UNIVERZITET U NOVOM SADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Jasmina S. Tekić

SUPERSIMETRIJA

mentor: dr. Darko Kapor

Institut za fiziku

Novi Sad, 1988 godine

Za uspešan tok i završetak studija izražavam zahvalnost:

pr. doktoru Darku Kaporu,
profesorima i nastavnom osoblju
PMF - instituta za fiziku u
Novom Sadu

Posebno želim da se zahvalim dr. Milanu Damnjanoviću sa PMF - odsek za fiziku u Beogradu na svesrdnoj pomoći.

SADRŽAJ

I UVOD

Ovaj rad ima za cilj da predstavi čitaocu osnovne ideje supersimetrije i obrazloži potrebe za njenim uvođenjem. Ono što je ovde prezentirano je samo mali deo jedne velike teorije, teorije supersimetrije.

U prvom delu ovog rada predstavljeni su generatori supersimetrije, njena algebra i reprezentacija. U drugom delu razmotrena je primena u kvantnoj mehanici. Naravno, ovo nije jedina mogućnost primene supersimetrije.

Bolje razumevanje ove teorije i svako bavljenje njom zahteva isvesna znanja iz teorije grupa [1].

II UVOĐENJE SUPERSIMETRIJE

1. POČECI

Supersimetrija predstavlja jedan potpuno nov vid simetrije fizičkog sistema. Po definiciji, to je simetrija između bozona i fermiona. Do pojave supersimetrije, bozoni i fermioni su smatrani za čestice koje imaju potpuno različitu prirodu, bez ikakve veze među njima. Međutim, ova nova teorija je uspela da objedini ova dva naizgled potpuno različita sveta.

Vratimo se na početak i pogledajmo kako su se uopšte javile prve ideje o supersimetriji. Kada govorimo o simetriji ne mislimo samo na geometrijske već i na ostale – unutrašnje – simetrije.

Grupu simetrija hamiltonijana nekog fizičkog sistema čini skup svih unitarnih oprreratora koji komutiraju sa hamiltonijanom sistema:

$$UHU^{+}=H \ , \tag{1.1}$$

$$[U,H]=0 \ .$$

Skup svih ovakvih operatora čini grupu simetrije hamiltonijana, a grupu simetrije svih fizičkih sistema predstavlja Poincare-ova grupa Π (postulat o relativističkoj invarijantnosti) . Unitarne reprezentacije Poincare – ove grupe su razložive, pa se nalaze odgovarajuće unitarne ireducibilne reprezentacije$D(n)$, koje su okarakterisane sa dva indeksa (m,s). Indeks m odgovara masi i naziva se još i indeks orbite, pri tom je $m \geqslant 0$, a drugi indeks odgovara spinu. Klasifikacijom unitarnih ireducibilnih reprezentacija dobili bismo klasifikaciju različitih elementarnih fizičkih sistema tj. elementarnih čestica i to samo ako ne bi imali unutrašnju simetriju. Međutim, na osnovu osobina poznatih čestica pretpostavljeno je postojanje unutrašnjih simetrija. Ove teorije su dobile kasnije eksperimentalnu potvrdu. Cilj kome teži teorija supersimetrije je jedinstven opis fermiona i bozona.

2. COLLEMAN - MANDULA -"NO GO" TEOREM

Uzmimo sada da je Π podgrupa neke veće Lie - jeve grupe i razmotrimo jedan od najjačih teorema u fizici elementarnih čestica. Colleman-Mandula teorem:**Lie-jeva grupa simetrije fizičkog sistema je uvek direktni proizvod Poincare-ove grupe i neke konačno dimenzionalne kompaktne grupe.** Ovaj teorem apriori dozvoljava samo takve simetrijske transformacije kojima je odgovarala Lie - jeva grupa sa realnim parametrima. Bilo je potpuno nemoguće drugačije netrivijalno sjediniti simetriju prostor - vremena sa unutrašnjom simetrijom, a iz toga proizilazi, da svaki ireducibilni multiplet grupe simetrije ne može sadržati čestice sa različitom masom ili spinom.

Da bi smo se uverili u to razmotrićemo Lie-jevu algebru grupe simetrije, koja je dozvoljena.

Generatore po C - M teoremu čine četiri momenta P_μ (generatori translacija), šest Lorentz - ovih generatora $M_{\mu\nu}$ i izvestan broj hermitskih generatora unutrašnje simetrije B_r.

Algebra Poincare - ove grupe je:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \ , \tag{2.1}$$

$$[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho) \ ,$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - \eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho}] \ .$$

Za grupu unutrašnje simetrije važi:

$$[B_r, B_s] = iC_{rs}{}^{t}B_t \ . \tag{2.2}$$

Za ukupnu Lie-jevu grupu, pošto je ova po C-M teoremu proizvod Π i grupe unutrašnje simetrije imamo:

$$[B_r, P_\mu] = [B_r, M_{\mu\nu}] = 0 \ . \qquad (2.3)$$

Kazimir - ovi operatori Poincare - ove grupe (čije različite svojstvene vrednosti prebrojavaju različite ireducibilne reprezentacije Poincare-ove grupe) su:

$$P^2 = P_\mu P^\mu \ , \quad (2.4)$$

$$W^2 = W_\mu W^\mu \ ,$$

gde je

$$W^\mu = -\frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma} \qquad (2.5)$$

vektor Pauli - Lubanskog. W^2 je generalisani spinski operator, a P^2 operator mase. Za česticu mase različite od 0 je u celom sopstvenom referentnom sistemu:

$$P_\mu = (m,0,0,0) \ , \qquad (2.6)$$

pa je

$$W^2 = -m^2 L^2 \qquad \text{i} \qquad P^2 = m^2 \qquad (2.7)$$

gde je

$$L = (L_1 = M_{23}, L_2 = M_{31}, L_3 = M_{12}) \qquad (2.8)$$

- angularni moment.

Iz (2.3) je:

$$[B_r, P^2] = 0 \ , \qquad (2.9)$$

$$[B_r, W^2] = 0 \ .$$

Kada je m=0 imamo

$$W_\mu = \lambda P_\mu \ , \qquad (2.10)$$

gde je λ ceo ili poluceo broj i

$$P^2=W^2=0 \quad , \tag{2.11}$$

tako da je

$$[B_r, P_\mu]=[B_r, W_\mu]=0 \quad . \tag{2.12}$$

Odavde se vidi da u svakom multipletu čestice moraju imati isto m i s.

Prema tome, grupa simetrije čiji će ireducibilni multipleti sadržavati čestice koje imaju različitu masu ili spin ne može biti direktni proizvod Π i unutrašnje grupe. Svi pokušaji da se takva grupa nađe među Lie – jevim grupama su propali, a C – M teoremom je konačno pokazano da je to i nemoguće.

Ovde je demonstriran C-M teorem (bez dokaza), kao i odgovarajuće posledice.

70 – tih godina javlja se ideja o supersimetriji od strane Gol'fand – a i Likhtman – a [2], kasnije Volkov – a i Akulov – a [3], a 1973. J. Wess i B. Zumino [4] daju model interakcije dve čestice sa različitim s ($s_1=1/2$ i $s_2=0$), koje su pri tom bile sadržane u istom multipletu, čime je prvi put uspostavljena veza jedinstven opis fermiona i bozona.

Za ovakav korak bilo je potrebno napustiti pretpostavku o Lie – jevim grupama kao grupama simetrije i uvesti supersimetriju.

III GENERATORI

3. GENERATOR SIMETRIJE

Generatorom simetrije nazivamo onaj operator u Hilbert - ovom prostoru koji komutira sa S - matricom, tj. ostavlja fiziku nepromenjenom, a zamenjuje ulazno ili izlazno karakteristično stanje drugim.

Ovakav operator se u opštem slučaju predstavlja kao:

$$G=\sum_{ij}\int d^3p\,d^3q\,a_i^+(\vec{p})K_{ij}(\vec{p},\vec{q})a_j(\vec{q}) \quad , \tag{3.1}$$

ili korišćenjem simbola * kao:

$$G=a^+*K*a \tag{3.2}$$

gde su a^+ i a kreacioni i anihilacioni operatori, a K integralno jezgro.

Pošto ovaj operator komutira sa S - matricom možemo pisati:

$$[S,G]=0 \quad \Leftrightarrow \quad SG|in\rangle=GS|in\rangle \ . \tag{3.3}$$

G se može prikazati kao zbir dva člana, od kojih prvi - B - karakteriše bozon - bozon i fermion - fermion interakciju i naziva se boze - generator (parni), a drugi - F - interakciju bozon - fermion i fermion - bozon i naziva fermi - generator (neparni). Odavde je:

$$G=B+F \quad , \tag{3.4}$$

pri čemu je:

$$B=b^+*K_{bb}*b+f^+*K_{ff}*f \quad , \tag{3.5}$$

$$F=f^{+}*K_{fb}*b+b^{+}*K_{bf}*f \quad ,$$

gde su b i f boze odnosno fermi operatori, koji zadovoljavaju odgovarajuće komutacione odnosno antikomutacione relacije (pravila kanonske kvantizacije):

$$[b_i(\vec{p}),b_j^{+}(\vec{q})]=\delta_{ij}\cdot\delta^{3}(\vec{p}-\vec{q}) \quad , \tag{3.6}$$

$$[b,b]=[b^{+},b^{+}]=0$$

i

$$\{f_i(\vec{p}),f_j^{+}(\vec{q})\}=\delta_{ij}\cdot\delta^{3}(\vec{p}-\vec{q}) \quad , \tag{3.7}$$

$$\{f,f\}=\{f^{+},f^{+}\}=0 \quad ,$$

$$[b,f]=[b,f^{+}]=[b^{+},f]=[b^{+},f^{+}]=0 \quad . \tag{3.8}$$

Ako uvedemo "gradirani komutator" [...} gde za fermione imamo {...} , a za slučaj bar jednog bozona [...] možemo napisati pravilo kanonske kvantizacije:

$$[a,a^{+}\}=1 \quad , \tag{3.9}$$

$$[a,a\}=[a^{+},a^{+}\}=0.$$

4. ALGEBRA GENERATORA SIMETRIJE

Razmotrimo sada algebru generatora simetrije. Neka su B^1 i B^2 boze - generatori, tada je:

$$[B^1,B^2]=B^3 \tag{4.1}$$

takođe boze generator. Ako iskoristimo pravilo (3.9) kao i identitet:

$$[ab,c]=a[b,c]+[a,c]b=a\{b,c\}-\{a,c\}b \quad , \tag{4.2}$$

dobijamo

$$K^3_{bb}=K^1_{bb}*K^2_{bb}-K^2_{bb}*K^1_{bb}\ , \tag{4.3}$$

$$K^3_{ff}=K^1_{ff}*K^2_{ff}-K^2_{ff}*K^1_{ff}\ .$$

Za slučaj boze i fermi generatora imamo:

$$[F^1,B^2]=F^3\ , \tag{4.4}$$

gde je

$$K^3_{fb}=K^1_{fb}*K^2_{bb}-K^2_{ff}*K^1_{fb}\ , \tag{4.5}$$

$$K^3_{bf}=K^1_{bf}*K^2_{ff}-K^2_{bb}*K^1_{bf}\ .$$

Ako imamo dva fermi - generatora, onda boze - generator možemo dobiti kao:

$$\{F^1,F^2\}=B^3\ , \tag{4.6}$$

gde na osnovu (3.9) i identiteta:

$$\{ab,c\}=a\{b,c\}-[a,c]b=a[b,c]+\{a,c\}b\ , \tag{4.7}$$

imamo

$$K^3_{bb}=K^1_{bf}*K^2_{fb}+K^2_{bf}*K^1_{fb}\ , \tag{4.8}$$

$$K^3_{ff}=K^1_{fb}*K^2_{bf}+K^2_{fb}*K^1_{bf}\ .$$

Komutator dva neparna fermi - generatora ne razmatramo, jer on nije bilinearan po čestičnim operatorima, pa samim tim nije element algebre tj. generator simetrije.

Na osnovu prethodno navedenog možemo prikazati strukturu algebre kao:

$$[P,P]=P\ , \tag{4.9}$$

$$[P,N]=N \ ,$$

$$\{N,N\}=P \ ,$$

gde su P i N oznake za parni odnosno neparni generator. Poslednji izraz se može napisati u obliku:

$$[G^1,G^2\}=G^3 \ , \qquad (4.10)$$

gde je G generator simetrije.

5. GENERATOR SUPERSIMETRIJE

Da bi odredili generator supersimetrije vratimo se na teorem Coleman - Mandula iz kojeg možemo zaključiti da generatori supersimetrije moraju biti fermi tipa.

Različite vrednosti spina u istom ireducibilnom multipletu su moguće samo ukoliko imamo takve simetrijske operacije, čiji generatori zadovoljavaju antikomutacione relacije. Videli smo da Lie - jeve grupe nisu mogle dati ireducibilne multiplete unutar kojih će s biti različito , pa je uveden pojam supergrupe, odnosno stvorene je teorija supersimetrije.Pokazalo se i da se veza između simetrije prostor - vremena i unutrašnje simetrije može uspostaviti preko fermionskih operatora. Ovakav operator, označe sa Q , fermionsko stanje prevodi u bozonsko i obrnuto, tako da imamo sledeće supersimetrijske transformacije:

$$Q|f\rangle=|b\rangle \ , \qquad (5.1)$$

$$Q|b\rangle=|f\rangle \ .$$

Operator Q neće biti invarijantan na rotaciju, jer se bozoni i fermioni različito ponašaju pri rotaciji. Neka nam unitarni operator U iz Hilbert - ovog prostora predstavlja rotaciju konfiguracionog prostora oko neke ose za 2π. Tada za stanje fermiona odnosno bozona važi:

$$U|f\rangle=-|f\rangle\ ,\qquad U|b\rangle=|b\rangle\ . \tag{5.2}$$

Koristeći (5.1) možemo napisati:

$$UQ|b\rangle=UQU^{-1}U|b\rangle=U|f\rangle\ ,\qquad UQ|f\rangle=UQU^{-1}U|f\rangle=U|b\rangle\ . \tag{5.3}$$

Na osnovu (5.2) mora biti:

$$UQU^{-1}=-Q\ . \tag{5.4}$$

Videli smo da Q menja znak i da nije invarijantan na rotaciju koordinate za 2π. Ovakvo ponašanje važi ne samo kod rotacije, već i kod ma kakve Lorentz - transformacije, što znači da Q ne komutira sa Lorentz - transformacijama.

Međutim, Q je invarijantan na translaciju, i ako uzmemo operatore energije - E i momenta - P koji generišu prostorno - vremensku translaciju imamo:

$$[Q,E]=[Q,P]=0\ , \tag{5.5}$$

što znači da je potpuno svejedno da li koordinate transliramo pre ili posle supersimetrične transformacije.

Iako komponente operatora Q - spinskog operatora nisu hermitski operatori, antikomutator:

$$\{Q,Q^{+}\}=QQ^{+}+Q^{+}Q \tag{5.6}$$

je pozitivni operator (hermitski operator sa nenegativnim svojstvenim vrednostima). Naime za svaki vektor $|x\rangle$ važi:

$$\langle x|QQ^{+}|x\rangle+\langle x|Q^{+}Q|x\rangle=|Q^{+}|x\rangle|^{2}+|Q|x\rangle|^{2}\geq 0\ , \tag{5.7}$$

pri čemu je jednakost zadovoljena samo za $|x\rangle=0$. Koristeći operatore E i P detaljnom grupno teorijskom analizom se pokazuje da se $\{Q,Q^{+}\}$ može izraziti kao linearna kombinacija ovih operatora:

$$\{Q,Q^{+}\}=\alpha E+\beta P \ , \tag{5.8}$$

gde su α i β koeficijenti proporcionalnosti. Vidimo da sa desne strane stoje generatori prostorno - vremenske translacije, a sa druge antikomutator generatora supersimetrijske transformacije. Ova veza među njima, tj. ova relacija, zauzima centralno mesto u teoriji supersimetrije. Ako izraz (5.8) prosumiramo po svim generatorima supersimetrije dobijamo da je:

$$\sum_{Q}\{Q,Q^{+}\}\sim E \ . \tag{5.9}$$

Q je spinski operator . Spin u četvoro - dimenzionom prostoru ima četiri komponente znači da totalni broj Q-ova mora biti 4N. Tako se u teoriji uvodi pojam:

teorije N=1-supersimetrija sa komponentama $Q_{\alpha},\alpha=1,...,4$
teorije N-proširena supersimetrija sa komponentama $Q_{\alpha i}$, i=1,...,N .

Na osnovu relacija (5.8) i (5.9) sada imamo

$$\{Q_{i},(Q_{j})^{+}\}=\delta_{ij}(\alpha E+\beta P) \tag{5.10}$$

i

$$\sum_{\alpha=1}^{4}\{Q_{\alpha i},(Q_{\alpha i})^{+}\}\sim E \qquad \text{za svako i.}$$

Definišimo sada operatore Q_{+} i Q_{-} za koje važi:

$$Q_{+}|n_{B},n_{F}\rangle\sim|n_{B}-1,n_{F}+1\rangle,\ n_{B}=0,1,... \ ;\ n_{F}=0,1 \tag{5.11}$$

$$Q_{-}|n_{B},n_{F}\rangle\sim|n_{B}+1,n_{F}-1\rangle,$$

gde Q_{+} prevodi bozon u fermion, a Q_{-} obrnuto. Q_{+} i Q_{-} se mogu predstaviti kao:

$$Q_+=qb^-f^+ \,, \tag{5.12}$$

$$Q_-=qb^+f^- \,,$$

gde je q proizvoljna konstanta. Oba operatora zadovoljavaju uslov nilpotentnosti:

$$Q_+^2=Q_-^2=0 \,. \tag{5.13}$$

Ako definišemo sledeće operatore:

$$Q_1=Q_++Q_- \,, \tag{5.14}$$

$$Q_2=-i(Q_+-Q_-) \,.$$

Imamo da je:

$$\{Q_1,Q_2\}=0 \,, \tag{5.15}$$

$$Q_1^2=Q_2^2=\{Q_+,Q_-\} \,.$$

Ako je H hamiltonijan sistema, **uslov supersimetričnosti** je jednakost:

$$[H,Q]=0 \,. \tag{5.16}$$

Možemo najjednostavnije ovakav hamiltonijan napisati kao:

$$H=Q_1^2=Q_2^2=\{Q_+,Q_-\} \,. \tag{5.17}$$

Iz prethodnih relacija sledi:

$$\{Q_i,Q_k\}=2\delta_{ik}H \,, \qquad i,k=1,2 \tag{5.18}$$

$$[Q_i,H]=0 \,.$$

Na početku smo videli da grupu simetrija hamiltonijana nekog sistema čini skup unitarnih operatora, koji komutiraju sa njim. U ovom slučaju radi se o operatoru - Q.

Tako smo dobili novi vid dinamičke simetrije - supersimetrije.
Na kraju zaključujemo:

-pod supersimetrijom podrazumevamo:

1. takve transformacije koje prevode fermione u bozone obrnuto, pri čemu je H invarijantno;

2. algebra generatora supersimetrije je opisana i antikomutacionim relacijama.

* * *

Korišćenjem Lie - jeve algebre dalje će biti prikazana algebra supersimetrije.

IV ALGEBRA

6. LIE - JEVA ALGEBRA

Pre nego počnemo govoriti o algebri u supersimetriji recimo nešto o Lie - jevoj algebri.

definicija 1:

Lie - jeva algebra je algebra u kojoj se množenje (proizvod) elemenata x i y označava kao $[x,y]$ i naziva komutator i ima sledeće osobine:

1. antisimetričnost:

$$\forall x,y \in L \qquad [x,y]=-[y,x] \ , \tag{6.1}$$

2. zadovoljava Jacobi - jev identitet:

$$\forall x,y,z \in L \quad [x,[y,z]]+[y,[z,x]]+[z,[x,y]]=0 \ . \tag{6.2}$$

definicija 2:

Neka je V vektorski prostor nad poljem F' i L algebra nad potpoljem F. Reprezentacija algebre L u vektorskom prostoru V je homomorfizam D algebre L u skup $gl(V)$. $D(L)$ je ireducibilna ako u V nema zajedničkih invarijantnih podprostora za $D(L)$, u suprotnom je reducibilna.

Vratimo se sada na boze - odnosno fermi - operatore, čije su oznake B i F i prikažimo ukratko osnovne osobine Lie - jeve algebre. Imamo sledeće komutacione relacije:

$$[B_i,B_j]=ic_{ij}{}^{k}B_k \ , \tag{6.3}$$

$$[F_\alpha,B_i]=s_{\alpha i}{}^{\beta}F_\beta \ ,$$

$$\{F_\alpha, F_\beta\} = \gamma_{\alpha\beta}{}^{i} B_i \quad ,$$

gde su c i γ strukturne konstante za koje važe uslovi simetrije:

$$c_{ij}{}^{k} = -c_{ji}{}^{k} \quad , \tag{6.4}$$

$$\gamma_{\alpha\beta}{}^{i} = \gamma_{\beta\alpha}{}^{i}$$

i uslovi koji slede iz Jacobi - jevog identiteta:

$$[[G^1, G^2\}, G^3\} + [[G^2, G^3\}, G^1\} + [[G^3, G^1\}, G^2\} = 0 \quad . \tag{6.5}$$

Za različite kombinacije B i F operatora Jacibi - jev identitet postaje:

$$[[B_i, B_j], B_k] + [[B_j, B_k], B_i] + [[B_k, B_i], B_j] = 0 \quad , \tag{6.6}$$

$$[[F_\alpha, B_i], B_j] + [[B_i, B_j], F_\alpha] + [[B_j, F_\alpha], B_i] = 0 \quad ,$$

$$[\{F_\alpha, F_\beta\}, B_i] + [\{F_\beta, B_i\}, F_\alpha] + [\{B_i, F_\alpha\}, F_\beta] = 0 \quad ,$$

$$[\{F_\alpha, F_\beta\}, F_\gamma] + [\{F_\beta, F_\gamma\}, F_\alpha] + [\{F_\gamma, F_\alpha\}, F_\beta] = 0 \quad ,$$

pri čemu imamo:

$$(s_i)_\alpha{}^{\delta} \gamma_{\delta\beta}{}^{j} + (s_i)_\beta{}^{\delta} \gamma_{\alpha\delta}{}^{j} - \gamma_{\alpha\beta}{}^{k} (c_i)_k{}^{j} = 0 \quad , \tag{6.7}$$

$$\gamma_{\alpha\beta}{}^{i} s_{\gamma i}{}^{\delta} + \gamma_{\beta\gamma}{}^{i} s_{\alpha i}{}^{\delta} + \gamma_{\gamma\alpha}{}^{i} s_{\beta i}{}^{\delta} = 0 \quad .$$

Odgovarajuće reprezentacije su date matricama:

$$r(B_i) = \begin{bmatrix} c_i & 0 \\ 0 & s_i \end{bmatrix} \quad , \tag{6.8}$$

$$r(F_\alpha) = \begin{bmatrix} 0 & \Sigma_\alpha \\ \Gamma_\alpha & 0 \end{bmatrix} \quad ,$$

gde su matrični elementi dati kao:

$$(c_i)_j{}^k = i c_{ji}{}^k \ ,\qquad (6.9)$$

$$(\Gamma_\alpha)_\beta{}^{i'} = \gamma_{\beta\alpha}{}^{i'} \ ,$$

$$(s_i)_\alpha{}^\beta = S_{\alpha i}{}^\beta ,$$

$$(\Sigma_\alpha)_i{}^\beta = S_{i\alpha}{}^\beta \ .$$

Matrica c_i reprezentuje Lie - jevu podalgebru B - operatora, a matrica s_i takođe reprezentuje Lie - jevu podalgebru B - operatora (to je reprezentacija Lie - jeve podalgebre koja ne mora biti ireducibilna). $\gamma_{\alpha\beta}^{i'}$ su numerički tenzori.

7. ALGEBRA U SUPERSIMETRIJI

U prethodna dva poglavlja smo se upoznali sa supersimetričnim generatorima Q i osnovama Lie - jeve algebre. Jacobi - jevi identiteti, koje smo videli, povezuju osobine fermionskog dela algebre sa bozonskim, dok teorem C - M daje stroga ograničenja za fermionske generatore [5].

Videli smo u poglavlju 5. da komponente operatora Q nisu hermitski operatori ali je $\{Q,Q^+\}$ hermitski operator sa nenegativnim svojstvenim vrednostima gde važi $\langle x|\{Q,Q^+\}|x\rangle \geqslant 0$ i jednako nuli za $|x\rangle=0$. Ako ne postoji element bozonskog podskupa generatora tada zahtevamo da $\{Q,Q^+\}$ ima odgovarajuće osobine, tj. da je Q=0 [5].

Q opšte govoreći mora nositi reprezentaciju grupe bozonske simetrije. Ako reprezentacija Lorentz - ove grupe (j,j') odgovara Q, tada će $\{Q,Q^+\}$ sadržati reprezentaciju $(j+j',j+j')$. Jedini bozonski generator koji je u ovakvoj reprezentaciji je P_μ i njemu odgovara $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, što znači da Q mora biti u jednoj od dve 2-dimenzionalne, tzv. fundamentalne reprezentacije $(\frac{1}{2},0)$ ili $(0,\frac{1}{2})$ algebre Lorentz - ove grupe.

Sada ćemo razmotriti odgovarajuće komutacione relacije između bozonskih generatora i Q, kao i odgovarajuće antikomutacione relacije između Q-ova.

Uzimajući u obzir (2.1), (2.2), (2.3) i (4.9) imamo:

$$[Q_{\alpha i}, M_{\mu\nu}] = \frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_{\alpha}^{\ \beta} Q_{\beta i} \ , \tag{7.1}$$

$$[\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^{i}, M_{\mu\nu}] = -\frac{1}{2}\bar{Q}_{\dot{\beta}}^{i} \ (\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\beta}}_{\ \dot{\alpha}} \ ,$$

gde je korišćenjem spinske notacije $\alpha=1,2$, a $i=1,...,N$. Znači ako je Q generator simetrije, tada to mora biti i Q^{+}, odavde $(Q_{\alpha i})^{+}$ mora biti u kompleksno konjugovanoj reprezentaciji i na taj način je:

$$(Q_{\alpha i})^{+} = \bar{Q}_{\dot{\alpha}}^{\ i} . \tag{7.2}$$

$\frac{1}{2}\sigma_{\mu\nu}$ i $\frac{1}{2}\bar{\sigma}_{\mu\nu}$* su hermitske matrice 2x2 koje generišu dve neekvivalentne reprezentacije ($\frac{1}{2}$,0) i (0, $\frac{1}{2}$) univerzalno prekrivajuće grupe Lorentz-grupe. Njihova eksplicitna forme je:

$$\begin{aligned} \sigma^{12} &= \sigma^{3} \ , \\ \sigma^{23} &= \sigma^{1} \ , \\ \sigma^{31} &= \sigma^{2} \ , \end{aligned} \tag{7.3}$$

$$\frac{i}{2}\varepsilon_{\mu\nu\kappa\lambda}\sigma^{\kappa\lambda} = \sigma_{\mu\nu} \ , \tag{7.4}$$

$$\bar{\sigma}_{\mu\nu} = (\sigma_{\mu\nu})^{+} \ .$$

Za dato P_{μ} imamo relacije:

$$[Q_{\alpha i}, P_{\mu}] = [\bar{Q}_{\dot{\alpha}}^{i}, P_{\mu}] = 0 \ . \tag{7.5}$$

Znamo da je B - hermitski operator unutrašnje simetrije, Q u opštem slučaju takođe nosi neku reprezentaciju unutrašnjih simetričnih generatora:

$$[Q_{\alpha i}, B_{r}] = (b_{r})_{i}^{\ j} Q_{\alpha j} \ , \tag{7.6}$$

---

* $\sigma_{\mu\nu}$ su Pauli-jeve matrice.

$$[\bar{Q}^{i}_{\dot{\alpha}}, B_r] = -\bar{Q}^{j}_{\dot{\alpha}} (b_r)_j{}^i \ .$$

Unutrašnja grupa simetrije je kompaktna i uvek možemo izabrati takvu linearnu kombinaciju Q – ova koja će dati hermitsku reprezentaciju matrica $b_r = b_r^+$.

Najmanja moguća grupa unutrašnje simetrije koja deluje netrivijalno na Q je unitarna grupa U(N), gde je N dimenzija prostora.

Dvostruki indeks kod Q odražava direktan proizvod struktore grupe bozonske simetrije tako da α i $\dot{\alpha}$ pripada Poincare – ovoj grupi a i je unutrašnji simetrični indeks.

Pošto smo razmotrili komutacione relacije, pređimo sada na odgovarajuće antikomutacione relacije.

Najopštije možemo pisati:

$$\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = 2\,\varepsilon_{\alpha\beta} z_{ij} \ , \tag{7.7}$$

$$\{\bar{Q}^{i}_{\dot{\alpha}}, \bar{Q}^{j}_{\dot{\beta}}\} = -2\,\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}} z^{ij} \ ,$$

gde su z_{ij} i z^{ij} linearne kombinacije generatora unutrašnje simetrije, sa dobro definisanim osobinama i otud komutiraju sa P_μ. Poznate su kao "centralni naboj" i postoje samo za N>1, za N=0 imamo da je izraz (7.7) jednak nuli.

z_{ij} možemo prikazati kao:

$$z_{ij} = a_{ij}{}^r B_r \ . \tag{7.8}$$

Odavde za P_μ i $M_{\mu\nu}$ imamo da je:

$$[z_{ij}, \text{ bilo koji}] = 0 \ . \tag{7.9}$$

Na osnovu (7.6) i (7.7) sledi:

$$[z_{ij}, B_r] = (b_r)_i{}^k z_{kj} + (b_r)_j{}^k z_{ik} \ , \tag{7.10}$$

a odavde na osnovu (7.8):

$$[z_{ij}, z_{kl}] = a_{kl}{}^r (b_r)_i{}^k z_{kj} + a_{kl}{}^r (b_r)_j{}^k z_{ik} \ , \tag{7.11}$$

što znači da z_{ij} obuhvata neku invarijantnu podalgebru unutrašnje simetrične algebre. $[\bar{Q},z_{ij}]$ možemo napisati kao sumu $[Q,P_\mu]$ gde je:

$$a_{ij}{}^{r}(b_{r})_{k}{}^{l}=0 \ , \qquad (7.12)$$

a odatle

$$[Q,z_{ij}]=[z_{ij},z_{kl}]=0 \ .$$

z_{ij} se naziva centralni naboj. Kako se $\{Q,Q\}$ ne menja pri promeni αi i βj, antisimetrija $\varepsilon_{\alpha\beta}$ podrazumeva:

$$z_{ij}=-z_{ji} \quad \text{tj.} \quad a_{ij}{}^{r}=-a_{ji}{}^{r} \ , \qquad (7.13)$$

gde su isključeni centralni naboji za N=1. Znači za svaki postojeći centralni naboj moraju postojati različite antisimetrične NxN matrice a^r, koje su invarijantne na unutrašnju simetričnu grupu:

$$(b^{*})_{i}{}^{k}a_{kj}{}^{r}+(b^{*})_{j}{}^{k}a_{ik}{}^{r}=0 \ . \qquad (7.14)$$

Najmanja grupa koja nosi centralni naboj je USp(N) - kompaktna simplektička podgrupa u Sp(N).

Razmotrimo još antikomutator $\{Q,Q\}$. Znajući da $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ odgovara $\{Q,Q^{+}\}$, zaključujemo da $\{Q,Q^{+}\}$ mora biti proporcionalno sa P_μ:

$$\{Q_{\alpha i},\bar{Q}^{j}_{\beta}\}=2\delta_{i}^{j}(\sigma^{\mu})_{\alpha\beta}P_{\mu} \ . \qquad (7.15)$$

Numerička konstanta sa desne strane mora biti tenzor Lorentz-ove grupe. σ su matrice 2x2 ili njihovi multipleti:

$$\sigma^{\mu}=(1,\vec{\sigma}) \ . \qquad (7.16)$$

Normirali smo Q-ove tako da apsolutna vrednost faktora u (7.15) iznosi 2 (σ^{μ}je data), mada je možda više korišćeno i prirodnije normirati na jedinicu. Znak sa desne strane je određen zahtevom da bi $E=P_0$ bio strogo pozitivan operator. Za ma koju vrednost indeksa i imamo:

$$0\leqslant\sum_{\alpha=1}^{2}|Q_{\alpha i}|^2=\mathrm{tr}\,\sigma^\mu P_\mu=2P_0\ . \tag{7.17}$$

Znači da je energija zaista strogo pozitivna za ma koji izbor znaka.

* * *

Upoznali smo se sa generatorima supersimetrije kao i sa algebrom. Podsetimo se još jednom, za dato P_μ, $M_{\mu\nu}$ i B_r imali smo sledeće komutacione relacije:

$$[P_\mu,P_\nu]=0\ ,$$

$$[P_\mu,M_{\rho\sigma}]=i(\eta_{\mu\rho}P_\sigma-\eta_{\mu\sigma}P_\rho)\ ,$$

$$[M_{\mu\nu},M_{\rho\sigma}]=i(\eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}-\eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}-\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma}+\eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho})\ ,$$

$$[B_r,B_s]=ic_{rs}{}^tB_t\ ,$$

$$[B_r,P_\mu]=[B_r,M_{\mu\nu}]=0\ ,$$

$$[Q_{\alpha i},P_\mu]=[\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}},P_\mu]=0\ ,$$

$$[Q_{\alpha i},M_{\mu\nu}]=\frac{1}{2}(\sigma_{\mu\nu})_\alpha{}^\beta Q_{\beta i}\ ,$$

$$[\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}},M_{\mu\nu}]=-\frac{1}{2}\bar{Q}^i_{\dot{\beta}}\ (\bar{\sigma}_{\mu\nu})^{\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}}\ ,$$

$$[Q_{\alpha i},B_r]=(b_r)_i{}^jQ_{\alpha j}\ ,$$

$$[\bar{Q}^i_{\dot{\alpha}},B_r]=-\bar{Q}^j_{\dot{\alpha}}(b_r)_j{}^i\ .$$

Odgovarajuće antikomutacione relacije su:

$$\{Q_{\alpha i}, \bar{Q}^{j}{}_{\dot\beta}\} = 2\,\delta_i{}^j (\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}\, P_\mu \, ,$$

$$\{Q_{\alpha i}, Q_{\beta j}\} = 2\,\varepsilon_{\alpha\beta} Z_{ij} \, , \qquad Z_{ij} = a_{ij}{}^r B_r \, ,$$

$$\{\bar{Q}^{i}_{\dot\alpha}, \bar{Q}^{j}{}_{\dot\beta}\} = -2\,\varepsilon_{\dot\alpha\dot\beta} Z^{ij} \, , \qquad Z^{ij} = (Z_{ij})^{+}$$

i

$$[Z_{ij}, \text{bilokoji}] = 0 \, .$$

Na kraju možemo zaključiti da u supersimetriji postoji na izvestan način "veća sloboda".

Ograničenja koja postavlja C – M teorem sada su znatno popustila. Za spinski naboj Q sada imamo:

$$[Q, W^2] \neq 0 \, ,$$

$$[Q, P^2] = 0 \, .$$

Znači:

svaki supermultiplet sadrži čestice sa različitim spinom ali istom masom, tj. uvek moramo imati degeneraciju po masi.

* * *

Spektri elementarnih čestica, koje danas znamo, nisu potvrdili ovu teoriju (nije potvrđeno postojanje superpartnera) ali je ova teorija, kao matematička teorija, našla svoju primenu u teoriji supergravitacije i superstringova.

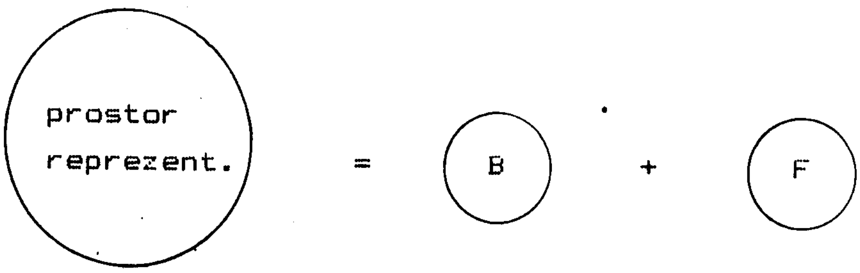
V REPREZENTACIJE

8. REPREZENTACIJE U SUPERSIMETRIJI, PRAVILO "FERMION=BOZON"

Teorija supersimetrije radi sa skupovima polja ili prostorom koji nosi reprezentaciju jedne od opisanih supersimetričnih algebri (gradiranih Lie - jevih algebri). (Reprezentacija se sastoji od linearnih operatora u nekom vektorskom prostoru koji ima iste strukturne osobine kao i objekti koje reprezentuje).

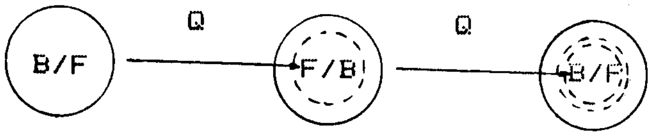
Razmotrićemo neka opšta svojstva reprezentacija.

Kako svaka supersimetrična transformacija prevodi bozone u fermione i obrnuto, prostor reprezentacije se može predstsviti kao zbir bozonskog i fermionskog podprostora:



Parni elementi super algebre tj. boze generatori P_{μ}, $M_{\mu\nu}$ i B_r preslikavaju podprostore u same sebe, dok supersimetrični generatori vrše preslikavanje bozonskog potprostora u fermionski i obrnuto:

Za date supersimetrične generatore Q i Q smo videli da je $\{Q,\bar{Q}\}=2\sigma^{\mu}P_{\mu}$, što znači da imamo preslikavanje jednog tipa potprostora u drugi i zatim ponovo preslikavanje u prostor koji je ekvivalentan prvom:



Znači da dejstvom reprezentacije $r(P_\mu)$ translacionog generatora preslikavamo odgovarajući prostor reprezentacije u samoga sebe.

Za multičestična stanja:

$$r(P_\mu)=(E,\vec{p}) \quad , \tag{8.1}$$

gde su E i $\vec{p}$ ukupna energija i moment za dato stanje. Za kvantna polja $\phi(x)$, P_μ je generator translacije $\phi(x) \to \phi(x+y)$ i predstavljen je kao:

$$r(P_\mu)=i\partial_\mu \quad .$$

U oba slučaja dejstvom P_μ "stepeni slobode" se ne gube što znači da bozonski i fermionski prostor reprezentacije algebre supersimetrije, u kojoj je $\ker P_\mu=0$, imaju iste dimenzije.

Naime, iz linearne algebre je poznato da nijedna oblast likova ne može biti veće dimenzije od svog originala. Takođe, pri dvostrukom preslikavanju $Q\bar{Q}+\bar{Q}Q$ ni jedna dimenzija se ne gubi.

Ovo pravilo je poznato kao "fermion-bozon pravilo".

Slučajevi kada je ovo pravilo narušeno su slučaj pridružene reprezentacije superalgebre, tj. kada je $r(P_\mu)=0$ i slučaj "nelinearne reprezentacije" kada uopšte nemamo reprezentacioni vektorski prostor i ne možemo govoriti o dimenziji.

VI SUPERSIMETRIJA U KVANTNOJ MEHANICI

9. UVODNI POJMOVI

Do sada smo se upoznali sa osnovnim idejama supersimetrije pa pogledajmo kako se na osnovu ove teorije mogu posmatrati neki problemi u kvantnoj mehanici (primer LHO). Pri tom ćemo koristiti rezultate poglavlja 5.

Govoreći o generatorima supersimetrije Q_+, Q_- (koji su međusobno adjungovani) Q_1, Q_2 (hermitski operatori) videli smo da

$$[Q_i, H]=0 \qquad (9.1)$$

predstavlja uslov supersimetričnosti hamiltonijana, odnosno novi vid dinamičke simetrije, pri čemu je antikomutator

$$\{Q_i, Q_k\}=2\delta_{ik}H \quad , \quad \text{gde je } i,k=1,2 \qquad (9.2)$$

Iz kvantne mehanike znamo da se stacionarno stanje nekog sistema može opisati talasnom funkcijom ψ_1 , koja je svojstvena H funkcija hamiltonijana. Zbog (9.1) može se ψ_1 odabrati tako da bude i svojstvena funkcija za Q_1 (i H i Q_1 su hermitski operatori):

$$H\psi_1=E\psi_1 \qquad (9.3)$$

$$Q_1\psi_1=q\psi_1$$

Pošto je na osnovu (5.17) $H=Q_1^2=Q_2^2$, sledi:

$$H\psi_1=q^2\psi_1 , \qquad (9.4)$$

$$E=q^2 .$$

Međutim, pošto Q_2 i Q_1 ne komutiraju, ψ_1 nije svojstvena funkcija za Q_2. Stoga

$$\Psi_2 = Q_2 \Psi_1 \ . \tag{9.5}$$

Tada je zbog (9.2), ispunjeno:

$$Q_1 \Psi_2 = Q_1 Q_2 \Psi_1 = -Q_2 Q_1 \Psi_1 = -q Q_1 \Psi_1 = -q \Psi_2 . \tag{9.6}$$

Znajući da je $[H,Q_2]=0$ sledi

$$H \Psi_2 = H Q_2 \Psi_1 = Q_2 H \Psi_1 = q^2 Q_2 \Psi_1 = q^2 \Psi_2 . \tag{9.7}$$

Znači ako je $q \neq 0$ i $E=q^2>0$, na osnovu $H\Psi_1 = q^2 \Psi_1$ i $H\Psi_2 = q^2 \Psi_2$ sledi dvostruka degeneracija energetskih nivoa E. Ovakva stanja opisana sa Ψ_1 i Ψ_2, koja prelaze jedno u drugo pod dejstvom Q nazivaju se **superpartneri**.

Razmotrimo sada neka svojstva parametara transformacije. U opštem slučaju varijaciju nekog operatora A možemo predstaviti kao:

$$\delta A \sim [\varepsilon B, A] \ , \tag{9.8}$$

gde je ε parametar prelaza, a B generator prelaza. U slučaju rotacije za neki ugao φ, imamo operator L kao generator, pa je:

$$\delta q_1 \sim [\varphi L, q_1] \sim \varphi q_2 \ , \tag{9.9}$$

$$\delta q_2 \sim [\varphi L, q_2] \sim \varphi q_1 \ .$$

Analogno možemo pisati i za slučaj supersimetrije:

$$\delta b^+ \sim [\varepsilon Q_+, b^+] = [\varepsilon b^- f^+, b^+] = \varepsilon f^+ [b^-, b^+] = \varepsilon f^+ \ . \tag{9.10}$$

Međutim, problem se javlja kod δf, naime sada imamo:

$$\delta f^- \sim [\varepsilon Q_+, f^-] = [\varepsilon b^- f^+, f^-] = \varepsilon b^- [f^+, f^-] \neq \varepsilon b \ . \tag{9.11}$$

Na koji način komutator $[f^+,f^-]$ zameniti antikomutatorom $\{f^+,f^-\}$ pa da jednakost bude ispunjena?

Upravo stoga parametar prelaza mora imati dva neobična svojstva:

1. $b\varepsilon-\varepsilon b=0$ – komutira s bozonskim operatorima,

2. $f\varepsilon+\varepsilon f=0$ – antikomutira s fermionskim operatorima.

Ako je ovo ispunjeno sledi:

$$\delta b\sim[\varepsilon Q,b]=\varepsilon Qb-b\varepsilon Q=\varepsilon Qb-\varepsilon bQ=\varepsilon[Q,b]\sim\varepsilon f\ , \tag{9.12}$$

$$\delta f\sim[\varepsilon Q,f]=\varepsilon Qf-f\varepsilon Q=\varepsilon Qf+\varepsilon fQ=\varepsilon\{Q,f\}\sim\varepsilon b\ ,$$

Pri tom ε ima sledeća svojstva*:

$$\varepsilon^2=0 \text{ ili } \{\varepsilon,\varepsilon\}=0\ . \tag{9.13}$$

10. HAMILTONIJAN I ENERGETSKI SPEKTAR SUPERSIMETRIČNOG HARMONIJSKOG OSCILATORA

Potražimo odgovarajući izraz za hamiltonijan. Polazeći od (5.17) možemo pisati:

$$H=\{Q_+,Q_-\}=q^2(b^+b^-+f^+f^-)= \tag{10.1}$$

$$=q^2(b^+b^-+\tfrac{1}{2})+q^2(f^+f^--\tfrac{1}{2})=H_B+H_F\ .$$

Znači hamiltonijan možemo predstaviti u obliku zbira hamiltonijana bozonskog i fermionskog oscilatora H_B i H_F:

$$H_B=q^2(b^+b^-+\tfrac{1}{2}),E_B=q^2(n_B+\tfrac{1}{2}),n_B=0,1,\dots,\quad , \tag{10.2}$$

$$H_F=q^2(f^+f^--\tfrac{1}{2}),E_F=q^2(n_F-\tfrac{1}{2}),n_F=0,1\ .$$

---

* Algebra Grasman – a

Transformacija fermiona je oblika: $\tilde{f}=f+\delta f=f+\varepsilon b$,gde je $\tilde{f}^2=0$. Odatle sledi: $0=\tilde{f}^2=(f+\varepsilon b)(f+\varepsilon b)=f^2+\{f,\varepsilon b\}+\varepsilon^2b^2$.
Kako su prva dva člana 0 , mora i $\varepsilon^2b^2=0$, a odavde $\varepsilon^2=0$ tj. $\{\varepsilon,\varepsilon\}=0$. Sledi, za svako i,j $\{\varepsilon_i,\varepsilon_j\}=0$.

Interakciju između bozonskih i fermionskih oscilatora ne užimamo u obzir, no $w=q^2$, tako da su frekvencije ovih oscilatora jednake, što obezbeđuje supersimetričnost hamiltonijana.

U slučaju dva oscilatora u kvantnoj mehanici imamo:

$$H_{2B}=\frac{1}{2}(p_1{}^2+p_2{}^2+w_1{}^2q_1{}^2+w_2{}^2q_2{}^2) \quad , \tag{10.3}$$

gde za $w_1=w_2$ imamo da je H_{2B} invarijantno na rotaciju tj.

$$[H_{2B},L]=0 \quad , \tag{10.4}$$

gde je operator momenta:

$$L=q_1p_2-q_2p_1 \quad . \tag{10.5}$$

Ako uvedemo:

$$q=q_1+i\,q_2 \quad , \tag{10.6}$$

tada rotacijom za ugao imamo:

$$q\rightarrow e^{i\varphi}q \quad . \tag{10.7}$$

Kažemo da L generiše rotaciju u prostoru bozonskih stepeni slobode, pri čemu je parametar prelaza ugao φ.

Analogno ovome u supersimetriji se uvodi operator Q (supernaelektrisanje), za koji smo imali (5.12). Izrazimo L kao:

$$L=-i\,(b_1^+b_2^- - b_2^+b_1^-) \quad , \tag{10.8}$$

odakle je:

$$[H_{2B},b_1^+b_2^-]=0 \quad , \tag{10.9}$$

$$[H_{2B},b_2^+b_1^-]=0 \quad ,$$

pa su integrali kretanja:

$$L_+=b_1^+b_2^- \ , \qquad (10.10)$$

$$L_-=b_2^+b_1^- \ .$$

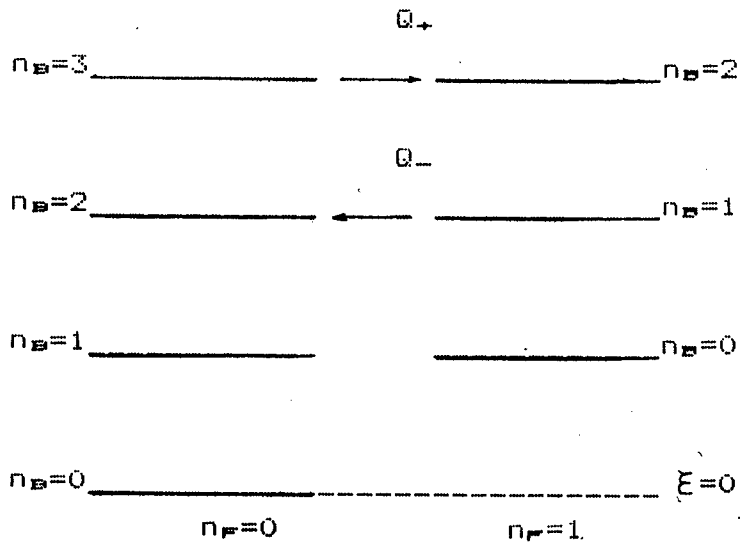
Sada možemo zaključiti da operator Q generiše "rotaciju" u prostoru "bozon-fermion", čemu odgovara parametar prelaza $\mathcal{E}$, kao što L generiše rotaciju u bozonskom prostoru sa dva stepena slobode q_1 i q_2.

Razmotrimo spektar supersimetričnog oscilatora. Polazeći od (10.2) imamo da je:

$$E_{n_b,n_f}=w(n_B+n_F) , \qquad (10.11)$$

$$n_F=0,1 \qquad , \qquad n_B=0,1,\ldots, \quad .$$

Znači, da su energetski nivoi okarakterisani sa dva kvantna broja n_B i n_F, tako da ga možemo prikazati kao:



sl. 1 Energetski spektar supersimetričnog oscilatora

Energija osnovnog stanja je ravna nuli, tj. teorija supersimetrije nam pruža jedno sasvim novo objašnjenje nulte energije osnovnog stanja (energije vakuuma). Energija nultih bozonskih oscilacija je kompenzovana energijom nultih fermionskih oscilacija. Pored ovoga, veoma važna karakteristika spektra je dvostruka degeneracija svih energetskih nivoa osim osnovnog.

Interpretacija fermionskog vakuuma i fermionskih stanja (pojam stanja ima dvostruka značenje-kao jednočestičnostanje i kao stanje sistema) je potpuno analogna interpretaciji bozonskih.

U Dirac - ovoj teoriji elektrona (fermiona) rešavanjem odgovarajuće jednačine dobijamo kao pozitivne tako i negativne vrednosti energije. Fiksirajmo vrednosti impulsa i projekcije spina. Neka pri tom u (x,y), x označava broj popunjenosti jednočestičnih stanja sa pozitivnom energijom, a y sa negativnom. Imamo sledeća stanja:

$E>0$, $E<0$

(0,1) − vakuum ,

(1,1) − jednoelektronsko stanje ,

(0,0) − jednopozitronsko stanje ,

(1,0) − e^{-}−e^{+}−par .

Međutim, ovakvo predstavljanje stanja povlači nesimetriju relativnog naelektrisanja pri prelazu (translaciji) elektrona u pozitron i obrnuto. Obično se na osnovu iskustva uvodi naelektrisanje, takvo da vakuumu odgovara nulto naelektrisanje. Dirac − ova teorija se ne može primeniti na boze − čestice (protone, neutrone), a pored fermiona sada su prisutni i bozoni.

Videli smo da je:

$$E_B \sim n_B + \frac{1}{2} \qquad n_B = 0,1,\ldots,\infty , \tag{10.12}$$

$$E_F \sim n_F - \frac{1}{2} \qquad n_F = 0,1 \quad ,$$

gde su:

$$H_B \sim b^+b^- + \frac{1}{2} \ ,$$
$$H_F \sim f^+f^- - \frac{1}{2} \ . \qquad (10.13)$$

Ako uzmemo w=1, hamiltonijane možemo predstaviti u obliku:

$$H_B = \frac{1}{2}\{b^+, b^-\} \ ,$$
$$H_F = \frac{1}{2}[f^+, f^-] \ , \qquad (10.14)$$

čime se direktno odražavaju različite statistike fermiona i bozona.

Posmatrajmo sada ponovo stanja ali ne okarakterisana znakom energije (ili npr. naelektrisanjem), već sada za svako (x,y) x i y označavaju broj popunjenosti elektronskih tj. bozonskih stanja:

(0,0) – vakuum ,

(1,0) – jednoelektronska stanja ,

(0,1) – jednopozitronska stanja ,

(1,1) – e^--e^+-par .

Energija vakuma za fermionska stanja je negativna, dok je za bozone pozitivna. Njihovim uključivanjem u jedinstvenu teoriju automatski sledi nulta energija vakuuma.

11. SUPERSIMETRIČNA KVANTNA MEHANIKA

U prethodnom poglavlju prilikom, razmatranja supersimetričnog oscilatora nismo uzeli u obzir uzajamno dejstvo. Sada ćemo pokušati da ga uvedemo, a da pri tom supersimetrična struktura ostane očuvana. Kako je hamiltonijan oblika:

$$H=Q_+Q_-+Q_-Q_+ \ , \tag{11.1}$$

gde operatori $Q_\pm$ poseduju svojstvo nilpotentnosti $Q_\pm^2=0$, sledi:

$$HQ_+=Q_+Q_-Q_++0 \ , \tag{11.2}$$

$$Q_+H=0+Q_+Q_-Q_+ \ .$$

Odavde je:

$$[H,Q_+]=0 \tag{11.3}$$

i analogno

$$[H,Q_-]=0 \ .$$

Neka je B^+ proizvoljna funkcija bozonskih operatora, operatore $Q_\pm$ možemo izraziti kao:

$$Q_+=B^-(b^-,b^+)f^+ \ , \tag{11.4}$$

$$Q_-=B^+(b^-,b^+)f^- \ .$$

Na ovaj način hamiltonijan ostaje supersimetričan, a pri tom se pruža mogućnost uključivanja uzajamnog dejstva među bozonima i fermionima. Uključivanjem uzajamnog dejstva među bozonima i fermionima, hamiltonijan prestaje biti dijagonalan u reprezentaciji bozonskih stanja (bozonskog broja popunjenosti), te svojstvena stanja hamiltonijana ne karakterišu broj bozona. Zapravo, pravilnije je reći da se transformacijama u supersimetriji prevode bozonska stanja u fermionska i obrnuto.

U supersimetričnoj kvantnoj mehanici ovakva podela stanja na bozonska i fermionska se shvata uslovno. Generatori supersimetrijske transformacije menjaju spin na $\pm\frac{1}{2}$ zavisno da li se radi o prelazima bozonskih stanja u fermionska ili obrnuto.

Funkciju stanja, znajući da je $n_F=0,1$ možemo predstaviti kao dvokomponentnu:

$$\psi=\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_0\end{pmatrix} \tag{11.5}$$

gde ψ_1 odgovara $n_F=1$, a ψ_0 $n_F=0$.

Fermionske operatore kreacije i anihilacije predstavljamo kao Pauli - jeve matrice:

$$f^+=b^+=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\quad, \tag{11.6}$$

$$f^-=b^-=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\quad.$$

Uvedimo hermitske operatore B^+ i B^-:

$$B^+=B_1+iB_2\ , \tag{11.7}$$

$$B^-=B_1-iB_2\ .$$

definišimo:

$$Q_1=Q_++Q_-=B_1b_1+B_2b_2\ , \tag{11.8}$$

$$Q_2=-i(Q_+-Q_-)=B_1b_2-B_2b_1\ .$$

Q_1 i Q_2 antikomutiraju i $Q_1^2=Q_2^2$, potpuno nezavisno od komutacionih relacija B_1 i B_2.

H možemo prikazati kao:

$$H=\frac{1}{2}\{B^-,B^+\}+ [B^-,B^+]\tau_3 \ . \qquad (11.9)$$

H je kvadratno po impulsima - p, B ima vid:

$$B^{\pm}=\frac{1}{\sqrt{2}}[\mp ip+W(x)] \ , \qquad (11.10)$$

gde je W(x) proizvoljna funkcija koordinate x. Za supersimetrični oscilator W(x)=x i $B_{\pm}=b^{\pm}$.

Ako ovo zamenimo u (11.9) dobijamo hamiltonijan u supersimetričnoj kvantnoj mehanici - Witten - a [6]:

$$H=\frac{1}{2}[p^2+W^2(x)+\tau_3 W'(x)] \ , \qquad (11.11)$$

gde član $W^2(x)$ karakteriše dejsvo "bozon - bozon", a $\tau_3 W'(x)$ "bozon - fermion". Ovu funkciju W(x) nazivamo **superpotencijal** i obično se izražava kao W(x)=V'(x), gde je izbor V(x) uslovljen formalizmom. Za slučaj harmonijskog oscilatora imamo da je:

$$W(x)=x \ , \qquad (11.12)$$

odavde je $W(x)^2=x^2$, a

$$W'(x)=\text{const}.$$

što znači da je dejstvo (interakcija) između bozona i fermiona isključena.

Dobijeni hamiltonijan u supersimetričnoj kvantnoj mehanici karakteriše kako interakciju među bozonima, tako i među bozonima i fermionima. Zahvaljujući supersimetriji hamiltonijan možemo predstaviti kao skup dva jednodimenziona hamiltonijana:

$$H_{\pm}=\frac{1}{2}[p^2+W^2(x)\pm W'(x)] \ , \qquad (11.13)$$

koji za proizvoljnu funkciju W(x) imaju jednak spektar.

Već smo videli da je spektar dvostruka degenerisan za sve nivoe čija je energija veća od 0, dok za osnovno stanje degeneracija ne postoji.

U poglavlju 10. smo videli da je energija osnovnog stanja harmonijskog oscilatora jednaka nuli. Međutim, postavlja se pitanje da li to i dalje važi kada se uključi uzajamno dejstvo između bozona i fermiona.

Da bi smo razmotrili ovaj problem vratimo se na (11.9) i prikažimo H u matričnom obliku:

$$H=\begin{pmatrix} H^{+} & 0 \\ 0 & H^{-} \end{pmatrix} \quad , \qquad (11.14)$$

gde je $H_{+}=B^{-}B^{+}$ i $H_{-}=B^{+}B^{-}$ i dejstvuju u prostoru jednokomponentnih funkcija. Određivanje stanja sa energijom E=0 svodi se na rešavanje jednačina:

$$H_{+}\psi=0 \quad \text{ili} \quad H_{-}\psi=0 \quad , \qquad (11.15)$$

što je ekvivalentno sa:

$$B^{+}\psi=0 \quad \text{ili} \quad B^{-}\psi=0 \quad , \qquad (11.16)$$

jer je i iz $H_{+}\psi=0$ i $H_{-}\psi=0$

$$0=\langle\psi|B^{+}B^{-}|\psi\rangle=|B^{-}|\psi\rangle|^{2} \quad . \qquad (11.17)$$

Zamenjujući (11.10) u (11.16) imamao:

$$\left(\frac{d}{dx}\mp W\right)\psi_{\pm}=0 \quad . \qquad (11.18)$$

Rešavanjem dobijamo:

$$\psi_{\pm}=ce^{\pm\int_{0}^{x}W(x')dx'} \quad . \qquad (11.19)$$

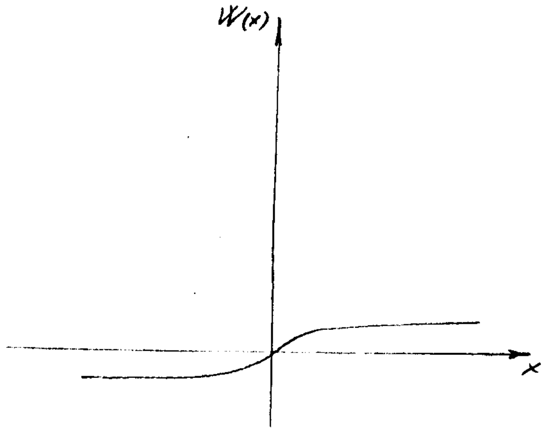
Kvantno-mehanička stanja su opisana normiranim (kavatratno integrabilnim) funkcijama. Potreban (ne i dovoljan) uslov da funkcija $\psi(x)$ bude normirana je da i za $x\to+\infty$ i za $x\to-\infty$, $\psi(x)$ teži nuli. Razmotrimo ponašanje ψ_{+} i ψ_{-} za $x\to\pm\infty$. Pošto $e^{x}\to 0$ samo za $x\to-\infty$ dobijamo dve mogućnosti:

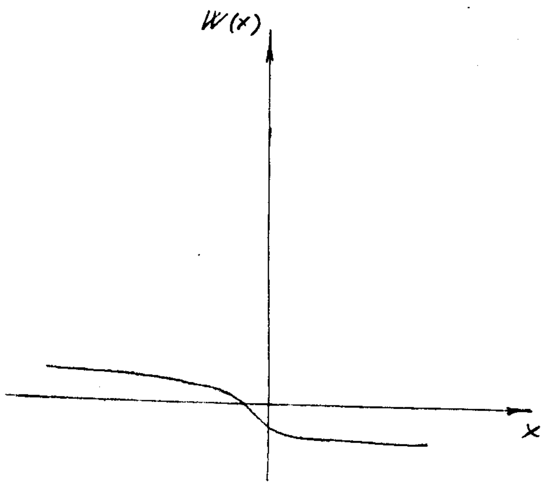
$$\text{ako} \quad \int_0^x W(x')dx' \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} +\infty \quad \text{onda} \quad \psi_+ \longrightarrow \infty, \ \psi_- \to 0 \ , \tag{11.20}$$

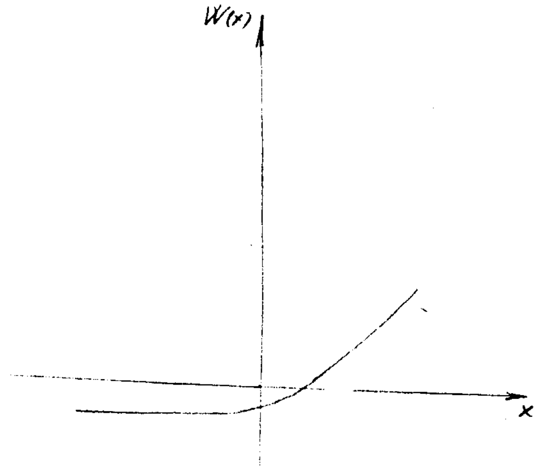
$$\text{ako} \quad \int_0^x W(x')dx' \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} -\infty \quad \text{onda} \quad \psi_- \longrightarrow \infty, \ \psi_+ - 0 \ .$$

Prema tome najviše jedna od funkcija $\psi_\pm$ može biti normirana. Kažemo da zapravo ni jedna ne može biti normirana, jer su gornje dve mogućnosti inkompatibilne.

Zavisno od znaka $W(x)$, uslovi (11.20) dobijaju prostiji oblik. Ako je na primer $W(x)=x$ (supersimetrični oscilator), tj. $W(x)$ menja znak kad $x \to \pm\infty$ i pri tom $W(x)$ ne teži nuli , jedan od dva navedena uslova će biti ispunjen. Potpuno nezavisno od oblika $W(x)$, energija osnovnog stanja bi bila $E_0=0$. Za ovakav slučaj supersimetrija je očuvana i superpotencijal se može grafički prikazati kao:

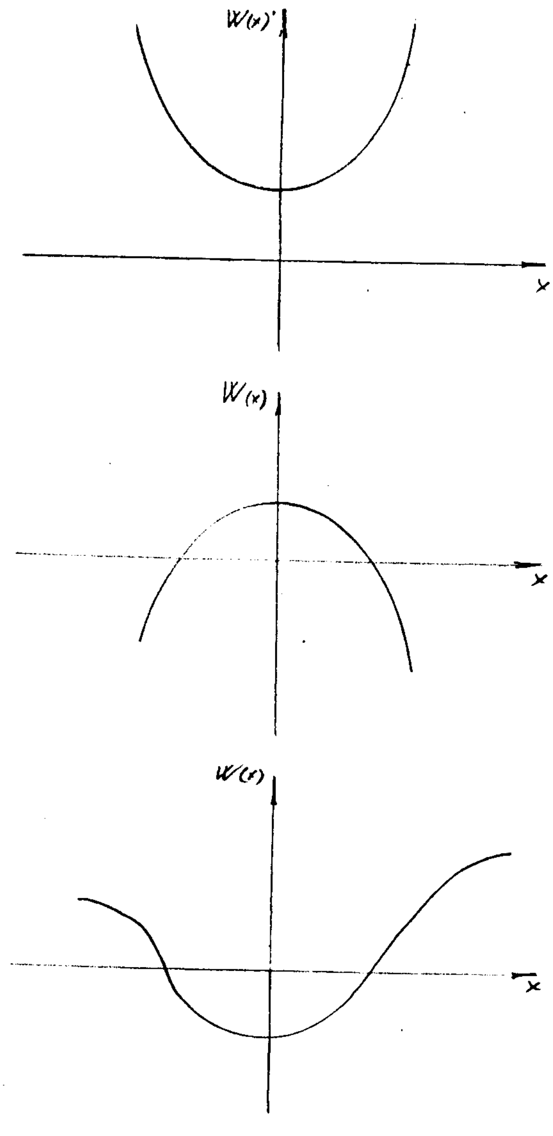






sl. 2

Ako je oblik W(x) takav da ne menja znak, recimo $W(x)=x^2$, kad $x \to \pm\infty$ tada ni jedan od oba navedena uslova (11.20) ne može biti ispunjen. Za ovaj slučaj energija osnovnog stanja je $E_0>0$, a superpotencijal možemo grafički prikazati kao:



sl. 3

Za ovakav oblik superpotencijala $W(x)$ imamo spontano narušavanje supersimetrije.

Na kraju možemo zaključiti da uslovi (11.20) predstavljaju globalne uslove na supersimetriju, jer njena narušenost ne zavisi od malih deformacija superpotencijala već isključivo od ponašanja u $\pm\infty$. To matematički znači da postoji homotopska invarijantnost deformaciju superpotencijala $W(x)$.

Pogledajmo sada sledeći primer.

PRIMER:

Neka je:

$$W(a,x)=a\,\mathrm{th}x \ ,$$

gde je $a>0$.

Znači $W(a,x)$ menja znak kad $x\to\pm\infty$. Izraze za $H_{\pm}$ možemo predstaviti kao:

$$H_-(a)=\frac{1}{2}[p^2+W^2(x)-W'(x)]=\frac{1}{2}[p^2-\frac{a(a+1)}{\mathrm{ch}^2x}]+\frac{a^2}{2},$$

$$H_+(a)=\frac{1}{2}[p^2-\frac{a(a-1)}{\mathrm{ch}^2x}]+\frac{a^2}{2} \ .$$

Uvedimo smenu $a_1=a-1$, tada je:

$$H_+(a)=H_-(a_1)+\frac{a^2}{2}-\frac{a_1^2}{2} \ .$$

Razmotrimo sada "osnovno stanje". Ako je $a_1>0$ za $H_-(a_1)$ imamo stanje nulte energije, dok za $H_+(a)$ dobijamo:

$$E_1=\frac{a^2-a_1^2}{2} \ .$$

Na ovaj način dobili smo dva stanja hamiltonijana $E_0=0$ i E_1. Ako bi uveli smenu $a_n=a_{n-1}-1=a-n$, pri čemu je $a_n>0$, dobijamo ceo spektar pri čemu je energija n-tog stanja:

$$E_n=\frac{1}{2}[(a^2-a_1^2)+(a_1^2-a_2^2)+...+(a_{n-1}^2-a_n^2)]$$

$$E_n=\frac{a^2}{2}-\frac{a_u^2}{2}, \qquad n=1,2,...$$

a potencijal

$$U(a,x)=-\frac{a(a+1)}{ch^2x} \quad ,$$

koji se razlikuje od potencijala u $H_-(a)$ za aditivnu konstantu $-\frac{a^2}{2}$, energija n-tog stanja je oblika:

$$E_n=-\frac{a_u^2}{2}=-\frac{(a-u)^2}{2} \quad .$$

Na ovaj način smo videli kako se čak i uz pomoć elementarnog računa za dati super potencijal može odrediti energetski spektar. Ovo je bio jedan od najjednostsvnijih slučaja određivanja spektra (iz Schrödinger - ovih jednačina) primenom supersimetrije.

13. SPONTANO NARUŠENJE SUPERSIMETRIJE

Na kraju recimo nešto o spontanom narušenju supersimetrije. Već smo rekli kako ponašanje $W(x)$ utiče na narušenje supersimetrije.

Za ma koji tip simetrije, kojoj odgovara generator transformacije R, iz $[H,R]=0$ sledi invarijantnost hamiltonijana. Ukoliko je simetrija očuvana, osnovno stanje ostaje invarijantno $R|0\rangle=0$. Za supersimetriju smo imali:

$$[H,Q]=0 \quad , \tag{13.1}$$

$$H|0\rangle=Q^2|0\rangle=0 \quad .$$

Međutim ukoliko je

$$Q|0\rangle\neq 0 \quad \text{ili} \quad Q^+|0\rangle\neq 0 \tag{13.2}$$

za ma koje Q imamo narušenje supersimetrije.

Znači supersimetrija je spontano narušena ukoliko energija vakuuma nije tačno nula.

VII ZAKLJUČAK

U ovom radu predstavljene su ideje na kojima počiva supersimetrija, kako i zašto je uopšte ova teorija uvedena.

Ova teorija prva razmatra vezu između bozona i fermiona i uvodi generator Q, koji prevodi jedna stanja u druga. Takođe, ovde su predstavljene opšte karakteristike algebre i reprezentacije u supersimetriji. U VI glavi smo videli jednu od primena supersimetrije u kvantnoj mehanici. Analogno drugim vidovoma simetrije i ovde je uslov supersimetričnosti hamiltonijana dat izrazom

$$[H,Q]=0 \;.$$

Takođe pod određenim uslovima dolazi do spontanog narušavanja supersimetrije.

Sama teorija supersimetrije je mnogo kompleksnija i ovaj rad je tek prvi korak u upoznavanju sa njom.

Bez obzira na sve spekulacije oko ove teorije, ona je prva pružila novi put shvatanja i povezivanja kvantnih objekata (bozona i fermiona). Na osnovu ove teorije javlja se teorija supergravitacije. Smatra se da bi ova teorija mogla ukazati na mogućnosti objedinjenja sva četiri tipa interakcije (jake, slabe, elektromagnetne i gravitacione).

Pojava supersimetrije proširila je naše predstave o simetriji fizičkih sistema. Ideje i metodi ove teorije pronikli su u statističku i nuklearnu fiziku, kvantnu mehaniku i doveli do pojave novih matematičkih teorija.

LITERATURA

1. M. Vujičić, M. Damnjanović-Teorija konačnih grupa i njihovih reprezentacija-Univerzitet u Beogradu, Beograd 1986.

2. Гольфанд Ю.А., Лихтман Е.П. - Письма ЖЭТФ, 1971. Т. 13. С. 452

3. Волков Д.В., Акулов В.П. - Ibidem, 1972, Т. 16, С. 261. - Phys. Lett. B, 1973.

4. J. Wess and B. Zumino-Nucl Phys B70 (1974) 1; and Phys Lett 49B (1974) 52

5. S. Colleman and J. Mandula-Phys Rev 159 (1967) 1251

6. E. Witten-Nucl Phys Ser. B. 1981, v. 185 p. 513.

7. S. Ferrara, J. G. Taylor, P. van Nieuwenhuizen-Supersymmetry and supergravity '82-Proceedings of the Trieste, September 1982 School

8. Martin F. Sohnius-Introducing supersymmetry-Physics Reports (Review Section of Physics Letters) 128, Nos. 2 & 3 (1985) 39-204

9. Л. Э. Генденштейн, И. В. Криве - Суперсимметрия в квантовой механике - Успехи физических наук, том 146, вып. 4, 1985 г. Август

10. Дж. Эллиот и П. Добер - Симметрия в физике - том второй - - Москва „Мир" 1983.