \delta_{\nu\beta} \delta_{b\gamma}) p_\alpha l_\nu p_\gamma = \epsilon_{a\alpha\beta} p_\alpha l_\nu p_\nu - \epsilon_{a\alpha\nu} p_\alpha l_\nu p_b \\ &= \epsilon_{a\alpha\beta} p_\alpha \mathbf{p} \cdot \mathbf{l} - \epsilon_{a\alpha\nu} p_\alpha l_\nu p_b = -(\mathbf{p} \times \mathbf{l})_a p_b. \end{aligned} \quad (5.96)$$

Према томе, први сабирак из (5.92) је

$$\frac{1}{\mu^2} \epsilon_{a\alpha\beta} \epsilon_{b\mu\nu} [p_\alpha l_\beta, p_\mu l_\nu]_{\text{PZ}} = -\frac{\mathbf{p}^2}{\mu^2} \epsilon_{abc} l_c. \quad (5.97)$$

Пређимо сада на други сабирак из (5.92) и за почетак се сконцентришимо на Поасонову заграду без константног фактора испред ње

$$\begin{aligned} \left[ p_\alpha l_\beta, \frac{x_b}{|\mathbf{r}|} \right]_{\text{PZ}} &= p_\alpha \left[ l_\beta, \frac{x_b}{|\mathbf{r}|} \right]_{\text{PZ}} + l_\beta \left[ p_\alpha, \frac{x_b}{|\mathbf{r}|} \right]_{\text{PZ}} \\ &= \frac{p_\alpha}{|\mathbf{r}|} [l_\beta, x_b]_{\text{PZ}} + \frac{l_\beta}{|\mathbf{r}|} [p_\alpha, x_b]_{\text{PZ}} + l_\beta x_b \left[ p_\alpha, \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right]_{\text{PZ}} \\ &= \frac{\epsilon_{\beta b\gamma}}{|\mathbf{r}|} p_\alpha x_\gamma - \frac{l_\beta}{|\mathbf{r}|} \delta_{ab} + \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} l_\beta x_b x_\alpha. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Односно,

$$\epsilon_{\alpha\beta} \left[ p_\alpha l_\beta, \frac{x_b}{|\mathbf{r}|} \right]_{\text{PZ}} = \frac{\delta_{ab}}{|\mathbf{r}|} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \frac{x_a p_b}{|\mathbf{r}|} - \frac{1}{|\mathbf{r}|} \epsilon_{abc} l_c + \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{l})_a x_b}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (5.99)$$

Аналогним поступком добијамо

$$\epsilon_{b\mu\nu} \left[ \frac{x_a}{|\mathbf{r}|}, p_\mu l_\nu \right]_{\text{PZ}} = \frac{x_b p_a}{|\mathbf{r}|} - \frac{\delta_{ab}}{|\mathbf{r}|} \mathbf{p} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{|\mathbf{r}|} \epsilon_{abc} l_c - \frac{(\mathbf{r} \times \mathbf{l})_b x_a}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (5.100)$$

Пошто је  $x_a p_b - x_b p_a = \epsilon_{abc} (\mathbf{r} \times \mathbf{p})_c = \epsilon_{abc} l_c$ , као и

$$(\mathbf{r} \times \mathbf{l})_a x_b - (\mathbf{r} \times \mathbf{l})_b x_a = \epsilon_{abc} \mathbf{r}^2 l_c, \quad (5.101)$$

налазимо,

$$-\frac{K}{\mu} \epsilon_{\alpha\beta} \left[ p_\alpha l_\beta, \frac{x_b}{|\mathbf{r}|} \right]_{\text{PZ}} - \frac{K}{\mu} \epsilon_{b\mu\nu} \left[ \frac{x_a}{|\mathbf{r}|}, p_\mu l_\nu \right]_{\text{PZ}} = \frac{2K}{\mu} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \epsilon_{abc} l_c. \quad (5.102)$$

Замењујући (5.97) и (5.102) у (5.92), добијамо

$$\left[ R_a, R_b \right]_{\text{PZ}} = -\frac{\mathbf{p}^2}{\mu^2} \epsilon_{abc} l_c + \frac{2K}{\mu} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \epsilon_{abc} l_c = -\frac{2}{\mu} \left( \frac{\mathbf{p}^2}{2\mu} - \frac{K}{|\mathbf{r}|} \right) \epsilon_{abc} l_c, \quad (5.103)$$

чиме смо доказали и четврту релацију. ■

Према томе, поред закона одржања енергије, у случају класичног Кеплеровог проблема постоје још два вектора који су константе кретања. Закон одржања момента импулса се јавља због ротационе симетрије потенцијалне енергије  $U(|\mathbf{r}|)$ , док је релација  $\mathbf{R} = \text{const.}$  последица динамичке симетрије – специјалног облика функције  $U(|\mathbf{r}|) = -K/|\mathbf{r}|$ . Пошто нас на овом месту класични проблем интересује пре свега као припрема за квантну верзију проблема, нећемо улазити у даљу анализу једначина кретања и њихових решења као функције почетних услова. Детаљи се могу наћи у стандардним уџбеницима [Милић, Б. (1997); Мушицки, Ђ. (1987); Arnol'd, V. I. (2013); Abraham, R., Marsden, J.E. (1980); Hall, B. C. (2013)].

## 5.4 Алгебарски приступ квантном проблему

У наставку ћемо анализирати квантну верзију Кеплеровог проблема. Односно, видећемо како се класична анализа из претходног одељка може прилагодити за налажење енергије везаних стања атома водониковог типа. Као што је добро познато, у формализму канонске квантизације [Шиф, Ј. (1968); Weinberg, S. (2012); Пантић, М. (2024)], Поасонове заграде бивају замењене комутаторима, а специјална динамичка симетрија Кеплеровог проблема омогућава налажење скупа алгебарских релација на основу којих се могу идентификовати нивои енергије система, као и пуна симетрија која је одговорна за дегенерацију спектра. Да бисмо добили затворени сет алгебарских релација, прво је неопходно да дефинишемо операторе који одговарају величинама из класичног Кеплеровог проблема, као и да знамо како се трансформишу у односу на померање у времену и ротације.

### 5.4.1 Канонска квантизација

Један од начина за прелазак са класичне на квантну теорију је процес канонске квантизације који се изводи у неколико корака. Најпре је неопходно класичну теорију формулисати у канонском прилазу. Након тога се као простор стања уводи Хилбертов простор  $\mathcal{H}$ . Уместо динамичког стања као тачке у фазном простору, у квантној механици се уводи појам *стања*  $\psi \in \mathcal{H}$  које одговара нормираном вектору из Хилбертовог простора  $(\psi, \psi) = 1$ . У следећем кораку се свакој физичкој величини  $A(\{q^a, p_a\})$  придружује ермитски оператор  $\hat{A}^\dagger = \hat{A}$  који делује на елементе  $\mathcal{H}$ , а Поасонове заграде величина  $A(\{q^a, p_a\})$  и  $B(\{q^a, p_a\})$  се замењују комутатором<sup>4</sup>

$$\left[ A(\{q^a, p_a\}), B(\{q^a, p_a\}) \right]_{\text{PZ}} \longrightarrow \frac{1}{i} (\hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}) := \frac{1}{i} [\hat{A}, \hat{B}]. \quad (5.104)$$

Додатни постулати регулишу питање динамике у квантној механици, као и везу између теоријских предвиђања и експерименталних мерења. Укратко, својствене вредности неког ермитског оператора  $\hat{A}$  су једини могућ резултат појединачног мерења физичке величине  $A(\{q^a, p_a\})$ , док је очекивана вредност величине  $A(\{q^a, p_a\})$ , у случају када се систем налази у стању описаном вектором  $\psi$ , дата са  $\langle A \rangle = (\psi, \hat{A}\psi)$ . Коначно, временска еволуција стања је одређена Шредингеровом једначином. Означавајући елементе апстрактног Хилбертовог простора Дираковим ознакама, Шредингерову једначину можемо записати као

$$i \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle, \quad (5.105)$$

где је  $\hat{H}$  Хамилтонов оператор (хамилтонијан) који одговара Хамилтоновој функцији  $H(\{q^a, p_a\})$  класичног система. У случају када Хамилтонов оператор не зависи од времена, временска еволуција вектора стања је одређена својственим вредностима хамилтонијана. Практично, уместо Шредингерове једначине довољно је анализирати својствени проблем

$$\hat{H} |\phi\rangle = E |\phi\rangle, \quad (5.106)$$

јер је  $|\psi(t)\rangle = e^{-iEt} |\phi\rangle$ . Квантно-механичка стања са оваквом временском еволуцијом се називају стационарна стања јер очекиване вредности физичких величина у овим стањима не зависе од времена.

Временска еволуција квантно-механичког система се не мора пратити кроз еволуцију вектора стања  $|\psi(t)\rangle$ . Будући да су у квантно-механичком опису стања система раздвојена од физичких величина, еквивалентан опис се постиже ако се посматра вектор стања у фиксном тренутку  $t_0$ , док оператори физичких величина постају функције времена<sup>5</sup>. Овај прилаз, у којем се прати временска еволуција оператора је познат под називом *Хајзенбергова слика* и представља директни аналогон Хамилтоновог формализма у класичној механици. Основна динамичка релација у овом прилазу је Хајзенбергова

<sup>4</sup>Користећи дефиницију комутатора лако се показује да алгебра комутатора има формално исти облик као алгебра Поасонових заграда; видети Додатак В. Такође, у наставку ћемо користити систем јединица у којем је  $\hbar = 1$ .

<sup>5</sup>Овде се мисли на динамичку зависност од времена одређену Хамилтоновим оператором а не на евентуалну експлицитну временску зависност која може бити присутна и на класичном нивоу.

једначина кретања (нећемо разматрати системе код којих оператори експлицитно зависе од времена)

$$i\frac{d}{dt}\hat{A}_H(t) = [\hat{A}_H(t), \hat{H}], \quad (5.107)$$

и она се може добити од (5.44) уз коришћење правила канонског квантовања (5.104). У претходној једначини  $\hat{A}_H(t)$  представља оператор физичке величине  $A(\{q^a, p_a\})$  у Хајзенберговој слици. Ако сматрамо да је  $\hat{A}_H(0)$  оператор физичке величине  $A(\{q^a, p_a\})$  у почетном тренутку  $t = 0$ , формални интеграл од (5.107)

$$\hat{A}_H(t) = e^{i\hat{H}t}\hat{A}_H(0)e^{-i\hat{H}t}. \quad (5.108)$$

даје везу између  $\hat{A}_H(0)$  и  $\hat{A}_H(t)$ . Дакле, и у квантној теорији хамилтонијан дефинише померање у времену, односно представља генератор временских транслација. Често се уводи тзв. еволуциони оператор  $\hat{U}^{-1} = \hat{U}^\dagger$ , тако да је  $U(t) = e^{-i\hat{H}t}$  и  $|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t)|\psi(0)\rangle$ , односно,  $\hat{A}_H(t) = \hat{U}(t)^\dagger\hat{A}_H(0)\hat{U}(t)$ . Ако се последње две релације напишу до чланова линеарних по  $t$ , добијају се Шредингерова једначина и Хајзенбергова једначина кретања. Физичкој величини  $A(\{q^a, p_a\})$  одговара интеграл кретања у квантној теорији ако је  $[\hat{A}, \hat{H}] = 0$ .

### 5.4.2 Генератори ротација и транслација у квантној механици

Као што смо дискутовали у Одељку 4.3, оператор импулса је генератор транслација у  $\mathbb{R}^3$ , док је момент импулса генератор ротација у тродимензионом простору. Ако је  $\boldsymbol{\theta} = \theta\mathbf{n}$  вектор који дефинише ротацију око осе  $\mathbf{n}$  за угао  $\theta$ , унитарни оператор који имплементира ротацију у Хилбертовом простору честице са спином  $S = 0$  је дат са

$$\hat{U}(\boldsymbol{\theta}) = \exp\left(-i\boldsymbol{\theta} \cdot \hat{\boldsymbol{l}}\right), \quad (5.109)$$

где је  $\hat{\boldsymbol{l}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}$  оператор орбиталног (угаоног) момента честице. Оператор произвољне физичке величине  $\hat{A}$  се у односу на ротације трансформисе као  $\hat{A} \rightarrow \hat{U}^\dagger(\boldsymbol{\theta})\hat{A}\hat{U}(\boldsymbol{\theta})$  [Weinberg, S. (2012)]. Дакле, инваријантност величине  $\hat{A}$  у односу на ротације се своди на услов  $[\hat{l}_a, \hat{A}] = 0$ . Уколико је  $\hat{A}$  оператор векторске величине, његове компоненте се у односу на ротације морају трансформисати на одговарајући начин. Закон трансформације за класичне векторске величине је дат у (5.72), тако да одговарајуће квантне релације постају:

$$[\hat{A}_a, \hat{l}_b] = i\epsilon_{abc}\hat{A}_c. \quad (5.110)$$

Као специјалан случај, генератори ротација, који су такође векторски оператори, задовољавају

$$[\hat{l}_a, \hat{l}_b] = i\epsilon_{abc}\hat{l}_c. \quad (5.111)$$

У наставку ћемо користити генераторе транслација, ротација и померања у времену у тзв. координатној репрезентацији како бисмо анализирали проблем атома водониковог типа.

### 5.4.3 Оператори физичких величина у Кеплеровом проблему

Основне физичке величине које ћемо разматрати у квантном случају су исте оне које описују Кеплеров проблем на класичном нивоу. То су положај (координата), импулс, момент импулса, Рунге-Ленцов вектор и хамилтонијан. Пратећи правила канонског квантовања у Декартовим координатама, положају (координати), импулсу и моменту импулса придружимо операторе

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &\rightarrow \hat{\mathbf{r}} := \mathbf{r}, \\ \mathbf{p} &\rightarrow \hat{\mathbf{p}} := -i\nabla, \\ \mathbf{l} &\rightarrow \hat{\mathbf{l}} := -i\mathbf{r} \times \nabla \equiv \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\mathbf{p}}, \end{aligned}$$

где је

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (5.112)$$

набла оператор у Декартовима координатама, а

$$\hat{\mathbf{l}} = -i \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ x & y & z \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \end{vmatrix} = \epsilon_{abc} \hat{x}_a \hat{p}_b \mathbf{e}_c. \quad (5.113)$$

Лако је видети да компоненте ових оператора задовољавају комутационе релације

$$\begin{aligned} [\hat{x}_a, \hat{x}_b] &= [\hat{p}_a, \hat{p}_b] = 0, & [\hat{x}_a, \hat{p}_b] &= i\delta_{ab}, & [\hat{l}_a, \hat{l}_b] &= i\epsilon_{abc} \hat{l}_c, \\ [\hat{l}_a, \hat{x}_b] &= i\epsilon_{abc} \hat{x}_c, & [\hat{l}_a, \hat{p}_b] &= i\epsilon_{abc} \hat{p}_c. \end{aligned} \quad (5.114)$$

Хамилтонов оператор се добија заменом  $\hat{\mathbf{p}}$  и  $\hat{\mathbf{r}}$  у (5.78)

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{p}}}{2\mu} - \frac{K}{|\hat{\mathbf{r}}|} = -\frac{\nabla^2}{2\mu} - \frac{K}{|\mathbf{r}|} \equiv \hat{T} + \hat{U}, \quad (5.115)$$

где је  $\hat{T}$  оператор кинетичке, а  $\hat{U}$  оператор потенцијалне енергије. Коначно, остало је да дефинишемо операторску верзију Рунге-Ленцовог вектора. Сада наилазимо на проблем јер директна примена правила канонског квантовања на класичну величину (5.79) даје

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{1}{\mu} \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{l}} - \frac{K}{|\hat{\mathbf{r}}|} \hat{\mathbf{r}} \quad (5.116)$$

а први сабирак није ермитски оператор. Заиста,

$$(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{l}})^\dagger = (\epsilon_{abc} \hat{p}_a \hat{l}_b \mathbf{e}_c)^\dagger = \epsilon_{abc} \mathbf{e}_c \hat{l}_b^\dagger \hat{p}_a^\dagger = \epsilon_{abc} \mathbf{e}_c \hat{l}_b \hat{p}_a. \quad (5.117)$$

Ако сад искористимо комутационе релације за операторе импулса и момента импулса из (5.114), видимо да производ  $\hat{l}_b \hat{p}_a$  можемо заменити са  $\hat{p}_a \hat{l}_b - i\epsilon_{abd} \hat{p}_d$ , тако да претходна релација постаје

$$(\hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{l}})^\dagger = \epsilon_{abc} (\hat{p}_a \hat{l}_b - i\epsilon_{abd} \hat{p}_d) \mathbf{e}_c = \hat{\mathbf{p}} \times \hat{\mathbf{l}} - 2i\hat{\mathbf{p}}, \quad (5.118)$$

где смо искористили  $\epsilon_{abc}\epsilon_{abd} = 2\delta_{cd}$ . За анализу проблема је битно да  $\hat{\mathbf{R}}$  буде ермитски оператор и због тога дефинишемо [Weinberg, S. (2012); Шиф, Л. (1968); Hall, B. C. (2013)]

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2\mu}(\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \mathbf{L} \times \mathbf{P}) - \frac{K}{|\mathbf{r}|}\mathbf{r}. \quad (5.119)$$

Приметимо да се овај проблем не јавља код оператора момента импулса који је такође дефинисан помоћу векторског производа. Разлог је тај што оператори  $\hat{x}_a$  и  $\hat{p}_b$  комутирају кад год је  $a \neq b$ , а само се такве комбинације појављују у векторском производу.

Ради прегледнијег писања, у наставку ћемо изоставити "капицу"изнад оператора и писаћемо  $\mathbf{L}$  уместо  $\hat{\mathbf{l}}$ , односно  $\mathbf{P}$  уместо  $\hat{\mathbf{p}}$ . Опасност од забуне не постоји, јер се целокупна анализа која следи односи искључиво на квантни модел.

Пре него што изложимо Паулијево решење за атом водониковог типа, забележићемо неколико операторских идентитета који ће нам требати у наставку.

**Тврђење 5.7.** Оператори  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{L}$  задовољавају следеће релације:

1.  $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} = \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}),$
2.  $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{1}{|\mathbf{r}|} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) - \frac{2i}{|\mathbf{r}|},$
3.  $\left[ P_a, \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right] = i \frac{x_a}{|\mathbf{r}|^3},$
4.  $\left[ P_a, \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \right] = 3i \frac{x_a}{|\mathbf{r}|^5},$
5.  $\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\mathbf{L},$
6.  $\left[ L_a, f(|\mathbf{r}|) \right] = 0.$

*Доказ.* Да бисмо доказали прву релацију, посматраћемо дејство оператора  $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r})|\mathbf{r}|^{-3}$  на произвољну функцију координата  $f(\mathbf{r})$ . Имајући у виду координатну репрезентацију оператора импулса  $\mathbf{P} = -i\nabla$ , налазимо

$$(\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} f(\mathbf{r}) = (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) \left( \frac{f(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^3} \right) = -i\nabla \cdot \left( \mathbf{r} \frac{f(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^3} \right) = -i \frac{f(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^3} \nabla \cdot \mathbf{r} - i\mathbf{r} \cdot \nabla \left( \frac{f(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|^3} \right).$$

Односно,

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} f(\mathbf{r}) &= -\frac{3i}{|\mathbf{r}|^3} f(\mathbf{r}) + \frac{3i}{|\mathbf{r}|^3} f(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} \cdot (-i\nabla f(\mathbf{r})) \\ &= \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) f(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (5.120)$$

одакле директно следи тражени операторски идентитет.

За доказивање друге релације примењујемо исту тактику – делујемо датим оператором на произвољну функцију  $f(\mathbf{r})$

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{|\mathbf{r}|} f(\mathbf{r}) &= -i\nabla \cdot \left( \mathbf{r} \frac{f(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} \right) = -3i \frac{f(\mathbf{r})}{|\mathbf{r}|} + \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \cdot (-i\nabla f(\mathbf{r})) + i f(\mathbf{r}) \frac{|\mathbf{r}|^2}{|\mathbf{r}|^3} \\ &= \left( \frac{-2i}{|\mathbf{r}|} + \frac{1}{|\mathbf{r}|} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) \right) f(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (5.121)$$

Пошто и на левој и на десној страни добијене релације фигурише произвољна функција  $f(\mathbf{r})$ , закључујемо да су оператори који делују на њу истоветни. Тако добијамо релацију 2.

За доказивање релација 3 и 4 је довољно да посматрамо комутатор оператора  $P_a$  и произвољне сферносиметричне функције  $f(|\mathbf{r}|)$ . Деловањем таквог комутатора на произвољну функцију  $\psi(\mathbf{r})$ , налазимо

$$\left[ P_a, f(|\mathbf{r}|) \right] \psi(\mathbf{r}) = -i \partial_a (f(|\mathbf{r}|) \psi(\mathbf{r})) + i f(\mathbf{r}) \partial_a \psi(\mathbf{r}) = -i \frac{\partial f(|\mathbf{r}|)}{\partial x_a} \psi(\mathbf{r}). \quad (5.122)$$

Бирајући  $f(|\mathbf{r}|) = |\mathbf{r}|^{-1}$ , односно  $f(|\mathbf{r}|) = |\mathbf{r}|^{-3}$ , добијамо тражене идентитете.

Коначно, идентитет 5 доказујемо тако што комутациону релацију коју задовољавају компоненте оператора момента импулса  $L_a$  и  $L_b$  помножимо са Леви-Чивита симболом  $\epsilon_{abd}$  и просумирамо по  $a$  и  $b$ . Тако добијамо

$$\epsilon_{abd} (L_a L_b - L_b L_a) = i \epsilon_{abc} L_c \epsilon_{abd}. \quad (5.123)$$

Пошто је  $\epsilon_{abc} \epsilon_{abd} = 2\delta_{cd}$ , добијамо

$$(\mathbf{L} \times \mathbf{L})_d + (\mathbf{L} \times \mathbf{L})_d = 2i L_d, \quad (5.124)$$

при чему смо искористили и  $\epsilon_{abd} = -\epsilon_{bad}$ . Релација (6) се доказује слично као (5.76). Доказ је остављен за самосталну вежбу. ■

#### 5.4.4 Особине Рунге-Ленцовог вектора у квантној теорији

У овом одељку ћемо показати да квантно-механичка верзија Рунге-Ленцовог вектора задовољава релације које су доста сличне онима које смо добили у класичној теорији у оквиру Тврђења 5.6. Како би излагање било боље организовано, најпре ћемо извести неколико помоћних релација које укључују комутаторе оператора момента импулса са другим векторским операторима. Неке од ових релација изгледају као одговарајуће класичне једнакости (рецимо,  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{L} = 0$ ), али се у неким појављују и корекције које су карактеристичне за квантну теорију. У релацијама наведеним у наставку, квантне корекције одговарају члановима који садрже  $2i\mathbf{P}$ .

**Тврђење 5.8.** За векторске операторе  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{L}$  важе следеће релације:

1.  $\left[ L_a, \mathbf{P}^2 \right] = 0,$
2.  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{P} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{L} = 0,$
3.  $\mathbf{r} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{L}) = L^2,$
4.  $(\mathbf{P} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} = L^2 + 2i\mathbf{P} \cdot \mathbf{r},$
5.  $(\mathbf{P} \times \mathbf{L})^2 = \mathbf{P}^2 \mathbf{L}^2,$
6.  $\mathbf{P} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{L}) = 0,$
7.  $(\mathbf{P} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{P} = 2i\mathbf{P}^2,$

$$8. \mathbf{L} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{L}) = 0.$$

*Доказ.* Ако се сетимо да је  $\mathbf{L}$  генератор ротација, прва од наведених релација делује очигледно тачна. Експлицитно,

$$\left[ L_a, \mathbf{P}^2 \right] = P_b \left[ L_a, P_b \right] + \left[ L_a, P_b \right] P_b = i\epsilon_{abc} P_b P_c + i\epsilon_{abc} P_c P_b = 0, \quad (5.125)$$

јер је  $P_a P_b = P_b P_a$ .

Доказ ортогоналности векторских оператора  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{L}$  је такође директан. Пошто је  $L_a = \epsilon_{abc} x_b P_c$ , налазимо

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{P} = \epsilon_{abc} x_b P_c P_a = 0, \quad (5.126)$$

јер оператори  $P_a$  и  $P_c$  увек комутирају.

За доказ релације 3 ћемо још једном искористити компонентно представљање оператора  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{L}) = \epsilon_{abc} x_a P_b L_c = L_c L_c = \mathbf{L}^2. \quad (5.127)$$

Сличан поступак користимо и за доказ релације 4. Додатни корак који је потребно извршити у овом случају се тиче замене редоследа компоненти оператора  $\mathbf{L}$  и  $\mathbf{P}$ , што је могуће урадити коришћењем одговарајуће комутационе релације  $P_a L_b = L_b P_a + i\epsilon_{abd} P_d$ . Тако добијамо

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} \times \mathbf{L}) \cdot \mathbf{r} &= \epsilon_{abc} P_a L_b x_c = \epsilon_{abc} (L_b P_a + i\epsilon_{abd} P_d) x_c = L_b (\epsilon_{cab} x_c P_a) + i\epsilon_{abc} \epsilon_{abd} P_d x_c \\ &= \mathbf{L}^2 + 2i\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (5.128)$$

За доказ релације 5 поново користимо компонентну репрезентацију оператора  $\mathbf{L}$ . Тако добијамо

$$\begin{aligned} (\mathbf{P} \times \mathbf{L})^2 &= (\mathbf{P} \times \mathbf{L}) \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{L}) = \epsilon_{abc} \epsilon_{\alpha\beta c} P_a L_b P_\alpha L_\beta \\ &= (\delta_{a\alpha} \delta_{b\beta} - \delta_{a\beta} \delta_{b\alpha}) P_a L_b P_\alpha L_\beta = P_a L_b P_a L_b - P_a L_b P_b L_a. \end{aligned} \quad (5.129)$$

Пошто је  $L_b P_b = \mathbf{L} \cdot \mathbf{P} = 0$ , други сабирак у претходној релацији отпада. Преостали сабирак трансформирамо коришћењем  $L_b P_a = P_a L_b - i\epsilon_{abd} P_d$ . Ова замена даје

$$(\mathbf{P} \times \mathbf{L})^2 = P_a (P_a L_b - i\epsilon_{abd} P_d) L_b = \mathbf{P}^2 \mathbf{L}^2, \quad (5.130)$$

јер је  $\epsilon_{abd} P_a P_d = 0$ .

Доказ релације 6 је директан и кратак:  $\mathbf{P} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{L}) = \epsilon_{abc} P_a P_b L_c = 0$  а доказ релације 7 захтева малу корекцију – замену редоследа оператора  $L_b$  и  $P_c$  и остављен је за самосталну вежбу.

За доказ релације 8 ћемо поћи од мешовитог производа векторских оператора и након тога ћемо заменити место компоненти импулса и компоненти момента импулса према  $L_a P_b = P_b L_a + i\epsilon_{abd} P_d$ . Тако добијамо

$$\mathbf{L} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{L}) = \epsilon_{abc} L_a P_b L_c = \epsilon_{abc} (P_b L_a + i\epsilon_{abd} P_d) L_c = -i\mathbf{P} \cdot \mathbf{L} + 2i\mathbf{P} \cdot \mathbf{L} = 0, \quad (5.131)$$

при чему смо искористили релацију 5 из Тврђења 5.7, као и 2 из Тврђења 5.8.  $\blacksquare$

Сада смо спремни да формулишемо теорему која сумира најважније особине квантног Рунге-Ленцовог вектора.

**Теорема 5.1.** *Рунге-Ленцов вектор у квантно-механичком Кејлеровом проблему задовољава следеће релације*

1.  $[H, \mathbf{R}] = \mathbf{0}$ ,
2.  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{R} = 0$ ,
3.  $\mathbf{R}^2 = K^2 + \frac{2}{\mu} H (\mathbf{L}^2 + 1)$ ,
4.  $[R_a, L_b] = i \epsilon_{abc} R_c$ ,
5.  $[R_a, R_b] = -i \frac{2H}{\mu} \epsilon_{abc} L_c$ .

Прва од наведених релација нам говори да је Рунге-Ленцов вектор интеграл кретања у квантној теорији (то значи да су квантни бројеви повезани са својственим вредности-ма овог оператора, које евентуално можемо да нађемо, добар избор квантних бројева за карактеризацију квантно-механичког стања у атому водониковог типа) и она ће нам омогућити да се касније ограничимо на део Хилбертовог простора који генеришу вектори који су својствени и за  $H$  и за  $\mathbf{R}$ , тако да ћемо дејство Хамилтоновог оператора на те векторе једноставно заменити његовом својственом вредношћу (то ће бити тражени енергетски нивои за атом водониковог типа). Релације 2 и 3 ће нам помоћи да одредимо својствене вредности енергије тако што ће наметнути одређене услове на својствене вредности два сета генератора ротација који ће бити уведени на основу релација 4 и 5.

*Доказ.* Како бисмо показали да је  $\mathbf{R}$  интеграл кретања у квантној теорији, треба да покажемо да све компоненте вектора  $\mathbf{R}$  дефинисаног у (5.119) комутирају са Хамилтоновим оператором (5.115). Најпре ћемо израчунати комутаторе оператора кинетичке енергије  $T = \mathbf{P}^2/2\mu$  и три сабирка који сачињавају квантни Рунге-Ленцов вектор:

$$\left[ T, \frac{1}{2\mu} \mathbf{P} \times \mathbf{L} \right] = \frac{1}{4\mu^2} \epsilon_{abc} e_c \left[ \mathbf{P}^2, P_a L_b \right] = \mathbf{0}, \quad (5.132)$$

на основу релације 1 из Тврђења 5.8, као и чињенице да компоненте оператора импулса међусобно комутирају. Из потпуно истих разлога је и

$$\left[ T, -\frac{1}{2\mu} \mathbf{L} \times \mathbf{P} \right] = \mathbf{0}. \quad (5.133)$$

Преостао је још један комутатор који укључује оператор кинетичке енергије

$$\left[ T, -\frac{K}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r} \right] = -\frac{K}{2\mu} \mathbf{e}_\alpha \left[ P_a P_a, x_\alpha \right] \frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{K}{2\mu} \mathbf{r} P_a \left[ P_a, \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right] - \frac{K}{2\mu} \mathbf{r} \left[ P_a, \frac{1}{|\mathbf{r}|} \right] P_a. \quad (5.134)$$

Користећи сада релацију 3 из Тврђења 5.7, добијамо

$$\left[ T, -\frac{K}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r} \right] = \frac{iK}{\mu} \mathbf{P} \frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{iK}{2\mu} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{iK}{2\mu} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}). \quad (5.135)$$

Сада ћемо трансформисати први и други сабирак тако да добијемо изразе у којима је оператор импулса на десној страни. У ту сврху ћемо користити релације 1 и 3 из Тврђења 5.7. Тако добијамо

$$\left[ T, -\frac{K}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r} \right] = \frac{iK}{\mu} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \mathbf{P} - \frac{K}{\mu} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{iK}{\mu} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) \equiv \left[ T, \mathbf{R} \right]. \quad (5.136)$$

Што се тиче оператора потенцијалне енергије, одмах видимо да је

$$\left[ U, -\frac{K}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r} \right] = \mathbf{0}. \quad (5.137)$$

Следећи је

$$\left[ U, \frac{1}{2\mu} \mathbf{P} \times \mathbf{L} \right] = -\frac{K}{2\mu} \epsilon_{abc} e_c \left[ \frac{1}{|\mathbf{r}|}, P_a \right] L_b = \frac{iK}{2\mu} \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} e_c \epsilon_{abc} x_a L_b, \quad (5.138)$$

где смо искористили релацију 6 из Тврђења 5.7. Користећи сада компонентну репрезентацију оператора момента импулса, у претходном комутатору ће се појавити производ два Леви-Чивита симбола у којима се сумирање врши по једном заједничком индексу. Користећи већ неколико пута употребљену релацију која ову суму своди на разлику производа Кронекерових симбола, коначно добијамо

$$\left[ U, \frac{1}{2\mu} \mathbf{P} \times \mathbf{L} \right] = \frac{iK}{2\mu} \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} \mathbf{r} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}) - \frac{iK}{2\mu} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \mathbf{P}. \quad (5.139)$$

Преостали комутатор са оператором потенцијалне енергије се рачуна слично. Најпре имамо

$$\begin{aligned} \left[ U, -\frac{1}{2\mu} \mathbf{L} \times \mathbf{P} \right] &= \frac{K}{2\mu} \epsilon_{abc} e_c L_a \left( -i \frac{x_b}{|\mathbf{r}|^3} \right) \\ &= -\frac{iK}{2\mu} e_c x_b P_c \frac{x_b}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{iK}{2\mu} \mathbf{r} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{|\mathbf{r}|}. \end{aligned} \quad (5.140)$$

Након замене места оператора  $P_c$  и  $x_b$  у првом сабирку, претходна једнакост се своди на

$$\left[ U, -\frac{1}{2\mu} \mathbf{L} \times \mathbf{P} \right] = -\frac{iK}{2\mu} \mathbf{r}^2 \mathbf{P} \frac{1}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{K}{2\mu} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} + \frac{iK}{2\mu} \mathbf{r} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) \frac{1}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (5.141)$$

Даље, примена релације 1 из Тврђења 5.7 на трећи сабирак, као и комутатора 4 из истог Тврђења (да би се заменила места операторима  $\mathbf{P}$  и  $|\mathbf{r}|^{-3}$  у првом сабирку), добијамо

$$\left[ U, -\frac{1}{2\mu} \mathbf{L} \times \mathbf{P} \right] = \frac{K}{\mu} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} - \frac{iK}{2\mu} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \mathbf{P} + \frac{iK}{2\mu} \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{P}). \quad (5.142)$$

Из (5.136), (5.137), (5.139) и (5.142) следи  $[H, \mathbf{R}] = \mathbf{0}$ .

За наставак ће бити згодно да вектор  $\mathbf{R}$  запишемо као [Weinberg, S. (2012)]

$$\mathbf{R} = -\frac{K}{|\mathbf{r}|} \mathbf{r} + \frac{1}{\mu} \mathbf{P} \times \mathbf{L} - \frac{i}{\mu} \mathbf{P} \quad (5.143)$$

и уведемо ознаке

$$\mathbf{R}^{(1)} = -\frac{K}{|\mathbf{r}|}\mathbf{r}, \quad \mathbf{R}^{(2)} = \frac{1}{\mu}\mathbf{P} \times \mathbf{L}, \quad \mathbf{R}^{(3)} = -\frac{i}{\mu}\mathbf{P}. \quad (5.144)$$

Овај облик Рунге-Ленцовог вектора се може добити коришћењем релације  $-\mathbf{L} \times \mathbf{P} = \mathbf{P} \times \mathbf{L} - 2i\mathbf{P}$ .

Покажимо сада да важи  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{R} = 0$  тако што ћемо рачунати скаларни производ  $\mathbf{R}^{(1)}$ ,  $\mathbf{R}^{(2)}$  и  $\mathbf{R}^{(3)}$  са  $\mathbf{L}$ . Први од тих сабирака је

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{R}^{(1)} = -\frac{K}{|\mathbf{r}|}\mathbf{L} \cdot \mathbf{r} = -\frac{K}{|\mathbf{r}|}L_a x_a = -\frac{K}{|\mathbf{r}|}\epsilon_{abc}x_b P_c x_a = 0, \quad (5.145)$$

јер сви оператори који се појављују у претходној суми комутирају. Такође, искористили смо чињеницу да  $L_a$  и  $|\mathbf{r}|^{-1}$  комутирају. Даље,  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{R}^{(2)} = 0$  следи на основу 8 из Тврђења 5.8. Коначно,  $\mathbf{L} \cdot \mathbf{R}^{(3)} = 0$  се добија из 2 истог Тврђења.

Нађимо сада  $\mathbf{R}^2$ . Користећи репрезентацију (5.143), имамо

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^2 &= \left( -\frac{K}{|\mathbf{r}|}\mathbf{r} + \frac{1}{\mu}\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \frac{i}{\mu}\mathbf{P} \right) \cdot \left( -\frac{K}{|\mathbf{r}|}\mathbf{r} + \frac{1}{\mu}\mathbf{P} \times \mathbf{L} - \frac{i}{\mu}\mathbf{P} \right) \\ &= K^2 - \frac{K}{\mu} \frac{\mathbf{L}^2}{|\mathbf{r}|} + \frac{iK}{\mu|\mathbf{r}|}\mathbf{r} \cdot \mathbf{P} - \frac{K}{\mu} \left( \mathbf{L}^2 + 2i\mathbf{P} \cdot \mathbf{r} \right) \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{1}{\mu^2} \mathbf{P}^2 \mathbf{L}^2 - \frac{i}{\mu^2} 2i\mathbf{P}^2 \\ &\quad + \frac{iK}{\mu} \mathbf{P} \cdot \mathbf{r} \frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{1}{\mu^2} \mathbf{P}^2, \end{aligned} \quad (5.146)$$

где смо искористили релације 3, 4, 5, 6 и 7 из Тврђења 5.8. Ако сада искористимо 2 из Тврђења 5.7, видимо да се  $\mathbf{R}^2$  може записати као

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^2 &= K^2 - \frac{2K}{\mu} \frac{1}{|\mathbf{r}|} \mathbf{L}^2 + \frac{1}{\mu^2} \mathbf{P}^2 \mathbf{L}^2 - \frac{2K}{\mu} \frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{2i^2}{\mu^2} \mathbf{P}^2 - \frac{1}{\mu^2} \mathbf{P}^2 \\ &= K^2 + \frac{2}{\mu} \left( \frac{\mathbf{P}^2}{2\mu} - \frac{K}{|\mathbf{r}|} \right) \mathbf{L}^2 + \frac{2}{\mu} \left( \frac{\mathbf{P}^2}{2\mu} - \frac{K}{|\mathbf{r}|} \right) \\ &= K^2 + \frac{2H}{\mu} (\mathbf{L}^2 + 1) \end{aligned} \quad (5.147)$$

што је тражена релација.

Покажимо сада да је  $\mathbf{R}$  заиста векторски оператор. У ту сврху треба да израчунамо комутаторе компоненти вектора  $\mathbf{R}$  и оператора момента импулса. Рачунамо редом

$$\left[ L_a, R_b^{(1)} \right] = \left[ L_a, -\frac{Kx_b}{|\mathbf{r}|} \right] = -\frac{K}{|\mathbf{r}|} i\epsilon_{abc}x_c = i\epsilon_{abc}R_c^{(1)}, \quad (5.148)$$

$$\begin{aligned} \left[ L_a, R_b^{(2)} \right] &= \frac{1}{\mu} \left[ L_a, (\mathbf{P} \times \mathbf{L})_b \right] = \frac{1}{\mu} \epsilon_{\mu\nu b} \left[ L_a, P_\mu \right] L_\nu + \frac{1}{\mu} \epsilon_{\mu\nu b} P_\mu \left[ L_a, L_\nu \right] \\ &= i\frac{1}{\mu} \epsilon_{\mu\nu b} \epsilon_{a\mu\gamma} P_\gamma L_\nu + i\frac{1}{\mu} \epsilon_{\mu\nu b} \epsilon_{a\nu\gamma} P_\mu L_\gamma \\ &= \frac{i}{\mu} \left( P_a L_b - P_b L_a \right) = \frac{i}{\mu} \epsilon_{abc} (\mathbf{P} \times \mathbf{L})_c = i\epsilon_{abc} R_c^{(2)}, \end{aligned} \quad (5.149)$$

$$\left[ L_a, R_b^{(3)} \right] = \left[ L_a, -\frac{i}{\mu} P_b \right] = i\epsilon_{abc} \left( -\frac{i}{\mu} P_c \right) = i\epsilon_{abc} R_c^{(3)}. \quad (5.150)$$

Последње три релације дају жељени резултат.

Преостало је још да нађемо комутаторе које задовољавају компоненте оператора  $\mathbf{R}$ . Будући да смо оператор  $\mathbf{R}$  разложили на три дела, у општем случају треба да израчунамо 9 комутатора. Међутим, лако је видети да

$$\left[ R_a^{(1)}, R_b^{(1)} \right] = \left[ R_a^{(3)}, R_b^{(3)} \right] = 0, \quad (5.151)$$

тако да је преостало 7 различитих комутатора. Ипак, и тај број се може редуковати пажљивом пермутацијом индекса компоненти вектора и заменом њиховог редоследа у комутатору.

За почетак, рачунамо

$$\left[ R_a^{(1)}, R_b^{(2)} \right] = \left[ -\frac{K}{|\mathbf{r}|} x_a, \frac{1}{\mu} \epsilon_{\alpha\beta b} P_\alpha L_\beta \right] = -\frac{K}{\mu} \epsilon_{\alpha\beta b} \left[ \frac{x_a}{|\mathbf{r}|}, P_\alpha, L_\beta \right]. \quad (5.152)$$

Пошто је  $[L_a, |\mathbf{r}|^{-1}] = 0$ , остају да се израчунају три стандардна комутатора. У једном од њих ће се јавити производ два Леви-Чивита симбола са сумом по првом индексу и тај израз се своди на производ разлика Кронекерових симбола. Након сређивања се добија

$$\left[ R_a^{(1)}, R_b^{(2)} \right] = \frac{iK}{\mu} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) \frac{\delta_{ab}}{|\mathbf{r}|} - \frac{iK}{\mu} P_a x_b \frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{iK}{\mu} \frac{\epsilon_{acb} L_c}{|\mathbf{r}|} + \frac{iK}{\mu} \frac{x_a}{|\mathbf{r}|^3} \epsilon_{\alpha\beta b} x_\alpha L_\beta. \quad (5.153)$$

Даље имамо

$$\left[ R_a^{(1)}, R_b^{(3)} \right] = \frac{iK}{\mu} \left[ \frac{x_a}{|\mathbf{r}|}, P_b \right] = -\frac{K}{\mu} \frac{\delta_{ab}}{|\mathbf{r}|} + \frac{K}{\mu} \frac{x_a x_b}{|\mathbf{r}|^3}. \quad (5.154)$$

Пошто је овај комутатор симетричан у односу на замену  $a \leftrightarrow b$ , одмах можемо писати

$$\left[ R_a^{(3)}, R_b^{(1)} \right] = -\left[ R_a^{(1)}, R_b^{(3)} \right]. \quad (5.155)$$

Следећи комутатор се такође рачуна лако, пажљивом заменом индекса  $a$  и  $b$  из(5.153)

$$\left[ R_a^{(2)}, R_b^{(1)} \right] = -\frac{iK}{\mu} (\mathbf{P} \cdot \mathbf{r}) \frac{\delta_{ab}}{|\mathbf{r}|} + \frac{iK}{\mu} P_b x_a \frac{1}{|\mathbf{r}|} + \frac{iK}{\mu} \frac{\epsilon_{bca} L_c}{|\mathbf{r}|} - \frac{iK}{\mu} \frac{x_b}{|\mathbf{r}|^3} \epsilon_{\alpha\beta a} x_\alpha L_\beta. \quad (5.156)$$

За рачунање комутатора компоненти вектора  $\mathbf{R}^{(2)}$  погодно је дефинисати помоћни вектор  $\mathbf{A} = \mathbf{P} \times \mathbf{L}$ . Тако добијамо

$$\left[ R_a^{(2)}, R_b^{(2)} \right] = \left[ \frac{1}{\mu} \epsilon_{\alpha\beta a} P_\alpha L_\beta, \frac{1}{\mu} A_b \right]. \quad (5.157)$$

Пошто је (проверити за вежбу)

$$\left[ L_\beta, A_b \right] = i\epsilon_{\beta b \gamma} A_\gamma, \quad \left[ P_\alpha, A_b \right] = iP_\alpha P_b - i\mathbf{P}^2 \delta_{\alpha b}, \quad (5.158)$$

добијамо

$$\left[ R_a^{(2)}, R_b^{(2)} \right] = -\frac{i}{\mu^2} \mathbf{P}^2 \epsilon_{abc} L_c, \quad (5.159)$$

при чему смо искористили  $\mathbf{P} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{L}) = 0$ . Још један комутатор лак за рачунање је

$$\left[ R_a^{(2)}, R_b^{(3)} \right] = \left[ \frac{1}{\mu} \epsilon_{\alpha\beta a} P_\alpha L_\beta, -\frac{i}{\mu} P_b \right] = -\frac{i}{\mu^2} \delta_{ab} \mathbf{P}^2 + \frac{i}{\mu^2} P_a P_b, \quad (5.160)$$

на основу којег лако налазимо и

$$\left[ R_a^{(3)}, R_b^{(2)} \right] = -\left[ R_a^{(2)}, R_b^{(3)} \right]. \quad (5.161)$$

Очигледно је да у коначном резултату фигуришу само доприноси из (5.153), (5.156) и (5.159). Дакле,

$$\begin{aligned} \left[ R_a, R_b \right] &= -\frac{iK}{\mu} \left( P_a x_b - P_b x_a \right) \frac{1}{|\mathbf{r}|} - \frac{2iK}{\mu} \frac{\epsilon_{acb} L_c}{|\mathbf{r}|} - i\epsilon_{abc} \frac{\mathbf{P}^2}{\mu^2} L_c \\ &\quad + \frac{iK}{\mu} \frac{x_a}{|\mathbf{r}|^3} \epsilon_{\alpha\beta b} x_\alpha L_\beta - \frac{iK}{\mu} \frac{x_b}{|\mathbf{r}|^3} \epsilon_{\alpha\beta a} x_\alpha L_\beta. \end{aligned} \quad (5.162)$$

Први сабирак се може трансформисати тако што се у оба члана у загради замене места операторима импулса и координате користећи комутационе релације. Тако се добија

$$-\frac{iK}{\mu} \left( P_a x_b - P_b x_a \right) \frac{1}{|\mathbf{r}|} = \frac{iK}{\mu} \frac{\epsilon_{abc} L_c}{|\mathbf{r}|}. \quad (5.163)$$

Користећи компонентну репрезентацију оператора  $\mathbf{L}$ , директно се показује да је

$$x_a \epsilon_{\alpha\beta b} x_\alpha L_\beta - x_b \epsilon_{\alpha\beta a} x_\alpha L_\beta = -\mathbf{r}^2 \epsilon_{abc} L_c. \quad (5.164)$$

Замењујући (5.163) и (5.164) у (5.162), добијамо тражени резултат

$$\left[ R_a, R_b \right] = -i \frac{2H}{\mu} \epsilon_{abc} L_c. \quad (5.165)$$

Треба обратити пажњу да редослед оператора  $H$  и  $L_c$  на десној страни горње једнакости није битан. Овим је теорема доказана. ■

### 5.4.5 Спектар атома водониковог типа

Као што смо напоменули раније, у наставку ћемо се ограничити на део Хилбертовог простора који генеришу својствени вектори заједнички за  $H$  и  $\mathbf{R}$ . Такође, ограничићемо се на векторе за које су својствене вредности хамилтонијана негативне, што одговара везаним стањима. Уз овакав избор можемо дефинисати нове ермитске операторе

$$\tilde{\mathbf{R}} := \sqrt{\frac{-\mu}{2H}} \mathbf{R}. \quad (5.166)$$

Лако је видети да за овај нови оператор важе следеће релације

$$\tilde{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{L} = 0, \quad \left[ H, \tilde{\mathbf{R}} \right] = 0, \quad (5.167)$$

као и

$$\left[ \tilde{R}_a, \tilde{R}_b \right] = i\epsilon_{abc} L_c, \quad \left[ L_a, \tilde{R}_b \right] = i\epsilon_{abc} \tilde{R}_c. \quad (5.168)$$

Очекивано,  $\tilde{\mathbf{R}}$  је такође константа кретања која задовољава услов  $\tilde{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{L} = 0$ , слично као и  $\mathbf{R}$ . Нови пар комутатора наведен у (5.168) је значајно једноставнији и омогућава нам да уведемо два нова оператора

$$\mathbf{A}^\pm := \frac{1}{2} (\mathbf{L} \pm \tilde{\mathbf{R}}) = \frac{1}{2} \left( \mathbf{L} \pm \sqrt{\frac{-\mu}{2H}} \mathbf{R} \right), \quad (5.169)$$

за које важе комутационе релације

$$\left[ A_a^+, A_b^+ \right] = i\epsilon_{abc} A_c^+, \quad \left[ A_a^-, A_b^- \right] = i\epsilon_{abc} A_c^-, \quad \left[ A_a^+, A_b^- \right] = 0. \quad (5.170)$$

Дакле, оператори  $\mathbf{A}^\pm$  дефинишу две независне копије алгебре  $\mathfrak{o}(3)$ . Односно, ових 6 оператора дефинише сет генератора алгебре  $\mathfrak{o}(3) \oplus \mathfrak{o}(3) \cong \mathfrak{o}(4)$ . Одговарајућа група симетрије атома водониковог типа је  $G = O(4) \cong O(3) \times O(3)$ , где је први  $O(3)$  фактор последица ротационе инваријантности хамилтонијана, а други је последица специјалне динамичке симетрије Кеплеровог проблема [Weinberg, S. (2012); Шиф, Л. (1968); Hall, В. С. (2013)].

Будући да су  $\mathbf{A}^\pm$  генератори ротација, знамо да су својствене вредности од  $|\mathbf{A}^\pm|^2$  дате са  $a^\pm(a^\pm + 1)$ , где су  $a^\pm = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$  два скупа квантних бројева. Међутим, на основу (5.169) је

$$|\mathbf{A}^\pm|^2 = \mathbf{A}^\pm \cdot \mathbf{A}^\pm = \frac{1}{4} (\mathbf{L}^2 + \tilde{\mathbf{R}}^2) \quad (5.171)$$

јер је  $\mathbf{L} \cdot \tilde{\mathbf{R}} = 0$ . Према томе, свака својствена вредности од  $|\mathbf{A}^+|^2$  је иста као својствена вредност од  $|\mathbf{A}^-|^2$ :  $a^+ = a^- \equiv a$ .

Сада можемо наћи својствене вредности енергије. Прво ћемо приметити да (5.171) даје једну везу између својствених вредности оператора  $H$  и  $|\mathbf{A}^\pm|^2$ . Ако својствену вредност хамилтонијана означимо са  $E$ , ова релација гласи

$$a(a+1) = \frac{1}{4} \left[ \mathbf{L}^2 + \left( \frac{-\mu}{2E} \right) \mathbf{R}^2 \right], \quad (5.172)$$

док, са друге стране, релација 3 из Теореме 5.1 даје

$$\mathbf{R}^2 = K^2 + \left( \frac{2E}{\mu} \right) (\mathbf{L}^2 + 1). \quad (5.173)$$

Заменом (5.173) релације у (5.172) добијамо

$$a(a+1) = -\frac{\mu}{8E} K^2 - \frac{1}{4}. \quad (5.174)$$

Односно,

$$E = -\frac{\mu K^2}{2} \frac{1}{(2a+1)^2}, \quad a = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \quad (5.175)$$

Дефинисањем новог квантног броја  $n = 2a + 1$ , чије су дозвољене вредности  $1, 2, 3, \dots$ , видимо да се дозвољене вредности енергије у квантном атому водониковог типа поклапају са резултатом који је добио Бор

$$E = -\frac{\mu K^2}{2n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (5.176)$$

Наравно, исти резултат се добија и решавањем Шредингерове једначине [Weinberg, S. (2012); Пантић, М. (2024); Шиф, Л. (1968); Hall, В. С. (2013)].

Из Шредингеровог решења је познато да је дегенерација спектра у овом случају  $n^2$  (као и у стандардном Шредингеровом прилазу, овде не узимамо у обзир спин електрона). Како бисмо нашли укупан број стања која имају исту енергију, уведемо својствене векторе од  $|\mathbf{A}^\pm|^2$ ,  $A_z^\pm$

$$A_z^\pm |a^\pm; m^\pm\rangle = m^\pm |a^\pm; m^\pm\rangle, \quad m^\pm = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.177)$$

У општем случају, број стања који одговара двама независним реализацијама алгебре  $\mathfrak{o}(3)$  је  $(2a^+ + 1)(2a^- + 1)$ , где су  $a^+$  и  $a^-$  вредности квантног броја који дефинише својствену вредност од  $|\mathbf{A}^\pm|^2$ . У нашем случају су вектори (5.177) својствени вектори и од хамилтонијана само ако је  $a^+ = a^- \equiv a$ . Дакле, укупан број различитих стања са истом енергијом је  $(2a + 1)(2a + 1) = n^2$ .

Треба обратити пажњу да је ограничавање на  $E < 0$  био важан корак у анализи, јер за позитивне вредности енергије ни оператор  $\tilde{\mathbf{R}}$ , а самим тим ни  $\mathbf{A}^\pm$ , више нису ермитски. Међутим, постоје начини да се и позитивни део спектра обухвати алгебарским приступом [видети Guerrero, J., Perez, J. М. (2003) и тамо наведене референце].

# 6

## Примена дискретне Фуријеове трансформације у чврстом стању

### 6.1 Дискретизација применом цикличних граничних услова

Заједничке својствене функције оператора импулса и енергије честице која се слободно креће у тродимензионом простору су равни таласи

$$\psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = C e^{i\frac{\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}}{\hbar}}, \quad (6.1)$$

при чему је  $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$  својствена вредност импулса честице, док је  $\mathbf{k}$  одговарајући таласни вектор, а  $C$  константа. С обзиром на везу између импулса и таласног вектора, у наставку поглавља ћемо користити

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = C e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (6.2)$$

Наведене функције нису по модулу квадратно интеграбилне, односно можемо рећи да интеграл

$$(\psi_{\mathbf{k}}, \psi_{\mathbf{k}}) = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} \quad (6.3)$$

дивергира, а спектар споменутих оператора је континуалан (непрекидан). Овакве таласне функције се могу нормирати на Диракову делта функцију, али се рад са континуалним спектром може заобићи дискретизацијом проблема [Ashcroft, N.W., Mermin, N.D. (1976); Landau, L., Lifshitz, E. (1977); Пантић, М. (2024); Павков-Хрвојевић, М., Шкрињар, М., Капор, Д., Крстоношић, П. (2007)].

Наиме, кретање честице ћемо најпре ограничити на кутију коначне запремине  $V = L_x L_y L_z$ , при чему су  $L_i$ ,  $i \in \{x, y, z\}$ , димензије кутије дуж три међусобно нормална правца. Тада таласна функција (6.2) постаје

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (6.4)$$

на основу услова нормирања

$$(\psi_{\mathbf{k}}, \psi_{\mathbf{k}}) = \int_V |\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} = |C|^2 V = 1. \quad (6.5)$$

За кутију довољно великих димензија, односно чије димензије су изузетно велике (теже бесконачности) у односу на димензије система који испитујемо, практично није битно шта се дешава на страницама кутије и могуће је наметнути такве граничне услове који знатно олакшавају решавање проблема. Такви су управо циклични гранични услови Борна и Фон Кармана<sup>1</sup>

$$\psi_{\mathbf{k}}(x, y, z) = \psi_{\mathbf{k}}(x + L_x, y, z), \quad \psi_{\mathbf{k}}(x, y, z) = \psi_{\mathbf{k}}(x, y + L_y, z), \quad \psi_{\mathbf{k}}(x, y, z) = \psi_{\mathbf{k}}(x, y, z + L_z). \quad (6.6)$$

Заменом израза (6.2) у (6.6) долазимо до услова

$$C e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = C e^{i(k_x(x + L_x) + k_y y + k_z z)} = C e^{i(k_x x + k_y(y + L_y) + k_z z)} = C e^{i(k_x x + k_y y + k_z(z + L_z))}, \quad (6.7)$$

односно

$$e^{i k_i L_i} = 1 \Rightarrow k_i = \frac{2\pi \nu_i}{L_i}, \quad i \in \{x, y, z\}, \quad (6.8)$$

где су  $\nu_i$  цели бројеви,  $\nu_i \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ . Видимо да су, као последица граничних услова (6.6), компоненте таласног вектора  $k_i$  (а тиме и импулса  $p_i$ ) дискретизоване, односно могу имати само вредности једнаке целобројним умношцима  $\frac{2\pi}{L_i}$ . Овом приликом применили смо следећу дефиницију:

**Дефиниција 6.1.** Експоненцијална функција  $f(z) = e^z$  комплексне варијабле  $z$  је периодична функција са периодом  $2\pi i$  (видети Сliku 6.1) [Стојаковић, М. (2010)].

Нас у наставку интересује примена дискретне Фуријеове трансформације на проблеме у физици чврстог стања, те ћемо се фокусирати на кристалне структуре.

### 6.1.1 Бравеове кристалне решетке

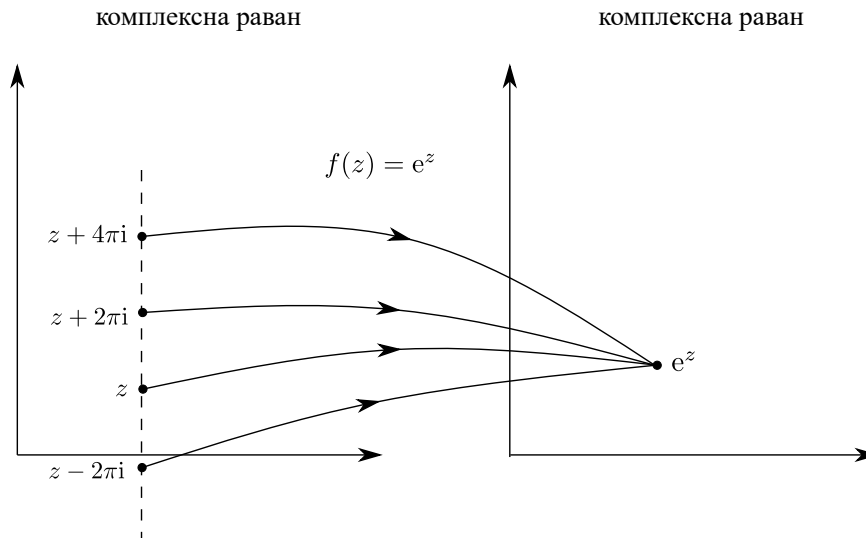
Периодични распоред кристалних јединица (јона, атома, молекула...), а са њима и одговарајућих чворова решетке<sup>2</sup>, осликан је у концепту Бравеових решетки.

**Дефиниција 6.2.** Бравеова решетка<sup>3</sup> представља математички модел бесконачног дискретног скупа тачака у тродимензионом простору таквог да је окружење сваке тачке потпуно исто, независно од одабира саме тачке у простору

<sup>1</sup>Физичари Макс Борн (Max Born) (1882-1970) и Теодор фон Карман (Theodore von Kármán) (1881-1963) увели су периодичне (цикличне) граничне услове у теоријску физику чврстог стања у склопу рада из 1912. године где су проучавали вибрације кристалне решетке [Born, M., von Kármán, T. (1912)].

<sup>2</sup>Чвор кристалне решетке је замишљена тачка у геометријској структури кристала која представља положај структурног мотива (јона, атома, молекула...).

<sup>3</sup>Бравеове решетке добиле су име по француском физичару и кристалографу Огисту Бравеу (Auguste Bravais) (1811-1863), који је 1848. године показао да се све могуће тродимензионе периодичне расподеле тачака у простору могу свести на четрнаест различитих типова решетки.



Слика 6.1: Илустративни приказ периодичности експоненцијалне функције комплексне варијабле.

[Ashcroft, N.W., Mermin, N.D. (1976)]. Бравеова решетка представља скуп тачака чије се позиције могу записати као

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{a}_1 + n_2 \mathbf{a}_2 + n_3 \mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}_i = a_i \mathbf{e}_i, \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (6.9)$$

где су  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_3$  примитивни вектори, а  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$  међусобно независни цели бројеви<sup>4</sup>.

У општем случају примитивни вектори нису међусобно ортогонални, што зависи од типа Бравеове решетке. Примитивни вектори формирају примитивну ћелију<sup>5</sup>, чија је запремина

$$v = |\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)|. \quad (6.10)$$

На основу Дефиниције 6.2 је јасно да, због периодичности у простору, код Бравеових решетки постоји трансляторна инваријантност. Међутим, у природи кристали нису бесконачно велике структуре, али се ови коначни простори могу изделити на мање паралелопипеде страница  $a = a_1$ ,  $b = a_2$  и  $c = a_3$ .

Уочимо да параметри  $n_i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ , могу имати само целобројне вредности, и то само одређене целобројне вредности. Наиме, присетимо се да смо у обзир узели цикличне граничне услове, тако да се translацијом дуж правца  $i$  за вектор  $N_i a_i \mathbf{e}_i$ , при чему је  $N_i$  укупан број чворова у  $i$ -том правцу, враћамо у исту тачку. Уколико

<sup>4</sup>Под појмом међусобно независни цели бројеви подразумевамо да сваки од целих бројева  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$  може да се изабере произвољно из скупа целих бројева, без икаквог услова који му намећу преостала два дела броја.

<sup>5</sup>Примитивна ћелија је најмања запремина кристалне решетке која се translацијама примитивних вектора може понављати и на тај начин поунити цео простор без празнина и преклапања. Другим речима, то је елементарна запремина решетке која садржи тачно један чвор Бравеове решетке.

координатни почетак поставимо у средину (коначног) кристала, то подразумева да се цели бројеви  $n_i$  мењају у опсегу

$$-\frac{N_i}{2} + 1 \leq n_i \leq \frac{N_i}{2}. \quad (6.11)$$

На Слици 6.2 можемо видети пример оваквог резоновања у случају  $N_i = 8$ .

$$\begin{array}{cccccccc} n_i = -3 & n_i = -1 & n_i = 1 & n_i = 3 & & & & \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ & n_i = -2 & n_i = 0 & n_i = 2 & n_i = 4 & & & \end{array}$$

Слика 6.2: Приказ (6.11) на примеру  $N_i = 8$ .

### 6.1.2 Реципрочне решетке

**Дефиниција 6.3.** За сваку Бравеову решетку дефинисану примитивним векторима  $\mathbf{a}_1$ ,  $\mathbf{a}_2$  и  $\mathbf{a}_3$  постоји реципрочна Бравеова решетка дефинисана скупом свих вектора  $\mathbf{K}$  за које важи [Ashcroft, N.W., Mermin, N.D. (1976)]

$$e^{i\mathbf{K} \cdot (\mathbf{r} + \mathbf{n})} = e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{r}}, \quad (6.12)$$

односно:

$$e^{i\mathbf{K} \cdot \mathbf{n}} = 1. \quad (6.13)$$

С обзиром на то да је скуп вектора реципрочне решетке дефинисан на основу вектора  $\mathbf{n}$  Бравеове решетке, таква Бравеова решетка се често зове и директна решетка. Међутим, треба уочити да је и реципрочна решетка такође Бравеова решетка, а одређена је примитивним векторима [Kittel, C. (1987)]

$$\mathbf{b}_1 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{|\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)|}, \quad \mathbf{b}_2 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_3 \times \mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)|}, \quad \mathbf{b}_3 = 2\pi \frac{\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2}{|\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3)|}, \quad (6.14)$$

при чему је очигледно да важи

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = 2\pi \delta_{i,j}, \quad (6.15)$$

где је  $\delta_{i,j}$  Кронекеров делта симбол

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}. \quad (6.16)$$

Вектор  $\mathbf{K}$  реципрочне решетке можемо представити као

$$\mathbf{K} = K_1 \mathbf{b}_1 + K_2 \mathbf{b}_2 + K_3 \mathbf{b}_3. \quad (6.17)$$

**Тврђење 6.1.** Реципрочна решетка је дискретан скуп тачака у реципрочном  $\mathbf{k}$ -простору.

*Доказ.* Кренимо од дефиниције реципрочне решетке. Приметили смо да вектор  $\mathbf{K}$  мора бити такав да задовољава

$$e^{i\mathbf{K}\cdot\mathbf{n}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} \cdot \mathbf{n} = 2\pi(K_1n_1 + K_2n_2 + K_3n_3), \quad (6.18)$$

при чему смо искористили изразе (6.9), (6.17) и (6.15). Да би овај услов био испуњен, неопходно је да  $K_1n_1 + K_2n_2 + K_3n_3$  има целобројну вредност. Како су  $n_1$ ,  $n_2$  и  $n_3$  међусобно независни цели бројеви, очигледно је да ће услов увек бити испуњен уколико су и  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  цели бројеви, те је и вектор  $\mathbf{K}$  дискретизован, а вектори  $\mathbf{b}_i$  су примитивни вектори реципрочне решетке. ■

## 6.2 Блохова теорема

**Тврђење 6.2.** У периодичном потенцијалу,  $V(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r} + \mathbf{n})$ , својствене функције хамилтонијана имају облик равних таласа помножених функцијом која има периодичност Бравеове решетке [Ashcroft, N.W., Mermin, N.D. (1976)]

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad (6.19)$$

при чему је

$$u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{n}) = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) \quad (6.20)$$

за све векторе  $\mathbf{n}$  Бравеове решетке. Другим речима, можемо писати

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{n}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}). \quad (6.21)$$

*Доказ.* Дефинишимо најпре оператор translације<sup>6</sup>

$$\hat{T}_{\mathbf{n}} = e^{\mathbf{n}\cdot\nabla}, \quad (6.23)$$

који на функцију  $f(\mathbf{r})$  делује тако да транслира њен аргумент за  $\mathbf{n}$

$$\hat{T}_{\mathbf{n}}f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + \mathbf{n} \cdot \nabla f(\mathbf{r}) + \frac{1}{2}(\mathbf{n} \cdot \nabla)^2 f(\mathbf{r}) + \dots = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{n} \cdot \nabla)^l}{l!} f(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r} + \mathbf{n}), \quad (6.24)$$

при чему смо искористили Тејлоров развој експоненцијалне функције у бесконачан ред. У координатној репрезентацији је

$$\hat{\mathbf{p}} = -i\hbar\nabla, \quad (6.25)$$

те оператор translације можемо представити у облику

$$\hat{T}_{\mathbf{n}} = e^{i\frac{\mathbf{n}\cdot\hat{\mathbf{p}}}{\hbar}} = e^{i\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}}, \quad (6.26)$$

<sup>6</sup>Оператори translације  $\hat{T}_{\mathbf{n}}$ , за све векторе  $\mathbf{n}$  Бравеове решетке, формирају групу translација кристала. Они задовољавају релацију

$$\hat{T}_{\mathbf{n}}\hat{T}_{\mathbf{m}} = \hat{T}_{\mathbf{n}+\mathbf{m}}, \quad (6.22)$$

при чему је неутрални елемент  $\hat{T}_{\mathbf{0}} = \hat{I}$ , а инверзни  $\hat{T}_{\mathbf{n}}^{-1} = \hat{T}_{-\mathbf{n}}$ . За више детаља видети Главу 4.

а његово дејство на таласну функцију

$$\hat{T}_{\mathbf{n}}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{n}), \quad (6.27)$$

чиме је доказана Блохова теорема<sup>7</sup>. Уочимо да, услед трансляторне периодичности потенцијала, хамилтонијан и оператор транслације комутирају:

$$[\hat{H}, \hat{T}_{\mathbf{n}}] = 0. \quad (6.28)$$

■

### 6.3 Примена цикличних граничних услова Борна и Фон Кармана

Генерализоваћемо цикличне граничне услове (6.6) на случај кристалне структуре

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + N_i\mathbf{a}_i) = \psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad i \in \{1, 2, 3\}, \quad (6.29)$$

где су  $\mathbf{a}_i$  примитивни вектори, а  $N = N_1N_2N_3$  је укупан број примитивних ћелија у кристалу. Уочимо да је укупан број примитивних ћелија једнак укупном броју чворова у кристалу. Применом Блохове теореме на услов (6.29) долазимо до

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + N_i\mathbf{a}_i) = e^{iN_i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_i}\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}), \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (6.30)$$

Поређењем последња два израза уочавамо да мора важити услов

$$e^{iN_i\mathbf{k}\cdot\mathbf{a}_i} = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{a}_i = \frac{2\pi\nu_i}{N_i}, \quad \nu_i \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}. \quad (6.31)$$

У наставку ћемо се ограничити на ортогоналне структуре примитивне ћелије, код којих важи

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{i,j}, \quad i \in \{1, 2, 3\} \quad (6.32)$$

и

$$L_i = N_i\mathbf{a}_i. \quad (6.33)$$

За овакве структуре можемо писати

$$k_i\mathbf{a}_i = \frac{2\pi\nu_i}{N_i}, \quad \nu_i \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (6.34)$$

где су  $k_i$  компоненте таласног вектора дуж осе  $i$ ,  $i \in \{1, 2, 3\}$ <sup>8</sup>

$$k_i = \frac{2\pi\nu_i}{N_i\mathbf{a}_i} = \frac{2\pi\nu_i}{L_i}, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (6.36)$$

<sup>7</sup>Блохова теорема је названа по физичару Феликсу Блоху (Felix Bloch) (1905-1983).

<sup>8</sup>Вектор  $\mathbf{k}$  је представљен у картезијанском базису

$$\mathbf{k} = k_1\mathbf{e}_1 + k_2\mathbf{e}_2 + k_3\mathbf{e}_3. \quad (6.35)$$

Дакле, могуће су само дискретне вредности таласног вектора.

Већ смо утврдили да се цели бројеви  $n_i$  мењају у опсегу

$$-\frac{N_i}{2} + 1 \leq n_i \leq \frac{N_i}{2}. \quad (6.37)$$

Посматрајмо сада израз  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}}$  и узмимо смену  $\nu_i = \nu'_i + N_i$ :

$$e^{ik_i n_i a_i} = e^{i\frac{2\pi\nu'_i n_i}{N_i}} e^{i2\pi n_i} = e^{i\frac{2\pi\nu'_i n_i}{N_i}}. \quad (6.38)$$

Дакле, уочавамо да вредности  $\nu_i$  које излазе из интервала

$$-\frac{N_i}{2} + 1 \leq \nu_i \leq \frac{N_i}{2} \quad (6.39)$$

представљају само понављање резултата добијених за  $\nu_i$  из овог интервала [Павков-Хрвојевић, М., Шкрињар, М., Капор, Д., Крстоношић, П. (2007)]. Вредности таласног вектора се, стога, за велике вредности  $N_i$  налазе унутар интервала

$$-\frac{\pi}{a_i} \leq k_i \leq \frac{\pi}{a_i}. \quad (6.40)$$

Другим речима, ограничавањем кристалне решетке на коначну запремину и наметањем цикличних граничних услова у директном простору, у реципрочном простору дозвољене вредности таласног вектора постају дискретне. Ови вектори могу се посматрати унутар интервала (6.40), који се назива прва Брилуенова зона<sup>9</sup>.

**Тврђење 6.3.** У случају кристалних структура Кронекеров делта симбол представља аналогон интегралне репрезентације Диракове делта функције

$$\delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{n}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n}}, \quad (6.41)$$

односно

$$\delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{n}-\mathbf{m})}. \quad (6.42)$$

*Доказ.* Најпре ћемо доказати релацију (6.41). Наиме, кренућемо од расписивања суме

$$\sum_{\mathbf{n}} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n}}, \quad (6.43)$$

где ћемо прво узети смену  $\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k} - \mathbf{q}$  и убацили израз (6.9) за Бравеов вектор  $\mathbf{n}$ :

$$\sum_{\mathbf{n}} e^{i\tilde{\mathbf{k}}\cdot\mathbf{n}} = \sum_{n_1=-\frac{N_1}{2}+1}^{\frac{N_1}{2}} e^{i\tilde{k}_1 n_1 a_1} \sum_{n_2=-\frac{N_2}{2}+1}^{\frac{N_2}{2}} e^{i\tilde{k}_2 n_2 a_2} \sum_{n_3=-\frac{N_3}{2}+1}^{\frac{N_3}{2}} e^{i\tilde{k}_3 n_3 a_3} = \prod_{i=1,2,3} \sum_{n_i=-\frac{N_i}{2}+1}^{\frac{N_i}{2}} e^{i\tilde{k}_i n_i a_i}. \quad (6.44)$$

<sup>9</sup>Прва Брилуенова зона представља примитивну ћелију реципрочного простора, при чему се сви остали вектори могу добити транслацијама за векторе реципрочне решетке [Kittel, С. (1987)]. Названа је по француском физичару Леону Брилуену (Léon Brillouin) (1889–1969), који је увео систематску анализу таласних вектора у кристалима.

Посматрајмо сада једну од сума у производу и у њој заменимо услов дискретности компоненте таласног вектора (6.36)

$$\sum_{n_i=-\frac{N_i}{2}+1}^{\frac{N_i}{2}} e^{i\tilde{k}_i n_i a_i} = \sum_{n_i=-\frac{N_i}{2}+1}^{\frac{N_i}{2}} e^{i\frac{2\pi\nu_i}{N_i} n_i a_i} = \sum_{n_i=-\frac{N_i}{2}+1}^{\frac{N_i}{2}} \left( e^{i\frac{2\pi\nu_i}{N_i}} \right)^{n_i}. \quad (6.45)$$

Користећи израз за суму коначног броја чланова геометријске прогресије

$$\sum_{l=m}^n x^l = \frac{x^m - x^{n+1}}{1 - x}, \quad (6.46)$$

релација (6.45) постаје

$$\sum_{n_i=-\frac{N_i}{2}+1}^{\frac{N_i}{2}} e^{i\tilde{k}_i n_i a_i} = \sum_{n_i=-\frac{N_i}{2}+1}^{\frac{N_i}{2}} \left( e^{i\frac{2\pi\nu_i}{N_i}} \right)^{n_i} = \frac{e^{i\frac{2\pi\nu_i}{N_i}(-\frac{N_i}{2}+1)} - e^{i\frac{2\pi\nu_i}{N_i}(\frac{N_i}{2}+1)}}{1 - e^{i\frac{2\pi\nu_i}{N_i}}} = e^{i\frac{2\pi\nu_i}{N_i}} e^{-i\pi\nu_i} \frac{1 - e^{i2\pi\nu_i}}{1 - e^{i\frac{2\pi\nu_i}{N_i}}}. \quad (6.47)$$

Уколико је  $\nu_i \neq 0$ , онда је и цео израз једнак нули зато што је  $\nu_i$  цео број:

$$\sum_{n_i=-\frac{N_i}{2}+1}^{\frac{N_i}{2}} e^{i\tilde{k}_i n_i a_i} = \sum_{n_i=-\frac{N_i}{2}+1}^{\frac{N_i}{2}} \left( e^{i\frac{2\pi\nu_i}{N_i}} \right)^{n_i} = 0, \quad \nu_i \neq 0. \quad (6.48)$$

Са друге стране, за  $\nu_i = 0$  вредност последње суме можемо наћи једноставном заменом

$$\sum_{n_i=-\frac{N_i}{2}+1}^{\frac{N_i}{2}} \left( e^{i\frac{2\pi\nu_i}{N_i}} \right)^{n_i} = \sum_{n_i=-\frac{N_i}{2}+1}^{\frac{N_i}{2}} (e^0)^{n_i} = N_i, \quad \nu_i = 0 \quad (6.49)$$

или помоћу Лопиталовог правила

$$\lim_{\nu_i \rightarrow 0} e^{i\frac{2\pi\nu_i}{N_i}} e^{-i\pi\nu_i} \frac{1 - e^{i2\pi\nu_i}}{1 - e^{i\frac{2\pi\nu_i}{N_i}}} = \lim_{\nu_i \rightarrow 0} \frac{1 - e^{i2\pi\nu_i}}{1 - e^{i\frac{2\pi\nu_i}{N_i}}} = \lim_{\nu_i \rightarrow 0} \frac{-2\pi i e^{i2\pi\nu_i}}{-\frac{2\pi i}{N_i} e^{i\frac{2\pi\nu_i}{N_i}}} = N_i. \quad (6.50)$$

Дакле, коначно можемо писати

$$\sum_{\mathbf{n}} e^{i\tilde{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{n}} = \prod_{i=1,2,3} \sum_{n_i=-\frac{N_i}{2}+1}^{\frac{N_i}{2}} e^{i\tilde{k}_i n_i a_i} = N_1 \delta_{\nu_1,0} N_2 \delta_{\nu_2,0} N_3 \delta_{\nu_3,0} = N \delta_{\tilde{k}_1,0} \delta_{\tilde{k}_2,0} \delta_{\tilde{k}_3,0} = N \delta_{\tilde{\mathbf{k}},0}, \quad (6.51)$$

где смо искористили да је укупан број примитивних ћелија  $N = N_1 N_2 N_3$  и  $\delta_{\tilde{\mathbf{k}},0} = \delta_{\tilde{k}_1,0} \delta_{\tilde{k}_2,0} \delta_{\tilde{k}_3,0}$ . Убацивањем првобитне смене,  $\tilde{\mathbf{k}} = \mathbf{k} - \mathbf{q}$ , уочавамо да је релација (6.41) доказана.

Релацију (6.42) доказујемо на сличан начин. Овог пута расписујемо суму

$$\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{n}-\mathbf{m})}, \quad (6.52)$$

где ћемо најпре увести смену  $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} - \mathbf{m}$ :

$$\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{n}}} = \sum_{\nu_1=-\frac{N_1}{2}+1}^{\frac{N_1}{2}} e^{i\frac{2\pi\nu_1}{N_1}n_1a_1} \sum_{\nu_2=-\frac{N_2}{2}+1}^{\frac{N_2}{2}} e^{i\frac{2\pi\nu_2}{N_2}n_2a_2} \sum_{\nu_3=-\frac{N_3}{2}+1}^{\frac{N_3}{2}} e^{i\frac{2\pi\nu_3}{N_3}n_3a_3} = \prod_{i=1,2,3} \sum_{\nu_i=-\frac{N_i}{2}+1}^{\frac{N_i}{2}} \left( e^{i\frac{2\pi n_i}{N_i}} \right)^{\nu_i}. \quad (6.53)$$

Користећи израз за геометријску прогресију, (6.46), последња сума се своди на

$$\sum_{\nu_i=-\frac{N_i}{2}+1}^{\frac{N_i}{2}} \left( e^{i\frac{2\pi n_i}{N_i}} \right)^{\nu_i} = \frac{e^{i\frac{2\pi n_i}{N_i}(-\frac{N_i}{2}+1)} - e^{i\frac{2\pi n_i}{N_i}(\frac{N_i}{2}+1)}}{1 - e^{i\frac{2\pi n_i}{N_i}}} = e^{i\frac{2\pi n_i}{N_i}} e^{-i\pi n_i} \frac{1 - e^{i2\pi n_i}}{1 - e^{i\frac{2\pi n_i}{N_i}}}. \quad (6.54)$$

За  $n_i \neq 0$  важи

$$\sum_{\nu_i=-\frac{N_i}{2}+1}^{\frac{N_i}{2}} \left( e^{i\frac{2\pi n_i}{N_i}} \right)^{\nu_i} = 0, \quad n_i \neq 0, \quad (6.55)$$

док је за  $n_i = 0$ :

$$\sum_{\nu_i=-\frac{N_i}{2}+1}^{\frac{N_i}{2}} \left( e^{i\frac{2\pi n_i}{N_i}} \right)^{\nu_i} = \sum_{\nu_i=-\frac{N_i}{2}+1}^{\frac{N_i}{2}} (e^0)^{\nu_i} = N_i, \quad n_i = 0, \quad (6.56)$$

односно

$$\lim_{n_i \rightarrow 0} e^{i\frac{2\pi n_i}{N_i}} e^{-i\pi n_i} \frac{1 - e^{i2\pi n_i}}{1 - e^{i\frac{2\pi n_i}{N_i}}} = \lim_{n_i \rightarrow 0} \frac{1 - e^{i2\pi n_i}}{1 - e^{i\frac{2\pi n_i}{N_i}}} = \lim_{n_i \rightarrow 0} \frac{-2\pi i e^{i2\pi n_i}}{-\frac{2\pi i}{N_i} e^{i\frac{2\pi n_i}{N_i}}} = N_i. \quad (6.57)$$

Тражена сума тако постаје

$$\sum_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\tilde{\mathbf{n}}} = \prod_{i=1,2,3} \sum_{\nu_i=-\frac{N_i}{2}+1}^{\frac{N_i}{2}} \left( e^{i\frac{2\pi n_i}{N_i}} \right)^{\nu_i} = N_1 \delta_{n_1,0} N_2 \delta_{n_2,0} N_3 \delta_{n_3,0} = N \delta_{\mathbf{r},0}, \quad (6.58)$$

где је  $\delta_{\mathbf{r},0} = \delta_{n_1,0} \delta_{n_2,0} \delta_{n_3,0}$ . Враћањем првобитне смене,  $\tilde{\mathbf{n}} = \mathbf{n} - \mathbf{m}$ , видимо да је релација (6.42) доказана. ■

Примена цикличних граничних услова у кристалним системима доводи до дискретизације таласног вектора (и импулса), што увелико олакшава многе прорачуне у физици чврстог стања, у шта ћемо се и уверити у наредном одељку. Међутим, на крају је често потребно израчунати одређене изразе сумирајући по импулсном простору. Наравно, тада је погодније вратити се на интеграле.

**Тврђење 6.4.** Приликом преласка са дискретног на континуални импулсни простор можемо извршити следећу замену [Павков-Хрвојевић, М., Шкрињар, М., Капор, Д., Крстоношић, П. (2007)]:

$$\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} F(\mathbf{k}) \rightarrow \frac{v}{(2\pi)^3} \int_{\text{IBZ}} d^3\mathbf{k} F(\mathbf{k}), \quad (6.59)$$

где је  $v = a_1 a_2 a_3$ , а интеграција се врши по првој Брилуеновој зони, односно  $\int_{\text{IBZ}} d^3\mathbf{k} = \int_{-\pi/a_1}^{\pi/a_1} dk_1 \int_{-\pi/a_2}^{\pi/a_2} dk_2 \int_{-\pi/a_3}^{\pi/a_3} dk_3$ .

*Доказ.* Како бисмо доказали наведену везу, најпре ћемо расписати таласни вектор као  $\mathbf{k} = k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 + k_3 \mathbf{e}_3$ :

$$\frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} F(\mathbf{k}) = \frac{1}{N} \sum_{k_1, k_2, k_3} F(k_1 \mathbf{e}_1 + k_2 \mathbf{e}_2 + k_3 \mathbf{e}_3) = \frac{1}{N} \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3} F\left(\frac{2\pi\nu_1}{N_1 a_1} \mathbf{e}_1 + \frac{2\pi\nu_2}{N_2 a_2} \mathbf{e}_2 + \frac{2\pi\nu_3}{N_3 a_3} \mathbf{e}_3\right), \quad (6.60)$$

при чему смо имплементирали израз (6.36). Како су вредности  $\nu_i$  целобројне, а  $\Delta\nu_i = 1$ , али и  $\Delta\nu_i = \frac{L_i}{2\pi} \Delta k_i$  на основу (6.36), можемо писати

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} F(\mathbf{k}) &= \frac{1}{N} \sum_{\nu_1, \nu_2, \nu_3} F\left(\frac{2\pi\nu_1}{N_1 a_1} \mathbf{e}_1 + \frac{2\pi\nu_2}{N_2 a_2} \mathbf{e}_2 + \frac{2\pi\nu_3}{N_3 a_3} \mathbf{e}_3\right) \Delta\nu_1 \Delta\nu_2 \Delta\nu_3 \\ &= \frac{1}{N} \frac{L_1 L_2 L_3}{(2\pi)^3} \sum_{k_1, k_2, k_3} F(\mathbf{k}) \Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3 \\ &= \frac{1}{N_1 N_2 N_3} \frac{N_1 a_1 N_2 a_2 N_3 a_3}{(2\pi)^3} \sum_{k_1, k_2, k_3} F(\mathbf{k}) \Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3 \\ &= \frac{v}{(2\pi)^3} \sum_{k_1, k_2, k_3} F(\mathbf{k}) \Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3, \end{aligned} \quad (6.61)$$

где смо искористили (6.33). Када ширина подинтервала тежи нули,  $\Delta k_i \rightarrow 0$ , сума прелази у интеграл

$$\lim_{\substack{\Delta k_1 \rightarrow 0 \\ \Delta k_2 \rightarrow 0 \\ \Delta k_3 \rightarrow 0}} \frac{v}{(2\pi)^3} \sum_{k_1, k_2, k_3} F(\mathbf{k}) \Delta k_1 \Delta k_2 \Delta k_3 = \frac{v}{(2\pi)^3} \int_{-\pi/a_1}^{\pi/a_1} dk_1 \int_{-\pi/a_2}^{\pi/a_2} dk_2 \int_{-\pi/a_3}^{\pi/a_3} dk_3 F(\mathbf{k}), \quad (6.62)$$

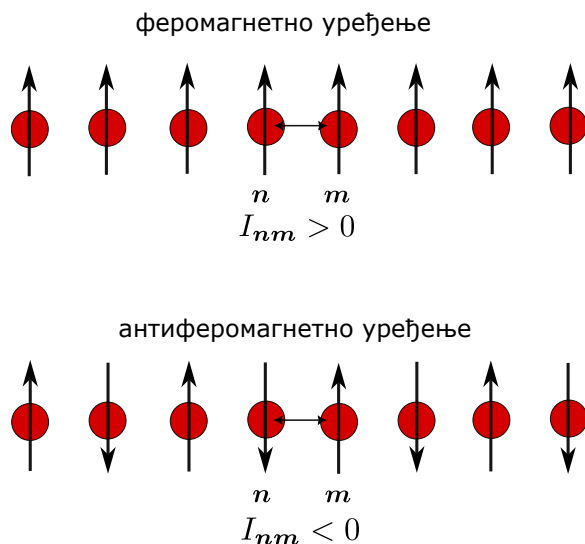
чиме смо доказали тврђење (6.59). ■

## 6.4 Примери примене дискретне Фуријеове трансформације у чврстом стању

### 6.4.1 Интеракција измене

Интеракција измене је квантно-механички ефекат који је последица симетрије таласне функције и неразлучивости честица. Према савременом схватању, интеракција

измене је од кључног значаја за опис уређене фазе магнетних система [Kittel, C. (1987); Auerbach, A. (2012); Ashcroft, N.W., Mermin, N.D. (1976); Тошић, Б. (1978)]. Испоставља се да се квантно-механички феномени проистекли из изменске интеракције могу ефективно описати скаларном величином коју називамо интеграл измене – понашање локализованих електрона у магнетним системима се може описати хамилтонијанима који у најнижој апроксимацији укључују само спинске степене слободе и интеграле измене. Овакви хамилтонијани дефинишу различите верзије Хајзенберговог или Изинговог модела. У најједноставнијим моделима, интеграл измене зависи само од растојања између чворова, али не и од конкретних положаја чворова,  $I_{nm} = I(\mathbf{n} - \mathbf{m}) = I(|\mathbf{n} - \mathbf{m}|)$ . Вредности интеграла измене утичу на карактеристике основног стања и на термодинамичке особине магнетних система. Рецимо, у случају феромагнетика интеграл измене има позитивну вредност, док је код антиферомагнетика његова вредност негативна (Слика 6.3).



Слика 6.3: Илустративни приказ феромагнетног и антиферомагнетног уређења.

**Тврђење 6.5.** Уколико је директна Фуријеова трансформација која повезује интеграл измене  $I(\mathbf{n} - \mathbf{m})$  и његову слику  $\tilde{I}(\mathbf{k})$  облика

$$I(\mathbf{n} - \mathbf{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{I}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{m})}, \quad (6.63)$$

инверзна Фуријеова трансформација има форму

$$\tilde{I}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{n} - \mathbf{m}} I(\mathbf{n} - \mathbf{m}) e^{-i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{m})}. \quad (6.64)$$

*Доказ.* Поступак којим се доказује ова тврдња у потпуности је аналоган добијању инверзне Фуријеове трансформације на основу директне у континуалном случају (видети Главу 1). Дакле, најпре ћемо релацију (6.63) помножити фактором  $e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{m})}$

$$I(\mathbf{n} - \mathbf{m}) e^{-i\mathbf{q} \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{m})} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{I}(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k} - \mathbf{q}) \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{m})}, \quad (6.65)$$

а потом извршити сумирање по  $n - m$

$$\sum_{n-m} I(n-m)e^{-iq(n-m)} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{I}(\mathbf{k}) \sum_{n-m} e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q}) \cdot (n-m)} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{I}(\mathbf{k}) N \delta_{\mathbf{k},\mathbf{q}} = \tilde{I}(\mathbf{q}), \quad (6.66)$$

где је искоришћена дефиниција Кронекеровог делта симбола, (6.41). Вративши се на полазне ознаке, видимо да је релација (6.64) доказана. Уочимо, такође, да у случају симетричне дискретне Фуријеове трансформације важи

$$I(n-m) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{I}(\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k} \cdot (n-m)}, \quad \tilde{I}(\mathbf{k}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n-m} I(n-m) e^{-i\mathbf{k} \cdot (n-m)}. \quad (6.67)$$

Другим речима, у симетричној дефиницији дискретне Фуријеове трансформације се и у директној и у инверзној трансформацији појављује фактор  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ . ■

**Тврђење 6.6.** Уколико је интеграл измене  $I_{nm}$  величина која зависи само од  $n - m$ ,  $I_{nm} = I(n - m)$ , за његову Фуријеову слику важи

$$\sum_{\mathbf{k}} \tilde{I}(\mathbf{k}) = 0. \quad (6.68)$$

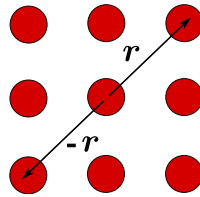
*Доказ.* Полазимо од дефиниције инверзне Фуријеове трансформације интеграла измене, (6.64), и вршимо сумирање израза по  $\mathbf{k}$

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}} \tilde{I}(\mathbf{k}) &= \sum_{\mathbf{k}} \sum_{n-m} I(n-m) e^{-i\mathbf{k} \cdot (n-m)} = \sum_{n-m} I(n-m) \sum_{\mathbf{k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot (n-m)} = \\ &= \sum_{n-m} I(n-m) N \delta_{\mathbf{n},\mathbf{m}} = NI(0). \end{aligned} \quad (6.69)$$

где је искоришћена дефиниција Кронекеровог делта симбола, (6.42). Како би  $I(0)$  у директном простору заправо било  $I_{nn}$ , односно означавало интеграл измене чвора  $\mathbf{n}$  са самим собом, јасно је да је ова величина једнака нули,  $I(0) = 0$ , те је овиме тврђење доказано. ■

**Тврђење 6.7.** У кристалним структурама које имају центар инверзије важи

$$\tilde{I}(\mathbf{k}) = \tilde{I}(-\mathbf{k}). \quad (6.70)$$



Слика 6.4: Илустративни приказ структуре са центром инверзије.

*Доказ.* Координатни почетак ћемо сместити у центар инверзије. На основу Сlike 6.4 уочавамо да важи

$$I(\mathbf{r}) = I(-\mathbf{r}), \quad (6.71)$$

али и

$$\sum_{\mathbf{r}} = \sum_{-\mathbf{r}}. \quad (6.72)$$

Уколико узмемо  $\mathbf{r} = \mathbf{n} - \mathbf{m}$ , релацију (6.64) можемо записати у облику:

$$\tilde{I}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{r}} I(\mathbf{r}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}. \quad (6.73)$$

Извршићемо сада смену  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ , те последњи израз поприма форму:

$$\tilde{I}(\mathbf{k}) = \sum_{-\mathbf{r}} I(-\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{r}} I(\mathbf{r}) e^{-i(-\mathbf{k})\cdot\mathbf{r}} = \tilde{I}(-\mathbf{k}), \quad (6.74)$$

чиме је доказано тврђење. ■

### 6.4.2 Примери

У наставку су приложени примери примене дискретне Фуријеове трансформације на проблеме у чврстом стању. Неки од ових примера се могу наћи у [Павков-Хрвојевић, М., Шкрињар, М., Капор, Д., Крстоношић, П. (2007)], али су овде дати са више детаља.

**Пример 6.1.** У апроксимацији најближих суседа, у којој се сматра да постоји интеракција само између најближих суседа:

$$I(\mathbf{n} - \mathbf{m}) = \begin{cases} I, & \text{ако су чворови } \mathbf{n} \text{ и } \mathbf{m} \text{ најближи суседи,} \\ 0, & \text{у осталим случајевима,} \end{cases} \quad (6.75)$$

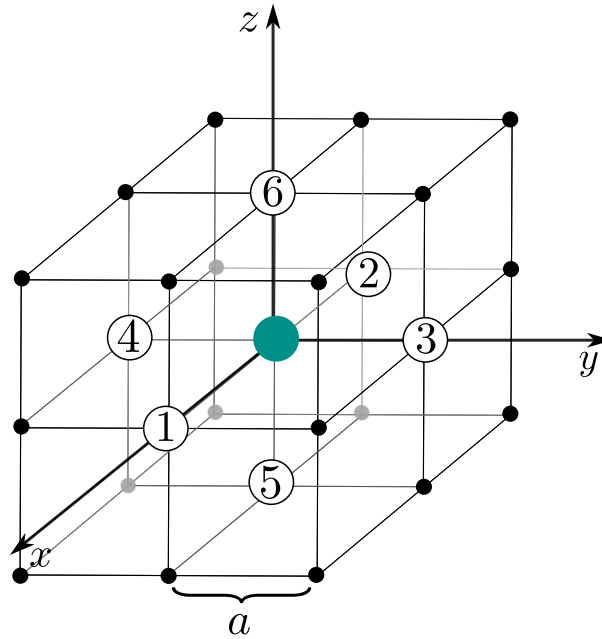
одредити Фуријеову слику  $\tilde{I}(\mathbf{k})$  за случај прости кубне решетке параметра  $a$ .

**Решење.** На Сlici 6.5 налази се приказ најближих суседа у случају прости кубне решетке, при чему су бројевима обележени чворови који су најближи суседи одабраном чвору. С обзиром да је одабрани чвор смештен у координатни почетак, вектори положаја најближих суседа су:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= (a, 0, 0), & \lambda_2 &= (-a, 0, 0), & \lambda_3 &= (0, a, 0), \\ \lambda_4 &= (0, -a, 0), & \lambda_5 &= (0, 0, -a), & \lambda_6 &= (0, 0, a). \end{aligned} \quad (6.76)$$

Фуријеову слику интеграла измене ћемо одредити на основу израза (6.64), узимајући у обзир трансляторну инваријантност кристала, стављајући  $\mathbf{m} = 0$  и вршећи сумирање по најближим суседима:

$$\tilde{I}(\mathbf{k}) = \sum_{\langle \mathbf{n} \rangle} I(\mathbf{n}) e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}} = I \sum_{i=1}^6 e^{-i\mathbf{k}\cdot\lambda_i}. \quad (6.77)$$



Слика 6.5: Илустративни приказ најближих суседа у случају прости кубне решетке. Најближи суседи одабраног чвора смештеног у координатни почетак обележени су бројевима.

Заменом вектора положаја најближих суседа у претходном изразу долазимо до

$$\begin{aligned}\tilde{I}(\mathbf{k}) &= I \left( e^{-ik_x a} + e^{ik_x a} + e^{-ik_y a} + e^{ik_y a} + e^{-ik_z a} + e^{ik_z a} \right) \\ &= 2I \left( \cos(k_x a) + \cos(k_y a) + \cos(k_z a) \right),\end{aligned}\quad (6.78)$$

при чему смо искористили да је  $\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$ . ■

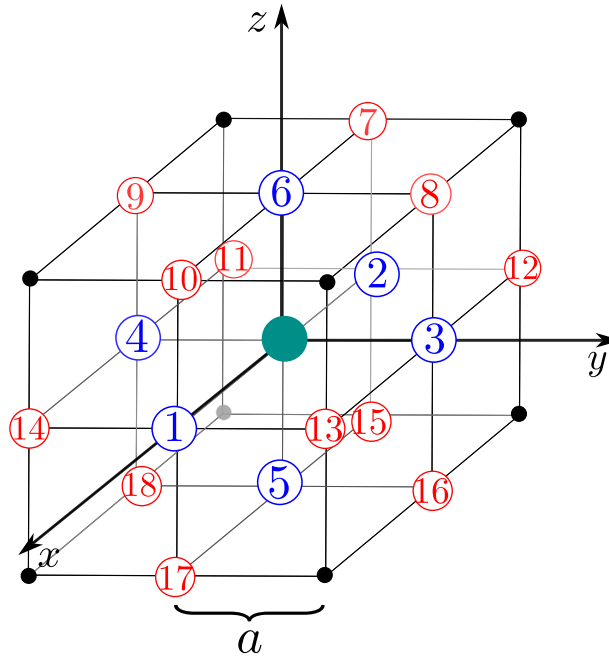
**Пример 6.2.** У апроксимацији првих и других суседа, у којој се сматра да постоји интеракција облика:

$$I(\mathbf{n} - \mathbf{m}) = \begin{cases} I_1, & \text{ако су чворови } \mathbf{n} \text{ и } \mathbf{m} \text{ први суседи,} \\ I_2, & \text{ако су чворови } \mathbf{n} \text{ и } \mathbf{m} \text{ други суседи,} \\ 0, & \text{у осталим случајевима,} \end{cases}\quad (6.79)$$

одредити Фуријеову слику  $\tilde{I}(\mathbf{k})$  за случај прости кубне решетке параметра  $a$ .

**Решење.** На Слици 6.6 налази се приказ првих и других суседа у случају прости кубне решетке, при чему су плавом бојом обележени чворови који су најближи суседи одабраном чвору, а црвеном његови други суседи. Одабрани чвор је смештен у координатни почетак, а вектори положаја његових најближих суседа дати су у претходном примеру:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= (a, 0, 0), & \lambda_2 &= (-a, 0, 0), & \lambda_3 &= (0, a, 0), \\ \lambda_4 &= (0, -a, 0), & \lambda_5 &= (0, 0, -a), & \lambda_6 &= (0, 0, a),\end{aligned}\quad (6.80)$$



Слика 6.6: Илустративни приказ првих и других суседа у случају прости кубне решетке. Најближи суседи одабраног чвора смештеног у координатни почетак обојени су плавом бојом, док су црвеном бојом обојени његови други суседи.

док су вектори положаја других суседа:

$$\begin{aligned}
 \lambda_7 &= (-a, 0, a), & \lambda_8 &= (0, a, a), & \lambda_9 &= (0, -a, a), & \lambda_{10} &= (a, 0, a), \\
 \lambda_{11} &= (-a, -a, 0), & \lambda_{12} &= (-a, a, 0), & \lambda_{13} &= (a, a, 0), & \lambda_{14} &= (a, -a, 0), \\
 \lambda_{15} &= (-a, 0, -a), & \lambda_{16} &= (0, a, -a), & \lambda_{17} &= (a, 0, -a), & \lambda_{18} &= (0, -a, -a).
 \end{aligned} \tag{6.81}$$

Фуријеову слику интеграла измене поново одређујемо на основу израза (6.64), узимајући у обзир трансляторну инваријантност кристала, стављајући  $\mathbf{m} = 0$  и вршећи сумирање по првим и другим суседима:

$$\tilde{I}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{n}} I(\mathbf{n}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} = I_1 \sum_{i=1}^6 e^{-i\mathbf{k} \cdot \lambda_i} + I_2 \sum_{i=7}^{18} e^{-i\mathbf{k} \cdot \lambda_i} = \tilde{I}_1(\mathbf{k}) + \tilde{I}_2(\mathbf{k}), \tag{6.82}$$

где су:

$$\tilde{I}_1(\mathbf{k}) = I_1 \sum_{i=1}^6 e^{-i\mathbf{k} \cdot \lambda_i}, \quad \tilde{I}_2(\mathbf{k}) = I_2 \sum_{i=7}^{18} e^{-i\mathbf{k} \cdot \lambda_i}. \tag{6.83}$$

Заменом датих вектора положаја првих и других суседа у претходном изразу долазимо до

$$\tilde{I}_1(\mathbf{k}) = 2I_1 (\cos(k_x a) + \cos(k_y a) + \cos(k_z a)), \tag{6.84}$$

у складу са претходним примером и:

$$\begin{aligned}
\tilde{I}_2(\mathbf{k}) &= I_2 \left( e^{-i(-k_x a + k_z a)} + e^{-i(k_y a + k_z a)} + e^{-i(-k_y a + k_z a)} + e^{-i(k_x a + k_z a)} \right. \\
&\quad + e^{-i(-k_x a - k_y a)} + e^{-i(-k_x a + k_y a)} + e^{-i(k_x a + k_y a)} + e^{-i(k_x a - k_y a)} \\
&\quad \left. + e^{-i(-k_x a - k_z a)} + e^{-i(k_y a - k_z a)} + e^{-i(k_x a - k_z a)} + e^{-i(-k_y a - k_z a)} \right) \\
&= 2I_2 \left( \cos(k_x a) (e^{-ik_z a} + e^{ik_z a}) + \cos(k_y a) (e^{-ik_z a} + e^{ik_z a}) \right. \\
&\quad \left. + \cos(k_x a) (e^{-ik_y a} + e^{ik_y a}) \right) \\
&= 4I_2 \left( \cos(k_x a) \cos(k_z a) + \cos(k_y a) \cos(k_z a) + \cos(k_x a) \cos(k_y a) \right), \quad (6.85)
\end{aligned}$$

те је коначно Фуријеова слика интеграла измене за апроксимацију првих и других суседа у случају просте кубне решетке:

$$\begin{aligned}
\tilde{I}(\mathbf{k}) &= 2I_1 (\cos(k_x a) + \cos(k_y a) + \cos(k_z a)) \\
&\quad + 4I_2 \left( \cos(k_x a) \cos(k_z a) + \cos(k_y a) \cos(k_z a) + \cos(k_x a) \cos(k_y a) \right). \quad (6.86)
\end{aligned}$$

■

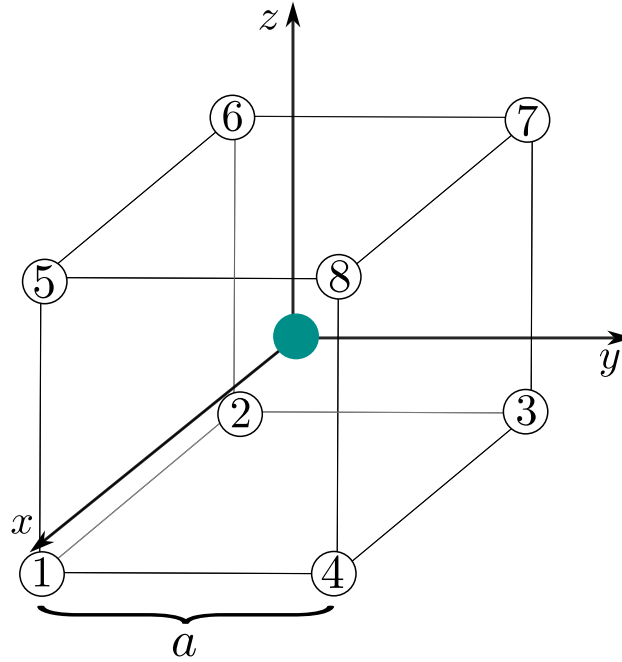
**Пример 6.3.** У апроксимацији најближих суседа одредити Фуријеову слику  $\tilde{I}(\mathbf{k})$  за случај запремински центриране кубне решетке параметра  $a$ .

**Решење.** На Слици 6.7 нумерисани су најближи суседи одабраног чвора у случају запремински центриране кубне решетке. Како је одабрани чвор смештен у координатни почетак, вектори положаја најближих суседа су:

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \left( \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right), \quad \lambda_2 = \left( -\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right), \quad \lambda_3 = \left( -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right), \quad \lambda_4 = \left( \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2} \right), \\
\lambda_5 &= \left( \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right), \quad \lambda_6 = \left( -\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right), \quad \lambda_7 = \left( -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right), \quad \lambda_8 = \left( \frac{a}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2} \right). \quad (6.87)
\end{aligned}$$

Фуријеову слику интеграла измене ћемо одредити аналогно претходним примерима:

$$\tilde{I}(\mathbf{k}) = \sum_{\langle \mathbf{n} \rangle} I(\mathbf{n}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} = I \sum_{i=1}^8 e^{-i\mathbf{k} \cdot \lambda_i}. \quad (6.88)$$



Слика 6.7: Илустративни приказ најближих суседа у случају запремински центриране кубне решетке. Најближи суседи одабраног чвора смештеног у координатни почетак обележени су бројевима.

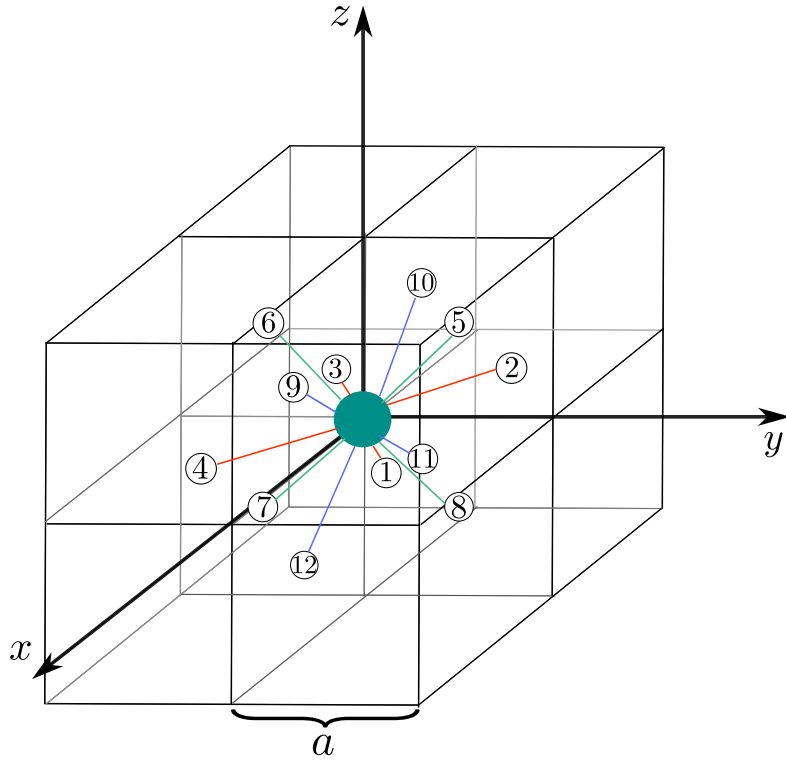
Заменом вектора положаја најближих суседа у претходном изразу долазимо до

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}(\mathbf{k}) &= I \left( e^{-i(k_x \frac{a}{2} - k_y \frac{a}{2} - k_z \frac{a}{2})} + e^{-i(-k_x \frac{a}{2} - k_y \frac{a}{2} - k_z \frac{a}{2})} + e^{-i(-k_x \frac{a}{2} + k_y \frac{a}{2} - k_z \frac{a}{2})} \right. \\
 &\quad + e^{-i(k_x \frac{a}{2} + k_y \frac{a}{2} - k_z \frac{a}{2})} + e^{-i(k_x \frac{a}{2} - k_y \frac{a}{2} + k_z \frac{a}{2})} + e^{-i(-k_x \frac{a}{2} - k_y \frac{a}{2} + k_z \frac{a}{2})} \\
 &\quad \left. + e^{-i(-k_x \frac{a}{2} + k_y \frac{a}{2} + k_z \frac{a}{2})} + e^{-i(k_x \frac{a}{2} + k_y \frac{a}{2} + k_z \frac{a}{2})} \right) \\
 &= 2I \cos\left(k_x \frac{a}{2}\right) \left( e^{-i(-k_y \frac{a}{2} - k_z \frac{a}{2})} + e^{-i(k_y \frac{a}{2} - k_z \frac{a}{2})} + e^{-i(-k_y \frac{a}{2} + k_z \frac{a}{2})} + e^{-i(k_y \frac{a}{2} + k_z \frac{a}{2})} \right) \\
 &= 4I \cos\left(k_x \frac{a}{2}\right) \cos\left(k_y \frac{a}{2}\right) \left( e^{ik_z \frac{a}{2}} + e^{-ik_z \frac{a}{2}} \right) \\
 &= 8I \cos\left(k_x \frac{a}{2}\right) \cos\left(k_y \frac{a}{2}\right) \cos\left(k_z \frac{a}{2}\right). \tag{6.89}
 \end{aligned}$$

■

**Пример 6.4.** У апроксимацији најближих суседа одредити Фуријеову слику  $\tilde{I}(\mathbf{k})$  за случај површински центриране кубне решетке параметра  $a$ .

**Решење.** На Слици 6.8 нумерисани су најближи суседи обојеног чвора у случају површински центриране кубне решетке. Како је обојени чвор смештен у координатни



Слика 6.8: Илустративни приказ најближих суседа у случају површински центриране кубне решетке. Ради прегледности, обележени су само положаји најближих суседа одабраног чвора смештеног у координатни почетак. Дужи истих боја спајају обојени чвор са суседима у истој равни.

почетак, вектори положаја најближих суседа су:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= \left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right), & \lambda_2 &= \left(-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0\right), & \lambda_3 &= \left(-\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, 0\right), & \lambda_4 &= \left(\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}, 0\right), \\
 \lambda_5 &= \left(0, \frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), & \lambda_6 &= \left(0, -\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right), & \lambda_7 &= \left(0, -\frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right), & \lambda_8 &= \left(0, \frac{a}{2}, -\frac{a}{2}\right), \\
 \lambda_9 &= \left(\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}\right), & \lambda_{10} &= \left(-\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}\right), & \lambda_{11} &= \left(-\frac{a}{2}, 0, -\frac{a}{2}\right), & \lambda_{12} &= \left(\frac{a}{2}, 0, -\frac{a}{2}\right). \quad (6.90)
 \end{aligned}$$

Слично претходним примерима, Фуријеову слику интеграла измене одређујемо на основу

$$\tilde{I}(\mathbf{k}) = \sum_{\langle \mathbf{n} \rangle} I(\mathbf{n}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} = I \sum_{i=1}^{12} e^{-i\mathbf{k} \cdot \lambda_i}. \quad (6.91)$$

Заменом вектора положаја најближих суседа у претходном изразу долазимо до

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}(\mathbf{k}) &= I \left( e^{-i(k_x \frac{a}{2} + k_y \frac{a}{2})} + e^{-i(-k_x \frac{a}{2} + k_y \frac{a}{2})} + e^{-i(-k_x \frac{a}{2} - k_y \frac{a}{2})} + e^{-i(k_x \frac{a}{2} - k_y \frac{a}{2})} \right. \\
 &\quad + e^{-i(k_y \frac{a}{2} + k_z \frac{a}{2})} + e^{-i(-k_y \frac{a}{2} + k_z \frac{a}{2})} + e^{-i(-k_y \frac{a}{2} - k_z \frac{a}{2})} + e^{-i(k_y \frac{a}{2} - k_z \frac{a}{2})} \\
 &\quad \left. + e^{-i(k_x \frac{a}{2} + k_z \frac{a}{2})} + e^{-i(-k_x \frac{a}{2} + k_z \frac{a}{2})} + e^{-i(-k_x \frac{a}{2} - k_z \frac{a}{2})} + e^{-i(k_x \frac{a}{2} - k_z \frac{a}{2})} \right) \\
 &= 2I \left( \cos \left( k_x \frac{a}{2} \right) (e^{-ik_y \frac{a}{2}} + e^{ik_y \frac{a}{2}}) + \cos \left( k_y \frac{a}{2} \right) (e^{-ik_z \frac{a}{2}} + e^{ik_z \frac{a}{2}}) \right. \\
 &\quad \left. + \cos \left( k_x \frac{a}{2} \right) (e^{-ik_z \frac{a}{2}} + e^{ik_z \frac{a}{2}}) \right) \\
 &= 4I \left( \cos \left( k_x \frac{a}{2} \right) \cos \left( k_y \frac{a}{2} \right) + \cos \left( k_y \frac{a}{2} \right) \cos \left( k_z \frac{a}{2} \right) + \cos \left( k_x \frac{a}{2} \right) \cos \left( k_z \frac{a}{2} \right) \right). \tag{6.92}
 \end{aligned}$$

■

**Пример 6.5.** У апроксимацији најближих суседа одредити Фуријеову слику  $\tilde{I}(\mathbf{k})$  за случај просте хексагоналне решетке параметара  $a$  и  $c = a$ .

**Решење.** На Слици 6.9 нумерисани су најближи суседи одабраног чвора у случају просте хексагоналне решетке. Како је одабрани чвор смештен у координатни почетак, вектори положаја најближих суседа су:

$$\begin{aligned}
 \lambda_1 &= (0, 0, -a), \quad \lambda_2 = (0, 0, a), \quad \lambda_3 = (a, 0, 0), \quad \lambda_4 = \left( \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \\
 \lambda_5 &= \left( -\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \quad \lambda_6 = (-a, 0, 0), \quad \lambda_7 = \left( -\frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0 \right), \\
 \lambda_8 &= \left( \frac{a}{2}, -\frac{a\sqrt{3}}{2}, 0 \right). \tag{6.93}
 \end{aligned}$$

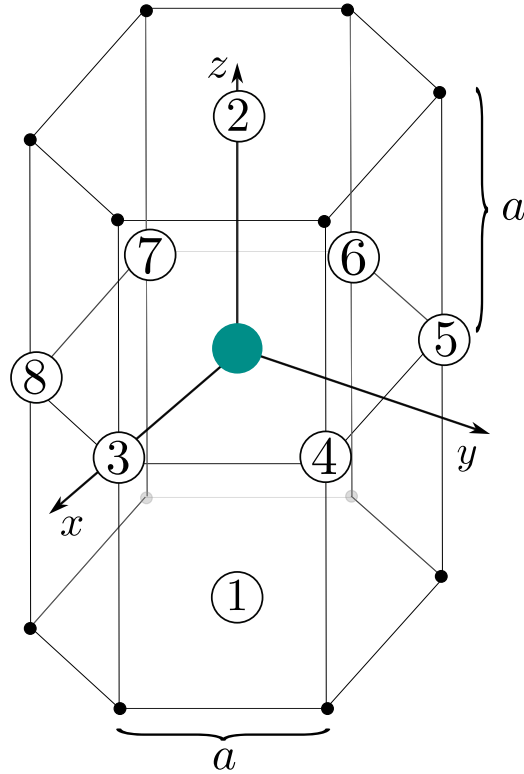
Фуријеову слику интеграла измене одредићемо из:

$$\tilde{I}(\mathbf{k}) = \sum_{\langle \mathbf{n} \rangle} I(\mathbf{n}) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}} = I \sum_{i=1}^8 e^{-i\mathbf{k} \cdot \lambda_i}. \tag{6.94}$$

Заменом вектора положаја најближих суседа у претходном изразу долазимо до

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}(\mathbf{k}) &= I \left( e^{ik_z a} + e^{-ik_z a} + e^{-ik_x a} + e^{-i(k_x \frac{a}{2} + k_y \frac{a\sqrt{3}}{2})} + e^{-i(-k_x \frac{a}{2} + k_y \frac{a\sqrt{3}}{2})} + e^{ik_x a} \right. \\
 &\quad \left. + e^{-i(-k_x \frac{a}{2} - k_y \frac{a\sqrt{3}}{2})} + e^{-i(k_x \frac{a}{2} - k_y \frac{a\sqrt{3}}{2})} \right) \\
 &= 2I \left( \cos(k_z a) + \cos(k_x a) + \cos \left( k_x \frac{a}{2} \right) (e^{-ik_y \frac{a\sqrt{3}}{2}} + e^{ik_y \frac{a\sqrt{3}}{2}}) \right) \\
 &= 2I \left( \cos(k_z a) + \cos(k_x a) + 2 \cos \left( k_x \frac{a}{2} \right) \cos \left( k_y \frac{a\sqrt{3}}{2} \right) \right). \tag{6.95}
 \end{aligned}$$

■



Слика 6.9: Илустративни приказ најближих суседа у случају прости хексагоналне решетке. Најближи суседи одабраног чвора смештеног у координатни почетак обележени су бројевима.

**Пример 6.6.** У кристалу је често полазна тачка хамилтонијан дат у репрезентацији друге квантизације. Креација или анихилација побуђења на чвору  $\mathbf{n}$  описане су бозонским или фермионским операторима, при чему се мора водити рачуна о статистици побуђења (за више информација видети [Nolting, W., Ramakanth, A. (2009); Tyablikov, S. V. (1967); Тошић, Б., Стојановић, С., Шкрињар, М., Капор, Д., Машковић, Љ., Шетрајчић, Ј. (1992); Барјактар, В. Г., Криворучко, В. Н., Јаблонски, Д. А. (1984)]). Први корак у решавању оваквих проблема јесте прелазак у реципрочни простор помоћу дискретне Фуријеове трансформације. Уколико су дискретне Фуријеове трансформације бозонских или фермионских оператора анихилације  $\hat{C}_n$  и креације  $\hat{C}_n^\dagger$  побуђења на чвору  $\mathbf{n}$  дате изразима:

$$\hat{C}_n = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \hat{C}_k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}}, \quad \hat{C}_n^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \hat{C}_k^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{n}}, \quad (6.96)$$

одредити инверзне Фуријеове трансформације ових оператора.

**Решење.** Процедура је аналогна већ примењеној у случају интеграла измене - релације (6.96) најпре ћемо помножити функцијама  $e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}}$  и  $e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}}$ , респективно, а потом ћемо извршити сумирање по  $\mathbf{n}$ :

$$\sum_n \hat{C}_n e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \hat{C}_k \sum_n e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{q})\cdot\mathbf{n}}, \quad \sum_n \hat{C}_n^\dagger e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \hat{C}_k^\dagger \sum_n e^{i(\mathbf{q}-\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}}. \quad (6.97)$$

Користећи дефиницију Кронекеровог делта симбола, (6.41), долазимо до

$$\sum_n \hat{C}_n e^{-iq \cdot n} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \hat{C}_k N \delta_{k,q}, \quad \sum_n \hat{C}_n^\dagger e^{iq \cdot n} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \hat{C}_k^\dagger N \delta_{k,q}. \quad (6.98)$$

Дакле, тражене инверзне Фуријеове трансформације су облика

$$\hat{C}_k = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \hat{C}_n e^{-ik \cdot n}, \quad \hat{C}_k^\dagger = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \hat{C}_n^\dagger e^{ik \cdot n}. \quad (6.99)$$

Уочимо да важи

$$\left(\hat{C}_k^\dagger\right)^\dagger = \hat{C}_k, \quad (6.100)$$

слично као у директном простору. Убудуће ћемо користити ознаке  $\hat{B}$  и  $\hat{B}^\dagger$  за бозонске, а  $\hat{A}$  и  $\hat{A}^\dagger$  за фермионске анихилационе и креационе операторе, респективно. ■

**Пример 6.7.** Показати да су Фуријеове слике бозонских оператора такође бозонски оператори, односно показати да задовољавају комутационе релације истог типа. Аналогно учинити и за фермионске операторе и њихове антикомутационе релације.

**Решење.** Пођимо најпре од бозонских оператора. Наиме, знајући да у директном простору важи:

$$[\hat{B}_n, \hat{B}_m^\dagger] = \delta_{n,m}, \quad [\hat{B}_n, \hat{B}_m] = 0, \quad [\hat{B}_n^\dagger, \hat{B}_m^\dagger] = 0, \quad (6.101)$$

за Фуријеове слике ових оператора можемо писати

$$\begin{aligned} [\hat{B}_k, \hat{B}_q^\dagger] &= \left[ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \hat{B}_n e^{-ik \cdot n}, \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m \hat{B}_m^\dagger e^{iq \cdot m} \right] = \frac{1}{N} \sum_{n,m} e^{-i(k \cdot n - q \cdot m)} [\hat{B}_n, \hat{B}_m^\dagger] \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n,m} e^{-i(k \cdot n - q \cdot m)} \delta_{n,m} = \frac{1}{N} \sum_n e^{-i(k-q) \cdot n} = \delta_{k,q}, \end{aligned} \quad (6.102)$$

где смо искористили дефиницију инверзне Фуријеове трансформације, (6.99), као и дефиницију Кронекеровог делта симбола, (6.41). Сличан поступак примењујемо и за

$$[\hat{B}_k, \hat{B}_q] = \left[ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \hat{B}_n e^{-ik \cdot n}, \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m \hat{B}_m e^{-iq \cdot m} \right] = \frac{1}{N} \sum_{n,m} e^{-i(k \cdot n + q \cdot m)} [\hat{B}_n, \hat{B}_m] = 0, \quad (6.103)$$

као и

$$[\hat{B}_k^\dagger, \hat{B}_q^\dagger] = \left[ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \hat{B}_n^\dagger e^{ik \cdot n}, \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m \hat{B}_m^\dagger e^{iq \cdot m} \right] = \frac{1}{N} \sum_{n,m} e^{i(k \cdot n + q \cdot m)} [\hat{B}_n^\dagger, \hat{B}_m^\dagger] = 0. \quad (6.104)$$

Дакле, бозонски оператори остају бозонски оператори приликом преласка из директног у реципрочан простор.

Покажимо сада да и фермионски оператори задржавају своју природу приликом преласка из директног у реципрочан простор. Знамо да у директном простору за фермионске операторе важе антикомутационе релације

$$\{\hat{A}_n, \hat{A}_m^\dagger\} = \delta_{n,m}, \quad \{\hat{A}_n, \hat{A}_m\} = 0, \quad \{\hat{A}_n^\dagger, \hat{A}_m^\dagger\} = 0, \quad (6.105)$$

те за Фуријеове слике ових оператора можемо писати

$$\begin{aligned} \{\hat{A}_k, \hat{A}_q^\dagger\} &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \hat{A}_n e^{-ik \cdot n}, \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m \hat{A}_m^\dagger e^{iq \cdot m} \right\} = \frac{1}{N} \sum_{n,m} e^{-i(k \cdot n - q \cdot m)} \{\hat{A}_n, \hat{A}_m^\dagger\} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{n,m} e^{-i(k \cdot n - q \cdot m)} \delta_{n,m} = \frac{1}{N} \sum_n e^{-i(k-q) \cdot n} = \delta_{k,q}. \end{aligned} \quad (6.106)$$

Такође је

$$\{\hat{A}_k, \hat{A}_q\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \hat{A}_n e^{-ik \cdot n}, \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m \hat{A}_m e^{-iq \cdot m} \right\} = \frac{1}{N} \sum_{n,m} e^{-i(k \cdot n + q \cdot m)} \{\hat{A}_n, \hat{A}_m\} = 0, \quad (6.107)$$

али и

$$\{\hat{A}_k^\dagger, \hat{A}_q^\dagger\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n \hat{A}_n^\dagger e^{ik \cdot n}, \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m \hat{A}_m^\dagger e^{iq \cdot m} \right\} = \frac{1}{N} \sum_{n,m} e^{i(k \cdot n + q \cdot m)} \{\hat{A}_n^\dagger, \hat{A}_m^\dagger\} = 0. \quad (6.108)$$

Закључујемо да и фермионски оператори остају фермионски оператори приликом преласка из директног у реципрочан простор. Другим речима, Фуријеова трансформација за бозонске и фермионске операторе је канонска и зато је погодно рачун спроводити управо са оваквим типом оператора. ■

**Пример 6.8.** Укупан средњи број попуњености дат је као  $\sum_n \langle \hat{C}_n^\dagger \hat{C}_n \rangle$ , при чему су  $\hat{C}_n$  и  $\hat{C}_n^\dagger$  бозонски или фермионски оператори анихилације и креације, респективно. Показати да се укупан средњи број попуњености може рачунати и сумирањем средњих бројева попуњености у импулсном простору.

**Решење.** Како бисмо решили овај проблем, прећи ћемо најпре у реципрочан простор, користећи релације (6.96):

$$\begin{aligned} \sum_n \langle \hat{C}_n^\dagger \hat{C}_n \rangle &= \sum_n \left\langle \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k \hat{C}_k^\dagger e^{-ik \cdot n} \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_q \hat{C}_q e^{iq \cdot n} \right\rangle \\ &= \sum_{k,q} \langle \hat{C}_k^\dagger \hat{C}_q \rangle \frac{1}{N} \sum_n e^{-i(k-q) \cdot n} = \sum_{k,q} \langle \hat{C}_k^\dagger \hat{C}_q \rangle \delta_{k,q} \\ &= \sum_k \langle \hat{C}_k^\dagger \hat{C}_k \rangle. \end{aligned} \quad (6.109)$$

Дакле, показали смо да је укупан средњи број попуњености могуће рачунати и у директном и у реципрчном простору

$$\sum_n \langle \hat{C}_n^\dagger \hat{C}_n \rangle = \sum_k \langle \hat{C}_k^\dagger \hat{C}_k \rangle. \quad (6.110)$$

Ово увелико олакшава бројне прорачуне у физици чврстог стања. Конкретно, услед трансляторне инваријантности кристала можемо писати

$$\sum_n \langle \hat{C}_n^\dagger \hat{C}_n \rangle = N \langle \hat{C}_n^\dagger \hat{C}_n \rangle, \quad (6.111)$$

те се средњи број попуњености на чвору  $\mathbf{n}$  може израчунати на основу израза

$$\langle \hat{C}_n^\dagger \hat{C}_n \rangle = \frac{1}{N} \sum_k \langle \hat{C}_k^\dagger \hat{C}_k \rangle. \quad (6.112)$$

Како је средњи број попуњености са таласним вектором  $\mathbf{k}$  обично познат с обзиром на то да знамо да се ради о фермионским или бозонским побуђењима, па тиме знамо и њихову статистику, на основу претходне релације може се одредити средњи број попуњености на чвору  $\mathbf{n}$ . Том приликом обично се са суме по таласним векторима прелази на интеграл, у складу са изразом (6.59). ■

**Пример 6.9.** Дискретна Фуријеова трансформација је у чврстом стању од велике користи и у контексту дијагонализације хамилтонијана, односно одређивања енергије елементарних ексцитација. Иако сама по себи често није довољна, свакако представља нужан корак у овој процедури. Некада, пак, и сама примена дискретне Фуријеове трансформације може директно дати тражену енергију. Такав случај је и са бозонским хамилтонијаном

$$\hat{H} = \Delta \sum_n \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_n + \sum_{n,m} M_{nm} \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_m, \quad (6.113)$$

у ком је  $\Delta$  енергија бозонских ексцитација на чвору  $\mathbf{n}$ , а  $M_{nm}$  је матрични елемент тунеловања са чвора на чвор. Одредити енергију ексцитација применом дискретне Фуријеове трансформације.

**Решење.** Први члан са десне стране израза (6.113) једноставно трансформишемо Фуријеовом трансформацијом

$$\begin{aligned} \Delta \sum_n \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_n &= \Delta \sum_{n,k,q} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{B}_k^\dagger e^{-ik \cdot n} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{B}_q e^{iq \cdot n} \\ &= \Delta \sum_{k,q} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_q \frac{1}{N} \sum_n e^{-i(k-q) \cdot n} \\ &= \Delta \sum_{k,q} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_q \delta_{k,q} = \Delta \sum_k \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k. \end{aligned} \quad (6.114)$$

У случају другог члана полазимо од Фуријеове трансформације оператора креације и анихилације

$$\begin{aligned} \sum_{n,m} M_{nm} \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_m &= \sum_{n,m,k,q} M(n-m) \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{B}_k^\dagger e^{-ik \cdot n} \frac{1}{\sqrt{N}} \hat{B}_q e^{iq \cdot m} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k,q} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_q \sum_{n,m} M(n-m) e^{-i(k \cdot n - q \cdot m)}. \end{aligned} \quad (6.115)$$

Имплементираћемо сада Фуријеову трансформацију матричног елемента  $M(\mathbf{n} - \mathbf{m})$  аналогно случају интеграла измене

$$M(\mathbf{n} - \mathbf{m}) = \frac{1}{N} \sum_{\tilde{\mathbf{k}}} \tilde{M}(\tilde{\mathbf{k}}) e^{i\tilde{\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{n} - \mathbf{m})}, \quad (6.116)$$

те релација (6.115) постаје

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} M_{\mathbf{n}\mathbf{m}} \hat{B}_{\mathbf{n}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{m}} &= \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{k}}} \tilde{M}(\tilde{\mathbf{k}}) \hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{q}} \sum_{\mathbf{n}, \mathbf{m}} e^{-i(\mathbf{k} - \tilde{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{n}} e^{i(\mathbf{q} - \tilde{\mathbf{k}}) \cdot \mathbf{m}} \\ &= \frac{1}{N^2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{q}, \tilde{\mathbf{k}}} \tilde{M}(\tilde{\mathbf{k}}) \hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{q}} N \delta_{\mathbf{k}, \tilde{\mathbf{k}}} N \delta_{\mathbf{q}, \tilde{\mathbf{k}}} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \tilde{M}(\mathbf{k}) \hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (6.117)$$

Дакле, хамилтонијан који је записан у реципрочном простору посредством Фуријеове трансформације гласи

$$\hat{H} = \sum_{\mathbf{k}} (\Delta + \tilde{M}(\mathbf{k})) \hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) \hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{k}} \quad (6.118)$$

и описује елементарне ексцитације енергије

$$E(\mathbf{k}) = \Delta + \tilde{M}(\mathbf{k}). \quad (6.119)$$

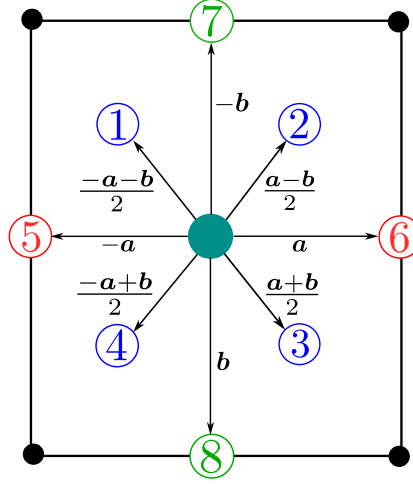
■

**Пример 6.10.** Преласком на бозонске операторе у Блоховој апроксимацији и Фуријеовом трансформацијом дијагонализовати  $XXZ$  хамилтонијан у спољашњем магнетном пољу  $\mathcal{H}$

$$\hat{H} = -\frac{I^x}{2} \sum_{\mathbf{n}, \lambda} \hat{S}_{\mathbf{n}}^- \hat{S}_{\mathbf{n}+\lambda}^+ - \frac{I^z}{2} \sum_{\mathbf{n}, \lambda} \hat{S}_{\mathbf{n}}^z \hat{S}_{\mathbf{n}+\lambda}^z - \mu \mathcal{H} \sum_{\mathbf{n}} \hat{S}_{\mathbf{n}}^z, \quad (6.120)$$

где су  $I^i$ ,  $i \in \{x, y, z\}$  интеграли измене дуж одговарајућих праваца, а оператори  $\hat{S}_{\mathbf{n}}^\pm = \hat{S}_{\mathbf{n}}^x \pm i \hat{S}_{\mathbf{n}}^y$  и  $\hat{S}_{\mathbf{n}}^z$  спински оператори на чвору  $\mathbf{n}$  у случају правоугаоне решетке са Сlike 6.10. Проблем решити у апроксимацији трећих суседа. Узети да је спин  $s = \frac{1}{2}$  и редукована Планкова константа  $\hbar = 1$ . Одредити дисперзију неинтерагујућих магнона.

**Решење.** На Слици 6.10 уочавамо да одабрани чвор има три типа суседа - четири прва суседа (представљени плавом бојом) у положајима  $\lambda_1 = \{\frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}, \frac{-\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}, \frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}, \frac{-\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}\}$ , два друга суседа (представљени црвеном бојом) на позицијама  $\lambda_2 = \{-\mathbf{a}, \mathbf{a}\}$ , као и два трећа суседа (представљени зеленом бојом) на позицијама  $\lambda_3 = \{-\mathbf{b}, \mathbf{b}\}$ . Самим тиме ће и интегрални измене  $I^x$  и  $I^z$  бити подељени у три подскупа, у зависности од врсте суседа. Наиме, за најближе суседе ће интегрални измене са одабраним чвором у координатном почетку бити  $I_1^x$  и  $I_1^z$ , за друге суседе  $I_2^x$  и  $I_2^z$ , а за треће суседе  $I_3^x$  и  $I_3^z$ . Прилагођен



Слика 6.10: Илустративни приказ првих, других и трећих суседа у случају приказане правоугаоне решетке. Најближи суседи одабраног чвора смештеног у координатни почетак обојени су плавом бојом, док су црвеном бојом обојени његови други суседи, а зеленом трећи.

структури решетке са Сlike 6.10, хамилтонијан (6.120) добија облик

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\frac{I_1^x}{2} \sum_{n,\lambda_1} \hat{S}_n^- \hat{S}_{n+\lambda_1}^+ - \frac{I_2^x}{2} \sum_{n,\lambda_2} \hat{S}_n^- \hat{S}_{n+\lambda_2}^+ - \frac{I_3^x}{2} \sum_{n,\lambda_3} \hat{S}_n^- \hat{S}_{n+\lambda_3}^+ \\ & - \frac{I_1^z}{2} \sum_{n,\lambda_1} \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+\lambda_1}^z - \frac{I_2^z}{2} \sum_{n,\lambda_2} \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+\lambda_2}^z - \frac{I_3^z}{2} \sum_{n,\lambda_3} \hat{S}_n^z \hat{S}_{n+\lambda_3}^z - \mu \mathcal{H} \sum_n \hat{S}_n^z. \end{aligned} \quad (6.121)$$

Како бисмо одредили тражену дисперзију у Блоховој апроксимацији, најпре је неопходно са спинских оператора прећи на бозонске у складу са трансформацијама

$$\hat{S}_n^- = \sqrt{2s} \hat{B}_n^\dagger = \hat{B}_n^\dagger, \quad \hat{S}_n^+ = \sqrt{2s} \hat{B}_n = \hat{B}_n, \quad \hat{S}_n^z = s - \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_n = \frac{1}{2} - \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_n, \quad (6.122)$$

где су  $B_n^\dagger$  и  $B_n$  бозонски оператори креације и анихилације магнона<sup>10</sup> на чвору  $n$ , респективно. Након унетих смена, хамилтонијан поприма облик

$$\begin{aligned} \hat{H} = & -\frac{I_1^x}{2} \sum_{n,\lambda_1} \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_{n+\lambda_1} - \frac{I_2^x}{2} \sum_{n,\lambda_2} \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_{n+\lambda_2} - \frac{I_3^x}{2} \sum_{n,\lambda_3} \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_{n+\lambda_3} \\ & - \frac{I_1^z}{2} \frac{4}{4} N + 2 \frac{I_1^z}{2} \frac{4}{2} \sum_n \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_n - \frac{I_2^z}{2} \frac{2}{4} N + 2 \frac{I_2^z}{2} \frac{2}{2} \sum_n \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_n - \frac{I_3^z}{2} \frac{2}{4} N + 2 \frac{I_3^z}{2} \frac{2}{2} \sum_n \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_n \\ & - \mu \mathcal{H} \frac{N}{2} + \mu \mathcal{H} \sum_n \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_n + \mathcal{O}(\hat{B}_n^\dagger \hat{B}_n \hat{B}_{n+\lambda}^\dagger \hat{B}_{n+\lambda}). \end{aligned} \quad (6.123)$$

<sup>10</sup>Магнони су елементарне спинске ексцитације. Овом приликом занемарена је међусобна интеракција спинских таласа, односно искључени су чланови са више од два бозонска оператора. Дакле, апроксимација даје резултате који су у сагласности са експериментима онда када је систем слабо побуђен. Више информација о бозонским репрезентацијама спинских оператора и Блоховој апроксимацији може се наћи у Додатку Е.

где је у обзир узет број суседа одређеног типа, као и чињеница да нас најпре занима понашање система неинтерагујућих магнона. Да бисмо дошли до коначног израза за дисперзију, искористићемо Фуријеове трансформације бозонских оператора (6.96). Најпре трансформисемо члан који одговара другим суседима:

$$\begin{aligned} \sum_{n,\lambda_2} \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_{n+\lambda_2} &= \frac{1}{N} \sum_{n,\lambda_2,k,q} \hat{B}_k^\dagger e^{-ik \cdot n} \hat{B}_q e^{iq \cdot (n+\lambda_2)} = \sum_{\lambda_2,k} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k e^{ik \cdot \lambda_2} \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k (e^{ik \cdot \mathbf{a}} + e^{-ik \cdot \mathbf{a}}) = \sum_{\mathbf{k}} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k (2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a})), \end{aligned} \quad (6.124)$$

а на аналоган начин се и члан који одговара трећим суседима добија у облику

$$\sum_{n,\lambda_3} \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_{n+\lambda_3} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k (2 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b})). \quad (6.125)$$

Члан који одговара најближим суседима је

$$\begin{aligned} \sum_{n,\lambda_1} \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_{n+\lambda_1} &= \frac{1}{N} \sum_{n,\lambda_1,k,q} \hat{B}_k^\dagger e^{-ik \cdot n} \hat{B}_q e^{iq \cdot (n+\lambda_1)} = \sum_{\lambda_1,k} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k e^{ik \cdot \lambda_1} = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k (e^{ik \cdot \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}} + e^{ik \cdot \frac{-\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}} + e^{ik \cdot \frac{\mathbf{a}-\mathbf{b}}{2}} + e^{-ik \cdot \frac{\mathbf{a}+\mathbf{b}}{2}}) = \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k \left( \left( e^{\frac{ik \cdot \mathbf{a}}{2}} + e^{\frac{-ik \cdot \mathbf{a}}{2}} \right) \left( e^{\frac{ik \cdot \mathbf{b}}{2}} + e^{\frac{-ik \cdot \mathbf{b}}{2}} \right) \right) \\ &= \sum_{\mathbf{k}} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k \left( 4 \cos\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{2}\right) \cos\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}}{2}\right) \right). \end{aligned} \quad (6.126)$$

Поред ових, неопходна нам је и Фуријеова трансформација израза

$$\sum_n \hat{B}_n^\dagger \hat{B}_n = \frac{1}{N} \sum_{n,k,q} \hat{B}_k^\dagger e^{-ik \cdot n} \hat{B}_q e^{iq \cdot n} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k. \quad (6.127)$$

Хамилтонијан представљен у реципрчном простору сад поприма облик

$$\begin{aligned} \hat{H} &= H'_0 - 2I_1^x \sum_{\mathbf{k}} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k \gamma_1(\mathbf{k}) - I_2^x \sum_{\mathbf{k}} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k \gamma_2(\mathbf{k}) - I_3^x \sum_{\mathbf{k}} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k \gamma_3(\mathbf{k}) \\ &\quad + 2I_1^z \sum_{\mathbf{k}} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + I_2^z \sum_{\mathbf{k}} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + I_3^z \sum_{\mathbf{k}} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k + \mu \mathcal{H} \sum_{\mathbf{k}} \hat{B}_k^\dagger \hat{B}_k, \end{aligned} \quad (6.128)$$

где је слободни члан дат изразом

$$H'_0 = -\frac{(2I_1^z + I_2^z + I_3^z)N}{4} - \frac{\mu \mathcal{H} N}{2}, \quad (6.129)$$

док су геометријски фактори

$$\gamma_1(\mathbf{k}) = \cos\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{2}\right) \cos\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}}{2}\right), \quad \gamma_2(\mathbf{k}) = \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}), \quad \gamma_3(\mathbf{k}) = \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}). \quad (6.130)$$

Дакле, хамилтонијан се може записати у форми

$$\hat{H} = H'_0 + \sum_{\mathbf{k}} E(\mathbf{k}) \hat{B}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{B}_{\mathbf{k}}, \quad (6.131)$$

где се уочава да је дисперзија неинтерагујућих магнона облика

$$E(\mathbf{k}) = 2I_1^x \left[ \frac{I_1^z}{I_1^x} - \cos\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{2}\right) \cos\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}}{2}\right) \right] + I_2^x \left[ \frac{I_2^z}{I_2^x} - \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) \right] + I_3^x \left[ \frac{I_3^z}{I_3^x} - \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}) \right] + \mu \mathcal{H}, \quad (6.132)$$

односно:

$$E(\mathbf{k}) = \Delta - 2I_1^x \cos\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}}{2}\right) \cos\left(\frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}}{2}\right) - I_2^x \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{a}) - I_3^x \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}), \quad (6.133)$$

при чему је

$$\Delta = 2I_1^z + I_2^z + I_3^z + \mu \mathcal{H}. \quad (6.134)$$

За више информација о могућностима коришћења анизотропног Хајзенберговог хамилтонијана у спољашњем магнетном пољу (6.120) и рачуна представљеног у склопу овог примера за анализу екситонске дисперзије у различитим ароматичним угљоводонцима, попут пентацена, тетрацена, пицена и хризена, читалац се упућује на радове [Gombar, S., Mali, P., Pantić, M., Pavkov – Hrvojević, M.V., Radošević, S.M. (2018)] и [Rutonjski, M., Radošević, S., Mali, P., Gombar, S., Pantić, M., Pavkov-Hrvojević, M. (2020)].

■



# Прилог



# Додатак А

## Интегрални идентитети

У овом додатку наводимо детаљније неке релације које се често користе у задацима и укључују Поасонов (или Гаусов) интеграл, формулу за замену редоследа интеграције код дводимензионих интеграла и правило за диференцирање интеграла по параметру.

### А.1 Поасонов интеграл

Поасонов, или Гаусов интеграл, је дат са

$$I(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy \quad (\text{A.1})$$

и не може се директно решити јер нема примитивну функцију. Ипак, могуће је добити егзактно решење и без коришћења примитивне функције. Множењем две једнакости које дефинишу  $I(\alpha)$  добија се

$$I^2(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy. \quad (\text{A.2})$$

Преласком у поларне координате добијамо

$$I^2(\alpha) = \int_0^{\infty} \rho e^{-\alpha \rho^2} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi}{\alpha}. \quad (\text{A.3})$$

Одатле је  $I(\alpha) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ .

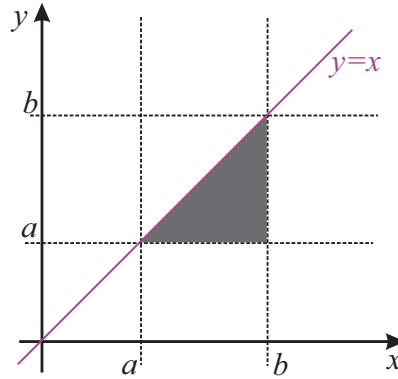
### А.2 Замена редоследа интеграције

Код двоструких интеграла је често погодно користити следећу релацију

$$\int_a^b dx \int_a^x dy f(x, y) = \int_a^b dy \int_y^b dx f(x, y). \quad (\text{A.4})$$

Валидност замене редоследа интеграције се директно види са Слике [А.1](#), при чему су  $a, b \in \mathbb{R}$ . Из [\(A.4\)](#) се види да важи и

$$\int_0^x dx' \int_0^{x'} dt f(t) = \int_0^x dt f(t) \int_t^x dx' = \int_0^x dt (x-t) f(t). \quad (\text{A.5})$$



Слика А.1: Област интеграције у једнакости (А.4).

Релација (А.5) се користи на више места у Поглављу 2.

### А.3 Диференцирање интеграла по параметру

**Тврђење А.1.** За дефинисано  $J(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dt K(x, t)$  важи

$$\frac{dJ(x)}{dx} = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dt \frac{\partial K(x, t)}{\partial x} + \beta'(x)K[x, \beta(x)] - \alpha'(x)K[x, \alpha(x)]. \quad (\text{А.6})$$

*Доказ.* Интерпретирамо ли задати интеграл као  $J(x) \equiv J(x, \alpha(x), \beta(x))$ , можемо користити правило за извод сложене функције. Тада је

$$\frac{dJ}{dx} = \frac{\partial J}{\partial x} + \frac{\partial J}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial J}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial x}, \quad (\text{А.7})$$

где су

$$\frac{\partial J}{\partial x} = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dt \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}, \quad (\text{А.8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dt K(x, t) = \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \tilde{K}(x, t) \Big|_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \left[ \tilde{K}(x, \beta(x)) - \tilde{K}(x, \alpha(x)) \right] = -K(x, \alpha(x)), \end{aligned} \quad (\text{А.9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \beta} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} dt K(x, t) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \tilde{K}(x, t) \Big|_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left[ \tilde{K}(x, \beta(x)) - \tilde{K}(x, \alpha(x)) \right] = K(x, \beta(x)). \end{aligned} \quad (\text{А.10})$$

Заменом (А.8), (А.9) и (А.10) у (А.7), директно добијамо релацију (А.6). ■

## Додатак Б

# Диракова делта функција и њене репрезентације

Делта функцију је Дирак дефинисао са

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0, \end{cases} \quad (\text{Б.1})$$

уз додатни услов

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \quad (\text{Б.2})$$

Такође важи да је

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0), \quad (\text{Б.3})$$

тако да делта функција укида интеграл и важи и још општије

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} f(x_0), & x_0 \in [a, b] \\ 0, & x_0 \notin [a, b]. \end{cases} \quad (\text{Б.4})$$

Од особина делта функције навешћемо

$$\delta(-x) = \delta(x), \quad (\text{Б.5})$$

$$x\delta(x) = 0, \quad (\text{Б.6})$$

$$\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x), \quad (\text{Б.7})$$

$$\delta[f(x)] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{|f'(x_i)|} \delta(x - x_i), \quad (\text{Б.8})$$

где су  $x_i$  просте нуле функције  $f(x)$  и важи  $f'(x_i) \neq 0$ .

Ако је  $f(x)$  произвољна  $n$ -пута диференцијабилна функција на интервалу  $[a, b]$ :

$$\int_a^b f(x) \delta^{(n)}(x - x_0) dx = \begin{cases} (-1)^n f^{(n)}(x_0), & x_0 \in [a, b] \\ 0, & x_0 \notin [a, b]. \end{cases} \quad (\text{Б.9})$$

Интегрална репрезентација делта функције се користи у свим областима теоријске физике

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk. \quad (\text{Б.10})$$

Тригонометријска репрезентација делта функције

$$\delta(x - x') = \frac{1}{\pi} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\sin(\beta(x - x'))}{x - x'}, \quad (\text{Б.11})$$

је кроз текст уџбеника коришћена на више места. Њу добијамо из интегралне репрезентације на следећи начин

$$\begin{aligned} \delta(x - x') &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x-x')} dk = \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \int_{-\beta}^{\beta} e^{ik(x-x')} dk = \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \left. \frac{e^{ik(x-x')}}{i(x-x')} \right|_{-\beta}^{\beta} \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{e^{i\beta(x-x')} - e^{-i\beta(x-x')}}{i(x-x')} = \frac{1}{\pi} \lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\sin(\beta(x-x'))}{x-x'}. \end{aligned} \quad (\text{Б.12})$$

Тродимензиона делта функција у Декартовим координатама је производ три једнодимензионе делта функције

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z'), \quad (\text{Б.13})$$

док у цилиндричним и сферним координатама има следећи облик

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho') \delta(\varphi - \varphi') \delta(z - z'), \quad (\text{Б.14})$$

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r') \delta(\varphi - \varphi') \delta(\theta - \theta'). \quad (\text{Б.15})$$

Тродимензиона интегрална репрезентација делта функције

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')} d^3 \mathbf{k}. \quad (\text{Б.16})$$

# Додатак В

## Особине комутатора

Ако су  $A, B, C, \dots$ , а  $\alpha, \beta, \gamma, \dots$  комплексни бројеви, за комутатор оператора дефинисан са  $[A, B] = AB - BA$  важе следеће особине:

$$[A, B] = -[B, A], \quad (\text{B.1})$$

$$[\alpha A, B] = \alpha[A, B], \quad (\text{B.2})$$

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C], \quad (\text{B.3})$$

$$[A + B, C] = [A, C] + [B, C], \quad (\text{B.4})$$

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C, \quad (\text{B.5})$$

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B, \quad (\text{B.6})$$

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0. \quad (\text{B.7})$$

Важна класа оператора у квантној механици су нормални оператори, који комутирају са својим адјунгованим оператором

$$[A, A^\dagger] = 0. \quad (\text{B.8})$$

У нормалне операторе спадају ермитски, унитарни и косоермитски оператори. Комутатор два ермитска оператора је косоермитски оператор. Коришћењем основних особина комутатора може се показати да важи

$$[A, B^n] = \sum_{k=0}^{n-1} B^{n-(k+1)} [A, B] B^k, \quad (\text{B.9})$$

где је  $n$  природни број. Такође, за произвољне операторе  $A$  и  $B$  важи тзв. Бејкер-Кембел-Хаусдорфова (Baker – Campbell – Hausdorff, BCH) формула

$$e^A B e^{-A} = B + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \underbrace{[A, [A, \dots [A, B]]]}_{n \text{ пута}}. \quad (\text{B.10})$$

## Додатак Г

# Таблица основних Лапласових трансформација

$$\mathcal{L}[1] = \frac{1}{p}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad (\Gamma.1)$$

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{p-a}, \quad \operatorname{Re}(p) > \operatorname{Re}(a), \quad (\Gamma.2)$$

$$\mathcal{L}[\cos(at)] = \frac{p}{p^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (\Gamma.3)$$

$$\mathcal{L}[\sin(at)] = \frac{a}{p^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (\Gamma.4)$$

$$\mathcal{L}[t \sin(at)] = \frac{2ap}{(p^2 + a^2)^2}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (\Gamma.5)$$

$$\mathcal{L}[t \cos(at)] = \frac{p^2 - a^2}{(p^2 + a^2)^2}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (\Gamma.6)$$

$$\mathcal{L}[\sin(at + b)] = \frac{a \cos b + p \sin b}{p^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (\Gamma.7)$$

$$\mathcal{L}[\cos(at + b)] = \frac{p \cos b - a \sin b}{p^2 + a^2}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad a, b \in \mathbb{R}, \quad (\Gamma.8)$$

$$\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (\Gamma.9)$$

$$\mathcal{L}[\sqrt{t}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2p^{3/2}}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad (\text{Г.10})$$

$$\mathcal{L}[t^\alpha] = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{p^{\alpha+1}}, \quad \operatorname{Re}(p) > 0, \quad \alpha > -1, \quad (\text{Г.11})$$

$$\mathcal{L}[\sinh at] = \frac{a}{p^2 - a^2}, \quad \operatorname{Re}(p) > |\operatorname{Re}(a)|, \quad (\text{Г.12})$$

$$\mathcal{L}[\cosh at] = \frac{p}{p^2 - a^2}, \quad \operatorname{Re}(p) > |\operatorname{Re}(a)|. \quad (\text{Г.13})$$

# Додатак Д

## Специјалне функције

Елементарне функције нису довољне за опис проблема који се јављају у физици и инжењерству. Термин специјалне функције је дат за оне функције које имају честу примену у поменутих областима, а нису елементарне. То су најчешће партикуларна решења диференцијалних једначина другог реда.

### Д.1 Ермитови полиноми

Ермитови полиноми се обично означавају са  $H_n(\xi)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ . Полиноми степена  $n$  су или парне или непарне функције:

$$H_n(-\xi) = (-1)^n H_n(\xi). \quad (\text{Д.1})$$

Ермит-Веберова диференцијална једначина:

$$\frac{d^2 H_n(\xi)}{d\xi^2} - 2\xi \frac{dH_n(\xi)}{d\xi} + 2nH_n = 0. \quad (\text{Д.2})$$

Родригова формула:

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2} \frac{d^n}{d\xi^n} (e^{-\xi^2}). \quad (\text{Д.3})$$

Рекурентне релације:

$$\frac{dH_n}{d\xi} = 2nH_{n-1}, \quad \xi H_n = nH_{n-1} + \frac{1}{2}H_{n+1}. \quad (\text{Д.4})$$

Нормирање:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\xi e^{-\xi^2} H_n(\xi) H_m(\xi) = 2^n n! \sqrt{\pi} \delta_{nm}. \quad (\text{Д.5})$$

Функција генератриса (изводница):

$$S(\xi, t) = e^{\xi^2 - (t-\xi)^2} = e^{-t^2 + 2\xi t} = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(\xi) \frac{t^n}{n!}. \quad (\text{Д.6})$$

Члан са највишим степеном:

$$H_n(\xi) = \dots + 2^n \xi^n. \quad (\text{Д.7})$$

Ермитове функције:

$$\psi_n(\xi) = N_n e^{-\xi^2/2} H_n(\xi), \quad N_n = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{\pi} 2^n n!}}. \quad (\text{Д.8})$$

## Д.2 Лежандрови полиноми

Лежандрови полиноми се обично означавају са  $P_l(x)$ ,  $l = 0, 1, 2, \dots$   
Полиноми степена  $l$  су или парне или непарне функције:

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x). \quad (\text{Д.9})$$

Лежандрова диференцијална једначина:

$$(1-x^2) \frac{d^2 P_l}{dx^2} - 2x \frac{dP_l}{dx} + l(l+1)P_l = 0, \quad (\text{Д.10})$$

или

$$\frac{d}{dx} \left[ (1-x^2) \frac{dP_l}{dx} \right] + l(l+1)P_l = 0. \quad (\text{Д.11})$$

Родригова формула:

$$P_l(x) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (1-x^2)^l. \quad (\text{Д.12})$$

Рекурентне релације:

$$(l+1)P_{l+1} - (2l+1)xP_l + lP_{l-1} = 0, \quad (\text{Д.13})$$

$$lP_l = x \frac{dP_l}{dx} - \frac{dP_{l-1}}{dx}. \quad (\text{Д.14})$$

Нормирање:

$$\int_{-1}^1 dx P_l(x) P_k(x) = \frac{2}{2k+1} \delta_{kl}. \quad (\text{Д.15})$$

Функција генератриса (изводница):

$$G(x, t) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2xt + t^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l, \quad |t| < 1, |x| \leq 1. \quad (\text{Д.16})$$

Придружена Лежандрова једначина:

$$\frac{d}{dx} \left[ (1 - x^2) \frac{d}{dx} P_l^{[m]} \right] + \left[ l(l + 1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] P_l^{[m]} = 0. \quad (\text{Д.17})$$

Придружена Лежандрова функција:

$$P_l^{[m]} = (1 - x^2)^{\frac{|m|}{2}} \frac{d^{|m|}}{dx^{|m|}} P_l(x). \quad (\text{Д.18})$$

Нормирање:

$$\int_{-1}^1 dx P_l^{[m]}(x) P_k^{[m]}(x) = \frac{2}{2l + 1} \frac{(l + |m|)!}{(l - |m|)!} \delta_{lk}. \quad (\text{Д.19})$$

Сферни хармоници:

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = (-1)^m \sqrt{\frac{2l + 1}{2} \frac{(l - m)!}{(l + m)!}} P_l^m(\cos \theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{im\varphi}, \quad m > 0, \quad (\text{Д.20})$$

$$Y_l^{-m}(\theta, \varphi) = (-1)^m Y_l^{m*}(\theta, \varphi), \quad m > 0. \quad (\text{Д.21})$$

## Д.3 Лагерови полиноми

Лагерови полиноми се обично означавају са  $L_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$   
Лагерова диференцијална једначина:

$$x \frac{d^2 L_n}{dx^2} + (1 - x) \frac{dL_n}{dx} + nL_n = 0. \quad (\text{Д.22})$$

Родригова формула:

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}). \quad (\text{Д.23})$$

Рекурентне релације:

$$L_{n+1} + (x - 2n - 1)L_n + n^2 L_{n-1} = 0, \quad (\text{Д.24})$$

$$nL_{n-1} + \frac{dL_n}{dx} - n\frac{dL_{n-1}}{dx} = 0. \quad (\text{Д.25})$$

Нормирање:

$$\int_0^\infty e^{-x} L_n(x) L_m(x) dx = (n!)^2 \delta_{nm}. \quad (\text{Д.26})$$

Функција генератриса (изводница):

$$f(x, s) = \frac{1}{1-s} e^{-\frac{xs}{1-s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_n(x)}{n!} s^n. \quad (\text{Д.27})$$

Придружена (асоцирана) Лагерова једначина:

$$x \frac{d^2 L_\beta^\gamma}{dx^2} + (\gamma + 1 - x) \frac{dL_\beta^\gamma}{dx} + (\beta - \gamma) L_\beta^\gamma = 0. \quad (\text{Д.28})$$

Придружени Лагеров полином

$$L_\beta^\gamma = \frac{d^\gamma L_\beta}{dx^\gamma}. \quad (\text{Д.29})$$

Таласна функција електрона у атому водониковог типа:

$$\Psi_{n,l,m}(r, \theta, \varphi) = N_{n,l} R_{n,l}(r) Y_l^m, \quad (\text{Д.30})$$

$$n = 1, 2, 3, \dots; \quad l = 0, 1, 2, \dots, n-1; \quad -l \leq m \leq l.$$

Нормирање:

$$\int r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi |\Psi_{n,m,l}|^2 = 1, \quad (\text{Д.31})$$

$$N_{n,l} = \sqrt{\left(\frac{2Z}{na_0}\right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}}, \quad (\text{Д.32})$$

$$R_{n,l}(x) = x^l e^{-\frac{x}{2}} L_{n+l}^{2l+1}(x), \quad (\text{Д.33})$$

$$x = \frac{2Zr}{na_0},$$

$$a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e e^2} 4\pi\epsilon_0.$$

## Д.4 Беселове функције

Беселова диференцијална једначина:

$$x^2 \frac{d^2 J_p}{dx^2} + x \frac{dJ_p}{dx} + (x^2 - p^2)J_p(x) = 0. \quad (\text{Д.34})$$

Функција генератриса (изводница):

$$G(x, t) = e^{\frac{x}{2}(t - \frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n. \quad (\text{Д.35})$$

Рекурентне релације:

$$xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x) = 2nJ_n(x), \quad (\text{Д.36})$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x). \quad (\text{Д.37})$$

## Д.5 Чебишевљеви полиноми

Чебишевљеви полиноми се обично означавају са  $T_n(x)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$   
Чебишевљева диференцијална једначина:

$$(1 - x^2) \frac{d^2 T_n}{dx^2} - x \frac{dT_n}{dx} + n^2 T_n(x) = 0. \quad (\text{Д.38})$$

Родригова формула:

$$T_n(x) = \frac{(-2)^n n!}{(2n)!} \sqrt{1 - x^2} \frac{d^n}{dx^n} (1 - x^2)^{n - \frac{1}{2}}. \quad (\text{Д.39})$$

Рекурентна релација:

$$T_{n+m}(x) + T_{n-m}(x) = 2T_n(x)T_m(x). \quad (\text{Д.40})$$

Нормирање:

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ \frac{\pi}{2}, & n = m \neq 0 \\ \pi, & n = m = 0 \end{cases} \quad (\text{Д.41})$$

Функција генератриса (изводница):

$$\frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n. \quad (\text{Д.42})$$

## Д.6 Уопштене хипергеометријске функције

Уопштена хипергеометријска функција дефинисана је са

$${}_pF_q(a_1, a_2, \dots, a_p; b_1, b_2, \dots, b_q; x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \dots (a_p)_n}{n! (b_1)_n \dots (b_q)_n} x^n, \quad (\text{Д.43})$$

где су  $(a_i)_n = \frac{\Gamma(a_i+n)}{\Gamma(a_i)}$ ,  $(b_i)_n = \frac{\Gamma(b_i+n)}{\Gamma(b_i)}$  Похамерови симболи. Показује се да ред Д.43 за  $p \leq q$  конвергира за коначне вредности  $x$ , осим за неке целобројне вредности за које није дефинисан. За  $p = q + 1$  ред конвергира за  $|x| < 1$ , а за  $p > q + 1$  дивергира за свако  $x \neq 0$ .

## Додатак Ђ

# Квантни ЛХО у Хајзенберговој матричној механици

У Хајзенберговој матричној механици мора се радити са бесконачним матрицама. Узмимо пример квантног ЛХО-а у овом случају. Нормирани својствени вектори оператора енергије су дати са

$$|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle, \dots$$

и користи се стандардни базис

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad |2\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \dots$$

односно уопштено

$$|n\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix},$$

где се јединица налази на  $n$ -том месту, при чему бројање почиње од 0. Ово је ортонормирани базис, јер важи да је  $\langle n|m\rangle = \delta_{nm}$ . Оператори анихилације  $b$  и креације  $b^\dagger$  делују на базисна стања оператора енергије на следећи начин:

$$b|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad b^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$$

Матрице ових оператора у датом базису су

$$b = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix},$$

$$b^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \sqrt{3} & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Оператор  $b$  због тога често називамо десно-квазидијагоналном, а оператор  $b^\dagger$  лево-квазидијагоналном матрицом. Деловањем

$$bb^\dagger|n\rangle = b\sqrt{n+1}|n+1\rangle = \sqrt{n+1}b|n+1\rangle = (n+1)|n\rangle,$$

$$b^\dagger b|n\rangle = b^\dagger\sqrt{n}|n-1\rangle = \sqrt{n}b^\dagger|n-1\rangle = n|n\rangle$$

и одузимањем једнакости добија се

$$[b, b^\dagger]|n\rangle = |n\rangle,$$

одакле је

$$[b, b^\dagger] = I,$$

па је

$$\text{Tr}([b, b^\dagger]) = \infty.$$

# Додатак Е

## Бозонске репрезентације спинских оператора

У настојању да се реше бројни проблеми у теоријској физици кондензованог стања често се прибегава некој од бозонских или фермионских репрезентација спинских оператора. Осим тога што су системи неинтерагујућих и интерагујућих бозонских и фермионских честица добро изучени и познате су методе за њихово решавање, посебна погодност оваквог решавања спинских проблема лежи и у томе да су, за разлику од Фуријеове трансформације спинских оператора која не одржава њихове комутационе релације, Фуријеове трансформације бозонских и фермионских оператора канонске. Дакле, преласком из директног у реципрочан простор бозонски и фермионски оператори задржавају своју природу, тј. њихове комутационе/антикомутационе релације су одржане, као што смо видели у Поглављу 6. Ми ћемо се у наставку усредсредити на бозонске репрезентације спинских оператора. Без губитка на општости, у наставку ћемо узети да је редукована Планкова константа  $\hbar = 1$ .

Нека произвољна кристална решетка поседује  $N$  чворова, при чему је сваком чвору решетке  $l$  придружен спински оператор  $\hat{S}_l$ . На сваком чвору оператори  $z$ -пројекције спина и квадрата спина комутирају, тако да се може наћи њихов заједнички својствени базис  $\{|s, m_s\rangle_l\}$ , при чему су својствени проблеми одговарајућих оператора

$$\hat{S}_l^z |s, m_s\rangle_l = m_s |s, m_s\rangle_l, \quad \hat{S}_l^2 |s, m_s\rangle_l = s(s+1) |s, m_s\rangle_l. \quad (\text{E.1})$$

Вектори  $\{|s, m_s\rangle_l\}$  чине базис у  $(2s+1)$ -димензионом Хилбертовом простору, а Хилбертов простор читавог система од  $N$  спинова дат је као директан производ Хилбертових простора појединачних спинова

$$\mathcal{H}_S = \mathcal{H}_{S_1} \otimes \mathcal{H}_{S_2} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{S_N}. \quad (\text{E.2})$$

За операторе креације  $\hat{B}_l^\dagger$  и анихилације  $\hat{B}_l$  бозонских честица на чвору  $l$ , који делују у бозонском Хилбертовом простору

$$\mathcal{H}_B = \mathcal{H}_{B_1} \otimes \mathcal{H}_{B_2} \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{B_N}, \quad (\text{E.3})$$

при чему је базис у сваком од потпростора изграђен од својствених вектора оператора  $\hat{n}_l = \hat{B}_l^\dagger \hat{B}_l$ ,  $\{|n\rangle_l\}$ , важе комутационе релације

$$[\hat{B}_l, \hat{B}_m^\dagger] = \delta_{l,m}, \quad [\hat{B}_l, \hat{B}_m] = [\hat{B}_l^\dagger, \hat{B}_m^\dagger] = 0. \quad (\text{E.4})$$

Идеја бозонских репрезентација спинских оператора састоји се у томе да се дефинишу такве функције бозонских оператора да, када делују у бозонском Хилбертовом простору  $\mathcal{H}_B$ , одржавају комутационе релације спинских оператора, али и дају исте средње вредности.

Једна од репрезентација које услов за одржавање комутационих релација спинских оператора одржавају у потпуности, а услов за средње вредности уз одређена ограничења, јесте ермитска Холштајн-Примаковљева репрезентација

$$\hat{S}_l^+ = \sqrt{2s} \sqrt{1 - \frac{\hat{B}_l^\dagger \hat{B}_l}{2s}} \hat{B}_l, \quad \hat{S}_l^- = \sqrt{2s} \hat{B}_l^\dagger \sqrt{1 - \frac{\hat{B}_l^\dagger \hat{B}_l}{2s}} = (\hat{S}_l^+)^{\dagger}, \quad \hat{S}_l^z = s - \hat{B}_l^\dagger \hat{B}_l. \quad (\text{E.5})$$

Можемо уочити да су физичка стања наметнута ограничењем својствене вредности оператора  $\hat{n}_l$  у облику  $n_l < 2s$ , док су у случају неиспуњења тог услова стања нефизичка. Посебан проблем приликом рачунања ствара квадратни корен у изразима (E.5). Наиме, коректни резултати могу се добити само у случају када се он користи, али је често неопходно квадратни корен развити у Тејлоров ред и задржати се на неколико првих чланова развоја. У случају када се квадратни корен апроксимира најнижим чланом развоја

$$\sqrt{1 - \frac{\hat{B}_l^\dagger \hat{B}_l}{2s}} \approx 1, \quad (\text{E.6})$$

долазимо до Блохове апроксимације

$$\hat{S}_l^- = \sqrt{2s} \hat{B}_l^\dagger, \quad \hat{S}_l^+ = \sqrt{2s} \hat{B}_l, \quad \hat{S}_l^z = s - \hat{B}_l^\dagger \hat{B}_l. \quad (\text{E.7})$$

Међутим, овакав одабир само апроксимативно одржава спинске комутационе релације, те не може бити речи о репрезентацији у њеном пуном значењу.

Најпознатија неермитска бозонска репрезентација спинских оператора је репрезентација Дајсон-Маљејева

$$\hat{S}_l^+ = \sqrt{2s} \left( 1 - \frac{\hat{B}_l^\dagger \hat{B}_l}{2s} \right) \hat{B}_l, \quad \hat{S}_l^- = \sqrt{2s} \hat{B}_l^\dagger, \quad \hat{S}_l^z = s - \hat{B}_l^\dagger \hat{B}_l. \quad (\text{E.8})$$

У овом случају нема проблема са нефизичким стањима и развојем квадратног корена у ред, при чему се нарушава природа спинских оператора.

Поред ових, у употреби су и друге бозонске репрезентације спинских оператора, попут Агранович-Тошићеве и Швингерове.

# Литература

- Abraham, R., Marsden, J.E. (1980). *Foundations of Mechanics – second edition*. Addison–Wesley.
- Saunders, D.J. (1980). *The Geometry of Jet Bundles*. Cambridge University Press.
- Барјахтар, В. Г., Криворучко, В. Н., Јаблонски, Д. А. (1984). *Гринове функције у теорији мајнејизма*. Наукова думка.
- Бертолино М. (2010). *Диференцијалне једначине*. Завод за уџбенике, Београд.
- Чолић, М. (2020). *Математика за студенте физике*. Природно-математички факултет, Нови Сад.
- Дамњановић, М. (2000). *О симетрији у квантној нерелативистичкој физици*. Физички факултет, Универзитет у Београду.
- Дамњановић, М. (2016). *Групе и Хилбертови простори*. Физички факултет, Универзитет у Београду.
- Долинка, И. (2018). *Предавања из теорије група*. Природно-математички факултет, Нови Сад.
- Фајнман, Р. (1999). *Карактер физичког закона*. Клуб Никола Тесла.
- Филиповић, Д. (2019). *Уопштене функције*. Академска мисао, Београд.
- Груловић, З. М. (1997). *Основи теорије група*. Институт за математику у Новом Саду.
- Guerrero, J., Perez, J. M. (2003). *Quantization of the Linearized Kepler Problem* – in GROUP 24; pp 545 – 548. CRC Press.
- Хербут, Ф. (1999). *Квантна механика за истраживаче*. Природно-математички факултет, Београд.
- Игњатовић, С. (2015). *Математичка физика 3*. Природно-математички факултет, Бања Лука.
- Јанковић, С., Кнежевић-Миљановић, Ј. (2007). *Диференцијалне једначине II*. Математички факултет, Београд.
- Кумерички, К. (2012). *Групе, симетрије и тензори у физици*. Универзитет у Загребу.

- Курепа, С., Краљевић, Х. (1986). *Функције комплексне варијабле*. Техничка књига, Загреб.
- Abels, H. (2011). *Pseudodifferential and Singular Integral Operators : an Introduction with Applications*. Walter de Gruyter.
- Arfken, G.B., Weber H.J., Harris F.E. (2013). *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press.
- Ashcroft, N.W., Mermin, N.D. (1976). *Solid State Physics*. Brooks Cole.
- Auerbach, A. (2012). *Interacting Electrons and Quantum Magnetism*. Springer.
- Awad, M., Koepf, W., Mohammed, A., Rakha, M., Rathie, A. (2021). A Study of Extensions of Classical Summation Theorems for the Series  ${}_3F_2$  and  ${}_4F_3$  with Applications. *Results in Mathematics*, 76(2), 65.
- Born, M., von Kármán, T. (1912). Über Schwingungen in Raumgittern. *Physikalische Zeitschrift*, **13**, 297–309.
- Brezis, H. (2011). *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer.
- Butkov, E. (1968). *Mathematical Physics*. Addison Wesley publishing company.
- Cohen-Tannoudji, C., Diu, B., Laloë, F. (1977). *Quantum Mechanics, Vol. 1*. Paris: Hermann and John Wiley & Sons.
- Eichmann, G., Williams, R., Alkofer, R., Vujanovic, M. (2014). [Three – gluon vertex in Landau gauge](#). *Physical Review D*, **49**, 105014.
- Gombar, S., Mali, P., Pantić, M., Pavkov – Hrvojević, M.V., Radošević, S.M. (2018). [Dynamics of Frenkel Excitons in Pentacene](#). *Materials*, **11**(11).
- Hall, B. (2015). *Lie Groups, Lie Algebras and Representations*. Springer.
- Hamermesh, M. (2012). *Group Theory and its Application to Physical Problems*. Courier Corporation.
- Isaacs, I. M. (1994). *Character Theory of Finite Groups*. Courier Corporation.
- James, G. D.; Liebeck, M. W. (2001). *Representations and Characters of Groups*. Cambridge University Press.
- Kittel, C. (1987). *Quantum theory of solids*. John Wiley and Sons.
- Krasnov, M., Kiselev, A., Makarenko, G. (1971). *Problems and Exercises in Integral Equations*. Mir Publishers Moscow.
- Landau, L., Lifshitz, E. (1977). *Quantum Mechanics : Non-Relativistic Theory*. Pergamon Press.

- Liboff, R. (2012). *Primer for Point and Space Groups*. Springer Science & Business Media.
- Mathews, J., Walker, R. (1970). *Mathematical Methods of Physics*. New York: W.A. Benjamin, Inc..
- Mikusiński, J. (1978). *The Bochner Integral*. Chapter 3, 15–22.
- Nolting, W., Ramakanth, A. (2009). *Quantum Theory of Magnetism*. Springer.
- Olver, P. (2000). *Application of Lie Groups to Differential Equations*. Springer.
- Stone M., Goldbart, P. (2009). *Mathematics for Physics*. Cambridge University Press.
- Tyablikov, S. V. (1967). *Methods in the Quantum Theory of Magnetism*. Springer.
- Weinberg, S. (2008). *The Quantum Theory of Fields, Vol. I – Foundations*. Cambridge University Press.
- Weinberg, S. (2012). *Lectures on Quantum Mechanics*. Cambridge University Press.
- Милановић, В., Радовановић, Ј., Вуковић, Н. (2025). *Квантна механика I гео, II допуњено издање*. Универзитет у Београду – Електротехнички факултет, Београд.
- Милић, Б. (1997). *Њуџенова механика*. Студентски трг.
- Митриновић, Д. (1980). *Предавања о редовима*. Грађевинска књига, Београд.
- Митриновић, Д., Кечкић, Ј. (1994). *Једначине математичке физике*. Наука: Београд, Србија.
- Мушицки, Ђ., Милић, Б. (1975). *Математичке основе теоријске физике са збирком решених задатака*. Научна књига, Београд.
- Мушицки, Ђ. (1987). *Увод у теоријску физику – теоријска механика*. Природно математички факултет, Београд.
- Николић-Деспотовић, Д. (1989). *Математика 3 са решеним примерима*. Институт за математику, Нови Сад.
- Николић-Деспотовић, Д., Будинчевић, М. (1998). *Збирка решених задатака из комплексне анализе*. Универзитет у Новом Саду, Природно-математички факултет, Нови Сад.
- Пантић, М. (2024). *Квантна механика, том I и том II*. ПМФ Нови Сад.
- Паунић, Ђ. (2009). *Функционалне једначине класичних математичких функција*. Завод за уџбенике.
- Павков-Хрвојевић, М., Шкрињар, М., Капор, Д., Крстоношић, П. (2007). *Збирка задатака по одабраним пољављима сјајистичке физике*. Универзитет у Новом Саду.
- Радошевић, С. (2022). *Методи теорије поља у сјајистичкој физици*. ПМФ Нови Сад.

- Радосевић, С., Мали, П. (2020). *Збирка задатака из математичке физике – грубо проширено издање*. ПМФ Нови Сад.
- Aomoto, K. Kita, M. (2011). *Theory of hypergeometric functions*. Springer.
- Arnol'd, V. I. (2013). *Mathematical Methods of Classical Mechanics*. Springer.
- Griffiths, D.J. Schroeter, D.F. (2018). *Introduction to quantum mechanics*. Cambridge University Press.
- Hall, B. C. (2013). *Quantum theory for mathematicians*. Springer.
- Hassani, S. (2013). *Mathematical physics : a modern introduction to its foundations*. Springer Science & Business Media.
- Nikolsky, S.M. (1981). *A course of mathematical analysis , Volume 2*. MIR Publishers Moscow.
- Osgood, B. (2007). *Lecture Notes for The Fourier Transform and its Applications*. Stanford University.
- Polyanin, A.D., Mahzhirov, A.V. (2008). *Handbook of Integral Equations*. Chapman and Hall/CRC.
- Radošević, S., Gombar, S., Rutonjski, M., Mali, P., Pantić, M., Pavkov-Hrvojević, M. (2026). *Hamiltonian dynamics of classical spins*. *Physics*, **8**, 23.
- Rutonjski, M., Radošević, S., Mali, P., Gombar, S., Pantić, M., Pavkov-Hrvojević, M. (2020). *Exciton dynamics in different aromatic hydrocarbon systems*. *Chinese Physics B*, **29**, 107103.
- Shcherbacov, V. (2017). *Elements of Quasigroup Theory and Applications*. Taylor and Francis group.
- Zee, A. (2016). *Group theory in a nutshell for physicists*. Princeton University Press.
- Симоновић, Н., Капор, Д. (2018). *Квантна механика 1*. Природно-математички факултет, Бања Лука.
- Станковић, Б., Пилиповић, С. (1983). *Теорија дистрибуција*. Природно-математички факултет, Нови Сад.
- Стојаковић, М. (2010). *Математичка анализа 2*. Факултет техничких наука.
- Тарасов, Л. В. (2008). *Овај задивљујући симетрични свет*. ИЦНТ Београд.
- Хибш, Т. (2011). *Фундаментална физика елементарних честица*. Природно-математички факултет, Нови Сад.
- Шиф, Л. (1968). *Квантна механика*. Вук Караџић, Београд.

- Тошић, Б., Стојановић, С., Шкрињар, М., Капор, Д., Машковић, Љ., Шетрајчић, Ј. (1992). *Јубилеј Звонка Марића, Свеске физичких наука (СФИН), година V, број 2, стр. 27-49.* Институт за физику, Београд.
- Тошић, Б. (1978). *Статистичка физика.* Природно-математички факултет у Новом Саду, Институт за физику.
- Урумов, В. (1996). *Математичка физика.* Просветни завод Скопље.
- Вујановић, Б. (2013). *Теорија осцилација.* Факултет техничких наука, Нови Сад.
- Вуковић, М. (2003). *Теорија група и репрезентација с примјенама у физици.* Универзитетска књига, Сарајево.
- Wild, M.I (2005). [The groups of order sixteen made easy.](#) The American Mathematical Monthly, 112(1), 20–31.