



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



ПРИМЉЕНО:	12.10.2009
ОРГАН/ЈЕД.	БРОЈ
Ободз	9/1371

Gravitaciono polje u linearnoj aproksimaciji - gravitaciono zračenje i gravitacioni talasi

- diplomski rad -

Mentor:

Dr Milan Pantić

Kandidat:

Kristina Đorđević

Novi Sad, 2009

Sadržaj:

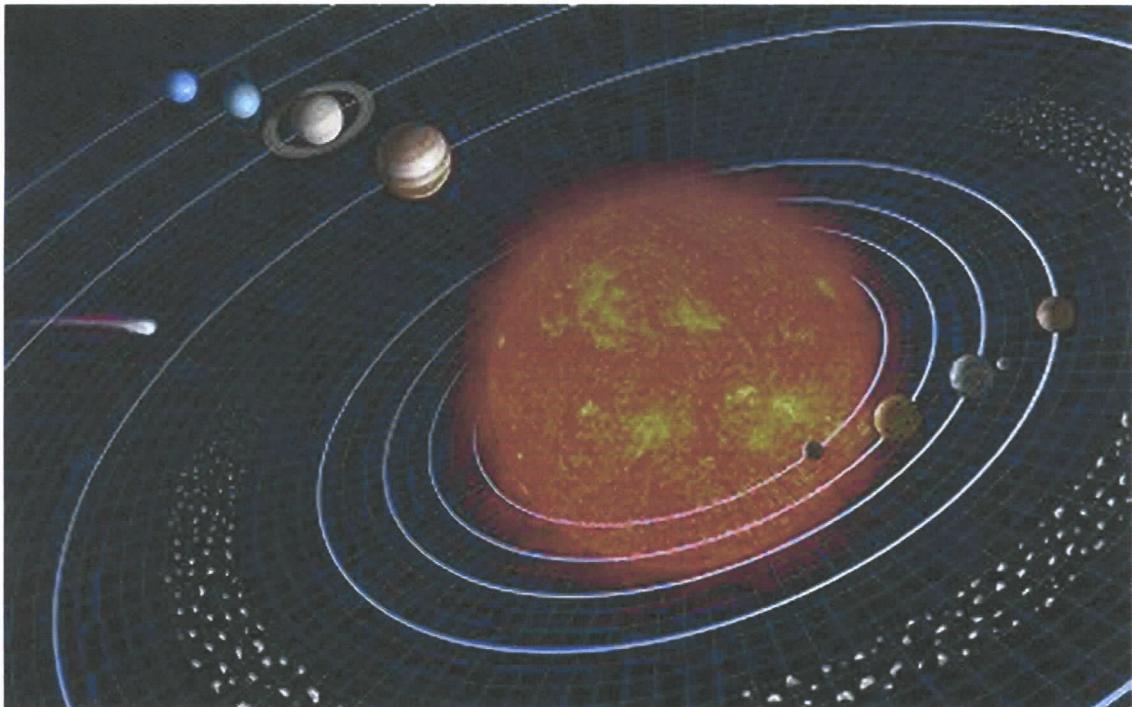
1. Uvod.....	3
2. Gravitaciono polje u linearnoj aproksimaciji	4
2.1. Ajnštajnove jednačine i kalibraciona simetrija	4
2.2. Talasna jednačina	6
2.3. Transverzalna (bez traga) kalibracija.....	7
3. Interakcija gravitacionih talasa sa materijalnom tačkom	8
3.1. Njutnovski i relativistički opis gravitacije	8
3.2. Opis transverzalne (bez traga) kalibracije.....	9
3.3. Opis u sistemu koji slobodno pada.....	10
3.4. Ključne ideje za detektor gravitacionih talasa	11
4. Efektivan tenzor pritiska-energije gravitacionih talasa	14
5. Generalizacija gravitacionih talasa	15
5.1. Spori izvori i polja sa slabom sopstvenom gravitacijom	15
5.2. Spori izvori u slabom polju sa uračunavanjem sopstvene gravitacije	18
5.3. Energija zračenja, ugaoni moment i linearni moment.....	18
6. Primena na binarne sisteme.....	20
6.1. Spiralne talasne forme prvog Njutnovog reda	20
6.2. Spiralne talasne forme koje uključuju postnjutnovske korekcije.....	23
6.3. Talasne forme gravitacionih talasa: spiralna, sjedinjavanje i pravi prsteni	24
6.4. Spiralni šabloni za analizu podataka	27
7. Ostali astrofizički izvori.....	32
7.1. Pulsari	32
7.2. Supernove.....	34
8. Kosmološki izvori.....	35
8.1. Fenomenološke granice	35
8.2. Gravitacioni talasi nastali usled kauzalnog mehanizma	37
8.3. Gravitacioni talasi nastali od kosmičkih struna (stringova).....	39
8.4. Gravitacioni talasi nastali tokom inflacije	40
9. Gravitacioni detektori.....	43
9.1. LIGO.....	43
9.2. GEO 600	48
9.3. VIRGO.....	50



9.4. TAMA 300	51
9.5. LISA	51
10. Komparacija elektromagnetsnih i gravitacionih osobina	53
11. Zaključak.....	55
Literatura	57
Kratka biografija kandidata	58

1. Uvod

Gravitacija odnosno sila teže je fizička interakcija koja izaziva privlačenje između tela, a što je posledica njihove mase. To je jedna od četiri osnovne sile koje deluju u prirodi i predstavlja silu privlačenja između tela, npr. planeta u Sunčevom sistemu, zvezdama u galaksijama itd (slika 1). Gravitacija je sila kojom planeta Zemlja privlači i drži sve materijalne stvari na svojoj površini i još se naziva i Zemljina teža. Generalno, cela struktura univerzuma se bazira na sili gravitacije.



Slika 1. Gravitaciona sila drži planete u orbiti oko Sunca

Jačina gravitacione sile između dva tela zavisi od mase tih tela i udaljenosti između njih, s tim što je upravo сразмерna masama a obrnuto сразмерna kvadratu rastojanja. Tokom ljudske istorije pojavile su se mnoge teorije koje su pokušale da objasne ovaj fenomen. Danas prihvaćena teorija gravitacije je ona koju je 1915. preložio Albert Ajnštajn, a to je Opšta teorija relativnosti. U svetu mikroskopskih veličina, gravitacija je najslabija od četiri osnovne sile prirode. U makroskopskom svetu deluju jedino gravitacione i elektromagnetne sile. Za razliku od elektromagnetskih sile, gravitacione sile su uvek privlačne. U opštoj relativnosti gravitacija nije više sila (kao što je to u Njutnovom zakonu gravitacije) nego je posledica zakrivljenosti prostor-vremena. Značaj proučavanja gravitacionih talasa je mnogobrojan. Jedan od najbitnijih razloga njihove detekcije će dati potvrdu opšte teorije relativnosti. Gravitacioni talasi nose radikalno drugačije informacije o binarnim sistemima kao i o drugim završnim fazama evolucije zvezda. Gravitacioni talasi nam takođe daju informaciju o svemiru kakav je bio 10^{-24} sekundi nakon Velikog Praska. Proučavanjem gravitacionih talasa pokušava se detektovati medijator prenosa gravitacione sile kvantomehaničkom česticom koja se naziva graviton.

2. Gravitaciono polje u linearnoj aproksimaciji

Ajnštajn je 1916. godine shvatio efekat širenja sa krajnjom brzinom u gravitacionoj jednačini i naslutio postojanje talasa – kao rešenja jednačine linearog vakumskog polja. U ovom poglavlju ćemo objasniti Ajnštajnovе jednačine u ravnoj Minkovski metrići, izvesti talasne jednačine i predstaviti rešenje u jednostavnom obliku koristeći odgovarajuću kalibraciju. Dakle, razmatraćemo gravitaciono polje u linearnoj aproksimaciji.

2.1. Ajnštajnovе jednačine i kalibraciona simetrija

Ajnštajn polazi od dejstva S_g gravitacionog polja koje je oblika

$$S_g = \frac{c^3}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \quad (2.1)$$

gde je c brzina svetlosti, G Njutnova konstanta, $g_{\mu\nu}$ je 4-dimenzionala metrika dok je $g = \det(g_{\mu\nu})$. Ravna metrika Minkovskog je $\eta_{\mu\nu} = (-, +, +, +)$, grčkim indeksima obeležavamo prostorno-vremenske koordinate $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ dok latiničnim indeksima obeležavamo prostorne koordinate $i, j = 1, 2, 3$. Takođe, $x^\mu = (x^0, x) = (ct, x)$ i prema tome $d^4x = c dt d^3x$. Parcijalni izvod ∂_μ biće označen sa zarezom, dok kovarijantni izvod sa tačkom i zarezom. Skalarni tenzor R potiče od tenzora krivine:

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma} R_{\rho\mu\sigma\nu} \quad (2.2)$$

$$R_{\mu\rho\sigma}^\nu = \frac{\partial \Gamma_{\mu\sigma}^\nu}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma_{\mu\rho}^\nu}{\partial x^\sigma} + \Gamma_{\lambda\rho}^\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\lambda\sigma}^\nu \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \quad (2.3)$$

gde je

$$\Gamma_{\mu\rho}^\nu = \frac{1}{2} g^{\mu\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\rho} + \frac{\partial g_{\lambda\rho}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^\lambda} \right) \quad (2.4)$$

Tenzor krivine zadovoljava sledeće uslove:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}, \quad R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\rho\sigma\mu\nu}, \quad (2.5)$$

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} + R_{\mu\sigma\nu\rho} + R_{\mu\rho\sigma\nu} = 0, \quad R_{\mu\nu\rho;\sigma}^\lambda + R_{\mu\sigma\nu;\rho}^\lambda + R_{\mu\rho\sigma;\nu}^\lambda = 0 \quad (2.6)$$

Poslednja jednačina predstavlja poznati Bjankijev identitet. Definisaćemo tenzor energije-impulsa materije $T_{\mu\nu}$ iz varijacije dejstva materije S_m usled promene metrike $g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + \delta g_{\mu\nu}$:

$$\delta S_m = \frac{1}{2c} \int d^4x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu} \quad (2.7)$$

Varijacija ukupnog dejstva $S = S_g + S_m$, tj. $\delta S = \delta S_g + \delta S_m = 0$ u odnosu na $g_{\mu\nu}$, daje Ajnštajnove jednačine:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \quad (2.8)$$

Gornja jednačina je nelinearna jednačina. S obzirom da je $\mu = 0,1,2,3$ i $\nu = 0,1,2,3$ Ajnštajnova jednačina sadrži 16 diferencialnih jednačina koje mogu da se svedu na deset ako se koristi simetrija tenzora $T_{\mu\nu}$ i $G_{\mu\nu}$. Zbog Bjankijevog identiteta imamo da je $G_{\mu\nu}{}^\nu = 0$, pa se tih deset jednačina svodi na šest.

Opšta teorija relativnosti je invarijantna u odnosu na grupu transformacija koordinata

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x) \quad (2.9)$$

pa je s obzirom na to, transformacija metrike:

$$g_{\mu\nu}(x) \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} g_{\rho\sigma}(x) \quad (2.10)$$

Prepostavimo da postoji referntni sistem u kojem za dovoljno veliku prostorno-vremensku oblast možemo pisati:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2.11)$$

Izborom ovog refernetnog sistema narušavamo invarijantnost opšte relativnosti pri transformaciji koordinata, ali gejdž simetrija ostaje. Razmotrimo sledeću transformaciju koordinata:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \quad |\partial_\mu \xi_\nu| \leq |h_{\mu\nu}| \quad (2.12)$$

Transformacija metrike je sada data sa:

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \partial_\nu \xi_\mu - \partial_\mu \xi_\nu + h_{\mu\nu} + \mathcal{O}(\partial \xi^2) \quad (2.13)$$

Prema tome, ako predstavimo

$$h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} \quad (2.14)$$

dobijamo sledeće:

$$g'_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu} \quad |h'_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (2.15)$$

Možemo zaključiti da je linearna teorija simetrična u odnosu na spore promene koordinata. Ako posmatramo Lorencove transformacije

$$x^\mu \rightarrow \Lambda_\nu^\mu x^\nu \quad \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma \eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} \quad (2.16)$$

dobijamo transformaciju metrike

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma g_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu} + \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma h_{\rho\sigma}(x) = \eta_{\mu\nu} + h'_{\mu\nu}(x') \quad (2.17)$$

pri čemu je $h'_{\mu\nu}$ tenzor koji potiče iz Lorencove transformacije. To je jasan dokaz da je $h_{\mu\nu}$ takode invarijantan pri translaciji. Linearna teorija je invarijantna u odnosu na Poinkerove¹ (Poincaré) grupe i transformacije $x^\mu \rightarrow x^\mu + \xi^\mu$ sa $|\partial_\nu \xi^\mu| \ll 1$.

2.2. Talasna jednačina

Koristeći metriku $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ možemo napisati linearizovanu Ajnštajnovu jednačinu. U linearnoj aproksimaciji po $h_{\mu\nu}$ Kristofelovi simboli II vrste kao i Rimanov tenzor su prikazani na sledeći način:

$$\Gamma_{\mu\rho}^\nu = \frac{1}{2} \eta^{\nu\lambda} (\partial_\rho h_{\lambda\mu} + \partial_\mu h_{\lambda\rho} - \partial_\lambda h_{\mu\rho}) \quad (2.18)$$

$$R_{\mu\rho\sigma}^\nu = \partial_\rho \Gamma_{\mu\sigma}^\nu - \partial_\sigma \Gamma_{\mu\rho}^\nu + \mathcal{O}(h^2) \quad (2.19)$$

ili eksplisitnije napisano:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2} (\partial_{\rho\nu} h_{\mu\sigma} + \partial_{\sigma\mu} h_{\nu\rho} - \partial_{\rho\mu} h_{\nu\sigma} - \partial_{\sigma\nu} h_{\mu\rho}) \quad (2.20)$$

Koristeći gornju jednačinu jasno se može pokazati da je linerani Rimanov tenzor invarijantan pri transformaciji $h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} - \partial_\mu \xi_\nu - \partial_\nu \xi_\mu$. Jednačinu možemo pojednostaviti ako koristimo kontravarijantni suprotni tenzor:

$$\bar{h}^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} h \quad (2.21)$$

gde je $h = \eta_{\alpha\beta} h^{\alpha\beta}$ i $\bar{h} = -h$, što objašnjava ime. Nakon algebarskih operacija dolazimo do:

$$\square \bar{h}_{\nu\sigma} + \eta_{\nu\sigma} \partial^\rho \partial^\lambda \bar{h}_{\rho\lambda} - \partial^\rho \partial_\nu \bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho \partial_\sigma \bar{h}_{\rho\nu} + \mathcal{O}(h^2) = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\nu\sigma} \quad (2.22)$$

gde je talasni operator $\square = \eta_{\rho\sigma} \partial^\rho \partial^\sigma$. Da bi još pojednostavili gornju jednačinu koristimo Lorencovu kalibraciju:

$$\partial_\nu \bar{h}^{\mu\nu} = 0 \quad (2.23)$$

Tako dobijamo:

$$\square \bar{h}_{\nu\sigma} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\nu\sigma} \quad (2.24)$$

¹ Poincaré-ove grupe su grupe izometrije u prostoru Minkovskog

Ako $\bar{h}^{\mu\nu}$ ne zadovoljava Lorencovu kalibraciju, $\partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = q_\nu$, onda možemo predstaviti transformaciju koordinata kao $\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu} + \eta_{\mu\nu}(\partial_\rho \xi^\rho)$ i $\square \xi_\nu = q_\nu$, tako dobijamo da je $\partial_\mu \bar{h}'^{\mu\nu} = 0$.

Lorencova kalibracija nam nameće četiri uslova koja redukuju deset nezavisnih komponenata 4×4 simetričnog tenzora $h_{\mu\nu}$ u 6 nezavisnih komponenata. Takođe imamo uslov $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ koji predstavlja zakon održanja tenzora energije-impulsa materije u linearnoj teoriji.

2.3. Transverzalna (bez traga) kalibracija

Želimo da proučavamo prostiranje gravitacionih talasa od trenutka njihovog stvaranja. Ako u jednačini (2.24) stavimo da je $T_{\mu\nu} = 0$, dobićemo talasnu jednačinu u vakuumu:

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = 0 \quad (2.25)$$

Gravitacioni talasi se prostiru brzinom svetlosti. U okviru Lorencove kalibracije možemo smatrati transformaciju koordinata tako da $\square \xi_\mu = 0$. Kontravariantni suprotni tenzor se transformise kao $\bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} + \xi_{\mu\nu}$ sa $\xi_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \xi^\rho - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$. Koristeći $\square \xi_\mu = 0$, možemo oduzeti 4 od 6 komponenata od $\bar{h}_{\mu\nu}$. Preciznije, možemo birati ξ^0 tako da je $\bar{h} = 0$ i ξ^i tako da je $h^{i0} = 0$, pa prema tome biće $\partial_0 h^{00} = 0$. Gravitacioni talasi biće vremenski zavisni u polju, pa možemo napisati da je $h^{00} = 0$. Označićemo da polje h_{ij} , koje zadovoljava sledeće transverzalne kalibracije:

$$h^{00} = 0, \quad h^{i0} = 0, \quad \partial_i h^{ij} = 0, \quad h^{ii} = 0, \quad (2.26)$$

je transverzalni tenzor h_{ij}^{TT} . Za ravan talas sa talasnim vektorom \vec{k} i pravcem prostiranja $\vec{n} = \frac{\vec{k}}{k}$, transverzalni uslov se svodi na $n^i h_{ij}^{TT} = 0$. Možemo prepostaviti da se ravan talas prostire duž z-ose, pa prema tome:

$$h_{ij}^{TT}(t, z) = \begin{pmatrix} h_+ & h_x & 0 \\ h_x & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cos \left[\omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] \quad (2.27)$$

gde sa h_+ i h_x označavamo dva nezavisna stanja polarizacije. Možemo uvesti operator projekcije $P_{ij}(\vec{n}) = \delta_{ij} - n_i n_j$, koji zadovoljava sledeće uslove:

$$P_{ij} = P_{ji} \quad n^i P_{ij} = 0 \quad P_{ij} P^{jk} = P_i^k \quad P_{ii} = 2 \quad (2.28)$$

kao i operator Λ

$$\Lambda_{ij,kl}(\vec{n}) = P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl} \quad (2.29)$$

tada ćemo dobiti transverzalno polje za opšti pravac prostiranja

$$h_{ij}^{TT} = \Lambda_{ij,kl} h_{kl} \quad (2.30)$$

gde je h_{kl} dato Lorenzovom kalibracijom ali ne uvek i transverzalnom kalibracijom.

Gravitacioni talasi su opisani u transverzalnoj kalibraciji sa 2×2 matricom u ravni ortogonalno pravcu prostiranja \vec{n} . Ako izvršimo rotaciju ψ oko ose \vec{n} , dobicemo:

$$h_+ \pm i h_+ \rightarrow e^{\mp 2i\psi} (h_+ \pm i h_+) \quad (2.31)$$

U fizici elementarnih čestica projekcija ugaonog momenta na pravac prostiranja se naziva helicitet: $\mathcal{H} = \vec{J} \cdot \vec{n} = \vec{S} \cdot \vec{n}$, gde je \vec{S} spin čestice. Pri rotaciji ψ duž pravca prostiranja, spiralno stanje se transformiše kao $h \rightarrow e^{i\mathcal{H}\psi} h$. Prema tome, $h_+ - ih_+$ je spiralno stanje i graviton je čestica spina 2.

3. Interakcija gravitacionih talasa sa materijalnom tačkom

3.1. Njutnovski i relativistički opis gravitacije

Razmatraćemo dve materijalne tačke, označene slovima A i B, koje slobodno padaju kroz 3D Euklidski prostor pod uticajem spoljašnjeg Njutnovog potencijala Φ . Pretpostavimo da u trenutku $t = 0$ čestice su odvojene malom razdaljinom ξ i imaju iste početne brzine $V_A(t=0) = V_B(t=0)$. S obzirom da su čestice na malom rastojanju, biće pod dejstvom različitog gravitacionog potencijala Φ i različitog ubrzanja $g = -\nabla\Phi$. U trenutku $t > 0$, $V_A(t) \neq V_B(t)$. Označimo sada rastojanje vektorom $\xi = X_A - X_B$ u 3D euklidskom prostoru. Dalje imamo:

$$\frac{d^2\xi^i}{dt^2} = - \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \right)_B + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} \right)_A \simeq - \left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^i \partial x^j} \right) \xi^j \equiv \xi_j^i \xi^j \quad (3.1)$$

gde je druga jednakost dobijena nakon razvoja u Tejlorov red oko pozicije čestice A. Tenzor ξ_j^i se zove Njutnovski tenzor, i on meri nehomogenost Njutbove gravitacije. Taj tenzor opisuje uticaj Meseca na plimu i oseku okeana na Zemlji.

Sada ćemo uopštiti Njutnov zakon na Ajnštajnovu teoriju. U opštoj relativnosti, probne čestice bez spina se kreću duž geodezijskih linija čije su jednačine

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu(x) \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} = 0 \quad (3.2)$$

Razmotrimo sada dva geodezijaka na maloj udaljenosti, označena sa A i B, parametrizovana sa $x^\mu(\tau)$ i $x^\mu(\tau) + \xi^\mu(\tau)$, sa $|\xi^\mu|$ manjoj nego na tipičnoj skali na kojoj se gravitaciono polje

menja. Ako proširimo geodezijsku jednačinu čestice B oko položaja čestice A, i oduzmemos od geodetske jednačine čestice A, dobijemo

$$\nabla_u \nabla_u \xi^\mu = -R_{\nu\rho\sigma}^\mu \xi^\rho \frac{dx^\nu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \quad (3.3)$$

gde je $u^\beta = \frac{dx^\beta}{d\tau}$ 4-brzina. Onda možemo predstaviti kovarijantni izvod duž krive $x^\mu(\tau)$

$$\nabla_u \xi^\mu = \frac{d\xi^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\rho\sigma}^\mu \xi^\rho \frac{dx^\sigma}{d\tau} \quad (3.4)$$

Prema tome, dve vremenske geodezijske linije na maloj udaljenosti biće pod uticajem sile gravitacije proporcionalne Rimanovom tenzoru.

3.2. Opis transverzalne (bez traga) kalibracije

Opisaćemo interakciju gravitacionih talasa sa materijalnom tačkom u transverzalnoj kalibraciji. Uzmimo u razmatranje za test česticu A koja miruje u vremenu $\tau = 0$. Koristeći geodezijsku jednačinu (3.2), dobijamo sledeće:

$$\left. \frac{d^2 x^i}{d\tau^2} \right|_{\tau=0} = -\Gamma_{\rho\sigma}^i \left. \frac{dx^\rho}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau} \right|_{\tau=0} = -\Gamma_{00}^i \left. \frac{dx^0}{d\tau} \frac{dx^0}{d\tau} \right|_{\tau=0} \quad (3.5)$$

U početnom trenutku čestica je mirovala $\left(\frac{dx^\mu}{d\tau} \right)_{\tau=0} = (c, 0)$, tako da je

$$\Gamma_{00}^i = \frac{1}{2} \eta^{ij} (\partial_0 h_{0j} + \partial_0 h_{j0} - \partial_j h_{00}) \quad (3.6)$$

U transverzalnoj kalibraciji je $h_{00} = 0$ i $h_{0j} = 0$, pa je $(\Gamma_{00}^i)_{\tau=0} = 0$. Prema tome, zaključujemo da u transverzalnoj kalibraciji, ako je vreme $\tau = 0$, $\frac{dx^i}{d\tau} = 0$, takođe je i $\frac{d^2 x^i}{d\tau^2} = 0$ pa čestica ostaje u stanju mirovanja pre dolaska gravitacionog talasa. Koordinate u transverzalnoj kalibraciji se izdužuju kada stigne gravitacioni talas pa početne koordinate materijalne tačke se ne menjaju. Ono što se menja je udaljenost između dve čestice i fizički efekat čiji je indikator odgovarajuća razdvojenost.

Za prostiranje talasa duž z-ose, metrika je:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dz^2 + dy^2 \left[1 - h_+ \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] + dx^2 \left[1 + h_+ \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \right] + 2 dx dy h_x \cos \omega \left(t - \frac{z}{c} \right) \quad (3.7)$$

Ako čestice A i B postavimo u početku duž x-ose, dobijemo:

$$s \simeq L \left(1 + \frac{h_+}{2} \cos \omega t \right) \quad (3.8)$$

gde je L početno, nepreturbirano rastojanje između čestica A i B.

3.3. Opis u sistemu koji slobodno pada

Moguće je da prikažemo promenu prostorno-vremenskih koordinata koju nam daje tačka Q , pri tome ćemo uzeti da je $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu(Q) = 0$ i $\left(\frac{d^2x^\mu}{dt^2}\right)_Q = 0$. U ovom sistemu, u jednoj tački prostora i u jednom trenutku vremena, materijalna tačka slobodno pada (FF^2). Ovaj sistem može se eksplicitno konstruisati korišćenjem normalnih Rimanovih koordinata. U stvari moguće je napraviti sistem takav da materijalna tačka slobodno pada duž geodezidske linije koristeći normalne Fermi koordinate³.

Sada ćemo predstaviti sistem koji slobodno pada u kojem se nalazi čestica A sa prostornom koordinatom $u \cdot x^J = 0$, dok su vremenske koordinate jednake odgovarajućem vremenu $x^0 = \tau$. Definicijom sistema koji slobodno pada, metrika se u početku redukuje u metriku Minkovskog i svi početni izvodi nestaju, pa je:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + \mathcal{O}\left(\frac{|x|^2}{\mathcal{R}^2}\right) \quad (3.9)$$

Ovde je \mathcal{R} radijus krivine $\mathcal{R}^{-2} = |R_{\mu\nu\rho\sigma}|$. Ako izvršimo eksplicitno računanje do drugog reda po x , dobijemo:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -c^2 dt^2 [1 + R_{i0j0} x^i x^j] - 2cdt dx^i \left(\frac{2}{3} R_{0jik} x^j x^k \right) \\ & + dx^i dx^j \left[\delta_{ij} - \frac{1}{3} R_{ijkl} x^k x^l \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Za eksperimente koji se odnose na gravitacione talase koji su locirani na Zemlji, interferometar nije u slobodnom padu u odnosu na gravitaciju Zemlje. Detektor je izložen ubrzajuju $a = -g$ i poštuje lokalni inercijalni sistem. Prema tome, efekat gravitacionih talasa na materijalnu tačku nadmeće se sa ostalim efektima. Trebali bismo se ograničiti na frekvenciju između $10\text{-}10^3$ Hz, u kojoj su drugi efekti subdominantni i/ili statični.

Sada ćemo da nademo jednačinu geodezijaka u sistemu koji slobodno pada u kojem se nalazi čestica A. Imamo:

$$\nabla_u \nabla_u \xi^\alpha = u^\beta \nabla_\beta (u^\lambda \nabla_\lambda \xi^\alpha) = u^\beta u^\lambda (\partial_{\beta\lambda} \xi^\alpha + \Gamma_{\lambda\sigma,\beta}^\alpha \xi^\sigma) \quad (3.11)$$

² Free-falling

³ Fermi koordinate su lokalne koordinate koje su prilagođene geodezidskoj liniji

gde u poslednjoj jednakosti koristimo $\Gamma_{\lambda\sigma}^\alpha = 0$. Pošto smo pretpostavili da čestice u početnom stanju miruju imamo da je $u^\beta = \delta_0^\beta$. Koristeći da je $\xi^0 = 0$ i činjenicu da $\Gamma_{0k,0}^j$ možemo da zanemarimo kada računamo poziciju A, dobijamo:

$$\nabla_u \nabla_u \xi^j = \frac{d^2 \xi^j}{d\tau^2} \implies \frac{d^2 \xi^j}{d\tau^2} = -R_{0k0}^j \xi^k \quad (3.12)$$

Da bi dalje integralili računanje treba da procenimo vrednost Rimanovog tenzora R_{0k0}^j . U linearnoj teoriji Rimanov tenzor je invarijantan na transformaciju koordinata, pa ga možemo izračunati u transverzalnoj kalibraciji. Dobijamo sledeće:

$$R_{j0k0}^{TT} = -\frac{1}{2c^2} \ddot{h}_{jk}^{TT} \quad (3.13)$$

Prema tome

$$\frac{d^2 \xi^j}{dt^2} = \frac{1}{2} \ddot{h}_{jk}^{TT} \xi^k \quad (3.14)$$

U zaključku, u sistemu koji slobodno pada uticaj gravitacionih talasa na materijalnu tačku mase m može se opisati Njutnovom silom $F_i = \frac{m}{2} \ddot{h}_{jk}^{TT} \xi^j$. Opisivanje u sistemu koji slobodno pada je korisno i jednostavno dokle god možemo da napišemo metriku kao $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \mathcal{O} \frac{x^2}{\mathcal{R}^2}$ i dokle god smo u mogućnosti da ignorišemo grešku $\frac{x^2}{\mathcal{R}^2}$. S obzirom da je $\mathcal{R}^{-2} = |R_{i0j0}| \sim \ddot{h} \sim \frac{h}{\lambda_{GW}^2}$ imamo da je $\frac{x^2}{\mathcal{R}^2} \simeq \frac{L^2 h}{\lambda_{GW}^2}$. Ako uporedimo sa $\frac{\delta L}{L} \sim h$, dobićemo da je $\frac{L^2}{\lambda_{GW}^2} \ll 1$. Ove uslove zadovoljavaju detektori na Zemlji zato što je $L \sim 4$ km i $\lambda_{GW} \sim 3000$ km, ali ne zadovoljavaju detektori u svemiru koji imaju $L \sim 5 \cdot 10^6$ km a mogu da posmatraju gravitacione talase sa talasnom dužinom manjom od L .

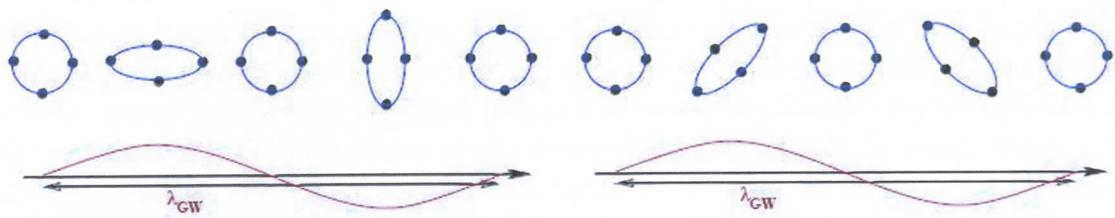
3.4. Ključne ideje za detektor gravitacionih talasa

Da bi ilustrovali uticaj gravitacionih talasa na česticu koja slobodno pada, uzećemo materijalne tačke poređane u krug, koje su u početnom trenutku u stanju mirovanja, kako je prikazano na slici 2. Odredićemo kretanje čestice uzimajući u obzir + i x polarizacije odvojeno. Ako je samo + polarizacija prisutna, imamo sledeće:

$$h_{ij}^{TT} = h_+ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sin \omega t, \quad \xi_i = [x_0 + \delta x(t), y_0 + \delta y(t)] \quad (3.15)$$

gde su x_0 i y_0 neperturbowane pozicije u trenutku $t = 0$. Prema tome

$$\delta x(t) = \frac{h_+}{2} x_0 \sin \omega t \quad \delta y(t) = -\frac{h_+}{2} y_0 \sin \omega t \quad (3.16)$$

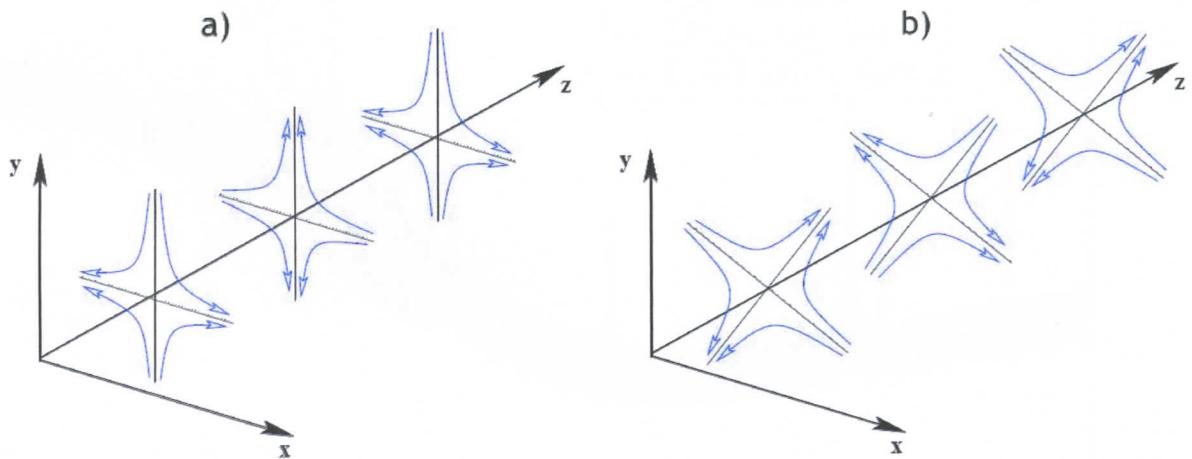


Slika 2. Prikazane su materijalne tačke koje se duž prstena kreću kao rezultat interakcije prostiranja gravitacionih talasa u pravcu normalnom na ravan prstena. Na levom delu slike je talas sa + polarizacijom, a na desnoj strani je talas sa x polarizacijom.

Ako je samo x polarizacija prisutna, jasan račun nam daje sledeće:

$$\delta x(t) = \frac{h_+}{2} y_0 \sin \omega t \quad \delta y(t) = \frac{h_+}{2} x_0 \sin \omega t \quad (3.17)$$

Polarizacije + i x se razlikuju za rotaciju od 45^0 . Na slici 3 su prikazane linije sile koje su povezane sa polarizacijom + i x .



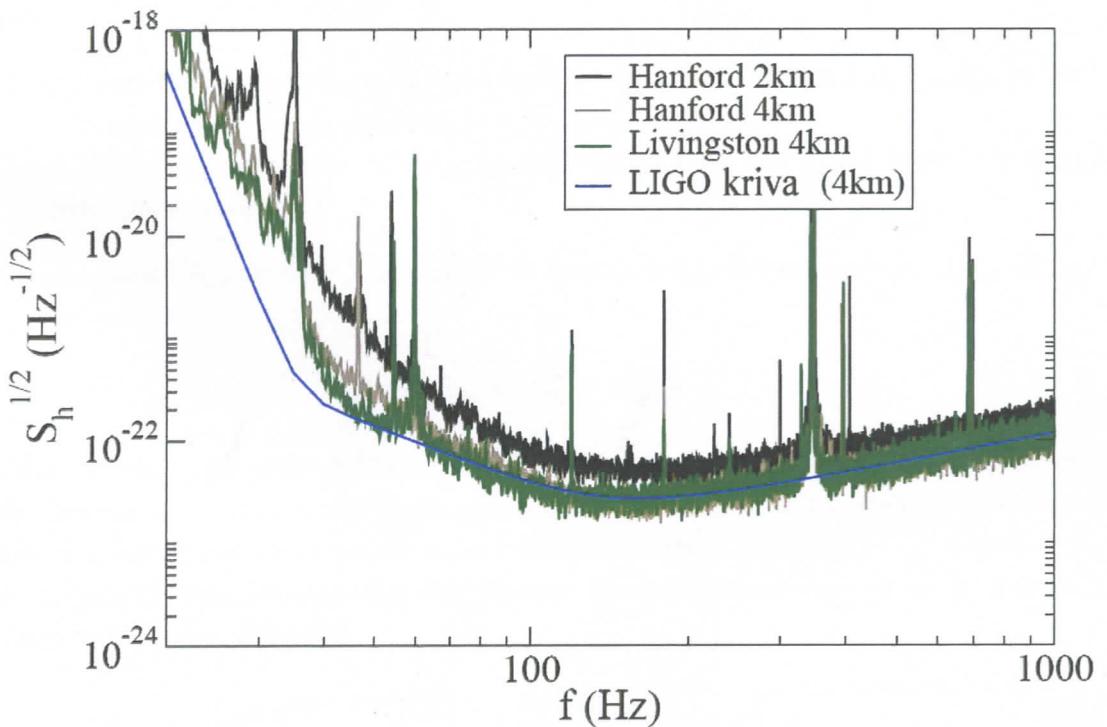
Slika 3. Linije sile povezane sa: a) + polarizacijom i b) x polarizacijom

Najjednostavniji detektor gravitacionih talasa je telo mase m na udaljenosti L od referentne laboratorijske tačke, povezani sa rezonantnim izvorom frekvencije Ω i faktorom kvaliteta Q . Ajnštajnova jednačina za devijaciju geodesika predviđa da infinitezimalno pomeranje ΔL mase duž linije razdvajanja od ravnotežnog položaja zadovoljava sledeću jednačinu:

$$\ddot{\Delta L}(t) + 2 \frac{\Omega}{Q} \dot{\Delta L}(t) + \Omega^2 \Delta L(t) = \frac{L}{2} [F_+ h_+(t) + F_x h_x(t)] \quad (3.18)$$

gde su $F_{+,x}$ koeficijenti reda jedinice koji zavise od pravca izvora i polarizacionog ugla gravitacionih talasa.

Laserski interferometri su gravitacioni detektori koji su napravljeni od dva kraka sa kilometarskim skalama i udubljenjima na krajevima, koji su normalni jedan na drugi i sa dva ogledala koja vise na žicama na kraju svakog udubljenja. Malo pomeranje ΔL ogledala koje prouzrokuje prolazanje gravitacionih talasa se nadgleda sa velikom preciznošću merenjem relativne optičke faze između svetlosnih putanja u svakom kraku interferometra. Ogledala se klate sa faktorom kvaliteta Q veoma visoko i rezonantna frekvencija Ω je mnogo manja (~ 1 Hz) nego tipična frekvencija gravitacionih talasa (~ 100 Hz). U ovom slučaju gornja jednačina, napisana u Furierovom domenu, redukuje se na $\frac{\Delta L}{L} \sim h$. Tipična amplituda gravitacionih talasa od 100 Hz emitovanih sa binarnog sistema u Virgo⁴ skupu galaksija (~ 20 Mpc udaljenosti), što je najveća udaljenost koju prva generacija interferometra na Zemlji može da testira, je $\sim 10^{-21}$. To znači da je $\Delta L \sim 10^{-18}$ m, što je veoma mali broj. To se može shvatiti kao veoma neohrabujuća činjenica posebno ako smatramo da indikator test-mase kretanja sa svetlošću talasne dužine je približno 10^{12} puta veći. Ipak se ova preciznost može eksperimentalno demonstrirati.



Slika 4. Na slici su prikazani kvadratni koren šuma spektralne gustine u funkciji frekvencije za tri LIGO detektora zajedno sa LIGO krivom šuma namenjene osetljivosti

Elektromagnetski signal koji izlazi iz tamne tačke interferometra sadrži signal gravitacionih talasa ali takođe i šum. Na primer, termalni šum sa suspendovanog sistema kao i samo ogledalo, mogu da pomeraju ogledalo imitirajući efekat gravitacionog talasa. Srednji kvadratni koren šuma je opšte predstavljen u terminu snage šuma po jedinici frekvencije S_h

⁴ Virgo – Devica je jedna od konstelacija zodiaka. To je drugo po veličini sazvezđe na nebu.

pomoću relacije $h \sim \sqrt{S_h(f)} \Delta f \sim \Delta L / L$, gde ΔL predstavlja razliku položaja ogledala koja je nastala usled šuma, a Δf predstavlja širinu opsega frekvencije. Na slici 4 je predstavljena kriva šuma LIGO⁵-a (juna 2006). Interferometri trenutno rade sa osetljivošću za skoro ceo opseg frekvencije.

4. Efektivan tenzor pritiska-energije gravitacionih talasa

Do sada smo definisali gravitacione talase kao fluktacije ravnog prostora-vremena. U ovom poglavlju želimo da budemo opštiji i da razmotrimo gravitacione talase kao perturbacije opšte pozadine $\bar{g}_{\mu\nu}$, pa prema tome

$$g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (4.1)$$

Potreban nam je kriterijum da bismo odredili šta je pozadina a šta je perturbacija. Postoje dva slučaja:

1. $\bar{g}_{\mu\nu}$ ima tipičnu skalu L_B i $h_{\mu\nu}$ ima tipičnu talasnu dužinu λ sa $\lambda \ll L_B$; $h_{\mu\nu}$ je mali talas (greben) na ravnoj pozadini
2. $\bar{g}_{\mu\nu}$ ima frekvencije do f_B i $h_{\mu\nu}$ je različito od nule oko f , pri tome je $f \gg f_B$; pozadina je statična.

Sada ćemo razviti $R_{\mu\nu}$ do $\mathcal{O}(h^2)$. S obzirom da imamo dva mala parametra h i λ/L_B (ili f_B/f), dobijamo sledeće

$$R_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{(1)} + R_{\mu\nu}^{(2)} + \dots \quad (4.2)$$

gde $\bar{R}_{\mu\nu}$ se odnosi na niske frekvencije, $R_{\mu\nu}^{(1)}$ na visoke frekvencije, a $R_{\mu\nu}^{(2)}$ sadrži niske i visoke frekvencije. Veličine koje imaju nadvučenu crtu su računate korišćenjem pozadinske metrike $\bar{g}_{\mu\nu}$; oni imaju samo modele niske frekvencije. Gornji indeksi (1) i (2) odnose se na to da se veličine računaju kao linearna odnosno kvadratna aproksimacija po h . Koristeći Ajnštajbove jednačine dobijamo

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -[R_{\mu\nu}^{(2)}]^{niska\ frekvencija} + \frac{8\pi G}{c^4} \left[T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \right]^{niska\ frekvencija} \quad (4.3)$$

Mi uvodimo skalu l koju ćemo predstaviti kao $\lambda \ll l \ll L_B$, i aritmetičku sredinu prostorne zapremine sa l^3 . Aritmetičku sredinu ćemo označiti sa $\langle \rangle$. Mode sa kratkim talasima imaju aritmetičku vrednost 0, dok je moda sa talasnom dužinom L_B konstantna. Sada možemo predhodnu jednačinu napisati na sledeći način

⁵ LIGO – Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory. LIGO raspolaže sa dve opservatorije: LIGO Livingston Observatory i LIGO Hanford Observatory

$$\bar{R}_{\mu\nu} = -\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle + \frac{8\pi G}{c^4} \langle T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} T \rangle \equiv -\langle R_{\mu\nu}^{(2)} \rangle + \frac{8\pi G}{c^4} \langle \bar{T}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \bar{T} \rangle \quad (4.4)$$

Ako definišemo efektivni tenzor pritiska-energije gravitacionih talasa kao

$$t_{\mu\nu} = -\frac{c^4}{8\pi G} \langle R_{\mu\nu}^{(2)} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} R^{(2)} \rangle \quad (4.5)$$

onda dobijamo

$$\bar{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{R} = \frac{8\pi G}{c^4} (\bar{T}_{\mu\nu} + t_{\mu\nu}) \quad (4.6)$$

Eksplisitna izračunavanja dalje od izvora daju

$$t_{\mu\nu} = \frac{c^4}{32\pi G} \langle \partial_\mu h_{\alpha\beta} \partial_\nu h^{\alpha\beta} \rangle \quad (4.7)$$

Za ravne talase, koristeći transverzalnu kalibraciju, dobijamo

$$t_{00} = \frac{c^2}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle = \frac{c^2}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_x^2 \rangle \quad (4.8)$$

dok je fluks energije po jedinici površine

$$\frac{dE}{dt dA} = \frac{c^3}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_x^2 \rangle \quad (4.9)$$

Za supernove $\frac{dE}{dt dA} \sim \frac{c^3 f^2 h^2}{16\pi G} \sim 400 \text{ J/(cm}^2\text{sec)}$, gde smo uzeli da je $h = 10^{-21}$ i $f = 1 \text{ kHz}$. Eksplozija gravitacionih talasa traje nekoliko milisekundi. To je informacija koju poredimo sa energijom fluksa neutrina ($\sim 10^5 \text{ J/(cm}^2\text{sec)}$) i fluksa fotona (optičke radijacije) koja je $\sim 10^4 \text{ J/(cm}^2\text{sec)}$ iz supernove. Neutrini i optička radijacija su emitovani tokom nekoliko sekundi i jedne nedelje, respektivno.

5. Generalizacija gravitacionih talasa

5.1. Spori izvori i polja sa slabom sopstvenom gravitacijom

U ovom poglavljiju procenićemo značaj doprinosa perturbacije metrike pod pretpostavkom da je unutrašnje kretanje izvora sporo u poređenju sa brzinom svetlosti. Takođe prepostavljamo da se sopstvena gravitacija može zanemariti. U narednom delu ćemo diskutovati kako da proširimo rezultate na izvore kada se sopstvena gravitacija ne može zanemariti. Počećemo od

$$\square \bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}, \quad \partial_\mu \bar{h}^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (5.1)$$

i uvešćemo retardiranu Grinovu funkciju



$$G(x - x') = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - x'|} \delta\left(t - \frac{|x - x'|}{c} - t'\right) \quad (5.2)$$

koja zadovoljava $\square_x G(x - x') = \delta^{(4)}(x - x')$. Rešenje jednačina (5.1) može da se napiše kao

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = -\frac{16\pi G}{c^4} \int d^4x' G(x - x') T_{\mu\nu}(x') \quad (5.3)$$

Izvan izvora, koristeći transverzalnu kalibraciju, imamo

$$\bar{h}_{ij}^{TT}(t, x) = \Lambda_{ij,kl}(n) \frac{4G}{c^4} \int d^3x' \frac{1}{|x - x'|} T_{kl}\left(t - \frac{|x - x'|}{c}; x'\right) \quad (5.4)$$

Ako sa d označimo tipičnu veličinu izvora i prepostavimo da je velika udaljenost od izvora $r \gg d$, pa shodno sa tim možemo da napišemo da je $|x - x'| = r - x' \cdot n + \mathcal{O}(d^2/r)$. Tada ćemo dobiti sledeće

$$\bar{h}_{ij}^{TT}(t, x) \simeq \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(n) \int_{|x'| < d} d^3x' T_{kl}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{x' \cdot n}{c}; x'\right) \quad (5.5)$$

Možemo da pojednostavimo gornju jednačinu ako prepostavimo da je tipična brzina unutar izvora mnogo manja nego brzina svetlosti c . Ako je ω tipična frekvencija povezana sa izvorom kretanja onda će tipična brzina izvora biti $v \sim \omega d$. Kao što ćemo videti u nastavku, signal gravitacionih talasa je određen multipolnim momentima, pa prema tome $\omega_{GW} \sim \omega \sim v/d$ i $\lambda_{GW} \sim (c/v)d$. Ako je $v/c \ll 1$, imamo $\lambda_{GW} \gg d$.

Ako primenimo Furierovu analizu, možemo da napišemo sledeće

$$T_{kl} = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \bar{T}_{kl}(\omega, k) \times \exp\left[-i\omega\left(t - \frac{r}{c} + \frac{x' \cdot n}{c}\right) + ik \cdot x'\right] \quad (5.6)$$

koristeći da je $\omega x' \cdot n \sim \omega d/c \ll 1$, možemo da razvijemo eksponencijalni deo u Tejlorov red pa ćemo dobiti

$$\begin{aligned} h_{ij}^{TT}(t, x) \simeq & \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(n) \left[\int d^3x T^{kl}(t, x) + \frac{1}{c} n_m \frac{d}{dt} \int d^3x T^{kl}(t, x) x^m + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2c^2} n_m n_p \frac{d^2}{dt^2} \int d^3x T^{kl}(t, x) x^m x^p + \dots \right] \Big|_{t=r/c} \end{aligned} \quad (5.7)$$

Gornji izraz je tačan u linearnoj teoriji gravitacije i za zanemarljive izvore sopstvene gravitacije; za izvore čija dinamika nije određena gravitacionim silama. U gornjoj jednačini multipolovi su prigušeni faktorom v/c . Da bi gornju jednačinu pojednostavili, možemo predstaviti moment T^{ij} preko izraza za moment T^{00} i T^{0i} . Najpre ćemo uvesti momente gustine mase

$$M = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, x) \quad (5.8)$$

$$M^i = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, x) x^i \quad (5.9)$$

$$M^{ij} = \frac{1}{c^2} \int d^3x T^{00}(t, x) x^i x^j \quad (5.10)$$

i nametnućemo zakon konzervacije $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ koji važi u linearnoj gravitaciji. Ako uzmemo da je $v = 0$, imamo $\partial_0 T^{00} + \partial_i T^{i0} = 0$. Integracijom ove jednačine po zapremini koja sadrži izvor, dobićemo očuvanje mase $\dot{M} = 0$, sledi

$$c\dot{M}^{ij} = \int_V d^3x x x^i x^j \partial_0 T^{00} = - \int_V d^3x x x^i x^j \partial_k T^{0k} = \int_V d^3x (x^j T^{0i} + x^i T^{0j}) \quad (5.11)$$

Konačno dobijamo

$$\ddot{M}^{ij} = 2 \int_V d^3x T^{ij} \quad (5.12)$$

Jednačinu (5.7) možemo sada napisati u sledećem obliku

$$h_{ij}^{TT}(t, x) = \frac{1}{r} \frac{2G}{c^4} \Lambda_{ij,kl}(\mathbf{n}) \ddot{M}^{kl} \left(t - \frac{r}{c} \right) \quad (5.13)$$

gde je M^{kl} dato jednačinama (5.8, 5.9 i 5.10). Izraz T^{00}/c^2 u jednačinama (5.8, 5.9 i 5.10) je gustina mase. Osim mase u stanju mirovanja može da sadrži i članove određene kinetičkom i potencijalnom energijom. Za izvore koji imaju jaka gravitaciona polja, kao što su neutronske⁶ zvezde i crne rupe⁷, gustina mase može da zavisi takođe i od energije veze. Samo za slaba polja i male brzine, član T^{00}/c^2 se redukuje na gustinu mase mirovanja ρ .

Sada ćemo posvetiti pažnju binarnim sistemima i pulsarima⁸, pa je pogodno da izračunamo eksplicitno h_+ i h_x . Ako prepostavimo da se gravitacioni talas prostire duž pravca određenog ortom $\mathbf{n} = (\cos \phi \sin \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \theta)$, računanjem ćemo dobiti:

$$h_+ = \frac{G}{rc^4} \{ \ddot{M}_{11} (\sin^2 \phi - \cos^2 \theta \cos^2 \phi) + \ddot{M}_{22} (\cos^2 \phi - \cos^2 \theta \sin^2 \phi) - \ddot{M}_{33} \sin^2 \theta - \\ - \ddot{M}_{12} \sin 2\phi (1 + \cos^2 \theta) + \ddot{M}_{13} \cos \phi \sin 2\theta + \ddot{M}_{23} \sin 2\theta \sin \phi \} \quad (5.14)$$

⁶ Neutronske zvezde su vrste zvezda, ili preciznije zvezdanog ostatka, koji može da nastane usled gravitacionog kolapsa masivne zvezde tokom supernove.

⁷ Crne rupe su objekti čije je gravitaciono polje toliko jako da nijedan oblik materije ili radijacije ne može da se otisne od nje, uključujući i kvante svetlosti. Opšta teorija relativnosti crnu rupu opisuje kao mesto u kome je prostor-vreme beskonačno zakrivljeno.

⁸ Pulsari su neutronske zvezde koje izuzetno brzo rotiraju. Pulsari u pravcu ose svog magnetnog polja imaju jako elektromagnetsko zračenje, najčešće u obliku radio-talasa. Frekvencija pulsiranja poklapa sa frekvencijom rotacije pulsara.

$$h_x = \frac{2G}{rc^4} \left\{ \frac{1}{2} (\ddot{M}_{11} - \ddot{M}_{22}) \cos \theta \sin 2\phi - \ddot{M}_{12} \cos \theta \cos 2\phi - \ddot{M}_{13} \sin \theta \sin \phi + \right. \\ \left. + \ddot{M}_{23} \cos \phi \sin \theta \right\} \quad (5.15)$$

Ove veličine ulaze u efektivni tenzor pritiska-energije i sa njim se dalje ulazi u Ajnštajnove jednačine.

5.2. Spori izvori u slabom polju sa uračunavanjem sopstvene gravitacije

Izvođenjem kvadrupolnih formula (5.13) u linearnoj gravitaciji ne može se primeniti na sisteme kao što su binarne zvezde, čijom dinamikom dominira gravitaciona sila. Ustavari, zbog zakona održanja koji važi u linearnoj teoriji gravitacije $\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$, dva tela će se kretati duž geodezijaka u ravnem prostoru-vremenu Minkovskog.

U opštoj teoriji relativnosti možemo da definišemo polje $H_{\mu\nu}$ kao

$$\sqrt{-g} g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - H^{\mu\nu} \quad (5.16)$$

gde se u limitu slabih polja $H^{\mu\nu}$ podudara sa kontravarijantnim suprotnim tenzorom (2.21). Nameće se harmonijska kalibracija $\partial_\mu H^{\mu\nu} = 0$ koja se izvodi iz

$$\square H_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4} [(-g)T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}] \quad (5.17)$$

gde je $\tau_{\mu\nu}$ pseudo-tenzor koji zavisi od $H_{\mu\nu}$ koji ima eksplisitnu formu. Zakon održanja se u ovom slučaju prikazuje kao

$$\partial_\mu [(-g)T^{\mu\nu} + \tau^{\mu\nu}] = 0 \quad (5.18)$$

Možemo popraviti izvođenje u linearnoj gravitaciji i to zamenom $T_{\mu\nu} \rightarrow (-g)T_{\mu\nu} + \tau_{\mu\nu}$. Tako ćemo dobiti $\int T_{00} x^i x^j d^3x \rightarrow \int (T_{00} + \tau_{00}) x^i x^j d^3x$. Za izvore za koje je karakteristična slaba gravitacija τ_{00} je zanemarljivo u odnosu na T_{00} . Krucijalno je da u računu uzmemu u obzir korekciju drugog reda u $h_{\mu\nu}$. U suprotnom izvor bi bio obavezan da se pomera duž geodezijaka u prostoru-vremenu Minkovskog, umesto da se kreće u ograničenoj orbiti.

5.3. Energija zračenja, ugaoni moment i linearni moment

Ako koristimo rezultate iz poglavlja 4 možemo izračunati snagu zračenja na sledeći način

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{r^2 c^3}{32\pi G} \langle \dot{h}_{ij}^{TT} \dot{h}_{ij}^{TT} \rangle = \frac{G}{8\pi c^5} \Lambda_{kl,mp}(\mathbf{n}) \langle \ddot{Q}_{kl} \ddot{Q}_{mp} \rangle \quad (5.19)$$

gde uvodimo kvadrupolni tenzor Q_{ij} na sledeći način:

$$Q_{ij} = M_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} M_{kk} \quad (5.20)$$

Koristeći sledeće relacije

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j = \frac{1}{3} \delta_{ij} \quad (5.21)$$

$$\int \frac{d\Omega}{4\pi} n_i n_j n_k n_l = \frac{1}{15} (\delta_{ij} \delta_{kl} + \delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (5.22)$$

dobijamo izraz za totalnu snagu zračenja

$$P = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle \quad (5.23)$$

U literaturi ova jednačina predstavlja kvadupolnu formulu.

Gravitacioni talasi ne samo da nose sa izvora energiju nego i ugaoni⁹ i linearni moment. Ugaoni moment zračenja je

$$\frac{dL^i}{dt} = \frac{2G}{5c^5} \epsilon^{ijk} \langle \ddot{Q}_{jl} \ddot{Q}_{lk} \rangle \quad (5.24)$$

dok je linearни moment zračenja dat na sledeći način

$$\frac{dP^i}{dt} = -\frac{G}{8\pi c^5} \int d\omega \ddot{Q}_{jk}^{TT} \partial^i \ddot{Q}_{jk}^{TT} \quad (5.25)$$

Prilikom transformacije, $x \rightarrow -x$, masa kvadrupola se ne menja i integral u gornjoj jednačini je neparan i jednak je nuli. Prvi nenulti doprinos je reda $\mathcal{O}(1/c^7)$ i potiče od interferencije između mase kvadrupola i zbitka oktopola i trenutnog kvadrupola. Kao posledica smanjenja linearног momenta putem emisije gravitacionih talasa, crne rupe koje su se formirale sjedinjavanjem binarnih crnih rupa, mogu zadobiti udar ili trzaj brzine. Udar brzine je astrofizički značajan. Ako bi bio previše velik mogao bi da crnu rupu izbací iz lokalne galaksije sa značajnim posledicama porasta mase crne rupe.

Gornja diskusija o energiji, ugaonom momentu i linearnom momentu može se strožije i sa više značaja primeniti na izvor u slabom polju gde se uračunava sopstvena gravitacija. To je urađeno u radu Bondia pedesetih godina prošloga veka. Razmotrimo sferu S zapremine V i

⁹ Ugaoni moment (poznat i kao moment količine kretanja ili moment impulsa) je fizička veličina kojom se meri nastojanje materijalnog tela da nastavi da rotira. Formalno se definiše kao:

- Vektorski proizvod vektora položaja tela merenog od izabrane referentne tačke i njegovog impulsa.
- Proizvod momenta inercije i ugaone brzine.

radijusa r koja u sebi sadrži izvor gravitacionog polja. r je mnogo veće od dimenzija izvora i talasne dužine gravitacionih talasa. S obzirom na to, možemo definisati P^μ

$$P^\mu = \int \tau^{\mu 0} d^3x \quad (5.26)$$

što predstavlja četvorovektor u odnosu na Lorenzove transformacije. Koristeći relaciju $\partial_\mu \tau^{\mu\nu} = 0$, možemo na osnovu Gausove teoreme pisati da je

$$\frac{dP^\mu}{dt} = \int_V \partial_0 \tau^{\mu 0} d^3x = - \oint_S \tau^{\mu i} n_i dS \quad (5.27)$$

Za $\mu = 0$ gornja jednačina daje zakon održanja energije

$$\frac{dP^0}{dt} = -r^2 \oint d\Omega \tau^{0i} n_i \quad (5.28)$$

a za $\mu = j$, gde je $j = 1, 2, 3$, dobijamo zakon održanja linearne momenta

$$\frac{dP^0}{dt} = -r^2 \oint d\Omega \tau^{ji} n_i \quad (5.29)$$

6. Primena na binarne sisteme

6.1. Spiralne talasne forme prvog Njutnovog reda

Razmotrimo binarni sistem sa masama m_1 i m_2 , ukupne mase $M = m_1 + m_2$, redukovane mase $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ i simetričnim odnosom masa $v = \mu/M$. Prvo ćemo prepostaviti da su dva tela udaljena i da se kreću duž kružne orbite. U sistemu centra mase možemo da napišemo za relativne koordinate

$$X(t) = R \cos \omega t, \quad Y(t) = R \sin \omega t, \quad Z(t) = 0 \quad (6.1)$$

gde je R relativna udaljenost između dva tela. Komponente tenzora $M^{ij} = \mu X^i X^j$ koje nisu jednakе nuli su:

$$M_{11} = \frac{1}{2} \mu R^2 (1 + \cos 2\omega t) \quad (6.2)$$

$$M_{22} = \frac{1}{2} \mu R^2 (1 - \cos 2\omega t) \quad (6.3)$$

$$M_{12} = \frac{1}{2} \mu R^2 \sin 2\omega t \quad (6.4)$$

Ako izračunamo vremenske izvode jednačine (5.14) i (5.15) i u njih zamenimo gornje izraze, dobićemo

$$h_+(t) = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \mu R^2 \omega^2 \frac{(1 + \cos^2 \theta)}{2} \cos(2\omega t) \quad (6.5)$$

$$h_x(t) = \frac{1}{r} \frac{4G}{c^4} \mu R^2 \omega^2 \cos \theta \sin(2\omega t) \quad (6.6)$$

gde smo pomerili početno vreme da bi se oslobodili zavisnosti od ϕ i koristili zaostalo vreme kao t .

Za $\theta = 0$, duž pravca normalnog na ravan orbite, h_+ i h_x su različiti od nule, i $h_x \pm ih_+ \propto i \cdot \exp(-2i\omega t)$, pa prema tome talas je kružno polarizovan. Za $\theta = \pi/2$ duž ravni orbite, samo je h_+ različito od nule a talas je linearno polarizovan.

Ugaona distribucija snage zračenja je sada

$$\left(\frac{dP}{d\Omega}\right) = \frac{2G\mu^2 R^4 \omega^6}{\pi c^5} \mathcal{P}(\theta) \quad (6.7)$$

gde je

$$\mathcal{P}(\theta) = \frac{1}{4} (1 + 6 \cos^2 \theta + \cos^4 \theta) \quad (6.8)$$

Maksimalna snaga je emitovana duž pravca normalnog na orbitalnu ravan, $\theta = 0$, gde je $\mathcal{P}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2$. S obzirom da je u slučaju binarnih sistema komponenta kretanja izvora uvek normalna na pravac posmatranja, snaga zračenja je prisutna u svim pravcima. Integracijom preko celog prostornog ugla, dobićemo ukupnu snagu zračenja

$$P = \frac{32}{5} \frac{G\mu^2 R^4 \omega^6}{c^5} \quad (6.9)$$

Ako razmatramo binarni sistem koji čine Jupiter i Sunce, i iskoristimo sledeće podatke $m_J = 1,9 \cdot 10^{30}$ g, $R = 7,8 \cdot 10^{13}$ cm i $\omega = 1,68 \cdot 10^{-7}$ Hz, dobićemo da je $P = 5 \cdot 10^3$ J/sec. Ova vrednost je mala, pogotovo kada je uporedimo sa luminožnošću Sunca u elektromagnetnom zračenju $P_\odot = 3,9 \cdot 10^{26}$ J/sec. Ako se binarni sistem kreće duž ekscentrične orbite, snaga zračenja će biti

$$P = \frac{32}{5} \frac{G^4 \mu^2 M^2}{a^5 c^5} \frac{1}{(1 - e^2)^{7/2}} \left(1 + \frac{73}{24} e^2 + \frac{37}{96} e^4\right) \quad (6.10)$$

gde je a velika - polu osa a e je ekscentričnost. Ako zamenimo u gornjoj jednačini vrednosti Hulse-Tejlor¹⁰ binarnog pulsara, $a = 1,95 \cdot 10^{11}$ cm, $m_1 = 1,441 M_\odot$, $m_2 = 1,383 M_\odot$ i $e = 0,617$, dobićemo da snaga zračenja iznosi $7,35 \cdot 10^{24}$ J/sec, što je otprilike 2% luminoznosti Sunca u elektromagnetnoj radijaciji.

¹⁰ Prvi binarni pulsar, PSR 1913+16, ili Hulse-Tejlor binarni pulsar, je otkriven 1974 radio teleskopom Arecibo (Arecibo). Otkrili su ga Joseph Hooton Taylor i Russell Hulse, koji su za to otkriće 1993 godine dobili Nobelovu nagradu.

Emisijom gravitacionih talasa telo troši energiju. Da bi se kompenzovao gubitak energije radikalna razdvojenost R između dva tela mora da se smanji. Sada ćemo pokazati kako se orbitalna frekvencija i frekvencija gravitacionih talasa menja u toku vremena. Koristeći Njutnovu dinamičku jednačinu i jednačinu ravnoteže imamo da je

$$\frac{dE_{\text{orbite}}}{dt} = -P \quad (6.11)$$

Prema Njutnovoj jednačini je, $E_{\text{orbite}} = -Gm_1m_2/(2R)$ i $\omega^2 = GM/R^3$. Prema tome, $\dot{R} = -2/3(R\omega)(\dot{\omega}/\omega^2)$. Dok god je $\dot{\omega}/\omega^2 \ll 1$, radikalna brzina je manja od tangencijalne brzine i kretanje binarnog sistema je dobro aproksimirano adijabatskom kvazikružnom orbitom. Gornja jednačina implicira da se orbitalna frekvencija menja na sledeći način

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = \frac{96}{5} v \left(\frac{GM\omega}{c^3} \right)^{5/3} \quad (6.12)$$

kao i da je frekvencija gravitacionih talasa $f_{GW} = 2\omega$

$$\dot{f}_{GW} = \frac{96}{5} \pi^{8/3} \left(\frac{GM}{c^3} \right)^{5/3} f_{GW}^{11/3} \quad (6.13)$$

gde je $\mathcal{M} = \mu^{3/5}M$ takozvana masa "cvrkutanja". Ako uvedemo vreme potrebno za spajanje $\tau = t_{\text{spajanja}} - t$ i ako gornju jednačinu integralimo, dobicemo da je

$$f_{GW} \simeq 130 \left(\frac{1,21M_{\odot}}{\mathcal{M}} \right)^{5/8} \left(\frac{1 \text{ sec}}{\tau} \right)^{3/8} \text{ Hz} \quad (6.14)$$

gde je $1,21M_{\odot}$ masa "cvrkutanja" binarnog sistema dve neutronske zvezde. Gornja jednačina nam daje vremena potrebna za spajanje (ujedinjenje) koja iznose 17 minuta za $f_{GW} = 10 \text{ Hz}$, 2 sekunde za $f_{GW} = 100 \text{ Hz}$ i 1 milisekunda za $f_{GW} = 10^3 \text{ Hz}$. Koristeći gornje jednačine možemo izračunati odnos između radikalnog rastojanja i frekvencije gravitacionih talasa

$$R \simeq 300 \left(\frac{M}{2,8M_{\odot}} \right)^{1/3} \left(\frac{100 \text{ Hz}}{f_{GW}} \right)^{2/3} \text{ km} \quad (6.15)$$

Napokon, korisna veličina je broj ciklusa gravitacionih talasa, definisana kao

$$\mathcal{N}_{GW} = \frac{1}{\pi} \int_{t_{\text{početno}}}^{t_{\text{krajnje}}} \omega(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_{\omega_{\text{početno}}}^{\omega_{\text{krajnje}}} \frac{\omega}{\dot{\omega}} d\omega \quad (6.16)$$

Ako prepostavimo da je $\omega_{\text{krajnje}} \gg \omega_{\text{početno}}$, dobicemo da je

$$\mathcal{N}_{GW} \simeq 10^4 \left(\frac{\mathcal{M}}{1,21M_{\odot}} \right)^{-5/3} \left(\frac{f_{\text{početno}}}{10 \text{ Hz}} \right)^{-5/3} \quad (6.17)$$

6.2. Spiralne talasne forme koje uključuju postnjutnovske korekcije

Još u početku razvoja Ajnštajnove teorije relativnosti, metod nazvan postnjutnovim (PN¹¹), razvili su Ajnštajn, Droste i De Sitter. Ovaj metod je dozvolio teoretičarima da predstave na veoma brz način nekoliko posmatračkih posledica, i već nakon godinu dana od otkrića opšte relativnosti, doveo ih je do relativističkih poboljšanja za perihel planeta, gravitacionog crvenog pomaka i skretanja svetlosti.

Postnjutnovska metoda uključuje proširenje oko Njutnovog limita zadržavajući izraze višeg reda u malim parametrima

$$\epsilon \sim \frac{v^2}{c^2} \sim |h_{\mu\nu}| \sim \left| \frac{\partial_0 h}{\partial_i h} \right|^2 \sim \left| \frac{T^{0i}}{T^{00}} \right| \sim \left| \frac{T^{ij}}{T^{00}} \right| \quad (6.18)$$

Da bi smo odredili dinamiku binarnog sistema sa preciznošću koja je prihvatljiva za detekciju, neophodno je da izračunamo silu koja uzrokuje kretanje dva tela i amplitudu gravitacionog zračenja. Za crne rupe koje se ne okreću, jednačina kretanja dva tela i fluks gravitacionih talasa se znaju preko 3.5 postnjutnovskog reda. Ako ograničimo diskusiju na kružnu orbitu nameće nam se postojanje prirodnog adijabatskog parametra $\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = \mathcal{O}\left[\left(\frac{v}{c}\right)^5\right]$.

Viši red postnjutnovske korekcije za jednačinu $\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = \frac{96}{5} v \left(\frac{GM\omega}{c^3}\right)^{5/3}$ može se izračunati na sledeći način (uzećemo da je $G = 1 = c$)

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega^2} = \frac{96}{5} v v_\omega^{5/3} \sum_{k=0}^7 \omega_{(k/2)PN} v_\omega^{k/3} \quad (6.19)$$

gde definišemo da je $v_\omega \equiv (M\omega)^{1/3}$ i

$$\omega_{0PN} = 1, \quad (6.20)$$

$$\omega_{0.5PN} = 0, \quad (6.21)$$

$$\omega_{1PN} = -\frac{743}{336} - \frac{11}{4} v, \quad (6.22)$$

$$\omega_{1.5PN} = 4\pi + \left[-\frac{47}{3} \frac{S_l}{M^2} - \frac{25}{4} \frac{\delta m}{M} \frac{\Sigma_l}{M^2} \right], \quad (6.23)$$

$$\begin{aligned} \omega_{2PN} = & \frac{34\ 103}{18\ 144} + \frac{13\ 661}{2\ 016} v + \frac{59}{18} v^2 - \frac{1}{48} v \chi_1 \chi_2 [247 (\hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2) - \\ & - 721 (\hat{l} \cdot \hat{S}_1) (\hat{l} \cdot \hat{S}_2)], \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$\omega_{2.5PN} = -\frac{1}{672} (4\ 159 + 15\ 876 v) \pi + \left[\left(-\frac{31\ 811}{1\ 008} + \frac{5\ 039}{84} v \right) \frac{S_l}{M^2} + \right.$$

¹¹ PN - Postnjutnovski

$$+ \left(-\frac{473}{84} + \frac{1231}{56} \nu \right) \frac{\delta m}{M} \frac{\Sigma_l}{M^2}, \quad (6.25)$$

$$\begin{aligned} \omega_{3PN} = & \left(\frac{16447322263}{139708800} - \frac{1712}{105} \gamma E + \frac{16}{3} \pi^2 \right) + \left(-\frac{56198689}{217728} + \frac{451}{48} \pi^2 \right) \nu \\ & + \frac{541}{89} \nu^2 - \frac{5605}{2592} \nu^3 - \frac{856}{105} \log[16\nu^2], \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$\omega_{3,5PN} = \left(-\frac{4415}{4032} + \frac{358675}{6048} \nu + \frac{91495}{1512} \nu^2 \right) \pi. \quad (6.27)$$

Sa $l = \mu \mathbf{X} \times \mathbf{V}$ smo označili Njutnov ugaoni moment (sa \mathbf{X} smo označili centar mase radialnog rastojanja dva tela, a sa \mathbf{V} smo označili relativnu brzinu), $\hat{l} = l/|l|$; $S_1 = \chi_1 m_1^2 \hat{S}_1$ i $S_2 = \chi_2 m_2^2 \hat{S}_2$ su spinovi dva tela (za crne rupe $\hat{S}_{1,2}$ je jedinični vektor i $0 < \chi_{1,2} < 1$) a

$$S \equiv S_1 + S_2, \quad \Sigma \equiv M \left[\frac{S_2}{m_2} - \frac{S_1}{m_1} \right] \quad (6.28)$$

Konačno, $\delta m = m_1 - m_2$ i $\gamma_E = 0,577 \dots$ je Ojlerova konstanta.

Korisno je izračunati relativan doprinos postnjutnovog terma ukupnom broju gravitacionih talasa koji su sadržani u opsegu frekvencije LIGO/VIRGO¹², što je prikazano u tabeli 1. Kao krajnju frekvenciju smo koristili unutrašnju stabilnu cirkularnu orbitu (ISCO¹³) za materijalnu tačku za Švarcšildovo rešenje $f_{GW}^{ISCO} \simeq 4400/(M/M_\odot)$ Hz.

	$(10 + 10)M_\odot$	$(1, 4 + 1, 4)M_\odot$
Njutnov	+601	+16 034
1PN	+59,3	+441
1,5PN	$-51,4 + 16k_1\chi_1 + 16k_2\chi_2$	$-211 + 65,7k_1\chi_1 + 65,7k_2\chi_2$
2PN	$+4,1 - 3,3k_1k_2\chi_1\chi_2 + 1,1\xi\chi_1\chi_2$	$+9,9 - 8k_1k_2\chi_1\chi_2 + 2,8\xi\chi_1\chi_2$
2,5PN	$-7,1 + 5,5k_1\chi_1 + 5,5k_2\chi_2$	$-11,7 + 9k_1\chi_1 + 9k_2\chi_2$
3PN	+2,2	+2,6
3,5PN	-0,8	-0,9

Tabela 1. Postnjutnovski doprinos broju gravitacionih talasa koji su sadržani iz $\omega_{početno} = \pi \times 10$ Hz do $\omega_{krajnje} = \omega^{ISCO} = 1/(6^{3/2}M)$ za binarne sisteme koji su detektovali LIGO i VIRGO. Označili smo da je $k_i = \hat{S}_i \cdot \hat{l}$ i $\xi = \hat{S}_1 \cdot \hat{S}_2$.

6.3. Talasne forme gravitacionih talasa: spiralna, sjedinjavanje i pravi prsteni

Nakon spajanja dve crne rupe sistem postaje Kerova¹⁴ crna rupa i emituje kvazi-normalne modove (QNM^s¹⁵). Ova faza je najčešće poznata kao faza pravih prstena (ring-down ili RD). S obzirom da kvazi-normalni modovi imaju kompleksnu frekvenciju koja je potpuno

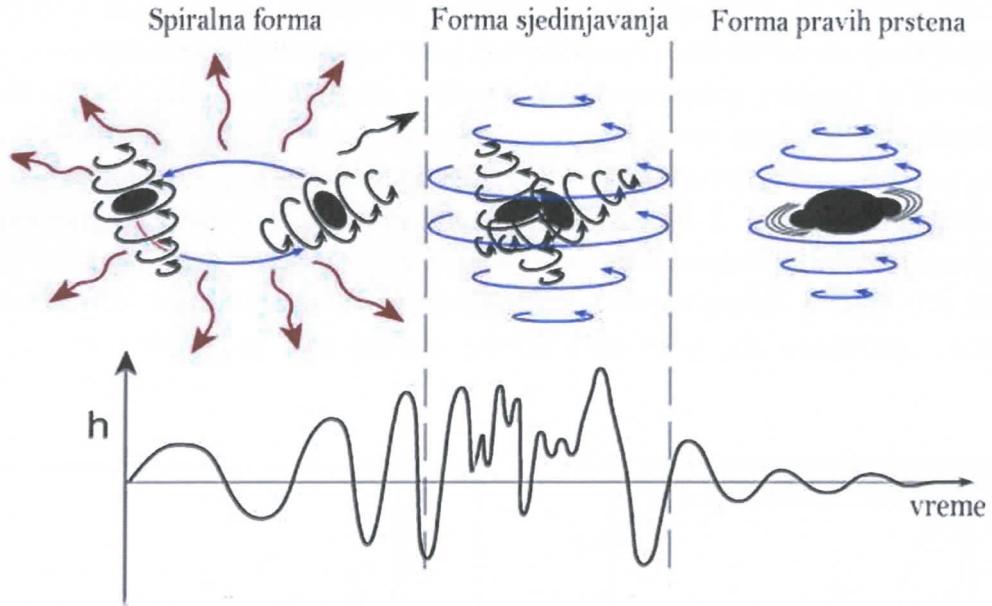
¹² VIRGO - Variability in Irradiance and Gravity Oscillations

¹³ ISCO - Innermost stable circular orbit

¹⁴ Tip crne rupe koja ima masu i ugaoni moment ali nema nanelektrisanje i koja rotira oko centralne ose.

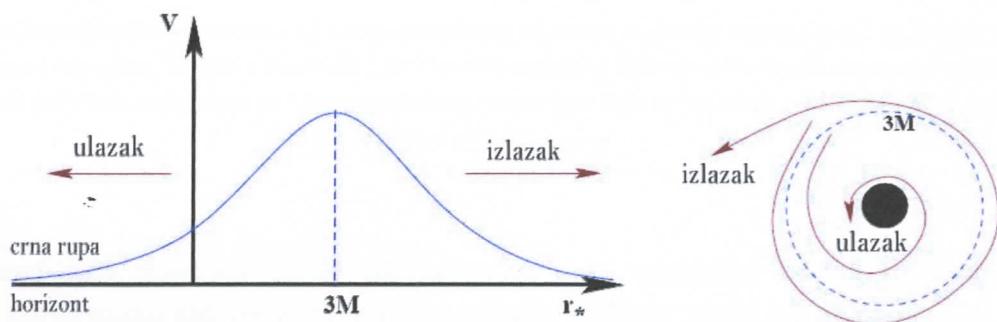
¹⁵ Quasi-normal modes

određena masom i spinom crne rupe, talasne forme pravih prstenova su superpozicije prigušenih sinusoida. Spiralne i talasne forme pravih prstenova mogu se izračunati analitički (slika 5).



Slika 5. Talasne forme gravitacionih talasa

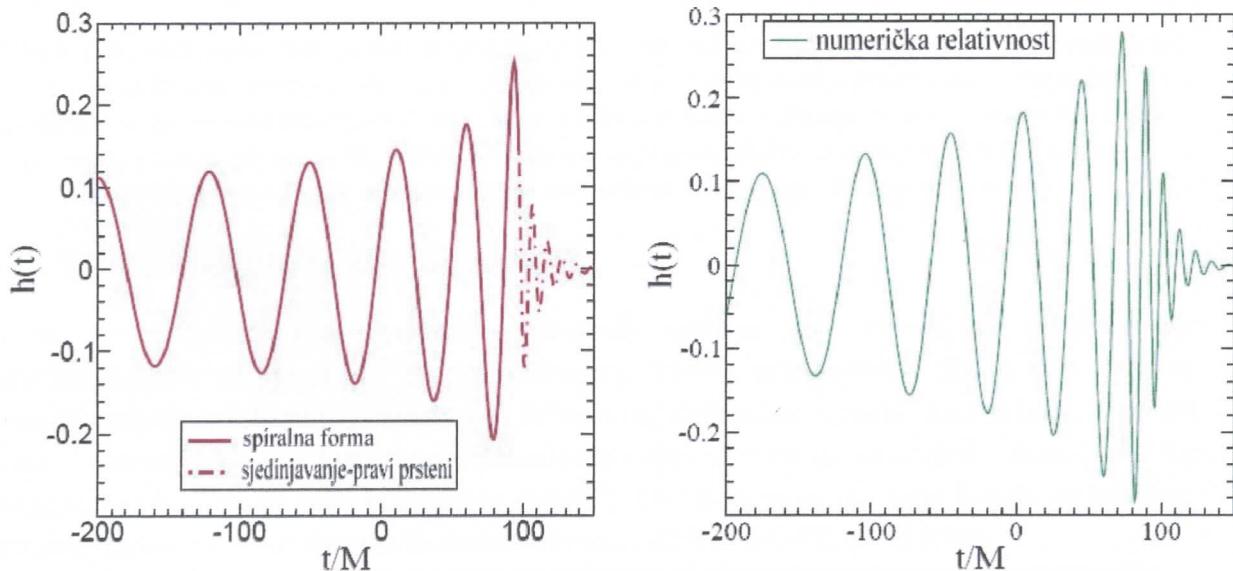
Ali šta je sa talasnom formom sjedinjavanja? S obzirom da nelinearnost dominira, sjedinjavanje će se najbolje i potpuno opisati pomoću numeričkih simulacija Ajnštajnovih jednačina. Kako god, pre nego što rezultati numeričke relativnosti (NR¹⁶) postanu dostupni, neke analitičke metode se predlažu. Limit testirane mase $v \ll 1$ realizovan još davno, daje nam osnovni fizički razlog ishoda prisustva univerzalnog sjedinjavanja signala kada probna čestica padne ispod $3M$ (Švarcšildov prsten nestabilne akumulirane svetlosti), gravitacioni talasi koji se stvaraju su veoma filtrirani zakrivljenom potencijalnom centriranom barijerom (slika 6).



Slika 6. Potencijal tipa "kornjače" u funkciji r^* . Pik potencijala predstavlja poslednju nestabilnu orbitu za masovnu česticu (svelosni prsten). Ulagani modeli šire se ka horizontu crne rupe, dok izlazni modeli odlaze od izvora.

¹⁶ Numerical relativity

U slučaju jednakih masa $\nu = 1/4$, Price i Pullin su predložili takozvanu aproksimaciju zatvorenog limita, koja postoji u formi preobražaja iz dva tela u jedno (perturbovana crna rupa) blizu lokacije svetlosnog prstena. Na osnovu posmatranja, preračunavanje (resummation¹⁷) šeme jednog efektivnog tela (EOB¹⁸) obezbeđuje prvi primer cele talasne forme i to: preračunavanjem postnjutnovskog Hamiltoniana, modelovanjem sjedinjavanja kao veoma kratku fazu i poklapanjem kraja poniranja (oko svetlosnog prstena) sa fazom pravih prstenova. Poklapanje je bilo odmah završeno koristeći samo poslednji prigušeni kvazi-normalni mod čija masa i spin su određeni energijom binarnih crnih rupa i ugaonog momenta na kraju poniranja. Primer svih talasnih formi je dat na slici 7. Danas, sa spektakularnim rezultatima u numeričkoj relativnosti, u poziciji smo da procenimo bliskost analitičkih i numeričkih talasnih formi za spiralne, sjedinjavajuće i forme pravih prstena. Na slici 8 je prikazana komparacija prvog reda između jednog efektivnog tela analitičke i numeričke relativnosti talasnih formi.



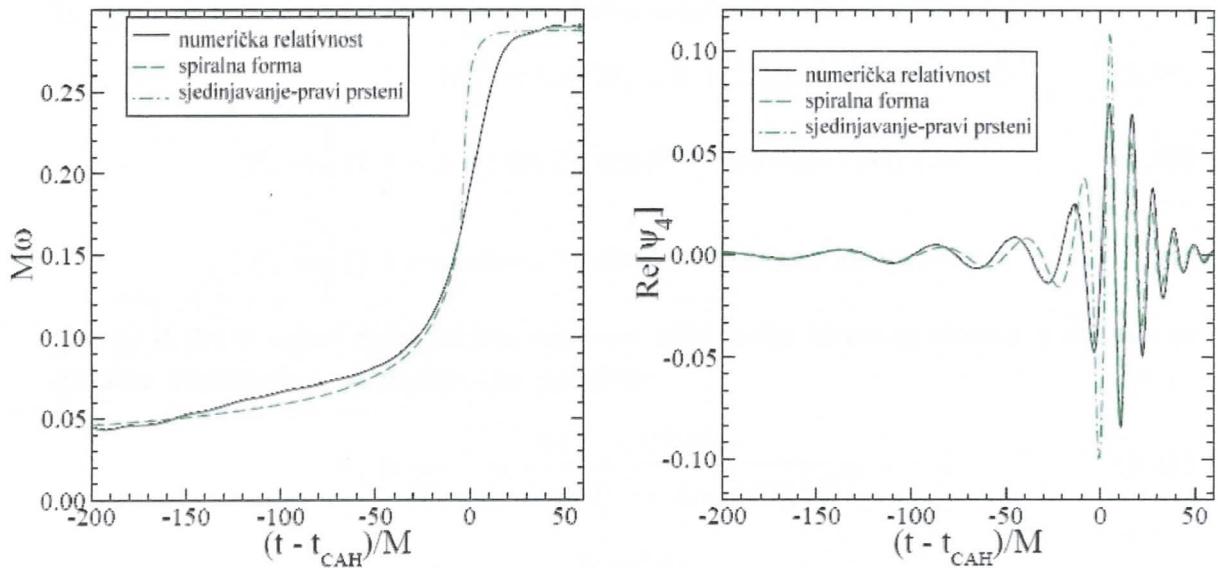
Slika 7. Na levom grafiku je prikazan signal gravitacionih talasa sa binarnog sistema crnih rupa koje su jednakih masa i bez spina, kao što i predviđa 2,5PN red Buonanno i Damour (2000). Na desnom grafiku je prikazan signal gravitacionih talasa sa binarnog sistema crnih rupa koje su jednakih masa i sa malim spinom

$$\chi_1 = \chi_2 = 0,06.$$

Ova poređenja nam sugerisu da je moguće dizajnirati analitički šablon sa potpunim numeričkim korišćenjem kao vodič za spajanje spiralne i talasne forme pravih prstenova. Ovo je poseban način za konstrukciju šablonu jer će na kraju trebati stotine ili hiljade šabloni talasnih formi da bi se ekstrakovao signal iz šuma.

¹⁷ U matematici i teorijskoj fizici preračinavanje (resummation) je procedura koja sadrži konačne rezultate iz divergentnog zbira (serija) funkcija.

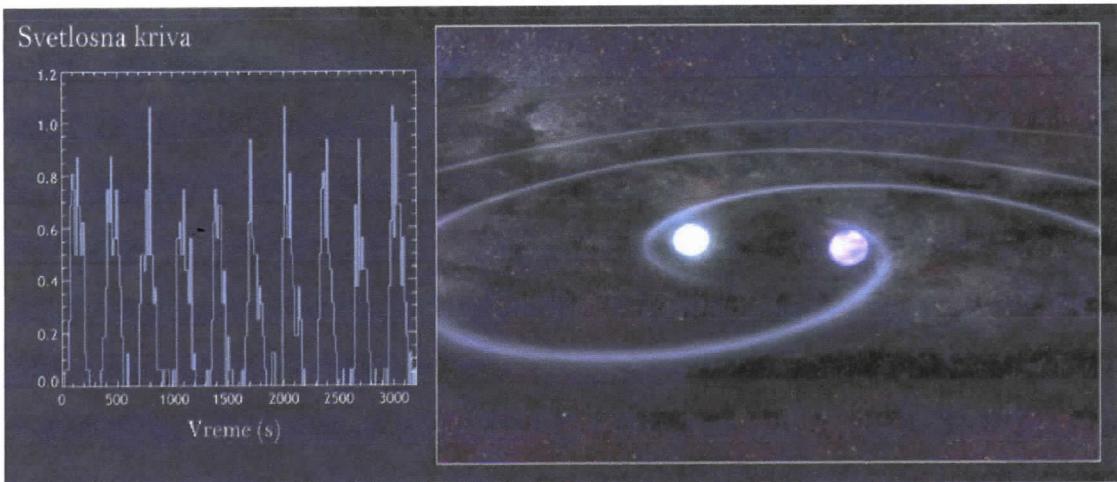
¹⁸ Effective-one-body



Slika 8. Prikazana je komparacija između spiralne-spajajuće-pravih prstena frekvencije (levo) i talasnih formi (desno) za binarni sistem jednakih masa sa spinom $\chi_1 = \chi_2 = 0,06$, kako je predviđeno 3,5PN redom i prikazano numeričkom simulacijom Pretoriusa. U analitičkom modelu spajanje je skoro trenutno i tri kvazi-normalna moda su uključena. Ψ_4 je Vejlov (Weyl) tenzor proporcionalan drugom izvodu od h ; sa t_{CAH} je označeno vreme kada se formira očigledan horizont (CAH-common apparent horizon)

6.4. Spiralni šabloni za analizu podataka

Potraga za gravitacionim talasima iz binarnih sistema koji se spajaju sa laserskim interferometrima za detekciju su zasnovana na tehnici prilagođenih filtera, što zahteva precizno znanje o talasnim formama (ili šablonima) dolazećeg signala. Kao primer, u ovom poglavlju ćemo izvesti u Furierovom domenu spiralne šablone gravitacionih talasa (slika 9), koristeći aproksimaciju nepokretnе faze (SPA¹⁹). Ovi šabloni se trenutno koriste za traženje spiralnih talasa binarnih sistema sa detektorima LIGO/VIRGO/GEO²⁰/TAMA²¹.



Slika 9. Ilustracija binarnog sistema belih patuljaka

¹⁹ Stationary phase approximation

²⁰ GEO je detektor gravitacionih talasa koji se nalazi u Nemačkoj.

²¹ TAMA je detektor gravitacionih talasa koji se nalazi u Japanu.

Uzećemo da je $G = 1 = c$. Osetljivost detektora na gravitacione talase data je kao

$$h(t) = h_+(t)F_+ + h_x(t)F_x \quad (6.29)$$

$$F_+ = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\Theta) \cos 2\Phi \cos 2\Psi - \cos\Theta \sin 2\Phi \sin 2\Psi \quad (6.30)$$

$$F_x = \frac{1}{2}(1 + \cos^2\Theta) \cos 2\Phi \sin 2\Psi + \cos\Theta \sin 2\Phi \cos 2\Psi \quad (6.31)$$

gde su Θ, Φ i Ψ uglovi koji definišu relativnu orijentaciju binarnog sistema u odnosu na detektor. Praktičnije je da uvedemo promenljive

$$\tilde{F}_+ \equiv \frac{(1 + \cos^2\Theta)F_+}{[(1 + \cos^2\Theta)^2 F_+^2 + 4\cos^2\Theta F_x^2]^{1/2}} \quad (6.32)$$

$$\tilde{F}_x \equiv \frac{4\cos^2\Theta F_x}{[(1 + \cos^2\Theta)^2 F_+^2 + 4\cos^2\Theta F_x^2]^{1/2}} \quad (6.33)$$

Napomenimo da je $\tilde{F}_+^2 + \tilde{F}_x^2 = 1$, pa možemo da definišemo da je $\cos\xi \equiv \tilde{F}_+$ i $\sin\xi \equiv \tilde{F}_x$, i da je

$$\mathcal{A}(\Theta, \Phi, \Psi; \theta) \equiv [(1 + \cos^2\Theta)^2 F_+^2 + 4\cos^2\Theta F_x^2]^{\frac{1}{2}} \quad (6.34)$$

$$\tan\xi(\Theta, \Phi, \Psi; \theta) \equiv \frac{4\cos^2\Theta F_x}{(1 + \cos^2\Theta)F_+} \quad (6.35)$$

Signal gravitacionih talasa za spiralni binarni sistem $h(t) = h_+(t)F_+ + h_x(t)F_x$ može se napisati u jednostavnijoj formi

$$h(t) = \frac{2\mathcal{M}}{r} \mathcal{A}(\Theta, \Phi, \Psi; \theta) [\mathcal{M}\omega(t)]^{\frac{2}{3}} \cos[2\phi(t) + 2\phi_0 - \xi] \quad (6.36)$$

Ako nismo zainteresovani da vratimo orijentaciju binarnog sistema u odnosu na detektor (takozvani inverzni problem), možemo uvući ξ pod ϕ_0 i usrednjiti preko uglova $(\Theta, \Phi, \Psi; \theta)$ tako da dobijamo $\bar{\mathcal{A}}^2 = 16/25$.

Sada ćemo izračunati Furierovu transformaciju za signal gravitacionih talasa

$$\tilde{h}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi ift} h(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} dt A(t) [e^{2\pi ift + i\phi_{GW}(t)} + e^{2\pi ift - i\phi_{GW}(t)}] \quad (6.37)$$

gde je $A(t) = (2\mathcal{M}/R)\sqrt{\bar{\mathcal{A}}^2}[\mathcal{M}\omega(t)]^{2/3}$ i $\phi_{GW}(t) = 2\phi(t) + 2\Phi_0$. U gornjoj jednačini dominantni doprinos dolazi od stacionarne tačke u fazi. Ako prepostavimo da je $f > 0$, imamo da je $\psi(t) \equiv 2\pi ft - \phi_{GW}$ i $(d\psi/dt)_{tf} = 0$, pa je $(d\phi_{GW}/dt)_{tf} = 2\pi f = 2\pi F(t_f)$. Ako proširimo fazu do kvadratnog reda

$$\psi(t_f) = 2\pi f t_f - \phi_{GW}(t_f) - \pi \dot{F}(t_f)(t - t_f)^2 \quad (6.38)$$

dobićemo

$$\tilde{h}_{SPA}(f) = \frac{1}{2} \frac{A(t_f)}{\sqrt{\dot{F}(t_f)}} e^{i[2\pi f t_f - \phi_{GW}(t_f)] - i\pi/4} \quad (6.39)$$

Da bismo izračunali $\phi_{GW}(t_f)$ i $\dot{F}(t_f)$, potrebno je da rešimo sledeće jednačine

$$v^3 = \dot{\phi}_{GW} \frac{M}{2}, \quad \frac{dE}{dt}(v) = -\mathcal{F}(v) \quad (6.40)$$

gde je E centar mase energije a \mathcal{F} je fluks energije gravitacionih talasa. Direktnim računanjem ćemo dobiti

$$t(v) = t_c + M \int_v^{v_c} dv \frac{E'(v)}{\mathcal{F}(v)} \quad (6.41)$$

$$\phi_{GW}(v) = \phi_c + 2 \int_v^{v_c} dv v^3 \frac{E'(v)}{\mathcal{F}(v)} \quad (6.42)$$

pa je prema tome

$$\psi(f) = 2\pi f t_c - \phi_c - \frac{\pi}{4} + 2 \int_v^{v_c} dv (v_c^3 - v^3) \frac{E'(v)}{\mathcal{F}(v)} \quad (6.43)$$

Koristeći jednačinu (6.12) imamo da je $\dot{F}(t_f) \equiv \frac{\dot{\omega}}{\pi} = \frac{96}{5} \frac{1}{\pi} v M^{5/3} \omega^{11/3}$ i dobićemo da je

$$\tilde{h}_{SPA}(f) = \mathcal{A}_{SPA}(f) e^{i\psi_{SPA}(f)} \quad (6.44)$$

$$\mathcal{A}_{SPA}(f) = \frac{\sqrt{\mathcal{A}^2}}{r} \frac{1}{\pi^{2/3}} \left(\frac{5}{96} \right)^{1/2} \mathcal{M}^{5/6} f^{-7/6} \quad (6.45)$$

$$\psi_{SPA}(f) = 2\pi f t_c - \phi_c - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{128 v f^5} \sum_{k=0}^7 \psi_{(k/2)PN} v_f^k \quad (6.46)$$

gde smo označili da je $v_f = (\pi M f)^{1/3}$. Koeficijenti $\psi_{(k/2)PN}$ (gde je $k = 0, \dots, 7$) u Furierovoj fazi su (sa $N = 7$ pri 3,5 postnjutnovskom redu):

$$\psi_{0PN} = 1 \quad (6.47)$$

$$\psi_{0,5PN} = 0 \quad (6.48)$$

$$\psi_{1PN} = \left(\frac{3715}{756} + \frac{55}{9} v \right) \quad (6.49)$$

$$\psi_{1,5PN} = -16\pi + 4\beta \quad (6.50)$$

$$\psi_{2PN} = \left(\frac{15\ 293\ 365}{508\ 032} + \frac{27\ 145}{504}\nu + \frac{3\ 085}{72}\nu^2 \right) - 10\sigma \quad (6.51)$$

$$\psi_{2,5PN} = \pi \left(\frac{38\ 645}{759} - \frac{65}{9}\nu \right) (1 + 3 \log \nu_f) \quad (6.52)$$

$$\begin{aligned} \psi_{3PN} = & \left(\frac{11\ 583\ 231\ 236\ 531}{4\ 694\ 215\ 680} - \frac{640}{3}\pi^2 - \frac{6\ 848}{21}\gamma_E \right) + \nu \left(-\frac{15\ 737\ 765\ 635}{3\ 048\ 192} + \frac{2\ 255}{12}\pi^2 \right) \\ & + \frac{76\ 055}{1\ 728}\nu^2 - \frac{127\ 825}{1\ 296}\nu^3 - \frac{6\ 848}{21}\log(4\nu) \end{aligned} \quad (6.53)$$

$$\psi_{3,5PN} = \pi \left(\frac{77\ 096\ 675}{25\ 4016} + \frac{378\ 515}{1\ 512}\nu - \frac{74\ 055}{756}\nu^2 \right) \quad (6.54)$$

gde su

$$\beta = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{113}{12} \frac{m_i^2}{M^2} + \frac{25}{4}\nu \right) \chi_i k_i \quad (6.55)$$

$$\sigma = \nu \left(\frac{721}{48} \chi_1 k_1 \chi_2 k_2 - \frac{247}{48} \xi \right) \quad (6.56)$$

U alternativnim teorijama gravitacije, kao što su Brans-Dikeova teorija²² ili masivne teorije gravitona²³, aproksimacija nepokretne faze sadrži sledeći izraz

$$\psi_{SPA}^{za alternativne teorije} (f) = \frac{3}{128\nu v_f^5} \left[-\frac{5S^2}{84\omega_{BD}} v_f^{-2} - \frac{128}{3} \frac{\pi^2 DvM}{\lambda_g^2(1+z)} v_f^2 \right] \quad (6.57)$$

Prvi član u uglastoj zagradi je doprinos dipolne gravitacione radijacije u Brans-Dikeovoj teoriji. Skalarno nanelektrisanje i -tog tela je $\alpha_i = \bar{\alpha}\hat{\alpha}_i = \bar{\alpha}(1 - 2s_i)$, gde je $\bar{\alpha}^2 = \frac{1}{2\omega_{BD}+3} \sim (2\omega_{BD})^{-1}$ u limitu $\omega_{BD} \gg 1$, a s_i je osetljivost i -tog tela (mera samo-gravitacionog vezivanja energije po jedinici mase). Koeficijent u dipolnom izrazu je $S = (\hat{\alpha}_1 - \hat{\alpha}_2)/2$. Činjenica da je to dipolna radijacija znači da je proporcionalno sa v^{-2} ako uporedimo sa kvadrupolnim izrazom, ali mala vrednost S i velika granica za Sunčev sistem od $\omega_{BD} > 40\ 000$, ukazuje da je ovo mala korekcija. Drugi član u uglastoj zagradi je efekat masivnog gravitona, koji menja vreme dolaska talasa na datoj frekvenciji, što zavisi od veličine

²² U teorijskoj fizici, Brans-Dikeova teorija gravitacije je primer skalar-tenzorske teorije gde se gravitaciona interakcija odvija preko skalarnog polja (kao što je tenzorsko polje u opštoj relativnosti). U ovoj teoriji gravitaciona konstanta G nije predviđena da bude konstantna ali $1/G$ je zamenjeno sa skalarnim poljem ϕ koje se menja sa prostorom i vremenom.

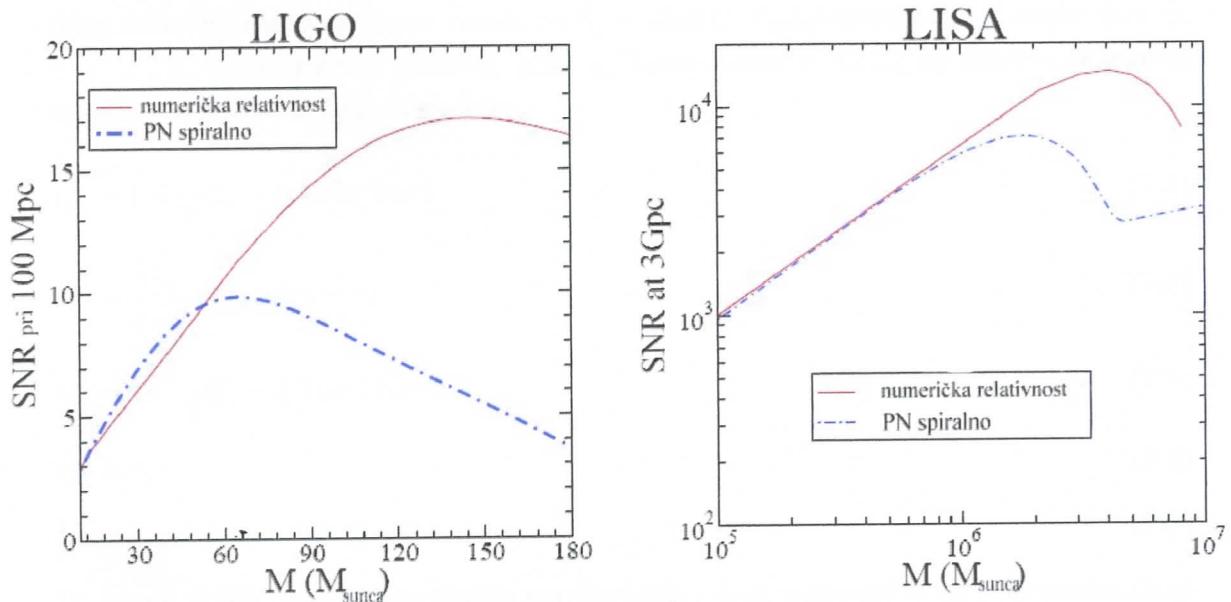
²³ Graviton je hipotetička elementarna čestica koja prenosi silu gravitacije u sistemu polja kvantne teorije. Ako postoje, graviton moraju biti bez mase (zato što gravitaciona sila ima neograničeno dejstvo) i mora da imaju spin 2 (zato što je gravitacija drugog ranga tensor polja).

Komptonove talasne dužine λ_g gravitona i od udaljenosti veličine D . Moguće je postaviti zanimljivo ograničenje na ω_{BD} i λ_g koristeći LISA²⁴.

Konačno dobijamo jednačinu za prosek nebeskog svoda tj. odnos signala u odnosu na šum (SNR²⁵) za aproksimaciju nepokretne faze talasne forme

$$\sqrt{\left(\frac{S}{N}\right)^2} = \frac{1}{r} \frac{1}{\pi^{2/3}} \sqrt{\frac{2}{15}} \mathcal{M}^{5/6} \left[\int_0^{f_{krajnje}} \frac{f^{-7/3}}{S_n(f)} \right]^{1/2} \quad (6.58)$$

Na levoj strani slike 10 je prikazan prosek nebeskog svoda odnosa signala naspram šuma kao funkcija ukupne mase, za binarni sistem jednakih masa bez spina na 100 Mpc, koristeći spektar šuma gustine LIGO-a. Astrofizička posmatranja i teoretska predviđanja ukazuju da ukupna masa crnih rupa se nalazi između $6\text{-}30 M_\odot$. Ako binarni sistemi crnih rupa veće ukupne mase postoje, mogli bi da se detektuju sa LIGO pri visokim odnosima signala naspram šuma. Na desnoj strani slike 10 je prikazan prosek signala u odnosu na šum za jednu Michelson LISA konfiguraciju kao funkcija mase za binarni sistem jednakih masa bez spina na 3 Gpc. Nagib na grafiku potiče od nejasnog šuma koji pripada binarnom sistemu belih patuljaka. Kako se približavaju faze stapanja i pravih prstenova, odnos signala naspram šuma značajno raste za ukupnu masu koja je veća od $2 \cdot 10^6 M_\odot$.



Slika 10. Na slici je prikazan prosek nebeskog svoda SNR za binarni sistem jednakih masa bez spina kada su uključene PN spiralne talasne forme ili pune NR talasne forme. Na levom grafiku je prikazan spektar šuma gustine sa LIGO-a, a na desnoj strani spektar šuma gustine sa LISA-e.

²⁴ Laser Interferometer Space Antenna

²⁵ Signal to noise ratio

7. Ostali astrofizički izvori

7.1. Pulsari

Producija gravitacionih talasa sa tela koje rotira je veoma važna, posebno za proučavanje izolovanih pulsara. Zbog jednostavnosti ispitaćemo slučaj krutog tela koje rotira oko jedne od glavnih osa.

Označimo sa X'_1, X'_2, X'_3 koordinate u referentnom sistemu u kojem se nalazi telo, takozvani sistem tela, i uvedimo fiksni sistem sa koordinatama X_1, X_2, X_3 , orijentisan tako da je $X'_3 = X_3$. U oba sistema prvobitni položaj osa se podudara sa centrom mase tela. Dva sistema su povezana sa vremensko zavisnom rotacionom matricom

$$\mathcal{R}_{ij} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \sin \omega t & 0 \\ -\sin \omega t & \cos \omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (7.1)$$

gde je ω rotaciona frekvencija. Tenzor inercije krutog tela je definisan na sledeći način

$$I^{ij} = \int d^3X \rho(\mathbf{X}) (R^2 \delta^{ij} - X^i X^j) \quad (7.2)$$

gde je ρ gustina mase. S obzirom da se svaka hermitska matrica može dijagonalizovati, postojiće ortogonalni sistem gde je I_{ij} dijagonalno. Sistem u kojem je tenser inercije dijagonalan naziva se sopstveni sistem. Sa $I'_{ij} = \text{diag}(I_1, I_2, I_3)$ ćemo označiti tenser inercije u X'_1, X'_2, X'_3 koordinatnom sistemu, a sa I_{ij} komponente u X_1, X_2, X_3 sistemu. Koristeći relaciju $I = \mathcal{R}^t I' \mathcal{R}$ dobijamo sledeće:

$$I_{11} = 1 + \frac{1}{2}(I_1 - I_2) \cos(2\omega t) \quad (7.3)$$

$$I_{12} = \frac{1}{2}(I_1 - I_2) \sin(2\omega t) \quad (7.4)$$

$$I_{22} = 1 - \frac{1}{2}(I_1 - I_2) \cos(2\omega t) \quad (7.5)$$

$$I_{33} = I_3 \quad (7.6)$$

$$I_{13} = I_{23} = 0 \quad (7.7)$$

Da bismo dobili noseći član signala gravitacionih talasa, potrebno je da izračunamo drugi izvod kvadrupolnog tensora $M_{ij} = \int d^3X \rho(X) X^i X^j$; $\ddot{M}_{ij} = -\ddot{I}_{ij}$. Dobićemo sledeće

$$M_{11} = -\frac{1}{2}(I_1 - I_2) \cos(2\omega t) \quad (7.8)$$

$$M_{12} = -\frac{1}{2}(I_1 - I_2) \sin(2\omega t) \quad (7.9)$$

$$M_{22} = +\frac{1}{2}(I_1 - I_2) \cos(2\omega t) \quad (7.10)$$

Prema tome, ako telo rotira oko glavne ose X'_3 , postoji vremenski zavisni kvadrupolni momenat samo ako je $I_1 \neq I_2$. Ako gornje izraze zamenimo u jednačine (5.14 i 5.15) dobićemo:

$$h_+ = \frac{1}{r} \frac{4G\omega^2}{c^4} (I_1 - I_2) \frac{(1 + \cos\theta)}{2} \cos(2\omega t) \quad (7.11)$$

$$h_\times = \frac{1}{r} \frac{4G\omega^2}{c^4} (I_1 - I_2) \cos\theta \sin(2\omega t) \quad (7.12)$$

Signal gravitacionih talasa se emituje dva puta pri rotaciji frekvencije pulsara. Možemo da definišemo eliptičnost $\epsilon = (I_1 - I_2)/I_3$ i $h_0 = (4\pi^2 G)(I_3 f_{GW}^2/r)\epsilon$. Vrednost eliptičnosti zavisi od osobina neutronske zvezde, posebno maksimalna snaga koja je potrebna da podržava njenu koru (gornji sloj). Pulsari se formiraju nakon eksplozija supernove. Spoljni slojevi zvezde se kristališu usled hlađenja emisijom neutrina. Anizotropno naprezanje pri ovoj fazи daje nam vrednosti za $\epsilon \lesssim 10^{-6}$, mada sa egzotičnim jednačinama stanja dobijamo da je $\epsilon \approx 10^{-5} - 10^{-4}$. Ako stavimo brojeve u jednačinu (6.29) dobićemo

$$h_0 \approx 10^{-25} \left(\frac{\epsilon}{10^{-6}}\right) \left(\frac{I_3}{10^{45} \text{g cm}^2}\right) \left(\frac{10 \text{kpc}}{r}\right) \left(\frac{f_{GW}}{1 \text{kHz}}\right) \quad (7.13)$$

Koristeći jednačinu $P = \frac{G}{5c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}_{ij} \rangle$, dobijamo

$$P = \frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \epsilon^3 I_3^2 \omega^6 \quad (7.14)$$

Duž emisije gravitacionih talasa, rotaciona energija zvezde se smanjuje

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \epsilon^3 I_3^2 \omega^6 \quad (7.15)$$

S obzirom da rotaciona energija zvezde koja rotira oko glavne ose je

$$E = \frac{1}{2} I_3 \omega^2 \quad (7.16)$$

pa ako je emisija gravitacionih talasa dominantan mehanizam za gubitak rotacione energije, frekvencija pulsara bi trebalo da opada kao

$$\dot{\omega} = -\frac{32}{5} \frac{G}{c^5} \epsilon^2 I_3 \omega^5 \quad (7.17)$$

Iz elektromagnetnih posmatranja dobijamo da je $\dot{\omega} \propto -\omega^n$, gde je $n \approx 2 - 3$. Prema tome, emisija gravitacionih talasa nije glavni mehanizam gubitka energije za rotirajući pulsar.

Ako se rotaciona osa ne poklapa sa glavnom osom rotacije, kretanje pulsara je onda kombinacija rotacije oko glavne ose i precesije.

Detekcija kontinualnih monohromatskih talasnih frekvencija je postignuta konstrukcijom snažnih spektrometra za procenu i potragu statistički važnih pikova na fiksiranim frekvencijama za veoma dugo vreme. Ako je T vreme posmatranja, odnos signala prema šumu raste kao \sqrt{T} . Detekcija je komplikovana zbog činjenice da signal koji je primio detektor nije savršeno monohromatski duž kretanja Zemlje. Zbog Doplerovog pomeranja u frekvenciji spektralne linije u stalnoj frekvenciji izvora šire snagu u više Furierovih binsa oko posmatrane frekvencije. Zbog mogućnosti da doprinos iz najjačih izvora gravitacionih talasa mogu biti elektromagnetski nevidljivi ili ranije neotkriveni, na celom nebu, potraga na svim frekvencijama za takav neotkriveni izvor je veoma važna ali je i veoma skupa.

7.2. Supernove

Supernove su nastale silovitim kolapsom zvezdanog jezgra koje formiraju neutronske zvezde ili crne rupe. Koplaps jezgra se odvija veoma brzo, traje manje od sekunde i gustina fluida izložena je kretanjima sa relativističkim brzinama. Mala odstupanja od sferne simetrije tokom ove faze može da stvari gravitacione talase.

Na osnovu elektromagnetnih posmatranja znamo da zvezde sa masama $M > 8M_{\odot}$ završavaju svoju evoluciju sa kolapsom jezgra i da 90% njih ima masu između $8 - 20M_{\odot}$. Tokom kolapsa većina materijala je izbačena i ako zvezda u početnom stadijumu ima masu $M \leq 20M_{\odot}$, pretvoriće se u neutronsku zvezdu. Ako je $M \geq 20M_{\odot}$, više od 10% materijala će pasti nazad i dovešće do maksimalne moguće mase proto-neutronsku zvezdu, pretvarajući je u crnu rupu. Ako zvezda u početku ima masu $M \geq 40M_{\odot}$, zvezda kolapsira direktno u crnu rupu. Numeričke simulacije su predvidele deformacije

$$h = 6 \cdot 10^{-7} \sqrt{\eta_{eff}} \left(\frac{M}{M_{\odot}} \right)^{1/2} \left(\frac{10 \text{kpc}}{r} \right)^{1/2} \left(\frac{1 \text{kHz}}{f} \right) \left(\frac{10 \text{msec}}{\tau_{kolapsa}} \right)^{1/2} \quad (7.18)$$

gde je $\Delta E_{GW} = \eta_{eff} M c^2$, $\eta_{eff} \sim 10^{-9}$. Gravitacioni talasi takođe mogu da nastanu emisijom neutrina tokom eksplozije supernove. Signal gravitacionih talasa bi se proširio prema nižim frekvencijama ~ 10 Hz. Takođe, superpozicija nezavisnih signala gravitacionih talasa sa supernovih može dovesti do stohastičkih pozadinskih gravitacionih talasa. Dok su procene nesigurne sa nekoliko redova veličine, ova pozadina može da se detektuje sa drugom generacijom interferometra koji se nalaze u svemiru i rade na oko $\sim 0,1$ Hz.

Podsetimo se da nakon eksplozije supernove značajna količina izbačenog materijala može da padne nazad, pa nakon toga usled rotiranja i zagrevanja nastaju neutronske zvezde ili crne

rupe. Kvazinormalni modovi mogu biti pobuđeni. Takođe postoji mogućnost da materijal koji je kolapsirao raspodeli se po grupama čije orbite liče na binarne sisteme ili strukture sa prečagama, što takođe proizvodi signale gravitacionih talasa.

8. Kosmološki izvori

U ovom poglavlju želimo da predstavimo stohastičke pozadine gravitacionih talasa. U zavisnosti od porekla, stohastičke pozadine mogu se podeliti na dve klase:

1. astrofizički stvorene pozadine duž inkoherentne superpozicije emitovane gravitacionom radijacijom od strane velike populacije izvora, koji se ne mogu individualno proučavati
2. prvobitne pozadine gravitacionih talasa stvorene procesima koji su se odvijali u ranim fazama u univerzumu

Prvobitne komponente takve pozadine su posebno zanimljive, s obzirom da nose jedinstvene informacije o početnom stanju u univerzumu.

Energija i spektralni sadržaj takve radijacije je kodiran u spektru, definisan kao

$$\Omega_{GW} = \frac{1}{\rho_c} f \tilde{\rho}_{GW}(f) \quad (8.1)$$

gde je f frekvencija, ρ_c je kritična gustina energije univerzuma ($\rho_c = 3H_0^2/8\pi G$) a $\tilde{\rho}_{GW}$ je gustina energije gravitacionih talasa po jedinici frekvencije

$$\rho_{GW} = \int_0^\infty df \tilde{\rho}_{GW}(f) \quad (8.2)$$

Pre nego što opišemo mehanizam koji je najverovatnije stvorio prvobitnu pozadinu gravitacionih talasa, ispitaćemo glavne fenomenološke granice.

8.1. Fenomenološke granice

Teorija nukleosinteze big-bang (BBN²⁶) predviđa prilično uspešno prvobitno bogatstvo lakih elemenata. Ako je t_{BBN} doprinos prvobitnih gravitacionih talasa (ili nekih drugih dodatnih komponenata energije) prema ukupnoj gustini energije bio velik, onda bi brzina širenja univerzuma H bila previše velika i temperatura smrzavanja koja određuje relativno bogatstvo neutrona i protona takođe velika. Kao posledica, neutroni bi bili više dostupni i prema big-

²⁶ Big-bang nucleosynthesis

bang nukleosintezi nagomilali bi se lakši elementi. Detaljno računanje će nam dati granicu gustine energije

$$\int d \ln f h_0^2 \Omega_{GW}(f) \leq 5,6 \cdot 10^{-6} (N_\nu - 3) \quad (8.3)$$

gde je N_ν efektivan broj neutrina pri t_{BBN} . Gornja granica frekvencije (danasa) se prostire oko $\sim 10^{-10}$ Hz. Češće, izvodimo sličnu granicu da bismo dobili prvobitnu gustinu energije gravitacionih talasa pri vremenu razdvajanja²⁷ t_{dec} . Kasnije se granica širi ka nižim frekvencijama (danasa) $\sim 10^{-15}$ Hz, koja se određuje kretanjem veličine horizonta pri vremenu razdvajanja.

Druga važna granica je takozvana COBE²⁸ granica, koja se nalazi merenjem fluktacionih temperatura u kosmičkoj mikrotalasnoj pozadinskoj radijaciji (CMB²⁹) koje su nastale pri Sachs-Wolfe³⁰ efektu. Ako je δT temperatura fluktacija, imamo da je

$$\Omega_{GW}(f) \leq \left(\frac{H_0}{f} \right)^2 \left(\frac{\delta T}{T} \right)^2 \quad 3 \cdot 10^{-18} \text{Hz} < f < 10^{-16} \text{Hz} \quad (8.4)$$

Donja granica je popravljena zahtevom da se uzimaju samo fluktacije unutar Hablovog radijusa koji je danas. Detaljna analiza nam daje

$$h_0^2 \Omega_{GW}(f) \leq 7 \cdot 10^{-11} \left(\frac{H_0}{f} \right)^2 \quad (8.5)$$

Gravitacioni talasi mogu da neutrališu ovu granicu ako je doprinos iz skalarnih perturbacija subdominantan i to zavisi od specifičnih inflatornih modela.

Veoma precizan tajming u milisekundama pulsara može da stvori Ω_{GW} . Ako gravitacioni talas prođe između nas i pulsara, vreme dolaska impulsa će biti Doplerov pomak. Mnogo godina posmatranja doveli su nas do granica od

$$h_0^2 \Omega_{GW} \lesssim 4,8 \cdot 10^{-9} \left(\frac{f}{f_*} \right)^2 \quad f > f_* = 4,4 \cdot 10^{-9} \text{Hz} \quad (8.6)$$

²⁷ U fizičkoj kosmologiji, termin razdvajanja se koristi tokom vremena trajanja rekombinacije kada stopa Komptonovog efekta postane sporija nego širenje univerzuma. U tom trenutku, fotoni skoro da zaustave njihove interakcije sa nanelektrisanom materijom i "razdvoje se", i tom prilikom proizvode kosmičko pozadinsko mikrotalasno zračenje, za koje znamo.

²⁸ Cosmic Background Explorer

²⁹ Cosmic microwave background radiation

³⁰ Ovaj efekat je osobina CMB, u kojoj protoni sa CMB imaju gravitacioni crveni pomak, što uzrokuje da spektar CMB bude neujednačen.

8.2. Gravitacioni talasi nastali usled kauzalnog mehanizma

Dve pojave određuju tipičnu frekvenciju gravitacionih talasa kosmoloskog porekla koje su nastale kauzalnim mehanizmom:

1. dinamičkim, čiji je model zavistan,
2. kinematičkim, crvenim pomakom iz vremena nastanka.

Prepostavimo da je graviton nastao sa frekvencijom f_* u trenutku vremena t_* tokom ere materije ili radijacije. Koja je njegova današnja frekvencija? Imamo da je

$$f = f_* \frac{a_*}{a_0} \quad (8.7)$$

ako prepostavimo da se univerzum širio adijabatski, pa je $g_S(T_*)T_*^3 a_*^3 = g_S(T_0)T_0^3 a_0^3$, koristeći $T_0 = 2,73$ K i $g_S(T_0) = 3,91$, gde je $g_S(T_*)$ broj stepeni slobode, pri temperaturi od T_* , dobićemo da je

$$f \simeq 10^{-13} f_* \left(\frac{100}{g_{S*}} \right)^{1/3} \left(\frac{1 \text{ GeV}}{T_*} \right) \quad (8.8)$$

Šta je f_* ? S obzirom da veličina Hablovog radijusa je skala van koje kauzalna mikrofizika ne može da operiše, karakteristična talasna dužina gravitona nastala pri vremenu t_* je H_*^{-1} ili manja. Prema tome, postavićemo da je

$$\lambda_* = \frac{\epsilon}{H_*} \quad \epsilon \lesssim 1 \quad (8.9)$$

Ako je signal gravitacionih talasa nastao tokom radijacione ere

$$H_*^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho = 8\pi^2 g_* T_*^4 \frac{1}{90} \frac{1}{M_{\text{Pl}}^2} \quad (8.10)$$

dobićemo da je

$$f \simeq 10^{-7} \frac{1}{\epsilon} \left(\frac{T_*}{1 \text{ GeV}} \right) \left(\frac{g_*}{100} \right)^{1/6} \text{ Hz} \quad (8.11)$$

Iz gornje jednačine sledi da milisekund pulsari mogu da se ispituju na sklama \sim MeV, LISA na \sim TeV skali, detektori na Zemlji na skali od 10^3 do 10^6 TeV i detektori u opsegu od GHz kao što su GUT na Plankovim skalamama.

Kao primenu nastanka gravitacionih talasa kauzalnim mehanizmom, razmotrićemo signal gravitacionih talasa od faznih prelaza I vrste. Tokom istorije svemira nekoliko faznih prelaza su mogli da se dogode. Fazni prelaz se u kvantnoj hromodinamici (QCD³¹) dešava na $T \sim 150$

³¹ Quantum-chromodynamics

MeV. Oko $T \sim 100$ GeV elektroslabi fazni prelaz (EW^{32}) se odvija. Pretpostavimo da je $V(\phi, T)$ potencijal koji odgovara faznom prelazu, gde je ϕ parametar polja. Kako se svemir hlađi, "pravi" i "lažni" vakuum je odvojen potencijalnom barijerom. Tokom kvantnog tunelovanja, mehuri pravog vakuuma mogu da izvrše nukleaciju. Razlika u energiji između pravog i lažnog vakuuma je konvertovana u kinetičku energiju (brzinu) mehurovih zidova. Da bi započeli širenje, mehuri moraju da imaju odgovarajuću veličinu, tako da bi se energija u zapremini skupila ona mora da nadvlada efekte skupljanja površinskog napona. Relevantan parametar je stopa nukleacije $\Gamma = \Gamma_0 e^{\beta t}$. Ako je Γ dovoljno veliko, mehuri mogu da se sudsaraju unutar Hablovog radiusa i zbog nesimetričnosti sudara oni prave gravitacione talase. Parametar β popravlja frekvenciju pri vremenu pravljenja gravitacionih talasa.

Stoga možemo da napišemo za parametar ϵ da je $\epsilon = \frac{H_*}{f_*} = \frac{H_*}{\beta}$ i pik spektra gravitacionih talasa se javlja pri

$$f_{pik} \simeq 10^{-8} \left(\frac{\beta}{H_*} \right) \left(\frac{T_*}{1 \text{GeV}} \right) \left(\frac{g_*}{100} \right)^{1/6} \text{Hz} \quad (8.12)$$

gde je T_* temperatura pri kojoj se javlja verovatnoća da mehur izvrši nukleaciju u granicama veličine horizonta koja je $\mathcal{O}(1)$.

U slučaju elektroslabe fazne promene, imamo da je $\frac{\beta}{H_*} \simeq 10^2 - 10^3$ i $T_* \sim 10^2 \text{GeV}$, pa prema tome $f_{pik} \simeq 10^{-4} - 10^{-3} \text{Hz}$, što je u okviru granica frekvencije LISA-e. Spektar gravitacionih talasa može da se izračuna poluanalitički

$$h_0^2 \Omega_{GW} \simeq 10^{-6} k^2 \frac{\alpha^2}{(1 + \alpha)^2} \frac{\nu_b^3}{(0,24 + \nu_b^3)} \left(\frac{H_*}{\beta} \right)^2 \left(\frac{100}{g_*} \right)^{1/3} \quad (8.13)$$

gde je α odnos između lažne gustine energije vakuuma i gustine energije zračenja pri promeni temeperature T_* ; k meri deo latentne topote koja se transformiše u kinetičku energiju zida mehura a ν_b je brzina širenja mehura.

Neperturbativni račun dobijen korišćenjem teorije polja je pokazao da nema faznog prelaza prvog reda u standardnom modelu ako je Higsova masa veća od M_W . U minimalnom supersimetričnom standardnom modelu, ako je Higsova masa $\sim 110\text{-}115 \text{ GeV}$, prelaz je prvog reda ali $h_0 \Omega_{GW} \sim 10^{-19}$ pri $f \sim 10 \text{ mHz}$. U super-simetričnom standardnom modelu koji je sledeći do minimalnog, postoji region parametra prostora u kojem je $h_0 \Omega_{GW} \sim 10^{-15} - 10^{-10}$ pri $f \sim 10 \text{ mHz}$. Za frekvencije $10^{-4} - 3 \cdot 10^{-3} \text{Hz}$ stohastička pozadina gravitacionih talasa za binarne sisteme belih patuljaka može da "sakrije" deo spektra iz faznog prelaza prve vrste. Novi modeli elektroslabih faznih prelaza narušavanja simetrije, koji su predloženi, imaju tipičan Higsov potencijal različit od onog u standardnom modelu. Taj potencijal može da dovede do jakog faznog prelaza prve vrste, pa prema tome i do gravitacionih talasa u mHz granicama frekvencije.

³² Electroweak

Stohastička pozadina gravitacionih talasa može se takođe stvoriti tokom faznog prelaza prvog reda iz turbulentnih (anizotropskih) vrtloga stvorenih u pozadinskom fluidu tokom brzog širenja i sudaranja mehura pravog vakuma. U sledećem po redu super-simetričom standardnom modelu postoje regioni parametra prostora gde je $h_0^2 \Omega_{GW} \sim 10^{-10}$ sa pikom frekvencije u mHz. Procenjivanje stohastičke pozadine gravitacionih talasa stvorenih kosmičkim turbulentcijama pre razdvajanja neutrina, što se desilo kasnije nego elektroslaba fazna tranzicija i pri kraju faznog prelaza prvoga reda ako magnetno polje takođe utiče na turbulentni spektar energije, je obećavajući scenario za LISA-u.

Još su davno Turner i Wilczek ukazali da ako se inflacija završi sa sudarima mehura, kao u proširenoj inflaciji, nastali pik u spektru gravitacionih talasa biće u granicama frekvencije za detektore koji se nalaze na Zemlji. Naknadne analize su pokazale da u inflatornom modelu sa dva polja gde prvo polje ispunjava fazni prelaz prvog reda a drugo polje obezbeđuje inflatorno sporo kotrljanje (takozvana prvog reda ili lažnog vakuma inflacija), ako se fazna promena desi pre kraja inflacije, spektar gravitacionih talasa će imati pik oko $10-10^3$ Hz. Uspešna detekcija takvog spektra će omogućiti razlikovanje između inflacije i drugih kosmoloških faznih prelaza, kao što su kvantnohromodinamički ili elektroslabi, koji imaju različite frekvencione pikove.

Drugi mehanizam koji bi mogao da stvari gravitacione talase je parametarsko pojačavanje nakon pretzagrevanja. Tokom ove faze klasične fluktacije nastale oscilacijama inflatornog polja ϕ mogu delovati povratno, putem parametarske rezonance, na oscilirajuću pozadinu stvarajući gravitacione talase. U modelu gde inflatorni potencijal sadrži izraz $\sim \phi^2 \chi^2$, χ je skalarno polje, pa je onda $\Omega_{GW} \sim 10^{-12}$ pri $f_{min} \sim 10^5$ Hz, dok je u potpuno haotičnoj inflaciji $\Omega_{GW} \leq 10^{-11}$ pri $f_{min} \sim 10^4$ Hz.

8.3. Gravitacioni talasi nastali od kosmičkih struna (stringova)

Topološki defekti mogu nastati tokom promene faze narušavanja simetrije u ranom univerzumu. Još '80-tih godina dobili su značajnu pažnju kao mogući kandidati za poreklo strukturnih formacija. U poslednje vreme, preciznija posmatranja kosmičke mikrotalne pozadinske radijacije, nehomogenosti na manjim uglovnim skalama i kompatibilnost sa spektrom gustine fluktuacije na skali od $100 h_0^{-1}$ Mpc, ograničili su doprinos topoloških defekata na manje od 10%.

Kosmičke strune su okarakterisane sa jednom dimenzionalnom skalom, masa po jedinici dužine μ . Dužina strune je definisana kao energija petlje podeljena sa μ . Kosmičke strune su stabilne nasuprot svim tipovima raspadanja, osim iz emisije gravitacionih talasa. Pretpostavimo da se mreža kosmičkih struna formirala tokom evolucije svemira. U toj mreži jedina relevantna skala je Hablova dužina. Male petlje osciluju, emituju gravitacione talase i nestaju, ali oni su sve vreme zamenjeni manjim petljama koje su otkinute od veoma duge petlje. Talasna dužina gravitacionih talasa je određena dužinom petlje, i s obzirom da se u

mreži nalaze petlje svih dužina, spektar gravitacionih talasa je (skoro) ravan u velikom opsegu frekvencije, pruža se od $f \sim 10^{-8}$ Hz do $f \sim 10^{10}$ Hz.

2001. godine Damour i Vilenkin došli su do zaključka da su jaka pojavljivanja gravitacionih talasa mogla nastati u povratnoj tački (gde string dostiže brzinu koja je blizu brzine svjetlosti) i u zavojku duž petlje strune. Kao posledica ovih jakih pojavljivanja, pozadina gravitacionih talasa emitovana mrežom struna je negausovska. Ova jaka pojavljivanja gravitacionih talasa mogu da se detektuju za veliki opseg vrednosti od $G\mu$, veće nego za uobičajno ispitivanje Gausovog spektra. Jaka pojavljivana gravitacionih talasa takođe mogu da se stvore fundamentalnim strunama.

Jaka pojavljivanja gravitacionih talasa emitovanih iz povratne tačke kosmičkim ili fundamentalnim strunama, mogu da se detektuju korišćenjem prilagođenog filtera. U Furierovom domenu signal je

$$h(f) = A|f|^{-\frac{4}{3}}\Theta(f_h - f)\Theta(f - f_e) \quad (8.14)$$

gde je $A \sim (G\mu L^{2/3})/r$, a f_e je određeno veličinom L od osobine koja stvara povratna tačka, ali takođe i od niske frekvencije detektoru i $f_h \sim 2/(\theta^3 L)$, θ je ugao između linije posmatranja i pravca povratne tačke.

8.4. Gravitacioni talasi nastali tokom inflacije

Pojačanje fluktacija kvantnog vakuuma je čest mehanizam u kvantnoj teoriji polja u zakrivenom prostoru-vremenu. '70-tih godina Grishchuk i Starobinsky su primenili to u kosmologiji, predviđajući stohastičku pozadinu gravitacionih talasa koja danas ima veliki raspon opsega frekvencije od 10^{-17} pa do 10^{10} Hz. Mi ćemo odrediti spektar gravitacionih talasa koristeći poluklasične argumente.

Dinamika pozadinskog polja je opisana na sledeći način

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_m \quad (8.15)$$

Friedmann-Lamaitre-Robertson-Walker metrika je izotropna i prostorno homogena sa faktorom skale a , pa možemo napisati sledeće

$$ds^2 = -dt^2 + a^2 dx^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (8.16)$$

Shodno uvedenoj linearizaciji možemo da izvedemo linearnu talasnu jednačinu za transverzalnu perturbaciju metrike $\delta g_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$, sa $h_{\mu 0} = 0$, $h_\mu^\mu = 0$, $h_{\nu;\mu}^\mu = 0$ i $\delta T_\mu^\nu = 0$, pa ćemo dobiti

$$\square h_i^j = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu (\sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\nu) h_i^j = 0 \quad (8.17)$$

gde smo zanemarili anizotropiju. Uvodeći pogodno vreme η sa $d\eta = dt/a(t)$, možemo napisati da je

$$h_i^j(\eta, \mathbf{x}) = \sqrt{8\pi G} \sum_{A=+, \times} \sum_{\mathbf{k}} h_{\mathbf{k}}^A(\eta) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} e_i^{Aj}(\mathbf{n}) \quad (8.18)$$

gde je $e_i^{Aj}(\mathbf{n})$ tenzor polarizacije. S obzirom da smo uzeli da je perturbacija metrike izotropna i prostorno homogena $h_{\mathbf{k}} = h_k$, pa će i svaki polarizovani mod da zadovolji sledeću jednačinu

$$h_k''(\eta) + 2 \frac{a'}{a} h_k'(\eta) + k^2 h_k(\eta) = 0 \quad (8.19)$$

gde smo sa primom označili izvode po pogodnom vremenu. Ako uvedemo kanoničku varijablu u gornju jednačinu $\psi_k(\eta) = ah_k(\eta)$, možemo da je napišemo u jednostavnijoj formi kao

$$\psi_k''(\eta) + [k^2 - U(\eta)] \psi_k = 0 \quad (8.20)$$

$$U(\eta) = \frac{a''}{a} \quad (8.21)$$

što predstavlja jednačinu harmoničkih oscilacija pri vremensko-zavisnom potencijalu $U(\eta)$. Želimo da rešimo gornju jednačinu i proučimo osobine rešenja.

Zbog jednostavnosti, razmatraćemo De Sitter-ovu inflatornu eru, gde je $a = -1/(H_{DS}\eta)$ i $a''/a = 2/\eta^2$, i napravićemo grubu pretpostavku da De Sitter-ovu eru prati radijaciona era, gde je $a(\eta) = (\eta - 2\eta_*)/(H_{DS}\eta_*^2)$ i $a''(\eta) = 0$.

Ako je $k^2 \gg U(\eta)$, i ako je $k\eta \gg 1$ ili $a/k \ll |a\eta| = H_{DS}^{-1}$, mod je unutar Hablovog radijusa ili je preko potencijalne barijere $U(\eta)$ i (pozitivne frekvencije) rešenje je

$$\psi_k \sim \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\eta} \quad \Rightarrow \quad h_k \sim \frac{1}{2k} \frac{1}{a} e^{-ik\eta} \quad (8.22)$$

pa prema tome, h_k opada dok je unutar Hablovog radijusa. Ako je $k^2 \ll U(\eta)$, i ako je $k\eta \ll 1$ i $a/k \gg |a\eta| = H_{DS}^{-1}$, mod je van Hablovog radijusa ili unutar potencijalne barijere. U ovom slučaju rešenje je

$$\psi_k \sim a \left[A_k + B_k \int \frac{d\eta}{a^2(\eta)} \right] \quad \Rightarrow \quad h_k \sim A_k + B_k \int \frac{d\eta}{a^2(\eta)} \quad (8.23)$$

S obzirom da tokom De Sitter-ove ere faktor skale postaje sve veći i veći, izraz proporcionalan sa B u obe jednačine postaje sve više i više zanemarljiv. Prema tome, perturbacija h_k ostaje

(skoro) konstantna dok je van Hablovog radijusa. Pa, što duže tenzor perturbacije moda ostane van Hablovog radijusa, više će biti pojačan. Tokom radijacione ere mod je opet unutar barijere pa je rešenje

$$\psi_k = \alpha_k e^{-ik\eta} + \beta_k e^{+ik\eta} \quad (8.24)$$

i sadrži i pozitivne i negativne mode. U kvantnoj teoriji polja mešanje pozitivnog i frekvencijskog moda, predstavlja proces stvaranja parova iz vakuma. Koeficijenti α_k i β_k su koeficijenti Bogoljubova koji se mogu dobiti izlaganjem kontinualnosti tenzorske perturbacije i njihovim prvim izvodima između tranzicije kosmoloških faza.

Intenzitet stohastične pozadine gravitacionih talasa može se izraziti u obliku broja gravitonu po celiji faznog prostora n_f sa $f = |\mathbf{k}|/(2\pi)$. Za anizotropnu stohastičku pozadinu gravitacionih talasa imamo da je $\rho_{GW} = 2 \int d^3k/(2\pi)^3(k n_k)$, pa prema tome dobijamo da je

$$\Omega_{GW}(f) = \frac{1}{\rho_c} 16\pi^2 n_f f^4 \quad (8.25)$$

gde je $n_f = |\beta_f|^2$.

Stohastički spektar gravitacionih talasa nastao tokom sporo-kotrljajuće inflacije, smanjuje se kao f^{-2} u opsegu frekvencije od 10^{-18} do 10^{-16} Hz, i onda se sporo smanjuju do frekvencije koja odgovara modovima čija fizička frekvencija postaje manja od maksimuma kauzalne distance tokom faze ponovnog zagrevanja (što je reda nekoliko GHz). Njihov intenzitet zavisi od vrednosti Hablovog parametra tokom inflacije i broja pojava koje karakterišu evoluciju svemira nakon inflatorne ere. Gornja granica spektra može se naći iz merenja kvadrupolne anizotropije kosmičke mikrotalasne pozadinske radijacije. S obzirom da za opšti sporo-kotrljajući inflatorni model spektar se smanjuje sa frekvencijom, to će nam dati gornju granicu $h_0^2 \Omega_{GW} \sim 5 \cdot 10^{-16}$ pri frekvenciji oko $f \sim 100$ Hz, gde detektori koji se nalaze na Zemlji dostižu najbolju osetljivost. Spektar koji nastaje klasom jednog polja inflatornog modela je previše nizak da bi mogao da se posmatra sa detektorima sa Zemlje, a i takođe sa detektorima u svemiru.

Stohastičke pozadine gravitacionih talasa mogu se detektovati korelacijom dva interferometra gravitacionih talasa. Gornja granica na ravnom spektru postavljena od strane LIGO-a je $h_0^2 \Omega_{GW} \simeq 6,5 \cdot 10^{-5}$ u okviru frekvencije 70 – 156 Hz. Za spekture koji su nezavisni od frekvencije, očekivana gornja granica za trenutnu konfiguraciju LIGO-a je $h_0^2 \Omega_{GW} < 5 \cdot 10^{-6}$, dok je za napredan LIGO projekat $h_0^2 \Omega_{GW} \sim 8 \cdot 10^{-9}$.

9. Gravitacioni detektori

9.1. LIGO

LIGO – opservatorija laserskog interferometra gravitacionih talasa (Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory) je značajan eksperiment kojim se direktno detektuju gravitacioni talasi. Saradnja tokom 1992. godine između Kip Thorne i Ronald Drever sa Caltech i Rainer Weiss MIT³³ Univerziteta, dovela je do stvaranja projekta LIGO. Međunarodna nacionalna saradnja na LIGO projektu okuplja oko 600 naučnika iz 40 instituta, koji analiziraju podatke sa LIGO detektora. LIGO radi sa dve opservatorije koje su skladne jedna sa drugom, a to su:

1. LIGO Hanford opservatorija na Hanford nuklearnom institutu u Ričlendu državi Vašington (slika 11) i
2. LIGO Livingston opservatorija u Livingstonu državi Luzijana (slika 12).



Slika 11. LIGO Hanford opservatorija

Ovi detektori se nalaze na udaljenosti od 3002 km. S obzirom da gravitacioni talasi putuju brzinom svetlosti, udaljenost između ova dva detektora odgovara razlici dolaznog vremena gravitacionih talasa do deset milisekundi. Pomoću triangulacije razlikom dolaznog vremena možemo da odredimo izvor talasa na nebu. Obe opservatorije imaju u obliku slova L visoki vakuumski sistem³⁴, dužine 4 km na obe strane. LIGO Livingston opservatorija ima jedan laserski interferometar u primarnoj konfiguraciji a skoro identičan se nalazi i u LIGO Hanford oservatoriji.

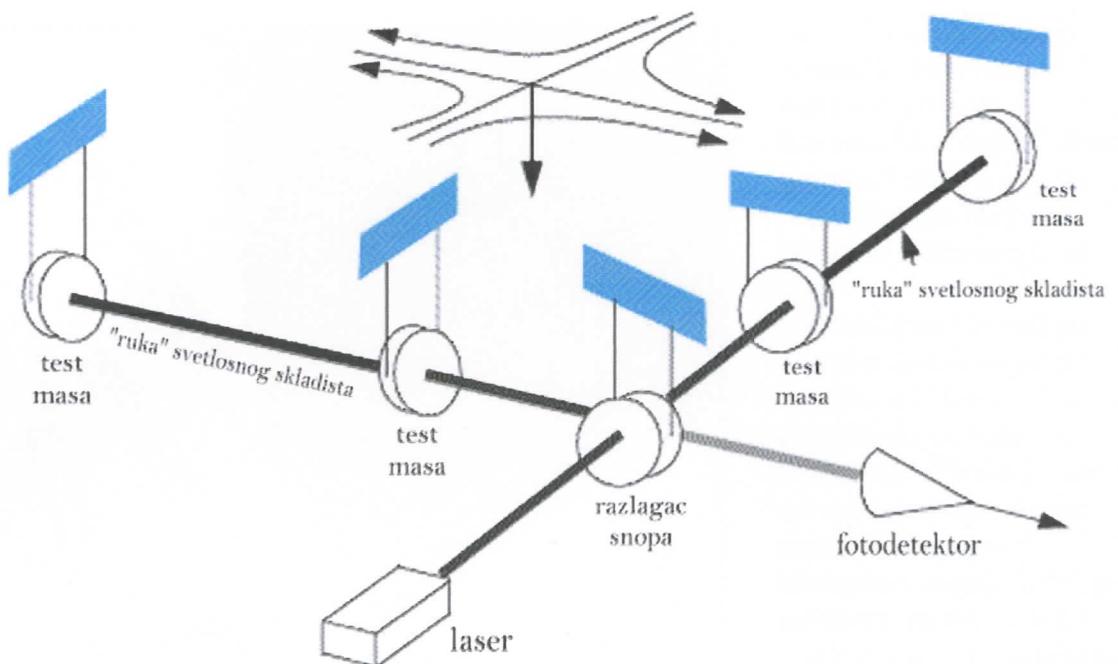
³³ Massachusetts Institute of Technology

³⁴ Visoki vakuumski sistem (ultra high vacuum - UHV) je vakuum karakterističnog režima u kojem je pritisak manji od 10^{-7} Paskala.



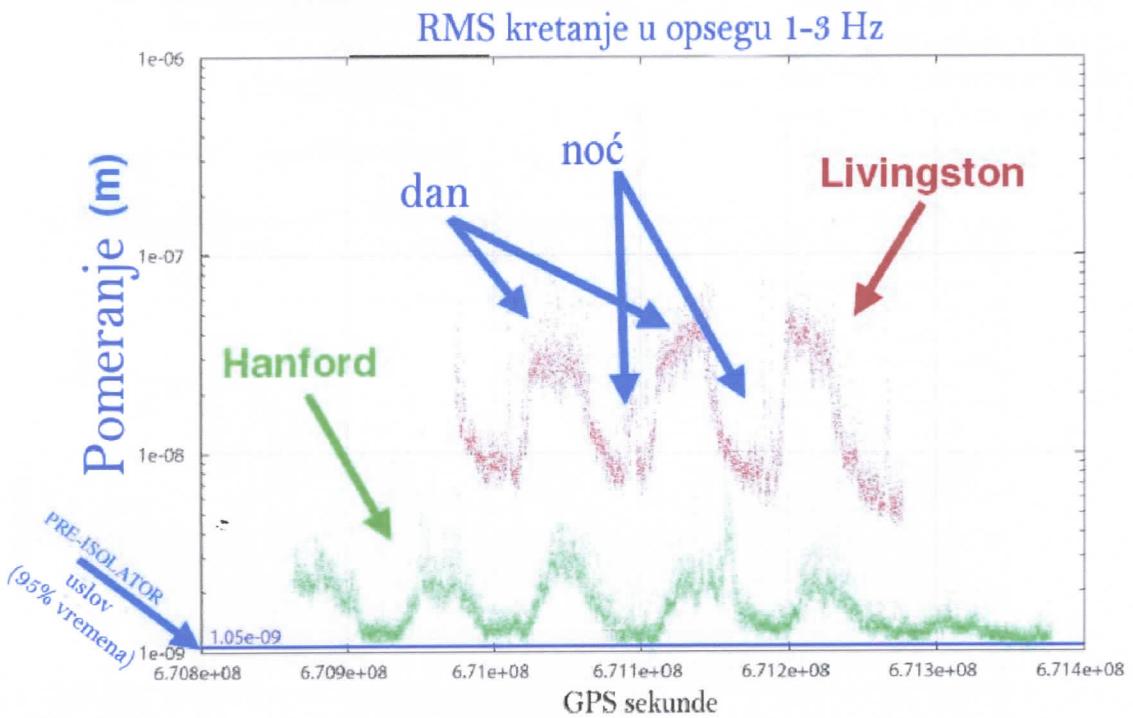
Slika 12. LIGO Livingston oservatorija

U uglovima (L) interferometra se nalaze ogledala, napravljeni su na odnovu Majkelsonovog interferometra (slika 13). Laser emituje snop do 35 Wati koji prolazi kroz optički vid čišćenja pre dolaska snopa do mesta razdvajanja. Na tom mestu se snop deli na dva puta, jedan na svaku stranu "ruke" L. Kada gravitacioni talas prođe kroz interferometar prostor-vreme u lokalnoj oblasti se menja. U zavisnosti od izvora talasa i njegove polarizacije, to će dati efektivnu promenu u dužini jedne ili obe šupljine. Promena dužine će dovesti blago šupljine iz rezonancije i uzrokovati da svetlost trenutno u šupljini postane van faze naspram svetla koje dolazi. Nakon približno 75 prolaska duž 4 km puta do ogledala i nazad, dva odvojena snopa napuštaju "ruke" i rekombinuju se na razлагаču snopa. Snopovi koji se vraćaju sa dve "ruke" su van faze pa kada su obe "ruke" u rezonanciji (kada kroz njih ne prolazi gravitacioni talas), svetlosni tarsi se substrakuju i svetlo ne stiže do fotodiode. Kada gravitacioni talas prođe kroz interferometar, rastojanje duž "ruke" interferometra se skraćuje i produžava, uzrokujući da snop bude manje van faze, tako da svetlo stiže do fotokatode, ukazujući na signal. Svetlo koje ne sadrži signal se vraća kroz interferometar preko snažnih ogledala za reciklažu, čime se povećava snaga svetlosti u "rukama". Izvori šuma mogu da uzrokuju kretanja u optici što proizvodi slične efekte realnom signalu gravitacionih talasa. Važan zadatak je pronaći način da se redukuju ta kretanja ogledala.

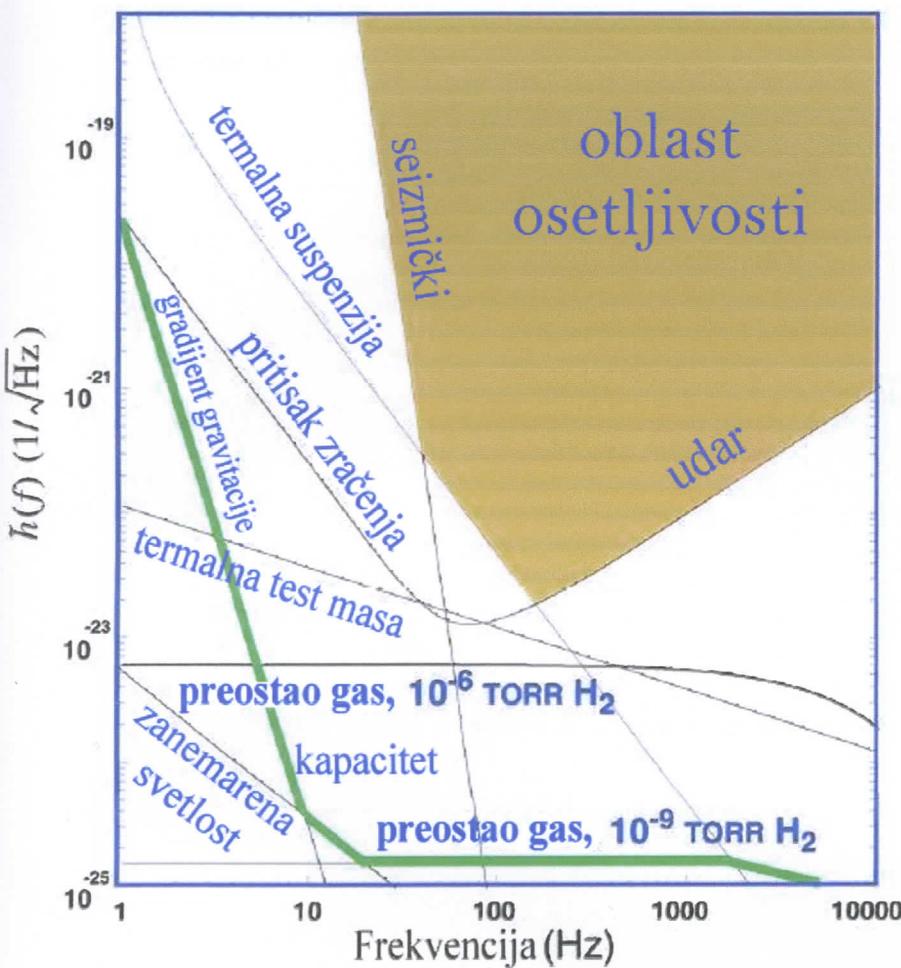


Slika 13. Šematski prikaz LIGO interferometra

LIGO kao visoko precizan optički sistem zahteva stalnu kontrolu fizičkog okruženja (vremenskih prilika, seizmičkih pokreta itd) što je prikazano na slici 14.

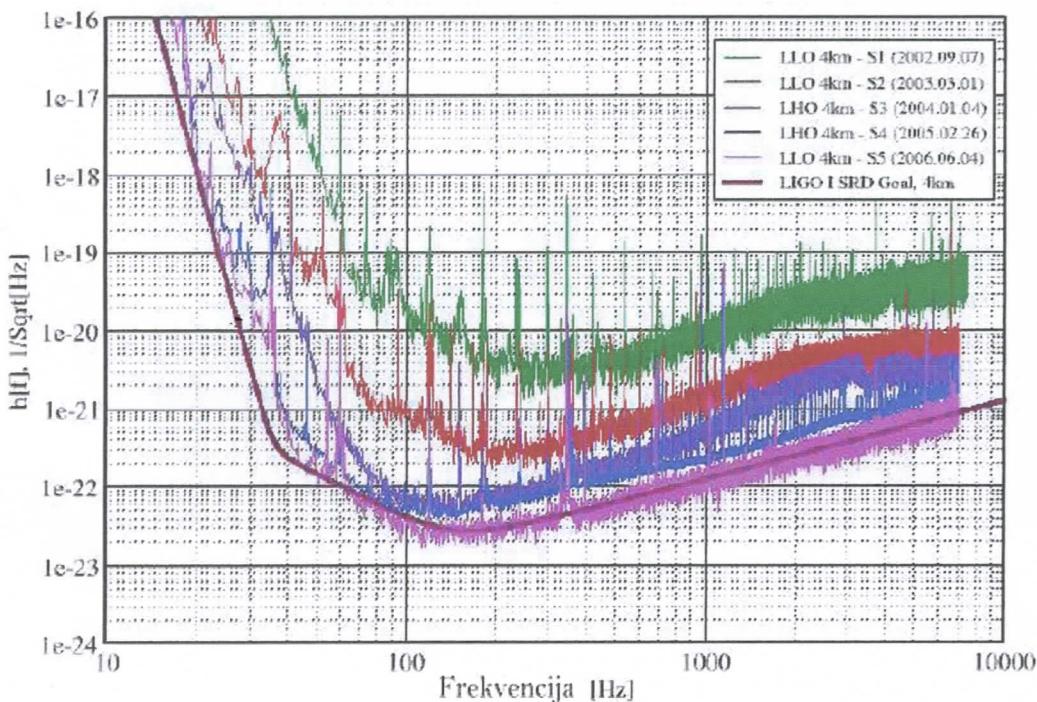


Slika 14. Dnevna promenljivost seizmičkih šumova (RMS – root mean square)



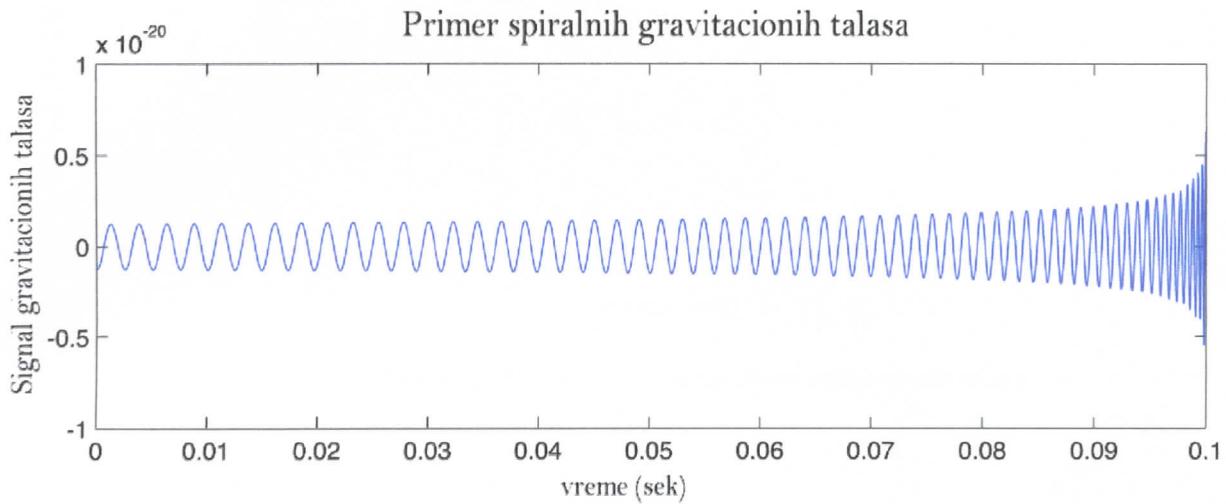
Slika 15. Granice osetljivosti

Granice osetljivosti su: seizmički šum i limit vibracije pri niskoj frekvenciji, atomska vibracija (termalni šum) u okviru komponenata limita pri srednjim frekvencijama, limiti kvantne prirode svetlosti (udar šuma) pri visokim frekvencijama i osetljivosti lasera, elektronske opreme itd (slika 15). Tehnički izazovi su: razumevanje promene mesta fluktacija u 4 kilometara dugoj "ruci" pri milifermi nivou ($1/1000$ dijametra protona), kontrola dužine "ruku" do 10^{-13} metara RMS, detektovanje optičke promene faze $\sim 10^{-10}$ radiana, poravnanje ogledala 10^{-8} radiana, inženjerske strukture koje ublažavaju trzaje iz atomskih vibracija u suspendovanim ogledalima, osetljivost naprezanja $< 10^{-21}$ (slika 16).

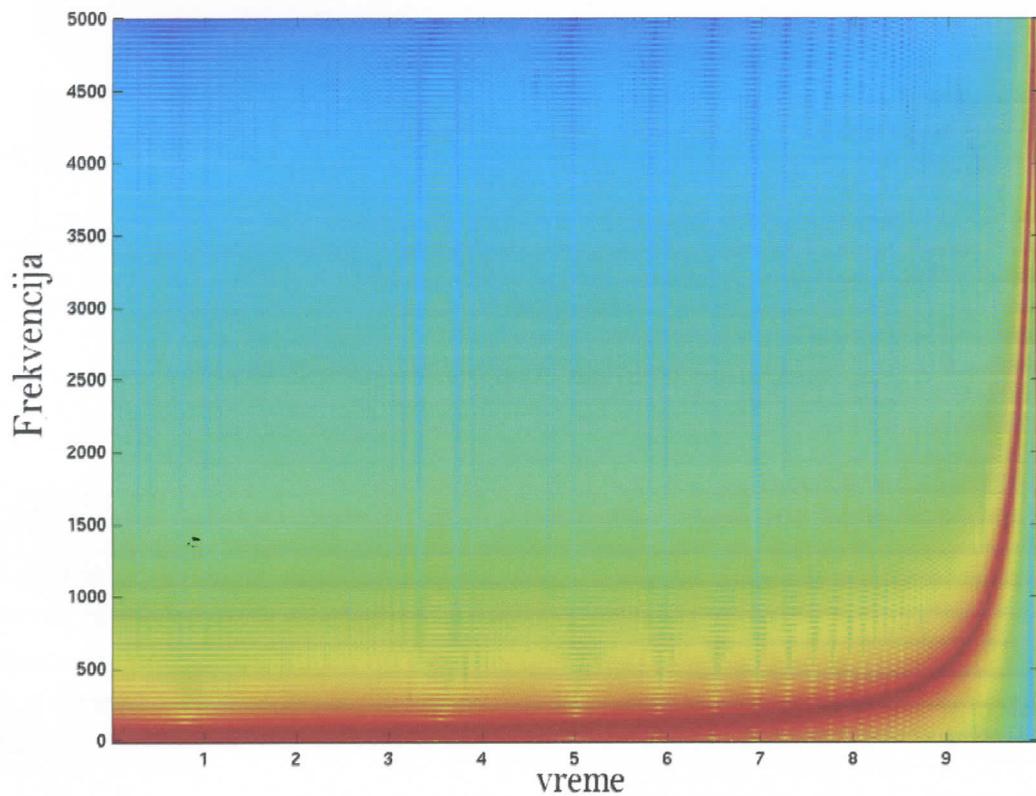


Slika 16. Osetljivost naprezanja LIGO interferometra

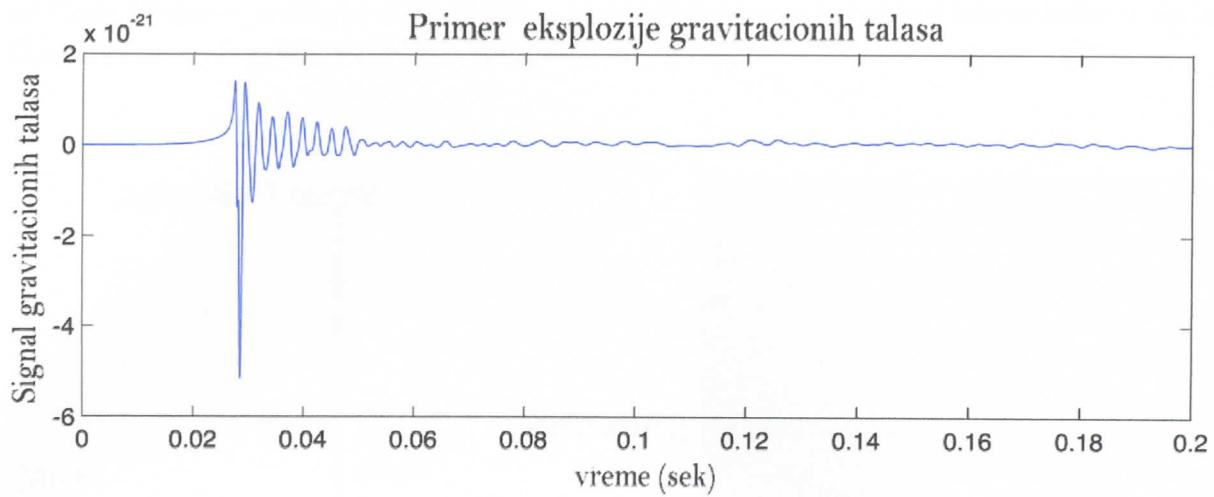
Ilustracije simulacija dobijenih iz astrofizičkih izvora sa LIGO interferometara prikazane su na slikama od 17 do 20.



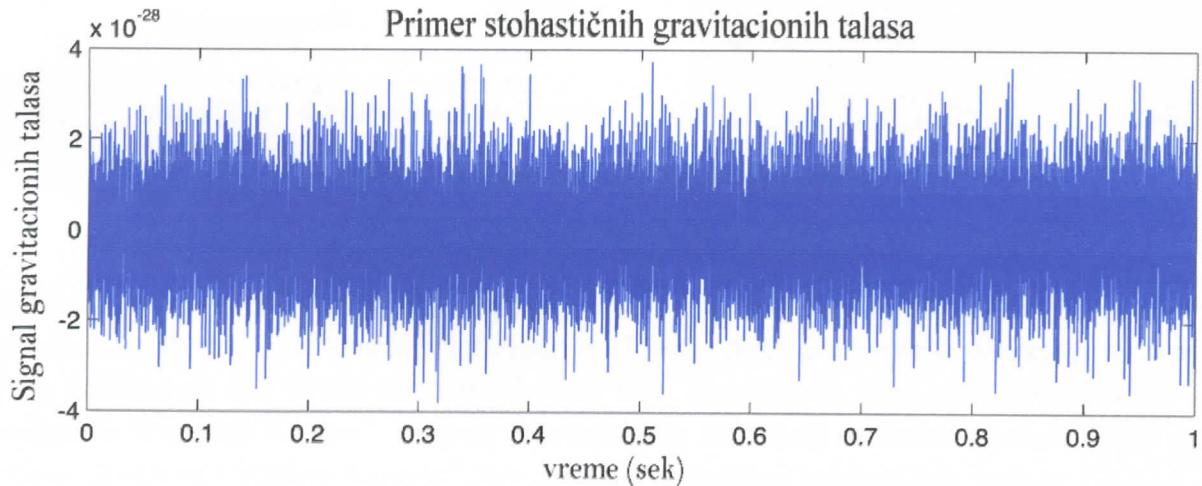
Slika 17. Simulacija spiralne talasne forme gravitacionog talasa



Slika 18. Simulacija spiralnog spektrograma – snaga je u funkciji od vremena i frekvencije



Slika 19. Simulacija eksplozije (burst) talasne forme gravitacionih talasa



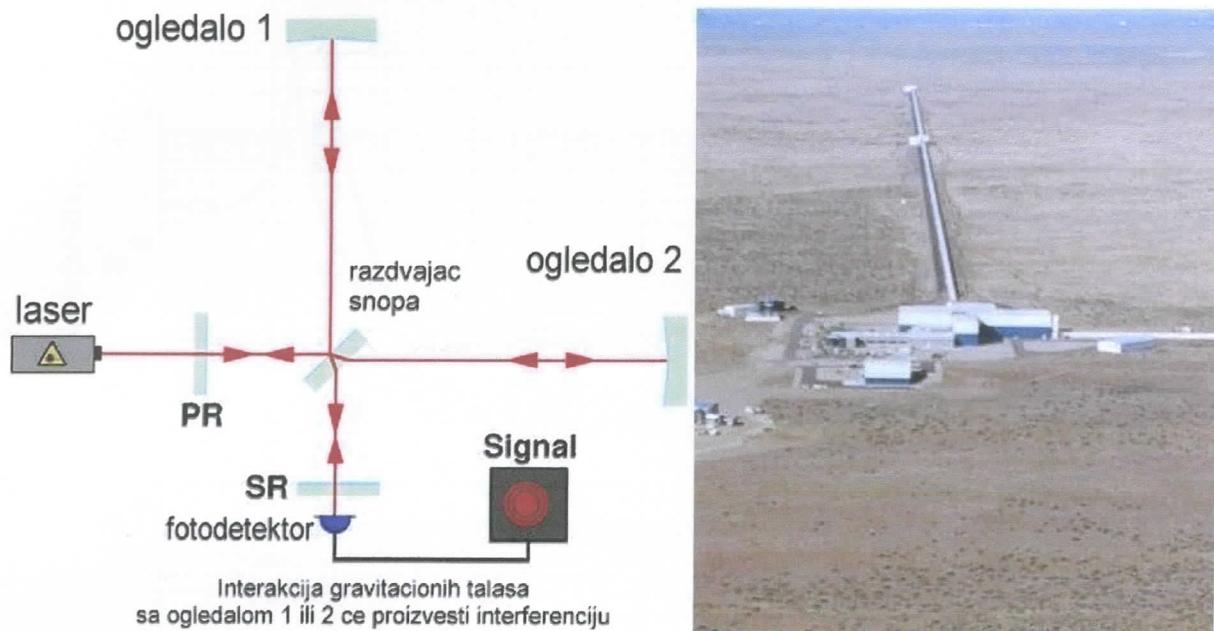
Slika 20. Simulacija stohastične talasne forme gravitacionih talasa

9.2. GEO 600

GEO 600 je gravitacioni detektor koji se nalazi u blizini Sarsteda u Nemačkoj (slika 21). Dizajniran je da detektuje relativne promene u rastojanju reda 10^{-21} , veličine jednog atoma u poređenju sa udaljenošću Sunca od Zemlje. GEO 600 je sposoban da detektuje gravitacione talase u opsegu frekvencije od 50 Hz do 1.5 kHz. Konstruisanje projekta je počelo 1995. godine.

15. januara 2009. godine dat je izveštaj za časopis “New Scientist”, da još uvek neki neidentifikovani šumovi koji su dobijeni merenjima GEO 600 detektora postoje iz razloga što je instrument osetljiv na veoma male kvantne fluktacije prostor-vremena. Ova tvrdnja potiče

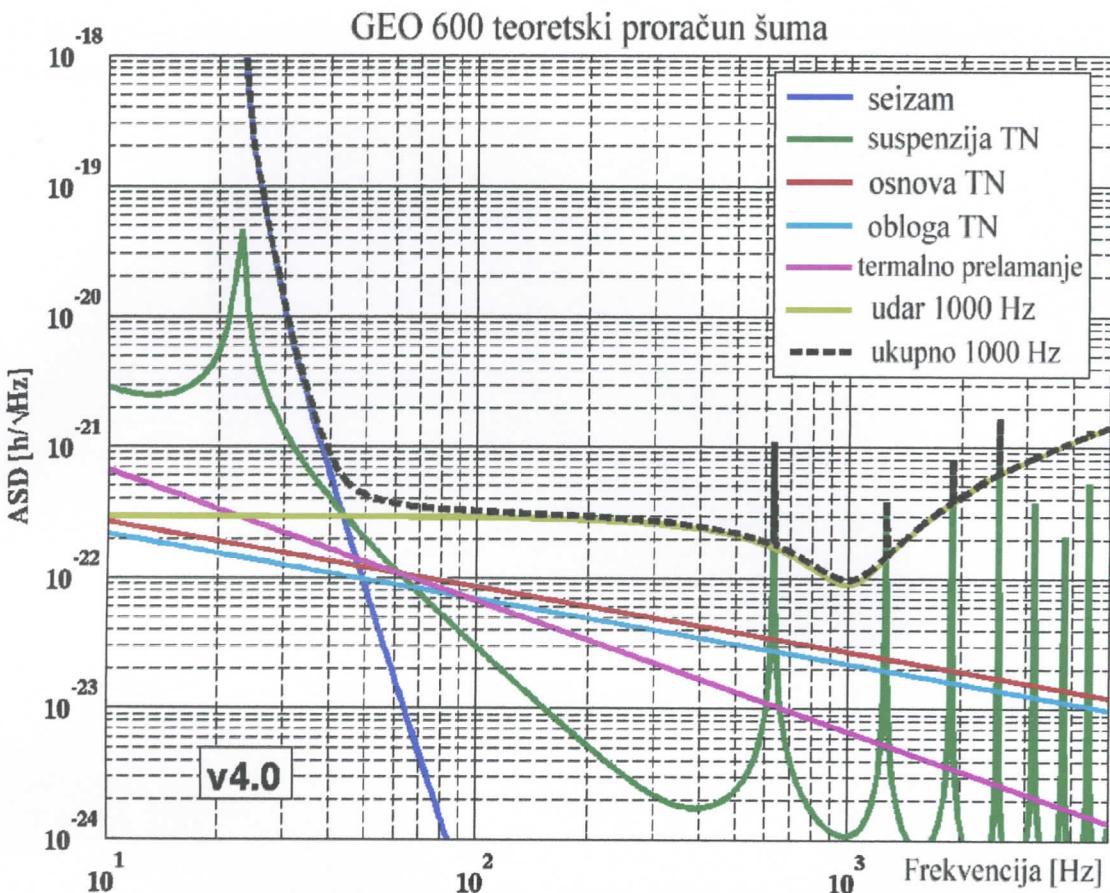
od Craig Hogan-a, naučnika iz Fermilab-a, na osnovu njegove sopstvene teorije kako se takve fluktacije mogu pojaviti, motivisan holografskim principom.



Slika 21. Geo 600 detektor gravitacionih talasa

Za detekciju gravitacionih talasa je potrebna saradnja iz celoga sveta. Samo sa mrežom detektora možemo dobiti precizne informacije. U jesen 2002. godine prvi zajednički rezultati (S1) dobijeni od dva LIGO detektora i GEO 600. Rezultati su objavljeni 2004. godine u magazinu "Physical Review". Neki od radova koji su objavljeni na osnovu ovih rezultata su: "Opis detektora i njihove karakteristike za prva podudarna posmatranja između LIGO-a i GEO 600", "Analiza podataka sa LIGO-a za gravitacione talase sa binarnog sistema neutronskih zvezda", "Postavljanje gornje granice za jačinu periodičnih gravitacionih talasa sa PSR J1939+2134 koristeći prve naučne podatke sa GEO 600 i LIGO detektora", "Prve gornje granice sa LIGO-a za eksplozije gravitacionih talasa", "Analize podataka sa LIGO-a za stohastičke gravitacione talase", "Limiti emisije gravitacionih talasa sa izabrabilih pulsara dobijeni podacima sa LIGO-a" itd. Rezultati koji su dobijeni drugom analizom podataka (S2) objavljeni su 2005. godine u istom magazinu, a neki od radova su: "Potraga za gravitacionim talasima koji potiču sa eksplozija gama zračenja GRB030329 koristeći LIGO detektore", "Potraga za gravitacionim talasima sa galaktičkih i vangalaktičkih binarnih sistema neutronskih zvezda", "Potraga za gravitacionim talasima sa binarnih sistema crnih rupa" itd.

Osetljivost GEO 600 zavisi od širine opsega faktora recikliranja signala. Recikliranje signala obezbeđuje promene spektralnih karakteristika detektora kao odgovor na šum koji stvara ograničenja. Birajući nižu ili višu refleksiju recikliranog signala ogledala možemo selektovati širi opseg (slika 22).



Slika 22. GEO 600 teoretski proračun šuma

9.3. VIRGO interferometar

VIRGO detektor za gravitacione talase sastoji se od Majkelsonovog laserskog interferometra napravljenog od dve ortogonalne "ruke", svaka dužine po 3 kilometara. VIRGO se nalazi u okviru EGO³⁵-a u Cascina, Italija (slika 23).

Opseg frekvencije VIRGO-a je od 10 do 10 000 Hz. Ovaj opseg frekvencije daje dobru osetljivost koja omogućava detekciju gravitacione radijacije koja potiče od supernovih i binarnih sistema koji se sjedinjavaju u Mlečnom putu i u drugim galaksijama.

Da bi detektor dostigao visoku osetljivost i da bi interferometar postigao optičku savršenost on je izolovan tako da bude osetljiv samo na gravitacione talase. Da bi to dostigli, Italijanski i Francuski naučnici koji su uključeni u ovaj projekat, su razvili naprednu tehnologiju u polju jako stabilnog lasera, visoke refleksivnosti ogledala, izolacije seizma i pozicije i podešavanja kontrole. U polju optike VIRGO koristi novu generaciju najstabilnijih lasera i oscilatora ikada napravljenih. Konstrukcija VIRGO-a je završena juna 2003. godine a maja 2007. počeo je sa radom i trenutno neprekidno prikuplja gravitacione signale koji mogu da stignu bilo

³⁵ European Gravitational Observatory – Evropska gravitaciona opservatorija

kada i iz bilo kog dela univerzuma. Signali se detektuju, snimaju i pre analiziraju kroz on-line sistem kompjuter. Tada ti podaci postaju dostupni naučnoj zajednici za dalju analizu.



Slika 23. VIRGO interferometar u Italiji

9.4. TAMA 300

TAMA 300 je detektor gravitacionih talasa koji se nalazi pri Mitaka kampusu nacionalne astronomske opservatorije u Japanu. To je projekat studijske grupe o gravitacionim talasima na Institutu za istraživanje kosmičkog zračenja (ICRR³⁶) na univerzitetu u Tokiju. ICRR je osnovan 1976. godine za proučavanje kosmičkog zračenja i trenutno razvija novi teleskop za kriogenske gravitacione talase na velikim skalamama (LCGT³⁷). Projekat TAMA je započet 1995. godine. Radi na osnovu Fabry Perot Majkelsonovog interferometra sa snažnim recikliranjem. Zvanično je poznat kao 300 metarska laser interferometar antena gravitacionih talasa. Cilj projekta je da se razviju napredne tehnike za buduće kilometarske interferometre i da se detektuju gravitacioni talasi koji potiču iz lokalnih grupa galaksija.

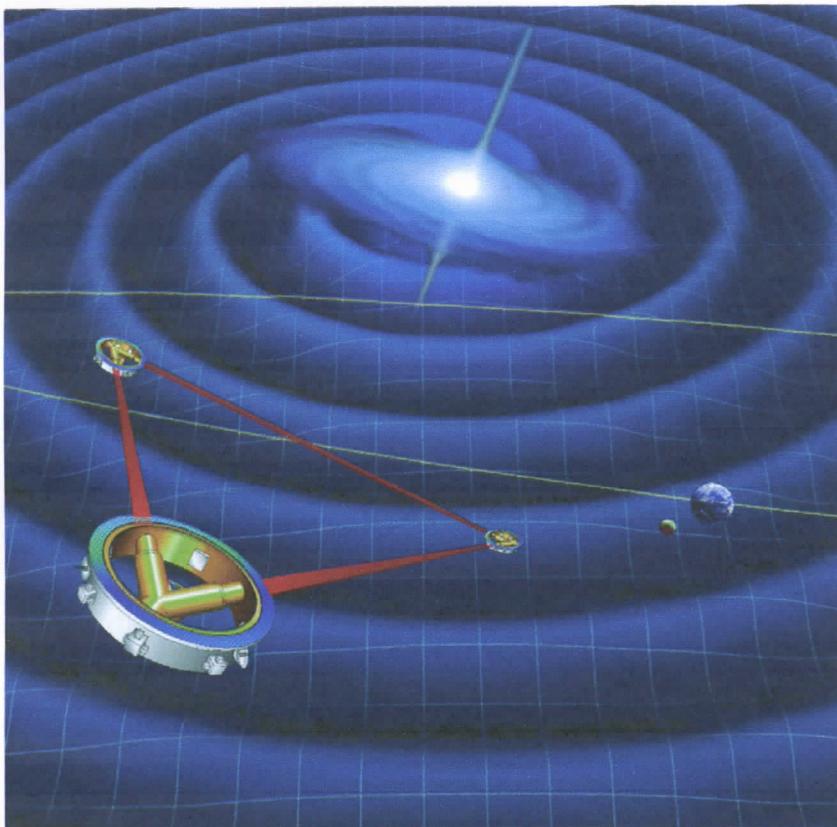
9.5. LISA

Laser interferometar svemirska antena (LISA) je projekat Evropske Svemirske Agencije (ESA) i NASA sa ciljem da se detektuju gravitacioni talasi sa astronomskih izvora. Lansiranje ovog projekta se očekuje između 2018. i 2020. godine. LISA ima konkurenčiju sa još dve misije Evropa Jupiter Sistem misija (EJSM) i Internacionalna opservatorija X-zračenja (IXO). Tokom 2013. godine samo jedna od ove tri misije će biti odabrana. ESA je izjavila da očekuje da će LISA ostati dve godine u orbiti.

³⁶ ICRR - Institute for Cosmic Ray Research

³⁷ LCGT - Large Scale Cryogenic Gravitational Wave Telescope

LISA meri gravitacione talase koristeći laserski interferometar preko astronomskih razdaljina. Koristiće tri svemirske letelice postavljene u jednakostraničnom trouglu tako da formiraju veliki Majkelsonov interferometar sa kracima dužine oko 5 miliona kilometara. Kada gravitacioni talas poremeti polje prostor-vremena između dve svemirske letelice, mala razlika u relativnim dužinama kraka biće merljiva. LISA će biti prvi detektor gravitacionih talasa koji se nalazi u svemiru (slika 24).



Slika 24. Ilustracija budućeg projekta u svemiru LISA

10. Komparacija elektromagnetskih i gravitacionih osobina

Detekcija gravitacionih talasa je novo polje astronomije. Detektori kao što je LIGO već postoje, ali kako se gravitacioni talasi ekstremno teško mogu posmatrati, ove opservatorije još nisu imale rezultata. Detekcija i posmatranje gravitacionih talasa će pomoći dalji razvoj teorije, kao i proučavanje izuzetno kompaktnih objekata u svemiru. Do sada smo prikupili veliki broj podataka sa kojima možemo da raspolažemo u stvaranju potpunije slike o predstavi veličine informacija koju nam pružaju gravitacioni talasi.

Da bi bolje razumeli svojstva i odlike gravitacionih talasa, možemo ih uporediti sa elektromagnetskim talasima i videti karakteristike koje ih opisuju (tabela 2).

ELEKTROMAGNETNI TALASI	GRAVITACIONI TALASI
putuju brzinom svetlosti	putuju brzinom svetlosti
transverzalni	transverzalni
dve polarizacije: horizontalna i vertikalna	dve polarizacije: + i ×
vektor – dipolan za \vec{B} i \vec{E} $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$	tenzor – kvadrupolno deformisanje prostor-vremena
rešenja Maksvelovih jednačina	rešenja Ajnštajnovih jednačina
stvaraju se menjanjem distribucije naboja dipola	neophodno je menjanje distribucije promene mase kvadrupola

Tabela 2. Razlike elektromagnetskih i gravitacionih talasa

Takođe možemo da uporedimo i elektromagnetno i gravitaciono zračenje i da uvidimo sledeća svojstva koja su prikazana u tabeli 3.

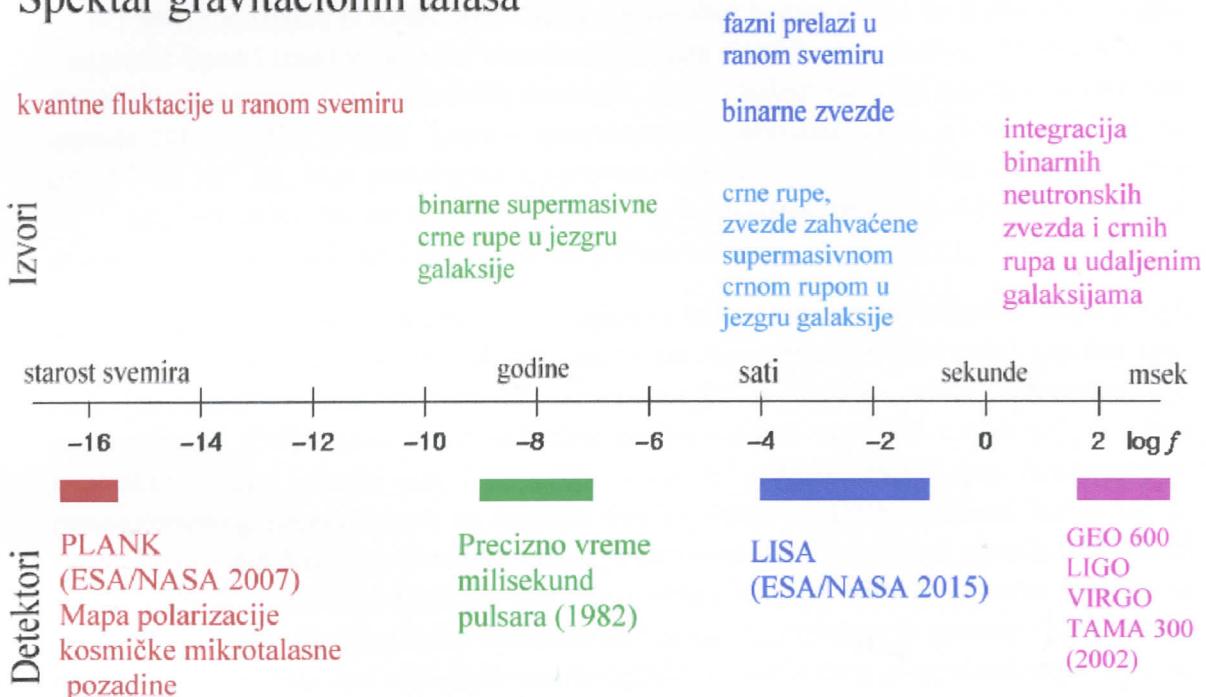
ELEKTROMAGNETNO ZRAČENJE	GRAVITACIONO ZRAČENJE
oscilacije električnog i magnetnog polja	oscilacije samog prostor-vremena
inkoherenntna superpozicija talasa koje emituju elektroni	koherentna superpozicija talasa koje emituju sistemi masa-energija
postoji interakcija sa materijom	vrlo slaba interakcija sa materijom
amplituda opada sa kvadratom udaljenosti	amplituda opada sa udaljenosću
može se napraviti slika objekta	ne može se napraviti slika objekta
posmatramo male delove neba prikupljajući veliku količinu informacija	posmatramo celo nebo

Tabela 3. Razlike elektromagnetskog i gravitacionog zračenja

Da bismo na višem nivo proučavali ova svojstva gravitacionih talasa već tokom '60-tih godina prošlog veka je Joseph Weber konstruisao jedan od prvih detektora. Zatim su konstruisani detektori sa rezonantnom masom, laserski interferometri i detektori postavljeni u svemiru. Detektori sa rezonantnom masom se sastoje od velikog i masovnog cilindra, određene rezonantne frekvencije $m > 1000$ kg. Kada gravitacioni talas prođe kroz ovakvu vrstu detektora on počne da vibrira. Veliki problemi kod ovakvih detektora su šumovi: termalni šum temperature od 0,1 K, senzorski šum i kvantni šum. Postojeći eksperimenti su: ALLEGRO (USA), ALTAIR (I), AURIGA (I), EXPLORER (CH), NAUTILUS (I) i NIOBE (AUS). Rezonantne sfere: GRAVITON (BR), TIGA (USA) i MiniGRAIL (NL). Kod

laserskih interferometara je takođe problem šum kao i: vibracije tla, termalni šum, šum fotona, kvantni šum, gradijent gravitacije šuma (ljudska aktivnost, seizmičke aktivnosti i fluktacije u atmosferi), šum od pritiska zračenja, preostao gas, kosmički šum itd. Potrebne su mnogobrojne matematičke i softverske metode za uklanjanje šuma (matched filtering). Na slici 25 je prikazan spektar gravitacionih talasa.

Spektar gravitacionih talasa



Slika 25. Spektar gravitacionih talasa

Detektore i izvore možemo da podelimo u tri grupe. Prva grupa je u opsegu od 1 do 10000 Hz. Izvori su kompaktni binarni sistemi: dve neutronske zvezde, dve crne rupe, neutronska zvezda i crna rupa. Ostali izvori gravitacionih talasa ove prve grupe su: kolapsi zvezdanog jezgra, pulsari i rotirajuće neutronske zvezde (periodični izvori), standardne sveće – sistemi zvezda jednakih masa i stohastički šumovi. Detekroti za prvu grupu izvora su LIGO, VIRGO, TAMA 300 i GEO 600. Druga grupa izvora gravitacionih talasa je u osegu od 10^{-5} do 1 Hz. Izvori su: binarni sistemi crnih rupa kod kojih čak možemo odrediti i nagib sistema, sudari crnih rupa u dvojnim sistemima i stohastička pozadina – elektroslabi fazni prelazi. Detektor predviđen za drugu grupu izvora je LISA koji tek treba da se lansira. Prednost LISA-e je posebna metoda razlikovanja pravog šuma od signala sličnih šumu. Smetnje koje bi se mogle javiti su promena u pritisku sunčevog zračenja i sunčevog vetra. U treću grupu izvora gravitacionih talasa se nalaze talasi sa opsegom od 10^{-18} do 10^{-13} Hz. Izvori su direktni signali iz vremena nakon Velikog Praska. Možemo naći talasne dužine uporedive sa veličinom svemira i dokaz za gravitaciono zračenje mogli bismo dobiti i određivanjem polarizacije pozadinskog zračenja.

11. Zaključak

Nauka o gravitacionim talasima je počela da se razvija u novoj eri. Eksperimentalno, nekoliko laser-interferometar detektora gravitacionih talasa na Zemlji je sagrađeno, koji rade u opsegu frekvencije 10-1 kHz u Sjedinjenim Američkim Državama (LIGO), Evropi (VIRGO i GEO 600) i u Japanu (TAMA 300). Napredne optičke konfiguracije sposobne da dostignu osetljivost ispod i iznad standardne kvantne granice za slobodne test čestice, dizajnirani su za drugu i treću generaciju gravitacionih detektora, koji bi trebali da budu spremni za upotrebu između 2011. i 2020. godine. Laser – interferometar svemirska antena (LISA), sa opsegom od 10^4 do 10^2 Hz, biće postavljena u narednoj deceniji. Na manjim frekvencijama, ispod 10^{-17} Hz, budućim istraživanjima kosmičke mikrotalasne pozadine (CMB) mogu se detektovati gravitacioni talasi merenjem CMB polarizacije.

Detektovanje gravitacionih talasa nam omogućava bolje razumevanje binarnih sistema koje čine npr. dve neutronske zvezde ili dve crne rupe, kao i razumevanje problema dva tela. Najbolje razvijeni analitički metod aproksimacije u opštoj teoriji relativnosti je postnjutnovski (PN) metod. Jasne zaključke možemo dobiti sa 3.5PN redom (v^7/c^7), ako kompaktni objekti nemaju spin, i sa 2.5PN redom (v^5/c^5) ako imaju spin. Izračunavanje postnjutnovskog širenja dovodi do krajnjih faza evolucije analitičkih računa, što uključuje tranziciju talasnih formi gravitacionih talasa (spiralna-sjednjavanje-pravi prsteni). Takođe se koristi i za opis očuvanja dinamike dva tela i efekte reakcija zračenja. Teorija efektivnog polja, koja se često koristi u fizici elementarnih čestica, je proširena na gravitaciju, pre svega na problemu kretanja dva tela. Nedavna dostignuća u numeričkoj relativnosti dovela su do rezultata u kojem možemo izdvojiti signal gravitacionog talasa ako poredimo mase binarnog sistema crnih rupa kroz talasne forme spiralne, sjednjavanja i pravih prstena.

Naša saznanja su takođe napredovala za problem kretanja materijalne tačke u zakriviljenom prostor-vremenu kada se emisija gravitacionih talasa uzima u obzir (negeodezijsko kretanje). Da bismo rešili ovaj problem važno je da razmatramo veoma precizne talasne forme emitovane od binarnih sistema gde je odnos masa ekstreman. To će biti najznačajniji izvor za detektor LISA.

Naučnici koji proučavaju gravitacione talase rade na interfejsu između teorije i eksperimenta što nam za rezultate daje šablonе za binarne sisteme i razvijanje algoritama za pulsare i druge izvore gravitacionih talasa koji se mogu posmatrati sa interferometrima na Zemlji i u svemiru. Zajednički rad na analizi podataka je dao astrofizički značajnu gornju granicu za nekoliko izvora gravitacionih talasa i sada se čeka na njihovu prvu detekciju.

U ovom radu je predstavljena osnovna teorija gravitacionih talasa. U drugom poglavlju date su Ajnštajnove jednačine polja iz kojih se u linearnoj aproksimaciji dobija talasna jednačina. U trećem poglavlju je opisana interakcija gravitacionih talasa sa slobodnom test česticom i ključne ideje za razumevanje funkcionalnosti detektora gravitacionih talasa. U četvrtom

poglavlju se razmatra efektivan tenzor pritiska energije gravitacionih talasa. Peto poglavlje je posvećeno generalizaciji problema. Eksplicitno smo dobili gravitaciono polje predpostavljajući sporo kretanje, slabu gravitaciju i slabu sopstvenu gravitaciju. Zatim smo diskutovali kako se ti rezultati mogu proširiti na izvore gde se uračunava sopstvena gravitacija. Kao prvu primenu, u poglavlju šest, izračunali smo signal gravitacionog talasa za binarni sistem. Takođe smo opisali postnjutnovski račun i rezultate koje nam daje numerička relativnost. Izračunali smo šablon gravitacionog talasa u aproksimaciji nepokretne faze. U sedmom poglavlju smo primenili podatke dobijene iz predhodnog poglavlja, na druge astrofizičke izvore, pulsare i supernove. Osmo poglavlje je fokusirano na kosmološke izvore pri mnogo većem crvenom pomaku ($z \gg 1$). Razmatrali smo glavni fizički mehanizam koji je mogao da proizvede gravitacione talase u ranom svemiru. U devetom poglavlju dat je pregled najznačajnijih detektora gravitacionih talasa koji se nalaze na Zemlji, kao i detektora koji će u budućnosti biti postavljeni u svemiru. U desetom poglavlju je prikazana komparacija elektromagnetskih i gravitacionih osobina i takođe je dat spektar gravitacionih talasa. U ovom poglavlju smo mogli stvoriti konačnu sliku šta su gravitacioni talasi i zbog čega su važni za proučavanje.

Literatura:

- [1] Milan Pantić – “*Uvod u Ajnštajnovu teoriju gravitacije*”, PMF Novi Sad, 2005
- [2] Alessandra Buonanno – “*Gravitational Waves*”, Department of Physics, University of Maryland, College Park MD 20742, USA March 31, 2007
- [3] Ignazio Ciufolini, Francesco Fidecaro – “*Gravitational Waves: Sources and Detectors*” Volume 2, Cascina (Pisa), Italy 1996
- [4] Steven Weinberg – “*Gravitation and Cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*”, Massachusetts Institute of Technology, 1972
- [5] E. Katsavounidis – “*LIGO Detectors and Data Analyses: Current Status and Future Prospects*”, 28th International Cosmic Ray Conference, LIGO Laboratory, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, USA 2003
- [6] Eric Myers, Fred Raab, Dale Ingram – “*Making LIGO Physical Environment Data Available for Discovery-based Learning*”, Collaboration“Physics in a New Light” New York APS/AAPT Spring SymposiumWest Point, New York13-14 April 2007
- [7] Daniel Sigg – “*Commissioning of LIGO Detectors*”, 5th Edoardo Almaldi conference 7 July 2003
- [8] Internet sajtovi:

http://en.wikipedia.org/wiki/Laser_Interferometer_Space_Antenna

<http://lisa.nasa.gov/>

http://en.wikipedia.org/wiki/TAMA_300

<http://en.wikipedia.org/wiki/VIRGO>

<http://www.virgo.infn.it/>

http://en.wikipedia.org/wiki/GEO_600

<http://geo600.aei.mpg.de/>

<http://en.wikipedia.org/wiki/LIGO>

<http://www.ligo.caltech.edu/>

http://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_wave

http://www.nasa.gov/vision/universe/starsgalaxies/collide_whitedwarf.html

Kratka biografija kandidata:



Kristina Đorđević, rođena 2.7.1986. godine u Zrenjaninu, pohađala je Osnovnu školu "Jovan Cvijić" u istom gradu. Srednju školu "Zrenjaninska gimnazija", prirodno-matematički smer, je završila 2005. godine. Iste godine se upisala na Prirodno – matematički fakultet u Novom Sadu, smer Astronomija sa astrofizikom. Tokom jula meseca 2008. godine, bila je na praksi u Opservatoriji "Ondrejevo" u Pragu, na Stellar departmanu. Četvrtu školsku 2008/2009 godinu u okviru programa "Campus Europae", završila je na Univerzitetu "Opera" u gradu Trento, Italija.



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije:

TD

Tip zapisa:

TZ

Vrsta rada:

VR

Autor:

AU

Mentor:

MN

Naslov rada:

NR

Jezik publikacije:

JP

Jezik izvoda:

JI

Zemlja publikovanja:

ZP

Uže geografsko područje:

UGP

Godina:

GO

Izdavač:

IZ

Mesto i adresa:

MA

Fizički opis rada:

FO

Naučna oblast:

NO

Naučna disciplina:

ND

Predmetna odrednica/ ključne reči:

PO

UDK

Čuva se:

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

Datum prihvatanja teme od NN veća:

DP

02.10.2009.

Datum odbrane:

DO

13.10.2009.

Članovi komisije:

KO

Predsednik:

član:

Dr Miodrag Krmar, vanredni profesor

Dr Milica Pavkov Hrvojević, vanredni profesor

Monografska dokumentacija

Tekstualni štampani materijal

Diplomski rad

Kristina Đorđević, 229/05

Dr Milan Pantić, vanredni profesor

Gravitaciono polje u linearnoj aproksimaciji – gravitaciono zračenje i gravitacioni talasi

srpski (latinica)

srpski/engleski

Srbija

Vojvodina

2009

Autorski reprint

Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

(broj poglavlja/broj strana/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga):(11/58/3/25/0/0)

Atrofizika, Opšta teorija relativnosti

Gravitaciono polje, Gravitacioni talasi, Gravitaciono zračenje i Gravitacioni detektori

Biblioteka departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu

nema

U radu je opisana teorija gravitacionih talasa, njihovi astrofizički izvori i njihova detekcija.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type:

DT

Type of record:

TR

Content code:

CC

Author:

AU

Mentor/comentor:

MN

Title:

TI

Language of text:

LT

Language of abstract:

LA

Country of publication:

CP

Locality of publication:

LP

Publication year:

PY

Publisher:

PU

Publication place:

PP

Physical description:

PD

Scientific field:

SF

Scientific discipline:

SD

Subject/ Key words:

SKW

UC

Holding data:

HD

Note:

N

Abstract:

AB

Accepted by the Scientific Board:

ASB

Defended on:

DE

Thesis defend board:

DB

President:

Member:

Monograph publication

Textual printed material

Final paper

Kristina Đorđević, 229/05

Dr Milan Pantić, associate professor

Gravitational field in linear approximation – gravitational radiation and gravitational waves

Serbian (Latin)

English

Serbia

Vojvodina

2009

Author's reprint

Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
(chapters/pages/literature/tables/graphics/additional lists):(11/58/03/25/0)

Physics

Astrophysics, General theory of relativity

Gravitational field, Gravitational waves, Gravitational radiation and
Gravitational detectors

Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4

none

In paper work is describe theory of gravitational waves, their astrophysical sources and their detections.

02.10.2009.

13.10.2009.

Dr Miodrag Krmar, associate professor

Dr Milica Pavkov Hrvojević, associate professor