



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU



УНИВЕРЗИТЕТ У НОВОМ САДУ
ПРИРОДНО-МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

ПРИМЉЕНО:	25 ДЕЦ 2006
ОРГАНИЗ.ЈЕД.	Б Р О Ј
0603	911045

Integracija primitivnih jednačina za atmosferu semi-Lagranževskim pristupom

- diplomski rad -

Mentor:

prof. dr Darko Kapor

Kandidat:

Jelena Matić

Novi Sad, 2006.

Sadržaj:

1. Uvod	2
2. Primitivne jednačine atmosfere	
2.1. Sile koje deluju na kretanje vazduha u atmosferi	3
2.2. Sistem osnovnih jednačina atmosfere	8
3. Numeričko rešavanje primitivnih jednačina atmosfere	
3.1. Diskretizacija jednačina dinamike atmosfere	14
3.2. Semi – Lagranževska advektivna šema	16
4. Opis numeričkog modela	19
5. Analiza rezultata	29
6. Zaključak	34
Literatura	35

1.Uvod

Atmosferska kretanja su posledica nehomogenog prostornog zagrevanja atmosfere Sunčevim zračenjem. Usled ove nejednakosti prostorne raspodele, u atmosferi se javljaju razlike u pritiscima koje dovode do pojave sile gradijenta pritiska koja je glavni pokretač strujanja vazduha. U prvom delu ovog rada, predstavljene su sile koje utiču na kretanje delića vazduha u atmosferi.

U dinamičkoj meteorologiji se za prikazivanje kretanja u atmosferi koriste dva metoda: Eulerov i Lagranžev.

Kod Eulerovog metoda se prostorne koordinate i vreme smatraju nezavisno promenljivim dok su kod Lagranževog metoda prostorne koordinate i vreme zavisno promenljive. Zbog jednostavnosti Eulerovog metoda, on se najčešće koristi u dinamici.

Kada posmatramo proces advekcije, potrebno je da rešimo advektivnu jednačinu. Za konstantne brzine vetra, rešenje ove jednačine nam je poznato. Međutim, u prirodi su retke situacije u kojima je brzina vetra konstantna, tj. uglavnom se srećemo sa promenljivim brzinama, zbog čega advektivna jednačina mora da se diskretizuje. Kada se uradi diskretizacija advektivne jednačine za konstantne brzine u Eulerovom pristupu, dobija se jaka implicitna difuzija. Sa druge strane, primena Lagranževog pristupa je jako komplikovana zbog činjenice da naša mreža tačaka mora da se menja sa svakim vremenskim korakom. Tako je najidealnije rešenje prelazak na Lagranževski pristup ali sa mrežom tačaka koja se ne menja u vremenu. Ovaj pristup se naziva semi – Lagranževski pristup. Privlačnost ovog metoda leži u tome što obezbeđuje veliku računsku efikasnost kao i zadovoljavajuću tačnost, bar kod linearnih advektivnih problema.

Da bi se ovaj pristup primenjivao u praksi za kompleksnije modele atmosfere, potrebno je testirati semi – Lagranževske šeme u najjednostavnijem slučaju, tj. pri rešavanju primitivnih jednačina atmosfere. Upravo to je bio cilj ovog diplomskog rada.

Veliki deo numeričkog vremena kod semi – Lagranževske šeme se troši na interpolisanje polja relevantnih veličina. Upravo zbog ove činjenice, veći deo ovog diplomskog rada je posvećen analiziranju zavisnosti uspešnosti semi – Lagranževske šeme od načina interpolacije. Analize su vršene pomoću četiri serije testova koji su prikazani u drugom delu rada.



2. Primitivne jednačine atmosfere

2.1 Sile koje deluju na kretanje vazduha u atmosferi

Osnovni cilj dinamike atmosfere je razumevanje kretanja u atmosferi kao posledice dejstva sila i osnovnih zakona kretanja. Na kretanje vazduha u atmosferi deluju neinercijalne ili stvarne sile i inercijalne sile koje su posledica rotacije Zemlje oko svoje ose. Neinercijalne sile su: sila gradijenta pritiska, gravitaciona sila i sila trenja dok su inercijalne sile: centrifugalna i Coriolisova sila.

Sila gradijenta pritiska. Na svaki delić vazduha u atmosferi deluje sila pritiska. Ako je taj delić ograničen površinom S , zapreminе V , na element površine dS deluje pritisak p koji je jednak u svakoj tački, pa na element površine deluje sila pritiska:

$$\overrightarrow{dP} = -pd\vec{S}\vec{n} \quad (1.1)$$

gde je \vec{n} - spoljašnja normala na element površine dS . U x – pravcu, ova sila je oblika:

$$dP_x = -pd\vec{S}\vec{n} \cdot \vec{i} \quad (1.2)$$

Rezultujuća sila gradijenta pritiska, koja od spolja deluje na površinu S u pravcu x – ose je:

$$P_x = - \int_S p\vec{i} \cdot \vec{n} dS = - \int_S p\vec{i} \cdot d\vec{S} \quad (1.3)$$

Koristeći Gausov identitet, dobija se:

$$P_x = - \int_V \nabla(p\vec{i}) dV = - \int_V \vec{i} \cdot \nabla p dV \quad (1.4)$$

jer je $\nabla \cdot \vec{i} = 0$. Ako je element vazduha mali, može se pretpostaviti da je $\vec{i} \cdot \nabla p$ nezavisno od zapremine dV , tako da je

$$P_x = -V\vec{i} \cdot \nabla p = -V \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.5)$$

Pošto je $V = \frac{m}{\rho}$, sila gradijenta pritiska po jedinici mase je:

$$P_{xm} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1.6)$$

Generalizacija ove sile na tri dimenzije daje izraz za silu gradijenta pritiska po jedinici mase u vektorskom obliku:

$$\vec{P}_m = -\frac{1}{\rho} \nabla p \quad (1.7)$$

Gravitaciona sila. Atmosfera se nalazi u polju Zemljine gravitacije. Može se pokazati da je gravitaciona sila kojom Zemlja deluje na element vazduha mase m usmerena od tog elementa prema geometrijskom centru Zemlje, uz prepostavku da je Zemlja homogenog sastava i sfernog oblika. Prepostavka da je Zemlja sfernog oblika ne unosi veliku grešku, jer je razlika između najvećeg i najmanjeg poluprečnika Zemlje samo 21km .

Tako da izraz za silu kojom Zemlja privlači element vazduha jedinične mase glasi:

$$\vec{G}^* = -\gamma \frac{M}{|\vec{r}|^2} \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} \right) \quad (1.8)$$

gde je \vec{r} vektor usmeren od centra Zemlje prema centru mase elementa vazduha, $\gamma = 6,66 \cdot 10^{11} \text{m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$ gravitaciona konstanta, $M = 5,988 \cdot 10^{24} \text{ kg}$ masa Zemlje.

Vidi se da \vec{G}^* zavisi od rastojanja između centara masa Zemlje i posmatranog elementa vazduha. Zbog toga se može definisati potencijal polja gravitacije. Ako je $r \equiv |\vec{r}|$, on glasi:

$$\Phi' = -\gamma M \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_p} \right) \quad (1.9)$$

gde je r_p nulti potencijalni nivo. Sada se \vec{G}^* može izraziti preko potencijala Φ' kao:

$$\vec{G}^* = -\nabla \Phi' \quad (1.10)$$

Sila trenja. Atmosfera se uslovno može shvatiti kao skup molekula, elemenata vazduha i vazdušnih slojeva. Dakle, u atmosferi postoji kretanje molekula (koje je u opštem slučaju haotično),

kretanje elemenata vazduha, i kretanje slojeva vazduha. Sila trenja ili viskozna sila je posledica svih pomenutih vrsta kretanja.

Posmatramo element vazduha zapremine $\delta x \delta y \delta z$, koji se nalazi u polju horizontalnog strujanja $\vec{V} = (x, y)$, koje se menja samo sa visinom. Ovakvo strujanje je, u atmosferi, opravdano posmatrati jer je promena brzine vetra sa visinom mnogo veća u vertikalnom nego u horizontalnom pravcu.

Zbog gore pomenutog oblika kretanja, vršiće se vertikalni transport količine kretanja. Tada će na gornju površinu posmatranog elementa delovati sila trenja u x-pravcu. Ako prepostavimo da je ta sila srazmerna promeni u - komponente brzine sa visinom, dobija se izraz za silu viskoznog trenja po jedinici površine

$$\tau_{zx} = -\mu \frac{\partial u}{\partial z} \quad (1.11)$$

gde je $\mu = \mu(z)$ koeficijent dinamičke viskoznosti. Na donju površinu delovaće sila po jedinici površine

$$-(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot \delta z) \quad (1.12)$$

razultujuća sila u x-pravcu je

$$\delta F_{xm} = \tau_{zx} - (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \cdot \delta z) = \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \delta z \quad (1.13)$$

Iznad jedinične površine horizontalne osnove i male debljine u datom elementu vazduha smeštena je masa $\rho \delta z$ pa se može definisati sila trenja po jedinici mase

$$F_x = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \quad (1.14)$$

slično se dobija za silu trenja u y-pravcu $F_y = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}$.

Na element vazduha pod navedenim prepostavkama će delovati sila čije su komponente

$$\vec{F} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}, \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}, 0 \right) \quad (1.15)$$

Za potpuno opisivanje sile trenja u polju strujanja $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z)$ bilo bi potrebno devet skalarnih veličina čiji skup se naziva *tenzor napona*.

Kretanje vazduha u atmosferi je najpogodnije posmatrati u odnosu na koordinatni sistem koji miruje u odnosu na Zemlju. Međutim, uvođenje ovakvog koordinatnog sistema zahteva uvođenje dodatnih sila. Naime, element vazduha koji je u stanju mirovanja u odnosu na koordinatni sistem vezan za Zemlju nije ni u stanju mirovanja ni u stanju uniformnog kretanja u odnosu na neinercijalni sistem. Newtonov zakon kretanja se može primeniti na kretanje u ovom neinercijalnom sistemu kada se uzme u obzir ubrzanje tog sistema u odnosu na nepokretni sistem zbog čega se uvode inercijalne sile: centrifugalna i Coriolisova sila.

Centrifugalna sila. Posmatramo tačku A koja rotira oko neke ose uniformnom ugaonom brzinom $\vec{\Omega}$. To može da bude bilo koja tačka fiksirana za Zemlju pa je u tom slučaju $\vec{\Omega}$ ugaona brzina rotiranja Zemlje oko mehaničke ose. Periferna brzina date tačke je $\vec{V} = \vec{\Omega} \times \vec{R}$, gde je \vec{R} poluprečnik Zemlje. Radijalno ubrzanje u vektorskom obliku je

$$\vec{a}_r = -\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) \quad (1.16)$$

ili

$$\vec{a}_r = -\frac{v^2}{r} \frac{\vec{r}}{r} = -\Omega^2 R \sin \theta \frac{\vec{r}}{r} \quad (1.17)$$

gde je r rastojanje tačke od ose rotacije Zemlje, a θ je geografska širina. Ovim izrazima je definisano centrifugalno ubrzanje, tj. centrifugalna sila po jedinici mase \vec{F}_{cf} . Vidi se da je \vec{F}_{cf} funkcija od rastojanja od ose rotacije. Ova sila se može napisati i u obliku

$$\vec{F}_{cf} = \Omega^2 r \nabla r = \nabla \left(\frac{1}{2} \Omega^2 r^2 + const \right).$$

Može se uvesti potencijal

$$\Phi'' = -\frac{1}{2} \Omega^2 r^2 + const \quad (1.18)$$

čiji je gradijent centrifugalna sila

$$\overrightarrow{F}_{cf} = -\nabla\Phi''$$

Coriolisova sila. Ponovo posmatramo tačku A iz prethodnog odeljka. Ako joj dozvolimo da pored periferijske ima i relativnu brzinu \vec{v}_r u odnosu na sistem koji rotira, absolutna brzina je tada:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times \vec{R} \quad (1.19)$$

ovaj izraz se može napisati u obliku

$$\left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_a = \left(\frac{d\vec{R}}{dt} \right)_r + \vec{\Omega} \times \vec{R}$$

operator koji se koristi u ovoj jednačini je oblika: $\left(\frac{d}{dt} \right)_a = \left(\frac{d}{dt} \right)_r + \vec{\Omega} \times$. Kada se ovaj operator primeni na jednačinu (1.19), dobija se

$$\left(\frac{d\vec{v}_a}{dt} \right)_a = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt} \right)_r + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) \quad (1.20)$$

Član $-2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r$ zove se Coriolisova sila ili Coriolisovo ubrzanje za telo jedinične mase. Coriolisova sila je drugačije prirode od centrifugalne. Naime, centrifugalna sila se javlja uvek kada neko telo rotira dok se Coriolisova sila javlja samo u slučajevima kada postoji relativna brzina kojom se kreće telo u odnosu na rotirajući sistem.

Često se pojavljuje potreba da se neke od pomenutih sila posmatraju zajedno, tj. da se posmara njihova rezultanta. Složena sila koja se najčešće upotrebljava je *sila zemljine teže*.

Od posmatranih sila, jedino sila gravitacije i centrifugalna sila zavise od položaja posmatranog elementa vazduha u odnosu na osu rotacije. Rezultujuća sila ove dve sile se naziva sila zemljine teže ili efektivna gravitacija. Može se pisati:

$$\vec{G} = \vec{G}' - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) \quad (1.21)$$

Dakle, ova sila se javlja u sistemu koji rotira sa Zemljom.

Imajući u vidu potencijale sile gravitacije Φ' i centrifugalne sile Φ'' , dobija se da je

$$\vec{G} = -\nabla\Phi \quad (1.22)$$

gde je $\Phi = \Phi' + \Phi''$ potencijal zemljine teže.

Ukoliko u jednačini (1.9) nulti nivo r_p uzima rastojanje od centra Zemlje do tačke koja leži na srednjem nivou mora na polu, kada je u jednačini (1.18) $const=0$, onda se Φ naziva *geopotencijal*.

Iz (1.22) se vidi da je sila Zemljine teže usmerena prema centru Zemlje na polu (jer je $r=0$) i na ekvatoru (jer su sila gravitacije i centrifugalna sila suprotnog smera i $G^* \gg F_{cf}$).

Na elemente vazduha koji se nalaze između pola i ekvatora delovaće sila zemljine teže koja nije usmerena prema centru Zemlje. Sila \vec{G} će zaklapati neki ugao sa ekvatorijalnom ravni koji definiše geografsku širinu tela gde se ono nalazi.

2.2 Sistem osnovnih jednačina atmosfere

Za analizu efekata koji nastaju kao posledice dejstava sila opisanih u prethodnom odeljku, potrebno je poći od drugog Newtonovog zakona kretanja u obliku:

$$\left(\frac{d\vec{v}_a}{dt} \right)_a = \sum \vec{S} \quad (1.23)$$

gde član na levoj strani jednačine predstavlja apsolutno ubrzanje a član na desnoj strani sumu realnih sila koje deluju na element vazduha jedinične mase. Zamenjujući (1.7), (1.8), (1.20) i (1.15) u (1.23), dobija se da je

$$\frac{d\vec{V}}{dt} + 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{R}) = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \vec{G} + \vec{F} \quad (1.24)$$

Uzimajući u obzir (1.21), dobija se

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \vec{G}^* - 2\vec{\Omega} \times \vec{V} + \vec{F} \quad (1.25)$$

Jednačina (1.25) je osnovna jednačina kretanja. Ona se iz praktičnih razloga često rastavlja u tri skalarne jednačine. Dekartov koordinatni sistem je pogodan za posmatranje u , v i z komponenata

brzine. U ovom koordinatnom sistemu vektori koji se pojavljuju u jednačini (1.25) imaju komponente:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{V}}{dt} &= \left(\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt} \right) \\ -\frac{1}{\rho} \nabla p &= \left(-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \right) \\ \vec{G} &= (0, 0, -g) \\ \vec{F} &= (F_x, F_y, F_z) \\ -2\vec{\Omega} \times \vec{V} &= (fv - f'w, -fu, f'u)\end{aligned}$$

gde su $f = 2\Omega \sin \varphi$ i $f' = 2\Omega \cos \varphi$ Coriolisovi parametri.

Imajući u vidu sve prethodno napisano, jednačina (1.25) se može rastaviti na sistem od tri skalarne jednačine:

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + fv - f'w + F_x \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - fu + F_y \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g - f'u + F_z\end{aligned}$$

Međutim, ove tri skalarne jednačine sadrže pet zavisno promenljivih (u, v, w, p, ρ) pa se one u opštem slučaju ne mogu rešiti bez dodavanja drugih jednačina sistemu.

Na raspolaganju su:

- jednačina prvog principa termodinamike koja opisuje zavisnost gustine i temperature od dovođenja toplote

$$\frac{dq}{dt} = c_v \frac{dT}{dt} + p \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \quad (1.26)$$

gde je dq - toplota dovedena po jedinici mase vazduha u vremenu dt , c_v - specifična toplota pri konstantnoj zapremini a T - temperatura.

- jednačina stanja koja povezuje veličine ρ , p i T

$$p = \rho RT \quad (1.27)$$

gde je R - gasna konstanta koja zavisi od vlažnosti vazduha.

- jednačina kontinuiteta koja matematički opisuje zakon održanja mase, tj. činjenicu da je povećanje mase u nekoj fiksiranoj zapremini jednako istovremenom dotoku mase kroz stranice te zapremine

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \vec{V} \quad (1.28)$$

Da bi ovakav sistem bilo moguće rešiti, potrebno je da broj zavisno promenljivih bude jednak broju jednačina, tj. da je sistem zatvoren i potrebno je za posmatranu oblast prostora definisati početne i granične uslove.

Kako će zatvaranje sistema biti izvršeno zavisi od postavljenog cilja kao i od praktičnih uslova za rešavanje posmatranog sistema i od našeg znanja.

Jedna mogućnost za rešavanje ovog sistema je da se veličine \vec{F}' i $\frac{dq}{dt}$ definišu u funkciji

od do sada prisutnih zavisno i nezavisno promenljivih veličina.

Međutim, sila trenja u atmosferi zbog turbulentne prirode kretanja vazduha ne može da se opiše na sasvim egzaktan način. Na svu sreću, u najvećem delu atmosfere, sile trenja su dovoljno male tako da se u prvoj aproksimaciji mogu zanemariti (osim u planetarnom graničnom sloju).

Što se tiče dovodenja toplote, radi se o oblasti gde u velikoj meri postoje egzaktni fizički zakoni. Teškoće su u tome što ti zakoni predstavljaju obimnu oblast fizike, pa njihovo uzimanje u obzir dovodi do daljeg povećavanja broja zavisno promenljivih i samim tim broja jednačina sistema.

No, sistem gornjih jednačina je sistem nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina koji praktično nije moguće rešiti analitički, izuzev u sasvim specijalnim idealizovanim slučajevima.

Posebno pogodan sistem jednačina, tj. sistem koji je veoma jednostavan a ipak sadrži u sebi sposobnost reprodukovanja znatnog broja najvažnijih atmosferskih procesa je *sistem jednačina za plitku vodu*.

Ove jednačine se dobijaju kada se na osnovne jednačine dinamike atmosfere primene sledeće pretpostavke:

- gustina je konstantna u prostoru i vremenu. Odavde sledi

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \quad (1.29)$$

ova aproksimacija se još naziva aproksimacija *nestišljivosti* ili *homogenosti*. Ovako definišemo da se radi o nestišljivom fluidu, tj. vodi ili vazduhu. Aproksimacija za nestišljivost vazduha je opravdana u dinamičkoj meteorologiji zbog činjenice da su brzine vazduha koje se sreću u atmosferi mnogo manje od brzine zvuka.

- učini se hidrostatička aproksimacija. Naime, u atmosferi su vertikalne komponente brzine relativno male, izuzev prilikom intenzivnih konvektivnih kretanja. Naročito se za kretanja većih razmera može reći da su približno horizontalna. Članovi trenja su iznad 1000m visine u atmosferi uopšte zanemarljivi tako da jednačina za vertikalnu komponentu brzine postaje:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - g \quad (1.30)$$

što je u stvari jednačina hidrostatike. Što znači da je pritisak jednak težini stuba vazduha i da linearno opada sa visinom fluida. Jednačine kretanja u kojima se kao zavisno promenljive javljaju komponenta vektora brzine i u kojima je učinjena hidrostatička aproksimacija, nazivaju se *primitivne jednačine*.

- brzina osnovne struje vetra se ne menja sa visinom odakle sledi da horizontalne komponente brzine vetra ne zavise od z koordinate. Ova pretpostavka je opravdana zbog toga što je debljina atmosfere znatno manja od poluprečnika Zemlje pa je posmatramo kao plitak sloj.

Ovde je pogodno umesto pritiska uvesti visinu posmatranog fluida u jednačine kretanja. Uzmimo da fluid ima ravno dno i obeležimo visinu od dna do slobodne gornje površine sa h . Takođe ćemo smatrati da na slobodnoj površini fluida vlada konstantan pritisak p_0 . Pritisak na nekoj visini z dobijamo kada integralimo jednačinu statike

$$\int_p^{p_0} dp = -g\rho \int_z^h dz \Rightarrow p_0 - p = -g\rho(h - z) \quad (1.31)$$

odavde se može zaključiti da je

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (1.32)$$

ili

$$-\frac{1}{\rho} \nabla p = -g \nabla h \quad (1.33)$$

Kada jednačinu (1.33) zamenimo u jednačinu kretanja dobija se jednačina kretanja za plitku vodu u obliku

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -g \nabla h - f \vec{k} \times \vec{v} \quad (1.34)$$

gde je f – Koriolisov parametar. Zbog toga što ćemo posmatrati proces advekcije na malom prostornom razmeru, zanemarićemo Koriolisove članove. Tako da jednačina kretanja za plitku vodu dobija oblik

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -g \nabla h \quad (1.35)$$

Da bi se ovaj sistem kompletirao, dovoljna je jednačina kontinuiteta pošto se vertikalna komponenta brzine u njoj može eliminisati uvođenjem visine h . Naime, kada jednačinu kontinuiteta u obliku

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (1.36)$$

integralimo u granicama od 0 do h , dobija se

$$h\nabla \vec{v} + w(h) - w(0) = 0 \quad (1.37)$$

Zbog ravnog dna, $w(0) = 0$ a $w(h) = \frac{dh}{dt}$. Tako da jednačina kontinuiteta za plitku vodu glasi

$$\frac{dh}{dt} = -h\nabla \vec{v} \quad (1.38)$$

čime je sistem jednačina zaista kompletan.

Jednačine za plitku vodu se često koriste u dinamičkoj meteorologiji jer i pored velike jednostavnosti, ovaj sistem ipak sadrži osnovne mehanizme velikog broja značajnih atmosferskih procesa.

Sistem koji je korišćen u ovom radu je oblika

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -g \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} &= -h \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right] \end{aligned} \quad (1.39)$$

Pošto je sistem (1.39) sistem nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina, najjednostavniji način za njihovo rešavanje je numeričkim putem.

3. Numeričko rešavanje primitivnih jednačina atmosfere

3.1 Diskretizacija jednačina dinamike atmosfere

Numeričko rešavanje diferencijalnih jednačina u dinamičkoj meteorologiji se vrši tako što se izabere skup tačaka u prostoru za koje se računaju vrednosti zavisno promenljivih. Ovaj skup tačaka se naziva *mreža*, a metod *metod mreže tačaka*. Zatim se posmatrana diferencijalna jednačina zamenjuje približnom jednačinom u kojoj se pojavljuju samo vrednosti zavisno promenljivih u tačkama mreže. Vrednosti zavisno promenljivih u graničnim tačkama se definišu prema graničnim uslovima. Dobijen sistem jednačina je sistem algebarskih jednačina koji se uzastopno rešava veliki broj puta.

Standardni metodi diskretizacije diferencijalnih jednačina se zasnivaju na aproksimiranju diferencijalnih operatora količnicima konačnih razlika u vremenu i prostoru.

Radi jednostavnosti ćemo posmatrati funkciju samo jedne zavisno promenljive

$$\Psi = \Psi(x)$$

koja zadovoljava neku diferencijalnu jednačinu. Ovu jednačinu želimo da rešimo za određenu oblast dužine x podeljene na ceo broj intervala dužine Δx . Ovo rastojanje između tačaka mreže se naziva *korak mreže*. Tada je $x = i\Delta x$ gde je i - broj koraka mreže.

Približne vrednosti funkcije Ψ u tačkama mreže se obeležavaju sa: $\Psi_i = \Psi(i\Delta x)$. Sada se mogu definisati konačne razlike približnih vrednosti Ψ_i u prostoru kao razlike vrednosti Ψ_i uzete preko jednog ili više intervala Δx . U zavisnosti od položaja tačke za koju se one primenjuju, ove razlike mogu da budu necentrirane ili centrirane. Necentrirana razlika je, na primer, razlika unapred:

$$\Delta\Psi_i \equiv \Psi_{i+1} - \Psi_i$$

Kada se konstruiše približna jednačina za datu diferencijalnu jednačinu, izvodi u njoj se jednostavno zamene odgovarajućim količnicima konačnih razlika. Tako se dobija šema u konačnim razlikama za diferencijalnu jednačinu.

Na primer, za prvi izvod se koristi zamena:

$$\left(\frac{d\Psi}{dx} \right)_i \rightarrow \frac{\Psi_{i+1} - \Psi_i}{\Delta x}$$

Da bi se neki količnik konačnih razlika koristio kao aproksimacija za izvod, potrebno je da on bude konzistentan, tj. da teži izvodu kada korak mreže teži nuli što je u gornjem primeru i slučaj.

Posmatrajmo sada linearu advektivnu jednačinu koja opisuje advekciju veličine Ψ konstantnom brzinom u u pozitivnom pravcu x-ose

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + u \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

Njeno rešenje se lako može dobiti analitičkim putem, tako da se numeričko i analitičko rešenje mogu uporedivati.

Da bi se ova jednačina rešila analitički, uvodi se smena $\xi \equiv x - ut$ kojom se prelazi na promenljive ξ, t . Odavde sledi

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Psi}{\partial t} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -u \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial \Psi}{\partial \xi}\end{aligned}$$

Odakle se dobija da je $\frac{\partial}{\partial t} \Psi(\xi, t) = 0$ što znači da Ψ ne može da bude funkcija od t ali može da bude neka proizvoljna funkcija od ξ

$$\Psi = f(x - ut)$$

Ovo je opšte rešenje jednačine (3.1).

Kada konstruišemo približno rešenje, tj. šemu metodom mreže, umesto u ravni x, t rešenje tražimo u tačkama mreže. Vrednost približnog rešenja u tački $i\Delta x, n\Delta t$ obeležavamo sa Ψ_i^n .

Kada za izvod po vremenu uzmememo kojičnik unapred a za izvod u prostoru kojičnik unazad, dobija se *uzvodna* ili *upstream* šema:

$$\frac{\Psi_j^{n+1} - \Psi_i^n}{\Delta t} + u \frac{\Psi_i^n - \Psi_{i-1}^n}{\Delta x} = 0$$

Ψ_i^n se naziva numeričko rešenje, a rešenje tačne diferencijalne jednačine $\Psi(i\Delta x, n\Delta t)$, tačno rešenje. Razlika između ova dva rešenja se naziva *greška rešenja* Ψ_i^n . Još bolja procena tačnosti šeme se dobija kada se tačno rešenje zameni u jednačinu šeme. Za slučaj uzvodne šeme se dobija:



$$\frac{\Psi(i\Delta x, (n+1)\Delta t) - \Psi(i\Delta x, n\Delta t)}{\Delta t} + u \frac{\Psi(i\Delta x, n\Delta t) - \Psi((i-1)\Delta x, n\Delta t)}{\Delta x} = \varepsilon$$

gde je ε greška odsecanja. Ona pokazuje koliko dobro tačno rešenje zadovoljava jednačinu šeme.

Greška odsecanja može da se smanji smanjivanjem koraka Δx i Δt . Ako greška odsecanja teži nuli pri smanjivanju Δx i Δt , numeričko rešenje kao i data šema se nazivaju *konvergentnim*. Međutim, ako pri smanjivanju Δx i Δt njihov odnos ostaje isti, greška odsecanja će ostajati ista.

Dakle, dovoljan uslov za konvergenciju šeme je da se tačka sa koje dolazi tačno rešenje nalazi unutar intervala sa kojeg dolaze vrednosti iz kojih se izračunava numeričko rešenje, tj. kada je

$$u\Delta t \leq \Delta x \text{ ili } u \frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1.$$

Parametar $C = u\Delta t / \Delta x$ se naziva *Kurantov broj*.

Ovaj kriterijum pokazuje da se stabilnost šeme ne može postići jednostavnim smanjivanjem koraka u vremenu i prostoru, već smanjivanjem njihovog odnosa. Uslov su pronašli Courant, Friedrichs i Lewy (1928.) pa se on često naziva Courant – Friedrichs – Lewy ili CFL kriterijum stabilnosti.

3.2 Semi – Lagranževska advektivna šema

Da bi se predstavio semi - Lagranževski metod, posmatraćemo linearu advektivnu jednačinu koja opisuje advekciju skalarne funkcije, koja glasi:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \vec{V} \nabla \Psi = 0$$

gde je $\Psi = \Psi(\vec{r}, t)$ skalarna funkcija koja zavisi od koordinata i vremena a $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$ je brzina advekcije.

Ako je $\vec{V} = \text{const.}$, rešenje linearne advektivne jednačine u trenutku t zavisi od početnih uslova i glasi:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \Psi(\vec{r} - \vec{V}t, 0) = \Psi(\vec{r}^*, 0) \quad (3.2)$$

gde je \vec{r}^* - polazna tačka.

Semi – Lagranževski metod počiva na pretpostavci da je jednačina (3.2) jako dobra aproksimacija i za slučaj promenljive brzine.

Kada uradimo diskretizaciju advektivne jednačine u dvodimenzionalnom koordinatnom sistemu, važi $x = i\Delta x, y = j\Delta y, t = n\Delta t$ i $\bar{V} = \bar{V}(u, v)$, gde su koraci mreže Δx i Δy a vremenski korak Δt , sa $x_i = i\Delta x, y_j = j\Delta y$ i $t^n = n\Delta t$ su definisane tačke u prostoru i vremenu respektivno, a indeksima i, j i n su obeležene tačke mreže u x i y pravcu i broj proteklih vremenskih koraka od početnog trenutka respektivno.

Tada jednačina (3.2) glasi :

$$\Psi(i\Delta x, j\Delta y, (n + 1)\Delta t) = \Psi(x_*, y_*, n\Delta t) \quad (3.3)$$

gde su

$$x_* = i\Delta x - u\Delta t$$

$$y_* = j\Delta y - v\Delta t$$

Funkcija $\Psi(x_*, y_*, t)$ se aproksimira pomoću Lagranževog interpolacionog polinoma koristeći vrednosti funkcije Ψ u tačkama koje su *najbliže* vrednostima x_* i y_* kao:

$$\Psi(x_*, y_*, t) = \sum_{\mu} \sum_{\nu} W_{\mu\nu} \Psi_{\mu\nu}^n \quad (3.4)$$

u jednačini je W_{rs} težinska funkcija koja je oblika:

$$W_{rs} = \prod_{\mu \neq r} \frac{(x_* - x_{\mu})}{(x_r - x_{\mu})} \prod_{\nu \neq s} \frac{(y_* - y_{\nu})}{(y_s - y_{\nu})} \quad (3.5)$$

gde μ i ν daju informaciju o broju tačaka koje se koriste za interpolaciju u zavisnosti od toga da li se radi o bilinearnoj, bikvadratnoj, itd. interpolaciji.

U Tabeli I. date su vrednosti parametara μ i ν u zavisnosti od vrste interpolacije.

Tabela I. Vrednosti parametara μ i ν u zavisnosti od vrste interpolacije

Vrsta interpolacije	μ	ν
Bilinearna	$i-1, i$	$j-1, j$
Bikvadratna	$i-1, i, i+1$	$j-1, j, j+1$
Bikubna	$i-2, i-1, i, i+1$	$j-2, j-1, j, j+1$
Bikvartna	$i-2, i-1, i, i+1, i+2$	$j-2, j-1, j, j+1, j+2$

Najbliža tačka (i, j) za bilinearnu i bikubnu interpolaciju se bira tako da važi uslov

$$(i-1)\Delta x < x_* \leq i\Delta x$$

$$(j-1)\Delta y < y_* \leq j\Delta y$$

a za bikvadratnu i bikvartnu

$$(i - \frac{1}{2})\Delta x < x_* \leq (i + \frac{1}{2})\Delta x$$

$$(j - \frac{1}{2})\Delta y < y_* \leq (j + \frac{1}{2})\Delta y$$

4. Opis numeričkog modela

Da bi se dijagnostikovala uspešnost semi – Lagranževske advektivne šeme u zavisnosti od različitih vrsta interpolacija napravljeni su programi u Fortranu77 koji numeričkim putem rešavaju primitivne jednačine u jednoj i dve dimenzije. Programi su priloženi uz rad na CD-u.

Jednačine koje se korišćene u programu su uprošćene jednačine za plitku vodu, tj. napisane u konačnim razlikama. Dati sistem je napisan za jednu dimenziju, no, prelazak na dve dimenzije je trivijalan.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = -g \frac{h_{i+1}^{n+1} - h_{i-1}^{n+1}}{2\Delta x}$$

$$\frac{h_i^{n+1} - h_i^n}{\Delta t} = -h_i^n \left(\frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} + \frac{v_i - v_{i-1}}{2\Delta y} \right)^{n+1}$$

Parametri koji su korišćeni u programu za rešavanje primitivnih jednačina u jednoj dimenziji, dati su u Tabeli II

Tabela II . Parametri koji su korišćeni u programu za rešavanje primitivnih jednačina u jednoj dimenziji

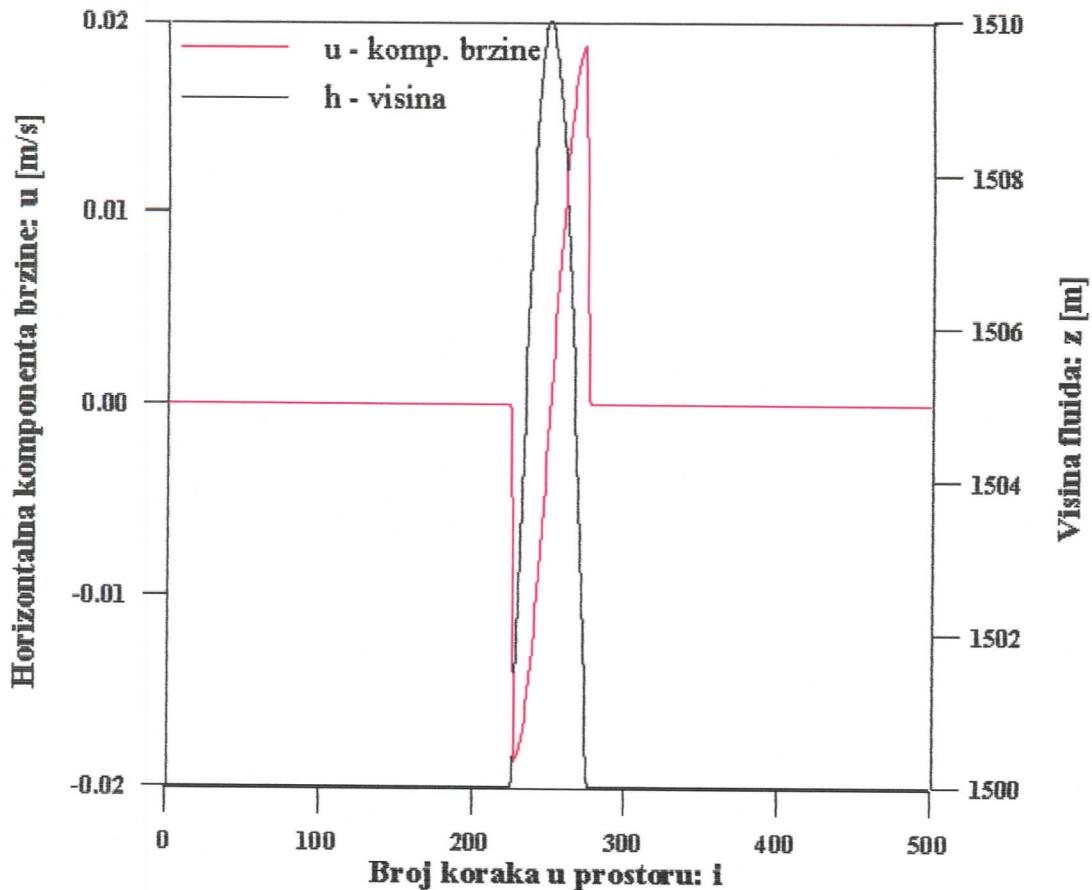
Naziv parametra	Oznaka	Brajna vrednost
Broj tačaka	imax	500
Korak u prostoru	dx	20.000
Korak u vremenu	dt	60
Broj koraka u vremenu	nmax	3500
Ludolfov broj	pi	3.141596
Gravitaciono ubrzanje	g	9.81

Na ravnoj površini fluida, napravljena je perturbacija oblika

$$h(x_i) = h_0 + \sum_{i=x_1}^{x_2} 10 \cdot \sin(\pi \frac{i}{x_2 - x_1})$$

gde je $h_0 = 1500m$, $x_1 = 226 \cdot dx$, $x_2 = 275 \cdot dx$.

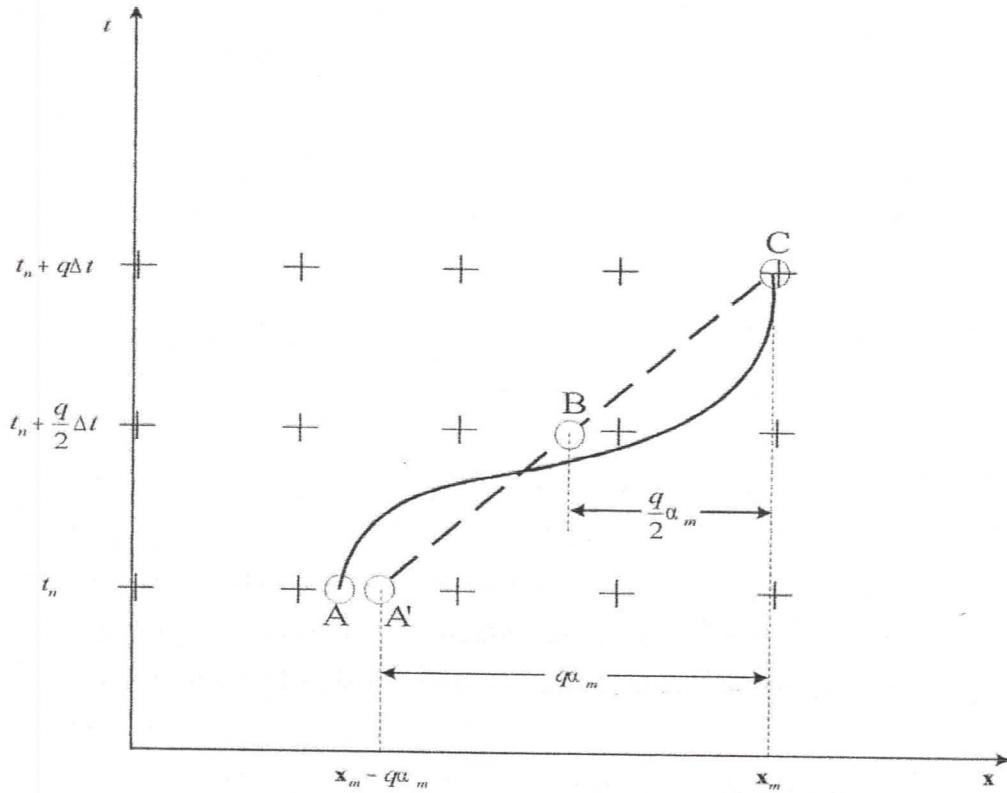
Na grafiku 1. dat je izgled početnog polja.



Grafik 1. Početno polje visine i brzine. Na levoj z-osi data je horizontalna komponenta brzine, a na desnoj, visina fluida. Na x-osi dat je broj koraka u prostoru

Posmatrano je kretanje perturbacije i njen odbijanje od granica zadate oblasti.

Da bi se numerički modelirao sistem primitivnih jednačina semi – Lagranževskim pristupom, tačke prostorne mreže x_m na vremenskom nivou $t_n + q\Delta t$ smatrane su *dolaznim tačkama* za delice koji na vremenskom nivou t_n napuštaju svoje nepravilno raspoređene *odlazne tačke* $x_m - q\alpha_m$, kao što je prikazano na slici 1.



Slika 1. Šematski prikaz semi – Lagranževske advekcije. Puna linija AC predstavlja stvarni a isprekidana A'BC procenjeni izgled trajektorija.

m je indeks položaja tačke u prostoru, $t_n = n\Delta t$, gde je Δt vremenski korak a n je redni broj vremenskog koraka. Parametar q može uzimati vrednosti 1 ili 2; u ovom radu, njegova vrednost je 2. $q\alpha_m$ predstavlja rastojanje koje delić pređe za vreme $q\Delta t$. Punom linijom AC označena je *tačna*, a isprekidanom linijom A'BC *procenjena* trajektorija delića. Pošto je advektivni proces konzervativan, tj. vrednost advektirane veličine ostaje nepromenjena duž trajektorije delića, delić se vraća za jedan vremenski korak unazad do svoje polazne tačke po polju brzine. Ovde se javljaju dva problema:

- prvi problem je naći položaje odlaznih tačaka na vremenskom nivou t_n ;
- drugi problem je izračunavanje vrednosti advektirane veličine prostornom interpolacijom u nepravilno raspoređenim odlaznim tačkama pomoću poznatih vrednosti u tačkama pravilne mreže.

Prvi problem je rešavan korišćenjem iterativnog postupka. Naime, u prvoj iteraciji se pretpostavi da je brzina delića u odlaznoj tački (tačka A) jednaka brzini delića u prethodnom vremenskom koraku t_n . Tako da se rastojanje α_m u prvoj iteraciji izračunava po formuli

$$\alpha_m^{r+1} = \Delta t u(x_m - q\alpha_m^r, t_n)$$

zatim se jednim od metoda interpolacije (o čemu će biti reči kasnije) određuje nova vrednost brzine pomoću koje se računa novo rastojanje α_m čime se dobija položaj tačke A' na slici 1. Posle svake sledeće iteracije, procenjena vrednost rastojanja α_m se približava tačnoj vrednosti do trenutka kada će se poklopiti.

Drugi problem je odabrati najpogodniji način za interpolaciju advektirane veličine. U jednodimenzionom modelu, interpolacija je vršena pomoću Lagranževih polinoma od prvog do šestog reda po formuli

$$f(x) = y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)\cdots(x_1-x_n)} + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)\cdots(x_2-x_n)} \\ + \cdots + y_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)\cdots(x_n-x_{n-1})}$$

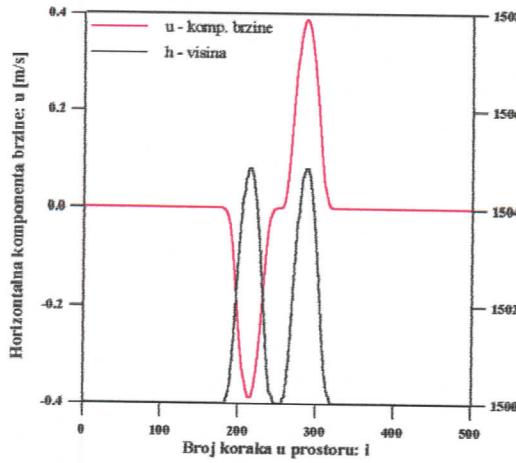
gde n predstavlja red polinoma, $f(x)$ interpolisanu vrednost a y_n vrednosti funkcije u datim tačkama.

Granični uslovi su izabrani tako da izazovu odbijanje talasa od granica i glase:

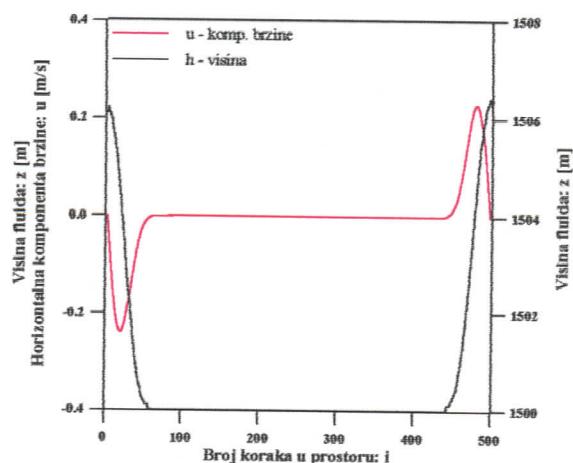
$$h(1) = h(3) \\ h(I_{max}) = h(I_{max}-2)$$

tj. vrednosti u graničnim tačkama su jednakе vrednostima u tačkama koje su udaljene dva prostorna koraka unapred, tj. unazad.

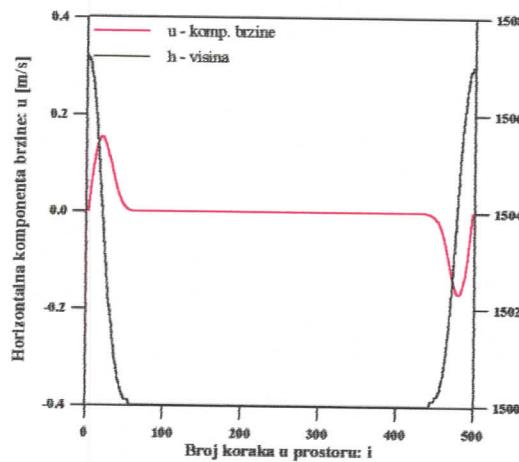
Na slici 2. dat je prikaz kretanja perturbacije do granica, njen odbijanje i vraćanje na početni položaj. U daljem tekstu, ovaj period će se nazivati ciklus.



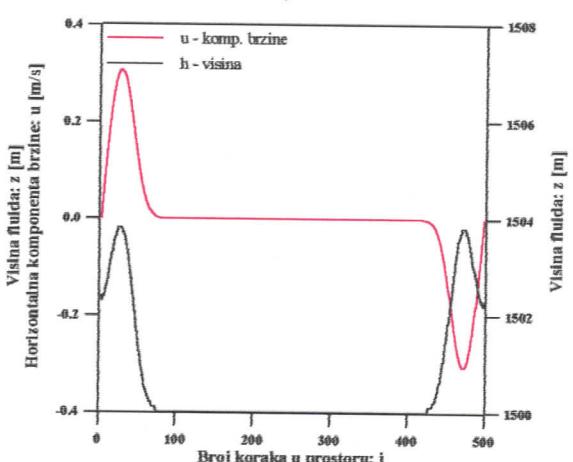
Grafik 1.



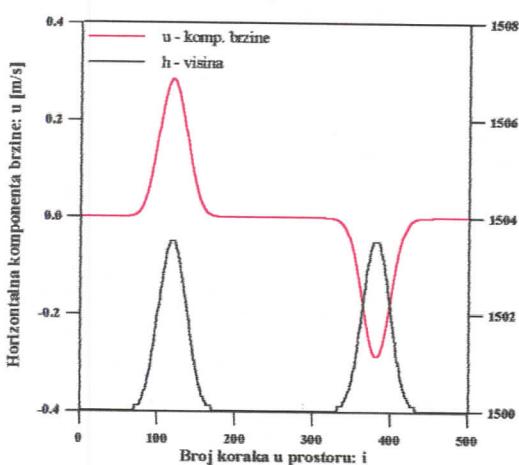
Grafik 2.



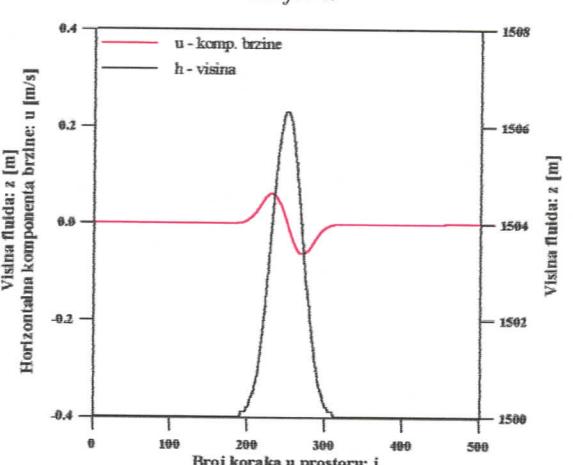
Grafik 3.



Grafik 4.



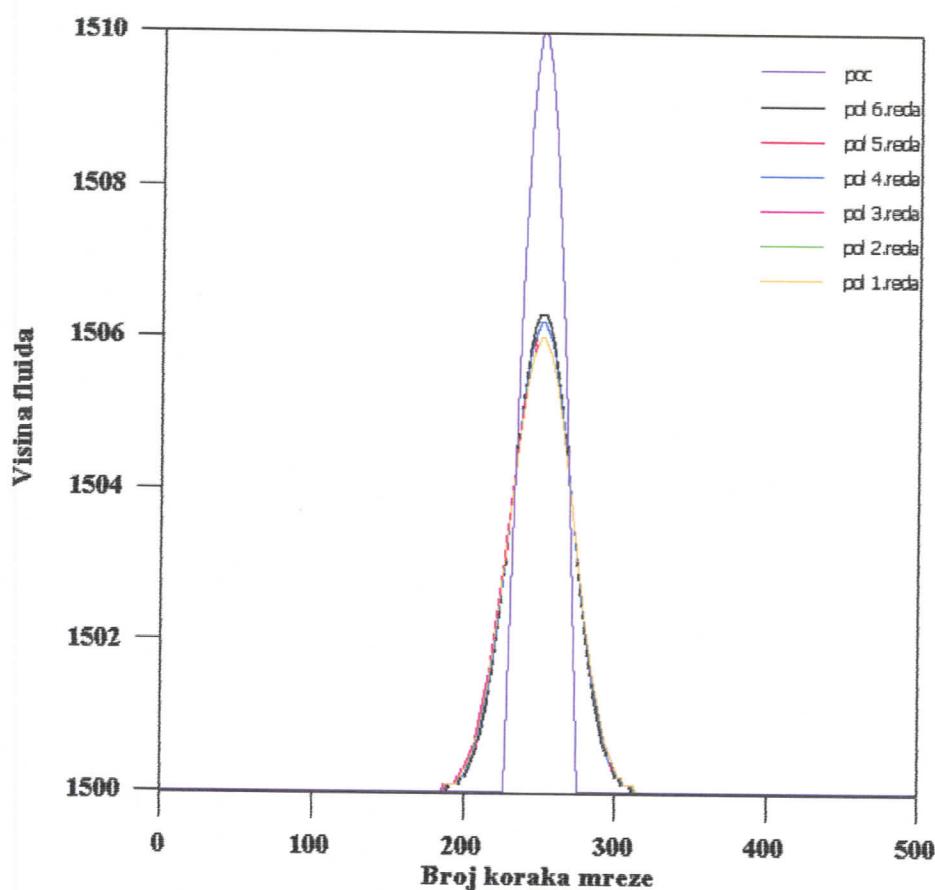
Grafik 5.



Grafik 6.

Slika 2. Prikaz kretanja perturbacije u toku jednog ciklusa. Grafik 1. predstavlja izgled perturbacije posle 100, grafik 2. posle 650, grafik 3. posle 700, grafik 4. posle 750, grafik 5. posle 1000 i grafik 6. posle 1350 vremenskih koraka.

Na grafiku 2. Prikazane su perturbacije posle jednog ciklusa pri korišćenju Lagranževih interpolacionih polinoma od prvog do šestog reda.



Grafik 2. Početna i perturbacije posle jednog ciklusa pri korišćenju Lagranževih interpolacionih polinoma od prvog do šestog reda

Sa grafika se može zaključiti da posle jednog ciklusa, Lagranžev polinom šestog reda nudi najpričližnije slaganje sa početnim poremećajem. Odmah iz njega su polinomi petog i četvrtog reda čije se krive gotovo poklapaju. I na kraju, polinomi drugog i prvog reda čije su krive takođe skoro potpuno identične.

Parametri koji su korišćeni u programu za rešavanje primitivnih jednačina u dve dimenzije, dati su u Tabeli III.

Tabela III. Parametri koji su korišćeni u programu za rešavanje primitivnih jednačina u dve dimenzije

<i>Naziv parametra</i>	<i>Oznaka</i>	<i>Brojna vrednost</i>
Broj tačaka u x-pravcu	<i>i</i> max	100
Broj tačaka u y-pravcu	<i>j</i> max	100
Korak u prostoru u x-pravcu	<i>dx</i>	50.000
Korak u prostoru u y-pravcu	<i>dy</i>	50.000
Korak u vremenu	<i>dt</i>	300
Broj koraka u vremenu	<i>n</i> max	1500
Ludolfov broj	<i>pi</i>	3.141596
Gravitaciono ubrzanje	<i>g</i>	9.81

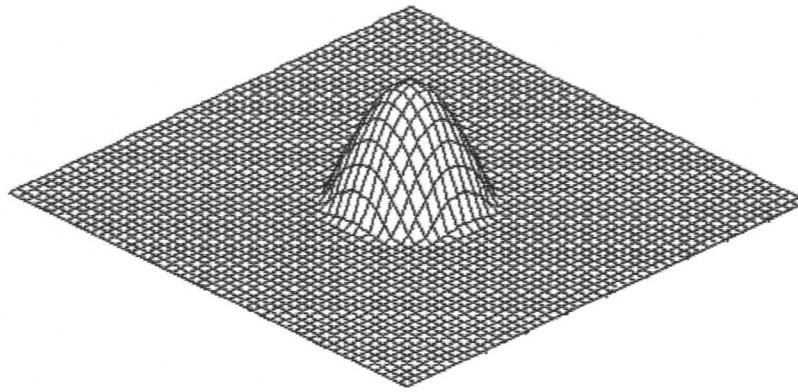
Početno perturbovano polje visine je dato u obliku

$$h(x_i, y_j) = h_0 + \sum_{j=y_1}^{y_2} \sum_{i=x_1}^{x_2} 10 \cdot \cos\left(\pi \frac{r}{30}\right)$$

$$r = \sqrt{\left(\frac{i \text{max}}{2} - x\right)^2 + \left(\frac{j \text{max}}{2} - y\right)^2}$$

gde je $h_0 = 150m$, $x_1 = 31 \cdot dx$, $x_2 = 70 \cdot dx$, $y_1 = 31 \cdot dy$, $y_2 = 70 \cdot dy$.

Na slici 3. dat je izgled početnog polja.

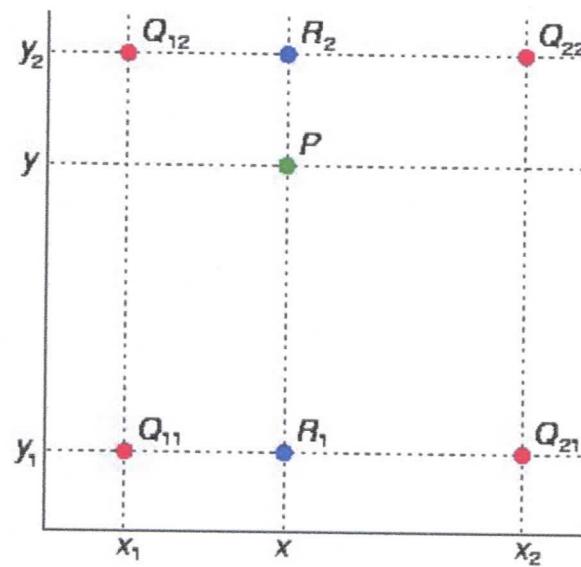


Slika 3. Početno polje visine

Takođe je posmatrano kretanje perturbacije i njeno odbijanje od granica zadate oblasti.

Principi za numeričko modeliranje semi – Lagranževskog metoda u dve dimenzije su isti kao za jednodimenzioni model. Uz dodatak još dva načina interpolacije – bilinearne i bikvadratne.

Bilinearna interpolacija je rađena tako što se prvo izvršila linearna interpolacija u x-pravcu a zatim u y-pravcu. Šematski prikaz bilinearne interpolacije je dat na slici 4.



Slika 4. Šematski prikaz bilinearne interpolacije

Zelena tačka P predstavlja tačku koju želimo da interpolišemo a crvene tačke $Q_{11}, Q_{21}, Q_{12}, Q_{22}$ predstavljaju tačke u kojima postoje podaci. U ovom radu, su crvene tačke izabrane kao:

$$Q_{11} = (i, j), Q_{21} = (i + 1, j), Q_{12} = (i, j + 1), Q_{22} = (i + 1, j + 1).$$

Rastojanja su $x_2 - x_1 = dx$, $y_2 - y_1 = dy$, a rastojanja $x_2 - x = \alpha_m$, $y_2 - y = \beta_m$

Dakle, prvo su urađene dve linearne interpolacije u x-pravcu koristeći formulu

$$f(R_1) = (\alpha_m f(Q_{11}) + (1 - \alpha_m) f(Q_{21})) / dx$$

$$f(R_2) = (\alpha_m f(Q_{12}) + (1 - \alpha_m) f(Q_{22})) / dx$$

A zatim je urađena interpolacija u y-pravcu

$$f(P) = (\beta_m f(R_1) + (1 - \beta_m) f(R_2)) / dy$$

Bikvadratna interpolacija je rađena pomoću devet tačaka koje su najbliže tački koju želimo da interpolišemo. Prvo su izračunate težinske funkcije za svaku tačku na osnovu formule (3.4).

Definisano je šest faktora težinske funkcije

$$x_{k1} = dx - \alpha_m, \quad x_{k2} = \alpha_m, \quad x_{k3} = dx + \alpha_m \\ y_{k1} = dy - \beta_m, \quad y_{k2} = \beta_m, \quad y_{k3} = dy + \beta_m$$

Kombinacijom ovih faktora dobijane su težinske funkcije r_k za svaku od devet tačaka.

Zatim je izračunata interpolisana vrednost funkcije po formuli

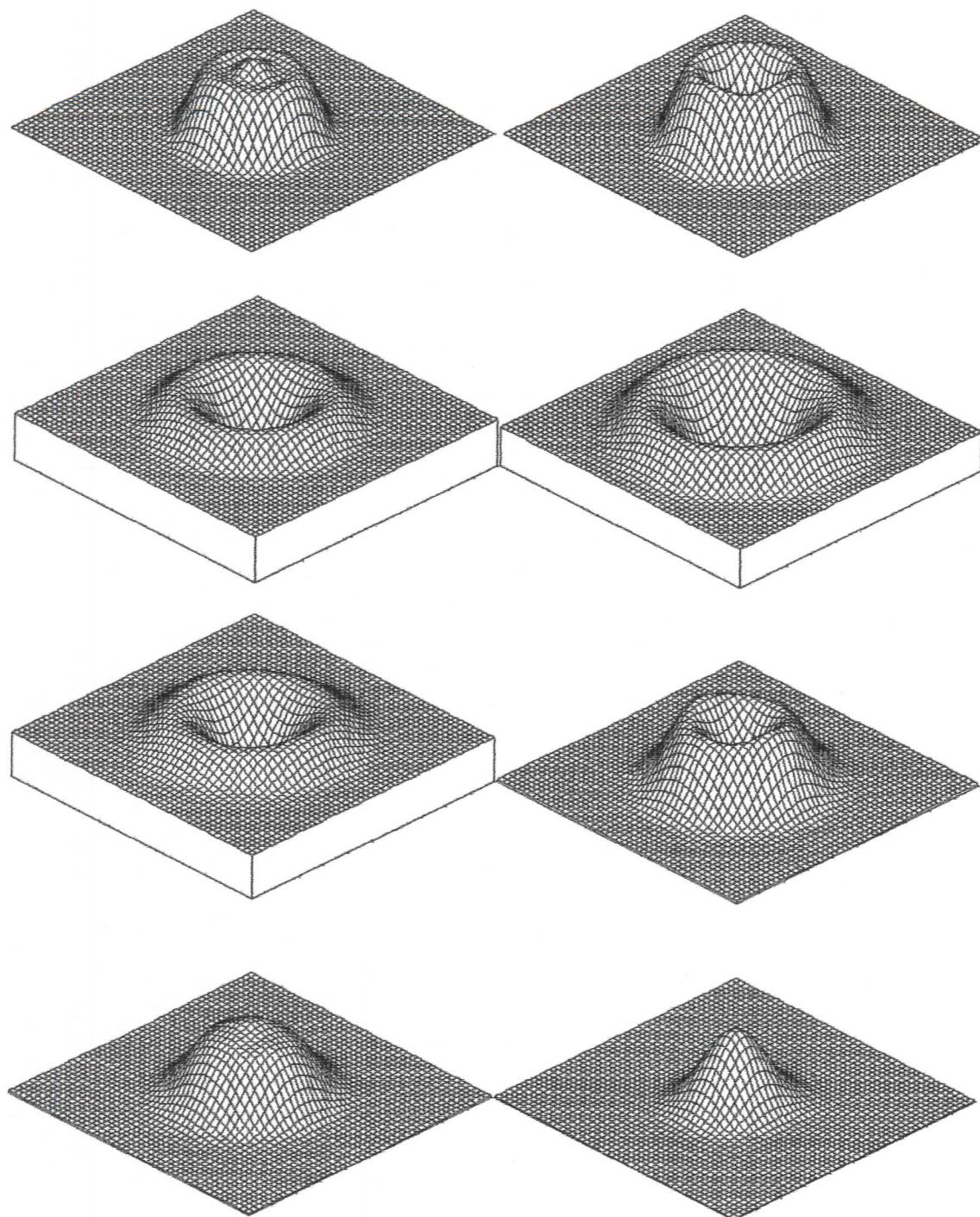
$$f_{\text{int}} = \sum_{i,j=1}^3 \frac{f(i,j)}{r_y}$$

Zbog kupastog oblika posmatranog poremećaja i kvadratnog oblika posmatrane oblasti, granični uslovi za model u dve dimenzije su definisani na sledeći način: posle određenog broja koraka, tačnije, na svakih 100 koraka, u i v komponente brzine su definisane kao

$$u(x, y) = -u(x, y), \quad v(x, y) = -v(x, y)$$

što izaziva odbijanje poremećaja od „kružnih“ granica. Ovo se naziva numeričko nasilje, no, matematički je jako komplikovano napraviti kružne granične uslove. Ovako definisani granični uslovi ne unose veliku grešku u model tako da je opravdano koristiti ih.

Na slici 5. dat je prikaz kretanja perturbacije u toku jednog ciklusa.



Slika 5. Prikaz kretanja perturbacije u toku jednog ciklusa. Mapa 1. predstavlja izgled perturbacije posle 35, mapa 2. posle 45, mapa 3. posle 75, mapa 4. posle 100, mapa 5. posle 125, mapa 6. posle 155, mapa 7. posle 165 i mapa 8. posle 200 vremenskih koraka.

5. Analiza rezultata

Napravljene su četiri serije testova za numerički model u dve dimenzije da bi se pokazala zavisnost uspešnosti semi – Lagranževskog metoda od načina interpolacije.

Numerička rešenja su međusobno upoređivana samo ako su dobijena pod istim početnim i graničnim uslovima, za iste prostorne raspodele i za iste prostorno – vremenske rezolucije.

Testovi su napravljeni na osnovu činjenice da polje veličine koja se advektira treba da ostane konstantno u toku vremena. To praktično znači da poremećaj posle odbijanja treba da se vrati u početni položaj nepromenjen.

Period između početnog položaja poremećaja i njegovog vraćanja na početno stanje posle odbijanja je nazvan *ciklus*.

Testirani su:

- 1) zakon održanja mase
- 2) zakon održanja energije
- 3) tačnost
- 4) efikasnost šeme

- 1) *Zakon održanja mase* je proveravan na osnovu formule za relativnu grešku izraženu u procentima

$$\xi = \frac{\left| \sum_{i,j} h_{i,j} - \sum_{i,j} h_{0,i,j} \right|}{\sum_{i,j} h_{0,i,j}} \cdot 100\%$$

Vrednosti ξ date su u Tabelama IV,V,VI i VII.

Broj ciklusa	ξ
1	$0.119 \cdot 10^{-02}$
2	$4.510 \cdot 10^{-02}$
3	$0.121 \cdot 10^{-02}$
4	$0.325 \cdot 10^{-02}$
5	$0.545 \cdot 10^{-02}$
6	$0.769 \cdot 10^{-02}$
7	$0.989 \cdot 10^{-02}$

Tabela IV Relativna greška u procentima za Lagranžev interpolacioni polinom prvog reda

Broj ciklusa	ξ
1	$0.140 \cdot 10^{-02}$
2	$0.137 \cdot 10^{-02}$
3	$6.530 \cdot 10^{-03}$
4	$3.900 \cdot 10^{-02}$
5	$0.157 \cdot 10^{-02}$
6	$0.280 \cdot 10^{-02}$
7	$0.402 \cdot 10^{-02}$

Tabela V Relativna greška u procentima za Lagranžev interpolacioni polinom šestog reda

Broj ciklusa	ξ
1	$0.117 \cdot 10^{-02}$
2	$0.152 \cdot 10^{-02}$
3	$0.150 \cdot 10^{-02}$
4	$0.127 \cdot 10^{-02}$
5	$8.760 \cdot 10^{-02}$
6	$3.680 \cdot 10^{-02}$
7	$2.220 \cdot 10^{-02}$

Tabela VI Relativna greška u procentima za bilinearnu interpolaciju

Broj ciklusa	ξ
1	$0.160 \cdot 10^{-02}$
2	$0.213 \cdot 10^{-02}$
3	$0.219 \cdot 10^{-02}$
4	$0.202 \cdot 10^{-02}$
5	$0.170 \cdot 10^{-02}$
6	$0.127 \cdot 10^{-02}$
7	$7.880 \cdot 10^{-02}$

Tabela VII Relativna greška u procentima za bikvadratnu interpolaciju

Vidi se da je relativna greška u sva četiri slučaja reda veličine 10^{-2} što je izuzetno malo. Može se uočiti i mala nestabilnost kod rezultata za sve šeme što je karakteristično za semi – Lagranževski metod.

- 2) *Zakon održanja energije.* Posmatrane su kinetička E_{kin} i raspoloživa potencijalna energija E_{pot} .

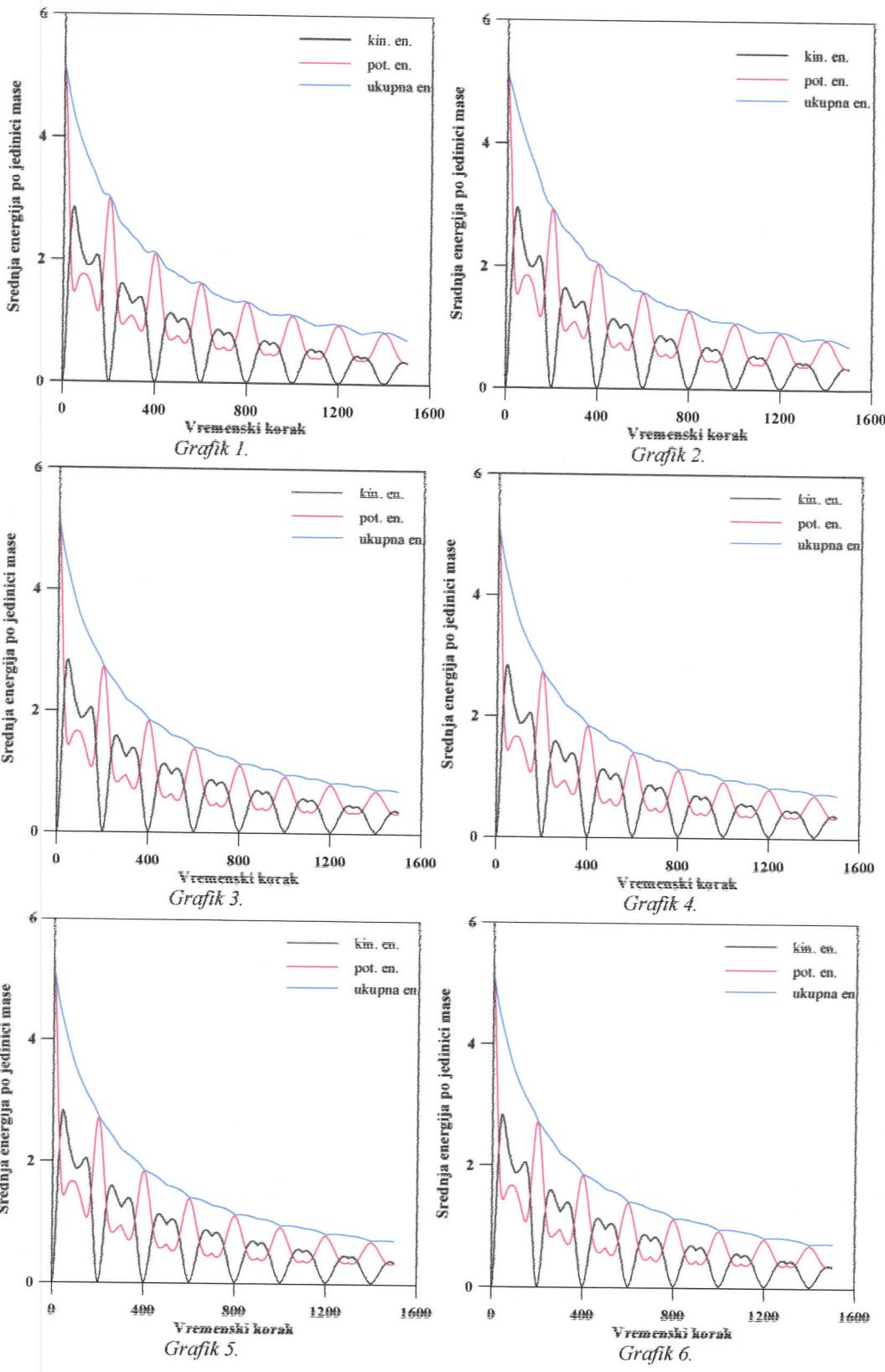
Njihove vrednosti su računate po formulama:

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} h_{ij} u_{ij}^2 \text{ i } E_{pot} = g \sum_{i,j} \left(\frac{h_{ij} - h_{0j}}{2} \right)^2$$

Formula za kinetičku energiju je dobijena kada se u izrazu za kinetičku energiju masa zamenila formulom $m = \rho Sh$ uz uslov $\rho = 1\text{kg/m}^3, S = 1\text{m}^2$.

Do formule za raspoloživu potencijalnu energiju se došlo korišćenjem iste formule za masu uz pretpostavku da se centar mase nalazi na sredini stuba fluida zbog čega se u izrazu pojavljuje $1/2$.

Na slici 6. prikazani su grafici kinetičke, raspoložive potencijalne i ukupne energije za šest načina interpolacije. Može se zaključiti da zakon održanja energije ne funkcioniše najbolje kod semi – Lagranževskog metoda jer se na graficima uočavaju velike promene ukupne energije koja bi trebalo da bude konstantna. Međutim, ove promene postaju značajne posle velikog broja vremenskih koraka što može da bude problem kod dugih integracija kakve zahtevaju simulacije klime, dok kod kraćih vremenskih perioda ove promene nisu toliko značajne.

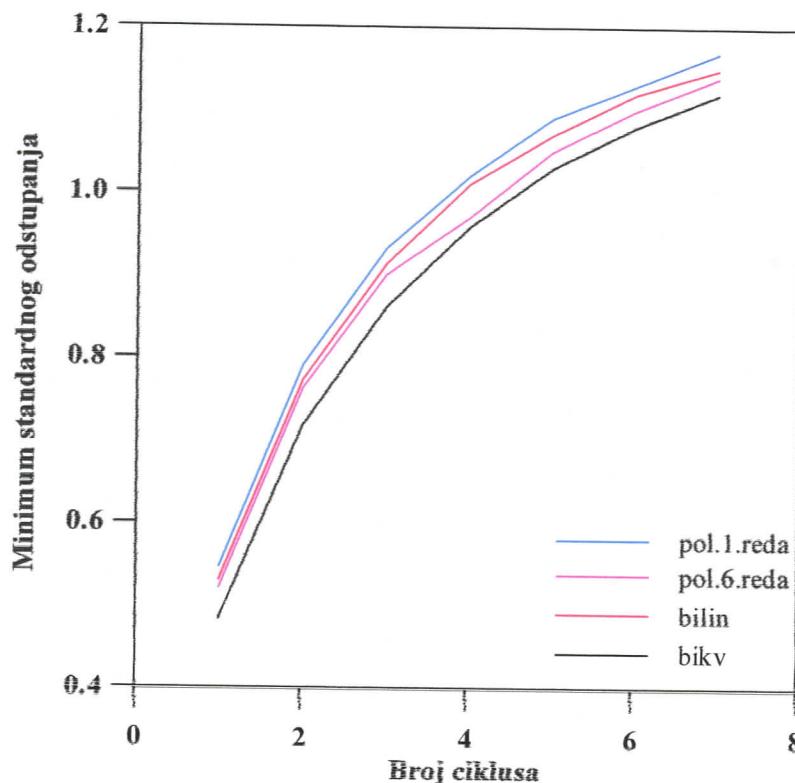


Slika 6. kinetička, raspoloživa potencijalna i ukupna energija u zavisnosti od vremenskih koraka. Grafik 1. predstavlja bilinearnu, 2. bikvadratnu interpolaciju, 3. Lagranžev interpolacioni polinom prvog reda, 4. Lagranžev interpolacioni polinom trećeg reda, 5. Lagranžev interpolacioni polinom petog reda i 6. Lagranžev interpolacioni polinom šestog reda

- 3) Tačnost šema je proveravana pomoću standardnog odstupanja koje je računato po formuli

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{i \max j \max} \left(\sum_{i,j} (h_{ij} - h_{0j})^2 \right)}$$

Na kraju ciklusa, u idealnom slučaju, ova greška bi trebala da bude jednaka nuli. Odnosno, imaće minimalnu vrednost na kraju svakog ciklusa. Ove minimalne vrednosti su predstavljene na grafiku 3.



Grafik 3. Minimumi standardnog odstupanja u zavisnosti od broja ciklusa za bilinearnu, bikvadratnu interpolaciju i za Lagranžev interpolacioni polinom prvog i šestog reda

Sa grafika se može zaključiti da najveću tačnost obezbeđuje korišćenje bikvadratne interpolacije a najmanju korišćenje linearne interpolacije.

- 4) Efikasnost šeme merena je na osnovu potrošnje CPU (Central Processing Unit) vremena potrebnog za izvršavanje koda numeričkog modela. Računata je relativna greška ε kao odnos vremena najbrže šeme i ostalih.

Rezultati su dati u Tabelama VIII, IX, X i XI. Vreme najbrže šeme je 345st i u pitanju je linearna interpolacija. U tabelama su date relativne greške u odnosu na ovu vrednost.

Broj ciklusa	ε
1	1.00
2	1.00
3	0.994
4	0.994
5	0.994
6	0.994
7	0.994

Tabela VIII Relativna greška za Lagranžev interpolacioni polinom prvog reda

Broj ciklusa	ε
1	0.587
2	0.587
3	0.587
4	0.587
5	0.585
6	0.587
7	0.587

Tabela IX Relativna greška za Lagranžev interpolacioni polinom šestog reda

Broj ciklusa	ε
1	0.696
2	0.692
3	0.694
4	0.694
5	0.694
6	0.696
7	0.694

Tabela X Relativna greška za bilinearnu interpolaciju

Broj ciklusa	ε
1	0.461
2	0.476
3	0.448
4	0.477
5	0.478
6	0.478
7	0.479

Tabela XI Relativna greška za bikvadratnu interpolaciju

Iz četiri predhodne tabele se može zaključiti da je najbrža šema ona u kojoj se koristi linearna interpolacija a najsporija šema sa bikvadratnom interpolacijom. Odnosno, najbrža šema je istovremeno i ona koja daje najmanju tačnost.

6. Zaključak

Semi – Lagranževski metod je poslednjih godina zadobio mnogo pristalica. Pre svega, zbog toga što dozvoljava nekoliko puta duže vremenske korake nego što to zahteva CFL kriterijum. Dakle, ove šeme su apsolutno stabilne, a uz to zadržavaju zadovoljavajuću formalnu tačnost.

Progres u razvoju ovog metoda je ostvarivan usavršavanjem metodologije i matematičkog aparata za računanje trajektorije delića i parametara u odlaznim tačkama. Povećanjem kompleksnosti matematičkih postupaka gube se prednosti u pogledu efikasnosti ostvarene prođavanjem koraka u vremenu što je u gornjim testovima i dokazano. Međutim, ovo smanjivanje efikasnosti je neznatno u odnosu na povećanje tačnosti koje pruža bikvadratna interpolacija.

Jedan od očiglednih problema semi – Lagranževskih šema jeste da ne mogu da održe integralne osobine stvarne atmosfere kao što su zakon održanja mase i zakon održanja energije.

No, ovi problemi mogu biti značajni za duge integracije kakve zahteva simulacija klime. Za kraće prognoze, ovaj metod može da ponudi dosta dobar stepen održanja integralnih osobina stvarne atmosfere kao i visoki stepen tačnosti kada se koriste kompleksnije interpolacije.

Literatura

- [1] T. N. Krishnamurti, L. Bounoua, *An Introduction To Numerical Prediction Techniques*, CRC Press, 1996.
- [2] J. S. Berezin, N. P. Žitkov, *Numerička analiza*, Naučna knjiga, Beograd, 1963.
- [3] Fedor Mesinger, *Dinamička meteorologija (analitička rešenja i numeričke metode)*, Izdavačko preduzeće, Građevinska knjiga, Beograd, 1976.
- [4] Luca Bonaventura, *An introduction to semi – Lagrangian methods for geophysical scale flows*, MOX – Applied Mathematics Laboratory, Department of Mathematics, Politecnico di Milano
- [5] Harold Ritchie, *Eliminating the interpolation associated with the semi-Lagrangian scheme*, Monthly Weather Review, 114, 135-146
- [6] Rodolfo Bermejo, *Notes and correspondence on the equivalence of semi-Lagrangian schemes and particle-in-cell finite element methods*, Monthly Weather Review, 118, 979-987
- [7] McDonald, *Accuracy of multiply – upstream, semi – Lagrangian advective schemes*, Monthly Weather Review, 112, 1267-1275
- [8] www.cs.ubc.ca/~tbrochu/projects/semil.pdf
- [9] dr Mladen Ćurić, *Osnovi dinamičke meteorologije*, Prirodno matematički fakultet univerziteta u Beogradu, Jugoslovenski zavod za produktivnost rada i informacione sisteme, Beograd, 1982.
- [10] Milivoj B. Gavrilov, *Uporedni testovi polu – Lagranževskih i Ojlerovskih metoda za numeričko rešavanje jednačina za plitku vodu*, Doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1996.

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

<i>Redni broj:</i>	
RBR	
<i>Identifikacioni broj:</i>	
IBR	
<i>Tip dokumentacije:</i>	Monografska dokumentacija
TD	
<i>Tip zapisa:</i>	Tekstualni štampani materijal
TZ	
<i>Vrsta rada:</i>	Diplomski rad
VR	
<i>Autor:</i>	Jelena Matić
AU	
<i>Mentor:</i>	Dr Darko Kapor, profesor
MN	
<i>Naslov rada:</i>	Integracija primitivnih jednačina za atmosfersku semi – Lagranževskim metodom
NR	
<i>Jezik publikacije:</i>	srpski (latinica)
JP	
<i>Jezik izvoda:</i>	srpski/engleski
JI	
<i>Zemlja publikovanja:</i>	Srbija
ZP	
<i>Uže geografsko područje:</i>	Vojvodina
UGP	
<i>Godina:</i>	2006
GO	
<i>Izdavač:</i>	Autorski reprint
IZ	
<i>Mesto i adresa:</i>	Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA	
<i>Fizički opis rada:</i>	6/36/10/11/6/3/0
FO	
<i>Naučna oblast:</i>	fizika
NO	
<i>Naučna disciplina:</i>	meteorologija
ND	
<i>Predmetna odrednica / ključne reči:</i>	primitivne jednačine, interpolacija, semi – Lagranževski pristup
PO	
UDK	
<i>Čuva se:</i>	Biblioteka departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu
ČU	
<i>Važna napomena:</i>	nema
VN	
<i>Izvod:</i>	Sistem primitivnih jednačina predstavlja sistem nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačina koje se rešavaju numeričkim putem postupkom diskretizacije metodom mreže tačaka. Predmet istraživanja je tzv. semi – Lagranževski metod kod kojeg se mreža tačaka ne menja u vremenu kao najekonomičnije rešenje. Kod ovog metoda, veliki deo numeričkog vremena se troši na interpolaciju zbog čega je ovaj diplomski rad posvećen analiziranju zavisnosti semi – Lagranževske šeme od načina interpolacije. na dvodimenzionim primerima.
IZ	
<i>Datum prihvatanja teme od NN veća:</i>	7.XI 2006.
DP	
<i>Datum odbrane:</i>	28.XII 2006.
DO	
<i>Članovi komisije:</i>	dr Imre Gut, vanredni profesor na PMF-u, Novi Sad dr Borivoj Rajković, vanredni profesor na FF, Beograd dr Darko Kapor, redovan profesor na PMF-u, Novi Sad, Mentor
KO	
<i>Predsednik:</i>	dr Imre Gut, vanredni profesor na PMF-u, Novi Sad
<i>član:</i>	dr Borivoj Rajković, vanredni profesor na FF, Beograd
<i>član:</i>	dr Darko Kapor, redovan profesor na PMF-u, Novi Sad, Mentor

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type:

DT

Monograph publication

Type of record:

TR

Textual printed material

Content code:

CC

Final paper

Author:

AU

Jelena Matić

Mentor /comentor:

MN

Darko Kapor, Ph.D

Title:

TI

Integration of Primitive Equations of the Atmosphere with semi –
Lagrangian approach

LT

Serbian (Latin)

Language of abstract:

LA

Serbian/English

Country of publication:

CP

Serbia

Locality of publication:

LP

Vojvodina

Publication year:

PY

2006

Publisher:

PU

Author's reprint

Publication place:

PP

Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

PD

6/36/10/11/6/3/0

Scientific field:

SF

Physics

Scientific discipline:

SD

Meteorology

Subject / Key words:

UC

Primitive Equations, interpolation, Semi – Lagrangian approach

Holding data:

HD

Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4

Note:

N

none

Abstract:

AB

System of primitive equations of the atmosphere represents a system of non-linear partial differential equations solved numerically by the approach of discretization of grid of points. The subject of study is so called semi – Lagrangian scheme, where grid of points does not vary with time, as the most economical approach. Large part of numerical time in this method is spent on interpolations. Because of this, this final paper analyses the dependence of semi – Lagrangian scheme on the way of interpolating, for two-dimensional examples.

Accepted by the Scientific Board:

ASB

7.XI 2006.

Defended on:

DE

28.XII 2006.

Thesis defend board:

DB

dr Imre Gut, Assoc. Professor, Fac. Sci. Novi Sad

President:

dr Borivoj Rajković, Assoc. Professor, Fac. Sci. Belgrade

Member:

dr Darko Kapor, Professor, Fac. Sci. Novi Sad (supervisor)

Kratka biografija



Jelena Matić, rođena je 02. septembra 1982. godine kao prvo od dvoje dece u porodici Bogdana Matića i Ilone Olah Matić u Zrenjaninu, gde je 1989. godine upisala osnovnu školu "2. Oktobar". Godine 1997. završila je osnovnu školu, i pri tom stekla *Vukovu diplomu* i diplome iz *Muzičkog i Fizičkog vaspitanja*. Iste godine, upisala je *Zrenjaminsku gimnaziju*. Kroz taj period svog školovanja postaje član omladinskog hora "Koča Kolarov" iz Zrenjanina. Gimnaziju završava 2001. godine i upisuje Prirodno – matematički fakultet u Novom Sadu, odsek: fizika, smer: fizika, meteorologija i modeliranje životne sredine.

Diplomira 2006. godine sa prosečnom ocenom 8,80 na temi: "Integracija primitivnih jednačina za atmosferu semi – Lagranževskim pristupom".

