UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

SOLITONI U KOMPRESIBILNOM ANIZOTROPNOM FEROMAGNETNOM LANCU

- DIPLOMSKI RAD -

Šašić Ljiljana

Novi Sad, jul 1986.

Zahvaljujem se dr Mariju Škrinjaru
na pomoći i strpljenju pri izradi
ovog rada

Šašić Ljiljana

S A D R Ž A J

U V O D

Pojam solitona uveo je J.S. Russell posmatrajući osobine prostiranja talasa na vodi. U poslednje vrijeme "usamljeni talasi", tj. solitoni proučavaju se u mngim oblastima fizike (fizici plazme, poluprovodnicima, feromagneticima...). Javljaju se u sredinama koje pored disperzije posjeduju i nelinearnost, što omogućava prostiranje solitona bez promjene oblika. Detaljnije o tome može se vidjeti u 1 .

Mi ćemo u ovom radu posmatrati solitone u feromagnetnom lancu u prisustvu spin-fononske interakcije. Koristićemo Heisenbergov model koji opisuje anizotropni feromagnetik. Opšti oblik je dat sljedećom relacijom:

$$H = \sum_{n,m,j} I_{\vec{n},\vec{m}} \, S^{\alpha}_{\vec{n}} S^{\alpha}_{\vec{m}} \tag{1.1.}$$

gdje su $S_{\vec{n}}$ komponente operatora spina ($\alpha = x,y,z$), a $I_{\vec{n},\vec{m}}$ su integrali izmjene.

Ako su matrični elementi isti, tj. - $I^{x}_{\vec{n},\vec{m}} = I^{y}_{\vec{n},\vec{m}} = I^{z}_{\vec{n},\vec{m}}$

imamo izotropni model. Ako postoji osa lake magnetizacije, tj. postoje pravci duž kojih se spinovi lakše orijentišu imamo tzv. anizotropiju tipa "laka osa". Mi ćemo posmatrati anizotropiju, kod koje se integral izmjene među Z-komponentama spinova razlikuje od onog između X i Y komponenata. Ovo je XXZ - anizotropni feromagnetik, čiji hamiltonijan je dat na sljedeći način:

$$H = -\mu \mathcal{H} \sum_j S^z_j - I \sum_j \vec{S}_j \vec{S}_{j+1} - I(\eta - 1) \sum_j S^z_j S^z_{j+1} \tag{1.2.}$$

gdje je $\eta = \dfrac{I^z}{I}$

Integral izmjene brzo opada sa rastojanjem, tako da se može uzeti interakcija samo između najbližih susjeda. Ova aproksimacija se naziva aproksimacija najbližih susjeda.

U slučaju kada čvorovi nisu fiksirani, osciluju, potrebno je uzeti u obzir interakciju spinskih i elastičnih stepeni slobode kristala. Uobičajeni metod za izračunavanje spin-fononske interakcije je razvoj integrala izmjene po fononskom pomjeranju.

$$I(n-m) \Rightarrow I(n-m+U_n-U_m) \approx I(n-m) + \frac{\partial I}{\partial(n-m)}(U_n - U_m) =$$

$$= I(n-m) + g\,(U_n - U_m)$$

za: $R = n - m > 0, \quad \frac{\partial I}{\partial R} = g$

Feromagnetik se postavlja u spoljašnje magnetno polje, pa je zbog toga hamiltonijanu dodan Zemanov term $(-\mu\mathcal{H}\sum_j S_j^z)$. U ovom slučaju naš hamiltonijan izgleda:

$$H = -\mu\mathcal{H}\sum_j(S_j^z - S) - \eta\sum_j IS^2 - I\sum_j(\vec{S}_j\vec{S}_{j+1} - S^2) -$$
$$- I(\eta - 1)\sum_j(S_j^z S_{j+1}^z - S^2) - g\sum_j(U_{j+1} - U_j)\Big[\vec{S}_j\vec{S}_{j+1} +$$
$$+ (\eta - 1)S_j^z S_{j+1}^z\Big] + \sum_j\left[\frac{p_j^2}{2m} + \frac{mv_o^2}{2a^2}(U_j - U_{j-1})^2\right] \tag{1.3.}$$

gdje je $\sum_j\left[\frac{p_j^2}{2m} + \frac{mv_o^2}{2a^2}(U_j - U_{j-1})^2\right]$ hamiltonijan malih oscilacija u aproksimaciji najbližih susjeda.

Hamiltonijan, dat izrazom (1.3.), koristićemo u narednom poglavlju.

HAMILTONIJAN FEROMAGNETNOG LANCA U KONTINUALNOJ APROKSIMACIJI. DEFINICIJA STACIONARNOG STANJA.

U kontinualnoj aproksimaciji, koja je fizički opravdana u tzv. dugotalasnoj aproksimaciji, tj. kada je talasna dužina eksitacije u lancu mnogo veća od konstante rešetke, vršimo sljedeću smjenu:

$$\vec{F}_j \approx \vec{F}(x)$$

$$\vec{F}_{j\pm 1} \approx \vec{F}(x) \pm a \frac{\partial \vec{F}}{\partial x} + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial x^2} + \ldots$$

a suma prelazi u integral po sljedećoj šemi:

$$\sum = \frac{1}{a} \int dx$$

Pošto mi tražimo solitonsko rješenje u feromagnetnom lancu, izvršićemo kontinualnu aproksimaciju u hamiltonijanu (1.3.), pri sljedećim graničnim uslovima:

$$\frac{\partial^n S}{\partial x^n} = 0 \qquad \text{za} \quad x = \pm\infty$$

$$\frac{\partial^n U}{\partial x^n} = 0 \qquad \text{za} \quad x = \pm\infty \tag{2.1.}$$

a je konstanta rešetke.

S tačnošću do $\sim a^3$ hamiltonijan (1.3.) dobija sljedeći oblik:

$$H = \tilde{H} - E_0$$

$$E_0 = -\gamma NIS^2 - \mu\mathcal{H} NS$$

$$H = \frac{1}{a} \int \mathcal{H} \, dx$$

$$\mathcal{H} = -\mu\mathcal{H}(S^z - S) + \frac{Ia^2}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{Ia^2}{2}(\eta - 1)\left(\frac{\partial S^z}{\partial x}\right)^2 -$$

$$- gaS^2\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{ga^3}{2}\frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 - ga(\eta - 1)\frac{\partial U}{\partial x}\left[S^{z^2} +\right.$$

$$\left. + \frac{a^2}{3}S^z\frac{\partial^2 S^z}{\partial x^2} - \frac{a^2}{6}\left(\frac{\partial S^z}{\partial x}\right)^2\right. + \frac{p^2}{2m} + \frac{mv_o^2}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 -$$

$$- I(\eta - 1)(S^{z^2} - S^2) \qquad (2.2.)$$

Prelaskom na sferne koordinate:

$S^x = S\sin\Theta\cos\phi$

$S^y = S\sin\Theta\sin\phi$

$S^z = S\cos\Theta$

možemo napisati gustinu lagranžijana sistema iz (2.2) na sljedeći način:

$$\mathcal{L} = (S^z - S)\dot{\phi} + \frac{1}{2}mU_t^2 - \frac{\mathcal{H}a^2}{2}U_x^2 - \frac{Ia^2}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 -$$

$$- \frac{Ia^2}{2}\tau\left(\frac{\partial S^z}{\partial x}\right)^2 + gaS^2\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{ga^3}{2}\frac{\partial U}{\partial x}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+ ga\tau\frac{\partial U}{\partial x}\left[S^{z^2} + \frac{a^2}{3}S^z\frac{\partial^2 S^z}{\partial x^2} - \frac{a^2}{6}\left(\frac{\partial S^z}{\partial x}\right)^2\right] + I\tau(S^{z^2} - S^2)$$

$$(2.3.)$$

gdje je $mv_o^2 = \mathcal{H}a^2$, $\eta - 1 = \tau$

$\Pi_\phi = S^z - S = \dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}$ generalisani impuls spinskog podsistema, konjugovan generalisanoj koordinati ϕ.

Iz gustine lagranžijana naći ćemo jednačine kretanja za $U(x,t)$ na sljedeći način:

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_t} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_x} = 0$$

$$mU_{tt} - mv_o^2 U_{xx} = - ga\tau \frac{\partial}{\partial x}(S^{z^2}) + ga^3 \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \tau\left(\frac{1}{3} S^z \frac{\partial^2 S^z}{\partial x^2} - \frac{1}{6}\frac{\partial S^z}{\partial x}\right)^2\right] \qquad (2.4.)$$

Rješenje ove jednačine u stacionarnom stanju tražimo u sljedećem obliku: $U_s = U_s\,(x-vt)$, gdje je

$$\frac{\partial U_s}{\partial x} = \rho_s = \frac{ga\tau}{mv_o^2(1-\nu^2)}(S^{z^2} - S^2) - \frac{ga^3}{mv_o^2(1-\nu^2)}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \tau\left(\frac{1}{3} S^z \frac{\partial^2 S^z}{\partial x^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial S^z}{\partial x}\right)^2\right)\right] \qquad (2.5.)$$

gdje je $\nu = \frac{v}{v_o}$, uz granične uslove $\rho(\pm\infty) = 0$, $S^z = S$

Ovdje ćemo detaljnije objasniti šta podrazumijevamo pod stacionarnim stanjem. Opšte rješenje jednačine (2.4.) je:

$$U(x,t) = U_1\,(x-v_o t) + U_2\,(x+v_o t) + U_s\,(x-vt)$$

U_1 i U_2 opisuju talase koji se kreću brzinom longitudinalnog zvuka u pozitivnom odnosno negativnom smjeru duž lanca, a U_s je solitonsko rješenje koje se kreće brzinom v duž lanca.
U stacionarnom stanju pretpostavljamo da postoji samo rješenje U_s. Ono se može postići ili izborom specijalnih početnih uslova:

$$U(x,t=o) = U_s(x) \text{ i}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}(x,t=o) = \frac{\partial U_s}{\partial t}(x,t=o) ,$$ što je praktično nemoguće,

ili poslije dovoljno dugog vremena kada se talasi U_1 i U_2, koji se kreću brzinom $v_o \gg v$, dovoljno udalje od solitona U_s, tako da možemo smatrati da se u lancu nalazi samo soliton koji se kreće brzinom v. U skladu s tim, jasno je da ćemo posmatrati slučaj kada je brzina solitona mnogo manja od brzine v_o.

Efektivni lagranžijan u stacionarnom stanju je funkcija samo spinskih koordinata, i ima oblik:

$$\mathcal{L}_s = (S^z - S)\dot{\phi} - \frac{mv_o^2}{2}(1-\nu^2)\rho_s^2 - \frac{Ia^2}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \tau\left(\frac{\partial S^z}{\partial x}\right)^2\right] + I\tau(S^{z^2} - S^2) + ga\frac{\partial U_s}{\partial x}\left[S^2 + \tau S^{z^2} - \frac{a^2}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \tau a^2\left(\frac{1}{3}S^z\frac{\partial^2 S^z}{\partial x^2} - \frac{1}{6}\left(\frac{\partial S^z}{\partial x}\right)^2\right)\right] \tag{2.6.}$$

Pošto su parametri $\left(a\frac{\partial}{\partial x}\right)$, τ , g^2 male veličine u našem problemu, zadržavamo se u aproksimaciji s tačnošću do proizvoda trećeg stepena tih parametara, tako da efektivni lagranžijan, koji ćemo koristiti ima sljedeći oblik:

$$\mathcal{L}_s = (S^z - S)\dot{\phi} + \tilde{I}\tau(S^{z^2} - S^2) - \frac{\tilde{I}a^2}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \tau\left(\frac{\partial S^z}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{g^2\tau^2}{\mathcal{H}(1-\nu^2)}S^2(S^{z^2} - S^2) \tag{2.7.}$$

gdje je $\tilde{I} = I\left[1 + \frac{g^2S^2}{I\mathcal{H}(1- \;^2)}\right]$ renormalizovani integral izmjene uslijed interakcije sa fononima.

Gustinu energije stacionarnog stanja dobijemo iz (2.7.), (dodamo Zemanov term).

$$\mathcal{H}_s = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}}\dot{\phi} - \mathcal{L}_s$$

$$\mathcal{H}_s = -\mu\mathcal{H}(S^z - S) - \tilde{I}\tau(S^{z^2} - S^2) + \frac{\tilde{I}a^2}{2}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \tau\left(\frac{\partial S^z}{\partial x}\right)^2\right] - \frac{g^2\tau^2}{\mathcal{H}(1-\nu^2)}S^2(S^{z^2} - S^2) \tag{2.8.}$$

Isti hamiltonijan možemo dobiti, polazeći direktno od hamiltonijana (2.2.), preko kanonskih transformacija, sa promjenljivih $(U,p) \rightarrow (y,\tilde{p})$, koristeći funkciju generatrisu oblika:

$$\mathcal{F}(y,p,U_s) = -p\left[y + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial U_s}{\partial x}\,dx\right] = -p\left[y + U_s\right] \tag{2.9.}$$

odakle dobijamo:

$$U = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial p} = y + U_s$$

$$p = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial y} = P \qquad \text{(impuls ostaje isti)}$$

$$\text{i} \quad \tilde{\mathcal{H}} = \mathcal{H}(y,p,U_s) + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t} \tag{2.10.}$$

Nećemo izvesti cijelu proceduru, ali je lako vidjeti da se u stacionarnom stanju, tj. kada stavimo da je $y=0$, dobija isti hamiltonijan kao (2.8.). (Vidjeti 2).

JEDNAČINE KRETANJA I SOLITONSKA RJEŠENJA

Prelazeći na sferne koordinate, koristeći smjenu $\cos\Theta = u$, za a =1, hamiltonijan (2.8.) ima sljedeći oblik:

$$\mathcal{H}_s = -\mu\mathcal{H}\, S(u-1) - \tilde{I}\tau S^2(u^2-1) + \frac{\tilde{I}S^2}{2}\left[\frac{1}{1-u^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + (1-u^2)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2\right] + \frac{\tilde{I}S^2\tau}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \frac{g^2\tau^2}{\mathcal{H}(1-\nu^2)} S^4(u^2-1) \qquad (3.1.)$$

Na osnovu ovog hamiltonijana, formiramo jednačine kretanja za konjugovane promjenljive S^z i ϕ, pri čemu je

$$S^z = S\cos\Theta = S u$$

$$\dot{u} = -\frac{\delta \mathcal{H}s}{\delta \phi} = -\frac{1}{S}\left[\frac{\partial \mathcal{H}s}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{H}s}{\partial \phi_x}\right)\right]$$

$$\dot{\phi} = \frac{\delta \mathcal{H}_s}{\delta S^z} = \frac{1}{S}\left[\frac{\partial \mathcal{H}s}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{H}s}{\partial u_x}\right)\right]$$

Nakon sređivanja ovih jednačina za u dobijamo:

$$\dot{u} = \tilde{I}S \frac{\partial}{\partial x}\left[(1-u^2)\frac{\partial \phi}{\partial x}\right] \qquad (3.2.)$$

a za

$$\dot{\phi} = -\mu\mathcal{H} - 2\tilde{I}\tau Su - \tilde{I}S\frac{u}{(1-u^2)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 - \tilde{I}Su\frac{\partial \phi}{\partial x} - \tilde{I}S\frac{1}{1-u^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2g^2\tau^2}{\mathcal{H}(1-\nu^2)}S^3u - \tilde{I}S\tau\frac{\partial}{\partial x}(\sin\Theta\,\Theta_x) \qquad (3.3.)$$

Povratkom na promjenljive Θ i ϕ jednačina (3.2.) izgleda:

$$\frac{\partial}{\partial t}\cos\Theta = \tilde{I}S\,\frac{\partial}{\partial x}\left[\sin^2\Theta\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\right] \tag{3.4.}$$

a jednačinu (3.3.) pomnžimo sa $\sqrt{1-u^2}$ i vratimo se na pomenute promjenljive, dobivamo:

$$\sin\Theta\,\frac{\partial\phi}{\partial t} = -\mu\mathcal{H}\sin\Theta - 2\tilde{I}S\cos\Theta\sin\Theta\left[\tau + \frac{g^2\tau^2}{\tilde{I}\mathcal{H}(1-\ ^2)}S^2\right] + \tilde{I}S\left[\Theta_{xx} - \sin\Theta\cos\Theta\,\phi_x^2\right] - \tilde{I}S\tau\sin\Theta\,\frac{\partial}{\partial x}(\sin\Theta\,\Theta_x) \tag{3.5.}$$

Da bi integralili jednačine (3.4.) i (3.5.) moramo definisati početne i granične uslove. Pošto su Θ i ϕ_x funkcije promjenljive $\xi = x - vt$, u sistemu koji se kreće brzinom v zajedno sa pobuđenjem imamo:

za: $\xi = 0 \Rightarrow \Theta = \measuredangle(S, Z\text{-ose}) = \Theta_0, \quad \Theta_\xi = 0$

Θ_0 je maksimalan ugao skretanja spina. (3.6.)

i za: $\xi = \pm\infty, \quad \Theta = 0, \quad \Theta_\xi = 0$

$\sin\Theta = 0, \quad \cos\Theta = 1$, jer sistem nije pobuđen pa spinovi ostaju usmjereni u pravcu Z-ose. Iz ove smjene neposredno slijedi:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\xi}{dt}\,\frac{d}{d\xi} = -v\,\frac{d}{d\xi}$$
$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial\xi}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial\xi} \tag{3.7.}$$

Poslije uvrštavanja relacija (3.7.) u (3.4.) dobivamo:

$$-v\,\frac{\partial}{\partial\xi}\cos\Theta = \tilde{I}S\,\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sin^2\Theta\,\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\right)$$

Integralenjem i korišćenjem graničnih uslova (3.6.) dobivamo:

$$\phi_\xi = \frac{V}{1+\cos\Theta} \tag{3.8.}$$

gdje je $V = \frac{v}{\tilde{I}S}$ redukovana brzina prostiranja pobuđenja.

Da bi integralili jednačinu (3.5.) koristimo relacije (3.7.) i uvodimo smjenu:

$$\phi = \Omega t + \hat{\phi}(\xi)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \Omega + \frac{\partial\hat{\phi}}{\partial t} = \Omega - v\frac{\partial\hat{\phi}}{\partial\xi}$$

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \phi_\xi = \frac{\partial\phi}{\partial\xi} = \frac{d\hat{\phi}}{d\xi} \qquad \phi(\xi) = \hat{\phi}(\xi)$$

$$\sin\frac{\Omega + \mu\mathcal{H}}{\tilde{I}S} = \sin\frac{v}{\tilde{I}S}\phi_\xi - 2D\cos\theta\sin\theta + \theta_{\xi\xi} -$$

$$- \sin\theta\cos\theta\,\phi_\xi^2 - \sin\theta\,\tau\frac{\partial}{\partial\xi}(\sin\theta\,\theta_\xi)$$

gdje je $D = \tau + \frac{g^2\tau^2}{\tilde{I}\mathcal{H}(1-V^2)}S^2$, $\Gamma = \frac{\Omega + \mu\mathcal{H}}{\tilde{I}S}$

$$\Gamma\sin\theta + 2D\sin\theta\cos\theta - \theta_{\xi\xi} - \frac{V^2\sin\theta}{1+\cos\theta} + \frac{V^2\sin\theta\cos\theta}{(1+\cos\theta)^2} -$$

$$- \sin\theta\,\tau\frac{\partial}{\partial\xi}(\sin\theta\,\theta_\xi) = 0 \qquad (3.9.)$$

poslije integralenja slijedi:

$$-\Gamma\cos\theta + 2D\sin^2\theta - \frac{1}{2}\theta_\xi^2 + \frac{V^2\cos\theta}{1+\cos\theta} - \tau\sin^2\theta\,\theta_\xi^2 + C = 0$$

C je konstanta integracije koju određujemo iz graničnih uslova (3.6.), $C = \Gamma - V^2/2$.

$$\theta_\xi^2(1+\tau\sin^2\theta) = \Gamma(1-\cos\theta) + 2D(1-\cos^2\theta) - V^2\frac{1-\cos\theta}{2(1+\cos\theta)}$$

(3.10.)

Amplitudu θ_o određujemo tako što je desna strana jednačine (3.10.) jednaka nuli. U tu svrhu prelazimo na nove promjenljive:

$$\theta = 2\beta \qquad \theta_o = 2\beta_o$$

$\theta_\xi = 2\beta_\xi$, što uvrštavamo u (3.10.) i dobivamo:

$$\beta_\xi^2(1+\tau\sin^2 2\beta) = \Gamma\,\frac{1-\cos 2\beta}{1+\cos 2\beta}\left[\frac{1+\cos 2\beta}{2} - \frac{V^2}{4\Gamma} + \frac{2D}{4\Gamma}(1-\cos 2\beta)^2\right]$$

$$\beta_\xi^2(1+4\tau\sin^2\beta\cos^2\beta) = \Gamma\,\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\left[\cos^2\beta - \frac{V^2}{4\Gamma} + \frac{2D}{\Gamma}\cos^4\beta\right] \tag{3.11.}$$

za $\xi = 0$, $\beta_\xi = 0$ slijedi maksimalan ugao θ.
Uvrštavajući ove uslove u (3.11.), dobivamo:

$$\frac{V^2}{4\Gamma} = \cos^2\beta_o + \frac{2D}{\Gamma}\cos^4\beta_o \tag{3.12.}$$

Pošto je $\xi = x - vt$, amplituda β_o se kreće duž X-ose brzinom V. Ugao β definiše projekciju spina na Z-osu. β_o je ekstremna vrijednost,($\beta_\xi = 0$), koja određuje centar pobuđenja koji se nepromjenjeno kreće duž lanca. Ovo pobuđenje je soliton.

Sada ćemo vidjeti, pod kojim uslovima jednačina (3.11.) ima solitonsko rješenje. Uvrstimo izraz (3.12.) u (3.11.), dobijamo sljedeće relacije:

$$\beta_\xi^2(1+4\tau\sin^2\beta\cos^2\beta) = \Gamma\,\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\left[\cos^2\beta + \frac{2D}{\Gamma}\cos^4\beta - \cos^2\beta_o - \frac{2D}{\Gamma}\cos^4\beta_o\right]$$

$$\beta_\xi^2(1+4\tau\sin^2\beta\cos^2\beta) = 2D\,\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}(\cos^2\beta - \cos^2\beta_o)\left(\cos^2\beta + \cos^2\beta_o + \frac{\Gamma}{2D}\right) \tag{3.13.}$$

iz jednačine (3.12.) slijedi, da je

$$\frac{V^2}{4\cos^2\beta_o} = \Gamma + 2D\cos^2\beta_o$$

a iz jednačine (3.13.) dobijamo uslov (desna strana jednačine mora biti veća od nule):

$$D\sin^2\beta\left(1 - \frac{\cos^2\beta_o}{\cos^2\beta}\right)\left(\cos^2\beta + \cos^2\beta_o + \frac{\Gamma}{2D}\right) > 0 \tag{3.14.}$$

Analiziraćemo ovu nejednačinu za $D > 0$ i $D < 0$.

1° $D < 0$

Da bi detaljnije analizirali uslove postojanja solitona uvodimo smjenu:

$$\sin\beta = \phi \Rightarrow \cos\beta\, \beta_\xi = \phi_\xi, \quad \beta_\xi = \frac{\phi_\xi}{\cos\beta}$$

U ovom slučaju uslov (3.12.) prelazi u oblik:

$$\frac{V^2}{4\Gamma} = (1 - \sin^2\beta_0) + \frac{2D}{\Gamma}(1 - \sin^2\beta_0)^2$$

$$\frac{V^2}{4\Gamma} = (1 - \phi_0^2)\left[1 + \frac{2D}{\Gamma}(1 - \phi_0^2)\right] \qquad (3.15.)$$

jednačina (3.13.) se svodi na:

$$\phi_\xi^2(1 + 4\tau\phi^2(1 - \phi^2) = 2D\phi^2(\phi_0^2 - \phi^2)\left[\frac{\Gamma}{2D} - \phi^2 - \phi_0^2 + 2\right]$$

(3.16.)

za $D < 0$, mora biti:

$$-\frac{\Gamma}{2|D|} - \phi^2 - \phi_0^2 + 2 < 0 \qquad (3.17.)$$

pošto je $0 \leq \phi^2 \leq 1 \Rightarrow \frac{\Gamma}{2|D|} + \phi_0^2 > 2$ (3.18.)

iz (3.15.) $\Rightarrow \Gamma = \frac{V^2}{4(1 - \phi_0^2)} + 2|D|(1 - \phi_0^2)^2$ (3.19.)

odakle proizilazi, da brzina solitona ima minimalnu vrijednost, tj.

$$V^2 > 8|D|(1 - \phi_0^2) = 8|D|\cos^2\beta_0 \qquad (3.20)$$

Iz relacije (3.19.) vidimo da brzina može biti:

$$V^2 = 4\Gamma(1 - \phi_0^2) - 8|D|(1 - \phi_0^2)^2 \qquad (3.21.)$$

i $V^2 > 8|D|(1 - \phi_0^2)$ (3.22.)

Iz ovih relacija slijedi da je $\Gamma > D$, i dobijamo maksimalne vrijednosti brzine solitona.

Ako je: $\Gamma \geqslant 4|D| \Rightarrow V^2 = \dfrac{\Gamma^2}{2|D|}$

$$\Gamma \leq 4|D| \Rightarrow V^2 = 4(\Gamma - 2|D|) \qquad (3.23.)$$

Ako rezimiramo rezultate za $D < 0$, vidimo da solitonsko rješenje postoji ako je brzina solitona u granicama:

$$V^2_{min} \leq V^2 \leq V^2_{max}$$

gdje je minimalna vrijednost brzine data relacijom (3.20) a maksimalna (3.23.)

$2^o \quad D > 0$

Primjenjujemo isti postupak kao prvom slučaju i na osnovu nejednačine (3.14.) slijedi:

$$\cos^2\beta_o + \frac{\Gamma}{2D} > -1$$

odnosno

$$\Gamma > -2D(1 + \cos^2\beta_o) \qquad (3.24.)$$

Iz relacije (3.12.) dobijemo ograničenje za brzinu solitona ($\cos^2\beta_o \leq 1$), pa je: $V^2 \leq 4\Gamma + 8D$

Da bi našli solitonsko rješenje jednačine (3.11.) predpostavićemo da je $\tau \ll 1$, tj. razmatraćemo slučaj slabe anizotropije. Pa zbog toga lijevu stranu jednačine možemo aproksimirati:

$$1 + 4\tau \sin^2\beta \cos^2\beta \approx 1$$

tada jednačina (3.11.) ima oblik:

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial\xi}\right)^2 = \Gamma \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\left[\cos^2\beta - \frac{V^2}{4\Gamma} + \frac{2D}{\Gamma}\cos^4\beta\right] \qquad (3.25.)$$

Član D ne možemo zanemariti jer veličina Γ može biti mala za realna magnetna polja, tako da odnos D/Γ može biti mnogo veći od jedinice.

Razmotrićemo opet slučaj kada je $D \lessgtr 0$ i $D > 0$.

1^o $D < 0$

U ovom slučaju $\eta < 1$, pa iz hamiltonijana (1.2.) vidimo da je energija sistema minimalna kada su spinovi u XY-ravni (u osnovnom stanju). Ovaj slučaj je analogan planarnoj anizotropiji.

Za $D = -|D|$, jednačina (3.5.) glasi:

$$\cos^2\beta\left(\frac{\partial\beta}{\partial\xi}\right)^2 = \Gamma\sin^2\beta\left[\cos^2\beta - \frac{v^2}{4\Gamma} - \frac{2|D|}{\Gamma}\cos^4\beta\right]$$

$$\frac{d}{d\xi}(\sin\beta) = \pm\sqrt{\Gamma}\,\sin\beta\sqrt{\cos^2\beta - \frac{v^2}{4\Gamma} - \frac{2|D|}{\Gamma}\cos^4\beta} \qquad (3.26.)$$

iz uslova $v^2 > 0$, dobija se:

$$\frac{v^2}{4\Gamma} = \cos^2\beta_o - \frac{2|D|}{\Gamma}\cos^4\beta_o > 0 \qquad (3.27.)$$

$$\frac{v^2}{4\Gamma} = \cos^2\beta_o\left[\Gamma - 2|D|\cos^2\beta_o\right] > 0$$

$$\Gamma > 2D\cos^2\beta_o \qquad (3.28.)$$

a iz: $\left(\frac{d}{d\xi}(\sin\beta)\right)^2 > 0$, slijedi:

$$(\cos^2\beta - \cos^2\beta_o)\left[1 - \frac{2|D|}{\Gamma}(\cos^2\beta + \cos^2\beta_o)\right) \quad 0$$

tj. $\Gamma > 2|D|(1 - \cos^2\beta_o)$ (3.29.)

Ovaj uslov zahtijeva minimalnu vrijednost magnetnog polja za postojanje solitona.

Iz relacija (3.27.) i (3.29.) dobijamo ograničenje za brzinu solitona:

$$v^2 > 8|D|\cos^2\beta_o\ ,$$ što je identično sa (3.20.)

2^o $D > 0$ (analogno anizotropiji osa lake magnetizacije)

Kada $\eta > 1$, hamiltonijan (1.2.) ima maksimum kada je $S^z = S$. U osnovnom stanju spinovi su postavljeni u Z-pravcu.

Izraz (3.25.) pišemo u obliku:

$$\frac{d}{d\xi}(\sin\beta) = \pm\sqrt{2D}\ \sin\beta\sqrt{\frac{\Gamma}{2D}\cos^2\beta - \frac{V^2}{8D} + \cos^4\beta} \qquad (3.30.)$$

Za $\Gamma < 0$, $\Gamma = -|\Gamma|$

$\left(\frac{d}{d\xi}\sin\beta\right)^2 > 0$ slijedi:

$$2D(\cos^2\beta - \cos^2\beta_o)(\cos^2\beta + \cos^2\beta_o - \frac{\Gamma}{2D}) > 0$$

$\cos^2\beta + \cos^2\beta_o - \frac{\Gamma}{2D} > 0$, pa je

$$|\Gamma| < 4D\cos^2\beta_o$$

Iz zahtjeva $V^2 > 0 \Rightarrow |\Gamma| < 2D\cos^2\beta_o$ (3.31.)

Ovaj uslov mora biti zadovoljen da bi soliton postojao.

Označimo $\Gamma = -G$, iz (3.31.) $\Rightarrow$ $G \leq 2D\cos^2\beta_o$

a izraz (3.30.) izgleda:

$$\frac{d}{d\xi}(\sin\beta) = \pm\sin\beta\sqrt{-G\cos^2\beta - \frac{V^2}{4} + 2D\cos^4\beta} \qquad (3.32.)$$

Iz uslova: $\frac{d}{d\xi}\sin\beta = 0$, za $\xi = 0$, dobija se amplituda

$$\frac{V^2}{4} = 2D\cos^4\beta_o - G\cos^2\beta_o$$

$$\cos^2\beta_o = \frac{G \pm \sqrt{G^2 - 2DV^2}}{4D} = \frac{G}{4D}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2DV^2}{G^2}}\right) \qquad (3.33.)$$

u jednačinu (3.32.) uvodimo smjenu $\sin^2\beta = \phi^2$

$$\frac{d}{d\xi} = \pm\phi\sqrt{-G(1-\phi^2) - \frac{V^2}{4} + 2D(1-\phi^2)^2} =$$

$$= \pm\phi^3\sqrt{G\left[\frac{2D}{G} - (\frac{4D}{G} - 1)\frac{1}{\phi^2} + (\frac{2D}{G} - 1 - \frac{V^2}{4G})\frac{1}{\phi^4}\right]}$$

smjenom: $\varphi = \frac{1}{\phi^2}$ $\quad d\varphi = -2\frac{d\phi}{\phi^3}$

$$-\frac{\phi^3}{2}\frac{d\varphi}{d\xi} = \pm\,\phi^3\sqrt{G\left[\frac{2D}{G} - \left(\frac{4D}{G} - 1\right)\varphi + \left(\frac{2D}{G} - 1 - \frac{V^2}{4G}\right)\varphi^2\right]}$$

obilježimo

$$a = \frac{2D}{G} - 1 - \frac{V^2}{4G}\ ,\quad b = \frac{4D}{G} - 1\ ,\quad c = \frac{2D}{G}$$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \pm\, 2\sqrt{G(\,a\varphi^2 - b\varphi + c)} \qquad (3.34.)$$

Iz ograničenja brzina, $V^2 < V^2_{max} = 4(2D - G)$, vidimo da solitonsko rješenje postoji samo ako je $a > 0$.

Izraz pod korijenom, jednačine (3.34.), ćemo transformisati na sljedeći način:

$$a\varphi^2 - b\varphi + c = \left(\sqrt{a}\,\varphi - \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} \qquad (3.35.)$$

$$c - \frac{b^2}{4a} = \frac{2D}{G} - \frac{\left(\frac{4D}{G} - 1\right)^2}{4\left(\frac{2D}{G} - 1 - \frac{V^2}{4G}\right)} = -\frac{2V^2D + G^2}{G(8D - 4G - V^2)} < 0$$

Neka je $\quad z = \sqrt{a}\,\varphi - \frac{b}{2\sqrt{a}}\quad ,\quad B^2 = \frac{b^2}{4a} - c$

$$dz = \sqrt{a}\,d\varphi \qquad d\varphi = \frac{1}{\sqrt{a}}\,dz$$

$$a\varphi^2 - b\varphi + c = z^2 - B^2$$

pa jednačina (3.34.) postaje:

$$\frac{dz}{d\xi} = \pm\, 2\sqrt{aG}\,\sqrt{z^2 - B^2}\ .$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 - B^2}} = \pm\, 2\sqrt{aG}\ d\xi \qquad (3.36.)$$

integralimo: $\quad z = B\ \mathrm{ch}\ y$

$$dz = B\ \mathrm{sh}\ y\ dy$$

$z^2 - B^2 = B^2\,(\mathrm{ch}^2 y - 1) = B^2\,\mathrm{sh}^2 y$, uvrstimo u (3.36.)

$$dy = \pm\, 2\sqrt{aG}\; d\xi$$

$$y = \pm\, 2\sqrt{aG}\,\xi + C$$

$$z = B\,\mathrm{ch}(\pm\, 2\sqrt{aG}\,\xi + C)$$

Konstantu C dobijemo iz uslova:

$$\xi = 0\,, \quad \varphi = \varphi_o \qquad\qquad C = \sqrt{a}\,\varphi_o - \frac{b}{2\sqrt{a}}$$

$$\varphi^2 = \frac{\varphi_o^2}{1 + \dfrac{2B\varphi_o^2}{\sqrt{a}}\,\mathrm{sh}^2\sqrt{aG}\,\xi} \qquad (3.37.)$$

gdje je: $\varphi_o = 1 - \cos^2\beta_o = 1 - \frac{G}{4D}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2DV^2}{G^2}}\right)$

$2^o \quad D < 0\,, \quad \Gamma > 0$

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \pm\, 2\sqrt{\Gamma}\,\sqrt{a\varphi^2 - b\varphi + c}$$

Primjenimo isti postupak kao u prethodnom slučaju i dobijamo:

$$\varphi^2 = \frac{\varphi_o^2}{1 + \dfrac{2B\varphi_o^2}{a}\,\mathrm{sh}^2\sqrt{a\Gamma}\,\xi} \qquad (3.38.)$$

Izrazi (3.37.) i (3.38.)opisuju solitonsko rješenje jednačine (3.11.) za male vrijednosti $\tau \ll 1$. Iz ponašanja funkcije sh^2 vidimo da φ^2 ima značajne vrijadnosti samo u okolini $\xi = 0$. U $\xi = 0$, φ zauzima maksimalnu vrijednost φ_o.

ENERGIJA, IMPULS I MAGNETIZACIJA

S obzirom da se u kontinualnoj aproksimaciji dimenzije feromagnetnog lanca uzimaju kao beskonačne, mnoge veličine, kao energija, impuls, magnetizacija, postaju takođe beskonačne. Zbog toga ćemo divergenciju izbjeći pogodnim izborom osnovnog stanja feromagnetnog lanca. Izraze za energiju, impuls i magnetizaciju ćemo uzeti u sljedećem obliku:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_s \, d\xi \qquad (4.1.)$$

$$P = S \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \, \frac{\partial \phi}{\partial \xi} (1 - \cos\theta) \qquad (4.2.)$$

$$M_z = S \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \, (1 - \cos\theta) \qquad (4.3.)$$

Magnetizacija se definiše kao suma S^z komponenti nekog sistema. U našem slučaju, magnetizacija predstavlja odstupanje spinova od uređenog osnovnog stanja u prisustvu solitonskog pobuđenja. Znači, magnetizacija sistema je ujedno i magnetizacija solitona.

Pri izračunavanju datih integrala, integraciju po ξ zamjenjujemo integracijom po β. Ovaj prelaz možemo simbolično prikazati:

$$2\int_{-\infty}^{0} d\xi \;\; F(\theta(\xi)) = 2\int_{-\infty}^{0} d\beta \; F(\beta)\,\frac{d\xi}{d\beta} \qquad (4.4.)$$

Radi jednostavnosti u pisanju, vrijednosti u jednačini (3.11.) obilježićemo na sljedeći način:

$$A^2 = 1 + 4\tau \sin^2\beta \cos^2\beta \qquad (4.5.a.)$$

$$B^2 = \cos^2\beta - \frac{V^2}{4\Gamma} + \frac{2D}{\Gamma}\cos^4\beta \qquad (4.5.a.)$$

pa taj izraz dobiva oblik:

$$\beta_\xi^2 A^2 = \Gamma \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} B^2$$

$$\left(\frac{d\beta}{d\xi}\right)^2 = \Gamma \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} \frac{B^2}{A^2} \qquad (4.6.)$$

pa je $\quad d\xi = d\beta \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \frac{A}{B} \qquad (4.7.)$

Sve integrale izrazićemo preko β , uzimajući u vidu da izraz (3.8.) dobiva oblik:

$$\phi_\xi = \frac{V}{1 + \cos\Theta} = \frac{V}{2\cos^2\beta} \qquad (4.8.)$$

Za magnetizaciju dobivamo:

$$M_z = 2S\int_{-\infty}^{0} (1 - \cos\Theta)d\xi = 2S\int_{0}^{\beta_0} (1 - \cos 2\beta) \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \frac{A}{B} d\beta$$

$$M_z = \frac{2S}{\sqrt{\Gamma}} \int_0^{\beta_0} \sin\beta\cos\beta \frac{A}{B} d\beta \qquad (4.9.)$$

za impuls

$$P = 2S\int_{-\infty}^{0} (1 - \cos\Theta) \frac{\partial\phi}{\partial\xi} d\xi = 4S\int_0^{\beta_0} \sin^2\beta \frac{V}{2\cos^2\beta} \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \frac{A}{B} d\beta$$

$$P = \frac{2SV}{\sqrt{\Gamma}} \int_0^{\beta_0} \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \frac{A}{B} d\beta$$

iz uslova (3.12.), slijedi:

$$\frac{V}{\sqrt{\Gamma}} = 2\cos\beta_0 \sqrt{1 + \frac{2D}{\Gamma}\cos^2\beta_0}$$

$$P = 4S\cos\beta_0 \sqrt{1 + \frac{2D}{\Gamma}\cos^2\beta_0} \int_0^{\beta_0} \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \frac{A}{B} d\beta \qquad (4.10.)$$

Da bi izračunali energiju polazimo od gustine hamiltonijana:

$$\mathcal{H}_s = \mu \mathcal{H} S(1 - \cos\Theta) + \tilde{I}S^2D(1 - \cos^2\Theta) + \frac{\tilde{I}}{2}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \frac{\tilde{I}\tau}{2}\left(\frac{\partial S^z}{\partial x}\right)^2 \qquad (4.11.)$$

$$\mathcal{H}_s = \mu \mathcal{H} S(1 - \cos\Theta) + \tilde{I}S^2D(1 - \cos^2\Theta) + \frac{\tilde{I}S^2}{2}(\Theta_\xi^2 + \sin^2\Theta\, \phi_\xi^2) + \frac{\tilde{I}}{2}\tau S^2 \Theta_\xi^2 \sin^2\Theta \qquad (4.12.)$$

uvedemo smjenu: $\Theta = 2\beta$

$\Theta_\xi = 2\beta_\xi$

iz jednačine (4.6.), slijedi:

$$\Theta_\xi^2 = 4\beta_\xi^2 = 4\Gamma \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} \frac{B^2}{A^2}$$

a iz (4.8.): $\phi_\xi^2 = \dfrac{V^2}{4\cos^4\beta}$

Korišćenjem ovih izraza, hamiltonijan (4.12.) postaje:

$$\mathcal{H}_s = 2\mu\mathcal{H} S \sin^2\beta + 2\tilde{I}S^2D \sin^2\beta\cos^2\beta + \frac{\tilde{I}S^2}{2}\left[4\Gamma \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\frac{B^2}{A^2} + \frac{V^2\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\right] + 8\tilde{I}\tau S^2\Gamma \sin^4\beta \frac{B^2}{A^2} \qquad (4.13.)$$

pa je:

$$E = 2\int_0^{\beta_0}\left\{2\mu\mathcal{H} S\sin^2\beta + 2\tilde{I}S^2D\sin^2\beta\cos^2\beta + \frac{\tilde{I}S^2}{2}4\Gamma\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\frac{B^2}{A^2} + 8\tilde{I}\tau S^2\Gamma\sin^4\beta\frac{B^2}{A^2} + \frac{\tilde{I}S^2}{2}\frac{V^2\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\right\}\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\frac{A}{B}\,d\beta \qquad (4.14.)$$

Uvođenjem eksplicitnog izraza za B i A iz (4.5.) i sređivanjem dobivamo:

$$E = \mu\mathcal{H} M_z + 4\tilde{I}S^2\sqrt{\Gamma}\int_0^{\beta_0}\left(1 + \frac{4D}{\Gamma}\cos^2\beta\right)\sin\beta\cos\beta\frac{A}{B}\,d\beta \qquad (4.15.)$$

Da bi riješili gornje integrale (4.9.), (4.10.) i (4.15.) koristićemo aproksimaciju kao ranije $\tau \ll 1$.

U hamiltonijanu (4.11.) imamo dva člana kvadratna po izvodima, tako da možemo zanemariti član uz τ. Kao posljedicu toga imamo da je $A = 1$.

U ovom slučaju naši integrali izgledaju:

$$M_z = \frac{2S}{\sqrt{\Gamma}} \int_0^{\beta_0} \frac{\sin\beta\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \frac{V^2}{4\Gamma} + \frac{2D}{\Gamma}\cos^4\beta}} \, d\beta \qquad (4.16.)$$

$$P = 4S\cos\beta_0 \sqrt{1 + \frac{2D}{\Gamma}\cos^2\beta_0} \int_0^{\beta_0} \frac{\sin\beta \, d\beta}{\cos\beta\sqrt{\cos^2\beta - \frac{V^2}{4\Gamma} + \frac{2D}{\Gamma}\cos^4\beta}} \qquad (4.17.)$$

$$E = \mu H M_z + 4\tilde{I}S^2\sqrt{\Gamma} \int_0^{\beta_0} \left(1 + \frac{4D}{\Gamma}\cos^2\beta\right) \frac{\sin\beta\cos\beta \, d\beta}{\sqrt{\cos^2\beta - \frac{V^2}{4\Gamma} + \frac{2D}{\Gamma}\cos^4\beta}} \qquad (4.18.)$$

Da bi riješili date integrale uvodimo smjenu:

$\cos^2\beta = u$, radeći samo za $D > 0$ i $\Gamma > 0$

Tada je:

$$M_z = \frac{2S}{\sqrt{\Gamma}} \int_{\cos^2\beta}^{1} \frac{du}{\left(u - \frac{V^2}{4\Gamma} + \frac{2D}{\Gamma} u^2 \right)^{1/2}}$$

Novom smjenom

$$t = \sqrt{\frac{2D}{\Gamma}}\, u + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Gamma}{2D}} \quad , \qquad c^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\Gamma}{2D} + \frac{V^2}{\Gamma}\right)$$

dobijamo:

$$M_z = \frac{2S}{\sqrt{\Gamma}} \sqrt{\frac{\Gamma}{2D}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - c^2}}$$ i nakon integralenja:

$$M_z = \frac{2S}{\sqrt{2D}} \operatorname{arch} \frac{\frac{2D}{\Gamma} + 1}{\sqrt{1 + \frac{2V^2D}{\Gamma^2}}} \qquad (4.19.)$$

$$\operatorname{ch} \frac{\sqrt{2D}}{2S} M_z = \frac{\frac{2D}{\Gamma} + 1}{\sqrt{1 + \frac{2DV^2}{\Gamma^2}}} \tag{4.20.}$$

Za energiju dobijemo sljedeći izraz:

$$E = \mu \mathcal{H} M_z + 2\tilde{I}S^2\sqrt{\Gamma}\left[\int_{\cos^2\beta}^{1} \frac{du}{\sqrt{\frac{2D}{\Gamma}u^2+u-\frac{V^2}{4\Gamma}}} + \frac{4D}{\Gamma}\int_{\cos^2\beta}^{1} \frac{u\,du}{\sqrt{\frac{2D}{\Gamma}u^2+u-\frac{V^2}{4\Gamma}}}\right] =$$

$$= \mu \mathcal{H} M_z + 2\tilde{I}S^2\sqrt{\Gamma}\int_{\cos^2\beta}^{1} \frac{\left(\frac{4D}{\Gamma}u + 1\right) du}{\sqrt{\frac{2D}{\Gamma}u^2+u-\frac{V^2}{4\Gamma}}}$$

poslije integracije i sređivanja

$$E = \mu \mathcal{H} M_z + 2\tilde{I}S^2 \sqrt{4\Gamma + 8D - V^2} \tag{4.21.}$$

Ako jednačinu (4.17.) napišemo u obliku:

$$P = 4S \cos\beta_0 \sqrt{1 + \frac{2D}{\Gamma}\cos^2\beta_0} \cdot I \tag{4.22.}$$

$$\text{gdje je:} \quad I = \int_0^{\beta_0} \frac{\sin\beta \, d\beta}{\cos\beta \sqrt{\cos^2\beta - \frac{V^2}{4\Gamma} + \frac{2D}{\Gamma}\cos^4\beta}}$$

poslije istih smjena dobivamo:

$$I = \frac{\sqrt{\Gamma}}{V}\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\frac{V^2}{2\Gamma} - 1}{\sqrt{1 + \frac{V^2 2D}{\Gamma^2}}}\right)$$

a za impuls

$$P = 2S\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\left(\frac{V^2}{2\Gamma} - 1\right)}{\sqrt{1 + \frac{2DV^2}{\Gamma^2}}}\right) \tag{4.23.}$$

odnosno

$$\cos\frac{P}{2S} = \frac{\frac{V^2}{4} - 1}{\sqrt{1 + \frac{2DV^2}{\Gamma^2}}} \qquad (4.24.)$$

Koristeći izraze za impuls, magnetizaciju i energiju možemo naći zavisnost: $E = f(M_z, P)$

Iz (4.20.) dobija se:

$$\mathrm{ch}\frac{\sqrt{2D}}{2S}M_z = \frac{\sqrt{2D}}{\Gamma}\,\frac{\sqrt{4\Gamma + 8D - V^2}}{\sqrt{1 + \frac{2DV^2}{\Gamma^2}}} = \mathrm{sh}\frac{\sqrt{2D}}{2S}M_z$$

Dalje slijedi:

$$\mathrm{ch}\frac{\sqrt{2D}}{2S}M_z - \cos\frac{P}{2S} = \frac{\sqrt{2D}}{\Gamma}\,\frac{\sqrt{4\Gamma + 8D - V^2}}{\sqrt{1 + \frac{2DV^2}{\Gamma^2}}} - \frac{V^2 - 4}{4\Gamma\sqrt{1 + \frac{2DV^2}{\Gamma^2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{4\Gamma + 8D - V^2}}{2\sqrt{1 + \frac{2DV^2}{\Gamma^2}}}$$

odnosno:

$$\frac{\mathrm{ch}\frac{\sqrt{2D}}{2S}M_z - \cos\frac{P}{2S}}{\mathrm{sh}\frac{\sqrt{2D}}{2S}M_z} = \frac{\sqrt{4\Gamma + 8D - V^2}}{2\sqrt{2D}} \qquad (4.25.)$$

Ovaj izraz uvrstimo u izraz za energiju (4.21.)

$$E = \mu\mathcal{H}M_z + 4\tilde{I}S^2\sqrt{2D}\,\frac{\mathrm{ch}\frac{\sqrt{2D}}{2S}M_z - \cos\frac{P}{2S}}{\mathrm{sh}\frac{\sqrt{2D}}{2S}M_z} \qquad (4.26.)$$

Iz ovog izraza za energiju vidimo da soliton ima jedan translatorni stepen slobode, tj. zavisnost energije od impulsa i jedan unutrašnji, rotacioni stepen slobode, tj. zavisnost energije od magnetizacije.

U slučaju $D = 0$, energija prelazi u energiju izotropnog feromagnetika , kao i impuls i magnetizacija.

U izrazu (4.20.) obilježimo:

$$y = \mathrm{ch}\, \frac{\sqrt{2D}}{2S} M_z$$

tada izraz za energiju (4.26.) ima oblik:

$$E = \mu \mathcal{H} M_z + 4IS^2\sqrt{2D}\, \frac{y - \cos \frac{P}{2S}}{\sqrt{y^2 - 1}} \tag{4.27.}$$

Koristeći izraze (4.20.) i (4.24.), dobijemo izraz za brzinu:

$$V^2 = \frac{8D}{y^2 - 1} \sin^2 \frac{P}{2S} \tag{4.28.}$$

Iz (4.27.) možemo dobiti grupnu brzinu, diferenciranjem po P, tj.

$$v = \frac{\partial E}{\partial P} = 4\tilde{I}S^2 \sqrt{2D}\, \frac{1}{2S}\, \frac{\sin \frac{P}{2S}}{\sqrt{y^2 - 1}}$$

Pošto je $V = \frac{v}{IS}$, izrazi (4.28.) i (4.29.) su isti.

Kako $\tilde{I}$ i D zavise od v/v_o, ne dobijemo tačno izraz za grupnu brzinu, jedino ako v^2 možemo zanemariti u odnosu na v_o^2. U slučaju većih brzina, jasno je da ova teorija nije primjenljiva, što znači da interakcija magnetnih solitona sa malim oscilacijama, ne dovodi do stvaranja stacionarnog stanja kao što je definisano u radu, već su efekti te interakcije mnogo složeniji i u ovom radu nisu razmatrani.

KLASIČNO KVANTOVANJE ENERGIJE, IMPULSA I MAGNETIZACIJE SOLITONA

Na kraju ćemo izvršiti klasično kvantovanje energije solitona koristeći Bohr-Sommerfeldovo pravilo kvantovanje magnetizacije i de Broglijevo kvantovanje impulsa.

Mi ćemo raditi u sistemu $\hbar \neq 1$.

Za magnetizaciju dobijemo:

$$\int_0^{2\pi} M_z \, d\phi = m h$$

$$M_z = m \frac{h}{2\pi} \qquad m = 0,1,2,\ldots \qquad (5.1.)$$

Magnetizacija je jednaka broju magnona u sistemu. Uvrštavajući izraz (5.1.) u (4.20.), dobijamo:

$$\mathrm{ch} \frac{\sqrt{2D}}{2S} m = \mathrm{ch} \frac{m}{m_o}$$

$$m_o = \frac{2S}{\sqrt{2D}} = \frac{2D + \Gamma}{\sqrt{1 + \frac{2DV^2}{\Gamma^2}}} \qquad (5.2.)$$

Iz (5.2.),(4.26.) i (4.24.) slijedi:

$$E = \mu H \hbar m + 4\tilde{I}S^2 \sqrt{2D} \, \frac{\mathrm{ch} \frac{m}{m_o} - \cos \frac{P}{2S}}{\mathrm{sh} \frac{m}{m_o}} \qquad (5.3.)$$

Energija sistema zavisi od broja magnona koji učestvuju u njegovom stvaranju.

Impuls je dat sljedećom relacijom:

$P = k \hbar$ gdje je $k = \frac{2\pi}{h}$ talasni vektor.

Smatra se,da se soliton nalazi u jednodimenzionoj kutiji dužine L. De Broglijeva talasna dužina solitona mora biti samjerljiva sa dužinom feromagnetnog lanca, tj.

$$L = n\lambda \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

$$\lambda = \frac{L}{n} \qquad k = \frac{2\pi}{n}$$

uzimajući u obzir relaciju $P = \frac{h}{\lambda}$

Pošto je k (talasni vektor) kvantovan, slijedi, i P (impuls) je kvantovan.

U slučaju izotropnog feromagnetika, za $S = \frac{1}{2}$ dobivamo tačno energiju vezanih magnonskih stanja.

Z A K L J U Č A K

U ovom radu analizirali smo solitonsko rješenje anizotropnog feromagnetnog lanca, XXZ - tipa, u prisustvu spin-fononske interakcije.

Definisali smo stacionarno stanje koje, kao što je pokazano, nastaje pri malim brzinama solitona. Brzinom v manjom od brzine zvuka v_o, kroz kristal se prostire magnetni soliton zajedno sa deformacijom rešetke. Za stacionarno stanje pronađeno je tačno rješenje, koje se razlikuje od solitona u feromagnetnom lancu bez spin-fonon interakcije.

Anizotropni feromagnetik tipa XXZ, u prisustvu spin-fononske interakcije, u zavisnosti od konstante anizotropije τ i konstante spin-fonon interakcije (odnosno D) može imati planarnu anizotropiju ("laka ravan" za $D > 0$) ili anizotropiju "osa lake magnetizacije" za $D < 0$. Ako je $D = 0$, dobija se izotropni feromagnetik.

Koristeći solitonsko rješenje izračunali smo energiju, impuls i magnetizaciju feromagnetnog lanca u prisustvu solitona. Iz izraza (4.26.), tj. zavisnosti energije od impulsa i magnetizacije, definisana je grupna brzina, koja se poklapa sa brzinom solitona samo pri malim brzinama v u odnosu na brzinu zvuka v_o, tj. za $v < v_o$. U slučaju brzina jasno je da ova teorija nije primjenljiva, što znači da interakcija magnonskih ~~solitona~~ eksitacija sa malim oscilacijama rešetke ne dovodi do stvaranja stacionarnog stanja kao što je definisano u radu, već su efekti te interakcije mnogo složeniji i u ovom radu nisu razmatrani.

Spektar solitona, kako je pokazano, pri klasičnom kvantovanju, podudara sa spektrom vezanih magnonskih stanja (za $S = 1/2$ i malu anizotropiju), što nam daje za pravo da solitone tumačimo kao talasne pakete spinskih talasa, koji se zahvaljujući nelinearnim efektima ne raspadaju, kao što je to slučaj sa talasnim paketima nastalim linearnom superpozicijom tih talasa. Kao što je ranije spomenuto, to je opšta karakteristika solitona i u drugim sredinama.

L I T E R A T U R A

1./ V.N. Gubankov : Solitony, kvant 11, str. 2, (1983)

2./ G. Goldstein : Klassičeska mehanika ,Nauka , Moskva (1975)

3./ Dj. Mušicki : Uvod u teorijsku fiziku I , ŠIP Srbija Beograd (1975)

4./ A.S. Davydov : Teorija tverdogo tela , Nauka, Moskva (1976)

5./ K. Kopihga, A. M. C. Tinus and W. J. M. de Jonge Phys. Rev. B 29 (5), 2868 (1984)

6./ T. Schneider, Phys. Rev. B. 24 (9), 5327 (1981)

7./ J. Tjon J. Wright :Phys. Rev. B 26 (7) 3470 (1977)