U N I V E R Z I T E T   U   N O V O M   S A D U

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

SOLITONI U KLASIČNOM FEROMAGNETNOM LANCU SA ANIZOTROPIJOM TIPA XXZ

- DIPLOMSKI RAD -

Jovan Mišić

Novi Sad, jun 1985.

Zahvaljujem se dr Mariju Škrinjaru
na pomoći i strpljenju.

Mišić Jovan

S A D R Ž J A

I UVOD

I. 1. SOLITONI

Pojam solitona je relativno dugo poznat u hidrodinamici. Prvo posmatranje ovakve pojave obavio je John Scott Russell posmatrajući talase na površini vode. Sam termin su uveli Zabusky i Kruskal za rešenja KdV (Korteweg de Wries) jednačine.

Solitoni su rešenja različitih nelinearnih talasnih jednačina za koja se mogu uopštiti neke osobine: imaju impulsnu zvonastu formu; brzina solitona može da zavisi od amplitude, a često sa porastom amplitude raste i brzina; solitoni se mogu sudariti i proći jedan kroz drugi bez promene oblika ili brzine, ali uz malu promenu faze.

Za razliku od običnih disperzivnih talasa ovakva rešenja su trajno prostorno lokalizovana, ne rasejavaju se i imaju praktično beskonačan život. Sve ovo mnogo podseća na čestice, što je i dalo u novije vreme povoda da se solitonski koncept iskoristi u jednoj od alternativnih teorija elementarnih čestica. Druge primene se mogu naći u hidrodinamici, teoriji plazme, nelinearnoj optici, nelinearnoj kristalnoj fizici, teoriji feromagnetizma.

Svoju stabilnost solitoni duguju postojanju dvaju suprotnih dejstava. Disperzivni faktori teže da raspršе talasni paket.S druge strane, nelinearsnosti balansiraju ukupan efekat na nulu, što obezbedjuje postojanost talasne formacije . Ravnoteža ne mora biti apsolutna jer i tada solitoni (metastabilni) daju svoj doprinos svojstvima materijala ili su čak njihovi isključivi nosioci.

Egzistencija solitona je dokázana i za dvo- i trodimenzionalne sisteme ali je najbolje proučena, uglavnom zbog relativne jednostavnosti, za jednodimenzionalne. Matematički, jednodimenzionalnost je jasna ali u fizici je potrebno utvrditi relaciju teorije i realnosti. Apsolutno jednodimenzionalna situacija u stvarnosti ne postoji, ali zato postoje materijali koji pokazuju izražena svojstva u jednom pravcu. U slučaju ovakvih, kvazi-jednodimenzionalnih sredina, jednodimenzionalna analiza predstavlja opravdanu aproksimaciju. Tema ovog rada je upravo jedan takav slučaj na primeru feromagneta.

Prvi eksperimentalni dokaz solitona u feromagneticima dobijen je na jedinjenju $C_sN_iF_3$ rasejavanjem neutrona. U novije vreme je otkriven i veći broj drugih kvazi-jednodimenzionalnih materijala.

Kako je ovo dalo smisla teorijskim predvidjanjima razvijeni su različiti metodi za rešavanje niza feromagnetnih modela. Takozvana tehnika inverznog rasejanja, omogućava odredjivanje svih svojstvenih vrednosti (eigen modes) nekih klasičnih sistema kao što su Heisenbergov, Landav-Lifšicov model. Rešenja su linearna ili solitonska.

Analogni kvantni sistemi se mogu potpuno dijagnolizovati Bethe ansatz psotupkom. Medjutim, tačno izračunavanje merljivih veličina kao što su dinamički form faktori još stvara teškoće, osim za neke specijalne slučajeve, na primer XY-model na svim temperaturama ili aksijalno anizotropni na T=0. Za ostale anizotropije razvijeni su numerički ili približni analitički metodi.

Klasično rešavanje uvodi već na početku dve aproksimacije. Prvo, kvantne veličine zamenjuje klasičnim i drugo, pošto su solitoni dobijeni samo za kontinuum, napušta diskretnu sliku i prelazi u kontinualnu. Račun se može sprovesti direktno ili, na primer, svodjenjem na s-G jednačinu. Inače, s-G (sine-Gordon) je tipična solitonska jednačina. Može se očekivati, medjutim, da zbog učinjenih aproksimacija rešenja nemaju neograničeno važenje već su primenjiva samo za neke domene parametara. Pri povratku u diskretni model solitoni bi morali održati odredjenu stabilnost i dati svoj doprinos merljivim veličinama. Pokazuje se da je ovo ispunjeno i kada striktni solitoni ne postoje.

Eksperimentalni rezultati uglavnom potvrdjuju pretpostavke teorije. U članku |1| su uporedjene merene i računate vrednosti specifične toplote i spin-rešetka relaksacionog vremena u jedinjenu XY tipa $(C_6H_{11}\ NH_3)Cu\ Br_3$. Konstatovano je potpuno kvalitativno slaganje, ali je zazo kvantitativna razlika ostala nerastumačena.

U svakom slučaju, kada su u pitanju solitonske pojave u statističkoj fizici, radi se o relativno svežem problemu čiji puni značaj tek treba odrediti.

I.2. HEISENBERGOV FEROMAGNETIK

Heisembergov model opisuje dielektične feromagnetike uzimajući u obzir samo interakciju izmene. Magnetnu rešetku čini sistem uredjenih spinova medjusobno povezanih izmenskim silama. Opšti oblik ovog modela je anizotropni Heisenbergov feromagnet.

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n},\vec{m}}(I^{x}_{\vec{n},\vec{m}}\hat{S}^{x}_{\vec{n}}\hat{S}^{x}_{\vec{m}} + I^{y}_{\vec{n},\vec{m}}\hat{S}^{y}_{\vec{n}}\hat{S}^{y}_{\vec{m}} + I^{z}_{\vec{n},\vec{m}}\hat{S}^{z}_{\vec{n}}\hat{S}^{z}_{\vec{m}})$$

S^{x}_{n} i su komponente operatora spina, a $I_{n,m}$ integrali izmene. Često se koriste i sledeći specijalni slučajevi:

a) Izotropni model - $I^{x}_{\vec{n}\vec{m}} = I^{y}_{\vec{n},\vec{m}} = I^{z}_{\vec{n},\vec{m}} \equiv I_{\vec{n},\vec{m}}$

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\sum_{\vec{n},\vec{m}} I_{\vec{n},\vec{m}}\vec{S}_{\vec{n}}\vec{S}_{\vec{m}}$$

b) Izingov model - $I^{x}_{\vec{n},\vec{m}} = I^{y}_{\vec{n},\vec{m}} = 0$; $I^{z}_{\vec{n},\vec{m}} \equiv I_{\vec{n}.\vec{m}}$

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n},\vec{m}} I_{\vec{n},\vec{m}}\hat{S}^{z}_{\vec{n}}\hat{S}^{z}_{\vec{m}}$$

c) X - Y model - $I^{z}_{\vec{n},\vec{m}} = 0$; $I^{x}_{\vec{n},\vec{m}} = I^{y}_{\vec{n},\vec{m}} \equiv I_{\vec{n},\vec{m}}$

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n},\vec{m}} I_{\vec{n},\vec{m}}(\hat{S}^{x}_{\vec{n}}\hat{S}^{x}_{\vec{m}} + \hat{S}^{y}_{\vec{n}}\hat{S}^{y}_{\vec{m}})$$

Feromagnetik se može postaviti u spoljašnje magnetno polje (obično u pravcu z-ose) i tada gornjem hamiltonijanu treba dodati član (Zemanov term)

$$- \mu \mathcal{H} \sum_{\vec{n}} \hat{S}_n^z$$

Kod mnogih realnih feromagnetika potrebno je u hamiltonijan uključiti i članove koji uzimaju u obzir spin-spin, spin-orbitalnu ili neku drugu interakciju u realnim kristalnim strukturama. Ti članovi dovode do dopunskih anizotropija, kao što su feromagnetici sa osom lake magnetizacije, ravni lake magnetizacije itd. (videti u |3| gl. I). U ovom diplomskom radu razmatraće se jednosolitonska rešenja za klasični feromagnetni lanac sa tzv. izmenskom anizotropijom (anisotropic exchange Heisenberg chain). Integral izmene medju Z-komponentama spinova razlikuje se od onog izmedju X, Y komponenata. Ovakav slučaj se simbolički obeležava kao XXZ - anizotropni feromagnetik, a hamiltonijan je oblika

$$H = - \frac{I}{2} \sum_{j,\alpha} (S_j^x S_{j+\alpha}^x + S_j^y S_{j+\alpha}^y + \eta S_j^z S_{j+\alpha}^z) \qquad (I.2.1)$$

U zavisnosti od parametra η možemo imati sledeće modele:

a) $\eta = 1$ - izotropni model

b) $\eta = 0$ - X - Y model

c) $\eta \to \infty$ - Izingov model

U radu će biti detaljno analizirano solitonsko rešenje za slučaj slabe anizotropije ($\eta \approx 1$).

II SOLITONI U KLASIČNOM XXZ - ANIZOTROPNOM FEROMAGNETIKU

II. 1. OPŠTA SOLITONSKA JEDNAČINA

Kao što je u uvodu rečeno, u ovom radu biće obradjen XXZ - anizotropni jednodimenzionalni feromagnetik. Početni hamiltonijan izabrali smo u sledećoj formi

$$H = -\mu\mathcal{H}\sum_j S_j^z - \frac{I}{4}\sum_{j,\alpha}(S_j^+ S_{j+\alpha}^- + S_{j+\alpha}^+ S_j^-) - \frac{\tilde{I}}{2}\sum_{j,\alpha} S_j^z S_{j+\alpha}^z + \sum_j\left[\frac{P_j^2}{2m} + \frac{mv_0^2}{2a^2}(y_j - y_{j-1})^2\right] - g\sum_j (y_{j+1} - y_j)\left[(\vec{S}_j\cdot\vec{S}_{j+1} + (\eta-1)S_j^z S_{j+1}^z\right] \quad (1.1)$$

gde smo uzeli u obzir prisustvo spoljašnjeg magnetnog polja $\mathcal{H}$, oscilovaje čvorova lanca i spin-fonon interakciju, sve u aproksimaciji najbližih suseda. Uticaj fonona je dat prvim redom razvoja integrala izmene po fononskom pomeranju

$$I(n + y_n - m - y_m) \approx I(n - m) + \frac{\partial I}{\partial(n-m)}(y_n - y_m) =$$

$$= I(n - m) + g(y_n - y_m) \; ; \quad g = \frac{\partial I}{\partial R}, \qquad R = n - m > 0$$

konstanta a je parametar rešetke, a η koeficijent anizotropije ($\tilde{I} = \eta I$).

Problem ćemo rešavati u kontinualnoj aproksimaciji. Prelaz se vrši na sledeći način

$$\frac{1}{a}\sum_{n} \underset{a\to o}{a\,\Delta n} \Rightarrow \frac{1}{a}\int dx$$

$a\to o$ se odnosi samo na a pod sumom.

Fizički smisao ovog prelaza odražava činjenicu da se u lancu posmatraju ekscitacije sa talasnim dužinama mnogo većim od konstante rešetke. Činilac $1/a$ koji predstavlja meru gustine rešetke ipak implicitno pamti diskretnost lanca, tako da a zadržava početni smisao bez obzira na novu prirodu promenljivih.

$$H = -\frac{\Gamma\mathcal{H}}{a}\int S^z\,dx - \frac{Ia^2}{2a}\int\vec{S}\cdot\frac{\partial^2\vec{S}}{\partial x^2}\,dx - \frac{I}{2a}(n-1)\int\left(2S^{z^2} + a^2S^z\frac{\partial^2S^z}{\partial x^2}\right)dx +$$

$$+\frac{1}{a}\int\left[\frac{P^2}{2m} + \frac{mv_o^2}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right]dx + H^i_{int} -$$

$$-\frac{g(n-1)}{a}\int\left(a\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right)\left(S^{z^2} + aS^z\frac{\partial S^z}{\partial x} + \frac{a^2}{2}S^z\frac{\partial^2S^z}{\partial x^2}\right)dx \qquad (1.2)$$

H^i_{int} je izotropni deo hamiltonijana interakcije, a član $\frac{Ia^2S^2}{2a}$ je odbačen kao nebitan. U izvodjenju je korišćen sledeći razvoj

$$f(j\pm\alpha) \approx f \pm a\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{a^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

a kao mali parametar je uzeta veličina $a\frac{\partial}{\partial x}$.

Hamiltonijan (1.2) se može uprostiti na osnovu sledećeg izraza

$$\frac{\partial^2\vec{S}}{\partial x^2}\cdot\vec{S}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{S}\cdot\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\vec{S}^2}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2$$

$$\vec{S}=\mathrm{const}\qquad S\cdot\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\vec{S}^2=0$$

U hamiltonijanu interakcije zadržavaju se članovi do a^2 ili ako su ovi jednaki nuli do a^3. Nakon odbacivanja izraza koji posle integracije ne daju doprinos stavljajući $a=1$ konačno dobijamo

$$H=\int\mathcal{H}\,dx$$

$$\mathcal{H}=-\mu\mathcal{H}S^z+\frac{I}{2}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2-I(\eta-1)(S^z)^2+\frac{I}{2}(\eta-1)\left(\frac{\partial S^z}{\partial x}\right)^2+$$

$$+\frac{g}{2}\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial\vec{S}}{\partial x}\right)^2-g(\eta-1)\frac{\partial y}{\partial x}(S^z)^2-\frac{g(\eta-1)}{6}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2(S^z)^2}{\partial x^2}+$$

$$+\frac{g(\eta-1)}{2}\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial S^z}{\partial x}\right)^2+\frac{p^2}{2m}+\frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\tag{1.3}$$

Prelaskom na sferne koordinate

$$S^z=S\cos\Theta=Su$$

$$S^x=S\sin\Theta\cos\Phi$$

$$S^y=S\sin\Theta\sin\Phi$$

$$\Theta=\arccos u$$

$$u_\xi=\sin\Theta\,\Theta_\xi\qquad\Theta_\xi^2=\frac{u_\xi^2}{1-u^2}$$

$$\Theta_{\xi\xi}=-\frac{u_{\xi\xi}}{\sqrt{1-u^2}}-\frac{uu_\xi^2}{(1-u^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial S^{z^2}}{\partial \xi} = S^2\, 2\, u u_\xi \qquad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}(S^{z^2}) = 2S^2 (u_\xi^2 + u u_{\xi\xi})$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial \xi}\right)^2 = S^2 (\Theta_\xi^2 + \sin^2\Theta\, \phi_\xi^2)$$

hamiltonijan (1.3) postaje

$$\mathcal{H} = -\mu \mathcal{H} S u + \frac{IS^2}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{1-u^2} + (1-u^2)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2\right] - IS^2(\eta-1)\, u^2 + \frac{IS^2}{2}(\eta-1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 +$$

$$+ \frac{IS^2}{2}(\eta-1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{gS^2}{2}\frac{\partial y}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{1}{1-u^2} + (1-u^2)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2\right] - gS^2(\eta-1)\frac{\partial y}{\partial x}\, u^2 -$$

$$- \frac{gS^2(\eta-1)}{3}\frac{\partial y}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] + \frac{gS^2(\eta-1)}{2}\frac{\partial y}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{p^2}{2m} + \frac{mv_0^2}{2}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \qquad (1.4)$$

U hamiltonijanu (1.4) odbacuje se član $-\frac{gS^2(\eta-1)}{6}\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}$ jer u jednačine kretanja uvodi veličinu $\frac{\partial^3 y}{\partial x^3}$, što prevazilazi usvojeni stepen tačnosti.

Sada ćemo formirati hamiltonove jednačine za dva para konjugovanih veličina, p, y odnosno S^z, Φ

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y_x}\right) \qquad (1.5)$$

$$\dot{p} = m\ddot{y} = mv_0^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{gS^2}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{1}{1-u^2} + (1-u^2)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2\right] -$$

$$- gS^2(\eta-1)\frac{\partial}{\partial x}(u^2) + \frac{gS^2(\eta-1)}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \qquad (1.6)$$

Za $S^z = Su$ dobijamo

$$\dot{u} = -\frac{1}{S}\left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \Phi_x}\right)\right]$$

$$\dot{u} = \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left[(IS^2 + gS^2\frac{\partial y}{\partial x})\,(1-u^2)(\frac{\partial \Phi}{\partial x})\right] \tag{1.7}$$

a za Φ

$$\dot{\Phi} = \frac{1}{S}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} - \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u_x}\right)$$

$$\dot{\Phi} = \frac{1}{S}\left\{-\mu\mathcal{H}S + (IS^2 + gS^2\frac{\partial y}{\partial x})\left[\frac{u}{(1-u^2)^2}(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - u(\frac{\partial \Phi}{\partial x})^2\right] - 2gS^2(\eta-1)u\frac{\partial y}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - 2IS^2(\eta-1)u\right\} - \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}\left\{(IS^2 + gS^2\frac{\partial y}{\partial x})\frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{1-u^2} + IS^2(\eta-1)\frac{\partial u}{\partial x} + gS^2(\eta-1)\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}\right\}$$

$$\dot{\Phi} = -\mu\mathcal{H} - 2IS(\eta-1)u + IS(1 + \frac{g}{I}\frac{\partial y}{\partial x})\left[\frac{u}{(1-u^2)^2}(\frac{\partial u}{\partial x})^2 - u(\frac{\partial \Phi}{\partial x})^2\right] -$$

$$- 2gS(\eta-1)u\frac{\partial y}{\partial x} - IS(1 + \frac{g}{I}\frac{\partial y}{\partial x})\left[(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})\frac{1}{1-u^2}\right] - IS(1 + \frac{g}{I}\frac{\partial y}{\partial x})\frac{2u}{(1-u^2)^2}(\frac{\partial u}{\partial x})^2 -$$

$$- IS\frac{\partial u}{\partial x}\frac{1}{1-u^2}\frac{\partial}{\partial x}(1 + \frac{g}{I}\frac{\partial y}{\partial x}) - gS(\eta-1)\frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial x}) - IS(\eta-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Nakon množenja sa $\sqrt{1-u^2}$ i sredjivanja sledi

$$\sqrt{1-u^2}\,\dot{\Phi} = -\mu\mathcal{H}\sqrt{1-u^2} - 2IS(\eta-1)\sqrt{1-u^2}\cdot u - 2gS(\eta-1)\,u\sqrt{1-u^2}\frac{\partial y}{\partial x} -$$

$$- IS\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}(1 + \frac{g}{I}\frac{\partial y}{\partial x}) - IS(\eta-1)\sqrt{1-u^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} -$$

$$- IS(1 + \frac{g}{I}\frac{\partial y}{\partial x})\left[\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{u}{(1-u^2)^{3/2}}(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + u\sqrt{1-u^2}(\frac{\partial \Phi}{\partial x})^2\right]$$

Povratkom na Θ, Φ konačno dobijamo

$$\sin\Theta\,\dot{\Phi} = -\mu\mathcal{H}\sin\Theta - 2IS(\eta-1)\cos\Theta\sin\Theta - 2gS(\eta-1)\cos\Theta\sin\Theta\frac{\partial y}{\partial x} -$$

$$- IS\Theta_x\frac{\partial}{\partial x}\left(1 + \frac{g}{I}\frac{\partial y}{\partial x}\right) + IS\left(1 + \frac{g}{I}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\Theta_{xx} - \cos\Theta\,\Phi_x^2\right) +$$

$$+ IS(\eta-1)\sin\Theta\frac{\partial}{\partial\Theta}\left(\sin\Theta\,\Theta_x\right) \tag{1.8}$$

dok se jednačina (1.7) svodi na

$$\frac{\partial}{\partial t}\cos\Theta = IS\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(1 + \frac{g}{I}\frac{\partial y}{\partial x}\right)\sin^2\Theta\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right] \tag{1.9}$$

Integraciju jednačine (1.6) izvršićemo posle uvodjenja sledeće smene

$$\xi = x - vt \qquad y = y(\xi)\quad,\quad u = u(\xi)$$

$$\Phi = \Phi(\xi, t) \qquad \frac{\partial}{\partial t} = -v\frac{\partial}{\partial\xi}$$

$$- m(v_0^2 - v^2)\frac{\partial^2 y}{\partial\xi^2} = \frac{gS^2}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\Theta_\xi^2 + \sin^2\Theta\,\Phi_\xi^2\right] - gS^2(\eta-1)\frac{\partial}{\partial\xi}(\cos^2\Theta) +$$

$$+ \frac{gS^2(\eta-1)}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\sin^2\Theta\,\Phi_\xi^2\right) \tag{1.10}$$

Pri graničnim uslovima u $\xi = \pm\infty$

$$\Theta_\xi = 0, \qquad \sin\Theta = 0\quad,\qquad \cos\Theta = 1$$

koji su u skladu sa izborom osnovnog stanja u kojem je $S^z = S$, integral izraza (1.10) daje

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{gS^2(\eta-1)}{m(v_0^2-v^2)}(\cos^2\Theta - 1) - \frac{gS^2(\eta-1)}{2m(v_0^2-v^2)}\sin^2\Theta\ \Theta_\xi^2 -$$

$$- \frac{gS^2}{2m(v_0^2-v^2)}(\Theta_\xi^2 + \sin^2\Theta\ \Phi_\xi^2) \qquad (1.11)$$

Jednačina (1.9) se takodje može integraliti. Uvodjenjem promenljive ξ i primenom gornjih graničnih uslova i sledećih oznaka

$$\frac{v}{IS} = V \quad , \quad A = 1 + \frac{g}{I}\frac{\partial y}{\partial x}$$

dobijamo

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = V\frac{1-\cos\Theta}{A\sin^2\Theta} = \frac{V}{A(1+\cos\Theta)} \qquad (1.12)$$

U izraz (1.8) uvodimo smenu

$$\Phi = \Omega\ t + \hat{\Phi}\ (\xi)$$

$$\dot{\Phi} = \Omega - v\ \hat{\Phi}_\xi \qquad \hat{\Phi}_\xi = \Phi_\xi$$

i rezultate (1.11) i (1.12), što posle sredjivanja daje

$$\frac{\mu\mathcal{H}+\Omega}{IS}\sin\Theta + 2(\eta-1)\sin\Theta\cos\Theta - \frac{2g^2S^2(\eta-1)^2}{Im(v_0^2 - v^2)}\sin^3\Theta\cos\Theta -$$

$$- \frac{g^2S^2(\eta-1)^2}{Im(v_0^2 - v^2)}\sin^3\Theta\cos\Theta\ \Theta_\xi^2 - \frac{g^2S^2(\eta-1)}{Im(v_0^2 - v^2)}\sin\Theta\cos\Theta\ \Theta_\xi^2 -$$

$$- \frac{g^2S^2(\eta-1)}{Im(v_0^2-v^2)}\sin^3\Theta\cos\Theta\frac{V^2}{A^2(1+\cos\Theta)^2} - \frac{V^2\sin\Theta}{A(1+\cos\Theta)} + \frac{V^2\sin\Theta\cos\Theta}{A(1+\cos\Theta)^2} -$$

$$- (\eta-1)\sin\Theta \frac{\partial}{\partial\xi}(\sin\Theta\, \Theta_\xi) - \Theta_\xi A_\xi - A\,\Theta_{\xi\xi} = 0 \qquad (1.13)$$

Jednačina (1.13) odgovara anizotropnom (XXZ) feromagnetiku sa spin-fonon interakcijom i tačno se ne može rešiti, ali sadrži neke pristupačnije specijalne slučajeve:

a) Izotropni feromagnetik bez spin-fonon interakcije

$\eta = 1$, $A = 1$, $g = 0$

b) Izotropni feromagnetik sa spin-fonon interakcijom

$\eta = 1$

c) Anizotropni (XXZ) feromagnetik bez spin-fonon interakcije.

U toku daljeg rada biće razmatran samo poslednji slučaj.

II. 2. SOLITONSKA JEDNAČINA U XXZ-LANCU BEZ SPIN-FONON INTERAKCIJE

Jednačina (1.13) se u ovom slučaju svodi na sledeći oblik

$$\Gamma\sin\Theta + 2(\eta-1)\sin\Theta\cos\Theta - \frac{V^2\sin\Theta}{1+\cos\Theta} + \frac{V^2\sin\Theta\cos\Theta}{(1+\cos\Theta)^2} - \Theta_{\xi\xi} -$$

$$- (\eta-1)\sin\Theta \frac{\partial}{\partial\xi}(\sin\Theta\, \Theta_\xi) = 0 \qquad (2.1)$$

gde je $\Gamma = \frac{\mu\mathcal{H} + \Omega}{IS}$ $(\eta \neq 1$, $A = 1$, $g = 0)$.

Množenjem jednačine (2.1) sa Θ_ξ i integracijom po ξ dobijamo

$$- \Gamma \cos\Theta + (\eta-1)\sin^2\Theta + \frac{V^2\cos\Theta}{1+\cos\Theta} - \frac{1}{2}\Theta_\xi^2 - \frac{\eta-1}{2}\sin^2\Theta\ \Theta_\xi^2 + c = 0$$

Granični uslov daje $c = \Gamma - V^2/2$ tako da posle sredjivanja imamo

$$\Theta_\xi^2 \left[1 + \gamma\sin^2\Theta\right] = 4\Gamma \frac{1-\cos\Theta}{1+\cos\Theta}\left[\frac{1+\cos\Theta}{2} - \frac{V^2}{4\Gamma} + \frac{2\gamma}{4\Gamma}(1+\cos\Theta)^2\right] \tag{2.2}$$

gde je $\gamma = \eta - 1$.

Ako je $\gamma > -1$, leva strana izraza (2.2) je uvek pozitivna. Ukoliko je desna strana jednaka nuli tada mora biti $\Theta_\xi = 0$ što odredjuje amplitudu Θ_0. Preći ćemo, medjutim, odmah na novu promenljivu β.

$$\Theta = 2\beta \qquad (\Theta_0 = 2\beta_0)$$

$$\Theta_\xi = 2\beta_\xi$$

$$\beta_\xi^2 \left[1 + 4\gamma\sin^2\beta\cos^2\beta\right] = \Gamma\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\left[\cos^2\beta + 2\frac{\gamma}{\Gamma}\cos^4\beta - \frac{V^2}{4\Gamma}\right] \tag{2.3}$$

Zahtev $\beta_\xi = 0$ za $\xi = 0$ daje

$$\cos^2\beta_0 + \frac{2\gamma}{\Gamma}\cos^4\beta_0 = \frac{V^2}{4\Gamma} \tag{2.4}$$

Ako se ima u vidu veza izmedju ξ i x očigledno je da se amplituda β_0 kreće duž x-ose brzinom v (odnosno V). Ugao β definiše projekciju spina na z-osu. Kako je β_0 ekstremna vrednost ($\beta_\xi = 0$) ono odredjuje centar pobudjenja koje se nepromenjeno kreće duž lanca. Ovo pobudjenje je soliton.

Da bi analizirali pod kojim uslovima jednačina (2.3) ima solitonsko rešenje, napisaćemo je na sledeći način

$$\left(\frac{\partial\beta}{\partial\xi}\right)^2(1+\gamma\sin^2\theta) = \Gamma\,\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\left[\cos^2\beta + \frac{2\gamma}{\Gamma}\cos^4\beta - \cos^2\beta_0 - \frac{2\gamma}{\Gamma}\cos^4\beta_0\right]$$

$$= 2\gamma\,\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\,(\cos^2\beta-\cos^2\beta_0)(\cos^2\beta+\cos^2\beta_0+\frac{\Gamma}{2\gamma}) \qquad (2.5)$$

Iz jednačine (2.4) sledi

$$\frac{V^2}{4\cos^2\beta_0} = \Gamma + 2\gamma\cos^2\beta_0$$

dok iz (2.5) dobijamo sledeći uslov (desna strana mora biti pozitivna)

$$\gamma\sin^2\beta\left(1-\frac{\cos^2\beta_0}{\cos^2\beta}\right)\left(\cos^2\beta+\cos^2\beta_0+\frac{\Gamma}{2\gamma}\right) > 0 \qquad (2.6)$$

Analiziraćemo dobijenu nejednačinu za slučajeve $\gamma > 0$ i $\gamma < 0$.

<u>1^o $\gamma > 0$</u>

Uslov (2.6) daje

$$\cos^2\beta_0 + \frac{\Gamma}{2\gamma} > -1$$

odnosno

$$\Gamma > -2\gamma - 2\gamma\cos^2\beta_0 = -2\gamma\,(1+\cos^2\beta_0) \qquad (2.7)$$

Vidimo da za $\gamma > 0$ Γ može biti i negativno. Za brzinu solitona, na osnovu jednačine (2.4), dobijamo sledeće ograničenje ($\cos^2\beta_0 \le 1$)

$$V^2 \geq 4\Gamma + 8\gamma \tag{2.8}$$

$2^o \quad \gamma < 0$

Da bismo detaljno analizirali uslove postojanja solitona u ovom slučaju transformisaćemo gornje jednačine uvodeći smenu

$$\sin\beta = \phi \qquad \cos\beta \ \beta_\xi = \phi_\xi$$

Za ϕ_0 na osnovu (2.4) dobijamo

$$(1 - \phi_0^2)\left[1 + \frac{2\gamma}{\Gamma}(1 - \phi_0^2)\right] = \frac{V^2}{4\Gamma} \tag{2.9}$$

dok se jednačina (2.5) svodi na

$$\phi_\xi^2\left[1 + 4\gamma\phi^2(1-\phi^2)\right] = \gamma\phi^2(\phi_0^2 - \phi^2)\left[\frac{\Gamma}{2\gamma} + 2 - \phi_0^2 - \phi^2\right] \tag{2.10}$$

Za $\gamma < 0$ mora biti zadovoljen uslov

$$-\frac{\Gamma}{2|\gamma|} + 1 - \phi_0^2 + 1 - \phi^2 < 0$$

a pošto je $0 \leq \phi^2 \leq 1$, imamo

$$\frac{\Gamma}{2|\gamma|} + \phi_0^2 > 2 \tag{2.11}$$

i dalje, iz (2.9), sledi

$$\Gamma = \frac{V^2}{4(1-\phi_0^2)} + 2|\gamma|(1-\phi_0^2) \tag{2.12}$$

Iz (2.11) i (2.12) dobijamo

$$\frac{V^2}{4(1-\phi_0^2)} + 2|\gamma|(1-\phi_0^2) + 2|\gamma|\phi_0^2 > 4|\gamma|$$

$$\frac{V^2}{4} > 2|\gamma|(1-\phi_0^2) \quad \Rightarrow \quad V^2 > |\gamma| 8(1-\phi_0^2) \tag{2.13}$$

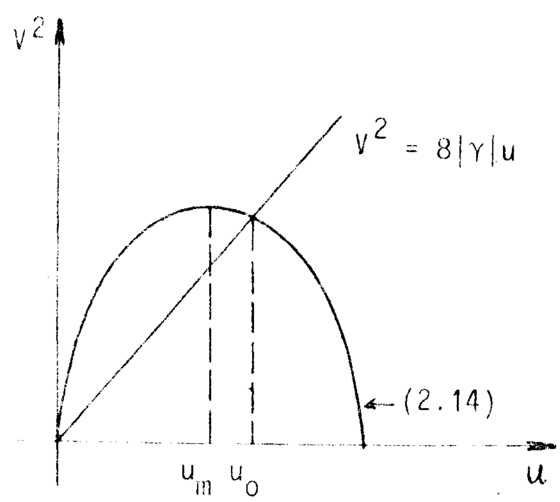
odakle vidimo da brzina ima minimum.

Ako se uvede $1-\phi_0^2 = u$, brzinu V definišu sledeće relacije

$$V^2 = 4\Gamma u - 8|\gamma|u^2 \tag{2.14}$$

$$V^2 > 8|\gamma|u \tag{2.15}$$

Sa slike 1. se vidi da kriva (2.14) ulazi u oblast (2.15) ako ima izvod u nuli veći od nagiba prave $V^2 = 8|\gamma|u$, što se svodi na zahtev da je $\Gamma > 2|\gamma|$.



$$u_o = \frac{\Gamma - 2|\gamma|}{2|\gamma|}$$

$$u_m = \frac{\Gamma}{4|\gamma|}$$

Slika 1.

a) $u_o \geq u_m \quad \Rightarrow \quad \Gamma > 4|\gamma|$

$$V^2_{max} = \frac{\Gamma^2}{2|\gamma|} \tag{2.16}$$

b) $u_o < u_m \Rightarrow \Gamma < 4|\gamma|$

$$V^2_{max} = 4(\Gamma - 2|\gamma|) \qquad (2.17)$$

Ako rezimiramo rezultate za $\gamma < 0$, možemo videti da solitonsko rešenje postoji ako je brzina u granicama $V^2_{min} \leq V^2 \leq V^2_{max}$, gde je:

1) za $2|\gamma| < \Gamma < 4|\gamma|$ $\qquad V^2_{max} = 4(\Gamma - 2|\gamma|)$

2) za $\Gamma \geq 4|\gamma|$ $\qquad V^2_{max} = \dfrac{\Gamma^2}{2|\gamma|}$

Minimalna vrednost brzine data je relacijom (2.13)

$$V^2_{min} = 8|\gamma|\cos^2\beta_o$$

II.3. SOLITONSKA REŠENJA

Sada ćemo potražiti solotonska rešenja jednačine (2.3). Kako se ova analitički ne može tačno rešiti pretpostavićemo da je γ mnogo manje od jedinice, odnosno analiziraćemo slučaj slabe anizotropije. Na levoj strani jednačine (2.3) u tom cilju izvršićemo aproksimaciju

$$1 + 4\gamma \sin^2\beta \cos^2\beta \approx 1$$

tako da dobijamo

$$\cos^2\beta\left(\frac{\partial\beta}{\partial\xi}\right)^2 = \Gamma \sin^2\beta \left[\cos^2\beta + \frac{2\gamma}{\Gamma}\cos^4\beta - \frac{V^2}{4\Gamma}\right] \tag{3.1}$$

Potrebno je napomenuti da na desnoj strani gornje jednačine član uz γ ne možemo zanemariti jer veličina $\Gamma = \frac{\mu\mathcal{H} + \Omega}{IS}$ može biti mala (za realna magnetna polja $\mu\mathcal{H} \ll IS$), tako da odnos γ/Γ u opštem slučaju može biti mnogo veći od jedinice.

<u>1^{o} $\gamma < 0$</u> (EPH - ravan lake magnetizacije)

Kako je u ovom slučaju $\eta < 1$ iz hamiltonijana (I 2.1) se vidi da je energija sistema minimalna kada su spinovi u XY-ravni, što odgovara osnovnom stanju.

Oblasti lake magnetizacije, uopšte, odredjene su položajem spina u osnovnom stanju feromagnetika.

Ako stavimo $\gamma = -|\gamma|$ jednačina (3.1) glasi

$$\frac{d(\sin\beta)}{d\xi} = \pm\Gamma^{1/2}\sin\beta\sqrt{-\frac{2|\gamma|}{\Gamma}\cos^4\beta + \cos^2\beta - \frac{V^2}{4\Gamma}}\,.$$

Iz uslova da je $V^2 > 0$ sledi

$$\frac{V^2}{4} = \cos^2\beta_0\,(\Gamma - 2|\gamma|\cos^2\beta_0) > 0$$

$$\Gamma > 2|\gamma|\cos^2\beta_0$$

Na osnovu $(\frac{d\sin\beta}{d\xi})^2 > 0$ se dobija

$$\Gamma\,(\cos^2\beta - \cos^2\beta_0)\left[1 - \frac{2|\gamma|}{\Gamma}(\cos^2\beta + \cos^2\beta_0)\right] > 0$$

$$\Gamma > 2|\gamma|\,(\cos^2\beta + \cos^2\beta_0) \Rightarrow \Gamma > 2|\gamma|\,(1 + \cos^2\beta_0) \qquad (3.2)$$

Očigledno je da Γ ne može biti negativno. Preko Γ uslov (3.2) diktira i minimalnu vrednost polja $\mathcal{H}$ potrebnu za postojanje solitona.

Iz relacije

$$\Gamma = \frac{V^2}{4\cos^2\beta_0} + 2|\gamma|\cos^2\beta_0 > 2|\gamma|(1 + \cos^2\beta_0)$$

dobijamo ograničenje za brzinu

$$V^2 > 8|\gamma|\cos^2\beta_0$$

identično kao u (2.15).

Ovim slučajem $(\gamma < 0)$ se dalje nećemo baviti.

$2^0 \quad \gamma > 0$ (EAM - osa lake magnetizacije)

Osnovno stanje ćemo takodje proceniti iz hamiltonijana (I 2.1). Kako je sada $\eta > 1$, izraz u zagradi ima maksimum kada je $S^z = S$. U osnovnom stanju, znači, spinovi su postavljeni u z-pravcu.

(3.1) ćemo napisati u obliku

$$\frac{d\,\sin\beta}{d\xi} = \pm\sqrt{2\gamma}\,\sin\beta\sqrt{\cos^4\beta + \frac{\Gamma}{2\gamma}\cos^2\beta - \frac{V^2}{8\gamma}}$$

Neka je $\Gamma < 0$, $\Gamma = -|\Gamma|$.

Iz $\left(\frac{d\,\sin\beta}{d\xi}\right)^2 > 0$ sledi

$$2\gamma\,(\cos^2\beta - \cos^2\beta_0)(\cos^2\beta + \cos^2\beta_0 - \frac{|\Gamma|}{2\gamma}) > 0$$

$$\cos^2\beta + \cos^2\beta_0 - \frac{|\Gamma|}{2\gamma} > 0$$

$$|\Gamma| < 4\gamma\,\cos^2\beta_0$$

Zahtev $V^2 > 0$ daje

$$|\Gamma| < 2\gamma\,\cos^2\beta_0 \tag{3.3}$$

Ovaj uslov je stroži od prethodnog i mora biti zadovoljen da bi soliton mogao da postoji.

Stavimo oznaku $\Gamma = -G$.

$$G \leq 2\gamma\,\cos^2\beta_0$$

$$\frac{d\sin\beta}{d\xi} = \pm \sin\beta \sqrt{2\gamma\cos^4\beta - G\cos^2\beta - \frac{V^2}{4}} \tag{3.4}$$

Amplituda β_0 odredjena je iz uslova

$$\frac{d\sin\beta}{d\xi} = 0 \qquad \text{za} \quad \xi = 0$$

$$\frac{V^2}{4} = 2\gamma\cos^4\beta_0 - G\cos^2\beta_0$$

$$\cos^2\beta_0 = \frac{G}{4\gamma}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{V_0^2}}\right) \qquad \left(V_0^2 = \frac{G^2}{2\gamma}\right) \tag{3.5}$$

U jednačinu (3.4) uvodimo smenu $\sin^2\beta = \phi^2$,

$$\frac{d\phi}{d\xi} = \pm \phi^3 \sqrt{G}\left[\frac{2\gamma}{G} - \left(\frac{4\gamma}{G} - 1\right)\frac{1}{\phi^2} + \left(\frac{2\gamma}{G} - 1 - \frac{V^2}{4G}\right)\frac{1}{\phi^4}\right]^{1/2}$$

i zatim

$$\Phi = \frac{1}{\phi^2} \quad , \qquad d\Phi = -2\frac{d\phi}{\phi^3}$$

što daje

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \pm 2\sqrt{G}\,(a\,\Phi^2 - b\Phi + c)^{1/2} \tag{3.6}$$

$$a = \frac{2\gamma}{G} - 1 - \frac{V^2}{4G} \quad , \qquad b = \frac{4\gamma}{G} - 1 \quad , \qquad c = \frac{2\gamma}{G}$$

Da bi postojalo solitonsko rešenje mora biti $a < 0$, što je posledica ograničenja za brzinu (2.8).

$$V^2 < V_{max}^2 = 4(2\gamma - G)$$

Izraz pod korenom u (3.6) ćemo transformisati

$$a\Phi^2 - b\Phi + c = (\sqrt{a}\,\Phi - \frac{b}{2\sqrt{a}})^2 + c - \frac{b^2}{4a} \qquad (3.7)$$

$$c - \frac{b^2}{4a} = - \frac{2\gamma V^2 + G^2}{G(8\gamma - 4G - V^2)} < 0$$

neka je $\bar{A}^2 = \frac{b^2}{4a} - c$, $z = \sqrt{a}\Phi - \frac{b}{2\sqrt{a}}$ $(d\Phi = \frac{1}{\sqrt{a}}\,dz)$.

$$a\Phi^2 - b\Phi + c = z^2 - \bar{A}^2$$

(3.6) postaje

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2-\bar{A}^2}} = \pm\, 2\sqrt{aG}\, d\xi \qquad (3.8)$$

Integracijom jednačine (3.8) dobijamo

$$\phi^2 = \frac{\phi_o^2}{1 + \frac{2\bar{A}\phi_o^2}{\sqrt{a}}\, sh^2 \sqrt{aG}\,\xi} \qquad (3.9a)$$

gde je

$$\phi_o^2 = 1 - \cos^2\beta_o = 1 - \frac{G}{4\gamma}\,(1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{V_o^2}}\,)$$

Sličan postupak primenjujemo i za $\gamma > 0$, $\Gamma > 0$.

$$\frac{d\Phi}{d\xi} = \pm\, 2\sqrt{\Gamma}\,\sqrt{a\Phi^2 - b\Phi + c}$$

$$a = 1 + \frac{2\gamma}{\Gamma} - \frac{V^2}{4\Gamma} \;, \qquad b = 1 + \frac{4\gamma}{\Gamma} \;, \qquad c = \frac{2\gamma}{\Gamma}$$

$a > 0$ podudara se sa uslovom brzine

$$0 < V^2 < 4\Gamma + 8\gamma$$

$$\bar{A}^2 = \frac{b}{4a} - c = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

Kako je $\bar{A}^2$ veće od nule dalji postupak je isti kao u prethodnom slučaju i daje

$$\phi^2 = \frac{\phi_o^2}{1 + \frac{2\bar{A}\phi_o^2}{\sqrt{a}} \, sh^2 \sqrt{a\Gamma}\xi} \tag{3.9b}$$

$$\phi^2(0) = \phi_o^2$$

Izrazi (3.9) opisuju solitonska rešenja jednačine (2.3) za male vrednosti γ ($\gamma \ll 1$). Na osnovu ponašanja funkcija sh^2 vidimo da ϕ^2 ima značajnu vrednost samo u nekoj maloj okolini tačke $\xi = 0$. ϕ uzima maksimalnu vrednost ϕ_o u tački $\xi = 0$, a čitav talasni paket zauzima prostor reda desetak konstanti rešetke. Ovakav talasni paket kreće se duž x-ose u skladu sa navedenim ograničenjima za brzinu i ostaje nepromenjen, što i jeste karakteristika solitona.

II. 4. MAGNETIZACIJA, IMPULS I ENERGIJA

Kako smo izabrali feromagnetik beskonačnih dimenzija izračunavanje ukupnih vrednosti traženih veličina bi dalo beskonačne rezultate. Divergenciju ćemo izbeći pogodnim izborom osnovnog stanja feromagnetnog lanca. Zbog toga ćemo izraze za energiju, impuls i magnetizaciju uzeti u sledećem obliku (|4|)

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}\, dx \tag{4.1a}$$

$$P = S \int_{-\infty}^{\infty} dx\, \frac{\partial \Phi}{\partial x} (1 - \cos\theta) \tag{4.1b}$$

$$M_z = S \int_{-\infty}^{\infty} dx\, (1 - \cos\theta) \tag{4.1c}$$

gde je $\mathcal{H} = \mathcal{H}(S^z) - \mathcal{H}(S)$, ili

$$\mathcal{H} = \mu \mathcal{H} S (1 - \cos\theta) + \frac{I}{2} \left(\frac{\partial \vec{S}}{\partial x}\right)^2 + I \Upsilon S^2 (1 - \cos^2\theta) + \frac{I}{2} \gamma \left(\frac{\partial S^z}{\partial x}\right)^2 \tag{4.2}$$

Radi preglednijeg pisanja formula uvešćemo sledeće oznake

$$A^2 = 1 + \gamma \sin^2\theta = 1 + 4\Upsilon \sin^2\beta \cos^2\beta$$

$$B^2 = \cos^2\beta + \frac{\tilde{\Upsilon}}{\Gamma} \cos^4\beta - \frac{V^2}{4\Gamma} \qquad (\tilde{\Upsilon} = 2\gamma)$$

Zamenom u jednačinu (2.3) dobijamo

$$\beta_\xi^2 = \Gamma \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} \frac{B^2}{A^2}$$

$$d\xi = \frac{d\xi}{d\beta} d\beta = d\beta \frac{1}{\sqrt{\Gamma}} \frac{\cos\beta}{\sin\beta} \frac{A}{B} \qquad (4.3)$$

Sve integrale pod (4.1) izrazićemo preko promenljive β.

Imajući u vidu da je

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = \frac{V}{1+\cos\Theta} = \frac{V}{2} \frac{1}{\cos^2\beta} \qquad \left(\frac{\partial}{\partial\xi} = \frac{\partial}{\partial x}\right)$$

za impuls dobijamo

$$P = 2VS \int_0^\infty d\xi \frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta} = 2S \frac{V}{\sqrt{\Gamma}} \int_0^{\beta_0} d\beta \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \frac{A}{B}$$

$$\frac{V}{\sqrt{\Gamma}} = 2 \cos\beta_0 \left(1 + \frac{\tilde{Y}}{\Gamma} \cos^2\beta_0\right)^{1/2}$$

$$P = 4S \cos\beta_0 \left(1 + \frac{\tilde{Y}}{\Gamma} \cos^2\beta_0\right)^{1/2} \int_0^{\beta_0} \frac{\sin\beta}{\cos\beta} \frac{A}{B} d\beta \qquad (4.4)$$

Transformacija izraza za magnetizaciju daje

$$M_z = 2S \int_0^\infty (1 - \cos\Theta) d\xi$$

$$M_z = \frac{4S}{\sqrt{\Gamma}} \int_0^{\beta_0} \cos\beta \sin\beta \frac{A}{B} d\beta \qquad (4.5)$$

Za energiju prema (4.2) imamo

$$\mathcal{H} = \mu\mathcal{H}S(1 - \cos\Theta) + \frac{IS^2}{2}(\Theta_\xi^2 + \sin^2\Theta\,\phi_\xi^2) + I\tilde{\gamma}S^2(1 - \cos^2\Theta) +$$

$$+ \frac{I}{2}\gamma S^2\Theta_\xi^2 \sin^2\Theta \tag{4.6}$$

$$\Theta = 2\beta$$

$$\Theta_\xi^2 = 4\beta_\xi^2 = 4\Gamma\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\frac{B^2}{A^2}$$

$$\phi_\xi^2 = \frac{V^2}{4}\frac{1}{\cos^4\beta}$$

(4.1a) sada postaje

$$E = 2\int_0^{\beta_0}\left\{2\mu\mathcal{H}S\sin^2\beta + \frac{IS^2}{2}\left(4\Gamma\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\frac{B^2}{A^2} + V^2\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\right) + \right.$$

$$\left. + 2I\tilde{\gamma}S^2\sin^2\beta\cos^2\beta + 8I\gamma\Gamma S^2\sin^4\beta\frac{B^2}{A^2}\right\}\frac{1}{\sqrt{\Gamma}}\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\frac{A}{B}\,d\beta$$

Uvodeći eksplicitan izraz za B gornju relaciju možemo pojednostaviti, što konačno daje

$$E = \mu\mathcal{H}M_z + 4IS^2\sqrt{\Gamma}\int_0^{\beta_0} d\beta\left(1 + \frac{2\tilde{\gamma}}{\Gamma}\cos^2\beta\right)\frac{A}{B}\sin\beta\cos\beta \tag{4.7}$$

gde je M_z dato relacijom (4.5).

Ovim transformacijama relacije (4.1) smo sveli na sledeći oblik, mnogo pogodniji za računanje,

$$E = \mu\mathcal{H}M_z + 4IS^2\sqrt{\Gamma}\int_0^{\beta_0} d\beta\left(1 + \frac{2\tilde{\gamma}}{\Gamma}\cos^2\beta\right)\sin\beta\cos\beta\,\frac{A}{B} \tag{4.8a}$$

$$P = 4S\cos\beta_0\left(1+\frac{\gamma}{\Gamma}\cos^2\beta_0\right)^{1/2}\int_0^{\beta_0}\frac{\sin\beta\, A}{\cos\beta\, B}\,d\beta \qquad (4.8b)$$

$$M_z = \frac{4S}{\sqrt{\Gamma}}\int_0^{\beta_0}\cos\beta\,\sin\beta\,\frac{A}{B}\,d\beta \qquad (4.8c)$$

Za proizvoljne vrednosti parametra γ gornji izrazi se mogu integraliti samo numerički, tako da ćemo koristiti istu aproksimaciju kao i u prethodnoj glavi, $\gamma \ll 1$.

Ako pogledamo hamiltonijan (4.2) vidimo da postoje dva člana kvadratna po izvodima (reda $a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$) tako da možemo odbaciti član uz λ koji je zanemarljivo mali ($\lambda \sim 10^{-2}$, vidi [1]). Kao posledicu imamo da je $A = 1$ pa sistem (4.8) postaje

$$E = \mu\mathcal{H}M_z + 4IS^2\sqrt{\Gamma}\int_0^{\beta_0}d\beta\left(1+\frac{4\gamma}{\Gamma}\cos^2\beta\right)\frac{\sin\beta\cos\beta}{\sqrt{\cos^2\beta+\frac{2\gamma}{\Gamma}\cos^4\beta-\frac{v^2}{4\Gamma}}} \qquad (4.9a)$$

$$P = 4S\cos\beta_0\left(1+\frac{2\gamma}{\Gamma}\cos^2\beta_0\right)\int_0^{\beta_0}\frac{\cos\beta\cos\beta_0\,d\beta}{\cos^2\beta\sqrt{\cos^2\beta+\frac{2\gamma}{\Gamma}\cos^4\beta-\frac{v^2}{4\Gamma}}} \qquad (4.9b)$$

$$M_z = 4S\int_0^{\beta_0}\frac{\cos\beta\,\sin\beta\,d\beta}{\sqrt{\Gamma\cos^2\beta+2\gamma\cos^4\beta-\frac{v^2}{4}}} \qquad (4.9c)$$

U daljem radu izračunaćemo gornje veličine samo za slučaj $\gamma = 0$ i $\Gamma \neq 0$.

Pomoću smene $\cos^2\beta$ u (4.9a) postaje

$$E = \mu\mathcal{H} M_z + 2IS^2 \sqrt{\Gamma}\left[\int_{\cos^2\beta_0}^{1} \frac{du}{\sqrt{\frac{2\gamma}{\Gamma} u^2 + u - \frac{V^2}{4\Gamma}}} + \frac{4\gamma}{\Gamma}\int_{\cos^2\beta_0}^{1} \frac{u\,du}{\sqrt{\frac{2\gamma}{\Gamma} u^2 + u - \frac{V^2}{4\Gamma}}}\right]$$

$$E = \mu\mathcal{H} M_z + 2IS^2 \sqrt{\Gamma}\int_{\cos^2\beta_0}^{1} \frac{(\frac{4\gamma}{\Gamma} u + 1)\, du}{\sqrt{\frac{2\gamma}{\Gamma} u^2 + u - \frac{V^2}{4\Gamma}}}$$

$$E = \mu\mathcal{H} M_z + 2IS^2 \sqrt{4\Gamma + 8\gamma - V^2} \tag{4.10}$$

Za (4.9c) istom smenom dobijamo

$$M_z = 2S\,\Gamma^{-1/2}\int_{\cos^2\beta_0}^{1} \frac{du}{\sqrt{\frac{2\gamma}{\Gamma} u^2 + u - \frac{V^2}{4\Gamma}}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2\gamma}{\Gamma}}\, u + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Gamma}{2\gamma}}\,, \qquad \bar{A}^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{\Gamma}{2\gamma} + \frac{V^2}{\Gamma}\right)$$

$$M_z = \frac{2S}{\sqrt{\Gamma}}\sqrt{\frac{\Gamma}{2\gamma}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \bar{A}^2}}$$

Posle integracije dobijamo

$$M_z = \frac{2S}{\sqrt{2\gamma}}\left[\operatorname{arch}\frac{\frac{4\gamma}{\Gamma} + 1}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{V_0^2}}} - \operatorname{arch}\frac{\frac{4\gamma}{\Gamma}\cos^2\beta_0 + 1}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{V_0^2}}}\right] \qquad \left(V_0^2 = \frac{\Gamma^2}{2\gamma}\right)$$

što konačno daje

$$M_z = \frac{2S}{\sqrt{2\gamma}}\operatorname{arch}\frac{\frac{4\gamma}{\Gamma} + 1}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{V_0^2}}} \tag{4.11}$$

$$\operatorname{ch} \frac{\sqrt{2\gamma}}{2S} M_z = \frac{\frac{4\gamma}{\Gamma} + 1}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{V_o^2}}} \qquad (4.12)$$

Pri izračunavanju impulsa takodje polazimo od smene $\cos^2\theta_o = u$. Integral iz (4.9b) postaje

$$I = \frac{1}{2} \int_{\cos^2\theta_o}^{1} \frac{du}{u\sqrt{\frac{2\gamma}{\Gamma} u^2 + u - \frac{V^2}{4\Gamma}}} = \frac{1}{2} \int_{u_o}^{1} \frac{du}{u^2\sqrt{\frac{2\gamma}{\Gamma} + \frac{1}{u} - \frac{V^2}{4\Gamma}\frac{1}{u^2}}}$$

a uz novu smenu $z = \frac{1}{u}$

$$t = \frac{V}{2\sqrt{\Gamma}} z - \frac{\sqrt{\Gamma}}{V} \quad , \qquad A^2 = \frac{\Gamma}{V^2} + \frac{2\gamma}{\Gamma}$$

$$I = \frac{\sqrt{\Gamma}}{V} \int \frac{dt}{\sqrt{A^2 - t^2}}$$

$$I = \frac{\sqrt{\Gamma}}{V} \arcsin \left. \frac{\frac{V}{2\sqrt{\Gamma}} z - \frac{\sqrt{\Gamma}}{V}}{\sqrt{\frac{\Gamma}{V^2} + \frac{2\gamma}{\Gamma}}} \right|_{1}^{\frac{1}{u_o}} = \frac{\sqrt{\Gamma}}{V} \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\frac{V^2}{2\Gamma} - 1}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{V_o^2}}} \right)$$

Za impuls konačno dobijamo

$$P = 2S \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{\frac{V^2}{2\Gamma} - 1}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{V^2}}} \right) \qquad (4.13)$$

Koristićemo i sledeći izraz

$$\cos \frac{P}{2S} = \frac{\frac{V^2}{2\Gamma} - 1}{\sqrt{1 + \frac{V^2}{V_o^2}}} \qquad (4.14)$$

Koristeći dobijene relacije za energiju, magnetizaciju i impuls solitona, možemo izvesti zavisnost energije od magnetizacije (M_z) i impulsa (P).

Iz (4.12) sledi

$$\mathrm{sh}\,\frac{\sqrt{2\gamma}}{2S}M_z = \frac{\sqrt{2\gamma}}{\Gamma}\,\frac{\sqrt{4\Gamma+8\gamma-V^2}}{\sqrt{1+\dfrac{V^2}{V_0^2}}} = \mathrm{sh}\,\frac{M_z}{m_0}$$

gde smo uveli oznaku $m_0 = \dfrac{2S}{\sqrt{2\gamma}}$. Dalje dobijamo

$$\mathrm{ch}\,\frac{M_z}{m_0} - \cos\frac{P}{2S} = \frac{\dfrac{4\gamma}{\Gamma}+1-1-\dfrac{V^2}{2\Gamma}}{\sqrt{1+\dfrac{V^2}{V_0^2}}} = \frac{4\Gamma+8\gamma-V^2}{2\Gamma\sqrt{1+\dfrac{V^2}{V_0^2}}}$$

odnosno

$$\frac{\mathrm{ch}\,\dfrac{M_z}{m_0} - \cos\dfrac{P}{2S}}{\mathrm{sh}\,\dfrac{M_z}{m_0}} = \frac{\sqrt{4\Gamma+8\gamma-V^2}}{2\sqrt{2\gamma}}$$

Ako poslednji rezultat uvrstimo u (4.10) dobijamo konačno

$$E = \mu\mathcal{H} M_z + 4IS^2\sqrt{2\gamma}\,\frac{\mathrm{ch}\,\dfrac{M_z}{m_0} - \cos\dfrac{P}{2S}}{\mathrm{sh}\,\dfrac{M_z}{m_0}} \qquad (4.15)$$

Iz gornjeg izraza za energiju zaključujemo da soliton pored translatornog stepena slobode koji daje zavisnost energije od impulsa poseduje i jedan unutrašnji, rotacioni, stepen slobode, koji daje zavisnost energije od magnetizacije.

Sada ćemo izvršiti klasično kvantovanje energije solitona koristeći Bohr-Somerfeldova pravila kvantovanja za magnetizaciju i de Broglievo kvantovanje impulsa, smatrajući da se soliton nalazi u jednodimenzionoj kutiji dužine L.

De Broglieva talasna dužina solitona mora biti samerljiva sa dužinom feromagnetnog lanca

$$L = n\lambda \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{L}{n} \qquad (n = 0,1,2,\dots)$$

što, uzimajući u obzir relaciju $\lambda = \frac{P}{\hbar}$, za impuls daje

$$P_n = \frac{h}{\lambda} = 2\pi \frac{n}{L} \qquad (\hbar = 1) \quad (n = 0,1,2,\dots)$$

Slučaj kada $L \to \infty$ odgovara kontinualnoj promeni impulsa.

Za magnetizaciju primenjujemo borovo pravilo

$$\int_0^{2\pi} M_z d\Phi = mh$$

Kako je $M_z = \text{const}$ $\quad (\{M_z, \mathcal{H}\} = 0)$

$$M_z = m$$

Zamena kvantovanih veličina u (4.15) daje sledeći izraz za kvantovani soliton (pri $\mathcal{H} = 0$).

$$E = 4IS^2 \sqrt{2\gamma}\, \frac{\operatorname{ch}\sqrt{2\gamma}\, \frac{m}{2S} - \cos \frac{P_n}{2S}}{\operatorname{sh}\sqrt{2\gamma}\, \frac{m}{2S}}$$

Uporedićemo ovaj poluklasični rezultat sa kvantno mehaničkim rešenjem za isti model feromagnetika za slučaj $S = \frac{1}{2}$.

Hamiltonijan bez spoljašnjeg magnetnog polja obično se uzima u obliku (vidi |5|)

$$\hat{H} = -I \sum_i (\hat{S}_i^x \hat{S}_{i+1}^x + \hat{S}_i^y \hat{S}_{i+1}^y + ch\Delta\, S_i^z S_{i+1}^z)$$

Koeficijent anizotropije η je napisan kao $ch\Delta$ da bi se naglasilo da je veći od jedinice. U aproksimaciji najbližih suseda (za $S = \frac{1}{2}$) Betne ansatz postupkom je dobijen sledeći rezultat (|5|,|6|)

$$E_m = I sh\Delta \frac{chm\Delta - \cos P}{shm\Delta} \qquad (m = 1,2 \ldots) \qquad (4.17)$$

i predstavlja energiju vezanih magnonskih stanja.

Ako iskoristimo činjenicu da je γ malo, možemo $ch\Delta$ [illegible] razviti u red zadržavajući samo prve članove

$$\left.\begin{aligned} ch\Delta &= \gamma + 1 \\ ch\Delta &\approx 1 + \frac{\Delta^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \Delta \approx \sqrt{2\gamma}$$

$$sh\Delta \approx \Delta \qquad\qquad sh \approx \sqrt{2\gamma}$$

Zamena u (4.17) daje

$$E_m = I\sqrt{2\gamma}\,\frac{ch\,m\sqrt{2\gamma} - \cos P}{sh\,m\sqrt{2\gamma}}$$

Ako se u (4.16) stavi $A = 1/2$ dobija se identičan izraz. Očigledno je da se dobijena solitonska rešenja za male anizotropije EAH-tipa mogu interpretirati kao vezana magnonska stanja. Napomenimo da isti zaključak važi i za $S > 1/2$, što je pokazano u [7].

III. ZAKLJUČAK

U uvodu smo već naveli jedan eksperiment koji se smatra dokazom opravdanosti solitonskog pristupa. Daćemo još jedan primer, uzet iz |2|. Eksperiment je izveden na kristalu TMMC, jednodimenzionalnom feromagnetiku sa jednojonskom anizotropijom EAH-tipa. Merena je specifična toplota. Standardna linearna magnonska teorija dala je zadovoljavajuće rezultate u odsustvu stranog magnetnog polja. Pri uključenom transverzalnom polju povoljan rezultat je postignut tek uvodjenjem solitona.

Mi smo se na prethodnim stranicama, medjutim, bavili samo teorijskom stranom problema. Iako se sam za sebe ovaj rad ne može koristiti za neka uopštavanja, ali se dobijeni rezultati mogu smatrati ilustracijom potrebe uvodjenja solitona, kao linearnih ekscitacija, u analizu feromagnetnih sistema. Spektar solitona, kako se pokazalo, pri klasičnom kvantovanju, podudara se sa spektrom vezanih magnonskih stanja. Ovaj rezultat za razmatrani tip anizotropije (XXZ ili izmenska) važi, kao što je naglašeno, samo za slabe anizotropije, što je medjutim često realan slučaj. Napomenimo na kraju da svi dobijeni rezultati u graničnom slučaju kada $\gamma \to 0$ prelaze u odgovarajuće rezultate za izotropni Heisenbergov model (|4|).

LITERATURA

[1] K. Kopinga, A.M.C. Tinus and W. J. M. de Jonge
Phys. Rev. B 29 (5), 2868 (1984).

[2] F. Borsa, M.G.Pini, A. Rettori and V. Tognetti Phys.Rev. B. 28, 5173 (1983).

[3] А. И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский: "Спиновые волны" изд. "Наука" Москва 1967.

[4] J. Tjon, Jon Wright, Phys. Rev. B. 15 (7), 3470 (1977)

[5] J.D. Johnson and J.C. Bonner, Phys. Rev. Lett 44 (9), 616 (1980)

[6] T.Schneider and E. Stoll, Phys. Rev. B. 25 (7), 4721 (1982)

[7] T.Schneider, Phys. Rev. B. 24 (9), 5327 (1981)