UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU

Ivana Lončarević

Spontano narušavanje simetrije - unitaristički pristup

-diplomski rad-

Novi Sad, 2003.

Ovaj diplomski rad je rađen u okviru Katedre za teorijsku fiziku, Departmana za fiziku, Prirodno-matematičkog fakulteta u Novom Sadu. Ovim putem se zahvaljujem svom mentoru prof.dr Darku Kaporu, prof.dr Mariu Škrinjaru i prof.dr Miroslavu Veskoviću na razumevanju i podršci.

Novi Sad, 15.9.2003. Ivana Lončarević

SADRŽAJ

UVOD

Simetrija je postala jedan od vodećih principa u fizici tokom dvadesetog veka. Postepeno se napredovalo od spoljašnje ka unutrašnjoj, od globalne ka lokalnoj, od konačne ka beskonačnoj, od obične ka supersimetriji , da bi se konačno došlo do pojma Hopf-ove algebre ili kvantnih grupa.

Opšte govoreći, fizički sistem se sastoji od konačnog ili beskonačnog broja stepeni slobode koji mogu, ali ne moraju interagovati. Dinamika je određena skupom jednačina evolucije, koje proizilaze iz variranja dejstva po različitim stepenima slobode. Simetrija tada odgovara grupi transformacija prostorno-vremenskih koordinata i/ili stepeni slobode koji slede iz dejstva i stoga je invarijanta jednačina evolucije. Spoljašnje simetrije su povezane sa invarijantnošću u odnosu na transformacije prostorno-vremenskih koordinata (npr. Lorentz-ova invarijantnost). Simetrije koje nisu povezane sa transformacijama prostorno-vremenskih koordinata nazivamo unutrašnjim. Takođe pravimo razliku i između tzv. globalnih i lokalnih simetrija. Globalne simetrijske transformacije su iste u svim tačkama prostor-vremena i obično vode ka očuvanju određenih veličina. Pretvaranje globalne simetrije u lokalnu, odnosno dozvoljavanje da se simetrijska transformacija menja kontinualno od tačke do tačke u prostoru, zahteva uvođenje dodatnih gauge stepeni slobode. Ovo je tzv. gauge princip koji nas konačno vodi do standardnog modela jakih i elektro-slabih interakcija između elementarnih čestica baziranog na lokalnoj gauge grupi $SU(3)\times SU(2)\times U(1)$.

Primena simetrijskih razmatranja je značajno proširena nakon uočavanja da simetrija dejstva ne mora obavezno biti i simetrija osnovnog stanja fizičkog sistema. Ako je dejstvo invarijantno u odnosu na neku simetrijsku grupu G, a osnovno stanje samo u odnosu na podgrupu H od G, kažemo da je simetrijska grupa G spontano narušena do H. Simetrija nije potpuno izgubljena, pošto narušeni generatori G transformišu jedno osnovno stanje u drugo.

Fizika narušene globalne simetrije je bitno drugačija od narušene lokalne (gauge) simetrije. Dokaz narušene kontinualne globalne simetrijske grupe G u fizičkom sistemu je pojava bezmasenih skalarnih stepeni slobode, tzv. Goldstone-ovih bozona. Svaki narušeni generator grupe G uzrokuje pojavu bezmasenog Goldstone-ovog bozonskog polja. Poznata realizacija Goldstone-ovih bozona su spinski talasi velikih dužina u feromagnetu, u kom je rotaciona simetrija narušena ispod Curie-eve temperature usled pojave spontane magnetizacije. Primena u fizici čestica je niskoenergetska fizika jakih interakcija, gde spontano narušavanje aproksimativne kiralne simetrije dovodi do pojave bezmasenih pseudoskalarnih čestica kakve su pioni.

U slučaju narušene lokalne (gauge) simetrije, bezmaseni Goldstone-ovi bozoni zajedno sa bezmasenim gauge poljima formiraju masena vektorska polja. Ovaj fenomen nazivamo Higgs-ovim mehanizmom. Kanonički primer u fizici kondenzovane materije je običan superprovodnik. U faznom prelazu od normalne ka superprovodnoj fazi, $U(1)$ gauge simetrija je spontano narušena do konačne ciklične grupe Z_2, kondenzatom Cooper-ovih parova. To dovodi do mase M_A fotonskog polja u superprovodnoj sredini, što je potvrđeno Meissner-ovim efektom: magnetno polje je izbačeno iz superprovodne oblasti i ima karakterističnu dubinu prodiranja koja je u odgovarajućim jedinicama inverzna masi fotona M_A. Štaviše, Coulomb-ove interakcije među spoljašnjim naelektrisanjima u superprovodniku su konačnog dometa $\propto \frac{1}{M_A}$. Higgs-ov mehanizam igra ključnu ulogu u ujedinjenoj teoriji slabih i elektromagnetnih interakcija, odnosno u Glashow-Weinberg-Salam modelu u kom je proizvod gauge grupa $SU(2)\times U(1)$ narušen do $U(1)$ podgrupe elektromagnetizma. U tom kontekstu, masivne vektorske čestice koje odgovaraju W i Z bozonima posreduju u kratkodometnim slabim interakcijama. Znatno spekulativnija primena Higss-ovog mehanizma je ona u kojoj je standardni model jake, slabe i elektromagnetne interakcije ugrađen u model velikog ujedinjenja sa velikom prostom gauge grupom. Najambiciozniji pokušaji se odnose na uvođenje supersimetrije.

1 - KLASIČNE SIMETRIJE

Koncept simetrije igra gotovo ključnu ulogu u svim aspektima naših razmatranja fundamentalnih interakcija. Simetrije su u neposrednoj vezi sa npr. Pauli-evim predviđanjem postojanja neutrina, sa pitanjima koja se tiču raspada čestica; simetrije određuju svojstvo sila u gauge teorijama, da li npr. pobuđeni atom može da pređe u niže energetsko stanje uz emisiju svetlosnog kvanta, itd...

Ono što simetrije posebno vezuje za fiziku je njihova dinamička uloga koja uvek pomaže u sagledavanju globalne strukture proučavane pojave. Opšti karakter je sadržan i u mogućnosti povezivanja fenomenološke analize sa tzv. simetrijskim grupama.

Postoji neposredna veza izmedju simetrijskih transformacija i zakona konzervacije. Neprekidne simetrijske transformacije, pri kojima gustina Lagranžijana, koja opisuje dinamiku sistema, ostaje invarijantna, generišu zakone održanja u kojima prepoznajemo različite konstante kretanja. Ove transformacije nas vode do egzaktnih zakona održanja.

1.1 NOETHER-INA TEOREMA - KLASIČNA

Sa klasičnog stanovišta, simetrija dejstva koje je integral lokalne gustine Lagranžijana je povezana sa očuvanim strujama. Razmotrimo skup polja $\phi_j(x)$, gde je $j = 1,2,\ldots,N$ i dejstvo:

$$S[\phi] = \int d^4x \alpha(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \tag{1.1.1}$$

pri čemu je α, lokalna gustina Lagranžijana. Indeks, j, je indeks ukusa. Različite vrednosti j odgovaraju različitoj vrsti, odnosno različitom ukusu polja ϕ, koje u odsustvu indeksa, treba shvatiti kao vektor kolonu u prostoru ukusa.

Pretpostavimo, radi jednostavnosti, da Lagranžijan zavisi samo od polja ϕ i njegovog prvog izvoda $\partial_\mu \phi$. Tada jednačina kretanja glasi (dodatak 3):

$$\partial_\mu \frac{\delta \alpha}{\delta(\partial_\mu \phi)} = \frac{\delta \alpha}{\delta \phi} \tag{1.1.2}$$

i predstavlja vektorsku jednačinu u prostoru ukusa, čija je svaka strana vektor vrsta, koji nosi indeks ukusa, j.

Simetrija dejstva se ogleda pri nekoj infinitezimalnoj promeni polja, $\delta\phi$, kao npr.:

$$S[\phi + \delta\phi] = S[\phi] \tag{1.1.3}$$

ili

$$\alpha(\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \delta\partial_\mu \phi) = \alpha(\phi, \partial_\mu \phi) + \partial_\mu V^\mu(\phi, \partial_\mu \phi, \delta\phi) \tag{1.1.4}$$

gde je V^μ neka vektorska funkcija koja zavisi od infinitezimalne promene $\delta\phi$. Pretpostavljamo da možemo odbaciti površinske članove u d^4x integralu, tako da V^μ ne daju doprinos dejstvu. Ali

$$\alpha(\phi + \delta\phi, \partial_\mu \phi + \delta\partial_\mu \phi) - \alpha(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{\delta \alpha}{\delta \phi}\delta\phi + \frac{\delta \alpha}{\delta(\partial_\mu \phi)}\partial_\mu \delta\phi \tag{1.1.5}$$

pošto je $\partial_\mu \delta\phi = \delta\partial_\mu \phi$. Važno je uočiti da je (1.1.5) jedna jednačina, bez indeksa j. Članovi na desnoj strani uključuju matrično množenje u prostoru ukusa, vektora vrste s leve i vektora kolone sa desne strane. Iz (1.1.2), (1.1.4) i (1.1.5) sledi:

$$\partial_\mu N^\mu = 0 \tag{1.1.6}$$

gde je

$$N^\mu = \frac{\delta\alpha}{\delta(\partial_\mu \phi)}\delta\phi - V^\mu \tag{1.1.7}$$

Nas najčešće interesuju simetrije, koje su i simetrije Lagranžijana, a ne samo dejstva i u tom slučaju je $V^\mu = 0$. Naročitu pažnju posvećujemo linearnim, unitarnim transformacijama polja, za koje važi:

$$\delta\phi = i\varepsilon_a T^a \phi \tag{1.1.8}$$

gde je T^a za $a = 1,2,...m$ skup $N \times N$ ermitskih matrica, koje deluju u prostoru ukusa, a ε_a je skup infinitezimalnih parametara. Možemo, a često to i činimo, (1.1.8) napisati u eksponencijalnom obliku, da bismo dobili konačnu transformaciju:

$$\phi \to \phi' = e^{i\varepsilon_a T^a} \phi \tag{1.1.9}$$

koja, za malo ε_a prelazi u (1.1.8). Tada se za T^a kaže da su generatori transformacije (1.1.9).

Pošto ćemo T^a koristiti veoma često, važno je razmotriti njihova svojstva. Osnovno svojstvo generatora je njihova komutaciona relacija:

$$\left[T^a, T^b\right] = if_{abc} T^c \tag{1.1.10}$$

gde su f_{abc} strukturne konstante Lie-ve algebre, definisane u ma kojoj netrivijalnoj reprezentaciji (trivijalna reprezentacije je ona u kojoj je $T^a = 0$, za koje je (1.1.10) trivijalno zadovoljena). Generatori mogu biti klasifikovani u skupove, koje nazivamo prostim podalgebrama, koji međusobno antikomutiraju, dok sa svim ostalim komutiraju. Na primer, uzmimo tri generatora T^a, za $a = 1,2,3$ sa komutacionim relacijama SU(2) grupe,

$$\left[T^a, T^b\right] = i\varepsilon_{abc} T^c \tag{1.1.11}$$

i koji komutiraju sa svim ostalim generatorima. Onda je to primer SU(2) faktora algebre. Algebra se uvek može raščlaniti na faktore poput ovog, nazvane prostim podalgebrama, i na skupove generatora koji komutiraju sa svim, nazavane U(1) generatorima.

Normalizacija U(1) generatora mora biti određena nekom proizvoljnom konvencijom. Međutim, normalizacija generatora ma koje proste podgrupe je povezana sa normalizacijom strukturnih konstanti. Važno je normalizovati ih, tako da u svakoj prostoj podalgebri važi:

$$\sum_{c,d} f_{acd} f_{bcd} = k\delta_{ab} \tag{1.1.12}$$

Tada, za svaku reprezentaciju važi:

$$tr\left(T^a T^b\right) \propto \delta_{ab} \tag{1.1.13}$$

Matematička konvencija se sastoji u dodeljivanju specijalnog statusa strukturnim konstantama i izboru $k = 1$ u (1.1.12). Međutim, fizičari su fleksibilniji (ili manje sistematični). Za SU(n), npr. k se obično bira tako da je:

$$tr\left(T^a T^b\right) = \frac{1}{2}\delta_{ab} \tag{1.1.14}$$

za n-dimenzionalne reprezentacije. Tada je $k = n$.

Simetrija oblika (1.1.8) ili (1.1.9) koja deluje samo u prostoru ukusa, a ne i u prostorno - vremenskoj zavisnosti polja se naziva unutrašnjom simetrijom. Poznata Poincare - simetrija relativističkih dejstava nije unutrašnja simetrija.

Razlikujemo dve vrste unutrašnjih simetrija. Ako parametri ε_a ne zavise od prostorno - vremenskih koordinata, simetrija se naziva *globalnom* simetrijom. Globalne simetrije uključuju rotaciju ϕ u prostoru ukusa koja se vrši na isti način u svim tačkama prostora i vremena. Ovo nije naročito fizički privlačna ideja, budući da je teško zamisliti njeno ostvarivanje, ali se pokazalo da je koncept globalne simetrije izuzetno značajan u organizovanju našeg znanja o teoriji polja i fizici uopšte.

Kada ε_a zavisi od x simetrija se naziva *lokalnom* ili *gauge* simetrijom. Lokalna simetrija nije samo princip organizovanja, nego je i usko povezana sa dinamikom.

Razmotrimo sada (1.1.7) u slučaju globalne, unutrašnje simetrije Lagranžijana. Pošto je simetrija i simetrija α, drugi član, $V^\mu = 0$.
Stoga očuvanu struju možemo napisati kao

$$N^\mu = \frac{\delta\alpha}{\delta(\partial_\mu\phi)} i\varepsilon_a T^a \phi \tag{1.1.15}$$

Budući da su infinitezimalni parametri proizvoljni, (1.1.15) zapravo definiše m očuvanih struja.

$$J_a^\mu = -i\frac{\delta\alpha}{\delta(\partial_\mu\phi)} T^a\phi \qquad a = 1,2,\ldots,m \tag{1.1.16}$$

1.2 PRIMERI

PRIMER 1

Uzmimo da je Φ_j, $j = 1,2,\ldots N$, skup realnih, skalarnih, bozonskih polja. Najopštiji mogući, realni, kvadratni član koji zavisi od Φ u Lagranžijanu je :

$$\alpha_{KE}(\Phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\Phi^T S\partial^\mu\Phi \tag{1.2.1}$$

gde je S realna, simetrična matrica (u matričnoj notaciji Φ_j su uređeni u N-komponentni vektor kolonu). Ako je S pozitivna, možemo definisati novi skup polja pomoću linearne transformacije:

$$L\phi = \Phi \tag{1.2.2}$$

koja zadovoljava uslov:

$$L^T S L = I \tag{1.2.3}$$

Tada Lagranžijan postaje:

$$\alpha_{KE}(\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi^T\partial^\mu\phi \tag{1.2.4}$$

što je kanonička forma Lagranžijana za skup od N bezmasenih, slobodnih skalarnih polja. U odnosu na infinitezimalnu, linearnu transformaciju

$$\delta\phi = G\phi \tag{1.2.5}$$

gde je G $N\times N$ matrica, promena u α_{KE} je:

$$\delta\alpha_{KE}(\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi^T \left(G + G^T\right)\partial^\mu \phi \qquad (1.2.6)$$

Ako je G antisimetrična matrica, Lagranžijan se ne menja. Takođe, moramo izabrati G tako da bude realna da bismo očuvali realnost polja. Prema tome, Lagranžijan je invarijantan u odnosu na SO(N) grupu transformacija

$$\delta\phi = i\varepsilon_a T^a \phi \qquad (1.2.7)$$

gde su T^a, za a=1 do $\frac{N(N-1)}{2}$, $\frac{N(N-1)}{2}$ nezavisne, antisimetrične, imaginarne matrice. Ove matrice su reprezentacija SO(N) algebre. Prikazana u eksponencijalnom obliku (1.2.7), proizvodi ortogonalnu transformaciju, reprezentaciju grupe SO(N)

$$\phi \rightarrow \phi' = O\phi \qquad (1.2.8)$$

gde je

$$O^T = O^{-1} \qquad (1.2.9)$$

Ovo je rotacija u realnom N-dimenzionalnom prostoru.

Važno je uočiti da mi nismo ništa učinili da bismo uveli SO(N) simetriju, sem što smo napisali Lagranžijan u kanoničkoj formi. Ona je bila direktna posledica početne fizičke pretpostavke o postojanju N slobodnih, bezmasenih, skalarnih polja. Kanonička forma izvodnog člana kinetičke energije , automatski ima SO(N) simetriju.

Odgovarajuće Noether struje su:

$$J^\mu_a = -i\left(\partial_\mu \phi^T\right)T^a \phi \qquad (1.2.10)$$

Simetrija (1.2.8), je najveća unutrašnja rotaciona simetrija koju skup N realnih, bezspinskih bozona može imati, pošto član kinetičke energije (1.2.4), uvek mora biti prisutan. Međutim, simetrija može biti narušena u nekim podgrupama grupe SO(N). Ovo se može desiti jednostavno zbog masenih članova, ako skalari nisu svi degenerisani. Maseni član, uopšteno, ima oblik:

$$\alpha_{mass}(\phi) = -\frac{1}{2}\phi^T M^2 \phi \qquad (1.2.11)$$

gde je M^2 realna, simetrična matrica, nazvana masenom matricom. Njene svojstvene vrednosti (ako su sve pozitivne) su kvadrati masa skalarnih čestica. Maseni član je invarijantan u odnosu na ortogonalnu transformaciju O, ako važi

$$O^T M^2 O = M^2 \quad \text{odnosno} \quad \left[O, M^2\right] = 0 \qquad (1.2.12)$$

Ako je M^2 proporcionalna sa jediničnom matricom, cela SO(N) simetrija nije narušena. Uopšteno, transformacije koje zadovoljavaju (1.2.12) formiraju reprezentaciju neke podgrupe SO(N). Podgrupa je generisana podskupom generatora T^a, koji komutiraju sa M^2.

Matrica mase se može dijagonalizovati ortogonalnom transformacijom, koja ostavlja izvodni član (1.2.4) nepromenjenim.

Tada je preostala simetrija SO(l), za svaku l degenerisanu svojstvenu vrednost. Na primer, ako K polja ima masu m_1, a ostalih $N-K$ masu m_2, dijagonalna matrica mase može imati oblik

$$M^2 = \begin{pmatrix} m_1^2 & & & & & & & \\ & \cdot & & & & & & \\ & & \cdot & & & 0 & & \\ & & & \cdot & & & & \\ & & & & m_1^2 & & & \\ & & & & & m_2^2 & & \\ & & & & & & \cdot & \\ & & 0 & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & \cdot \\ & & & & & & & & & m_2^2 \end{pmatrix} \tag{1.2.13}$$

Simetrija je SO(K)$\times$SO(N-K) i rotira degenerisane podskupove u obliku:

$$O = \begin{pmatrix} O_1 & 0 \\ 0 & O_2 \end{pmatrix} \tag{1.2.14}$$

gde O_1 i O_2 deluju na polja mase m_1 i m_2, respektivno. Elementi konačne grupe (1.2.14) su generisani izražavanjem u eksponencijalnom obliku $\dfrac{K(K-1)}{2}$ i $\dfrac{(N-K)(N-K-1)}{2}$ generatora

$$\begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & S_2 \end{pmatrix} \tag{1.2.15}$$

gde su S_1 i S_2 antisimetrične imaginarne matrice.

Ako matrica mase nije degenerisana, što znači da ne postoji par jednakih svojstvenih vrednosti, SO(N) simetrija je potpuno narušena i ne preostaje nikakva kontinualna simetrija, iako je Lagranžijan još uvek invarijantan u odnosu na diskretnu simetriju pri kojoj ma koja komponenta ϕ menja znak.

Simetrija može biti narušena i interakcijom članova u Lagranžijanu. Sa članovima koji zavise od trećeg i četvrtog stepena ϕ, simetrija može biti narušena na znatno interesantniji način. Razmotrimo, npr. Lagranžijan sa $N=8$ skalara, od kojih $K=4$ imaju masu m_1 (ϕ_j za $j=1$ do 4), a ostatak masu m_2 (ϕ_j za $j=5$ do 8). Kinetička energija i maseni član imaju SO(4)$\times$SO(4) simetriju. Uredimo osam realnih polja u dva kompleksna dubleta polja na sledeći način:

$$\xi_1 \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{\phi_3 + i\phi_4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \qquad \xi_2 \equiv \begin{pmatrix} \dfrac{\phi_5 + i\phi_6}{\sqrt{2}} \\ \dfrac{\phi_7 + i\phi_8}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \tag{1.2.16}$$

Razmotrimo sada interakcioni član oblika:

$$\alpha_{\text{int}} = \lambda \xi_1^+ \xi_2 \xi_2^+ \xi_1 \tag{1.2.17}$$

Ovaj interakcioni član nije invarijantan u odnosu na SO(4)$\times$SO(4), ali je invarijantan u odnosu na SU(2)$\times$U(1) simetriju za koju važi:

$$\xi_j \to U\xi_j \qquad j = 1,2 \tag{1.2.18}$$

gde je 2×2 matrica, U unitarna. U matrica može biti pisana kao vremenska faza (U(1) deo) specijalne, unitarne matrice V ($\det V = 1$), tako da je ona reprezentacija od $SU(2)\times U(1)$. Ona je podgrupa $SO(4)\times SO(4)$ koja ostaje invarijantna u odnosu na interakcioni term, (1.2.17).

Simetrijska struktura teorije polja ogleda se u hijerarhiji snižavanja simetrije, polazeći od kinetičke energije preko interakcionih članova. Član koji odgovara kinetičkoj energiji ima najveću moguću simetriju. Ona je narušena do određenih podgrupa, masenim i interakcionim članovima. Ovaj način traženja simetrijske strukture je naročito koristan, kada su neki interakcioni termovi slabi, tako da njihovi efekti mogu biti tretirani teorijom perturbacije.

PRIMER 2

Uzmimo da su ψ_j, $j = 1,2,...N$, slobodna, bezmasena, spin-$\frac{1}{2}$, četvorokomponentna Dirac-ova fermionska polja, sa Lagranžijanom oblika:

$$\alpha(\phi) = i\overline{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi \tag{1.2.19}$$

Dirac-ova fermionska polja su kompleksna, pa prema tome (1.2.19) ima očiglednu $SU(N)\times U(1)$ simetriju pri kojoj su infinitezimalne promene:

$$\delta\phi = i\varepsilon_a T^a \psi \tag{1.2.20}$$

gde su T^a N^2 ermitske $N\times N$ matrice, koje generišu definisanu (ili N) reprezentaciju od $SU(N)\times U(1)$. Izražavanjem u eksponencijalnom obliku dobijamo:

$$\psi \to U\psi \tag{1.2.21}$$

gde je U, unitarna $N\times N$ matrica

$$U = e^{i\varepsilon_a T^a} \tag{1.2.22}$$

SU(N) deo U je generisan pomoću $N^2 - 1$ ermitskih matrica, bez traga, dok je generator U(1) dela, koji komutira sa svim, proporcionalan jediničnoj matrici. U(1) je samo broj fermiona.
U (1.2.19)

$$\frac{\delta\alpha}{\delta(\partial_{\mu}\psi)} = i\overline{\psi}\gamma^{\mu} \tag{1.2.23}$$

pa je stoga Noether struja:

$$J_a^{\mu} = \overline{\psi}\gamma^{\mu}T^a\psi \tag{1.2.24}$$

Uz $T^a = 1$, očuvana Noether struja pridružena U(1) je struja broja fermiona.

Transformacija (1.2.21) je najveća unutrašnja simetrija Lagranžijana (1.2.19). Da bismo razmotrili ostatak simetrije, koristićemo dvokomponentna, Weyl-ova fermionska polja, koja su povezana sa običnim spin-$\frac{1}{2}$ četvorokomponentnim fermionskim poljima, ψ, projekcijom pomoću projekcionog operatora.

$$P_{\pm} \equiv \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \tag{1.2.25}$$

Definišimo levoruka, sa levim helicitetom (L) i desnoruka, sa desnim helicitetom (R) polja kao:

$$\psi_L = P_+\psi \qquad \psi_R = P_-\psi \tag{1.2.26}$$

odnosno

$$\overline{\psi}_L = \overline{\psi} P_- \qquad \overline{\psi}_R = \overline{\psi} P_+ \tag{1.2.27}$$

Međutim, zbog

$$P_+\gamma^\mu = \gamma^\mu P_- \tag{1.2.28}$$

možemo pisati

$$\alpha(\psi) = i\overline{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi = i\overline{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L + i\overline{\psi}_R\gamma^\mu\partial_\mu\psi_R \tag{1.2.29}$$

Očigledno, možemo odvojiti SU(N)×U(1) transformaciju za L i R fermione:

$$\delta\psi_L = i\varepsilon_a^L T^a\psi_L \quad , \quad \delta\psi_R = i\varepsilon_a^R T^a\psi_R \tag{1.2.30}$$

ili

$$\psi_L \to U_L\psi_L \quad , \quad \psi_R \to U_R\psi_R \tag{1.2.31}$$

Fizička interpretacija L i R stanja je da su ona svojstvena stanja heliciteta fermiona. Razmotrimo ravan talas koji se kreće u 3 pravcu. Fermioni su bezmaseni, pa je stoga $p^0 = p^3$, dok je $p^1 = p^2 = 0$. Dirac-ova jednačina u prostoru impulsa je

$$p^\mu\gamma^\mu\psi = 0 \quad \text{ili} \quad p^0(\gamma^0 - \gamma^3)\psi = 0,$$

odnosno

$$\gamma^0\psi = \gamma^3\psi \tag{1.2.32}$$

pri čemu je $\gamma^0 = \gamma^4$

Spinski angularni moment u 3. pravcu je:

$$J^3 = \frac{\sigma^{12}}{2} = \frac{i\gamma^1\gamma^2}{2} \tag{1.2.33}$$

Tada je

$$\begin{aligned} J^3\psi_L &= \frac{i}{2}\gamma^1\gamma^2\psi_L = \frac{i}{2}\gamma^0\gamma^0\gamma^1\gamma^2\psi_L = \\ &= \frac{i}{2}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^0\psi_L = \frac{i}{2}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3\psi_L = \\ &= -\frac{1}{2}\gamma_5\psi_L = -\frac{1}{2}\psi_L \end{aligned} \tag{1.2.34}$$

Stoga ψ_L opisuje čestice sa helicitetom $-\frac{1}{2}$, koje nazivamo levorukim česticama, dok ψ_R opisuje čestice sa helicitetom $\frac{1}{2}$, koje nazivamo desnorukim česticama.

Simetrija (1.2.30), pod kojom se L i R polja transformišu različito, naziva se kiralnom simetrijom. Generatori kiralne simetrije komutiraju sa brojem fermiona.

Kiralna simetrija još uvek nije najveća unutrašnja simetrija Lagranžijana (1.2.19). Da bismo utvrdili najveću simetriju, moramo uvesti ideju polja konjugovanog naboja. Definišimo

$$\psi_C = C\psi^* \tag{1.2.35}$$

i

$$\psi_{CL} = P_+\psi_C \qquad \psi_{CR} = P_-\psi_C \tag{1.2.36}$$

gde je C matrica konjugacije naboja, koja deluje na Dirac-ove indekse i zadovoljava sledeće:

$$C^2 = 1 \qquad C^+ = C \qquad C\gamma^{\mu*}C = -\gamma^\mu \tag{1.2.37}$$

Oblik C zavisi od reprezentacije γ matrica. Na primer, u tzv. Majorana reprezentaciji u kojoj su sve γ matrice imaginarne, $C=1$, dok je u standardnoj Bjorken-Drell reprezentaciji $C=i\gamma^2$.

Naziv konjugacija naboja potiče od efekta transformacije (1.2.35) na Dirac-ovu jednačinu za česticu u elektromagnetnom polju. Čestice mase m i naelektrisanja ε zadovoljava jednačinu:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi-\varepsilon A^\mu\gamma^\mu\psi-m\psi=0 \tag{1.2.38}$$

gde je A^μ ermitsko, elektromagnetno polje. Vršeći kompleksnu konjugaciju, množeći sa C i koristeći (1.2.35) dobijamo:

$$i\gamma^\mu\partial_\mu\psi_C+\varepsilon A^\mu\gamma^\mu\psi_C-m\psi_C=0 \tag{1.2.39}$$

C operacija menja naelektrisanje čestice ε u naelektrisanje njene antičestice, iste mase, ali naelektrisanja $-\varepsilon$.

Interesantno u vezi sa konjugacijom naboja je to što ona menja L u R

$$\begin{aligned} C\psi_R^* &= C(P_-)^*\psi^*=C\left(\frac{1-\gamma_5^*}{2}\right)\psi^*= \\ &= C\left(\frac{1-\gamma_5^*}{2}\right)CC\psi^*=P_+\psi_C=\psi_{CL} \end{aligned} \tag{1.2.40}$$

gde smo uzeli u obzir $C\gamma_5^*C=-\gamma_5$. Ovo nam je potrebno da bismo pronašli veću simetriju (1.2.19). Pri tome je važno da u čisto unutrašnjim simetrijama ne možemo mešati ψ_L sa ψ_R. Transformacija oblika

$$\delta\psi_L=i\varepsilon_a T^a\psi_R \tag{1.2.41}$$

nema nikakvog smisla, što se može jednostavno videti delovanjem P_- na obe strane.

Ali ako mi prvo promenimo ψ_R u ψ_{CL}, konjugacijom naboja, onda ga možemo mešati sa ψ_L. Takva transformacija neće komutirati sa U(1) brojem fermiona, pošto ψ i ψ_C imaju suprotne fermionske brojeve, ali to, u ovom momentu, zanemarujemo.

Možemo iskoristiti (1.2.40) da pokažemo da:

$$\alpha(\psi)=i\overline{\psi}_L\gamma^\mu\partial_\mu\psi_L+i\overline{\psi}_{CL}\gamma^\mu\partial_\mu\psi_{CL}+tot.izvod \tag{1.2.42}$$

Zanemarujemo totalni izvod, koji ne utiče na dejstvo i kombinujemo L polja u $2N$-komponentni vektor kolonu:

$$\Psi_L=\begin{pmatrix}\psi_L\\ \psi_{CL}\end{pmatrix} \tag{1.2.43}$$

Uzimajući članove koji zavise od Ψ, Lagranžijan postaje:

$$\alpha(\Psi)=i\overline{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi \tag{1.2.44}$$

Jasno, Lagranžijan (1.2.44) je invarijantan pod SU(2N)×U(1) transformacijama, generisanim ermitskim $2N\times 2N$ matricama, koje deluju u proširenom prostoru ukusa (1.2.43). Pri tome, fermionski broj nije očuvan, čak ne postoji nijedan razlog da treba da bude jednak broj L polja. Na primer, ako fermioni imaju naelektrisanje, kao što je to u QED, simetrija je narušena do kiralne simetrije (1.2.30), zbog činjenice da naelektrisanje menja znak pri konjugaciji naboja, narušavajući tako veću simetriju.

Najopštiji fermionski maseni član koji očuvava fermionski broj, ima oblik:

$$\alpha_{mass} = -\overline{\psi}_L M \psi_R + \overline{\psi}_R M^+ \psi_L \tag{1.2.45}$$

gde je

$$\overline{\psi}_L = (\psi_L)^+ \gamma^0 \qquad \overline{\psi}_R = (\psi_R)^+ \gamma^0 \tag{1.2.46}$$

i matrica mase M je proizvoljna kompleksna matrica. Važno je primetiti da su dva člana u (1.2.45) međusobne ermitske konjugacije. Pošto su ψ_L i ψ_R kuplovani, Lagranžijan nije invarijantan u odnosu na kiralnu simetriju, (1.2.30). Kiralna transformacija menja M

$$M \to U_L^+ M U_R \tag{1.2.47}$$

Međutim, to znači da možemo koristiti kiralnu simetriju da bismo matricu mase M predstavili u kanoničkoj formi. Takođe možemo je dijagonalizovati i učiniti svaku svojstvenu vrednost realnom i pozitivnom.

Simetrija masenog člana koji komutira sa fermionskim brojem je određena degeneracijom dijagonalne masene matrice. Ako su sve mase različite, onda je jedina simetrija koja ostaje $U(1)^N$ simetrija, koja razdvaja očuvanje svakog ukusa fermiona. Ako l ukusa ima istu masu, tada postoji ne-Abelova SU(l) simetrija. Na primer, ako je svih N fermiona degenerisano, matrica mase je proporcionalna sa

$$\alpha_{mass} = \overline{\psi}\psi \tag{1.2.48}$$

Ovo narušava kiralnu simetriju, (1.2.30), ali je još uvek invarijantno pod SU(N)×U(1) simetrijom (1.2.20), u kojoj se L i R polja rotiraju zajedno.

Ako fermionski broj nije očuvan, tada su fermioni najbolje opisani sa N levorukih Weyl-ovih polja, Ψ_L, najopštiji maseni član je oblika:

$$\overline{\Psi}_{CR} M \Psi_L \tag{1.2.49}$$

gde je M kompleksna, simetrična matrica. Kinetička energija je invarijantna pod SU(N)×U(1) simetrijom:

$$\Psi_L \to U\Psi_L \tag{1.2.50}$$

Pod (1.2.50), matrica mase M se menja u

$$M \to M' = U^T M U \tag{1.2.51}$$

Ovo može biti iskorišćeno, da bismo M učinili dijagonalnom i pozitivnom.

2 - GAUGE SIMETRIJE

Na nivou dinamike, fundamentalne interakcije, odnosno bar onaj njihov deo koji razumemo, su povezane sa tzv. *gauge simetrijama.*

Simetriju klasičnog Lagranžijana možemo uvek proširiti u simetriju Lagranžijana u kom figurišu izvori, zahtevajući da se izvori transformišu na odgovarajući način. Pokazuje se da kada je moguće pronaći renormalizacionu šemu koja čuva simetriju, moguće je formulisati kvantnu teoriju, koja izražava datu simetriju.

2.1 TEOREMA NOETHER - TEORIJA POLJA

Razmotrimo, kvantnu teoriju polja sa N skalarnih polja, ϕ, realnim izvorima s i sa K fermionskih polja, ψ, i izvorima η, i Lagranžijan[1]:

$$\alpha_0\left(\phi, \partial^\mu \phi, \psi, \partial^\mu \psi\right) + s^T \phi + \overline{\eta}\psi + \overline{\psi}\eta \tag{2.1.1}$$

Pretpostavimo da je α_0 invarijantno u odnosu na globalnu unutrašnju grupu simetrije, G, pa sledi:

$$\begin{aligned} \phi &\to D_\phi\left(g^{-1}\right)\phi \\ \psi_L &\to D_L\left(g^{-1}\right)\psi_L \\ \psi_R &\to D_R\left(g^{-1}\right)\psi_R \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

gde je g element od G, a D-ovi su reprezentacije grupe simetrije. Pri tome, pošto su polja ϕ realna, reprezentacija D_ϕ mora biti realna reprezentacija. Zato su matrice D_ϕ, realne. Ova simetrija može biti proširena, tako da uključuje izvore, pa važi:

$$\begin{aligned} s &\to D_\phi\left(g^{-1}\right)s \\ \eta_R &\to D_L\left(g^{-1}\right)\eta_R \\ \eta_L &\to D_R\left(g^{-1}\right)\eta_L \end{aligned} \tag{2.1.3}$$

Važno je primetiti zamenu $L \leftrightarrow R$ za fermionske izvore, pošto članovi fermionskih izvora, kao i maseni članovi kupluju polja suprotnog heliciteta. Sada, ako su uređivanje i renormalizacija u skladu sa simetrijom, vakuumska amplituda, $Z(s,\eta,\overline{\eta})$ je takođe invarijantna u odnosu na (2.1.3).

GENERATORI - T^a

Uobičajeno je da se koristi infinitezimalni oblik (2.1.2) i (2.1.3), u članovima sa generatorima, T^a,

---

[1] oznaku α_0 koristimo za Lagranžijan bez izvora

$$
\begin{aligned}
\delta\phi &= i\varepsilon_a T_\phi^a \phi \\
\delta\psi_L &= i\varepsilon_a T_L^a \psi_L \\
\delta\psi_R &= i\varepsilon_a T_R^a \psi_R \\
\delta s &= i\varepsilon_a T_\phi^a s \\
\delta\eta_R &= i\varepsilon_a T_L^a \eta_R \\
\delta\eta_L &= i\varepsilon_a T_R^a \eta_L
\end{aligned}
\tag{2.1.4}
$$

T_j^a za $j = \phi, R, L$ su generatori reprezentacija Lie-ve algebre od G, koji odgovaraju reprezentacijama:

$$D_j\left(g^{-1}\right) = e^{i\varepsilon_a T_j^a} \tag{2.1.5}$$

Podrazumeva se sumiranje po ponovljenom indeksu a.

GAUGE SIMETRIJA

Da bismo razmotrili očuvane Noether struje povezane sa simetrijom u kvantnoj teoriji polja, korisno je prevesti globalnu simetriju (2.1.4) u gauge simetriju, koja je simetrija u kojoj parametri mogu zavisiti od prostor-vremena

$$\varepsilon_a \to \varepsilon_a(x) \tag{2.1.6}$$

Da bismo ovo sproveli, moramo uvesti skup gauge polja, koja će u ovom slučaju biti klasična polja, kao ostali izvori. Označimo ova polja sa: h_a^μ. Pod simetrijom (2.1.4) ona se transformišu na sledeći način:

$$\delta h_a^\mu = -f_{abc}\varepsilon_b h_c^\mu + \partial^\mu \varepsilon_a \tag{2.1.7}$$

Sada možemo modifikovati Lagranžijan, (2.1.1), zamenjujući izvode kovarijantnim izvodima:

$$D^\mu \equiv \partial^\mu - i h_a^\mu T^a \tag{2.1.8}$$

gde su T^a generatori reprezentacije polja na koje izvod deluje.
Stoga,

$$
\begin{aligned}
D^\mu\phi &\equiv \left(\partial^\mu - i h_a^\mu T_\phi^a\right)\phi \\
D^\mu\psi &\equiv \left(\partial^\mu - i P_+ h_a^\mu T_L^a - i P_- h_a^\mu T_R^a\right)\psi
\end{aligned}
\tag{2.1.9}
$$

Rezultujući Lagranžijan je sada invarijantan u odnosu na (2.1.4) i (2.1.7), za prostorno-vremenski zavisne parametre, ε_a.

Klasična gauge polja h_a^μ su zapravo klasične Noether struje koje odgovaraju globalnoj simetriji (2.1.2). Da bismo to pokazali, uočimo da

$$\frac{\delta D^\mu \phi}{\delta h_a^\nu} = -i\delta_\nu^\mu T_\phi^a \phi \tag{2.1.10}$$

Pretpostavimo da Lagranžijan zavisi samo od ϕ. Koristeći (2.1.10), pravilo za funkcionalno diferenciranje i činjenicu da ϕ ne zavisi od h_a^μ, možemo pisati:

$$\frac{\delta\alpha}{\delta h_a^\mu} = \frac{\delta\alpha}{\delta D^\nu\phi}\frac{\delta D^\nu\phi}{\delta h_a^\mu} = -i\frac{\delta\alpha}{\delta D^\mu\phi} T_\phi^a \phi \tag{2.1.11}$$

što je klasična Noether struja.

Ovo je primenjivo i u opštem slučaju, pošto za bilo koje polje ξ, važi:

$$\frac{\delta D^{\mu}\xi}{\delta h_a^{\nu}} = -i\delta_{\nu}^{\mu} T_{\xi}^{a}\xi \tag{2.1.12}$$

gde su T_{ξ}^{a} generatori simetrije, koji deluju na polje ξ. Stoga

$$\frac{\delta\alpha}{\delta h_a^{\mu}} = \sum_{\xi} \frac{\delta\alpha}{\delta D^{\nu}\xi} \frac{\delta D^{\nu}\xi}{\delta h_a^{\mu}} = -i\sum_{\xi} \frac{\delta\alpha}{\delta D^{\mu}\xi} T_{\xi}^{a}\xi \tag{2.1.13}$$

što je opšti oblik klasične Noether struje.

Pošto polja h_a^{μ} imaju dimenziju 1, kao izvodi, postoji samo jedan tip člana dimenzije 4 koji možemo pisati, a koji je u skladu sa svim simetrijama, a zavisi samo od h_a^{μ}. To je:

$$\frac{\kappa_{ab}}{4} h_a^{\mu\nu} h_{b\mu\nu} \tag{2.1.14}$$

gde je $h_a^{\mu\nu}$ jačina gauge polja,

$$h_a^{\mu\nu} = \partial^{\mu} h_a^{\nu} - \partial^{\nu} h_a^{\mu} + f_{abc} h_b^{\mu} h_c^{\nu} \tag{2.1.15}$$

Pri pogodnoj normalizaciji (1.1.12), dobija se da je parametar κ_{ab}:

$$\kappa_{ab} = \delta_{ab}\kappa_a \tag{2.1.16}$$

gde κ_a ne zavisi od a, u svakoj prostoj podalgebri.

KORISNA NOTACIJA

Uobičajeno je da se odbace indeksi gauge polja i da se skup zameni matričnim poljem:

$$h^{\mu} \equiv T^{a} h_a^{\mu} \tag{2.1.17}$$

Kovarijantni izvod je:

$$D^{\mu} \equiv \partial^{\mu} - ih^{\mu} \tag{2.1.18}$$

Jačina polja je

$$h^{\mu\nu} \equiv T^{a} h_a^{\mu\nu} = \partial^{\mu} h^{\nu} - \partial^{\nu} h^{\mu} - i\left[h^{\mu}, h^{\nu}\right] \tag{2.1.19}$$

Jačina polja se može dobiti i preko komutatora kovarijantnih izvoda:

$$\left[D^{\mu}, D^{\nu}\right] = -ih^{\mu\nu} \tag{2.1.20}$$

U ovoj notaciji, gauge transformacija (2.1.7) postaje:

$$\delta h^{\mu} = i\left[\varepsilon, h^{\mu}\right] + \partial^{\mu}\varepsilon \tag{2.1.21}$$

gde je $\varepsilon = \varepsilon_a T_a$. U ovom obliku, gauge transformacija se može integraliti da bi se dobio konačni oblik:

$$h^{\mu} \to \Omega h^{\mu} \Omega^{-1} + i\Omega\partial^{\mu}\Omega^{-1} \tag{2.1.22}$$

gde je

$$\Omega = e^{i\varepsilon} \tag{2.1.23}$$

2.2 GAUGE TEORIJE

Sada ćemo razmotriti šta se dešava kada pustimo da klasično gauge polje, $h^{\mu\nu}$, postane kvantno polje

$$\begin{aligned} & h^{\mu} \rightarrow G^{\mu} \\ & h^{\mu\nu} \rightarrow G^{\mu\nu} \\ & = \partial^{\mu} G^{\nu} - \partial^{\nu} G^{\mu} - i\left[G^{\mu}, G^{\nu}\right] \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

κ član iz (2.1.14) postaje član kinetičke energije za gauge polja

$$-\sum \frac{1}{4g_a^2} G_{a\mu\nu} G_a^{\mu\nu} \tag{2.2.2}$$

Normalizacija, koju smo ovde označili sa $\frac{1}{4g_a^2}$, je jednaka za dato a u svakoj prostoj komponenti gauge grupe. Konstanta g_a je konstanta gauge kuplovanja. Polja možemo izabrati tako da dobijemo kanonički koeficijent kinetičke energije, koji je $\frac{1}{4}$. Tada zakon gauge transformacije zavisi od g_a. Obično, oblik gauge transformacije fiksiramo, tako da se konstanta gauge kuplovanja javlja kao normalizacija člana kinetičke energije. Ovo je naročito pogodno kod izučavanja simetrijske strukture teorije.

2.3 GLOBALNA SIMETRIJA GAUGE TEORIJA

Pogledajmo opet gustinu Lagranžijana opšte gauge teorije:

$$\alpha = \alpha_0\left(\phi, D^{\mu}\phi, \psi, D^{\mu}\psi\right) - \sum_a \frac{1}{4g_a^2} G_{a\mu\nu} G_a^{\mu\nu} \tag{2.3.1}$$

i proučimo njenu globalnu simetriju. Naravno, gauge simetrija sama po sebi definiše globalnu simetriju, ali teorija može imati i dodatnu simetriju. Simetrijama ukusa označavaćemo samo one unutrašnje simetrije koje nisu gauge. Prva važna napomena je da svaka takva simetrija mora biti izgrađena od gauge polja. Budući da su gauge polja povezana sa generatorima gauge simetrije, ona je normalna podgrupa svake potpune grupe simetrije. Generatori kontinualne simetrije ukusa moraju komutirati sa svim gauge generatorima. Ovo, s druge strane, uzrokuje da su generatori ukusa konstante u svakoj ireducibilnoj reprezentaciji gauge grupe i da dva polja međusobno rotirana jedno u drugo simetrijom ukusa moraju pripadati istoj ireducibilnoj reprezentaciji gauge grupe. Ako izaberemo kanoničku formu gauge generatora u svakoj ireducibilnoj reprezentaciji gauge simetrije, možemo odbaciti ϕ i ψ polja i uvesti dva skupa indeksa: gauge indekse, na koje deluje gauge simetrija i indekse ukusa na koje deluju simetrije ukusa.

Razmotrimo prvo član kinetičke energije fermiona. U bazisu u kom su svi fermioni levoruki, ovaj član ima opšti oblik:

$$i \sum_r \overline{\psi}_{rL} D \psi_{rL} \tag{2.3.2}$$

gde se sumiranje vrši po različitim ireducibilnim reprezentacijama gauge grupe i gde je za svako r, fermionsko polje vektor u prostoru ukusa sa dimenzijom d_r. Svaki od ovih vektora ukusa može biti rotiran bez promene (2.3.2). Prema tome (2.3.2) ima odvojenu SU(d_r)×U(1) simetriju ukusa za svaku ireducibilnu reprezentaciju koja se javlja u sumi (za d_r različito od nule).

Ako izvršimo konjugaciju naboja nekih levorukih fermionskih polja da bismo ih napisali kao desnoruka, moramo voditi računa da se takva polja mogu drugačije transformisati pri gauge transformacijama. Ako je

$$\delta\psi_L = i\varepsilon_a T^a \psi_L \tag{2.3.3}$$

onda je

$$\delta\psi_{CR} = i\varepsilon_a\left(-T^{a*}\right)\psi_{CR} \tag{2.3.4}$$

U realnoj reprezentaciji, možemo uzeti da su generatori imaginarne, antisimetrične matrice, tako da je $-T^{a*} = T^a$ i tada se desnoruka polja transformišu na isti način. Međutim, ako je reprezentacija kompleksna, onda je $-T^{a*}$ drugačija reprezentacija. Konačno, reprezentacija može biti pseudorealna i u tom slučaju reprezentacija generisana sa $-T^{a*}$ je ista kao i ona generisana sa T^a

$$-T^{a*} = ST^a S^{-1} \tag{2.3.5}$$

ali je matrica S antisimetrična, tako da generatori ne mogu biti potpuno realni. U ovom slučaju, možemo uključiti matricu S u definiciju konjugacije naboja da bismo dobili da se desnoruka polja transformišu na isti način kao levoruka. Najpoznatiji primer pseudorealne reprezentacije su Pauli-eve matrice, koje generišu spin ½ reprezentaciju SU(2) grupe.

Situacija sa skalarnim poljima je uslovno rečeno finija, pošto globalna simetrija povezana sa datom reprezentacijom gauge grupe zavisi od toga da li je ona realna, kompleksna ili pseudorealna.

Za skup od d skalara u realnoj ireducibilnoj reprezentaciji gauge grupe, r_R, simetrija ukusa je SO(d). Član kinetičke energije ima oblik:

$$D^\mu \Phi^T D_\mu \Phi \tag{2.3.6}$$

gde je Φ vektor u prostoru ukusa (koji je i prostor reprezentacije gauge grupe).

Ako je reprezentacija skalarnih polja kompleksna, r_C, pošto su elementarna skalarna polja realna, i r_C i njoj konjugovana $\bar{r}_C$ reprezentacija se javljaju u teoriji. Pretpostavimo da postoji d kopija r_C reprezentacije, koje možemo urediti u vektor u prostoru ukusa. Možemo član kinetičke energije napisati kao:

$$D^\mu \phi^+ D_\mu \phi \tag{2.3.7}$$

Međutim, (2.3.7) opisuje $\bar{r}_C$ reprezentaciju, pošto smo mogli upotrebiti polje ϕ^*, koje se transformiše u $\bar{r}_C$ reprezentaciji. Ako je reprezentacija r_C (i $\bar{r}_C$) n dimenziona, onda zapravo postoji $2nd$ realnih polja opisanih pomoću (2.3.7), pošto je svaka komponenta ϕ kompleksna. Simetrija ukusa (2.3.7) je SU(d) simetrija koja deluje na indekse ukusa od ϕ.

Najparadoksalnija situacija se javlja u pseudorealnoj reprezentaciji. Pokazuje se da je ona izgrađena na SU(2) strukturi. Može se uzeti da generatori $2n$ dimenzione ireducibilne reprezentacije imaju sledeći oblik:

$$T_a = A_a + \vec{\tau}\cdot\vec{S}_a \tag{2.3.8}$$

gde su $\vec{\tau}$ Pauli-eve matrice, a $n\times n$ matrica A je antisimetrična, dok su $n\times n$ $\vec{S}$ matrice simetrične. Tada je:

$$\tau_2 T_a^* \tau_2 = -T_a \tag{2.3.9}$$

Struktura ukusa teorije uključuje $\vec{\tau}$ matrice na netrivijalan način. Ako postoji d identičnih reprezentacija, možemo ih opisati pomoću $2n \times 2d$ matričnog polja, sledećeg oblika:

$$\begin{pmatrix} \Sigma_{11} & . & . & . & \Sigma_{1d} \\ . & & . & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ \Sigma_{n1} & & & & \Sigma_{nd} \end{pmatrix} \tag{2.3.10}$$

gde su Σ_{ij} matrice 2×2 u Pauli prostoru, specijalnog oblika:

$$\Sigma_{ij} = \sigma_{ij} + i\vec{\tau} \cdot \vec{\pi}_{ij} \tag{2.3.11}$$

za realno σ_{ij} i π_{ij}. Gauge generatori deluju na Σ s leva. Sada član kinetičke energije ima oblik:

$$tr\left(D^{\mu}\Sigma^{+} D_{\mu}\Sigma\right) \tag{2.3.12}$$

Ovo je invarijantno u odnosu na $SU(2d)$ simetriju ukusa, generisanu delovanjem na Σ s desna matricama oblika

$$T_x = A_x + \vec{\tau} \cdot \vec{S}_x \tag{2.3.13}$$

gde su A i $\vec{S}$ $d \times d$ matrice, antisimetrična i simetrična, respektivno. Kao gauge transformacija, (2.3.13) očuvava specijalan oblik Σ.

Zato je najveća moguća simetrija ukusa za skup od d pseudorealnih reprezentacija skalara $SU(2d)$. Ova činjenica je od izuzetnog značaja za razmatranje standardnog modela sa fundamentalnim Higgs-ovin bozonom.

2.4 LOKALNA SIMETRIJA GAUGE TEORIJA

Primer lokalne gauge invarijantne teorije je i QED sa svojom elektron-pozitron-fotonskom interakcijom. Minimalno sprezanje fermionskog polja spina 1/2 sa fotonskim poljem spina 1 se dobija proširivanjem klasičnog korespondencionog principa elektromagnetne sprege, na jednačine slobodnog fermionskog polja,

$$k_{\mu} \longrightarrow k_{\mu} - eA_{\mu} \tag{2.4.1}$$

U slučaju kvantne teorije polja, ovo postaje

$$\partial_{\mu} \longrightarrow \partial_{\mu} - ieA_{\mu} \qquad \left(k_{\mu} \longrightarrow -i\partial_{\mu}\right) \tag{2.4.2}$$

Odatle, za totalnu lagranžijansku gustinu imamo:

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha_{slobodno}^{\min.sprege} + \alpha_{elektromagnetno} = \\ &= \overline{\psi}\left(i\gamma_{\mu}\left(\partial_{\mu} - ieA_{\mu}\right) - m\right)\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \\ &= \overline{\psi}\left(i\gamma_{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi + e\overline{\psi}\gamma_{\mu}\psi A_{\mu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \equiv \\ &\equiv \alpha_{slobodno} + \alpha_{\text{int}erakcije} + \alpha_{elektromagnetno} \end{aligned} \tag{2.4.3}$$

Ovo sprezanje je zaista minimalno (nisu potrebni nikakvi dodaci u α_i), jer slaganje svog našeg eksperimentalnog znanja o elektron-pozitron-fotonskoj interakciji (kada se još uzme u obzir i svojstvo renormalizabilnosti α_i) sa teorijskim znanjem samo sa ovim α_i je izuzetno.

Ako pretpostavimo da je α invarijantno bez obzira koju smo vrednost parametra izabrali u dvema tačkama prostor-vremena, tj. ako je :

$$\theta = \theta(x) \tag{2.4.4}$$

dobićemo lokalnu abelovsku teoriju zasnovanu na lokalnim gauge transformacijama ili gauge transformacijama druge vrste, koje su određene sa

$$\psi'(x) = e^{i\theta(x)}\psi(x) \tag{2.4.5}$$

ili u infinitezimalnom obliku

$$\delta\psi(x) = i\theta(x)\psi(x) \tag{2.4.6}$$

U ovom slučaju, polja i izvodi polja se ne transformišu isto, nego:

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= \psi(x) + i\theta(x)\psi(x) \\ \partial_\mu\psi'(x) &= \partial_\mu\psi(x) + i\theta(x)\partial_\mu\psi(x) + i\partial_\mu\theta(x)\cdot\psi(x) \end{aligned} \tag{2.4.7}$$

respektivno; pojavljuje se, dakle, ekstra član:

$$i\partial_\mu\theta(x)\cdot\psi(x) \tag{2.4.8}$$

u drugom izrazu.

Elektromagnetno polje je gauge invarijantno, tj. jednačine polja se ne menjaju pri transformaciji fotonskog polja

$$A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu\phi \equiv A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\beta(x) \tag{2.4.9}$$

a posebno da je $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$. Otuda se ni α_{em} ne menja. Međutim, u α su sada, pored fotonskog i fermionska polja. Interakcioni deo se ne menja, pri transformaciji (samo) fermionskih polja, budući da sadrži članove oblika $\overline{\psi}\psi$, tako da u transformisanoj lagranžijanskoj gustini α'_i postoji samo doprinos transformacije fotonskog polja:

$$\delta\alpha_i = \alpha'_i - \alpha_i = eA'_\mu\overline{\psi'}\gamma_\mu\psi' - eA_\mu\overline{\psi}\gamma_\mu\psi = \partial_\mu\beta\cdot\overline{\psi}\gamma_\mu\psi \tag{2.4.10}$$

Za α_s, račun daje da je doprinos zbog transformacije fermionskih polja:

$$\begin{aligned} \delta\alpha_s &= \alpha'_s - \alpha_s = \overline{\psi'}(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)\psi' - \overline{\psi}(i\gamma_\mu\partial_\mu - m)\psi = \\ &= \overline{\psi'}i\gamma_\mu\partial_\mu\psi' - \overline{\psi}i\gamma_\mu\partial_\mu\psi = -\partial_\mu\theta\cdot\overline{\psi}\gamma_\mu\psi \end{aligned} \tag{2.4.11}$$

Otuda je ukupna promena:

$$\delta\alpha = \delta\alpha_i + \delta\alpha_s = (\partial_\mu\beta - \partial_\mu\theta)\overline{\psi}\gamma_\mu\psi \tag{2.4.12}$$

Ako u gauge transformacijama fermionskih polja i transformaciji fotonskog polja figuriše isti infinitezimalni parametar $\theta(x)$ (tačnije $\theta(x) = \beta(x) + const$, ali se konstantni fazni faktor uvek može eliminisati, zbog postojanja članova oblika $\overline{\psi}\psi$) doprinosi neinvarijantnosti gustini lagranžijana se potiru.

Rezultat je postojanje simetrije za α, tj. lokalne gauge invarijantnosti u odnosu na gauge transformacije:

$$\delta\psi = i\theta(x)\psi \qquad\qquad \delta A_\mu = \frac{1}{e}\partial_\mu\theta(x) \tag{2.4.13}$$

Primetimo da bi prisustvo člana mase za foton

$$\mu^2 A_\mu A_\mu \tag{2.4.14}$$

narušilo gauge invarijantnost.

Vidimo, dakle, da elektromagnetno polje osigurava gauge invarijantnost elektronskog polja. U određenom smislu se to moglo i očekivati: polje traženog tipa (jer samo uvođenjem novog polja se postiže zadovoljenje teorijskog principa) treba da se prostire do beskonačnosti, da bi, u principu, obuhvatili invarijantnost u čitavom prostoru. Zbog beskonačnog dometa, polje ima masu mirovanja nula. Ovo već očito liči na elektromagnetno polje (potreban uslov je još da bude vektorsko polje).

Veza između elektromagnetnog i elektronskog polja se ostvaruje preko njihove međusobne interakcije. Na elektron deluje sila e.m. polja koja se ostvaruje putem razmene fotona, jer su fotoni nosioci informacije o ovoj sili. Apsorpcija ili emisija fotona se manifestuje promenom faze elektromagnetnog polja na potpuno određeni način. Drugim rečima, kada se jednom fiksiraju e.m. potencijali, faza elektronskog talasa je jednoznačno određena. Samim potencijalima se mogu dati proizvoljne vrednosti u izabranoj tački prostor-vremena, a time je, najšire posmatrano i faza elektronskog polja proizvoljna, no konzistentno određena svakim pojedinačnim izborom potencijala.

Gauge invarijantno e.m. polje spregnuto sa elektronskim omogućava, dakle, proširenje gauge principa: faza elektronskog polja može da bude proizvoljna funkcija prostor-vremena kao koordinate, jer sve opažajne veličine zadržavaju invarijantno značenje kada se ona menja od mesta do mesta u toku vremena.

Kvantna elektrodinamika (QED) je kvantna teorija polja elektrona i fotona. Pruža izuzetno pouzdan opis svojstava elektrona preko člana u kom figurišu samo dva parametra, masa elektrona, m_e, i konstanta fine strukture. Uspeh QED proizilazi iz dve specijalne osobine elektrona:

1. on je najlakša naelektrisana čestica
2. ne nosi boju, po stoga ne učestvuje direktno u jakim interakcijama

Ova druga osobina definiše karakteristiku klase spin ½ čestica, nazvanih leptonima koju čine: elektron e^- i njegov neutrino ν_e; mion μ^- i njegov neutrino ν_μ i taon τ^- i njegov neutrino ν_τ kao i odgovarajuće antičestice. Na današnjem nivou znanja smatramo da su μ^- i τ^- teže kopije elektrona, koje se od njega razlikuju samo po tome što im je veća masa. Slaba i elektromagnetna interakcija deluju na njih na isti način kao i na elektron. Pošto su teži, raspadaju se slabom interakcijom. Elektron, kao najlakša naelektrisana čestica, mora biti apsolutno stabilan, inače bi elektromagnetna gauge invarijantnost i globalno očuvanje naelektrisanja bili narušeni.

2.5 SU(2)×U(1)

U najprostijem i originalnom obliku, SU(2)×U(1) model opisuje slabe interakcije leptona. Potrebno je devet polja da bismo opisali e, μ i τ kao i njihove neutrine.

$$\nu_{eL} \qquad e_L^- \qquad e_R^- \tag{2.5.1}$$

$$\nu_{\mu L} \qquad \mu_L^- \qquad \mu_R^- \tag{2.5.2}$$

$$\nu_{\tau L} \qquad \tau_L^- \qquad \tau_R^- \tag{2.5.3}$$

Ne postoji zadovoljavajući dokaz da postoje desnoruki neutrini, odnosno levoruki antineutrini, pa nam zbog toga nije potrebno polje ν_R.

Za neutrine znamo da su jako laki. Moguće je da su bezmaseni, ali postoje (još uvek zbunjujuće) indicije da je moguće da imaju male mase. Ako su neutrini bezmaseni, slabe interakcije očuvavaju broj elektrona, miona i taona odvojeno. Formalno, to znači da teorija ima globalne simetrije:

$$\begin{array}{lll} \nu_{eL} \to e^{i\theta_e}\nu_{eL} & e_L^- \to e^{i\theta_e}e_L^- & e_R^- \to e^{i\theta_e}e_R^- \\ \nu_{\mu L} \to e^{i\theta_\mu}\nu_{\mu L} & \mu_L^- \to e^{i\theta_\mu}\mu_L^- & \mu_R^- \to e^{i\theta_\mu}\mu_R^- \\ \nu_{\tau L} \to e^{i\theta_\tau}\nu_{\tau L} & \tau_L^- \to e^{i\theta_\tau}\tau_L^- & \tau_R^- \to e^{i\theta_\tau}\tau_R^- \end{array} \tag{2.5.4}$$

U slučaju da je masa neutrina različita od nule javljaju se efekti koji narušavanju očuvanje leptonskog broja. Za sada ćemo ignorisati masu neutrina. Tada simetrije (2.2.4) pojednostavljuju izgradnju modela, pošto se različite familije ne mešaju međusobno.

Takođe, interakcije miona i taona su tačne kopije interakcija elektrona, tako da možemo razmatrati samo polja u familiji elektrona (2.5.1)

Gauge grupa je $SU(2)\times U(1)$, što znači da postoje četiri vektorska polja, od kojih su tri povezana sa SU(2) grupom koja označavamo sa W_a^μ, $a=1,2,3$ i jedno polje X_μ koje je u vezi sa U(1) grupom.

Struktura gauge teorije je određena oblikom kovarijantnog izvoda:

$$D^\mu = \partial^\mu + igW_a^\mu T_a + ig' X^\mu S \tag{2.5.5}$$

gde su T_a i S matrice koje deluju na polja, nazvane generatorima SU(2) i U(1), respektivno. Važno je uočiti da su konstante kuplovanja podeljene u dve grupe: g za SU(2) kuplovanje i različita g' za U(1) kuplovanje. SU(2) konstante kuplovanja moraju biti iste (ako su T_a normalizovani na isti način $\kappa \; tr(T_a T_b) = \delta_{ab}$) pošto se one međusobno mešaju pri globalnim SU(2) rotacijama. Međutim U(1) konstanta kuplovanja g' može biti različita, pošto se generator S nikad ne javlja u komutatoru sa SU(2) generatorima. Čak i ako bismo krenuli od toga da su g i g' jednaki, ne bismo bili u stanju da tu jednakost održimo u kvantnoj teoriji polja, ni na jedan prirodan način. Dve konstante kuplovanja su renormalizovane na različite načine, pa zato zahtevaju drugačije ireducibilne reprezentacije u svakom redu teorije perturbacije. Pošto su nam potrebni različiti članovi, nema smisla povezivati kuplovanja.

Da bismo potpuno odredili strukturu, moramo definisati dejstvo T_a i S na fermionska polja. Definišimo dublet

$$\psi_L \equiv \begin{pmatrix} \nu_{eL} \\ e_L^- \end{pmatrix} \tag{2.5.6}$$

Tada možemo uvesti sledeću definiciju za T_a:

$$T_a \psi_L = \frac{\tau_a}{2}\psi_L \qquad T_a e_R^- = 0 \tag{2.5.7}$$

gde su τ_a Pauli-eve matrice. Oba ova niza parametara T zadovoljavaju SU(2) komutacione relacije:

$$[T_a, T_b] = i\varepsilon_{abc}T_c \tag{2.5.8}$$

mada je za e_R^- polja, koja nazivamo SU(2) singletima, (2.5.8) zadovoljeno na trivijalan način.

Da bismo QED ugradili u teoriju koju formiramo, moramo uzeti u obzir da je neka linearna kombinacija generatora matrica naelektrisanja Q. Matrica T_3 je povezana sa naelektrisanjem, pošto je razlika u vrednostima T_3 svakog multipleta (dubleta ψ_L i trivijalno, singleta e_R^-) ista kao i razlika naelektrisanja. Stoga definišemo:

$$Q = T_3 + S \tag{2.5.9}$$

čime definišemo S. Ovo smo učinili tako da S bude proporcionalno sa jediničnom matricom u svakom multipletu.

$$Q\nu_{eL} = 0 \qquad Qe_L^- = -e_L^- \qquad S\psi_L = -\frac{1}{2}\psi_L \qquad Qe_R^- = Se_R^- = -e_R^- \tag{2.5.10}$$

S smo definisali tako da zadovoljava SU(2)×U(1) komutacionu relaciju:

$$[T_a, S] = 0 \tag{2.5.11}$$

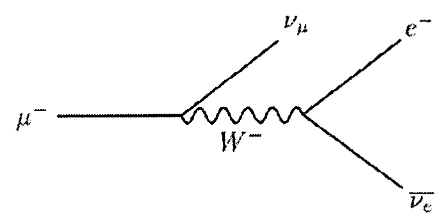
(2.5.5)-(2.5.11) u potpunosti definišu gauge kuplovanja za leptone. Da bismo proučili ta gauge kuplovanja, razmotrićemo prvo interakcije koje menjanu identitet čestica, kuplovanje W_1^μ i W_2^μ. Ako kuplovanje W_1^μ i W_2^μ za fermione napišemo zamenjujući standardni oblik Pauli-evih matrica u (2.5.5)-(2.5.7) dobićemo interakcioni član:

$$-\frac{g}{2}\left\{\overline{\nu}_{eL}(W_1 - iW_2)e_L^- + \overline{e}_L^-(W_1 + iW_2)\nu_{eL}\right\} \tag{2.5.12}$$

plus analogni član za mione. Naelektrisana polja, definisana sa:

$$W_\pm^\mu = \frac{W_1 \mp iW_2}{\sqrt{2}} \tag{2.5.13}$$

kreiraju i anihiliraju naelektrisane intermedijarne bozone. $W_\pm^\mu$ anihilira (kreira) $W^\pm(W^\mp)$ čestice. (2.5.10) uslovljava μ raspad, kako je do prikazano na slici 2.1



slika 2.1

Na slici 2.1 javljaju se dve greške u vezi sa predstavom slabe interakcije. μ^- i e^- su bezmaseni, a ni $W^\pm$ nemaju masu. SU(2) ×U(1) gauge simetrija ne dozvoljava leptonski maseni član $\overline{e_L^-}e_R^-$ ili $W^\pm$ maseni član. Leptoni očigledno na neki način moraju dobiti masu kako bi teorija imala smisla. $W^\pm$ takođe moraju biti veoma teški kako bi se teorija slagala sa podacima. Bezmaseni $W^\pm$ uslovljavaju da slaba interakcija bude dugodometna. Međutim, ova sila deluje na veoma kratkim rastojanjima.

I pored ovih nedostataka nastavićemo, razmatrajući neutralni sektor. Ako je u teoriju ugrađena QED, jedna linearna kombinacija W_3^μ i X^μ polja, mora biti fotonsko polje A^μ. Stoga pišemo:

$$A^\mu = \sin\theta W_3^\mu + \cos\theta X^\mu \tag{2.5.14}$$

Ortogonalna linearna kombinacija je drugo polje, koje ćemo označiti sa Z^μ:

$$Z^\mu = \cos\theta W_3^\mu - \sin\theta X^\mu \tag{2.5.15}$$

Dva nezavisna polja su ortogonalne linearne kombinacije od W_3 i X, pošto smo uzeli da je član kinetičke energije gauge polja oblika

$$-\frac{1}{4}W_a^{\mu\nu}W_{a\mu\nu} - \frac{1}{4}X^{\mu\nu}X_{\mu\nu} \tag{2.5.16}$$

gde su

$$W^{\mu\nu} = \partial^{\mu} W_a^{\nu} - \partial^{\nu} W_a^{\mu} - g\varepsilon_{abc} W_b^{\mu} W_c^{\nu}$$
$$X^{\mu\nu} = \partial^{\mu} X^{\nu} - \partial^{\nu} X^{\mu} \qquad (2.5.17)$$

Stoga, samo ortogonalne kombinacije W_3 i X imaju nezavisne članove kinetičke energije.

Na ovom mestu, $\sin\theta$ je proizvoljan parametar. Ali ako zamenimo (2.5.14-2.5.15) u kovarijantni izvod, dobijamo fotonsko kuplovanje u QED. Ovo određuje konstante kuplovanja g i g' u članovima koji sadrže $\sin\theta$ i ε.

Šematski, kuplovanja neutralnih gauge čestica su:

$$gW_3T_3 + g'XS \qquad (2.5.18)$$

Zamenjujući (2.5.14)-(2.5.15) dobijamo kuplovanja

$$A\left(g\sin\theta T_3 + g'\cos\theta S\right) + Z\left(g\cos\theta T_3 - g'\sin\theta S\right) \qquad (2.5.19)$$

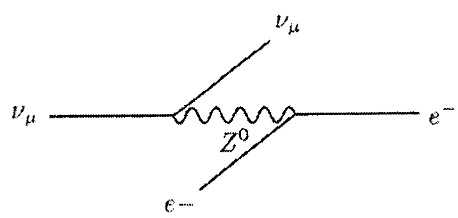
Pošto se A mora kuplovati sa $eQ = e\left(T_3 + S\right)$ iz (2.5.9), mora važiti:

$$g = \frac{e}{\sin\theta} \qquad g' = \frac{e}{\cos\theta} \qquad (2.5.20)$$

Tada su Z kuplovanja:

$$Z\left(ectg\theta T_3 - etg\theta S\right) = Z\frac{e}{\sin\theta\cos\theta}\left(T_3 - \sin^2\theta Q\right) \qquad (2.5.21)$$

Zanimljiva stvar sa (2.5.21) je da Z za razliku od fotona, ima kuplovanje sa neutrinima. Razmena Z proizvodi tzv. neutralne struje slabih interakcija kakva je $\nu_\mu e^-$, čije je elastično rasejanje prikazano na slici 2.2



slika 2.2

SU(2)×U(1) gauge strukturu je prvi postavio Glashow, 1960. godine. Priroda slabih interakcija u to vreme nije bila očigledna. To što je on dobio pravi oblik teorije, bio je veliki uspeh, koji je čekao dvanaest godina na eksperimentalnu potvrdu. Naravno, on nije znao kako $W^{\pm}$ i Z, koji moraju biti veoma teški, dobijaju masu bez eksplicitnog narušavanja gauge simetrije. Ovo je bilo poznato odmah, budući da bi bezmaseni Z uslovio jedinstvenu dugodometnu silu koja narušava parnost.

Postavlja se pitanje zašto ne damo $W^{\pm}$ i Z masu iako to narušava gauge simetriju? Problem nije u nedostatku simetrije. Stvaran problem je što teoriju sa masenim članovima ne možemo renormalizovati, što znači da ne znamo kako da joj damo smisao. Pre nego što razmotrimo masivne vektorske bozone, osvrnimo se na istorijski razvoj i proučimo četvoro-fermionsku teoriju.

Pre SU(2)×U(1), postojala je fenomenološka teorija naelektrisanih struja slabe interakcije bazirana na četvoro-fermionskoj interakciji. Za interakciju μ raspada, oblik je bio sledeći:

$$\frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\mu^a J_{ea}^* \qquad (2.5.22)$$

gde su:

$$J_\mu^a = \overline{\nu_\mu}\gamma^a(1+\gamma_5)\mu^- \tag{2.5.23}$$

i

$$J_e^a = \overline{\nu_e}\gamma^a(1+\gamma_5)e^- \tag{2.5.24}$$

(2.3.1) predstavlja interakciju struja, kao što je očigledno.

Konstanta G_F (F je od Fermi) je određena iz brzine μ raspada. Ima jedinicu $\frac{1}{m^2}$

$m_p^2 G_F \approx 10^{-5}$, gde je m_p masa protona.

(2.5.2) daje potpuno adekvatan opis μ raspada u tri aproksimacije. Teškoća je što je to 6-dimenzioni operator, gde je dimenzija fermionskog polja određena zahtevom da član kinetičke energije $i\overline{\psi}\partial\psi$ ima dimenziju 4. Teorija se ne može renormalizovati, pošto kvantne korekcije proizvode beskonačne delove interakcija sa sve većim i većim dimenzijama, a koji imaju konstantne koeficijente.

Ako se odlučimo za teoriju koju je moguće renormalizovati, četvoro fermionska teorija nije dobra. Bolja mogućnost je ako dodamo e^-, μ^- i $W^\pm$ i Z članove u gauge teoriju iz odeljka (2.5.1) Tada ne postoje 6-dimenzioni operatori u Hamiltonijanu interakcije. Ali se teorija još uvek ne može renormalizovati. Da bismo ovo pokazali, pogledajmo Z kuplovanja (isto možemo i sa $W^\pm$).

Član kinetičke energije je tada

$$-\frac{1}{4}(\partial^\mu Z^\nu)(\partial_\mu Z_\nu - \partial_\nu Z_\mu) \tag{2.5.25}$$

koji ne uključuje longitudinalnu komponentu Z^μ polja, komponentu koja je proporcionalna gradijentu skalarnog polja. Označimo ovu longitudinalnu komponentu sa Z_L, a transverzalnu sa Z_T.

$$Z^\mu = Z_T^\mu + Z_L^\mu \partial_\mu Z_T^\mu = 0 \qquad \partial^\mu Z_L^\nu - \partial^\nu Z_L^\mu = 0 \tag{2.5.26}$$

Teorija u kojoj dajemo masu Z članu, uključuje Z_L u masenom članu. Pošto se Z_L pojavljuje samo u masenom članu, a ne i u članu kinetičke energije, ono deluje kao pomoćno polje. Z_L propagator ne opada sa momentom. $M_L Z_L$ tada deluje kao dvodimenziono polje za svrhe računanja energije. Tada su Z_L kuplovanja sa ostalim, npr. $\overline{\psi} Z_L \psi$ petodimenziona i ne mogu se renormalizovati.

Ako na neki način očuvamo gauge invarijantnu strukturu i damo mase $W^\pm$ i Z, možemo biti u stanju da održimo mogućnost renormalizacije. To je ono što su učinili Weinberg i Salam, koristeći spontano narušavanje simetrije.

3 SPONTANO NARUŠAVANJE SIMETRIJE - OSNOVE

Egzaktne simetrije su, sa eksperimentalnog stanovišta, samo idealizacija, tj. nikada nisu, u tom smislu, realno ispunjene. Proglašavamo ih, u teorijskom smislu, egzaktnim zato što neslaganja možemo smatrati eksperimentalnom greškom usled ograničene preciznosti naših mernih uređaja, a pogotovo ako su posledice ovakve pretpostavke dalekosežne u jednom opštijem teorijskom smislu (npr. masa fotona i gauge princip).

Što se tiče unutrašnjih simetrija, tu imamo npr. izospinsku simetriju, SU(3) invarijantnost, itd. Mnoge od ovih simetrija su, realno, znatno narušene, a odstupanja se ne mogu svrstati pod 'eksperimentalnu grešku', jer preciznost merenja odgovarajućih parametara to isključuje.

Postoje različiti uticaji (smetnje) zbog kojih dolazi do narušavanja ovih simetrija. Ovo narušavanje može biti manje ili više izraženo. U slučaju izospinske simetrije, narušenost potiče od elektromagnetne interakcije (koja se ne može isključiti), pa α pored simetričnog dela sadrži i dodatni:

$$\alpha = \alpha_{\text{simetrično}} + \delta\alpha$$

Ako je $\delta\alpha$ malo, može se pribeći perturbativnom tretiranju problema. Otuda, ako je α samo približno simetrično, dobićemo samo aproksimativnu simetriju, koja prelazi u egzaktnu kada se isključe one interakcije koje doprinose stvaranju $\delta\alpha$.

Druga mogućnost koja postoji i koja ima izuzetno važnu ulogu, je da imamo egzaktnu simetriju α-a, ali postoji stanje koje tu simetriju ne ispoljava -konkretno, stanje fizičkog vakuuma. Tada dobijamo egzaktne zakone održanja, ali je simetrija teorije narušena.

Rešenja mnogih fizičkih problema su izrazito jednostavna kada se uoče različita svojstva simetrije. Problem koji se pri tome zanemaruje je sledeći: u realnom slučaju uvek postoji barem malo odstupanja od totalne simetrije, a za ovo odstupanje očekujemo da ne utiče na simetriju u rešenju (koja potiče od pretpostavljene simetrije u samom problemu).

Da li će simetrija u problemu dati istu simetriju i u rešenjima zavisi, npr. i od pretpostavki koje su učinjene u vezi sa stabilnošću rešenja: da li je pretpostavljeno rešenje stabilno ili nestabilno. Ovo je u direktnoj vezi sa nekim parametrom, koji može imati kritičnu vrednost, koja određuje da li će i kada doći do tzv. spontanog narušavanja simetrije. U slučaju spontanog narušavanja simetrije, pri prolasku kroz kritičnu vrednost tog parametra, stabilno rešenje postaje nestabilno. Konkretan problem, koji nastaje usled ovoga, vezan je za činjenicu da ne možemo računati, u slučaju kvantne teorije polja, kvantne fluktuacije oko nestabilnog rešenja, koristeći perturbacionu teoriju. Ako to radimo, dobijamo besmislena rešenja. Ali kvantne fluktuacije možemo računati oko stabilnog rešenja i zato je potrebno da transliramo polazno polje u stabilno rešenje, a onda primenimo perturbacionu teoriju i izvršimo fizičku analizu. Kada bismo znali tačna rešenja jednačina polja, ovo ne bismo morali da radimo. Na žalost, mi znamo samo aproksimativna rešenja, a dobijamo ih korišćenjem perturbacione teorije i možemo ih popravljati izračunavajući popravke do kojeg god reda (konačno) želimo. Neke konkretne situacije će razjasniti suštinu ovog što je rečeno.

Kao jednostavan primer spontanog narušavanja simetrije, razmotrićemo teoriju sa jednim ermitskim skalarnim poljem i Lagranžijanom:

$$\alpha(\phi) = \frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^4 \tag{3.1.1}$$

Sa samo jednim poljem, ne može biti kontinualne unutrašnje simetrije, ali je $\alpha(\phi)$ invarijantno u odnosu na refleksiju:

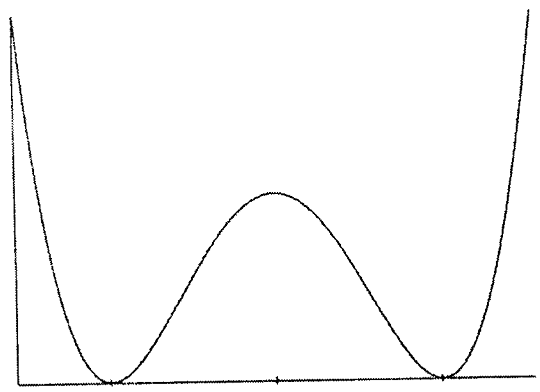
$$\phi \to -\phi \tag{3.1.2}$$

To nam dozvoljava da izostavimo ϕ^3 (i ϕ) interakcione članove, tako da teorija ima samo dva parametra, m i λ. Ako je λ malo, možemo član $\lambda\phi^4$ tretirati kao perturbaciju.

Pretpostavimo da je znak masenog člana promenjen, tako da $\alpha(\phi)$ postaje (zanemarujući konstantu)

$$\alpha(\phi)=\frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi\partial_{\mu}\phi-V(\phi)$$
$$V(\phi)=\frac{\lambda}{4}\left(\phi^2-\frac{m^2}{\lambda}\right)^2 \tag{3.1.3}$$

U ovom slučaju, ne možemo perturbovati oko $\phi=0$ vakuuma, pošto slobodna teorija sadrži tahion, česticu sa imaginarnom masom. Međutim, to nije ono što želimo, pošto potencijal ima oblik prikazan na slici 3.1. Jasno je da je $\phi=0$ vakuum nestabilan i da teoriji više odgovara jedan od dva degenerisana minimuma, $\phi=\pm\sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}$, nevažno koji.



slika 3.1

Ako , perturbovanje vršimo oko minimuma, teorija dobija smisao. Pošto su ova dva minimuma fizički ekvivalentna, biramo $\phi=\sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}$. Za polje ϕ, $\sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}$ je vakuumska očekivana vrednost (VOV). Lako je videti šta se dešava ako izrazimo teoriju preko članova sa $VOV=0$.

$$\phi^{'}=\phi-\sqrt{\frac{m^2}{\lambda}} \tag{3.1.4}$$

Rezultat je

$$\alpha(\phi^{'})=\frac{1}{2}\partial^{\mu}\phi^{'}\partial_{\mu}\phi^{'}-V(\phi^{'})$$
$$V(\phi^{'})=\frac{\lambda}{4}\left(\phi^{'2}+2\sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}\phi^{'}\right)^2= \tag{3.1.5}$$
$$=\frac{\lambda}{4}\phi^{'4}+\sqrt{\lambda m^2}\phi^{'3}+m^2\phi^{'2}$$

Treba istaći sledeće. Simetrija je skrivena. Ona je spontano narušena izborom vakuuma. Ovo proizvoljno biranje jednog osnovnog stanja za osnovno stanje sistema je zapravo smisao tzv. spontanog narušavanja simetrije.

Salam je dao lep primer za shvatanje suštine spontanog narušavanja simetrije. Posmatrajmo, odozgo, okrugli sto za ručavanje, na kojem su poređane salvete i tanjiri. Svaka osoba za stolom ima salvetu sa svoje leve i desne strane. (Svako ima obezbeđenu samo jednu salvetu i može da uzme ili levu ili desnu). Onog trenutka kada jedna osoba odluči da uzme, recimo svoju desnu salvetu, dolazi do spontanog narušavanja prethodno postojeće simetrije. Više nema izbora levo ili desno. Sve osobe moraju uzimati svoju desnu salvetu, da bi bila uspostavljena jednoznačna korespodencija. Na taj način je određen privilegovan smer uzimanja salvete u prostoru koji definiše ovaj sto. Da je ona osoba izabrala levu salvetu, smer bi bio promenjen.

Međutim, teorija je i dalje opisana pomoću dva parametra, a relacija između ϕ'^4, ϕ'^3 i ϕ'^2 članova biće očuvana efektima kvantne renormalizacije. Ovo povećava mogućnost renormalizacije, a činjenica da su nam potrebna samo dva nezavisna suprotna člana je zaveštanje spontanog narušavanje simetrije. ϕ' polje opisuje masivno skalarno polje mase $\sqrt{2}m$, sa originalnom imaginarnom masom koja definiše skalu, ali nije na trivijalan način povezano sa masama fizičkih čestica.

Postojanje drugog mogućeg vakuuma, $\phi = -\sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}$ ili $\phi' = -2\sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}$ se ne javlja u teoriji perturbacije. Ono je beskonačno daleko, pošto se polje mora menjati svuda u prostor-vremenu da bi došlo tamo. Spontano narušavanje simetrije se javlja samo u beskonačnom prostor-vremenu. U konačnom prostoru, osnovno stanje bi bilo linearna kombinacija $\phi = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}$ vakuuma, invarijantno u odnosu na diskretnu simetriju, ali su u njemu takva stanja zabranjena superselekcionim pravilima. Postojanje drugih vakuuma dovodi do porasta raznovrsnosti interesovanja i ponekad i do neperturbativnih efekata u teorijama koje obuhvataju beskonačnu zapreminu, ali ćemo ih za sada ignoristi.

3.2 GOLDSTONE-OVA TEOREMA

Razmotrimo gotovo opštu situaciju opisanu Lagranžijanom:

$$\alpha(\phi) = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \tag{3.2.1}$$

gde je ϕ multiplet bezspinskih polja i $V(\phi)$, pa je zbog toga i $\alpha(\phi)$ invarijantan u odnosu na simetrijsku grupu:

$$\delta\phi = i\varepsilon_a T^a \phi \tag{3.2.2}$$

gde su T^a imaginarne antisimetrične matrice (pošto je ϕ ermitsko).

Perturbovanje vršimo oko minimuma potencijala $V(\phi)$. Očekujemo da ϕ polje ima VOV, $\langle\phi\rangle = \lambda$, čime se V minimizira. Da bismo uprostili analizu definišemo:

$$V_{j_1 \ldots j_n}(\phi) = \frac{\partial^n}{\partial\phi_{j1} \ldots \partial\phi_{jn}} V(\phi) \tag{3.2.3}$$

Sada možemo napisati uslov da je λ ekstremna vrednost $V(\phi)$ kao:

$$V_j(\lambda) = 0 \tag{3.2.4}$$

Pošto je λ minimum, V mora zadovoljavati:

$$V_{jk}(\lambda) \geq 0 \tag{3.2.5}$$

Drugi izvod matrice $V_{jk}(\lambda)$ je matrica kvadrata mase mezona. Ovo možemo videti razvijajući $V(\phi)$ u Taylor-ov red u promenjenom polju $\phi' = \phi - \lambda$ i uočavajući da je maseni član $\frac{1}{2}V_{jk}(\lambda)\phi'_j\phi'_k$. Stoga (3.2.5) pokazuje da nema tahiona u slobodnoj teoriji u kojoj vršimo perturbovanje.

Sada dolazi zanimljivi deo, ponašanje VOV λ pri transformacijama (3.2.2). Razlikujemo dva slučaja. Ako je

$$T_a\lambda = 0 \tag{3.2.6}$$

za svako a, simetrija nije narušena. Ovo se sigurno dešava ako je $\lambda = 0$. Ali (3.2.6) je mnogo opštije tvrđenje da vakuum ne nosi naboj T_a, tako da naboj ne može nestati u vakuumu. Ali, moguće je i

$$T_a\lambda \neq 0 \qquad \text{za neko } a \tag{3.2.7}$$

Tada naboj T_a može nestati u vakuumu, čak i ako je odgovarajuća struja očuvana. Ovo je spontano narušena simetrija.

Često su neki generatori originalne simetrije spontano narušeni, dok drugi nisu. Skup generatora koji zadovoljavaju (3.2.6) je zatvoren pod komutacijama (pošto je $T_a\lambda = 0$ i $T_b\lambda = 0 \Rightarrow [T_a, T_b] = 0$) i oni generišu nenarušenu podgrupu originalne simetrijske grupe.

Vratimo se sada na matricu mase. Pošto je V invarijantno pod (3.2.2) možemo pisati:

$$V(\phi + \delta\phi) - V(\phi) = iV_k(\phi)\varepsilon_a(T^a)_{kl}\phi_l = 0 \tag{3.2.8}$$

Ako diferenciramo po ϕ_j, dobijamo (pošto je ε_a proizvoljno)

$$V_{jk}(\phi)(T^a)_{kl}\phi_l + V_k(\phi)(T^a)_{kj} = 0 \tag{3.2.9}$$

Stavljajući $\phi = \lambda$ u (3.2.9), dobijamo da drugi član otpada zbog (3.2.4), pa važi:

$$V_{jk}(\lambda)(T^a)_{kl}\lambda_l = 0 \tag{3.2.10}$$

Ali, $V_{jk}(\lambda)$ je matrica kvadrata mase M^2_{jk} za bezspinska polja, tako da (3.2.10) možemo napisati u obliku:

$$M^2T^a\lambda = 0 \tag{3.2.11}$$

Za T^a u nenarušenoj podgrupi (3.2.11) je trivijalno zadovoljeno. Ali ako je $T_a\lambda \neq 0$, (3.2.11) zahteva da je $T_a\lambda$ svojstveni vektor od M^2 sa svojstvenom vrednošću jednakoj nuli. To odgovara bezmasenom bozonskom polju, datom sa

$$\phi^T T^a\lambda \tag{3.2.12}$$

Ono je nazvano Goldstone-ovim bozonom, pošto je J. Goldstone prvi uspostavio vezu između spontano narušene kontinualne simetrije i bezmasenih čestica.

Postojanje bezmasenih čestica, možemo razumeti na sledeći način. Ako je simetrija spontano narušena, znamo da je naš vakuum deo kontinualnog niza degenerisanih vakuuma koji mogu biti rotirani jedan u drugi simetrijom. Fizički, ne možemo stvarno od jednog vakuum dobiti drugi, pošto bi to zahtevalo transformaciju naših lokalnih polja svuda u prostor-vremenu. Ako u teoriji postoje stanja čija je energija proizvoljno bliska energiji vakuumskog stanja, onda u teoriji mora biti bezmasenih čestica. One se nazivaju Goldstone-ovim bozonima. Njihova bezmasenost je translacija u teoriju lokalnih polja globalne degeneracije vakuuma.

Kao primer spontanog narušavanja globalne simetrije možemo uzeti σ-model Gell-man-a i Levy-a, model nuklearnih sila i posebno model π-nukleon kuplovanja.

Uzmimo da je ψ izospinski dublet koje reprezentuje nukleone P i N:

$$\psi = \begin{pmatrix} P \\ N \end{pmatrix} \tag{3.2.13}$$

Teorija mora biti invarijantna u odnosu na globalne rotacije, sa $T_a = \frac{\tau_a}{2}$

$$\delta\psi = i\varepsilon^a T_a \psi \tag{3.2.14}$$

Međutim, kao što smo videli, član kinetičke energije za bezmasene fermione je automatski invarijantan pod većom simetrijskom grupom, SU(2)×SU(2):

$$\begin{aligned} \delta\psi_L &= i\varepsilon_L^a T_a \psi_L \\ \delta\psi_R &= i\varepsilon_R^a T_a \psi_R \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Ovo su kiralne simetrije. (3.2.15) možemo napisti i preko članova koji sadrže infinitezimalne parametre:

$$\begin{aligned} \varepsilon^a &= \frac{\varepsilon_R^a + \varepsilon_L^a}{2} \\ \varepsilon_5^a &= \frac{\varepsilon_R^a - \varepsilon_L^a}{2} \end{aligned} \tag{3.2.16}$$

u sledećem obliku

$$\delta\psi = i\left(\varepsilon^a - \gamma_5 \varepsilon_5^a\right) T_a \psi \tag{3.2.17}$$

Ako je $\varepsilon_5^a = 0$, ovo je čista izospinska rotacija. Ako je $\varepsilon^a = 0$, onda je (3.2.17) čista kiralna rotacija.

Postavlja se pitanje smisla gore navedenog, pošto nukleonski maseni član $\overline{\psi}\psi$ narušava kiralnu simetriju i ostavlja samo izospin. Ali Gell-Man i Levy su našli da oni mogu graditi Lagranžijan sa kiralnom simetrijom i masom nukleona, ako je kiralna simetrija spontano narušena. U tom postupku, pion je interpretiran kao Goldstone-ov bozon.

Lagranžijan uključuje 2×2 matricu bezspinskih polja Σ koja se pod kiralnom simetrijom transformišu na sledeći način:

$$\delta\Sigma = i\varepsilon_L^a T_a \Sigma - i\Sigma\varepsilon_R^a T_a \tag{3.2.18}$$

Tada Lagranžijan ima sledeći oblik

$$\alpha = i\overline{\psi}\partial\psi - g\overline{\psi_L}\Sigma\psi_R - g\overline{\psi_R}\Sigma^+\psi_L + \beta(\Sigma) \tag{3.2.19}$$

Invarijantnost Yukawa kuplovanja može biti primetna u članovima konačnih transformacija. Infinitezimalne transformacije (3.2.15) i (3.2.18) možemo integraliti da bismo dobili:

$$\psi_L \to L\psi_L \qquad \psi_R \to R\psi_R \tag{3.2.20}$$

$$\Sigma \to L\Sigma^+ R \tag{3.2.21}$$

gde su L i R nezavisne 2×2 unitarne matrice, sa determinantom jednakom jedinici,

$$L = \exp\left(il^a\tau_a\right) \qquad R = \exp\left(ir^a\tau_a\right) \tag{3.2.22}$$

gde su l^a i r^a proizvoljni realni 3-vektori.

Najopštija 2×2 matrica ima osam realnih komponenata. Σ polje je ograničeno, tako da zavisi samo od četiri realna polja

$$\Sigma = \sigma + i\tau_a\pi_a \tag{3.2.23}$$

Nije očigledno da je ovaj oblik očuvan pri transformacijama (3.2.18), ali se pokazuje da važi (eksplicitnim izračunavanjima transformacija na σ i π_a polja):

$$\begin{aligned}\delta\sigma &= \varepsilon_5^a \pi_a \\ \delta\pi_a &= -\varepsilon_{abc}\varepsilon^b \pi_c - \varepsilon_5^a \sigma\end{aligned} \qquad (3.2.24)$$

Zamenjujući (3.2.23) u α, možemo Yukawa kuplovanja napisati kao

$$-g\sigma\overline{\psi}\psi + ig\pi_a\overline{\psi}\gamma_5\tau_a\psi \qquad (3.2.25)$$

Iz (3.2.25) se može videti da π_a polja na pravi način opisuju pione. Kuplovanje g je πNN kuplovanje $g_{\pi NN}$.

Još uvek nemamo član nukleonske mase, ali je iz (3.2.25) jasno da ako damo σ VOV, bićemo na dobrom putu. Da bismo ovo završili, moramo postaviti pitanje kako da izgradimo $\beta(\Sigma)$ invarijantno pod SU(2)×SU(2). Iz (3.2.21) je jasno da je

$$\frac{1}{2}tr\left(\Sigma^+\Sigma\right) = \left(\sigma^2 + \pi_a^2\right) \qquad (3.2.26)$$

invarijantno. U stvari, najopštija invarijanta (bez izvoda) je funkcija $\sigma^2 + \pi_a^2$. Ovo se može videti, uočavanjem da komplikovaniji tragovi daju jačinu $\sigma^2 + \pi_a^2$, pošto

$$\Sigma^+\Sigma = \left(\sigma^2 + \pi_a^2\right) \qquad (3.2.27)$$

i proporcionalni su sa jediničnom matricom u 2×2 prostoru. Moguće je inetrpretirati (3.2.24) kao zakon transformacije 4-vektora u četvorodimenzionom Euklidskom prostoru. Invarijanta (3.2.26) je dužina vektora, jedina nezavisna veličina.

Bez daljeg objašnjavanja, možemo napisati invarijantu β kao

$$\beta(\Sigma) = \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma\partial_\mu\sigma + \frac{1}{2}\partial^\mu\pi_a\partial_\mu\pi_a - V\left(\sigma^2 + \pi_a^2\right) \qquad (3.2.28)$$

Da bismo dobili VOV, uzimamo da je V

$$V\left(\sigma^2 + \pi^2\right) = \frac{\lambda}{4}\left(\left(\sigma^2 + \pi_a^2\right) - F_\pi^2\right)^2 \qquad (3.2.29)$$

gde je λ bezdimenziona konstanta, a F_π ima dimenziju mase (ovo je jedina veličina na masenoj skali u dosadašnjoj teoriji). Tada $\sigma = \pi_a = 0$ nije minimum. V očigledno teži minimumu za

$$\sigma^2 + \pi_a^2 = F_\pi^2 \qquad (3.2.30)$$

Sada možemo iskoristiti SU(2)×SU(2) transformacije da bismo rotirali ma koju VOV u σ pravcu, tako da bez gubitka u opštosti možemo pretpostaviti

$$\langle\sigma\rangle = F_\pi \qquad \langle\pi_a\rangle = 0 \qquad (3.2.31)$$

i perturbovati oko tog vakuuma.

Zato definišemo pomereno polje

$$\sigma' = \sigma - F_\pi \qquad \langle\sigma'\rangle = 0 \qquad (3.2.32)$$

u članovima za koje je Lagranžijan

$$\begin{aligned}\alpha = {} & i\overline{\psi}\partial\psi - gF_\pi\overline{\psi}\psi - g\sigma'\overline{\psi}\psi + ig\pi_a\overline{\psi}\tau_a\gamma_5\psi + \\ & + \frac{1}{2}\partial^\mu\sigma'\partial_\mu\sigma' + \frac{1}{2}\partial^\mu\pi_a\partial^\mu\pi_a - \frac{\lambda}{4}\left(\sigma'^2 + \pi_a^2 + 2F_\pi\sigma'\right)^2\end{aligned} \qquad (3.2.33)$$

Ovo opisuje nukleone mase gF_π kuplovane sa skalarnim σ' poljem i bezmasenim pseudoskalarima π_a.

Postavlja sa pitanje zašto su Gell-Man i Levy zaključili da (3.2.32) ima veze sa realnim svetom. S jedne strane, fizički pion je veom lak u poređenju sa ostalim hadronima. Na primer, $\frac{m_\pi^2}{m_N^2} \approx \frac{1}{50}$. Moguće je da teorija u kojoj on nema masu i nije tako loša aproksimacija. Ali nema drugog razloga. Parametar g je merljiv samo u π- nukleon interakcijama. Ispostavlja se da je i F_π takođe moguće meriti, zato što određuje brzinu $\pi^\pm$ raspada slabim interakcijama. Ključna činjenica je da aksijalni vektor struje, struja koja je povezana sa ε_5^a transformacijama ima oblik:

$$j_{5a}^\mu = -(\partial^\mu \pi_a)\sigma + (\partial^\mu \sigma)\pi_a - \bar{\psi}\gamma^\mu \gamma_5 \tau_a \psi \tag{3.2.34}$$

i izražena preko članova pomerenog polja ima deo proporcionalan sa $\partial^\mu \pi_a$:

$$j_{5a}^\mu = -F_\pi \partial^\mu \pi_a + \cdots \tag{3.2.35}$$

Ostali članovi su bilinearni u odnosu na polja. Poenta je da ova struja ima matrične elemente različite od nule između vakuumskog i stanja jednog piona:

$$\langle 0 | j_{5a}^\mu | \pi_b \rangle = iF_\pi p^\mu \delta_{ab} \tag{3.2.36}$$

gde je p^μ moment piona. Normalna struja, kao i naboj sa kojim je povezana, vrši pomeranje unutar multipleta. (3.2.36) je pokazatelj spontanog narušavanja simetrije. Pri ma kojoj brzini, raspad $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$ je proporcionalan sa F_π^2, pa F_π možemo meriti. Masa nukleona se može predvideti na osnovu

$$m_N = g_{\pi NN} F_\pi \tag{3.2.37}$$

Ova relacija se naziva Goldberger-Treiman-ovom relacijom i pokazuje se da je prilično ispravna.

Pion je Goldstone-ov bozon u ovom modelu. Pravci Goldstone-ovih bozona su definisani preko $T_a \lambda$, gde je λ VOV. U ovoj teoriji, generatori izospina anihiliraju vakuum, tako da izospin nije spontano narušen i nema skalarnih Goldstone-ovih bozona. Ali kiralne transformacije rotiraju VOV u π pravcu ($\sigma \pi_a = \cdots + \varepsilon_5^a F_\pi$ iz (3.2.24)), pa je kiralna simetrija narušena i pioni su Goldstone-ovi bozoni.

Masu piona možemo uvesti dodajući V članu:

$$\frac{m_\pi^2}{2}\left(\sigma^2 + \pi^2 - 2F_\pi \sigma + F_\pi^2\right) \tag{3.2.38}$$

koji nije invarijantan zbog linearnog člana $m_\pi^2 F_\pi \sigma$.

3.3 HIGGS-OV MEHANIZAM

Pokušajmo sada da primenimo ideju spontanog narušavanja simetrije na SU(2)×U(1) model leptona. Jasno je da možemo dobiti masu elektrona praktično na isti način kao u slučaju nukleona u σ-modelu, ali na prvi pogled nije očigledno kako $W^\pm$ i Z dobijaju masu. Da bi elektron dobio masu, potreban nam je SU(2) ×U(1) multiplet bezspinskih polja mogu da sparuju ψ_L i e_R^- u Yukawa kuplovanje

$$-f\overline{e_R^-}\phi^+\psi_L + h.c. \tag{3.3.1}$$

Ako se polje ϕ transformiše pod SU(2) $\times$U(1) sa naelektrisanjem

$$\vec{T}\phi = \frac{\vec{\tau}}{2}\phi \qquad\qquad S\phi = \frac{1}{2}\phi \tag{3.3.2}$$

onda (2.5.6) i (2.5.10) sa (3.3.2) uzrokuju da je (3.3.1) invarijantno pod SU(2) transformacijom $\delta = i\varepsilon_a T^a + i\varepsilon S$. Evidentno, ϕ mora biti dubletno polje

$$\phi = \begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix} \tag{3.3.3}$$

gde su oznake u gornjem desnom uglu Q vrednosti u skladu sa $Q = T_3 + S$. Pritom važi

$$\delta\phi^+ = -i\varepsilon_a\phi^+T_a - \frac{i}{2}\varepsilon\phi^+ \tag{3.3.4}$$

pa je

$$\delta\left(\phi^+\psi_L\right) = -i\varepsilon\left(\phi^+\psi_L\right) \tag{3.3.5}$$

$\phi^+\psi_L$ je SU(2) singlet sa $S=-1$, kao i e_R^- pa je (3.3.1) invarijanta. Kada ϕ^0 ima VOV različitu od nule, (3.3.2) ima deo koji izgleda kao masa elektrona.

Pošto su SU(2) $\times$U(1) karakteristike ϕ određene, poznato nam je i kuplovanje gauge čestica sa ϕ - ono je određeno kovarijantnim izvodima:

$$\alpha_{KE}(\phi) = \left(D_\mu\phi\right)^+\left(D^\mu\phi\right) \tag{3.3.6}$$

Možemo sve izvesti i u ovoj notaciji, ali je znatno zgodnije preći na notaciju u kojoj su skalarna kompleksna polja ϕ^+ i ϕ^0 izražena preko njihovih realnih i imaginarnih delova

$$\begin{pmatrix}\phi^+\\ \phi^0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{\phi_3 + i\phi_4}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \tag{3.3.7}$$

Konstanta $\sqrt{2}$ služi da osigura da su polja normalizovana na isti način. Na ma kom nivou možemo polja ϕ_j urediti u realni 4-vektor i postaviti pitanje kako se generatori $\vec{T}$ i S izražavaju u ovoj notaciji.

Stoga, pišemo

$$\Phi = \begin{pmatrix}\phi_3\\ \phi_4\\ \phi_1\\ \phi_2\end{pmatrix} \tag{3.3.8}$$

Prostor Φ polja ima strukturu tenzorskog proizvoda. To je tenzorski proizvod dvodimenzionalnih prostora originalnog ϕ, na koji deluju τ i dvodimenzionalnog prostora koji odgovara realnom i imaginarnom delu komponenata ϕ, za koje možemo definisati nezavisan skup Pauli-evih matrica $\vec{\sigma}$. 15 ermitskih matrica bez traga, koje deluju na ϕ, možemo napisati kao:

$$\sigma_j, \tau_j \text{ i } \sigma_j\tau_k \qquad\qquad j,k = 1,2,3 \tag{3.3.9}$$

U ovoj notaciji lako možemo napisati i generatore $\vec{T}$ i S. Postupak je jednostavan i opšt: antisimetrične matrice sa ne menjaju u ϕ prostoru, a simetrične se množe sa $-\sigma_2$ kako bi postale antisimetrične. Stoga

$$
\begin{aligned}
T_1\Phi &= -\frac{1}{2}\tau_1\sigma_2\Phi \\
T_2\Phi &= \frac{1}{2}\tau_2\Phi \\
T_3\Phi &= -\frac{1}{2}\tau_3\sigma_2\Phi \\
S\Phi &= -\frac{1}{2}\sigma_2\Phi
\end{aligned}
\tag{3.3.10}
$$

Lako se može proveriti da (3.3.10) daje iste zakone transformacije kao (3.3.2) i (3.3.7). Prednost ove notacije je što pruža mogućnost znatno jednostavnijeg identifikovanja Goldstone-ovih bozona. Koristimo je upravo zbog njene jednostavnosti.

U zavisnosti od Φ član kinetičke energije postaje:

$$
\begin{aligned}
\alpha_{KE}(\phi) &= \frac{1}{2}D^{\mu}\Phi^{T}D_{\mu}\Phi = \\
&= \frac{1}{2}\left[\partial^{\mu}\Phi^{T} - i\Phi^{T}\left(\frac{e}{\sin\theta}\vec{T}\cdot\vec{W}_{\mu} + \frac{e}{\cos\theta}SX_{\mu}\right)\right]\cdot \\
&\cdot\left[\partial_{\mu} + i\left(\frac{e}{\sin\theta}\vec{T}\cdot\vec{W}_{\mu} + \frac{e}{\cos\theta}SX_{\mu}\right)\right]\Phi
\end{aligned}
\tag{3.3.11}
$$

Poenta svega ovoga je da (3.3.11) sadrži članove oblika $\Phi^{T}W_1^{\mu}W_{1\mu}\Phi$. Ako Φ ima VOV, ovo izgleda kao da W_1 ima masu. Moguće je da bismo na ovaj način mogli dati masu $W^{\pm}$ i Z. Naravno, verujemo da je to moguće bez mase fotona, ali i dalje imamo Goldstone-ove bozone koji nam smetaju.

Najopštiji $SU(2)\times U(1)$ invarijantni potencijal zavisi samo od kombinacije $\phi^{+}\phi$. Posebno ako on ima oblik

$$
V(\phi) = \frac{\lambda}{2}\left(\phi^{+}\phi - \frac{v^2}{2}\right)^2
\tag{3.3.12}
$$

ϕ će imati VOV.

Želimo da ϕ^0 VOV bude realna i pozitivna, tako da masa elektrona koja sledi iz (3.3.1) bude takođe realna i pozitivna. Ovo je naravno, stvar konvencije. Možemo izvesti $SU(2)\times U(1)$ transformaciju tako da bilo koja ϕ^{+} i ϕ^0 VOV bude oblika:

$$
\langle\phi^{+}\rangle = 0 \qquad \langle\phi^{0}\rangle = \frac{v}{\sqrt{2}}
\tag{3.3.13}
$$

za realno v. Pokažimo to. Pretpostavimo

$$
\langle\phi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}
\tag{3.3.14}
$$

Transformacijom oblika

$$
\phi \to \exp(2i\theta_3 T_3)\phi
$$

dobijamo

$$a \to e^{i\theta_3} a \qquad b \to e^{-i\theta_3} b \tag{3.3.15}$$

Pogodnim izborom θ_3 možemo dobiti da a i b budu u fazi. Tada je

$$\phi \to \exp(2i\phi_2 T_2)\phi \tag{3.3.16}$$

ortogonalna transformacija kojom možemo rotirati vektor $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ u pravcu ϕ^0. Drugom (3.3.15) transformacijom možemo postići da VOV bude realna i pozitivna. Stoga, sve što smo sproveli je da bismo odabrali pogodnu formu VOV tako da je naše originalno označavanje fermionskih polja konzistentno.

U bilo kom slučaju, (3.3.13) je ekvivalentno sa

$$\langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.3.17}$$

Prepisaćemo (3.3.13) izražavajući ga preko članova koji zavise od VOV, λ i pomerenog skalarnog polja:

$$\Phi' = \Phi - \lambda \tag{3.3.18}$$

Naravno, $\alpha_{KE}(\Phi)$ sadrži član kinetičke energije za Φ' polja. Za sada ćemo se zadržati na kvadratnim članovima polja. Postoje dve vrste:

$$\frac{1}{2}\lambda^T \left[\frac{e}{\sin\theta} \vec{T} \cdot \vec{W}^\mu + \frac{e}{\cos\theta} S X^\mu \right] \cdot \left[\frac{e}{\sin\theta} \vec{T} \cdot \vec{W}_\mu + \frac{e}{\cos\theta} S X_\mu \right] \lambda \tag{3.3.19}$$

i

$$i\partial^\mu \Phi'^T \left[\frac{e}{\sin\theta} \vec{T} \cdot \vec{W}_\mu + \frac{e}{\cos\theta} S X_\mu \right] \lambda \tag{3.3.20}$$

(3.3.19) je W i Z maseni član, što smo i tražili. Ali (3.3.20) deluje opasno, pošto opisuje neku vrstu mešanja Goldstone-ovih bozona i gauge polja. Polja Goldstone-ovih bozona su:

$$\Phi'^T \vec{T}\lambda = \Phi^T \vec{T}\lambda \tag{3.3.21}$$

Polje $\Phi'^T S\lambda$ nije nezavisno, zbog $T_3\lambda = -S\lambda$.

Međutim, mi još uvek nismo iskoristili svu našu slobodu da bismo izveli lokalne $SU(2) \times U(1)$ transformacije. U stvari, mi možemo da izaberemo gauge, nazvan unitarnim gauge-om, u kom polja Goldstone-ovih bozona nestaju, tako da možemo odbaciti (3.3.20). Da bismo ovo videli, moramo se vratiti na nenarušenu teoriju. Videli smo u (3.3.14-17) da možemo upotrebiti globalnu $SU(2) \times U(1)$ simetriju da bismo dobili proizvoljnu VOV i rotirali je u ϕ_3 pravcu. Ali, pošto imamo slobodu da izvedemo drugačiju $SU(2) \times U(1)$ transformaciju u svakoj tački prostor-vremena, možemo uzeti proizvoljno polje $\Phi(x)$ i rotirati ga u ϕ_1 pravcu. Nakon ovih rotacija dobijamo:

$$\phi_2(x) = \phi_3(x) = \phi_4(x) = 0 \tag{3.3.22}$$

Naravno, nemamo više slobodu da rotiramo Φ bez narušavanja (3.3.22). Odnosno, izabrali smo gauge. Poredeći (3.3.21) i (3.3.22), možemo videti da u ovako izabranom gauge-u Goldstone-ovi bozoni nestaju. VOV je VOV jedinog preostalog polja ϕ_3.

Uzimajući u obzir (3.3.20), možemo se vratiti na (3.3.19) i pokazati da je on maseni član za $W^\pm$ i Z. Pre svega, problem se može podeliti na matricu mase neutralnog-gauge bozona i na matricu naelektrisanih bozona. Očuvanje elektromagnetnog naboja sprečava njihovo mešanje. Neutalni sektor je mnogo komplikovaniji od naelektrisanog, koji ćemo prvo razmotriti. Kovarijantni izvod možemo izraziti u zavisnosti od A^{μ} i Z polja na sledeći način:

$$\frac{e}{\sin\theta}T_3W_3^{\mu}+\frac{e}{\cos\theta}SX^{\mu}=eQA^{\mu}+\frac{e}{\sin\theta\cos\theta}\left(T_3-\sin^2\theta Q\right)Z^{\mu} \qquad (3.3.23)$$

Sada možemo videti zašto fotonsko polje nema masu - zbog

$$Q\lambda=0 \qquad (3.3.24)$$

tako da se A^{μ} ne pojavljuje u (3.3.19) i (3.3.20). (3.3.24) govori da elektromagnetna gauge invarijantnost nije narušena vakuumom. Zato foton ostaje bez mase. (3.3.24) takođe pokazuje da je $\sin^2\theta Q$ član u Z^{μ} kuplovanju irelevantan u odnosu na masu. Uvrštavajući (3.3.23)-(3.3.24) u (3.3.19)-(3.3.20) dobijamo

$$\frac{1}{2}\frac{e^2}{\sin^2\theta\cos^2\theta}Z^{\mu}Z_{\mu}\lambda^T T_3^2\lambda=\frac{1}{2}\left[\frac{ev}{2\sin\theta\cos\theta}\right]^2 Z^{\mu}Z_{\mu} \qquad (3.3.25)$$

Zato je

$$M_Z=\frac{ev}{2\sin\theta\cos\theta} \qquad (3.3.26)$$

Prostija analiza naelektrisanih polja daje

$$\frac{1}{2}\left[\frac{ev}{2\sin\theta}\right]^2\left(W_1^{\mu}W_{1\mu}+W_2^{\mu}W_{2\mu}\right) \qquad (3.3.27)$$

Stoga je

$$M_W=\frac{ev}{2\sin\theta}=M_Z\cos\theta \qquad (3.3.28)$$

Gauge definisan preko (3.3.22) se naziva unitarnim gauge-om pošto sva polja koja se javljaju odgovaraju fizičkim česticama u S matrici. Uopšteno, unitarni gauge zahteva da Goldstone-ovi bozoni nestaju

$$\Phi^T T_a\lambda=0 \qquad (3.3.29)$$

U ovom gauge-u renormalizacija nije očigledna. Ali kako je t'Hooft pokazao teorija ima mogućnost renormalizacije.

4 SPONTANO NARUŠAVANJE SIMETRIJE - PRIMENE

Pored opisane primene ideje spontanog narušavanja simetrije u fizici elementarnih čestice, fenomen da fundamentalni Hamiltonijan ima simetriju, pa zato i očuvane veličine u skladu sa Noether-inom teoremom, dok osnovno stanje sistema nema datu simetriju, predstavlja široko rasprostranjeni koncept i u fizici kondenzovane materije. Postoje mnogi sistemi u kojima ovaj fenomen dolazi do izražaja: Bose-Einsteinov kondenzat, superfluid, superprovodnik, feromagnet, antiferomagnet, itd. Za sve navedene primere karakteristično je da se ponašaju na sličan način, što pre svega podrazumeva makroskopsku koherentnost i degenerisano osnovno stanje.

4.1 ISING-OV MODEL

Ising-ov model izvorno je postavljen u cilju opisivanja feromagnetizma, tj. prisustva spontane magnetizacije u metalima kao što su Fe ili Ni, ispod kritične temperature (Curie-eva tačka). U terminologiji magnetizma, Ising-ov model se opisuje na sledeći način:

Razmotrimo kubnu, trodimenzionalnu rešetku magnetnih dipola. Svaki dipol ima jačinu m, i može biti usmeren naviše ili naniže. U prisustvu spoljašnjeg magnetnog polja jačine H, energija mikrostanja ν iznosi

$$U_\nu = -\sum_{i=1}^{N} Hms_i - J\sum_{i=1}^{N-1}\left(\sum_{j>i,jn.n.i}^{N} s_i s_j\right) \tag{4.1.1}$$

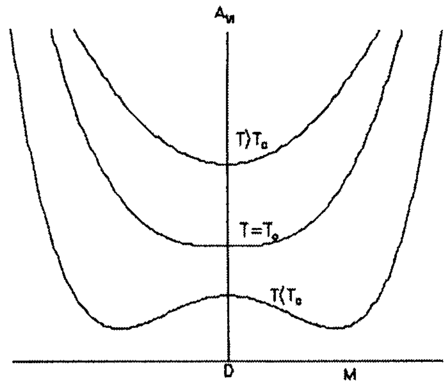
gde prvi član predstavlja interakciju između spinova i spoljašnjeg polja, sa $s_i = \pm 1$, što odgovara dvema mogućim orijentacijama spina. Drugi član opisuje interakciju među spinovima. J je pozitivna konstanta, tako da su konfiguracije paralelno orijentisanih spinova favorizovane. Prisutne su samo interakcije među najbližim susedima. Funkciju raspodele za ovaj model možemo dobiti direktno i ona je

$$\begin{aligned} Q(\beta,N,H) &= \sum_\nu \exp(-\beta U_\nu) = \\ &= \sum_{s_1}\sum_{s_2}\cdots\sum_{s_N=\pm1} \exp\left(\beta m H\sum_{i=1}^{N} s_i + \beta J\sum_{i=1}^{N-1}\left(\sum_{j>i,jn.n.i}^{N} s_i s_j\right)\right) \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Fizički gledano, očekujemo da model kakav je Ising-ov može da objasni spontanu magnetizaciju u odsustvu spoljašnjeg polja na dovoljno niskim temperaturama, pošto je paralelno uređivanje spinova energetski favorizovano. Pošto su u odsustvu spoljašnjeg polja orijentacije gore i dole ekvivalentne, spontana magnetizacija će biti dvostruko degenerisana, sa gornjom i donjom fazom. Dakle, osnovno stanje sa svim spinovima jednako orijentisanim je dvostruko degenerisano, pošto ova orijentacija može biti ili gore ili dole. Zbog toga, u odsustvu spoljašnjeg polja, očekujemo da će srednja magnetizacija

$$\langle M\rangle = Q^{-1}\sum_\nu\left(\sum_{i=1}^{N} ms_i\right)\exp(-\beta U_\nu) \tag{4.1.3}$$

uvek biti nula, pošto simetrične konfiguracije uz poništavanje različito orijentisanih spinova imaju jednaku težinu u usrednjavanju po ansamblu. Međutim, ovo se ne dešava ispod kritične temperature. Prelaz od stanja iznad kritične tačke (na kojoj je srednja magnetizacija jednaka nuli) ka stanju ispod kritične tačke (gde je srednja magnetizacija različita od nule) čak i kada ne postoji favorizovani prostorni pravac sa naziva narušavanjem simetrije. Sistem se zamrzava u jednom od dva moguća stanja. Da bismo ovo razumeli razmotrimo sliku.



slika 4.1

Nacrtali smo slobodnu energiju, A_M, sistema date magnetizacije, dobijenu Boltzmann-ovim usrednjavanjem po svim stanjima koja imaju datu magnetizaciju. Iznad kritične temperature, A_M će biti simetrična i minimum se javlja na $M = 0$. Na kritičnoj temperaturi minimum je jako proširen. Ispod kritične temperature, postoje dva minimuma A_M, na vrednostima spontane magnetizacije. Takođe se javlja i velika barijera slobodne energije koja mora biti savladana da bi sistem prebacili iz jednog u stanje suprotne magnetizacije. Koje će stanje realni makroskopski sistem odabrati, zavisi od slučajnih fluktuacija koje nastaju pri prolasku sistema kroz kritičnu tačku, što i predstavlja suštinu spontanog narušavanja simetrije.

4.2 HEISENBERG-OV FEROMAGNET

Opišimo ideju spontanog narušavanja simetrije i na primeru Heisenberg-ovog modela feromagneta. Hamiltonijan Heisenberg-ovog feromagneta je veoma jednostavan

$$H = -J\sum_{\langle i,j\rangle} \vec{s}_i \cdot \vec{s}_j \tag{4.2.1}$$

uz $J > 0$, pri čemu se sumiranje vrši samo po najbližim susedima u kubnoj rešetci. Ovo je fenomenološki model feromagneta. Na primer, ako postoji nespareni elektron za svaki atom u čvoru rešetke, Coulomb-ovo odbijanje među elektronima uzrokuje antisimetričnu prostornu talasnu funkciju, a zbog toga simetričnu spinsku talasnu funkciju. Zato nespareni spinovi u susednim čvorovima teže da se orijentišu paralelno. Važno je uočiti da Hamiltonijan ima rotacionu simetriju, što znači da ako sve spinove rotiramo za isti ugao ne dolazi do promene Hamiltonijana. Prema teoremi Noether, simetrija sistema mora uzrokovati postojanje očuvane veličine. U ovom slučaju ta veličina je ukupni spin sistema.

$$\vec{S} = \sum_i \vec{s}_i \tag{4.2.2}$$

koji komutira sa Hamiltonijanom $\left[\vec{S}, H\right] = 0$ i zato se očuvava. Rotacija svih spinova generisana je operatorom spina

$$U\left(\vec{\theta}\right) = e^{\frac{i\vec{S}\cdot\vec{\theta}}{\hbar}} \tag{4.2.3}$$

koji rotira sve spinove oko vektora $\vec{\theta}$ za ugao $|\vec{\theta}|$.

Korisno je napisati Hamiltonijan u obliku:

$$H = -J\sum\left(s_i^z s_j^z + \frac{1}{2}\left(s_i^+ s_j^- + s_i^- s_j^+\right)\right) \tag{4.2.4}$$

Koristeći ovaj oblik, lako je videti da je stanje sa svim spinovima orijentisanim gore

$$\left|\cdots\uparrow\uparrow\cdots\right\rangle \tag{4.2.5}$$

svojstveno stanje Hamiltonijana. Ovo je ono što nazivamo spontanim narušavanjem simetrije. Hamiltonijan je savršeno simetričan u odnosu na rotaciju spinova. Međutim, osnovno stanje spontano bira određenu orijentaciju i zato nije invarijantno u odnosu na simetriju (rotaciju).

U cilju pojednostavljenja razmatranja, zamislimo spinski lanac, odnosno jednodimenzionu rešetku sa N čvorova i periodičnim graničnim uslovima. Granicu $N \to \infty$ uzećemo na kraju izračunavanja. (Važno je ukazati na postojanje razliku u odnosu na jednodimenzione kvantne sisteme koji zapravo ne ispoljavaju spontano narušavanje simetrije usled dugodometnih kvantnih fluktuacija. Ovo je poznato kao Mermin-Wagner-ova teorema u fizici kondenzovane materije ili Coleman-ova teorema u 1+1 kvantnoj teoriji polja, koje nećemo razmatrati, budući da smo lanac spinova uveli radi pojednostavljenja računa, dok zapravo zamišljamo trodimenzionu rešetku). Svojstvena vrednost energije je

$$H\left|\cdots\uparrow\uparrow\cdots\right\rangle = -JN\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 \tag{4.2.6}$$

pošto postoji N parova najbližih suseda između N spinova u lancu. Ovo je zapravo osnovno stanje sistema. Koristeći standardno sabiranje spinova, ovo stanje ima ukupni spin $\frac{N\hbar}{2}$ i zato ima multiplicitet $N+1$, koji odgovara različitim orijentacijama spina $\frac{N}{2}$. Kada $N \to \infty$ postoje brojne moguće orijentacije koje su međusobno bliske, i konačno orijentacija postaje kontinualna kao u slučaju klasičnog angularnog momenta. Matematički, ako definišemo orijentaciju vektora spina sa $\vec{n} = \frac{\vec{S}}{(N/2)}$, njihove komutacione relacije su:

$$\left[n^i, n^j\right] = \frac{1}{(N/2)^2}\left[S^i, S^j\right] = \frac{1}{(N/2)^2} i\hbar\varepsilon^{ijk} S^k = \frac{i\hbar}{N/2}\varepsilon^{ijk} n^k \tag{4.2.7}$$

Kada $N \to 0$, što je isto kao da $\hbar \to 0$, vektor orijentacije postaje klasičan. Zato se orijentacija makroskopskog spina osnovnog stanja može tretirati kao klasičan objekat.

Jedan od kriterijuma za klasični vektor spina je da mora postojati beskonačno mnogo mogućih orijentacija spina. Lako je uvideti da je to i u ovom slučaju zadovoljeno. Polazeći od stanja u kom je orijentacija svih spinova gore, izvodićemo konačne rotacije svih spinova koristeći unitarni operator. Tada važi

$$e^{\frac{i\vec{s}\cdot\vec{\theta}}{\hbar}} = e^{\frac{i\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta}}{2}} = \cos\frac{|\vec{\theta}|}{2} + i\vec{\sigma}\cdot\frac{\vec{\theta}}{|\vec{\theta}|}\sin\frac{|\vec{\theta}|}{2} \tag{4.2.8}$$

Dobijamo:

$$e^{\frac{i\vec{\sigma}\cdot\vec{\theta}}{2}}\left|\uparrow\right\rangle = \cos\frac{|\vec{\theta}|}{2}\left|\uparrow\right\rangle + i\sin\frac{|\vec{\theta}|}{2}\left(\frac{\theta_z}{|\vec{\theta}|}\left|\uparrow\right\rangle + \frac{\theta_x + i\theta_y}{|\vec{\theta}|}\left|\downarrow\right\rangle\right) \tag{4.2.9}$$

Zbog toga je

$$\langle \cdots \uparrow\uparrow \cdots | U(\theta) | \cdots \uparrow\uparrow \cdots \rangle = \lim_{N\to\infty} \left(\cos\frac{|\vec{\theta}|}{2} + i\frac{\theta_z}{|\vec{\theta}|}\sin\frac{|\vec{\theta}|}{2} \right)^N \tag{4.2.10}$$

Osim u slučaju $\vec{\theta}\| z$ članovi u zagradama imaju moduo manji od jedinice

$$\left| \cos\frac{\vec{\theta}}{2} + i\frac{\theta_z}{|\vec{\theta}|}\sin\frac{\vec{\theta}}{2} \right|^2 = 1 - \frac{\theta_x^2 + \theta_y^2}{|\vec{\theta}|^2}\sin^2\frac{\vec{\theta}}{2} < 1 \tag{4.2.11}$$

i granična vrednost je nula. Drugim rečima, rotacija osnovnog stanja dovodi do novog osnovnog stanja $U(\theta)|\cdots\uparrow\uparrow\cdots\rangle$ koje je ortogonalno na originalno osnovno stanje. Postoji beskonačno mnogo osnovnih stanja međusobno povezanih rotacijom.

Uopšteno, pretpostavimo da je Hamiltonijan invarijantan u odnosu na unitarnu transformaciju U:

$$UHU^{-1} = H \tag{4.2.12}$$

ali osnovno stanje nije

$$U|0\rangle \neq |0\rangle \tag{4.2.13}$$

Tada za sistem kažemo da ima spontano narušavanje simetrije. Kvantni sistem ispoljava tada makroskopsku koherenciju.

Postoje mnogi primeri spontanog narušavanja simetrije. Potencijali sa pozitivnim hemijskim potencijalom u slučaju Bose-Einstein-ovog kondenzata, tzv. vinska boca i meksički šešir potencijal su potencijali koji vode spontanom narušavanju simetrije. Razmotreni feromagnet je još jedan primer, kao i kristali. Kada hladimo tečnosti, tako da postanu čvrste, atomi se uređuju u kristalnu strukturu. Tečnosti, su naravno, translatorno invarijantni sistemi. Međuatomsko privlačenje usled van der Waals-ovih sila uzrokuje da se svi atomi ponašaju kao kontinualni medijum, pri čemu se situacija ne menja pri globalnoj translaciji. Međutim, u kristalima, atomi imaju određene položaje i globalna translacija dovodi do drugačijeg kristala. Translaciona invarijantnost je spontano narušena. I rotaciona invarijantnost je narušena, pošto se kubna rešetka orijentiše duž određenog vektora rešetke.

Kada je simetrija koja je spontano narušena kontinualna, kao što je rotacija spinova, translacija rešetke, promena faze u Schrödinger-ovom polju, postoji beskonačno mnogo osnovnih stanja. Ako je simetrija diskretna, kao što je inverzija spina u Ising-ovom modelu, postoji samo konačan broj osnovnih stanja.

U slučaju spontano narušene kontinualne simetrije, uvek postoje ekscitacije čija energija nema procep $E(\vec{p}) \to 0$, kako njihov impuls teži nuli, $\vec{p} \to 0$. U slučaju tečnog superfluidnog ^4He, energija fonona teži nuli linearno. Slično, fononske ekscitacije u Bose-Einstein-ovom kondenzatu takođe teže nuli, linearno. Ovo je zapravo univerzalni fenomen, koji ima jednostavan uzrok. Zamislimo, da svakoj tački prostora pridružimo tzv. potencijal vinske boce. Minimum potencijala spontano bira jednu tačku duž dna boce. Ako je izbor isti u celom prostoru, to je konfiguracija osnovnog stanja. Ako se izbor minimuma malo razlikuje od tačke do tačke, postoje prostorni izvodi, što nije ništa drugo nego kinetička energija sistema, pošto je $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$. S druge strane, ovo nema uticaj na potencijalnu energiju. Čineći prostorne varijacije sve manjim i manjim, konačno dolazimo da osnovnih stanja, pa stoga ne može biti procepa u energiji ekscitacija.

Ovaj opšti stav možemo potvrditi na primeru feromagneta.

Razmotrimo stanje

$$|k\rangle = \sum \left| \cdots \uparrow \cdots \overset{n}{\downarrow} \cdots \uparrow \cdots \right\rangle e^{ikna} \tag{4.2.14}$$

gde je a konstanta rešetke, a k je talasni vektor. Pri globalnoj translaciji za konstantu rešetke, $e^{\frac{ipa}{\hbar}}$, stanje koje dobijamo

$$e^{\frac{ipa}{\hbar}} |k\rangle = \sum_n \left| \cdots \uparrow \cdots \overset{n-1}{\downarrow} \cdots \uparrow \cdots \right\rangle e^{ikna} = \sum_n \left| \cdots \uparrow \cdots \overset{n}{\downarrow} \cdots \uparrow \cdots \right\rangle e^{ik(n+1)a} = e^{ika} |k\rangle \tag{4.2.15}$$

Dakle, ovo stanje ima konačni impuls $p = \hbar k$ i k je talasni vektor. Energija ovog stanja je

$$H|k\rangle = -J \sum_m \left(s_m^z s_{m+1}^z + \frac{1}{2}\left(s_m^+ s_{m+1}^- + s_m^- s_{m+1}^+\right)\right) \sum_n \left| \cdots \uparrow \cdots \overset{n}{\downarrow} \cdots \uparrow \cdots \right\rangle e^{ikna} \tag{4.2.16}$$

Prvi član $s_i^z s_j^z$ daje

$$\begin{aligned} &-J \sum_m s_m^z s_{m+1}^z \sum_n \left| \cdots \uparrow \cdots \overset{n}{\downarrow} \cdots \uparrow \cdots \right\rangle e^{ikna} = \\ &= -J\left((N-2)\left(\frac{\hbar}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{\hbar}{2}\right)\left(-\frac{\hbar}{2}\right)\right)|k\rangle \end{aligned} \tag{4.2.17}$$

S sruge strane operatori podizanja i spuštanja daju:

$$\begin{aligned} &-J \sum_m \frac{1}{2}\left(s_m^+ s_{m+1}^- + s_m^- s_{m+1}^+\right) \sum_n \left| \cdots \uparrow \cdots \overset{n}{\downarrow} \cdots \uparrow \cdots \right\rangle e^{ikna} = \\ &= -J \sum_m \frac{\hbar^2}{2}\left(\left| \cdots \uparrow \cdots \overset{m+1}{\downarrow} \cdots \uparrow \cdots \right\rangle e^{ikma} + \left| \cdots \uparrow \cdots \overset{m-1}{\downarrow} \cdots \uparrow \cdots \right\rangle e^{ikma} \right) = \\ &= -J \frac{\hbar^2}{2}\left(e^{-ika} + e^{ika}\right)|k\rangle \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

Uzimajući u obzir oba člana , dobijamo

$$H|k\rangle = -J\left(N\frac{\hbar^2}{4} + \hbar^2(\cos ka - 1)\right)|k\rangle \tag{4.2.19}$$

pa je energija ekscitacija

$$E(k) = J(1 - \cos ka) \tag{4.2.20}$$

i glatko teži nuli bez procepa kada impuls teži nuli, čak i kad je relacija disperzije u funkciji impulsa kvadratna, a ne linearna.

S obzirom na prisustvo fenomena spontanog narušavanja simetrije u brojnim nerelativističkim sistemima, primena metoda efektivnog Lagranžijana je proširena i u ove nerelativističke sisteme. Metod je primenjiv na ma koji sistem u kom su Goldstone-ovi bozoni jedine ekscitacije bez energetskog procepa. Suština je da su ovi stepeni slobode i njihove interakcije određeni simetrijom koja leži u osnovi modela, dok priroda modela sama po sebi nije važna.

Sprovešćemo analizu nerelativističkih sistema pri niskim energijama, i to takvih sistema koji ispoljavaju kolektivno magnetno ponašanje. Heisenberg-ov Hamiltonijan je invarijantan u odnosu na simultanu rotaciju spinskih varijabli, opisanu simetrijskom grupom G=O(3), pri čemu osnovna stanja fero- i antiferomagneta narušavaju spontano ovu simetriju do H=O(2). Odgovarajuća Goldstone-ovi bozoni su spinski talasi ili magnoni. Nasuprot relativističkoj verziji

Goldstone-ove teoreme, teorema sada ne određuju tačan oblik disperzione relacije na velikim talasnim dužinama niti određuje broj različitih Goldstone-ovi čestica: ova svojstva Goldstone-ovih stepeni slobode nisu određena samo razmatranjem simetrije, nego u slučaju Lorentz-neinvarijantnog osnovnog stanja, zavise i od specifičnih svojstava korespondiranog nerelativističkog sistema. Pokazuje se da je samo broj realnih Goldstone-ovih polja univerzalan, određen dimenzijom odnosa G/H.

Poznato je da se oblik disperzione relacije feromagneta razlikuje od njenog oblika za antiferomagnet: na velikim talasnim dužinama u prvom slučaju ona ima kvadratni oblik, dok je u drugom linearna. Mehanizam koji uzrokuje ovu pojavu, objašnjava različit broj nezavisnih magnona - jedan za feromagnet, dva za antiferomagnet. U domenu efektivnog opisa, razlika je povezana sa jednom veličinom, spontanom magnetizacijom, Σ.

U efektivnom Lagranžijanu feromagneta, spontana magnetizacija se pojavljuje kao konstanta kuplovanja povezana sa topološkim članom u kom se javlja jednostruki vremenski izvod.

$$\alpha_{eff}^{F} = \Sigma\frac{\partial_0 U^1 U^2 - \partial_0 U^2 U^1}{1+U^3} + \Sigma f_0^i U^i - \frac{1}{2}F^2 D_r U^i D_r U^i \tag{4.2.21}$$

U gornjoj notaciji, dve realne komponente magnonskog polja $U^a(a=1,2)$ su udružene u trodimenzioni jedinični vektor $U^i = (U^a, U^3)$. Veličina f_0^i obuhvata magnetno polje H: $f_0^i = \mu H \delta_3^i$. U vodećem redu, feromagnet karakterišu dve nisko energetske konstante kuplovanja: Σ i F. Odgovarajuća jednačina kretanja (Landau-Lifshitz jednačina) je Schrödinger-ovog tipa: prvi izvod po vremenu i drugi po prostoru. Pošto se samo pozitivne frekvencije pojavljuju u njenoj Fourier-ovoj dekompoziciji, kompleksno polje opisuje samo jednu česticu: u feromagnetu postoji samo jedna vrsta ekscitacija spinskih talasa za koju važi kvadratni zakon disperzije.

Osnovno stanje antiferomagneta, s druge strane, ne ispoljava spontanu magnetizaciju, tako da je efektivni Lagranžijan oblika:

$$\begin{aligned} \alpha_{eff}^{AF} &= \frac{1}{2}F_1^2 D_0 U^i D_0 U^i - \frac{1}{2}F_2^2 D_r U^i D_r U^i + \Sigma_s \mu h^i U^i \\ D_\mu U^i &= \partial_\mu U^i + \varepsilon_{ijk} f_\mu^j U^k \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

Anizotropno polje $\vec{h}$ se kupluje sa magnetizacijom Σ_s. Odgovarajuća jednačina kretanja ima drugi izvod i po vremenu i po prostoru, njena relativistička struktura određuje broj nezavisnih magnonskih stanja: Fourier-ova dekompozicija sadrži i pozitivne i negativne frekvencije, pri čemu je jedno realno polje dovoljno za opis jedne čestice. Prema tome, postoje dve različite vrste ekscitacija spinskih talasa u antiferomagnetu - kao u slučaju Lorentz-invarijantnih teorija Goldstone-ova polja i Goldstone-ove čestice su u jedan-na-jedan korespodenciji. Ove nisko energetske ekscitacije zadovoljavaju linearni zakon disperzije, u kom je brzina svetlosti zamenjena brzinom spinskih talasa $v = \frac{F_2}{F_1}$. Kao što se to obično radi u relativističkim teorijama možemo uzeti da je ova brzina jednaka jedinici. U $\hbar = v = 1$ sistemu, dve konstante kuplovanja su jednake $F_1 = F_2 \equiv F'$.

Prema tome, niskoenergetska svojstva fero- i antiferomagneta su bitno drugačija. Kao ilustraciju, razmotrimo niskotemperaturni razvoj za odgovarajuće parametre uređenja, spontanu i magnetizaciju antiferomagneta, Σ_s.

Parametar uređenja za O(N) antiferomagnet, magnetizacija Σ_s, se dobija diferenciranjem gustine slobodne energije po polju anizotropije

$$\Sigma_s(T) = -\frac{\partial z}{\partial h}$$

$$\Sigma_s(T) = \Sigma_s\left\{1 - \frac{N-1}{24}\frac{T^2}{F'^2} - \frac{(N-1)(N-3)}{1152}\frac{T^4}{F'^4} - \frac{(N-1)(N-2)}{1728}\frac{T^6}{F'^6}\ln\frac{T_\Sigma}{T} + O(T^8)\right\} \quad (4.2.23)$$

Članovi reda T^0, T^2, T^4, T^6 proizilaze iz granastog, i dijagrama s jednom, dve i tri petlje, respektivno. Zaključno sa T^6 koeficijenti su određeni konstantom F' koja stoga određuje skalu širenja. Logaritam se javlja samo u redu T^6; veličina T_Σ uključuje konstante kuplovanja u sledećem redu.

Razmotrimo prvo posebno slučaj N=4. Dve grupe O(4) i O(3) su lokalno izomorfne sa SU(2)×SU(2) i SU(2) respektivno. Stoga, gornja formula u aproksimaciji tri petlje ukazuje na parametar uređenja O(4) antiferomagneta u odsustvu spoljašnjeg polja zapravo opisuje niskotemperaturno širenje kvarkovskog kondenzata bezmasene QCD sa dva ukusa. Ovim je prikazan koncept univerzalnosti : u konstrukciji efektivnog Lagranžijana relevantna je samo matematička struktura grupa G i H, povezanih sa spontano narušenom simetrijom, dok se specifična svojstva modela ispoljavaju u numeričkim vrednostima konstanti kuplovanja.

Za N=3, T^4 član u gornjoj formuli otpada, tako da dobijamo niskotemperaturnu seriju za promenljivu magnetizaciju O(3) antiferomagneta, oblika:

$$\Sigma_s(T) = \Sigma_s\left\{1 - \frac{1}{12}\frac{(k_B T)^2}{\hbar v F'^2} - \frac{1}{864}\frac{(k_B T)^2}{\hbar^3 v^3 F'^6}\ln\frac{T_\Sigma}{T} + O(T^8)\right\} \quad (4.2.24)$$

Pri tome smo ponovo uveli dimenzije: k_B je Boltzman-ova konstanta i v je brzina spinskih talasa.

Mikroskopsko izračunavanje se poklapa sa gornjom efektivnom ekspanzijom da reda T^2, podrazumevajući da su dve konstante kuplovanja F' i Σ_s određene kao

$$F'^2 = \frac{S-\sigma}{\sqrt{2z}}\frac{\hbar v}{a^2} = 2S(S-\sigma)\frac{|J|}{a} \qquad \Sigma_s = \frac{g\mu_B(S-\sigma)}{a^3} \quad (4.2.25)$$

Izraz obuhvata sledeće veličine: integral izmene (J), najveću svojstvenu vrednost operatora spina $S_n^3(S)$, broj najbližih suseda u datom čvoru rešetke (z), Lande-ov faktor (g), Andersen-ov faktor (σ) i Borov magneton (μ_B). Brzina spinskih talasa je jednaka

$$v = 2|J|S\sqrt{2z}\frac{a}{\hbar} \quad (4.2.26)$$

Skala niskotemperaturnog razvoja je određena sa $F'\sqrt{\hbar v}$, čiju vrednost možemo proceniti. Izražavajući ovaj član u funkciji integrala izmene, dobijamo

$$F'\sqrt{\hbar v} = 2|J|S\sqrt{(S-\sigma)\sqrt{2z}} \quad (4.2.27)$$

Za prostu kubnu rešetku $(z = 6, \sigma = 0.078)$ i za $S = 1/2$, dvostruki koren na desnoj strani je približno jednak jedinici tako da dobijamo $F'\sqrt{\hbar v} \approx |J|$. Tipično integral izmene za antiferomagnete iznosi $|J| \approx 10^{-3} eV$, pa je i $F'\sqrt{\hbar v}$ približno iste veličine. Ovo možemo uporediti sa situacijom u QCD gde relevantna veličina iznosi $F_\chi\sqrt{\hbar c} \approx 92 MeV$; skale u ove dve teorije se razlikuju za jedanaest redova veličine.

U razvoju magnetizacije Σ_s pokazuje se budući da su razmatrani i drugi članovi, pored vodećeg, T^4 doprinos se ne javlja: interakcije spinskih talasa se manifestuju samo u višim redovima. Međutim, logaritamska zavisnost nije pronađena u mikroskopskim izračunavanjima. Zaključujemo da je veoma teško izračunati korekcije reda T^6 u okvirima mikroskopske teorije.

Vratimo se na feromagnet. Niskotemperaturni razvoj spontane magnetizacije je određena izvodom gustine slobodne energije po magnetnom polju i oblika je

$$\frac{\Sigma(T)}{\Sigma} = 1 - \alpha_0 T^{\frac{3}{2}} - \alpha_1 T^{\frac{5}{2}} - \alpha_2 T^{\frac{7}{2}} - \alpha_3 T^4 + O\left(T^{\frac{9}{2}}\right) \tag{4.2.28}$$

Koeficijenti α_n ne zavise od temperature i uključuju različite konstante kuplovanja koje se javljaju u efektivnom Lagranžijanu, koji fenomenološki parametrizuje mikroskopske detalje sistema.

U gornjem izrazu, poluceli stepeni temperature odgovaraju neinteragujućim magnonima; ovi doprinosi mogu biti apsorbovani redefinisanjem relacije disperzije. Vodeći član opisuje magnon-magnon interakciju koja je reda T^4 i jasno potvrđuje Dyson-ov mikroskopski račun. Tehnika efektivnog Lagranžijana se pokazuje znatno uspešnijom od uobičajenih metoda fizike kondenzovane materije pošto analize mogu biti izvršene u višim redovima; izračunavanje pokazuje da je sledeći interakcioni član koji sledi iz nivoa tri petlje, reda $T^{\frac{9}{2}}$.

Ova tehnika je i znatno jasnija, budući da rešava problem sa tačke nezavisne od modela, bazirane na simetriji - na velikim talasnim dužinama mikroskopska struktura se ispoljava samo u numeričkim vrednostima konstanti kuplovanja.

4.3 TOPOLOŠKE EKSCITACIJE ILI DEFEKTI

Postoje i drugi dokazi narušene simetrije u fizičkim sistemima. Obično ih nazivamo topološkim ekscitacijama ili defektima i oni odgovaraju kolektivnim stepenima slobode koji nose naboje ili kvantne brojeve očuvane iz topoloških razloga i nisu povezani sa manifestovanjem simetrije dejstva. Pojava ovih topoloških naboja vrši stabilizaciju odgovarajućih kolektivnih ekscitacija. Topološke ekscitacije se mogu manifestovati kao čestice, stringovi ili ravni objekti (solitoni), a možemo ih interpretirati i kao kvantno mehanički proces tunelovanja (instantoni). Zavisno od modela u kom se javljaju ove ekscitacije nose različita imena: zidovi domena, vrtlozi, kosmički stringovi, monopoli, teksture, sfaleroni, itd. Defekti su ključ za potpuno razumevanje fizike sistema sa narušenom simetrijom i vode ka neočekivanim i egzotičnim fenomenima koji nisu perturbativne prirode.

Prototipski primer topološkog defekta je Abrikosov-Nielsen-Olesen-ova cev fluksa u superprovodnicima tipa II sa narušenom U(1) gauge simetrijom. Topološki očuvan kvantni broj koji karakteriše ove defekte je magnetni fluks, koji može imati samo diskretne vrednosti. Lep, ali nažalost, još uvek neuočen primer u fizici čestica je t'Hooft-Polyakov monopol, koji se javlja u ma kom modelu velikog ujedinjenja u kom je prosta gauge grupa G narušena do podgrupe H koja sadrži elektromagnetni U(1) faktor. Ovde je magnetni naboj koji nose monopoli očuvan iz topoloških razloga. Zapravo otkriće da ti modeli podržavaju magnetne monopole miri dva poznata argumenta kvantizacije električnog naboja, Dirac-ov argument zasnovan na postojanju magnetnih monopola i očiglednu činjenicu da U(1) generator mora biti kompaktan, pošto pripada većoj kompaktnoj gauge grupi.

Primer modela sa narušenom globalnom simetrijom koji podržava topološke ekscitacije je efektivni sigma model koji opisuje niskoenergetske jake interakcije mezona. To je, faza narušene kiralne simetrije. Moguće je dodati topološki član i stabilizujući član dejstvu da bismo dobili teoriju koju karakterišu topološki objekti nalik česticama, nazvani skirmionima koji imaju ista svojstva kao barioni. U skladu sa efektivnim modelom Goldstone-ovih bozona, ponovo smo došli da kompletnog spektra modela jakih interakcija (QCD) i njegove niskoenergetske dinamike. Štaviše, ova slika nas vodi ka privlačnom, fenomenološkom modelu bariona.

Još jedna oblast fizike u kojoj defekti igraju ključnu ulogu je kosmologija. Prema standardnom kosmološkom modelu velikog praska, vasiona se hladila kroz niz faznih prelaza koji su narušavali lokalnu i/ili globalnu simetriju u vrlo ranoj fazi. Pitanje stvarne formacije defekata u ovim faznim prelazima je od primarnog značaja. Postoje neslaganja oko mogućnosti da su magnetni monopoli stvarani obilno. Zato je postojala težnja da oni dominiraju u masi vasione, međutim njih je veoma teško smestiti a i ako su formirani morali su biti rašireni. Fazni prelazi koji dovode do formiranja (lokalnih ili globalnih) kosmičkih stringova su znatno interesantniji. Nasuprot magnetnim monopolima, prisustvo kosmičkih stringova ne vodi kosmološkoj katastrofi i u skladu sa privlačnom, ali još uvek spekulativnom teorijom kosmičkih stringova moguće je da su oni uzrok formiranja galaksija i drugih velikih struktura danas prisutnih u vasioni.

Slični fazni prelazi koji narušavaju simetriju su razmatrani i u fizici kondenzovane materije. Jedan je pomenuti prelaz iz normalne u superprovodnu fazu superprovodnih materijala tipa II, koji mogu dovesti do pojave cevi magnetnog fluksa. U oblasti niskotemperaturne fizike postoji veliki broj teoretskih i eksperimentalnih radova o prelazima iz normalne u superfluidnu fazu ^3He u kojima nastaju brojni linijski i tačkasti defekti. Takođe u jednoosnim nematskim tečnim kristalima, tačkasti, linijski defekti i teksture nastaju u prelazima iz neuređene u uređenu fazu u kojoj je rotaciona globalna simetrijska grupa SO(3) narušena do semi-direktnog proizvoda grupa $U(1) \times Z_2$. Dvoosni nematski tečni kristali ispoljavaju fazni prelaz u kom je globalna rotaciona simetrijska grupa narušena do proizvoda grupa $Z_2 \times Z_2$ izazivajući linijske defekte ograničene elementima neabelovske grupe $\overline{D}_2$. Nematski kristali su jeftini materijali i u poređenju sa ^3He, znatno jednostavniji za rad u laboratoriji. Fazni prelazi koji narušavaju simetriju se obično javljaju na temperaturama koje mogu biti dostignute na jednostavan način, pri čemu je veličina defekata koji se javljaju takva da se mogu posmatrati prostim mikroskopom. Stoga su ovi materijali lako dostupan eksperimentalni okvir za izučavanje defekata izazvanih faznim prelazima i u izvesnom smislu imitiraju fiziku ranog univerzuma u laboratoriji.

4.4 SVOJSTVA POJEDINAČNIH DEFEKATA

Fizička svojstva topoloških defekata se određuju ispitivanjem njihovih interakcija sa običnim česticama ili ekscitacijama u modelu. Ovim se zapravo izučavaju procesi koji su u pozadini defekata. Tačnije, možemo izračunati korekcije različitih veličina koje karakterišu defekt, što podrazumeva izučavanje operatora fluktuacija. Pritom moramo razlikovati stanja sa svojstvenom vrednošću jednakoj nuli i različitoj od nule. Stanja različita od nule vode ka običnim renormalizujućim efektima, kakvi su masa i konstante kuplovanja renormalizacije. Stanja jednaka nuli, koja su obično posledica globalne simetrije u teoriji, vode ka kolektivnim koordinatama. Njihova kvantizacija uzrokuje semiklasičan opis spektra teorije u datoj topološkoj oblasti, uključujući spoljašnje kvantne brojeve solitona kakvi su njihova energija i impuls i njihove unutrašnje kvantne brojeve kakav je električni naboj.

U situacijama kada je rezidualna grupa H neabelovska, opisana analiza je znatno finija. Na primer, naivno očekivanje da solitoni nose unutrašnje električne naboje koji obrazuju reprezentaciju potpune nenarušene grupe H je pogrešno. Kako jedina podgrupa od H koja komutira sa topološkim nabojem može biti globalno uvedena, ovi unutrašnji naboji formiraju reprezentaciju ove tzv. centralizovane podgrupe. Ovo čini pun spektar topoloških i običnih kvantnih brojeva u tako narušenoj fazi komplikovanim.

Takođe, važan efekat u spektru i interakcijama teorije sa narušenom gauge grupom je izazvan uvođenjem dodatnih topoloških članova u dejstvo, kao što je nenestajući ugao θ u 3+1 dimenzionom prostor-vremenu i Chern-Simons član u slučaju 2+1 dimenzije. Pokazuje sa da u slučaju ugla koji ne nestaje, na primer, magnetni monopoli nose električni naboj koji je određen veličinom proporcionalnoj $\frac{\theta}{2\pi}$ i njihovom magnetnom naboju.

Drugi rezultati su iznenađujući i u još većoj meri. Narušena gauge teorija koja sadrži samo bozonska polja može podržati topološke ekscitacije, koje na kvantnom nivou nose poluceli spin i predstavljaju fermione, stvarajući mogućnost nastanka fermiona iz bozona. Pokazuje se da u 2+1 prostor-vremenu mogu postojati topološke ekscitacije, nazvane fluks / naboj kompozitima, koji se ponašaju kao anioni, odnosno čestice sa razlomačkim spinom i kvantnom statistikom interpoliranom između bozona i fermiona. Mogućnost aniona u dve prostorne dimenzije nije od velikog akademskog značaja, pošto su mnogi sistemi u fizici kondenzovane materije opisani 2+1 dimnzionim modelima. Međutim, poznato je da se anioni javljaju kao kvazičestice u frakcionim kvantnim Hall-ovim sistemima. Štaviše zna se da su u idealnim gasovima naelektrisani anioni superprovodni. Za sada nije poznato da li je ovaj egzotični tip superprovodnika ostvaren u prirodi.

Takođe značajna izračunavanja koja je izveo t'Hooft otkrivaju neperturbativni mehanizam barionskog raspada u standardnom modelu na instantone i sfalerone. Kasnije je otkriven i fenomen katalize barionskog raspada monopolima velikog ujedinjenja, kao i procesi u kojima je narušeno očuvanje barionskog broja u blizini kosmičkih stringova velikog ujedinjenja.

4.5 TOPOLOŠKE INTERAKCIJE MEĐU DEFEKTIMA

Pored interakcija između topoloških i običnih ekscitacija i interakcije među defektima mogu biti netrivijalne. Ovde, ne treba razmišljati samo o običnim interakcijama koje odgovaraju razmeni kvanata polja. Razmotrimo, na primer, slučaju Alice elektrodinamike koji se javlja ako je neka neabelova gauge grupa (npr. SO(3) narušena do neabelove podgrupe $U(1)\times_{s.d.} Z_2$, koja je semi direktan proizvod elektromagnetne grupe U(1) i dodatne ciklične grupe Z_2, čiji netrivijalni elementi menjaju znak elektromagnetnog polja. Model predviđa magnetne monopole kao i magnetne Z_2 stringove (tzv. Alice stringove) sa čudnom osobinom da ako se monopol (ili električni naboj date materije) pomera duž stringa, onda njegov naboj menja znak. Drugim rečima, čestica se prevodi u svoju antičesticu. Ovaj neabelovski analog Aharonov-Bohm-ovog efekta je topološke prirode. On jedino zavisi od toga koliko puta čestica prođe duž stringa, ali ne zavisi od njihovog međusobnog rastojanja.

Sličan fenomen se javlja u modelima u kojima je kontinualna gauge grupa spontano narušena do neke konačne podgrupe H. Topološki defekti predviđeni takvim modelima liče na stringove u tri prostorne dimenzije i nose magnetni fluks koji odgovara elementu h rezidualne gauge grupe H. Pošto ovi stringovima slični objekti trivijalizuju jednu prostornu dimenziju, možemo preći na ravan, radi jednostavnosti. U ovoj oblasti, ovi defekti postaju magnetni vrtlozi, odnosno česticama slični objekti karakteristične veličine $1/M_H$, gde je M_H skala narušavanja simetrije. Pored ovih topoloških čestica, narušena faza dovodi do pojave materijalnih naboja ograničenih unitarnom ireducibilnom reprezentacijom Γ rezidualne gauge grupe H. Pošto su sva gauge polja masivna, ne postoje obične dugodometne interakcije među njima. Preostale dugodometne gauge interakcije su topološke Aharonov-Bohm-ove interakcije. Ako je rezidualna gauge grupa H neabelova, npr. neabelovski fluksevi $h \in H$, koje nose vrtlozi ispoljavaju metamorfozu flukseva. Ako se naboj koji odgovara nekoj reprezentaciji Γ od H, pomera oko vrtloga koji nosi magnetni fluks $h \in H$, vraća se transformisan matricom $\Gamma(h)$ pridruženoj elementu h u reprezentaciji Γ od H.

DODATAK 1

Skup objekata a,b,c čini grupu ako je moguće definisati operaciju kojom se kombinuju dva objekta, a pod pretpostavkom da su zadovoljeni sledeći uslovi:
1. svi rezultati kombinacije pripadaju grupi
2. grupa sadrži neutralni element e koji ima osobinu
$ae = ea = a$
gde je a bilo koji element grupe.
3. svaki član a ima inverzan element, koji je takođe u grupi, a definisan je relacijom
$a^{-1}a = aa^{-1} = e$
4. kombinacija grupe je asocijativna
$(ab)c = a(bc)$

Članove grupe nazivamo elementima, a proces kombinacije često nazivamo množenjem, mada ono ne mora biti aritmetičko ili matrično množenje. Broj elemenata u grupi G se naziva red grupe i označava se $|G|$. Kada je red grupe konačan, kažemo da je grupa konačna, a inače je beskonačna.

Ako je množenje komutativno, tj. ako važi $ab = ba$ za sve parove elemenata, grupa je Abelova, kod koje se grupna operacija naziva sabiranje, dok se neutralni element naziva nulti element. Kao što je već napomenuto, kod ostalih grupa se grupna operacija naziva množenje, a termin neutralni element se zamenjuje terminom jedinični element. Ako se elementi grupe mogu označiti jednim ili više kontinualno promenljivih parametara grupa je neprekidna. Kažemo da je grupa kontinualno povezana ako kontinualnom promenom parametara grupe od jednog njenog elementa dobijamo drugi. Kontinualna grupa je kompaktna ako svaki beskonačni niz elemenata grupe ima granični element koji takođe pripada grupi.

Grupe se mogu zadati i preko generatora i generatorskih relacija. U svakoj prebrojivoj grupi može se izdvojiti neki minimalni podskup elemenata, generatora grupe, tako da se svaki element grupe može izraziti kao monom po njima, odnosno njihovim stepenovanjem i višestrukim množenjem dobija se cela grupa; množenje se zadaje elementarnim pravilima množenja generatora (to su tzv. generatorske relacije i pokazuju npr. koji je najmanji stepen svakog od generatora jednak neutralnom elementu). Najjednostavnije grupe su one koje imaju samo jedan generator, tj. grupe čiji su svi elementi stepeni jednog od njih, npr. g. Ovakva grupa je Abelova, a ako je konačna, postoji najmanji stepen, n, generatora jednak nultom elementu: $g^n = e$. Ovo predstavlja generatorsku relaciju, a takva grupa se naziva ciklična grupa reda n.

Podskup H grupe G koji je i sam grupa u odnosu na množenje zadato u G, naziva se podgrupa grupe G i označava sa $H < G$. Svaka podgrupa mora sadržati neutralni element grupe i u svakoj grupi postoje dve trivijalne podgrupe: cela grupa i grupa čiji je jedini element neutralni element. Presek dve podgrupe je podgrupa.

Za dva elementa grupe a i b kažemo da su međusobno konjugovani ako je ispunjen uslov:

$$a = cbc^{-1}$$

gde je c takođe element grupe. Suštinsko svojstvo konjugovanosti je: ako je a konjugovano sa b, a b sa c, onda je i a konjugovano sa c. Stoga možemo govoriti o skupu elemenata grupe koji su međusobno konjugovani. Takvi skupovi se nazivaju klase grupe. Red klase je broj elemenata u klasi. Svaka klasa se potpuno definiše jednim, ma kojim svojim elementom a. Na taj način celu grupu možemo rastaviti na klase, pri čemu svaki element grupe može pripadati samo jednoj klasi. Pri tom klasa grupe ne mora biti njena podgrupa, pošto svaka podgrupa mora sadržati neutralni element.

Grupe igraju veoma važnu ulogu u fizici, budući da se za svaki fizički sistem može odrediti skup transformacija koji ga ne menja. Ovakve transformacije se nazivaju transformacije simetrije ili simetrije i čine grupu, tzv. grupu simetrije sistema.

Posmatrajmo ma koju grupu simetrije i neka je ψ_1 neka jednoznačna funkcija koordinata u konfiguracionom prostoru datog fizičkog sistema. Prilikom transformacije koordinatnog sistema, koja odgovara elementu G grupe, ta funkcija prelazi u neku drugu funkciju. Ako red grupe obeležimo sa g, vršeći redom svih g transformacija grupe, dobijamo iz ψ_1 u opštem slučaju g različitih funkcija. Međutim, pri izvesnim izborima ψ_1 neke od tih funkcija mogu biti linearno zavisne. Dakle, na osnovu toga ćemo dobiti neki broj F, koji mora biti manji ili jednak g linearno nezavisnih funkcija $\psi_1,\psi_2,...\psi_F$, koje se prilikom transformacija simetrije, koje ulaze u posmatranu grupu, transformišu linearno jedna u drugu. Dakle, usled transformacije G svaka od funkcija $\psi_i(i=1,2,...F)$ prelazi u linearnu kombinaciju oblika:

$$\sum_k G_{ki}\psi_k$$

gde su i i k konstante, koje zavise od transformacije G. Skup tih konstanti se naziva matrica transformacije.

Pošto su funkcije ψ_i po pretpostavci jednoznačne, to svakom elementu date grupe odgovara jedna određena matrica. Na osnovu dosad rečenog pogodno je elemente grupe G posmatrati kao operatore koji dejstvuju na funkciju ψ_i, pa možemo pisati:

$$\hat{G}\psi_i = \sum_k G_{ki}\psi_k$$

Pošto se funkcije ψ_i uvek mogu izabrati da budu međusobno ortogonalne i normirane, onda se pojam matrice transformacije poklapa sa pojmom matrice operatora, tj.

$$G_{ik} = \int \psi_i^* \hat{G}\psi_k dq$$

Proizvodu dva elementa grupe G i H odgovara matrica koja se definiše prema matricama G i H pomoću običnog pravila množenja matrica:

$$(GH)_{ik} = \sum_l G_{il}H_{lk}$$

Skup matrica svih elemenata grupe naziva se reprezentacijom grupe. Funkcije $\psi_1,\psi_2,...\psi_F$, pomoću kojih su te matrice definisane, nazivaju se baza reprezentacije. Broj F tih funkcija definiše tzv. dimenziju reprezentacije.

Ako posmatramo integral $\int|\psi|^2 dq$, gde je ψ neka funkcija koordinata, budući da se integral uzima po celom prostoru, očigledno je da se njegova vrednost ne menja ni pri kakvoj rotaciji ili refleksiji koordinatnog sistema. Na osnovu toga, za bilo kakvu transformaciju simetrije G može se pisati:

$$\int(\hat{G}^*\psi^*)(\hat{G}\psi)dq = \int\psi^*\psi dq$$

Ako uvedemo operator $\hat{\tilde{G}}$ koji je transponovan u odnosu na $\hat{G}$, dobija se:

$$\int(\hat{G}^*\psi^*)(\hat{G}\psi)dq = \int\psi^*\hat{\tilde{G}}^*\hat{G}\psi dq = \int\psi^*\psi dq$$

Odavde sledi zbog proizvoljnosti funkcije ψ da je $\hat{\tilde{G}}^{*}\hat{G}=1$ ili $\hat{\tilde{G}}^{*}=G^{-1}$, tj. operatori $\hat{G}$ su unitarni. Dakle, reprezentacije grupe, koje se postižu pomoću ortonormiranih funkcija baze, su unitarne. Drugim rečima grupa se prikazuje unitarnim matricama. Na primer ako se nad funkcijama $\psi_1,\psi_2,...\psi_F$ izvrši linearna unitarna transformacija:

$$\psi_i^{'}=\hat{S}\psi_i$$

onda se dobije nov sistem funkcija $\psi_1^{'},\psi_2^{'},...\psi_F^{'}$, koje će takođe biti ortonormirane. Ako kao bazu reprezentacije uzmemo funkcije $\psi_i^{'}$, onda ćemo imati novu reprezentaciju iste dimenzije. Te reprezentacije, koje se dobijaju jedna iz druge pomoću linearne transformacije funkcije njihove baze, nazivaju se ekvivalentnim. Jasno, one u suštini nisu različite. Matrice ekvivalentnih reprezentacija su međusobno povezane sledećim odnosom matrica :

$$\hat{G}^{'}=\hat{S}^{-1}\hat{G}\hat{S}$$

Zbir dijagonalnih elemenata matrice, koja reprezentuje element G grupe, zove se karakter ili karakteristika grupe i označava se sa $K(G)$. Bitno je napomenuti da se karakteri matrice ekvivalentnih reprezentacija međusobno poklapaju. Ta činjenica daje naročitu važnost opisivanju reprezentacije grupe pomoću njenih datih karakteristika. To nam omogućuje da se odmah razlikuju bitno različite reprezentacije od ekvivalentnih. Zapravo, različitim smatramo samo neekvivalentne reprezentacije. Jediničnom elementu grupe e odgovara identična transformacija. Prema tome, matrica koja ga reprezentuje u svakoj reprezentaciji je dijagonalna, pri čemu su dijagonalni elementi jednaki jedinici. Karakteristika $K(e)$ je na osnovu toga jednaka dimenziji reprezentacije:

$$K(e)=F$$

Razmotrimo sada neku reprezentaciju dimenzije F. Može se desiti da se usled odgovarajuće linearne transformacije funkcije baze razdvajaju na skupove po $F_1,F_2,...$ funkcija $(F_1+F_2+...=F)$ i to tako, da se dejstvovanjem svih elemenata grupe funkcije svakog skupa transformišu samo jedna u drugu, ne dirajući funkcije iz drugih skupova. U tom slučaju se kaže da je data reprezentacija reducibilna. Međutim, ako se broj funkcija baze, koje se međusobno transformišu, ne može smanjiti nikakvom njihovom linearnom transformacijom, onda se reprezentacija pomoću njih naziva ireducibilnom. Svaka reducibilna reprezentacija može se rastaviti na ireducibilne. Drugim rečima, odgovarajućom linearnom transformacijom funkcije baze se rastavljaju na niz skupova, od kojih se svaki transformiše, prilikom dejstvovanja elemenata grupe, prema ma kakvoj ireducibilnoj reprezentaciji. U tom slučaju se kaže da se ta ireducibilna reprezentacija sadrži u reducibilnoj odgovarajući broj puta. Ireducibilna reprezentacija je suštinska karakteristika grupe i igra osnovnu ulogu u svim kvantno - mehaničkim primenama teorije grupa. Može se pokazati da je broj različitih ireducibilnih reprezentacija grupe jednak broju klasa u grupi.

Razlika između reducibilnih i ireducibilnih reprezentacija je jasnija ako ih definišemo na sledeći način [3]: Reprezantacija $D(G)$ u nekom prostoru H je reducibilna, ako postoji netrivijalni potprostor H_1 $(0<|\mathrm{H}_1|<|\mathrm{H}|)$, invarijantan za sve operatore reprezentacije; ako takvi potprostori ne postoje, reprezentacija je ireducibilna.

Posmatrajmo sada translaciju u prostoru fizičkog sistema u stanju, koje je u koordinatnom predstavljanju opisano funkcijom $\psi_\alpha(\vec{r})$. Položaj se menja za vektor $\vec{\rho}$ i pri tome talasna funkcija $\psi_\alpha(\vec{r})$ prelazi u funkciju $\psi_{\alpha^{'}}(\vec{r})$, odnosno

$$\psi_{\alpha^{'}}(\vec{r}+\vec{\rho})=\psi_\alpha(\vec{r})$$

Operator ove transformacije ćemo označiti sa $U_r(\vec{\rho})$, gde indeks označava promenu položaja u prostoru, a argument odgovara intervalu promene vektora položaja. Tada imamo:

$$U_r(\vec{\rho})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_{\alpha'}(\vec{r})$$

odnosno

$$U_r(\vec{\rho})\psi_\alpha(\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho})$$

Pri nalaženju $\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho})$ pogodno je koordinatne ose orijentisati tako da je x-osa u pravcu vektora $\vec{\rho}$, pa razvijanjem u red dobijamo

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = \psi_\alpha(x - \rho, y, z) = \psi_\alpha(x, y, z) - \rho\frac{\partial}{\partial x}\psi_\alpha(x, y, z) + \frac{\rho^2}{2!}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi_\alpha(x, y, z) - \cdots$$

odnosno, desnu stranu možemo napisati i kao

$$e^{-\rho\frac{\partial}{\partial x}}\psi_\alpha(x, y, z)$$

Prelazeći na opšti slučaj, proizvoljne orijentacije vektora $\vec{\rho}$ u odnosu na izabrani koordinatni sistem, $\rho\dfrac{\partial}{\partial x}$ možemo zameniti sa $\vec{\rho}\cdot\nabla$, tako da dobijamo

$$\psi_\alpha(\vec{r} - \vec{\rho}) = \exp(-\vec{\rho}\cdot\nabla)\psi_\alpha(\vec{r}) = \exp\left(\frac{-i\vec{\rho}\cdot\vec{p}}{\hbar}\right)\psi_\alpha(r)$$

gde smo uveli operator impulsa $\vec{p} = -i\hbar\nabla$. Odavde zaključujemo da je

$$U_r(\vec{\rho}) = \exp\left(\frac{-i\vec{\rho}\cdot\vec{p}}{\hbar}\right)$$

Operator $U_r(\vec{\rho})$ je unitaran, pošto je $\vec{\rho}$ realno, a $\vec{p}$ ermitsko.

Sledeća simetrijska operacija koju ćemo posmatrati je rotacija u prostoru fizičkog sistema u stanju $\psi_\alpha(\vec{r})$, koju opisujemo linearnim operatorom R, koji bilo koji vektor $\vec{r}$ rotira u $R\vec{r}$, odnosno

$$\psi_{\alpha'}(R\vec{r}) = \psi_\alpha(\vec{r})$$

Ako operator rotacije predstavimo 3×3 matricom, jednačinu $\vec{r}_R = R\vec{r}$ možemo napisati u matričnom obliku:

$$\begin{pmatrix} x_{R1} \\ x_{R2} \\ x_{R3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{23} & R_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Uslov da su komponente $\vec{r}_R$ realne, kada su komponente $\vec{r}$ realne znači da su elementi matrice R realni. Uslov da se skalarni proizvod bilo koja dva vektora ne menja kada se oba vektora rotiraju na isti način, pokazuje da je R ortonormalno: tri vrste od R su ortonormalne jedna na drugu, kao i tri kolone. Determinanta R u slučaju čiste rotacije je 1, pa budući da je različita od nule, postoji inverzna transformacija R^{-1} za koju važi $\vec{r} = R^{-1}\vec{r}_R$. Pokazuje se da je R^{-1} transponovana matrica matrice R, odnosno $(R^{-1})_{ij} = R_{ji}$ za $i, j = 1,2,3$. Pošto postoji šest nezavisnih ograničenja za devet matričnih elemenata R_{ij}, sve rotacije je moguće opisati pomoću tri kontinualno promenljiva parametra.

Matrice R zadovoljavaju uslove grupe, pri čemu proces kombinacija odgovara matričnom množenju, koje je asocijativno. Množenje dve matrice datih karakteristika, daje treću matricu istih takvih karakteristika. Matrica δ_{ij} je jedinični element, a svaka R ima svoju inverznu matricu. U opštem slučaju rotacije ne komutiraju, tako da grupa nije Abelova. Matrice R čine neprekidnu, kompaktnu grupu sa tri vezana parametra. Ova se grupa označava sa $O(3)$, kao ortogonalna grupa u tri dimenzije, koja je šema od 3×3 realne ortomormalne matrice determinante jednake $+1$. Sve navedeno se može uopštiti i na slučaj n dimenzija.

$U(n)$ I $SU(n)$ GRUPE

Unitarna matrica sa n vrsta i kolona se može napisati u obliku:

$$U = e^{iH}$$

gde je H ermitska $n\times n$ matrica. Sve takve U matrice formiraju grupu koja se označava sa $U(n)$ i kod koje proces kombinovanja odgovara matričnom množenju. Dijagonalni elementi matrice H su realni, dok su nedijagonalni simetrično raspoređeni u odnosu na glavnu dijagonalu i oni su kompleksno konjugovani jedan u odnosu na drugi. Stoga je H, a samim tim i U okarakterisana sa n^2 nezavisnih parametara. Ova grupa, $U(n)$, je kontinualno vezana, kompaktna Lie-eva grupa.

Trag bilo koje ermitske matrice je realan, a determinanta bilo koje unitarne matrice je kompleksan broj jediničnog modula, odnosno

$$tr(H) = \alpha \qquad \det(U) = e^{i\alpha} \qquad \alpha \text{ realno}$$

Ako determinanta od U treba da bude jednaka $+1$, postavlja se samo jedno ograničenje na n^2 parametara, jer je tada $\alpha = 0$. Te matrice tada čine kontinualno vezanu, kompaktnu Lie-evu grupu, koju označavamo sa $SU(n)$ i koja ima n^2-1 parametara. Ovde slovo S označava da je transformacija specijalna (u ovom slučaju unimodularna), a slovo U da je unitarna. Očigledno je da je svaki član od $SU(n)$ član od $U(n)$, dok obrnuto ne važi, tako da kažemo da je $SU(n)$ podgrupa od $U(n)$.

Tipičan član od $SU(n)$ označavamo sa U_0 i za njega važi

$$U_0 = e^{iH_0} \qquad tr(H_0) = 0 \qquad \det(U_0) = 1$$

Od njega možemo formirati tipičan član grupe $U(n)$, na sledeći način:

$$H = H_0 + \frac{\alpha}{n}\hat{1} \qquad U = \left(e^{\frac{i\alpha}{n}}\hat{1}\right)U_0$$

gde je $\hat{1}$ n-dimenzionalna jedinična matrica. Brojevi $e^{\frac{i\alpha}{n}}$ su 1×1 unitarne matrice koje čine $U(1)$ grupu, dok $n\times n$ matrice $e^{\frac{i\alpha}{n}}\hat{1}$ čine n-dimenzionu matričnu reprezentaciju. $U(1)$. Bilo koji element od $U(n)$ se može napisati kao matrični proizvod odgovarajućih članova od $U(1)$ i $SU(n)$.

Takođe, $U(n)$ je podgrupa od $U(m)$, a $SU(n)$ je podgrupa od $SU(m)$, uz uslov da je $n < m$. Bilo koji član U od $U(n)$ se može razviti u $m\times m$ unitarnu matricu dodavanjem vrsta i kolona na sledeći način

$$\begin{pmatrix} U & O \\ O & 1 \end{pmatrix}$$

gde je 1 jedinična matrica sa $m-n$ vrsta i kolona, a O je pravougaona matrica nula. Odgovarajuća ermitska matrica H se može razviti na sličan način

$$\begin{pmatrix} H & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

što znači da odgovarajući podsistem matrica $U(n)$ čini matričnu reprezentaciju od $U(m)$ i slično i u slučaju $SU(n)$ i $SU(m)$.

DODATAK 2

U cilju izbegavanja mogućih nejasnoća i lakšeg snalaženja prilikom čitanja rada, u ovom dodatku je dat pregled upotrebljene notacije, polazeći od jednačina kretanja.

U slučaju relativističke čestice, polazeći od relativističke relacije između mase mirovanja čestice m, njene energije E i impulsa $\vec{p}$ i uzimajući u obzir kvantnomehaničke zamene

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \tag{d2.1}$$

$$\vec{p} \to -i\hbar\nabla \qquad E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \tag{d2.2}$$

dobijamo Klein-Gordon-ovu jednačinu

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{m^2c^2}{\hbar^2}\right)\varphi(\vec{x},t) = 0 \tag{d2.3}$$

koja je homogena diferencijalna jednačina drugog reda, a budući da je simetrična u odnosu na prostorne i vremenske koordinate ona je invarijantna u odnosu na Lorentz-ove transformacije, rotacije četvorodimenzionalnog prostora Minkowski-og, te zadovoljava uslove specijalne teorije relativnosti.

Uvedimo četvorodimenzionalni prostor Minkowski-og, čija je metrička forma oblika

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2 - c^2(dt)^2 \tag{d2.4}$$

a odgovarajući metrički tenzor je

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{d2.5}$$

U svetu Minkowski-og uvodimo kvadrivektore, pa je npr. položaj svetske tačke određen vektorom $x^\mu = (\vec{x},t)$, vektor gradijenta $\partial^\mu = (\vec{\nabla},\partial_t)$. Budući da je ovako uveden prostor realan, ali pošto se njegova metrička forma ne može predstaviti u vidu sume kvadrata diferencijala koordinata, on je pseudoeuklidski, pa moramo voditi računa o notaciji koju koristimo, odnosno razlikujemo kovarijantnu od kontravarijantne forme vektora. Polazeći od kontravarijantnih, možemo dobiti i kovarijantne komponente vektora prema opštem obrascu

$$A_\mu = g_{\mu\nu}A^\nu \tag{d2.6}$$

odakle sledi

$$A_1 = A^1 \qquad A_2 = A^2 \qquad A_3 = A^3 \qquad A_4 = -A^4 \tag{d2.7}$$

pa je skalarni proizvod dva kvadrivektora

$$(A,B) = A^\mu B_\mu = A^1B^1 + A^2B^2 + A^3B^3 - A^4B^4 \tag{d2.8}$$

Iako se pokazuje da su u četvrodimenzionom prostoru Minkowski-og, u kom je četvrta koordinata imaginarna, $x_4 = ict$, matematičke operacije znatno uprošćene, zbog toga što nema razlike između kovarijantnih i kontravarijantnih komponenata, pa indekse možemo pisati bilo gore bilo dole, u ovom radu je zbog realnosti prostora korišćen prvi oblik prostora Minkowskog.

Uzimajući ovo u obzir, u sistemu koji koristimo i u kom je $\hbar = c = 1$, Klein-Gordon-ova jednačina dobija oblik

$$\left(\partial_\mu \partial^\mu - m^2\right)\varphi(x) = 0 \tag{d2.9}$$

U kovarijantnoj notaciji (d2.2) dobija oblik

$$p_\mu \to -i\partial_\mu \tag{d2.10}$$

gde je $p_\mu = (\vec{p}, E)$ kvadrivektor energije-impulsa.

Tada relativistička relacija (d2.1) postaje

$$p^2 = -m^2$$

i izražava invarijantnost dužine vektora energije-impulsa.

Rešenje Klein-Gordon-ove jednačine ne možemo interpretirati na isti način kao u slučaju Schrödinger-ove jednačine, gde smo $|\psi(\vec{x},t)|^2$ interpretirali kao gustinu verovatnoće, budući da je ona linearna u vremenskoj derivaciji za razliku od Klein-Gordon-ove jednačine. Međutim, od rešenja Klein-Gordon-ove jednačine je moguće formirati vektorsku funkciju

$$j^\mu(x) = -i\left[\varphi^*(x)\partial^\mu \varphi(x) - \varphi(x)\partial^\mu \varphi^*(x)\right] \tag{d2.11}$$

koja zadovoljava jednačinu kontinuiteta

$$\partial_\mu j^\mu(x) = -i\left(\varphi^* \partial_\mu \partial^\mu \varphi - \varphi \partial_\mu \partial^\mu \varphi^*\right) = 0 \tag{d2.12}$$

i koju nazivamo vektorom gustine struje. Ovako definisan vektor, integracijom po čitavom trodimenzionalnom prostoru, ostaje očuvan u vremenu.

Osnovni problem Klein-Gordon-ove jednačine ogleda se u nemogućnosti dobijanja pozitivno definitne gustine verovatnoće, koja zahteva diferencijalnu jednačinu linearnu u vremenskoj derivaciji. Dirac je pokušao da formira takvu jednačinu, koja je zbog relativističke invarijantnosti morala biti linearna i u prostornim koordinatama. Takvo linearizovanje se dobija formalnim faktorisanjem Klein-Gordon-ovog operatora

$$\partial_\mu \partial^\mu - m^2 = \left(\gamma^\mu \partial^\mu - m\right)\left(\gamma_\mu \partial_\mu + m\right) \tag{d2.13}$$

odnosno linearizacijom (d2.1)

$$E^2 - \left(\vec{p}^2 + m^2\right) = \left[E - \left(\alpha_k p_k + \beta m\right)\right]\left[E + \left(\alpha_k p_k + \beta m\right)\right] \tag{d2.14}$$

pri čemu α_k i β nisu obični brojevi, nego budući da iz (d2.12) sledi

$$E^2 - m^2\beta^2 - p_i p_j \alpha_i \alpha_j - m p_i\left(\alpha_i \beta + \beta \alpha_i\right)$$

zadovoljavaju sledeće uslove

$$\begin{aligned} &\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \\ &\alpha_i \beta + \beta \alpha_i = 0 \\ &\beta^2 = 1 \end{aligned} \tag{d2.15}$$

Ove antikomutacione relacije zadovoljavaju matrice čija je najniža netrivijalna reprezentacija četvorodimenzionalna. α_i antikomutiraju međusobno, kao i sa β, a njihov kvadrat, kao i kvadrat β je jednak jedinici. Kvantnomehaničkom zamenom (2d.2) u bilo kom faktoru na desnoj strani jednačine (d2.14), dobijamo Dirac-ovu jednačinu za slobodnu česticu:

$$i\partial_t \psi(x) = \left(-i\alpha_k \partial_k + \beta m\right)\psi(x) \tag{d2.16}$$

Zbog činjenice da su α_k i β 4×4 matrice, talasna funkcija $\psi(x)$ je četvorokomponentni spinor

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \\ \psi_4(x) \end{pmatrix} \tag{d2.17}$$

Matrice α_i i β su oblika

$$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{d2.18}$$

gde su σ_i Pauli-eve matrice.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{d2.19}$$

Kovarijantni oblik Dirac-ove jednačine ćemo dobiti moženjem jednačine (d2.16) s leva sa β i imajući na umu da je $\partial_t = \partial_4$, tako da dobijamo

$$\left(-i\beta\partial_4 - i\beta\alpha_k\partial_k + m\right)\psi(x) = 0 \tag{d2.20}$$

Sada uvodimo nove, tzv. γ matrice, definisane na sledeći način

$$\gamma^k = -i\beta\alpha_k \qquad \gamma^4 = -i\beta \tag{d2.21}$$

Dirac-ova jednačina dobija oblik:

$$\left(\gamma^\mu\partial^\mu + m\right)\psi(x) = 0 \tag{d2.22}$$

Nove matrice zadovoljavaju sledeće komutacione relacije:

$$\gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\delta_{\mu\nu} \tag{d2.23}$$

i za njih važi

$$\gamma^{k+} = \gamma^k \qquad \gamma^{4+} = -\gamma^4 \qquad \left(\gamma^\mu\right)^2 = 1 \tag{d2.24}$$

Ovako uvedene γ matrice su sve ermitske u euklidskom četvorodimenzionalnom prostoru, koji, kao što je navedeno, podrazumeva imaginarnu vremensku osu.

Pored navedene četiri γ matrice, veoma često (naročito u fizici elementarnih čestica) koristimo i petu γ matricu, koja se uvodi na sledeći način

$$\gamma_5 = i\gamma^1\gamma^2\gamma^3\gamma^4 \tag{d2.25}$$

i ima sledeće osobine

$$\gamma_5\gamma^\mu + \gamma^\mu\gamma_5 = 0 \qquad \gamma_5^+ = \gamma_5 \qquad \gamma_5^2 = 1 \tag{d2.26}$$

Jednačinu za adjungovani spinor dobijamo adjungovanjem (d2.22)

$$\psi^+(x)\left[\left(\gamma^\mu\right)^+\partial_\mu^+ + m\right] = 0$$

Množenjem s desna sa γ^4 i ubacivanjem $1 = \left(\gamma^4\right)^2$ između ψ^+ i uglaste zagrade, kao i uzimanjem u obzir sledećih relacija

$$\left(\gamma^k\right)^+ = \gamma^k \qquad \left(\gamma^4\right)^+ = -\gamma^4 \qquad \left(\partial^\mu\right)^+ = \partial^\mu \qquad \gamma^4\gamma^k\gamma^4 = -\gamma^k$$

dobijamo adjungovanu jednačinu

$$\overline{\psi}(x)\left(\gamma^\mu\partial^\mu - m\right) = 0 \tag{d2.27}$$

gde je

$$\overline{\psi}(x) = \psi^+(x)\gamma^4$$

adjungovani spinor.

Množenjem (d2.22) s leva sa $\overline{\psi}$, a (d2.27) s desna sa ψ, pa zatim sabiranjem ovako dobijenih jednačina, dobijamo

$$\partial^{\mu}\left(\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right)=0 \qquad \text{(d2.28)}$$

što je jednačina kontinuiteta za vektor Dirac-ove struje:

$$j^{\mu}(x)=i\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x) \qquad \text{(d2.29)}$$

S obzirom na činjenicu da je Dirac-ova jednačina dobijena linearizacijom Klein-Gordon-ove jednačine i da predstavlja diferencijalnu jednačinu koja je linearna u odnosu i na prostorne i na vremensku koordinatu, ona zadovoljava zahteve specijalne teorije relativnosti, pa stoga mora biti invarijantna u odnosu na Lorentz-ove transformacije, koje izražavamo na sledeći način

$$x^{\mu'}=a_{\mu\nu}x^{\nu} \qquad \text{(d2.30)}$$

Koeficijenti transformacije $a_{\mu\nu}=\dfrac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}}$ određeni su uslovom da je dužina vektora ista u svim koordinatnim sistemima, što izražavamo na sledeći način

$$x^{\mu'}x^{\mu'}=a_{\mu\nu}x^{\nu}a_{\mu\lambda}x^{\lambda}=x^{\mu}x^{\mu} \qquad \text{(d2.31)}$$

odakle sledi uslov ortogonalnosti

$$a_{\mu\nu}a_{\mu\lambda}=\delta_{\nu\lambda} \qquad \text{(d2.32)}$$

ili u matričnom obliku

$$a^{T}a=1$$

Očigledno je da je

$$\det a=\pm 1 \qquad \text{(d2.33)}$$

Slučaj $\det a=1$ odgovara pravoj Lorentz-ovoj grupi transformacija, koje se mogu predstaviti beskonačnim nizom infinitezimalnih transformacija, odnosno

$$x'=ax=(1+\varepsilon)x \qquad \text{(d2.34)}$$

gde je 1 jedinična matrica, a ε matrica sa infinitezimalnim elementima. Iz uslova (d2.32) sledi

$$\varepsilon^{T}=-\varepsilon \qquad \text{(d2.35)}$$

Dakle $\varepsilon_{\mu\nu}=-\varepsilon_{\nu\mu}$, pa je matrica ε, kao i cela Lorentz-ova grupa određena sa šest realnih parametara, koji predstavljaju transformacije koordinata pri rotacijama sistema oko proizvoljnih osa.

Zamenjujući u jednačini (d2.22) koordinate $x'=ax$, $x=a^{-1}x'$, a prelaskom na nove koordinate menjaju se i izvodi i to na sledeći način

$$\partial^{\mu}\equiv\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}=\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\mu}}\frac{\partial}{\partial x^{\nu'}}=a_{\nu\mu}\partial^{\nu'}$$

tako da dobijamo

$$\left(\gamma^{\mu}a_{\nu\mu}\partial^{\nu'}+m\right)\psi\left(a^{-1}x'\right)=0 \qquad \text{(d2.36)}$$

Pokazuje se da važi

$$\gamma^{\lambda}a_{\mu\lambda}=\Lambda^{-1}\gamma^{\mu}\Lambda \qquad \text{(d2.37)}$$

Uvrštavanjem (d2.37) u (d2.36) i množenjem s leva sa Λ dobijamo

$$\left(\gamma^{\nu}\partial^{\nu'}+m\right)\Lambda\psi\left(a^{-1}x'\right)=0 \qquad \text{(d2.38)}$$

Budući da se novi spinor može izraziti preko starog

$$\psi'\left(x'\right)=\Lambda\psi\left(a^{-1}x'\right) \qquad \text{(d2.39)}$$

pokazuje se da je Dirac-ova jednačina invarijantna u odnosu na Lorentz-ove transformacije, pošto jednačinu (d2.38) možemo napisati i u obliku

$$\left(\gamma^{\mu}\partial^{\mu'}+m\right)\psi'\left(x'\right)=0 \qquad \text{(d2.40)}$$

pri čemu relacija (d2.39) predstavlja zakon transformacije spinora.
Da bismo našli zakon transformacije adjungovanog spinora $\overline{\psi}$, izvršićemo adjungovanje (d2.37), pa dobijamo

$$a_{\nu\mu}^{*}\left(\gamma^{\mu}\right)^{+}=\Lambda^{+}\left(\gamma^{\mu}\right)^{+}\left(\Lambda^{-1}\right)^{+}$$

Uzimajući u obzir svojstva γ matrica, kao i svojstva elemenata matrice Lorentz-ove transformacije, dobijamo, polazeći od prethodne relacije

$$a_{\nu\mu}^{*}\left(\gamma^{4}\gamma^{k}\gamma^{4}-\gamma^{4}\gamma^{4}\gamma^{4}\right)=\gamma^{4}\Lambda^{+}\gamma^{4}\left(\gamma^{4}\gamma^{i}\gamma^{4}-\gamma^{4}\gamma^{4}\gamma^{4}\right)\gamma^{4}\left(\Lambda^{+}\right)^{-1}\gamma^{4}$$

$$\left[\gamma^{4}\Lambda^{+}\gamma^{4}\right]\gamma^{\nu}\left[\gamma^{4}\left(\Lambda^{+}\right)^{-1}\gamma^{4}\right]=a_{\nu\mu}\gamma^{\mu}$$

Umesto desne strane možemo staviti desnu stranu (d2.37), pa množenjem odgovarajućim faktorima dobijamo

$$\left(\Lambda\gamma^{4}\Lambda^{+}\gamma^{4}\right)\gamma^{\nu}=\gamma^{\nu}\left(\Lambda\gamma^{4}\Lambda^{+}\gamma^{4}\right)$$

odnosno

$$\Lambda\gamma^{4}\Lambda^{+}\gamma^{4}=c\cdot I \tag{d2.41}$$

odakle sledi

$$\Lambda^{-1}=\gamma^{4}\Lambda^{+}\gamma^{4} \tag{d2.42}$$

Zakon transformacije adjungovanog spinora na osnovu navedenog glasi

$$\overline{\psi}'\equiv\left(\psi^{+}\gamma^{4}\right)'=\psi'^{+}\gamma^{4}=\left(\Lambda\psi\right)^{+}\gamma^{4}=\psi^{+}\Lambda^{+}\gamma^{4}=\psi^{+}\gamma^{4}\gamma^{4}\Lambda^{+}\gamma^{4}=\overline{\psi}\Lambda^{-1}$$

odnosno

$$\overline{\psi}'\left(x'\right)=\overline{\psi}\left(a^{-1}x'\right)\Lambda^{-1} \tag{d2.43}$$

Ispitajmo sada zakone transformacija sledećih formi

$$\begin{aligned}S&=\overline{\psi}(x)\psi(x)\\V&=\overline{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\\T&=\overline{\psi}(x)\sigma^{\mu\nu}\psi(x)\\A&=\overline{\psi}(x)i\gamma^{\mu}\gamma_{5}\psi(x)\\P&=\overline{\psi}(x)\gamma_{5}\psi(x)\end{aligned} \tag{d2.44}$$

s obzirom da one imaju široku primenu.
$\sigma^{\mu\nu}$ se definiše preko γ matrica na sledeći način

$$\sigma^{\mu\nu}=i\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} \tag{d2.45}$$

Uzimajući u obzir jednačine (d2.39) i (d2.43) pokazuje se da važi

$$\begin{aligned}S'&=\overline{\psi}'\psi'=\overline{\psi}\Lambda^{-1}\Lambda\psi=\overline{\psi}\psi=S\\V^{\nu'}&=\overline{\psi}'\gamma^{\mu}\psi'=\overline{\psi}\Lambda^{-1}\gamma^{\mu}\Lambda\psi=a_{\mu\nu}\overline{\psi}\gamma^{\nu}\psi=a_{\mu\nu}V^{\nu}\\T^{\mu\nu'}&=a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}\overline{\psi}\sigma^{\alpha\beta}\psi=a_{\mu\alpha}a_{\nu\beta}T^{\alpha\beta}\\A^{\mu'}&=\det|a|a_{\mu\nu}\overline{\psi}\gamma^{\nu}\gamma_{5}\psi=\det|a|a_{\mu\nu}A^{\nu}\\P'&=\det|a|\overline{\psi}\gamma_{5}\psi=\det|a|P\end{aligned}$$

Pošto se S ne menja pri Lorentz-ovim transformacijama, ono predstavlja skalarnu funkciju. Funkcija $V^{\mu}(x)$ se transformiše kao pravi kvadrivektor. $T^{\mu\nu}$ je antisimetrični tenzor drugog reda. Kovarijanta A^{μ} predstavlja tzv. pseudovektor, pošto njen skalarni proizvod sa pravim vektorom nije skalar, nego pseudoskalar, a P je pseudoskalar.

DODATAK 3

U ovom dodatku su iznete neke osnove klasične relativističke teorije polja.

U klasičnoj fizici pri ispitivanju mehaničkog sistema koji sadrži n slobodnih čestica, što praktično znači da imamo n parova koordinata (q_i, p_i), jednačine kretanja smo dobijali primenom principa najmanjeg dejstva

$$\delta \int_{t1}^{t2} dt L(t) = 0 \tag{d3.1}$$

Ako broj čestica teži beskonačnosti, $n \to \infty$, sistem moramo opisivati kontinualnom funkcijom, a ne konačnim nizom koordinata. Ta funkcija je nazvana funkcija polja, pri čemu pod pojmom polja podrazumevamo sistem sa beskonačnim brojem stepeni slobode. I u slučaju polja jednačine kretanja dobijamo primenom principa najmanjeg dejstva, vodeći računa da koordinate sistema sa konačnim brojem stepeni slobode prelaze u funkciju polja $\varphi(x)$

$$q_n(t) \to \varphi_{\vec{r}}(t) \equiv \varphi(x) \tag{d3.2}$$

Budući da su čestice slobodne, ukupni Lagranžijan je jednak zbiru Lagranžijana čestica, a u slučaju polja suma prelazi u integral po trodimenzionalnom prostoru

$$L(t) = \sum_n L_n(q_n(t), \dot{q}_n(t)) \to \int d^3x \alpha(\varphi(x), \dot{\varphi}(x))$$

Pokazuje se da u opštem slučaju gustina Lagranžijana u relativističkoj teoriji polja zavisi od $\varphi(x)$ i $\partial_\mu(x)$, pa varijacioni princip glasi

$$\delta L = \delta \int d^4x \alpha(\varphi(x), \partial_\mu \varphi(x)) = 0 \tag{d3.3}$$

odnosno

$$\delta \int d^4x \alpha = \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} \delta\varphi + \frac{\partial \alpha}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta(\partial_\mu \varphi) \right] =$$

$$= \int_\Omega d^4x \left[\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \alpha}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \right] \delta\varphi + \int_\Omega d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \alpha}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi \right]$$

Poslednji integral po nekom četvorodimenzionalnom prostoru Ω se primenom Gaus-ove teoreme može prevesti u integral po hiperpovršini, koja okružuje taj prostor.

$$\int_\Omega d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \alpha}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi \right] = \int_\sigma d\sigma_\mu \left[\frac{\partial \alpha}{\partial(\partial_\mu \varphi)} \delta\varphi \right] \tag{d3.4}$$

gde je σ_μ projekcija elementa površine normalna na odgovarajuće koordinatne ose četvorodimenzionalnog prostora Minkowskog. Pošto su varijacije $\delta\varphi$ svuda na površini σ jednake nuli i integral (d3.4) je jednak nuli.

Takođe, budući da su varijacije $\delta\varphi$ proizvoljne, integrand prvog integrala mora biti jednak nuli,kako bi varijacioni princip bio zadovoljen, tako da dobijamo Euler-ovu jednačinu

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \varphi} - \partial_\mu \frac{\partial \alpha}{\partial(\partial_\mu \varphi)} = 0 \tag{d3.5}$$

Po analogiji sa sistemom čestica i u slučaju polja možemo definisati polju $\varphi(x)$ kanonski pridruženo polje $\pi(x)$

$$\pi(x)=\frac{\partial\alpha(\varphi,\partial_\mu\varphi)}{\partial\dot{\varphi}(x)}=\frac{\partial\alpha}{\partial(\partial_0\varphi)} \tag{d3.6}$$

koje se naziva kanonskim impulsom polja.
Hamiltonijan sistema čestica prelazi u prostorni integral gustine Hamiltonijana

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x\chi(x)=\int d^3x[\pi(x)\dot{\varphi}(x)-\alpha(x)]=\int d^3x\left[\frac{\partial\alpha}{\partial\dot{\varphi}}\dot{\varphi}-\alpha\right]= \\ &= \int d^3x\left[\frac{\partial\alpha}{\partial(\partial_4\varphi)}\partial_4\varphi-\alpha\right] \end{aligned} \tag{d3.7}$$

Uvodeći tenzor

$$T_{\mu\nu}(x)=\frac{\partial\alpha(x)}{\partial(\partial_\mu\varphi)}\partial_\nu\varphi(x)-\delta_{\mu\nu}\alpha(x) \tag{d3.8}$$

koji nazivamo kanonskim tenzorom energije i impulsa, gustina Hamiltonijana je njegova komponenta T_{44}.

Uopšteno govoreći, gustina Lagranžijana mora zadovoljavati sledeće uslove [9]:

1. $\alpha(x)$ mora biti relativistički invarijantna skalarna funkcija
2. gustina energije $\chi(x)$, koja se dobija iz $\alpha(x)$ pomoću relacije (d3.6) mora biti pozitivno definitna
3. u slučaju slobodnih polja $\alpha(x)$ treba da sadrži kanonske promenljive $\varphi(x)$ i $\pi(x)$ u bilinearnoj formi, kako bi iz Euler-ove jednačine sledile linearne jednačine slobodnih polja, koje omogućavaju superpoziciju polja
4. $\alpha(x)$ treba da bude realna funkcija, da bi u kvantnoj teoriji polja bila ermitski operator

S obzirom da simetrijska razmatranja teorije počivaju na ispitivanju simetrije Lagranžijana u nastavku je dat pregled opštih oblika Lagranžijana koji odgovaraju različitim tipovima polja, a koji su korišćeni u radu.

Realno jednokomponentno polje $\varphi(x)$ dobijamo polazeći od sistema čestica bez unutrašnjih stepeni, o odgovarajući Lagranžijan je oblika

$$\alpha(x)=-\frac{1}{2}\left[\partial_\mu\varphi\partial^\mu\varphi+m^2\varphi^2\right] \tag{d3.9}$$

$\varphi(x)$ je skalarna ili pseudoskalarna funkcija, pa su zbog prethodno navedenog uslova 1. koji mora zadovoljavati gustina Lagranžijana mogući samo članovi navedenog oblika. Negativan predznak je posledica 2. uslova

$$\chi(x)=\pi\dot{\varphi}-\alpha=\frac{1}{2}\left[\pi^2+(\nabla\varphi)^2+m^2\varphi^2\right]\geq 0 \tag{d3.10}$$

pošto je

$$\pi(x)=\frac{\partial\alpha(x)}{\partial\dot{\varphi}(x)}=\dot{\varphi}(x) \tag{d3.11}$$

Konstanta m^2 predstavlja kvadrat mase čestice bez spina kojoj je pridruženo polje $\varphi(x)$ i koja je u slobodnom stanju opisana Klein-Gordon-ovom jednačinom. Pošto je polje $\varphi(x)$ realno, ono ne može formirati vektor gustine struje koji zadovoljava jednačinu kontinuiteta, pa $\varphi(x)$ može opisivati samo neutralne čestice, odnosno električno neutralna polja, kakva su polja neutralnih piona i kaona.

Ako su dva realna slobodna polja jednakih masenih koeficijenata $\varphi_1(x)$ i $\varphi_2(x)$ superponirana, gustina Lagranžijana koja zadovoljava uslov 3., omogućavajući uopšte superpoziciju polja je oblika

$$\alpha(x)=-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi_1\partial^\mu\varphi_1+m^2\varphi_1^2\right)-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu\varphi_2\partial^\mu\varphi_2+m^2\varphi_2^2\right) \tag{d3.12}$$

Pri tom se kao što je i navedeno podrazumeva da oba ova polja zadovoljavaju Klein-Gordon-ovu jednačinu. Pridruženi su im kanonski impulsi

$$\pi_{1,2}(x)=\frac{\partial\alpha(x)}{\partial\dot{\varphi}_{1,2}(x)}=\dot{\varphi}_{1,2}(x) \tag{d3.13}$$

a gustina Hamiltonijana je

$$\chi(x)=\pi_1\dot{\varphi}_1+\pi_2\dot{\varphi}_2-\alpha=\frac{1}{2}\left[\pi_1^2+\pi_2^2+(\nabla\varphi_1)^2+(\nabla\varphi_2)^2+m^2\varphi_1^2+m^2\varphi_2^2\right] \tag{d3.14}$$

Superponirana realna polja φ_1 i φ_2 možemo zameniti kompleksnim poljem

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)\right] \tag{d3.15}$$

i smatrati da gustina Lagranžijana zavisi od $\varphi,\varphi^*,\partial_\mu\varphi$ i $\partial_\mu\varphi^*$ i ona tada ima sledeći oblik

$$\alpha(x)=-\left(\partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi+m^2\varphi^*\varphi\right) \tag{d3.16}$$

pri čemu za polja φ i φ^* važi Klein-Gordon-ova jednačina

$$\left(\partial_\mu\partial^\mu-m^2\right)\varphi(x)=\left(\partial_\mu\partial^\mu-m^2\right)\varphi^*(x)=0 \tag{d3.17}$$

Gustina Hamiltonijana i kanonski pridruženi impulsi su oblika

$$\begin{aligned}\chi(x)&=\dot{\varphi}\dot{\varphi}^*+(\nabla\varphi)(\nabla\varphi^*)+m^2\varphi\varphi^*\\ \pi(x)&=\frac{\partial\alpha(x)}{\partial\dot{\varphi}(x)}=\dot{\varphi}^*(x)\\ \pi^*(x)&=\frac{\partial\alpha}{\partial\dot{\varphi}^*(x)}=\dot{\varphi}(x)\end{aligned} \tag{d3.18}$$

Da bi ovo kompleksno polje opisivalo naelektrisanu materiju, neophodno je da ono formira vektor gustine struje koji zadovoljava uslov

$$\partial_\mu j^\mu(x)=0 \tag{d3.19}$$

što je moguće zbog invarijantnosti Lagranžijana u odnosu na faznu transformaciju (ε je konstanta)

$$\varphi\to e^{i\varepsilon}\varphi \qquad \varphi^*\to e^{-i\varepsilon}\varphi^* \tag{d3.20}$$

Vektor gustine struje glasi

$$j_\mu(x)=-ie\left[\varphi^*(x)\partial^\mu\varphi(x)-\varphi(x)\partial^\mu\varphi^*(x)\right] \tag{d3.21}$$

U kvantnoj teoriji polja ovakvim kompleksnim poljem se opisuju nabojno konjugovani parovi čestica sa spinom nula kao što su npr. mezoni $\pi^\pm,K^\pm$.

Česticama spina ½, kakve su elektroni i nukleoni u kvantnoj teoriji polja pridružujemo spinorno polje $\psi(x)$, koje je rešenje Dirac-ove jednačine

$$\left(\gamma^\mu\partial^\mu+m\right)\psi(x)=0 \tag{d3.22}$$

Relativistički invarijantna gustina Lagranžijana je

$$\alpha(x)=-\overline{\psi}(x)\left(\gamma^\mu\partial^\mu+m\right)\psi(x) \tag{d3.23}$$

dok su kanonski impuls polja i gustina Hamiltonijana

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \alpha(x)}{\partial \dot{\psi}(x)} = -\overline{\psi}(x)\gamma_4 = -\psi^+(x)$$
$$\chi(x) = \pi\dot{\psi} - \alpha = -\overline{\psi}\gamma^4\dot{\psi} + \overline{\psi}(\gamma^\mu\partial^\mu + m)\psi = \overline{\psi}(\gamma^k\partial^k + m)\psi \tag{d3.24}$$

Gustina Lagranžijana je invarijantna u odnosu na faznu transformaciju polja

$$\psi(x) \to \psi(x)e^{i\varepsilon} \qquad \overline{\psi}(x) \to \overline{\psi}(x)e^{-i\varepsilon} \tag{d3.25}$$

pa je odgovarajuća gustina struje

$$j^\mu(x) = ie\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x) \tag{d3.26}$$

Još jedna vrsta polja su polja koja se pri Lorentz-ovim transformacijama transformišu kao vektori i koja nazivamo vektorskim poljima, a pridružujemo ih česticama sa spinom 1. Četiri komponente polja možemo interpretirati kao četiri različita superponirana polja koja zadovoljavaju Klein-Gordon-ovu jednačinu

$$(\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\varphi^\mu(x) = (\partial_\mu\partial^\mu - m^2)\varphi^{\mu*}(x) = 0 \tag{d3.27}$$

i koja čine Lorentz-ov vektor

$$\begin{gathered}\varphi_\mu(x) \equiv (\vec{\varphi}(x), \varphi_4(x)) \\ \varphi_\mu^*(x) \equiv (\vec{\varphi}^*(x), \varphi_4^*(x))\end{gathered} \tag{d3.28}$$

Kod sve četiri komponente se javlja ista masa m^2 čestice kojoj pridružujemo polje, što znači da vektorski karakter odražava unutrašnje stepene slobode. Vektor spina 1 ima tri projekcije na osu kvantizacije,što bi značilo da jednu komponentu polja $\varphi^\mu(x)$ moramo eliminisati,ali to ne činimo zbog relativističke invarijantnosti teorije, tako da umesto eliminacije uvodimo uslov kojim povezujemo komponente polja

$$\partial_\mu\varphi^\mu(x) = 0 \tag{d3.29}$$

U slučaju vektorskog polja uvodimo tenzor jačine polja na sledeći način

$$\begin{gathered}F^{\mu\nu}(x) = \partial^\mu\varphi^\nu(x) - \partial^\nu\varphi^\mu(x) \\ F^{\mu\nu*}(x) = \partial^\mu\varphi^{\nu*}(x) - \partial^\nu\varphi^{\mu*}(x)\end{gathered} \tag{d3.30}$$

Gustina Lagranžijana je tada oblika

$$\alpha(x) = -\frac{1}{2}F^{\mu\nu*}(x)F_{\mu\nu}(x) - m^2\varphi^{\mu*}(x)\varphi^\mu(x) \tag{d3.31}$$

Euler-ova jednačina za polje $\varphi_\nu(x)$ postaje

$$0 = \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi^{\nu*}} - \partial_\mu\frac{\partial\alpha}{\partial(\partial^\mu\varphi^{\nu*})} = -m^2\varphi^\nu + \partial^\mu F^{\mu\nu} \tag{d3.32}$$

Ako je $m^2 = 0$ dobijamo zapravo sistem Maxwell-ovih jednačina.

Gustina Lagranžijana je invarijantna u odnosu na fazne transformacije komponenata polja, pa postoji vektor gustine struje

$$\begin{aligned}j^\mu(x) &= -ie\left[\frac{\partial\alpha}{\partial(\partial^\mu\varphi^\nu)}\varphi^\nu - \frac{\partial\alpha}{\partial(\partial^\mu\varphi^{\nu*})}\varphi^{\nu*}\right] = -ie\left[F^{\mu\nu}\varphi^{\nu*} - F^{\mu\nu*}\varphi^\nu\right] = \\ &= -ie\left[(\partial^\mu\varphi^\nu - \partial^\nu\varphi^\mu)\varphi^{\nu*} - (\partial^\mu\varphi^{\nu*} - \partial^\nu\varphi^{\mu*})\varphi^\nu\right]\end{aligned} \tag{d3.33}$$

koji zadovoljava jednačinu kontinuiteta

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \tag{d3.34}$$

Jedan od primera vektorskog polja je i elektromagnetno polje.

Da bismo ispitali neko polje, odnosno njegove kvante moramo proučavati njegovu interakciju sa nekim drugim poljem. U tom smislu pojam slobodnog polja, odnosno slobodne čestice predstavlja idealizaciju. Interakcija između dva polja dovodi do pojave dodatnog člana u Lagranžijanu koji zavisi od oba polja, odnosno ako polja označimo sa A i B

$$\alpha(x) = \alpha_s^A(x) + \alpha_s^B(x) + \alpha_{\text{int}}^{AB}(x) \tag{d3.35}$$

Interakcije mogu biti lokalne i globalne. U prvom slučaju, interakcija ima oblik

$$\alpha_{\text{int}}(x) = f\left[A(x), B(x), \partial_\mu A(x), \partial_\mu B(x)\right] \tag{d3.36}$$

odnosno gustina Lagranžijana u tački x zavisi od polja A i B i njihovim izvodima samo u toj tački, pri čemu je f relativistički invarijantan skalar, a njegov oblik zavisi od transformacijskih karakteristika A i B.

Globalna uinterakcija je oblika

$$\alpha_{\text{int}}(x) = \int d^4x' d^4x'' F(x, x', x'') g\left[A(x'), \partial_\mu A(x'), B(x''), \partial_\mu B(x'')\right] \tag{d3.37}$$

tj. gustini Lagranžijana u tački x doprinose polja A i B i njihovi izvodi u svim prostornim tačkama. Skalarna funkcija F se naziva strukturnom funkcijom, a g je relativistički invarijantan skalar.

Među lokalnim interakcijama razlikujemo direktne i derivativne, zavisno od toga da li se pojavljuju samo polja ili polja i njihovi izvodi.

Sada možemo dati pregled najopštijih interakcija među različitim poljima:

-direktna interakcija realnog skalarnog polja $\varphi(x)$ i spinornog polja $\psi(x)$

$$\alpha_{\text{int}} = -G\overline{\psi}\psi\varphi \tag{d3.38}$$

Naziva se Yukawa kuplovanje, gde G meri jačinu interakcije, a primenjuje se u procesima koji sadrže skalarni mezon σ i nukleon.

-direktno vezivanje realnog pseudoskalarnog polja $\varphi(x)$ i Dirac-ovog polja $\psi(x)$

$$\alpha_{\text{int}}(x) = -iG\overline{\psi}(x)\gamma_5\psi(x)\varphi(x) \tag{d3.39}$$

Primenjuje se u slučaju sistema piona π^0 i nukleona.

-direktna vezivanja realnih vektorskih polja na nukleonsko polje

$$\alpha_{\text{int}}(x) = -iG\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\varphi^\mu(x) \tag{d3.40}$$

Primenjuju na sisteme nukleona i vektorskih mezona ρ, ω, φ, itd.

-direktna interakcija nukleonskih polja sa pseudovektorskim mezonima

$$\alpha_{\text{int}}(x) = -G\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\varphi^\mu(x) \tag{d3.41}$$

Derivativna vezivanja mezona sa nukleonima su oblika:

-za realno skalarno polje

$$\alpha_{\text{int}}(x) = -i\frac{F}{m}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\psi(x)\partial^\mu\varphi(x) \tag{d3.42}$$

-za pseudoskalarno polje

$$\alpha_{\text{int}}(x) = -\frac{F}{m}\overline{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma_5\psi(x)\partial^\mu\varphi(x) \tag{d3.43}$$

Derivativno vezivanje vektorskog Maxwell-ovog polja $A_\mu(x)$ sa Dirac-ovim poljem $\psi(x)$ je oblika

$$\alpha_{\text{int}}(x) = -i\frac{F}{2m}\overline{\psi}(x)\left(\gamma^\mu\gamma^\nu - \gamma^\nu\gamma^\mu\right)\psi(x)F_{\mu\nu}(x) \tag{d3.44}$$

LITERATURA

1. Okunj L. B., Fizika elementarnih čestica, Fond ing. Petra i Sonje Subotić, Beograd, 1992.
2. Itzykson C., Zuber J. B., Quantum Field Theory, McGraw Hill, New York, 1980.
3. Damjanović M., Hilbertovi prostori i grupe, Fizički fakultet, Beograd, 2000.
4. Mušicki Đ., Milić B., Matematičke osnove teorijske fizike, Naučna knjiga, Beograd, 1975.
5. Mušicki Đ., Uvod u teorijsku fiziku III-1, Elektrodinamika sa teorijom relativnosti, Građevinska knjiga, Beograd, 1975.
6. Šif L., Kvantna mehanika, Vuk Karadžić, Beograd, 1977.
7. Landau L. D., Lifšic E. M., Kvantna mehanika (nerelativistička teorija), Građevinska knjiga, Beograd, 1966.
8. Landau L. D., Lifšic E. M., Teorija polja, Nauka, Moskva, 1973.
9. Zovko N., Osnove relativističke kvantne fizike, Školska knjiga, Zagreb, 1987.
10. Tošić B., Statistička fizika, Institut za fiziku PMF, Novi Sad, 1978.
11. Mušicki Đ., Uvod u teorijsku fiziku II, Statistička fizika, ICS, Beograd, 1975.
12. Supek I., Teorijska fizika i struktura materijala II, Školska knjiga, Zagreb, 1977.
13. Kittel Ch., Uvod u fiziku čvrstog stanja, Savremena administracija, Beograd, 1970.
14. Bernstein J., Rev.Mod.Phys., 46, n1, p7-48 (january 1974.)
15. Weinberg S., Rev.Mod.Phys., 52, n3, p515-524 (july 1980.)
16. Salam A., Rev.Mod.Phys., 52, n3, p525-537 (july 1980.)
17. Glashow S.L., Rev.Mod.Phys., 52, n3, p539-543, (july 1980.)
18. Michel L., Rev.Mod.Phys., 52, n3, p617-650 (july 1980.)
19. Adler S. L., Rev.Mod.Phys., 54, n3, p729-765 (july 1982.)
20. Xue S. S., arXiv:hep-lat/9401036, v1 (january 1994.)
21. Sardanashvily G. A., Theoretical and Mathematical Physics, 132(2), p1161-1169 (2002)
22. Tsun T. S., Symmetry and symmetry breaking in Particle physics, Mathematical Institute, Oxford University, United Kingdom
23. Chang S.Y., Spontaneous Symmetry Breaking and Goldstone Bosons - Applications in a Broad Range of Physical Systems
24. Frishman Y. Representation Dependence of Spontaneous Symmetry Breaking, SLAC-PUB-232
25. Anastasovski P.K., Spontaneous Symmetry breaking as the Source of the Electromagnetic Field, Institute of Physics, Budapest
26. Liu C., The Meaning of Spontaneous Symmetry Breaking, University of Florida
27. Hofmann S.P., arXiv:cond-mat/0202453, v1 (february 2002)
28. Bais F.A., Notions of Symmetry
29. Trischuk W., The Electroweak Standard Model, PHY489/PHY1810, 2002.
30. Vongehr S., Solitons, 1997.
31. Coles P., Spontaneous Symmetrry breaking, Routledge Inc. Naw York, 1999.

KRATKA BIOGRAFIJA

Ivana Lončarević je rođena 17.10.1979. u Vinkovcima, Hrvatska. Osnovnu školu, kao i prirodno-matemetički smer gimnazije 'Isidora Sekulić' je završila u Novom Sadu. Godine 1998. je upisala Prirodno-matematički fakultet, smer diplomirani fizičar.

Novi Sad, 15.9.2003. Ivana Lončarević

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET
KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:
RBR
Identifikacioni broj
IBR
Tip dokumentacije: Monografska dokumentacija
TD
Tip zapisa: Tekstualni štampani materijal
TZ
Vrsta rada: Diplomski rad
VR
Autor: Ivana Lončarević, br.dos. 279/98
AU
Mentor: prof.dr Darko Kapor, redovni profesor PMF-a, Novi Sad
MN
Naslov rada: Spontano narušavanje simetrije - unitaristički pristup
NR
Jezik publikacije: Srpski (latinica)
JP
Jezik izvoda: s/e
JI
Zemlja publikacije: Srbija i Crna Gora
ZP
Uže geografsko područje: Vojvodina
UGP
Godina: 2003.
GO
Izdavač: Autorski reprint
IZ
Mesto i adresa: PMF, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
MA
Fizički opis rada: (broj poglavlja/broj strana/broj lit.citata/broj tabela/broj slika/broj grafika/broj priloga): (5/62/2/0/0/4/3)
FO
Naučna oblast: Fizika
NO
Naučna disciplina: Teorijska fizika, kvantna teorija polja
ND
Ključne reči: simetrija, spontano narušavanje
PO
UDK
Čuva se: Biblioteka instituta za fiziku, PMF, Novi Sad
ČU
Važna napomena: Nema
VN
Izvod: Cilj ovog rada je bio da prikaže unitaristički pristup fenomenu spontanog narušavanja simetrije
IZ

Datum prihvatanja teme od strane NN veća: 4.9.2003.
DP
Datum odbrane: 23.9.2003.
DO
Članovi komisije:
Predsednik: prof.dr Mario Škrinjar; redovni profesor
Član: prof.dr Miroslav Vesković, redovni profesor
Član: prof.dr Darko Kapor, redovni profesor

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCES
KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:
ANO
Identification number:
INO
Document type: Monograph type
DT
Type of record: Printed text
TR
Contens Code: Final paper
CC
Author: Ivana Lončarević, 279/98
AU
Mentor: Prof.Dr. Darko Kapor, full professor
MN
Title: Spontaneous symmetry breaking - united approach
TI
Language of text: Serbian
LT
Language of abstract: Serbian
LA
Country of publication: Serbia and Montenegro
CP
Locality of publication: Vojvodina
LP
Publication year: 2003
PY
Publisher: Author's reprint
PU
Publ. place: Faculty of Sciences
PP
Physical description: (chapters / pages / literature / tables / pictures / graphics / additional lists): (5/62/2/0/0/4/3)
Scientific field: Physics
SF
Scientific discipline: Theoretical Physics, Quantum Field Theory
SD
Key words: symmetry, spontaneous symmetry breaking
UC:
Holding data: Institute of Physics library
HO
Note: none
Abstract: The aim of this paper was to present spontaneous symmetry breaking.
AB

Accepted by the Scientific Board on: September 4th, 2003
Defended: 23.9.2003.
Thesis defend board:
President: Prof.Dr. Mario Škrinjar; full professor
Member: Prof.Dr. Miroslav Vesković; full professor
Member: Prof.Dr. Darko Kapor; full professor