



UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI  
FAKULTET  
DEPARTMAN ZA FIZIKU



0603 9/84

## Pojava haosa u jednačini energetskog bilansa na dodirnoj površini Zemlje i atmosfere

- diplomski rad -

Mentor:

dr Darko Kapor

Kandidat:

Ivana Cvijanović

Novi Sad, 2006

## Sadržaj

<b>1 Uvod .....</b>	<b>2</b>
<b>2 Analiza standardnog načina rešavanja jednačine energetskog bilansa na dodirnoj površini Zemlje i atmosfere.....</b>	<b>3</b>
2.1 Osnovne jednačine za određivanje temperature zemljišta .....	4
2.2 Numeričko rešavanje prognostičke jednačine za temperaturu.....	6
2.3 Analiza rezultata .....	9
2.3.1 Analiza rezultata dobijenih korišćenjem linearne interpolisanih ulaznih podataka .....	9
2.3.2 Analiza rezultata dobijenih korišćenjem polinomialno interpolisanih ulaznih podataka .....	15
<b>3 Analiza logističke diferencne jednačine pridružene jednačini energetskog bilansa .....</b>	<b>20</b>
3.1 Logistička jednačina i logističko preslikavanje .....	20
3.2 Transformacija jednačine energetskog bilansa u oblik logističke diferencne jednačine .....	27
3.3 Potrebni uslovi za pojavu haosa.....	30
3.4 Modeli za rešavanje transformisane jednačine energetskog bilansa.....	31
3.5 Analiza rešenja logističke diferencne jednačine .....	32
<b>4 Zaključak.....</b>	<b>36</b>
<b>Dodatak 1: Problem prediktibilnosti i uvod u teoriju determinističkog haosa....</b>	<b>38</b>
D1 Istoriski osvrt .....	38
D2 Osnovne definicije .....	39
D3 Osnovni pojmovi teorije determinističkog haosa.....	41
D3.1 Kvalitativni pokazatelji determinističkog haosa .....	43
D3.2 Kvantitativni pokazatelji determinističkog haosa .....	44
<b>Dodatak 2: Strukture FORTRAN programa korišćenih pri izradi rada .....</b>	<b>46</b>
<b>Literatura.....</b>	<b>49</b>



## 1 Uvod

Granične površine između dva medijuma su, po definiciji, mesta pojave različitih diskontinuiteta, i kao takve, zahtevaju poseban tretman prilikom modeliranja procesa koji se odvijaju na njima. Dodirna površina Zemlja-atmosfera je mesto pogodno za razvoj nepravilnosti unutar vremenskih varijacija raznih geofizičkih promenljivih. Veličina analizirana u ovom radu je temepeatura površine Zemlje (u daljem tekstu – temperatura zemljišta), koja je određivana rešavanjem jednačine energetskog bilansa. Rad se sastoji se od dve tematske celine.

Prva se odnosi na standardni način određivanja temperature zemljišta primenom LAPS šeme. Cilj je dijagnostikovanje eventualnih problema ili ograničenja u pogledu dužine vremenskih koraka, koji se mogu javiti kada se u modelu koriste šema unapred i unatrag. Na ovom mestu nije izvršena detaljna analiza uzroka nastanka ovih problema, ali su data neka osnovna objašnjenja. Ova celina predstavlja jednostavnu ilustraciju nekih ograničenja koja se mogu javiti u postupku numeričke prognoze vremena.

Druga celina se odnosi na uslove pod kojima je moguće dobiti rešenja jednačine energetskog bilansa, koja se sada analizira u nešto jednostavnijem obliku. Naime, uz odgovarajući fizički uslov, koji se odnosi na promenu temperature u dubljim slojevima zemljišta (donji granični uslov), i određene transformacije pojedinih članova ove jednačine, ona se svodi na logističku diferencnu jednačinu, koja predstavlja pogodan oblik za dijagnostikovanje uslova pod kojima nastaje haos. Provera nastanka haotičnog režima vrši se određivanjem vrednosti Ljapunovljevog eksponenta. Prikazane su dve situacije (za kraći i duži vremenski korak) u kojima je došlo do pojave haosa i date su vrednosti forsirajućih parametara koji su uslovili ovakvu situaciju. Vrednosti logističkih promenljivih tokom prvih 500 iteracija su prikazane grafički za oba primera.

U nadi da će ovaj diplomski rad moći da posluži kao korisno štivo i drugim studentima, u Dodatku 1 dat je velik broj definicija i pojmove vezanih za tematiku haosa. Čitaoci koji su već upoznati sa datom problematikom, ovo poglavlje mogu naći suvišnim, ali imajući u vidu da se radi o relativno novoj temi u nauci, uputno je imati najvažnije definicije na jednom mestu, zbog onih čitalaca koji tek počinju da se interesuju za haos. Strukture nekih FORTRAN programa korišćenih pri izradi rada date su na kraju, u Dodatku 2.

## 2. Analiza standardnog načina rešavanja jednačine energetskog bilansa na dodirnoj površini Zemlje i atmosfere

U ovom poglavlju biće predstavljen jedan od standardnih načina određivanja temperature zemljišta iz jednačine energetskog bilansa korišćenjem dela modela LAPS. Land and Air Parameterization Scheme (LAPS) je model za parametrizaciju površinskih procesa napravljen na Odseku za meteorologiju Poljoprivrednog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu (dr Dragutin Mihailović i saradnici). Ovaj izuzetno složen model ima zadatak da opiše procese u sloju neposredno iznad Zemljine površine, a to je upravo sloj u kome se dešava najveća razmena topline, količine kretanja, vlage i ostalih promenljivih važnih za atmosferske procese. Zbog toga je uspešna parametrizacija površinskih procesa glavni preduslov za uspešno numeričko modelovanje atmosfere i dobijanje tačne prognoze vremena. Većinu procesa koji imaju uticaj na transport veličina u površinskom sloju nije moguće opisati jednačinama koje proističu iz određenih fizičkih zakonitosti, već se za njihovo modelovanje moraju koristiti poluempirijske jednačine, pri čemu se u njima uzimaju parametri relevantni za dati proces.

U uvodnom delu su prikazane samo najopštije jednačine LAPS šeme, koje se odnose na izračunavanje temperature golog zemljišta bez daljeg upuštanja u parametrizacije veličina poput otpora zemljišta i aerodinamičkih otpora, zapreminske vlažnosti, termičke konduktivnosti itd. Razlog ovome je što nas zanima analiza rešenja dobijenih kada se u modelu primene različite vremenske šeme i na to je stavljen akcenat. Pokušaćemo, naime, da na primeru LAPS modela ukažemo na moguća ograničenja primene različitih vremenskih šema i da time napravimo jedan ilustrativan uvod u problem prediktabilnosti.

## 2.1 Osnovne jednačine za određivanje temperature zemljišta

Osnovna prognostička jednačina za temperaturu zemljišta potiče od jednačine energetskog bilansa na dodirnoj površini golog zemljišta i atmosfere i ima sledeći oblik:

$$c_g \frac{\partial T_g}{\partial t} = R_g^{net} - H_g - \lambda E_g - G, \quad (2.1)$$

gde su  $R_g^{net}$ ,  $H_g$ ,  $\lambda E_g$  i  $G$  fluksevi neto zračenja, osetne toplove, latentne toplove i toplove transportovane u zemljiste, redom. Sa  $T_g$  je označena temperatura zemljišta [K].  $c_g$  predstavlja toplotni kapacitet zemljišta [ $J/(Km^2)$ ].

Vidimo da će do promene temperature zemljišta doći kada dati fluksevi nisu u ravnoteži, tj. kada postoji određeno forsiranje na koje će zemljiste odgovoriti promenom svoje temperature, sve dok zbir flukseva na površini ne postane jednak nuli.

Jednačine za fluks osetne i latentne toplove date su izrazima (2.2) i (2.3):

$$H_g = \rho c_p \frac{T_g - T_a}{r_d} \quad (2.2)$$

$$\lambda E_g = \frac{\rho c_p}{\gamma} \frac{[\alpha E(T_g) - e_a]}{r_l + r_d}, \quad (2.3)$$

gde je:

$$E(T_g) = 610,7 \cdot 10^{\frac{7,5T_g}{237,3+T_g}}. \quad (2.4)$$

Veličine u ovim izrazima imaju sledeća značenja:

- $T_a$  [K] - temperatuta vazduha
- $E(T_g)$  [mb] - maksimalan pritisak vodene pare pri temperaturi zemljišta  $T_g$
- $e_a$  [mb] - pritisak vodene pare pri temperaturi vazduha  $T_a$
- $r_l$  [s/m] - otpor koje zemljiste pruža isparavanju
- $r_d$  [s/m] - otpor (aerodinamički) između zemljišta i vazduha iznad njega
- $\rho$  [ $kg/m^3$ ] - gustina
- $c_p$  [ $J/kg \text{ } ^\circ C$ ] - specifična toploplota vazduha pri konstantnom pritisku
- $\gamma$  [mb /  $^\circ C$ ] - psihrometarska konstanta.

Bezdimenzionala veličina  $\alpha$  je funkcija zapreminske vlažnosti zemljišta u prvom sloju (LAPS šema uključuje troslojni model zemljišta) i poljskog vodnog kapaciteta. U izrazu

2.4 koji daje maksimalan pritisak vodene pare pri temperaturi zemljišta,  $T_g$  je potrebno izraziti u stepenima Celzijusa [ $^{\circ}\text{C}$ ].

Neto zračenje iznad golog zemljišta dato je sa:

$$R_g^{net} = R_s (1 - \alpha_g) - \varepsilon_g \sigma T_g^4 + R_a^g , \quad (2.5)$$

gde uvedene oznake imaju sledeće značenje:

- $R_s$  [W/m<sup>2</sup>] - kratkotalasno zračenje, vrednosti ovog parametra se dobijaju iz merenja
- $\alpha_g$  - albedo zemljišta (nije konstantan već zavisi od karakteristika i vlažnosti zemljišta)
- $\varepsilon_g$  - emisivnost golog zemljišta
- $R_a$  [W/m<sup>2</sup>] - atmosfersko protivzračenje (funkcija oblačnosti, vlažnosti i temperature na datom nivou u atmosferi).

Jednačina za fluks topote u zemljište  $G$ :

$$G = c_d (T_g - T_d) , \quad (2.6)$$

gde je  $c_d$  funkcija zapreminskog topotnog kapaciteta zemljišta i njegove topotne provodnosti, koji zavise od karakteristika zemljišta.  $T_d$  je temperatura na referentnoj dubini u zemljištu.

Čitaoci koje zanimaju kompletnejše informacije o parametrizaciji procesa u LAPS modelu upućuju se na rad [7]. Struktura programa korišćenog za izračunavanje temperature golog zemljišta *bareoil/f* nije prikazana na kraju rada zbog svoje obimnosti.

## 2.2 Numeričko rešavanje prognostičke jednačine za temperaturu

Prognostička jednačina za temperaturu zemljišta predstavlja parcijalnu diferencijalnu jednačinu prvog reda<sup>1</sup> i u cilju njenog numeričkog rešavanja potrebno je preći na konačne razlike u vremenu, tj. transformisati jednačinu (2.1) u oblik njoj ekvivalentne diferencne jednačine.

Posmatraćemo numeričko rešenje jednačine (2.1) u dva slučaja; kada izvod po vremenu zamenjujemo šemom unapred i kada za izvod po vremenu koristimo šemu unatrag.

1) šema unatrag:

$$T_g^{n+1} = T_g^n + \frac{\Delta t}{C_g} F^{n+1} \quad (2.7)$$

2) šema unapred:

$$T_g^{n+1} = T_g^n + \frac{\Delta t}{C_g} F^n \quad (2.8)$$

Sa  $F^{n+1}$ , odnosno sa  $F^n$  označen je zbir članova sa desne strane jednačine (2.1) u vremenskom trenutku  $n+1$ , tj.  $n$ . Pri primeni šeme unatrag je potrebno transformisati zbir članova  $F^{n+1}$ , iz razloga što vrednost ovog izraza nije poznata u trenutku  $n+1$  (to je trenutak za koji pravimo prognozu). Stoga se  $F^{n+1}$  razvija u red i nakon zanemarivanja viših članova u razvoju dobijamo:

$$F^{n+1} = F^n + \left( \frac{\partial F}{\partial T_g} \right)^n \Delta T_g .$$

Zamenom u izraz (2.7) konačno dobijamo:

$$T_g^{n+1} = T_g^n + \frac{F^n}{\left( \frac{C_g}{\Delta t} - \left( \frac{\partial F}{\partial T_g} \right)^n \right)} . \quad (2.9)$$

---

<sup>1</sup> Ovde postoji izvesno "neslaganje" meteorološke i matematičke terminologije. Naime, nema razloga da u jednačini (1.1) stoji parcijalni izvod po vremenu, već se predlaže da se prvi član u jednačini prikaže kao totalni izvod. Ipak, s obzirom na činjenicu da se svuda u meteorološkoj literaturi koristi parcijalni izvod po vremenu, i u ovom radu ćemo ostati dosledni toj tradiciji.

U cilju izračunavanja temperature zemljišta korišćen je program *baresoil.f* koji je deo LAPS modela. Ovaj program kao ulazne podatke uzima šest veličina koje su date u toku 24 h i to: temperaturu vazduha, brzinu vetra, vlažnost vazduha, padavine, oblačnost i kratkotalan zračenje. Podaci su dobijeni merenjem i nalaze se u dve datoteke ORIGINAL (u kojoj su dati na svakih 3600 s) i BOUND (u kojoj su dati na svakih 600 s). Zavisno od toga sa kojim vremenskim korakom želimo da radimo (600 ili 3600 s) pozivamo jednu od navedene dve datoteke. Ulazni podaci iz datoteke ORIGINAL prikazani su u tabeli 2.1.

vreme [h]	temperatura [°C]	brzina vatra [m/s]	vlažnost vazduha [mb]	padavine [mm]	oblačnost [-]	intenzitet kratkotalanog zračenja [W/m <sup>2</sup> ]
0.00	15.6	2.1	1498.	0.0	0.0	0.
1.00	14.2	2.2	1498.	0.0	0.1	0.
2.00	13.3	1.7	1503.	0.0	0.1	0.
3.00	12.8	1.8	1498.	0.0	0.0	0.
4.00	12.5	1.5	1482.	0.0	0.0	0.
5.00	12.2	1.8	1456.	0.0	0.1	0.
6.00	12.0	2.0	1444.	0.0	0.1	0.
7.00	11.7	1.9	1411.	0.0	0.1	0.
8.00	12.6	2.1	1399.	0.0	0.1	7.
9.00	14.5	2.2	1416.	0.0	0.0	108.
10.00	16.0	2.5	1480.	0.0	0.0	248.
11.00	17.5	3.2	1530.	0.0	0.1	369.
12.00	19.0	3.0	1515.	0.0	0.0	481.
13.00	20.0	2.9	1399.	0.0	0.0	557.
14.00	20.5	3.2	1316.	0.0	0.0	599.
15.00	21.0	3.1	1334.	0.0	0.0	590.
16.00	21.4	3.1	1345.	0.0	0.0	538.
17.00	21.1	3.2	1317.	0.0	0.0	457.
18.00	20.8	2.6	1343.	0.0	0.0	324.
19.00	19.2	1.6	1442.	0.0	0.1	196.
20.00	17.0	2.1	1519.	0.0	0.1	59.
21.00	15.7	0.6	1540.	0.0	0.1	1.
22.00	14.4	0.7	1526.	0.0	0.0	0.
23.00	14.3	1.8	1526.	0.0	0.1	0.

Tabela 2.1: ulazni podaci za program *baresoil.f*, sadržaj datoteke ORIGINAL

Izlazni podaci (temperature zemljišta<sup>2</sup> u toku 24 h) analizirani su izračunavanjem RMSe (Root Mean Square Error) – korena iz srednje kvadratne greške između rešenja dobijenih primenom šema unatrag ( $T_b$ ) i unapred ( $T_f$ ) za dati korak u vremenu. Formula kojom određujemo RMSe ima sledeći oblik:

$$RMSe = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (T_b - T_f)^2} . \quad (2.9)$$

Uzmimo kao primer vremenski korak od 3600 s, tada će se u izlaznim datotekama nalaziti po 24 temperature dobijene primenom ove dve šeme. Za svaki korespondirajući par temperatura (isti vremenski trenutak) određujemo kvadrat njihove razlike, zatim nalazimo njihovu ukupnu sumu (sumira se 24 kvadrata razlike), delimo je sa ukupnim brojem članova u sumi i računamo kvadratni koren iz svega toga.

U cilju izračunavanja RMSe-a napravljen je poseban FORTRAN program *rmse.f*, čija je struktura data na kraju rada.

Ovde se pojavljuje još jedan problem. Naime, ulazni podaci su dati na svakih sat vremena (ili 600 s), a potrebno je analizirati rešenja i za sasvim male korake u vremenu (npr. 1 s). Stoga je napravljen poseban podprogram u okviru originalnog programa *bareoil.f*, koji ima zadatak da transformiše originalnu (ulaznu) datoteku u datoteku u kojoj su podaci dati nakon proizvoljnog koraka u vremenu (koji se zadaje). Podaci u novoj datoteci se dobijaju linearnom interpolacijom podataka iz originalne datoteke. Dakle, originalna datoteka nam daje vrednosti temperature, vetra, vlažnosti, padavina, oblačnosti i kratkotalanog zračenja na svakih sat vremena od početnog trenutka vremena  $t_o$ , a mi vršimo interpolaciju vrednosti ovih promenljivih na osnovu zadatog vremenskog koraka.

Na ovaj način moguće je izračunati koren iz srednje kvadratne greške između rešenja dobijenih primenom različitih vremenskih šema za vremenske korake u intervalu od 1 s do veoma velikih vrednosti vremenskih koraka (pokazaćemo da postoji ograničenje u veličini vremenskog koraka).

Ceo postupak izračunavanja RMSe-a ponovljen je još jedanput, sa tom razlikom da je za transformaciju originalne datoteke u datoteku sa proizvoljnim vremenskim korakom korišćen polinomialni fit umesto linearne interpolacije.

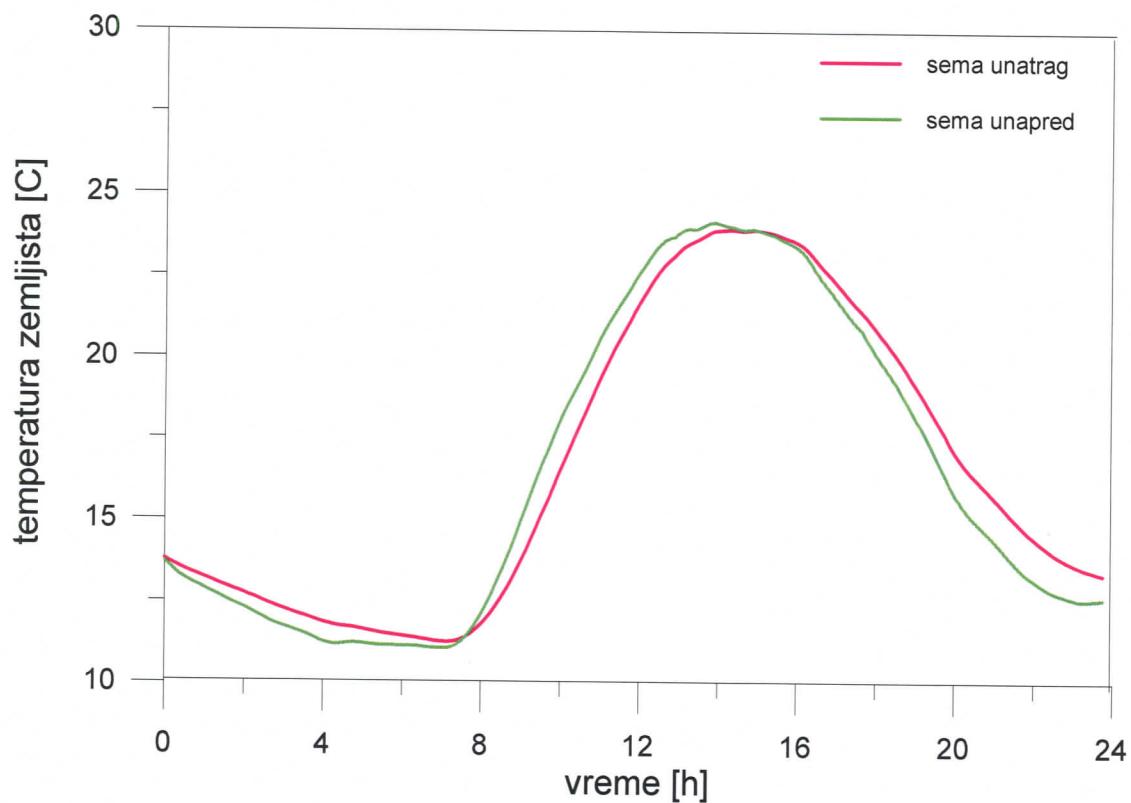
---

<sup>2</sup> Temperatura zemljišta  $T_g$  je "krajnja" izlazna veličina za program *bareoil.f*, da bi se došlo do njene vrednosti program prvo izračunava čitav niz veličina (biće prikazane u poglavljju 3)

## 2.3 Analiza rezultata

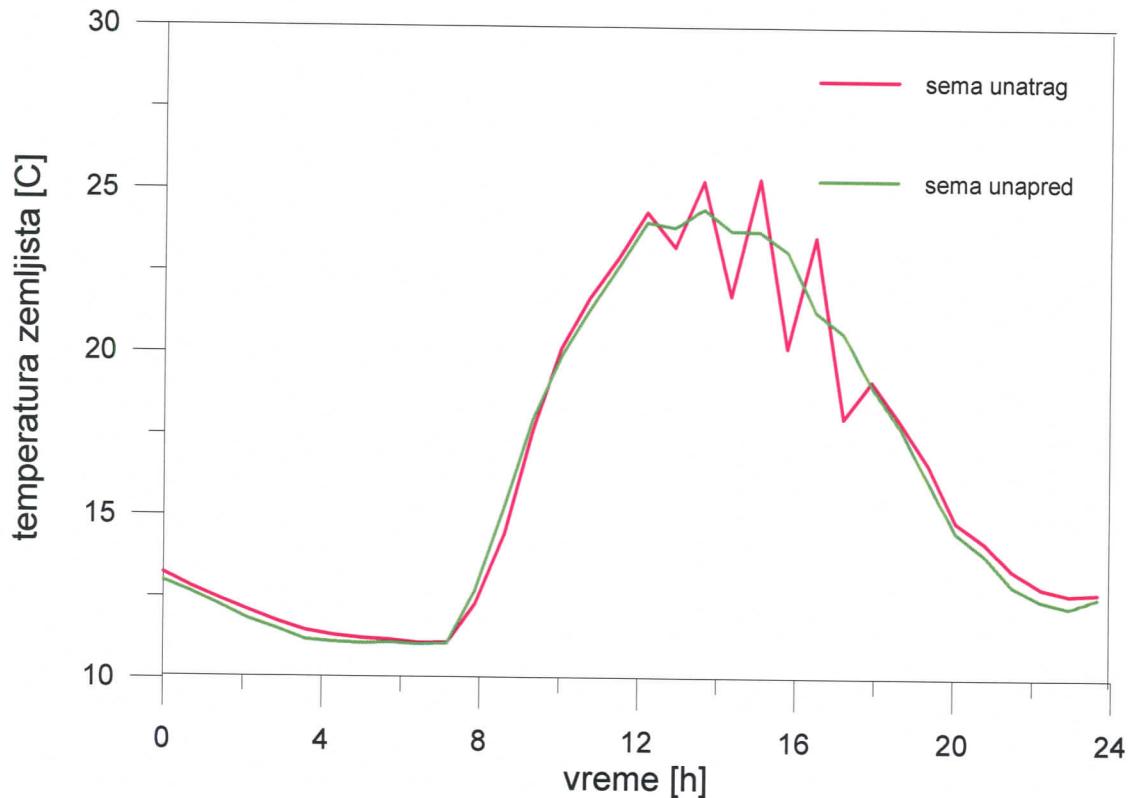
### 2.3.1 Analiza rezultata dobijenih korišćenjem linearno interpolisanih ulaznih podataka

Na grafiku 2.1 prikazan je dnevni hod temperature zemljišta dobijen kao izlaz iz programa *baresoil.f* pri primeni šeme unapred i unatrag za korak od 450 s.



Grafik 2.1: Dnevni hod temperature zemljišta (delt = 450 s)

Na grafiku 2.2 prikazan je dnevni hod temperature zemljišta pri primeni šeme unapred i unatrag za korak od 2580 s.



Grafik 2.2: Dnevni hod temperature zemljišta (delt = 2580 s)

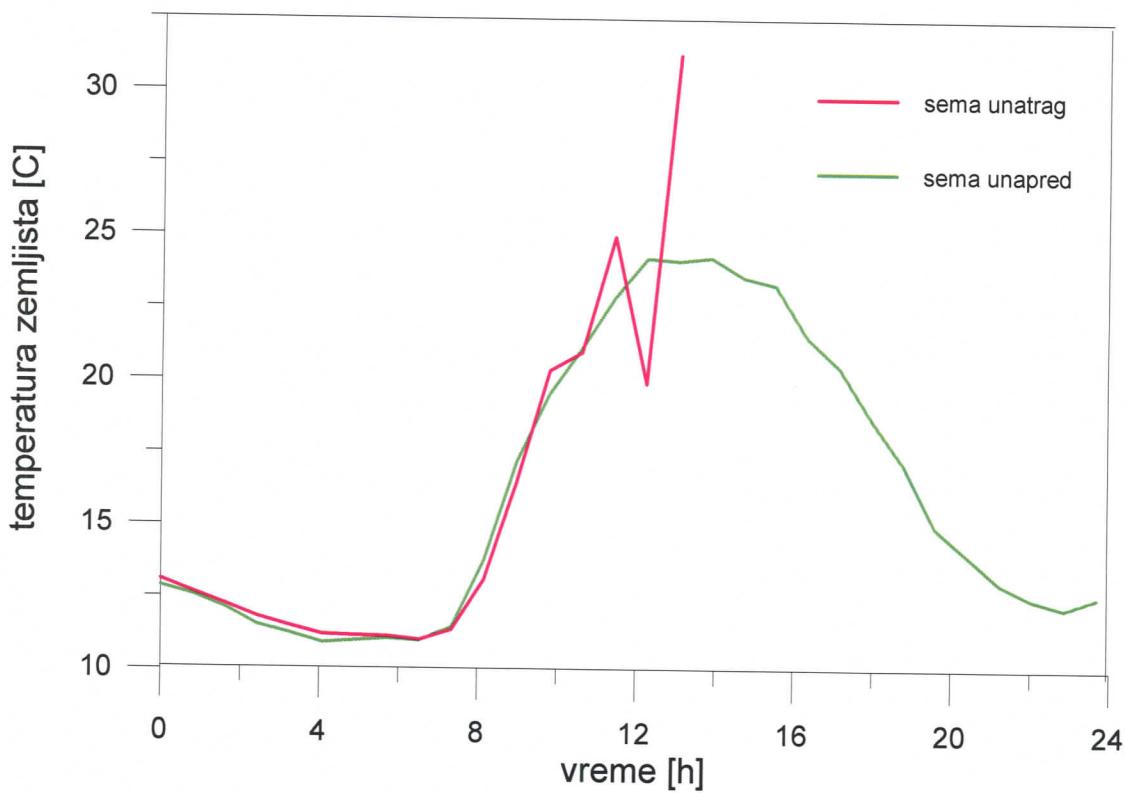
Sa ovih grafika vidimo da se rezultati dobijeni primenom različitih šema neznatno razlikuju za manje vrednosti vremenskih koraka (grafik 2.1), ali da sa povećanjem koraka u vremenu ova razlika postaje značajna (grafik 2.2). Naime, kod velikih vremenskih koraka, neposredno nakon 12 h (vreme najvećeg forsiranja kratkotalanim zračenjem) temperatura zemljišta dobijena primenom šeme unatrag pokazuje nagle skokovite promene (koje ne odgovaraju fizički realnom stanju). Kod šeme unapred ovakav problem se ne pojavljuje.

Vrednosti RMSe između rešenja dobijenih primenom šema unatrag i unapred, za različite vremenske korake (i pri linearnoj interpolaciji originalnih podataka) prikazane su na graficima 2.3 do 2.8.

Približavanjem vremenskom koraku od 3000 s greška drastično raste. Tačnije, maksimalan moguć korak iznosi 2935 s. Vremensko diferenciranje uz primenu šeme unatrag nije moguće sa vremenskim korakom većim od ovoga jer dolazi do nerealno velikih vrednosti izlaznih podataka i na kraju, do tzv. "pučanja" modela.

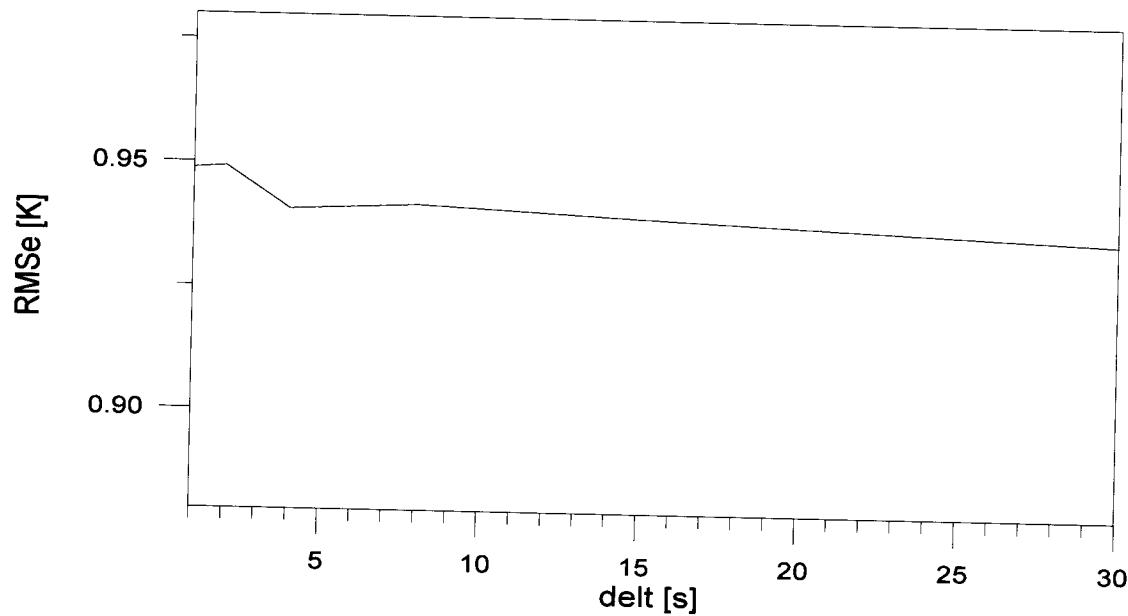
U šemi unatrag figuriše parcijalni izvod funkcije  $F$  računat za prethodni vremenski trenutak. Ova funkcija  $F$  predstavlja zbir svih članova sa desne strane jednačine (2.1). Kritičan trenutak (pučanje programa) nastaje kada vrednost imenioca na desnoj strani izraza (2.9) postane bliska nuli, što se dešava samo za velike vrednosti vremenskog koraka pri velikom spoljašnjem forsiranju kratkotalanim zračenjem. Pošto se prilikom računanja temperature za sledeći vremenski korak koristi upravo ova temperatura iz prethodnog koraka greška dalje postaje još drastičnija. Za vremenske korake manje od 2940 s, ne dolazi do "pučanja" modela, ali se sa približavanjem ovoj vrednosti koraka u vremenu i vrednost RMSe znatno povećava. Za korake od 2940 s i veće dolazi do "pučanja" modela neposredno nakon 13h, što upravo odgovara vremenu najvećeg forsiranja zemljista fluksem kratkotalasnog zračenja. Ovo je prikazano na grafiku 2.3. Iz ovoga zaključujemo da je u određenom opsegu vrednosti forsirajućih parametara (npr. kada imamo stanje poput onoga pre 13h) šema unatrag ipak upotrebljiva i pri velikim vremenskim koracima.

Pri primeni šeme unapred nije došlo do ove pojave, rešenja su dobijena za sve vremenske korake od 1 s do 3600 s.

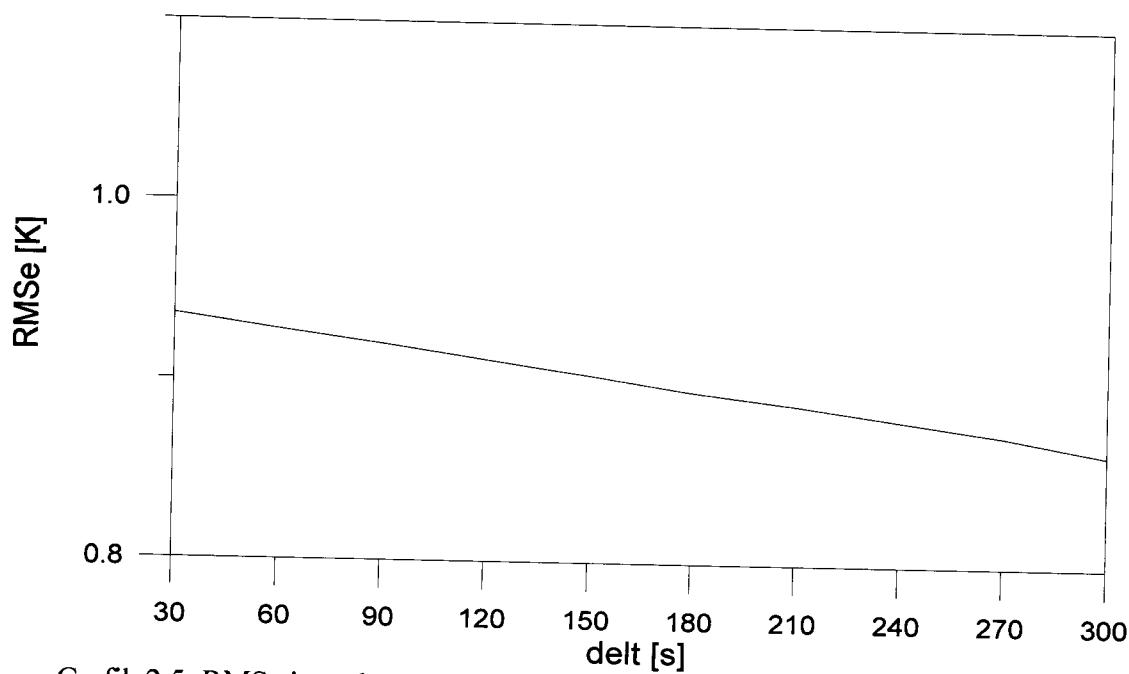


Grafik 2.3: dnevni hod temperature zemljista (delt = 2940 s)

Na grafiku 2.4 nalaze se vrednosti RMSe između rešenja dobijenih primenom šema unatrag i unapred za sasvim male vrednosti vremenskog koraka od vrednosti 1 s do 30 s. Vidimo da se greška za ovako male korake nalazi u intervalu od 0.92 do 0.96 K i da opada sa povećanjem vremenskog koraka.

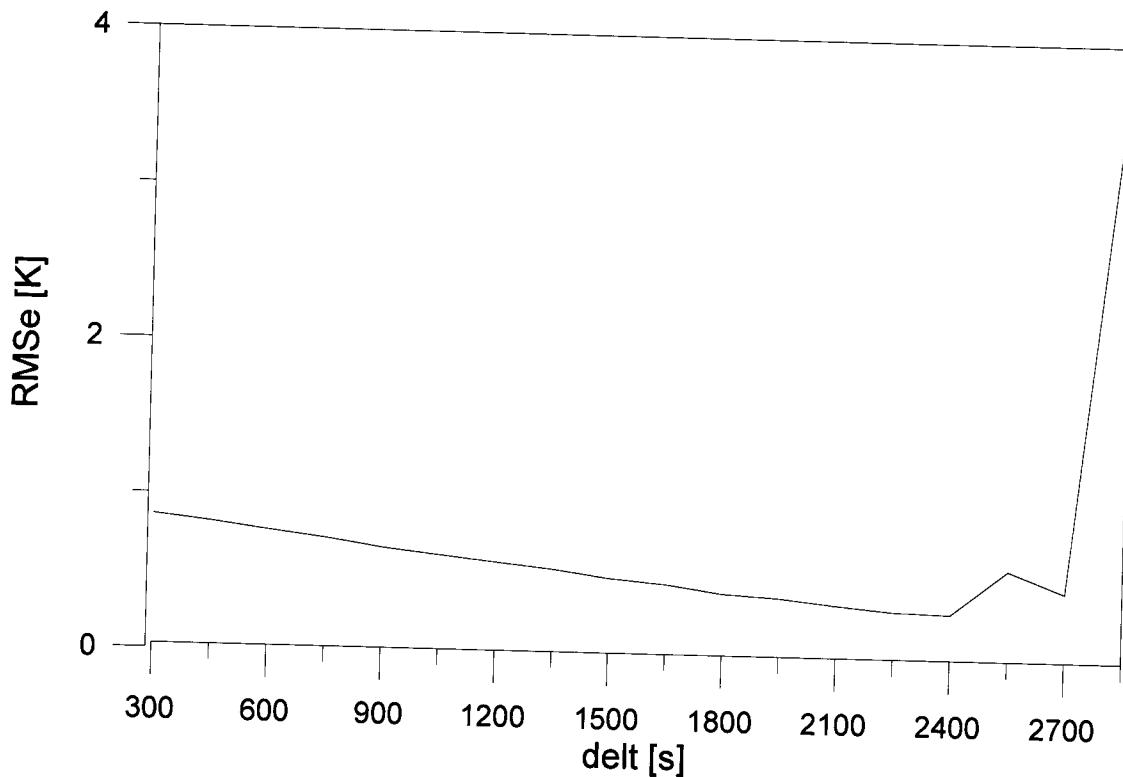


Grafik 2.4: RMSe između rešenja dobijenih primenom šema unatrag i unapred za vremenske korake u intervalu od 1 do 30 s



Grafik 2.5: RMSe između rešenja dobijenih primenom šema unatrag i unapred za vremenske korake u intervalu od 30 do 300 s

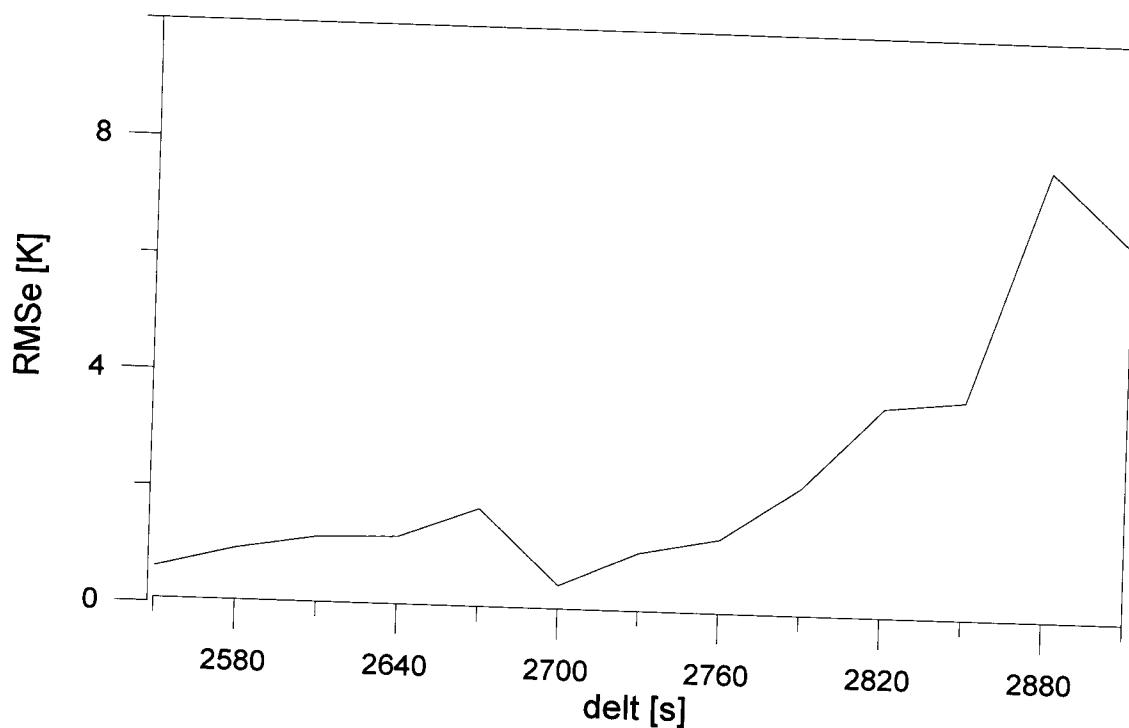
Na grafiku 2.5 prikazane su vrednosti kvadratnog korena iz srednje kvadratne greške temperature zemljišta za vrednosti vremenskog koraka od 30, 60, 90, 120, ... i 300 s. Vidimo da greška nastavlja da opada sa povećanjem vremenskog koraka.



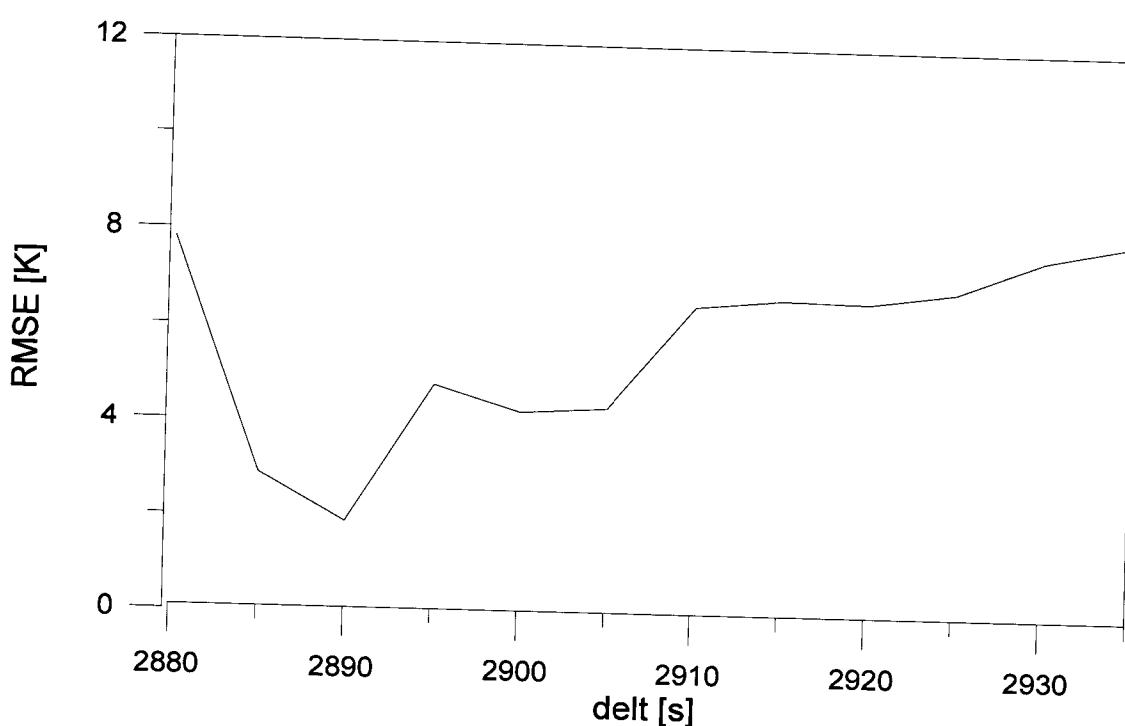
Grafik 2.6: RMSe između rešenja dobijenih primenom šema unatrag i unapred za vremenske korake od 150 s, u intervalu od 300 do 2850 s

Na grafiku 2.6 se nalaze vrednosti kvadratnog korena iz srednje kvadratne greške temperature zemljišta za vremenske korake 300, 450, 600, ... i 2850 s. Greška nastavlja da opada do vrednosti vremenskog koraka od 2400 s gde dostiže svoj minimum (ispod 0.5 K), nakon toga dolazi do naglog porasta.

Na graficima 2.7 i 2.8 se nalaze vrednosti kvadratnog korena iz srednje kvadratne greške temperature zemljišta za vremenske korake 2550, 2580, 2610, ... i 2850 s i 2880, 2885, 2900,... i 2935 s. Sa njih vidimo ponašanje greške prilikom približavanja kritičnom vremenskom koraku.



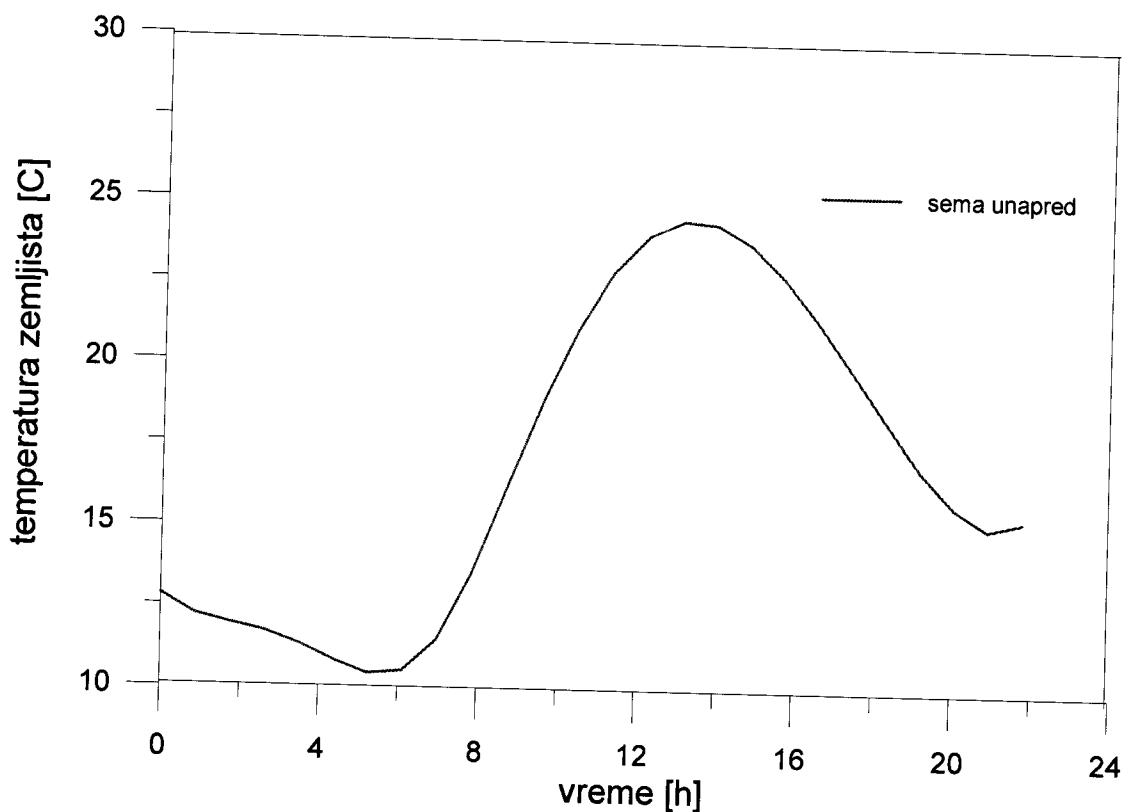
Grafik 2.7: RMSe između rešenja dobijenih primenom šema unatrag i unapred za vremenske korake u intervalu od 2550 do 2910 s



Grafik 2.8: RMSe između rešenja dobijenih primenom šema unatrag i unapred za vremenske korake u intervalu od 2880 do 2935 s

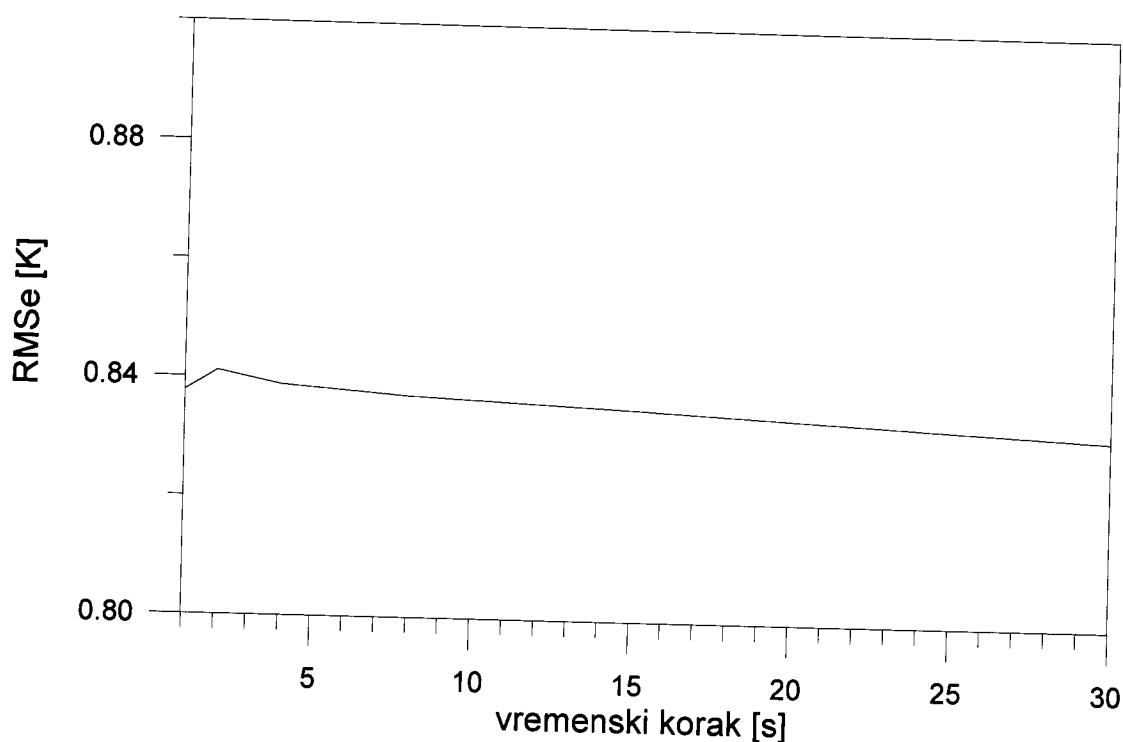
### 2.3.2 Analiza rezultata dobijenih korišćenjem polinomialno interpolisanih ulaznih podataka

Za slučaj ulaznih podataka iz polinomialno interpolisane originalne datoteke imamo sličnu situaciju kao u prethodnom razmatranju, što je sasvim očekivan rezultat. Ponovo dolazi do drastičnog rasta RMSe-a između rešenja dobijenih primenom šeme unatrag i unapred za velike korake u vremenu i do pucanja modela nakon neke kritične vrednosti. Ovoga puta, ta kritična vrednost je nešto veća i iznosi 3135 s. Takođe, i ovog puta, uzrok velikog porasta RMSe-a je primena šeme unatrag. Kod primene šeme unapred ne dolazi do "pučanja" modela, rešenja su dobijena za sve vremenske korake od 1 s do 3600 s. Ovo je ilustrovano na grafiku 2.9 na primeru koraka od 3135 s. Vrednosti RMSe za različite vremenske korake prikazane su na graficima 2.10 do 2.15.



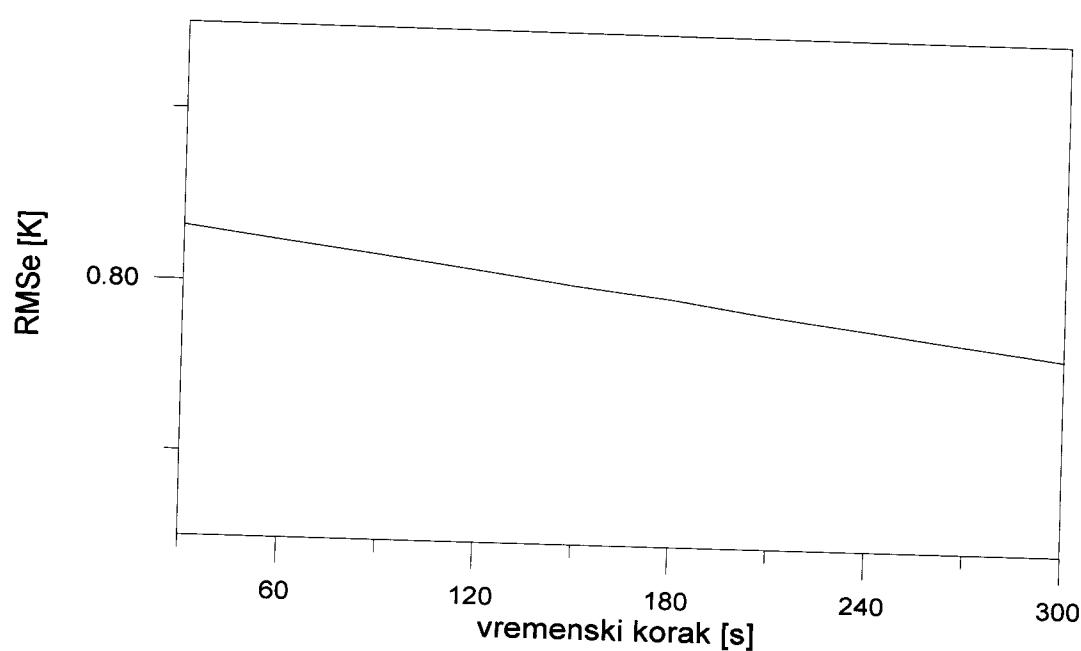
Grafik 2.9: Dnevni hod temperature zemljišta ( $\Delta t = 3135$  s)

Na grafiku 2.10 nalaze se vrednosti RMSe između rešenja dobijenih primenom šema unatrag i unapred za sasvim male vrednosti vremenskog koraka do vrednosti od 30 s. Ovoga puta greška je neznatno manja nego u prethodnom slučaju i nalazi se u intervalu od 0.82 do 0.86 K; takođe, ona opada sa povećanjem vremenskog koraka.

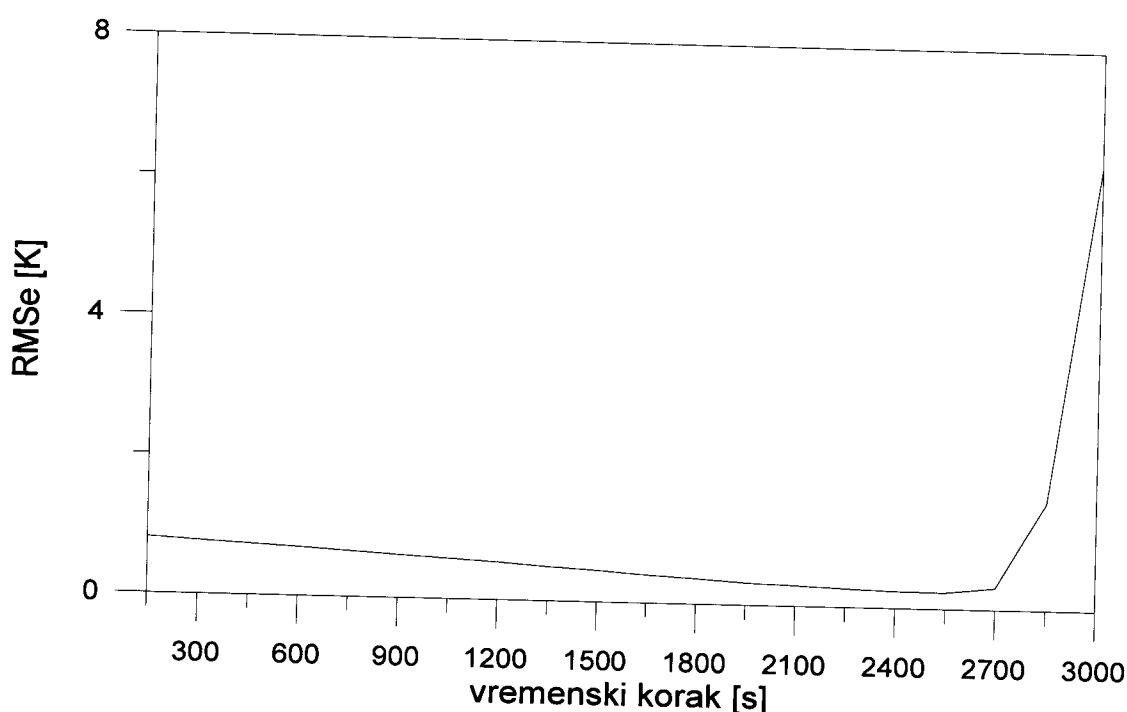


Grafik 2.10: RMSe između rešenja dobijenih primenom šema unatrag i unapred za vremenske korake u intervalu od 1 do 30 s

Na grafiku 2.11 prikazane su vrednosti kvadratnog korena iz srednje kvadratne greške temperature zemljišta za vrednosti vremenskog koraka od 30, 60, 90, 120, ...300 s. Greška nastavlja da opada sa povećanjem vremenskog koraka.



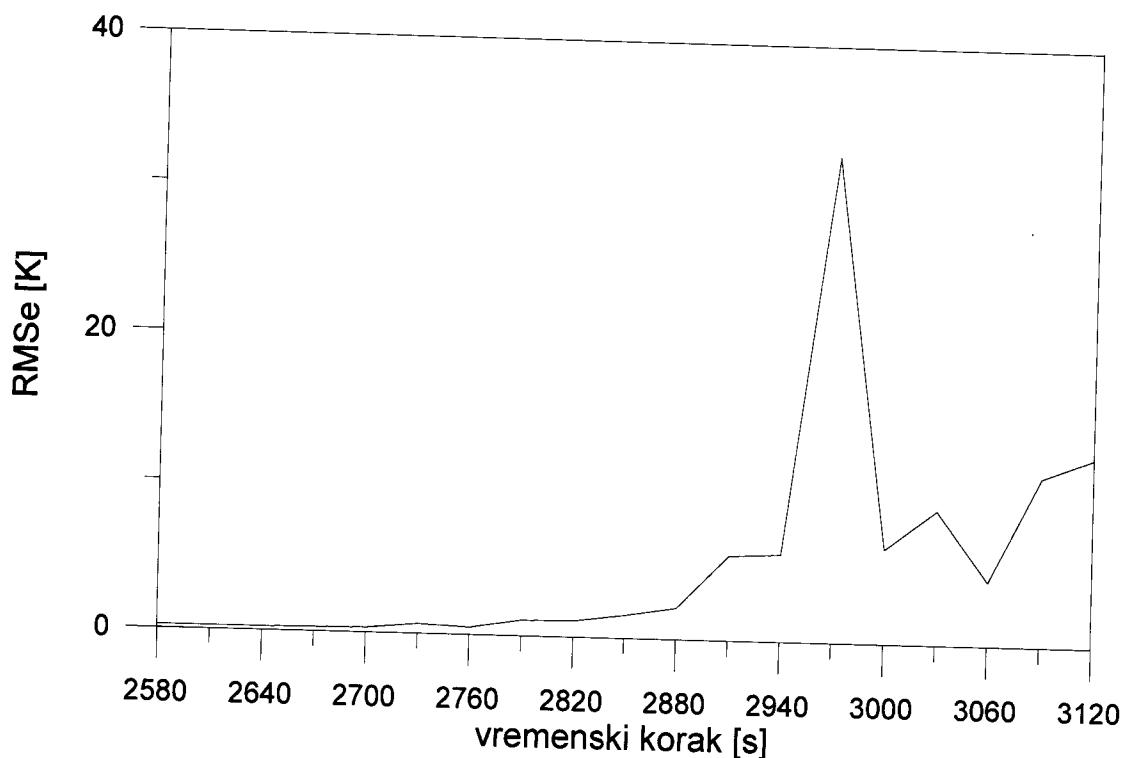
Grafik 2.11: RMSe između rešenja dobijenih primenom šema unatrag i unapred za vremenske korake u intervalu od 30 do 300 s



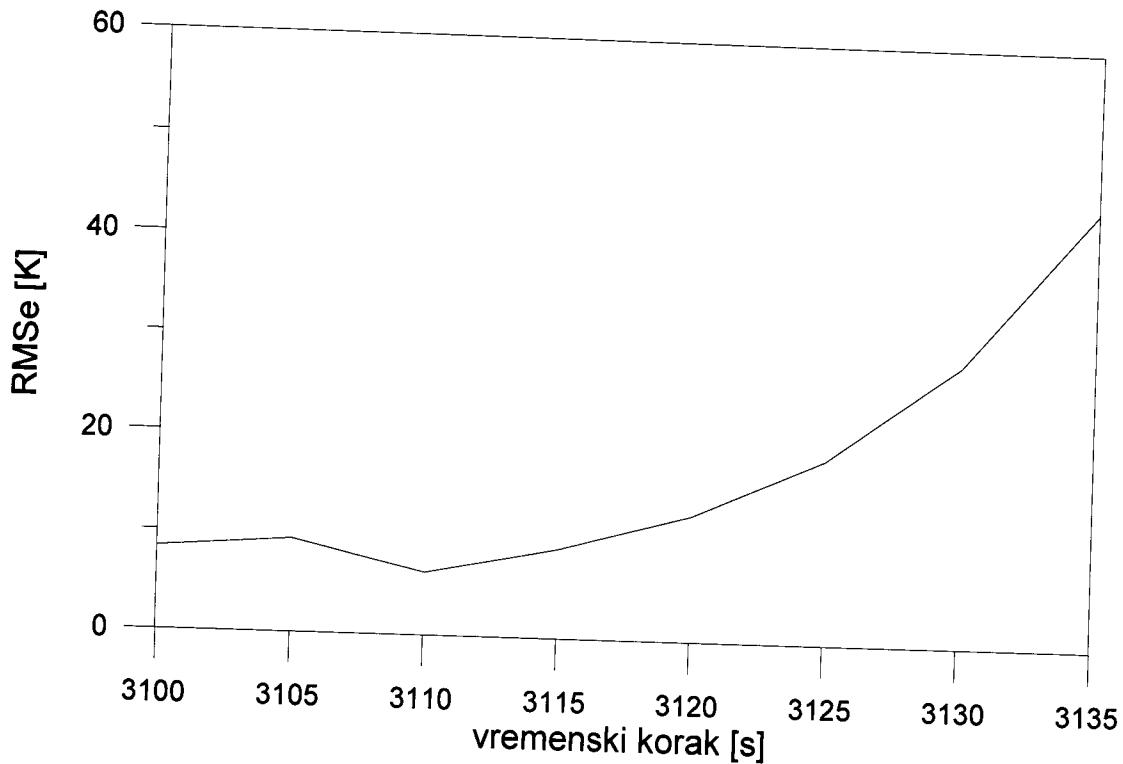
Grafik 2.12: RMSe između rešenja dobijenih primenom šema unatrag i unapred za vremenske korake od 300 s u intervalu od 300 do 3000 s

Na grafiku 2.12 se nalaze vrednosti RMSe između rešenja dobijenih primenom šema unatrag i unapred za vremenske korake 300, 450, 600, ...3000 s. Greška nastavlja da opada do vrednosti vremenskog koraka od 2550 s gde dostiže svoj minimum nakon čega dolazi do naglog porasta.

Na graficima 2.13 i 2.14 se nalaze vrednosti RMSe između rešenja dobijenih primenom šema unatrag i unapred za vremenske korake 2580, 2610, ...3120 s i 3100, 3105, ... 3135 s. Oni nam ilustruju ponašanje greške pre pojave "pučanja" modela.



Grafik 2.13: RMSe za vremenske korake u intervalu od 2580 do 3120 s



Grafik 2.14: RMSe za vremenske korake u intervalu od 3100 do 3135 s

Imajući u vidu ograničenje upotrebe šeme unatrag na male vremenske korake, zaključujemo da šema unapred daje mnogo bolje rezultate pri primeni u LAPS modelu. S obzirom na činjenicu da kod mnogih drugih tipova jednačina šema unatrag daje bolje rezultate nego šema unapred, ovo predstavlja neočekivan rezultat. Naime, kod najjednostavnijeg primera – primene ovih šema na oscilatornu jednačinu dobija se da je šema untag bezuslovno stabilna (amortizujuća) dok je šema unapred uvek nestabilna. Iz ovog razloga, u narednom poglavlju će pri izvođenju logističke diferencne jednačine biti korišćena šema unapred.

Sve prethodno navedeno navodi nas na zaključak da čak i ovakvi, uslovno rečeno jednostavni problemi, poput rešavanja jednačine energetskog bilansa imaju ograničenja u pogledu domena forsirajućih parametara za koje je moguće dobiti realna rešenja. Uzroci nemogućnosti predviđanja pojedinih procesa i mogući razlozi nastanka grešaka predmet su velikog broja istraživanja u poslednjih 50-tak godina. Danas su poznati različiti kvantitativni i kvalitativni pokazatelji prediktabilnosti pojedinih sistema, i postoji razvijena metodologija pristupa ovome problemu. Informacije o svemu tome, kao i o malom istorijskom osvrtu na datu problematiku mogu se naći u Dodatku 1, dok će se u narednom poglavlju naći konkretni primer analize ovog problema na pojednostavljenoj jednačini energetskog bilansa.

### 3. Analiza logističke diferencne jednačine pridružene jednačini energetskog bilansa

#### 3.1 Logistička diferencijalna jednačina i logističko preslikavanje<sup>3</sup>

Logistička diferencijalna jednačina se prvi put pojavljuje kod modela populacione dinamike. Pjer Ferhulst (Pierre Verhulst; 1845,1847) [8] u pokušaju da objasni kada dolazi do saturacije i ograničenog rasta populacije razvija tzv. model rasta populacije.

Prvobitna verzija ovog modela imala je sledeći oblik:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{rN(K-N)}{K}, \quad (3.1)$$

gde  $r$  predstavlja Maltuzijanski parametar (Malthusian parameter) (veličina maksimalnog rasta populacije) a  $K$  je tzv. *noseći kapacitet* (maksimum održive populacije). Deljenjem obe strane izraza sa  $K$  i definišući  $x = \frac{N}{K}$  dobijamo diferencijalnu jednačinu:

$$\frac{dx}{dt} = rx(1-x), \quad (3.2)$$

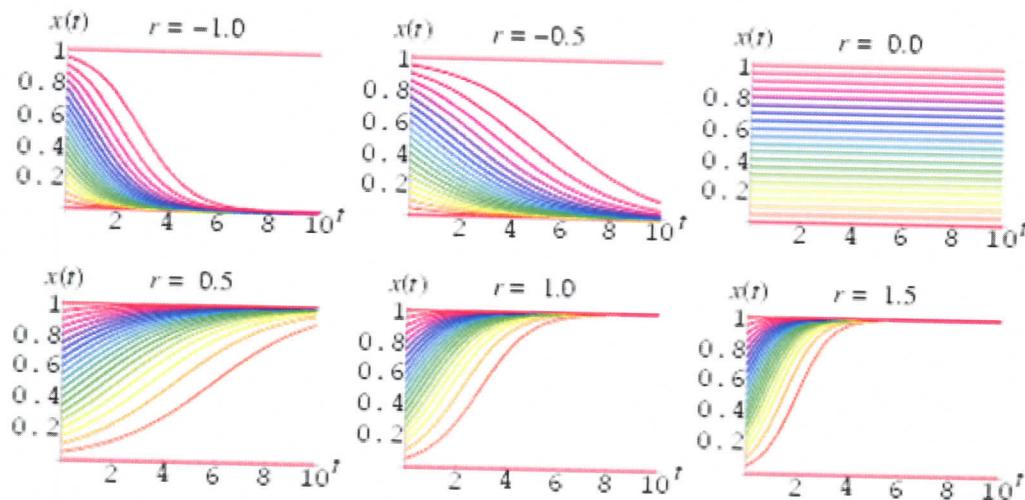
koja je poznata kao logistička jednačina i ima rešenje:

$$x(t) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{x_0} - 1)e^{-rt}}. \quad (3.3)$$

Obično se uzima da je  $r$  pozitivno, ali su na grafiku 3.1 prikazana rešenja jednačine za različite pozitivne i negativne vrednosti  $r$ , uz početne uslove u intervalu od 0 do 1 i koracima od po 0.05.

---

<sup>3</sup> Termin *logističko preslikavanje* koristi se u knjizi "Deterministički haos" - Dr Milivoj Belić. U radu će biti korišćen i termin *logistička diferencna jednačina* sa istim značenjem.



Grafik 3.1: rešenja logističke jednačine za različite vrednosti parametra  $r$ , uz početne uslove u intervalu od 0 do 1 i koracima od po 0.05.

Diskretizovana verzija logističke jednačine poznata je kao logistička diferencna jednačina ili logističko preslikavanje.

Logistička diferencna jednačina ima sledeći oblik:

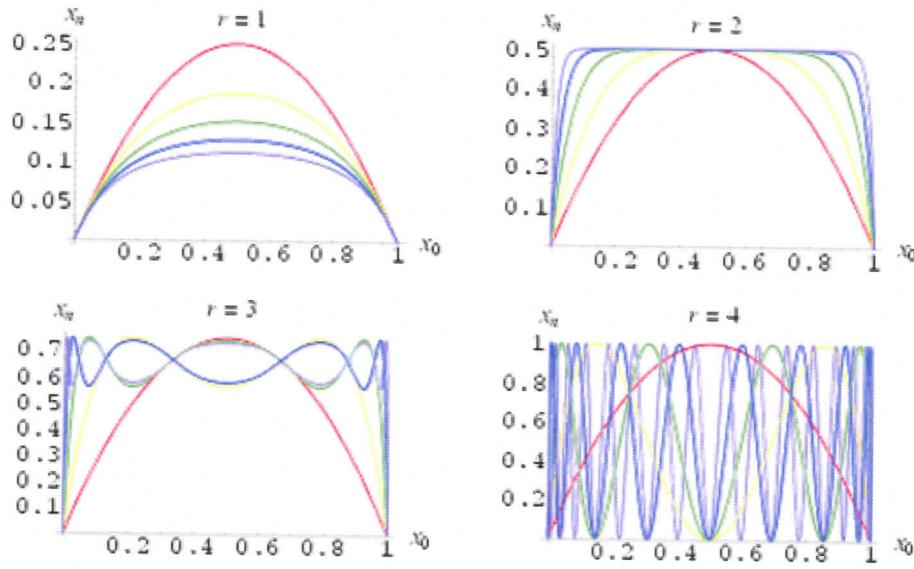
$$x_{n+1} = r x_n (1 - x_n), \quad (3.4)$$

gde je  $r$  pozitivna konstanta poznata i kao "biotički potencial". Džon fon Nojman (John von Neuman) je krajem '40-tih pokazao da se logistička diferencna jednačina  $x_{n+1} = 4 x_n (1 - x_n)$  može koristiti kao generator nasumičnih brojeva, ali njihovo detaljno izučavanje počinje tek tokom ranih 50-tih sa Polom Štajnom (Paul Stein) i Stanislavom Ulamom (Stanislaw Ulam). Posmatrajmo prvi par iteracija u ovoj jednačini, one daju:

$$\begin{aligned} x_1 &= r x_0 (1 - x_0) \\ x_2 &= r^2 (1 - x_0) x_0 (1 - r x_0 + r x_0^2) \\ x_3 &= r^3 (1 - x_0) x_0 (1 - r x_0 + r x_0^2) (1 - r^2 x_0 + r^2 x_0^2 + r^3 x_0^3 - 2 r^3 x_0^3 + r^3 x_0^4), \end{aligned}$$

gde je  $x_0$  početna vrednost.

Na grafiku 3.2 prikazane su prvi pet iteracija za različite vrednosti parametra  $r$ .



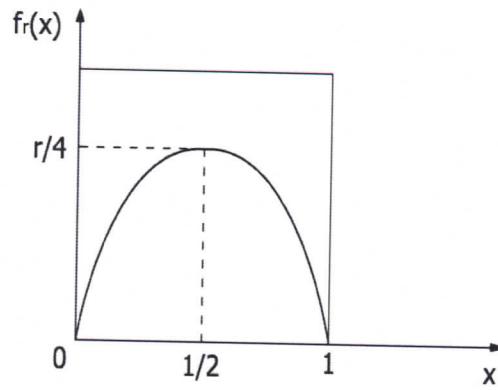
Grafik 3.2: prvih pet iteracija za različite vrednosti parametra  $r$  (prva - crvena, druga - žuta, treća - zelena, četvrta - plava i peta - ljubičasta)

Neka se početna vrednost  $x_0$  nalazi unutar intervala  $[0,1]$ . Nađimo interval u kome treba da se nalazi parametar  $r$  tako da se i sve nove tačke nađu unutar intervala  $[0,1]$ . Maksimalna vrednost  $x_{n+1}$  se može dobiti iz uslova:

$$\frac{d x_{n+1}}{d x_n} = r(1 - 2x_n) = 0, \quad (3.5)$$

tako da se najveća moguća vrednost  $x_{n+1}$  javlja kada je  $x_n = 1/2$ . Uvrštavajući ovo, dobijamo da je  $\max(x_{n+1}) = r/4$ . Stoga, da bi smo ostali u okviru željenog kodomena, mora da važi  $r \in [0, 4]$ .

Ovo je prikazano na slici 3.1. Dakle, funkcija logističkog preslikavanja  $f_r(x)$  preslikava interval  $(0,1)$  na samog sebe kada se vrednost parametra  $r$  nalazi između 0 i 4 ( ref. [1] ). Kao što ćemo videti, ponašanje logističke diferencne jednačine u domenu  $(0,1)$  ispoljava mnoge interesantne osobine.



Slika 3.1: funkcija logističkog iterativnog preslikavanja

Potražimo sada fiksne tačke; njih dobijamo uz uslov  $x_{n+1} = x_n$ . (3.6)

Zbog jednostavnosti u narednim izrazima biće izostavljen index  $n$  u  $x_n$ :

$$f(x) = r x (1 - x) = x \quad (3.7)$$

$$x [1 - r (1 - x)] = x (1 - r + rx) = rx [x - (1 - r^{-1})] = 0, \quad (3.8)$$

dakle, fiksne tačke su  $x_1^{(1)} = 0$  i  $x_2^{(1)} = 1 - r^{-1}$  (preciznije ako je  $r < 1$ , fiksna tačka je  $x_1^{(1)}$ , u suprotnom fiksna tačka je  $x_2^{(1)}$ ).

Interesantno je posmatrati šta se dešava kada je vrednost  $r$  veća od 3. Dolazi do pojave bifurkacija tj. imamo dvostruki ciklus kojem odgovaraju dve stabilne fiksne tačke. Međutim, sada nove fiksne tačke moraju da zadovolje izraz:

$$x_{n+2} = x_n. \quad (3.9)$$

Dakle:

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= r x_{n+1} (1 - x_{n+1}) \\ &= r [r x_n (1 - x_n)] [1 - r x_n (1 - x_n)] \\ &= r^2 x_n (1 - x_n) (1 - r x_n + r x_n^2) = x_n. \end{aligned} \quad (3.10)$$

ovo je ekvivalentno sa (indeks  $n$  je ponovo izostavljen):

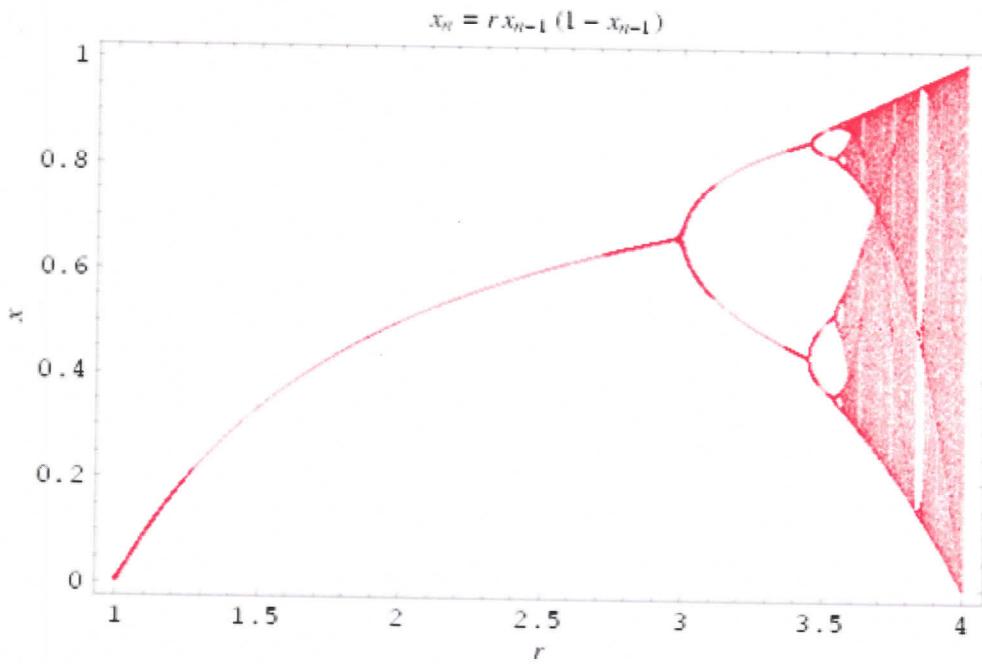
$$\begin{aligned} & x \{ r^2 [1 - x(1+r) + 2rx^2 - rx^3] - 1 \} = 0 \\ & x [-r^3x^3 + 2r^3x^2 - r^2(1+r)x + (r^2-1)] = 0 \\ & -r^3x[x - (1-r^{-1})][x^2 - (1+r^{-1})x + r^{-1}(1+r^{-1})] = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Rešavanjem ovih jednačina dobijemo i fiksne tačke jednostrukog ciklusa (razlog je očigledan; u dvostukom ciklusu sadržan je jednostruki ciklus). Tražene fiksne tačke dobijamo iz uslova:

$$x_{\pm}^{(2)} = \frac{1}{2} \left[ (1+r^{-1}) \pm r^{-1} \sqrt{(r-3)(r+1)} \right]. \quad (3.12)$$

Realna rešenja postoje samo kada je  $r \geq 3$  tako da je to mesto od koga počinje dvostruki ciklus.

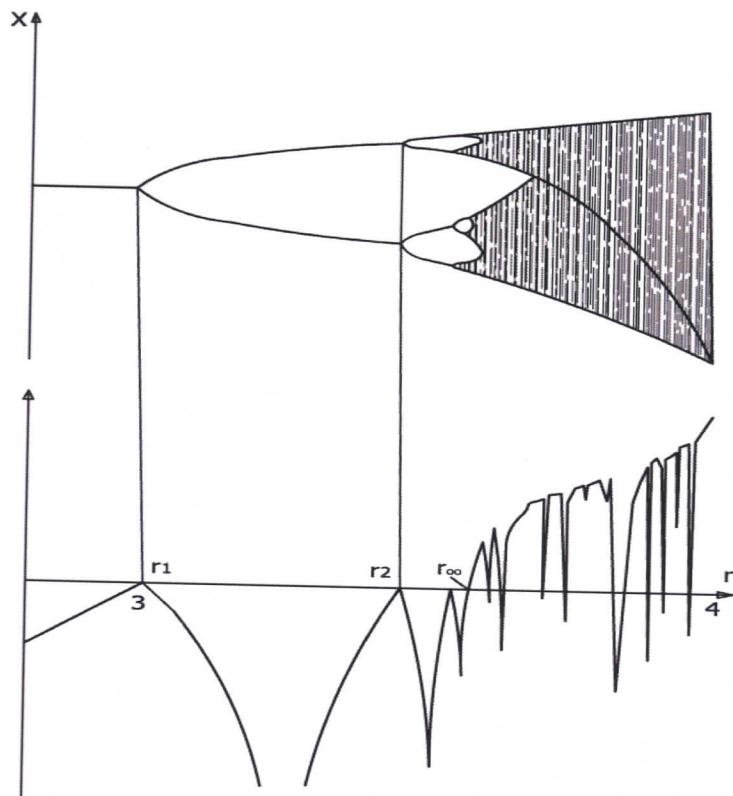
Zanima nas šta se dešava sa vrednostima  $x_n$  kada  $n$  raste. To nam ilustruje tzv. bifurkacioni dijagram logističkog preslikavanja za različite vrednosti kontrolnog parametra  $r$ . On je prikazan na slici 3.2.



Slika 3.2: bifurkacioni dijagram logističke diferencne jednačine

Prve ovakve dijagrame napravio je Robert Mej (Robert May) [3]. U to vreme on se bavio modelom rasta populacije koji je upravo predstavljao logističko preslikavanje, kada je naišao na izuzetno frustrirajući problem: kada je parametar  $r$  bio nizak, model je dostizao neku stabilnost i ostajao na tome, kada je parametar  $r$  bio visok postojano stanje se razlамalo u dva stanja, i populacija bi počela naizmenično da biva u dve brojnosti, u većoj pa u manjoj. A kada je  $r$  postalo još veće taj isti sistem počinjao je da se ponaša nepredvidivo. Mej je isprobao stotine različitih vrednosti tog parametra. Video je, na primer, da ako je  $r = 2,7$  populacija se ustali na 0,6292, ako se  $r$  poveća malo, populacija postane brojnija, ali ne mnogo. Ali, kada parametar postane veći od 3, grafikon se rascepi u dve linije. Ako se parametar poveća preko neke dalje vrednosti dolazi do rascepa i te dve linije – dobijamo četiri postojane vrednosti. Ovaj proces se dalje ponavlja sve dok neka kritična vrednost nije premašena (3,57) nakon čega nastaje rasulo. Nema periodičnosti, vrednost brojnosti populacije se menja potpuno nasumično.

Na slici 3.3 prikazan je bifurkacioni dijagram zajedno sa odgovarajućim Ljapunovljevim eksponentima<sup>4</sup> [1].

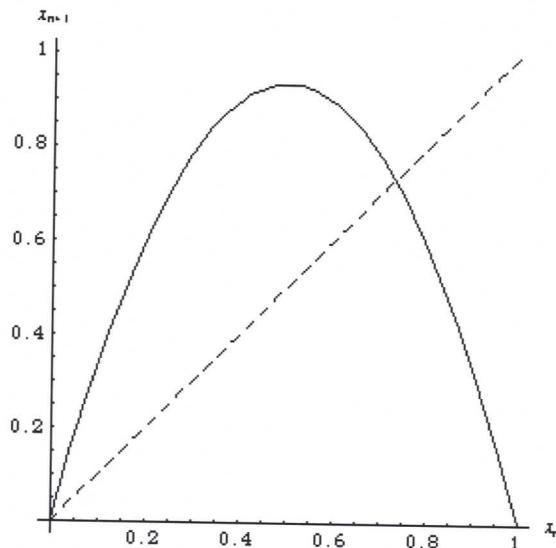


Slika 3.3: (a) bifurkacioni dijagram logističkog preslikavanja (logističke diferencne jednačine) i (b) pripadajući Ljapunovljevi eksponenti

<sup>4</sup> Ljapunovljevi eksponenti su definisani u Dodatku 1

Vidimo da se na parametarskoj osi uočavaju tri karakteristična intervala. Tako za  $r < 3$  imamo stabilno ponašanje sistema, za  $3 < r < r_\infty \approx 3.57$  sistem izvodi periodično kretanje i Ljapunovljev eksponent je negativan ili ima vrednost nula u tačkama bifurkacija. Konačno, za  $r > r_\infty$  Ljapunovljev eksponent je uglavnom pozitivan, što odgovara haotičnom kretanju. Unutar haotičnog intervala ima mnogo mesta na kojima se otvaraju periodični "prozori" u kojima je  $\lambda < 0$ .

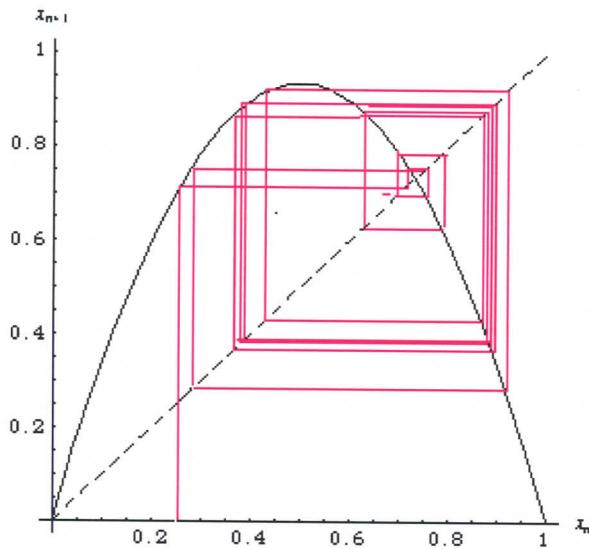
Pojasnimo ovo posmatrajući sliku 3.4 na kojoj se nalaze funkcija logističkog preslikavanja  $f_r(x) = rx(1-x)$  i funkcija  $f(x) = x$ . Za  $r < 3$  imamo jednu fiksnu tačku (sistem je stabilan). Kako doći do fiksnih tačaka na očigledan način? Izaberimo bilo koju tačku unutar intervala  $(0,1)$  na  $x$ -osi za početnu. Potražimo njoj odgovarajuću tačku na grafiku funkcije  $f_r(x)$ , a zatim se pomerajmo paralelno  $x$ -osi do preseka sa funkcijom  $f(x)$ <sup>5</sup>. Ponavljamajući ovaj proces mnogo puta vidimo da se sve opisane trajektorije skupljaju oko određenih tački (fiksnih tački) za određenu vrednost parametra  $r$  sve dok se on ne nađe u intervalu  $(3.57, 4)$ . Kada se  $r$  nađe u pomenutom intervalu, kao što je slučaj na slici 3.4, neće doći do skupljanja trajektorija oko neke tačke, bez obzira na broj iteracija koje napravimo. Dakle, to je oblast gde imamo pozitivne vrednosti Ljapunovljevih eksponenata tj. mesto gde se javlja haos. Ovo se lako može proveriti ako primenimo prethodno opisanu proceduru, što je i urađeno na slici 3.5 koja predstavlja tzv. *veb dijagram* (web - mreža). Ipak, treba uvek imati u vidu već spomenutu činjenicu da se i unutar intervala  $(3.57, 4)$  mogu javiti mesta sa negativnim Ljapunovljevim eksponentima.



slika 3.4: funkcija logističkog preslikavanja  $f_r(x) = rx(1-x)$  i funkcija  $f(x) = x$ , kada je  
 $r = 3,741$

---

<sup>5</sup> Ovaj jednostavan postupak sledi iz definicije fiksne tačke  $x_{n+1} = x_n$ , odnosno  $rx_n(1-x_n) = x_n$ ; što se svodi na uslov  $f_r(x) = f(x)$



slika 3.5: veb dijagram za funkciju logističkog preslikavanja kada je  $r = 3,741$  (korak određivanja novog početnog uslova sa  $x_n$ -ose nije grafički predstavljen zbog jasnoće prikaza)

### 3.2 Transformacija jednačine energetskog bilansa u oblik logističke diferencne jednačine

Posmatrajmo jednačinu energetskog bilansa (2.1) transformisanu na sledeći način:

$$c_g \frac{\partial T_g}{\partial t} = a(T_g - T_a) - c_l(E(T_g) - e_a) - c_h(T_g - T_a) - c_d(T_g - T_d) . \quad (3.13)$$

Članovi sa desne strane imaju isto značenje kao i u jednačini (2.1) tj. to su redom fluks neto zračenja, fluks latentne toplove, fluks osetne toplove i fluks toplove u zemljiste. Fluks neto zračenja (prvi član sa desne strane) napisan je u obliku predloženom od strane Bumralkara [2] i Holštaga i Van Uldena [4].

Jednačina (3.13) može da se zapise i u obliku:

$$c_g \frac{\partial(T_g - T_a)}{\partial t} = a(T_g - T_a) - c_l(E(T_g) - e_a) - c_h(T_g - T_a) - c_d(T_g - T_a) - c_d(T_a - T_d) - c_g \frac{\partial T_a}{\partial t}$$

Nakon očiglednih transformacija i uvođenja nove promenljive  $\xi = T_g - T_a$ , jednačina (3.13) dobija oblik:

$$c_g \frac{\partial \xi}{\partial t} = \xi (a - c_h - c_d) - c_l (E(T_g) - e_a) - c_d (T_a - T_d) - c_g \frac{\partial T_a}{\partial t}. \quad (3.14)$$

Kako je:

$$E(T_g) = E(T_a) e^{b(T_g - T_a)} = E(T_a) e^{b\xi},$$

i koristeći Maklorenov razvoj funkcije  $e^{b\xi}$ , dobijamo:

$$E(T_g) = E(T_a) \left\{ 1 + b\xi + \frac{b^2}{2} \xi^2 + O(b^3 \xi^3) \right\}.$$

Zbog definicije Maklorenovog razvoja ovo važi samo za male vrednosti  $b\xi$ , što će biti provereno po okončanju računa.

Nakon uvrštanja u (3.14) imamo:

$$c_g \frac{\partial \xi}{\partial t} = (a - c_h - c_d) \xi - c_l \left[ E(T_a) \left( 1 + b\xi + \frac{b^2}{2} \xi^2 + O(b^3 \xi^3) \right) - e_a \right] - c_d (T_a - T_d) - c_g \frac{\partial T_a}{\partial t}. \quad (3.15)$$

Pregrupisavanjem (3.15) konačno dobijamo:

$$c_g \frac{\partial \xi}{\partial t} = [a - c_h - c_d - c_l b E(T_a)] \xi - c_l E(T_a) \frac{b^2}{2} \xi^2 - c_l [E(T_a) - e_a + E(T_a) O(b^3 \xi^3)] - c_d (T_a - T_d) - c_g \frac{\partial T_a}{\partial t} \quad (3.16)$$

Neka je fizički uslov za  $T_d$  (donji granični uslov) dat sa:

$$T_d = T_a + \frac{1}{c_d} \left[ c_l E(T_a) + c_g \frac{\partial T_a}{\partial t} - c_l e_a + c_l E(T_a) O(b^3 \xi^3) \right], \quad (3.17)$$

što je ekvivalentno sa:

$$-c_l [E(T_a) - e_a + E(T_a) O(b^3 \xi^3)] - c_d (T_a - T_d) - c_g \frac{\partial T_a}{\partial t} = 0. \quad (3.18)$$

Tada se izraz (3.16) svodi na:

$$c_g \frac{\partial \xi}{\partial t} = [a - c_h - c_d - c_l b E(T_a)] \xi - c_l E(T_a) \frac{b^2}{2} \xi^2. \quad (3.19)$$

Primećujemo da za situaciju blisku saturaciji, tj. kada važi da  $e_a \approx E(T_a)$  i kada se zanemare viši članovi Maklorenovog razvoja, uslov (3.17) postaje:

$$T_d = T_a$$

Za potrebe numeričkog rešavanja prelazimo na konačne razlike. Napišimo jednačinu (3.19) u konačnim razlikama koristeći šemu unapred:

$$\xi_{n+1} = A_1(c_g) \xi_n - A_2(c_g) \xi_n^2, \quad (3.20)$$

$$\text{gde je } A_1 = 1 + \Delta t \frac{a - c_h - c_d - c_l b E(T_a)}{c_g} \text{ i } A_2 = \frac{c_l E(T_a) b^2}{2 c_g} \Delta t.$$

Kada pomnožimo jednačinu (3.20) sa  $\frac{A_2}{A_1}$  dobijamo:

$$\frac{A_2}{A_1} \xi_{n+1} = A_2 \xi_n - \frac{A_2^2}{A_1} \xi_n^2 \quad (3.21)$$

$$\text{koja se smenom: } \frac{A_2}{A_1} \xi_{n+1} = \eta_{n+1}$$

$$\text{svodi na: } \eta_{n+1} = A_1(\eta_n - \eta_n^2) \quad (3.22)$$

$$\text{tj. } \eta_{n+1} = A_1 \eta_n (1 - \eta_n) \quad (3.23)$$

što upravo predstavlja logističku diferencnu jednačinu.

### 3.3 Potrebni uslovi za pojavu haosa

Kao što je poznato iz poglavlja 3.1, za detekciju haosa kod logističkog preslikavanja potrebno je da sledeća dva uslova budu zadovoljena:

( I ) da se logistička promenljiva nalazi u intervalu  $(0,1)$  :

$$0 \leq \frac{A_2}{A_1} \xi \leq 1 \quad (\text{tj. } 0 \leq \eta \leq 1) \quad (3.24)$$

i

( II ) da se parametar  $A_1$  nalazi u intervalu u kome se javlja negativan Ljapunovljev eksponent:

$$3.57 < A_1 < 4 \quad \text{tj. } 3.57 < 1 + \Delta t \frac{a - c_h - c_d - c_l b E(T_a)}{c_g} < 4 \quad . \quad (3.25)$$

Uslov ( I ) je ekvivalentan sa:

$$0 \leq \frac{\frac{c_l E(T_a) b^2}{2 c_g} \Delta t}{1 + \Delta t \frac{a - c_h - c_d - c_l b E(T_a)}{c_g}} \xi \leq 1 , \quad (3.26)$$

i on je zadovoljen uvek kada je  $\xi \geq 0$ .

Uslov ( II ) se može napisati u sledećem obliku:

$$2.57 \frac{c_g}{a - c_h - c_d - c_l b E(T_a)} < \Delta t < 3 \frac{c_g}{a - c_h - c_d - c_l b E(T_a)} , \quad (3.27)$$

što znači da stabilno rešenje postoji kada vremenski korak zadovoljava uslov (3.27).

### 3.4 Modeli za rešavanje uprošćene jednačine energetskog bilansa

Čak i u situacijama kada su uslovi ( I ) i ( II ) zadovoljeni, postoje tzv. "prozori" u kojima se mogu javiti negativni Ljapunovljevi eksponenti. Stoga ( I ) i ( II ) čine potrebne, ali ne i dovoljne uslove za detektovanje haosa. Za situacije u kojima su ova dva uslova zadovoljena izračunaćemo vrednost Ljapunovljevog eksponenta preko posebnog FORTRAN programa *lyapunov.f*, tako da će pozitivna vrednost  $\lambda$  značiti sigurnu pojavu haosa. Ovaj program računa vrednost Ljapunovljevog eksponenta preko sledeće relacije:

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln |F'(\xi_i)| \quad (3.28)$$

gde je  $F(\xi) = A_1(c_g)\xi - A_2(c_g)\xi^2$

U programskom jeziku FORTRAN napravljen je program *logisticka.f* za prognostičku jednačinu 3.19 (odnosno 3.20 u konačnim razlikama) i zatim za jednačinu 3.23. Ovaj model u svakom vremenskom koraku uzima za ulazne podatake vrednosti koeficijenata  $c_h$ ,  $c_d$ ,  $c_g$ ,  $c_b$ , zatim  $R_{net}$ ,  $T_g$  i  $T_d$  dobijene iz programa *baresoil.f*, a izračunava  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $T_d$ . Pri tome se dužina vremenskog koraka bira proizvoljno i na osnovu njega se pridružuju odgavarajuće ulazne datoteke iz programa *baresoil.f*.

Od značaja su jedino situacije u kojima su uslovi ( I ) i ( II ) zadovoljeni, stoga se za vrednosti parametara  $A_1$  i  $\eta(0)$  za koje to važi, rešava jednačina 3.23 (logistička jednačina po  $\eta$ ) pri čemu uzimamo da je broj koraka 5000. Ovako dobijene vrednosti  $\eta$  se dalje ispituju računanjem odgovarajućeg Ljapunovljevog eksponenta pomoću programa *lyapunov.f*.

Koristeći ulazne podatake koji se dobijaju kao izlaz iz programa *baresoil.f* nije bilo moguće uvek, za proizvoljni vremenski korak, pronaći situaciju u kojoj su zadovoljeni uslovi ( I ) i ( II ). Zbog toga smo, u nekom odabranom vremenskom trenutku, na veštački način generisali neke od vrednosti forsirajućih parametara (inteziteta neto zračenja npr.) kako bi se dostigla vrednost koeficijenta  $A_1$  u intervalu (3.57,4). Tom prilikom treba imati u vidu da veštački generisane vrednosti odgovaraju vrednostima forsiranja u prirodnim uslovima. U narednom poglavljju biće prikazane dve situacije kod kojih se javlja haos, zajedno sa njihovim odgovarajućim vrednostima  $\xi$ ,  $\eta$  i  $\lambda$ .

### 3.4 Analiza rešenja logističke diferencne jednačine

Analizirane su situacije sa vremenskim koracima 450 i 3150 s. Posmatrani su jutarnji časovi – oko 8 h kada je forsiranje neto zračenjem još uvek malo, ali važi da je  $T_g > T_a$  (to je uslov broj I). Za prvu situaciju prisutna forsiranja (dobijena kao izlaz iz programa *baresoil.f*) ne obezbeđuju vrednost parametra  $A_1$  unutar intervala (3,57,4) (uslov II). Dakle, tu ne može doći do pojave haosa. Iz tog razloga, ovde je veštački promenjena vrednost parametra  $a$  (koji se odnosi na forsiranje neto zračenjem, pogledati jednačinu 3.13) sve dok nije dostignuto stanje za koje važi da  $A_1 \in (3,57,4)$ . Zatim je za ovako dobijene vrednosti  $A_1$  i  $\eta(0)$  (eta inicijalno) izračunat Ljapunovljev eksponent posredstvom modela *lyapunov.f* (dakle, ove dve veličine ( $A_1$  i  $\eta(0)$ ) i broj iteracija (5000) čine ulaz za pomenuti model).

#### 1. Vremenski korak $\Delta t = 3150$ s

Posmatramo šta se dešava u vremenskom trenutku  $t = 7,875$  h, nakon devet napravljenih iteracija. Da bi smo dobili vrednost parametra  $A_1$  u okviru željenog opsega, u poslednjoj (devetoj) iteraciji smanjena je vrednost parametra  $a$  sa 181,24 [J/(Ksm<sup>2</sup>)] (ulazni podatak iz *baresoil.f*) na 125 [J/(Ksm<sup>2</sup>)] (veštački zadata vrednost). Vrednosti forsirajućih veličina dobijenih iz modela *baresoil.f* koje koristimo kao ulazne podatke u poslednjoj iteraciji u modelu *logistica.f* date su u tabeli 3.1. Vrednosti promenljivih dobijenih kao izlaz iz modela *logistica.f* date su u tabeli 3.2.

Primetimo da je vrednost parametra  $b\zeta$  mala (tabela 3.1), što je zahtev koji mora biti ispunjen zbog zanemarivanja članova u Maklorenovom razvoju pri izvođenju logističke diferencne jednačine.

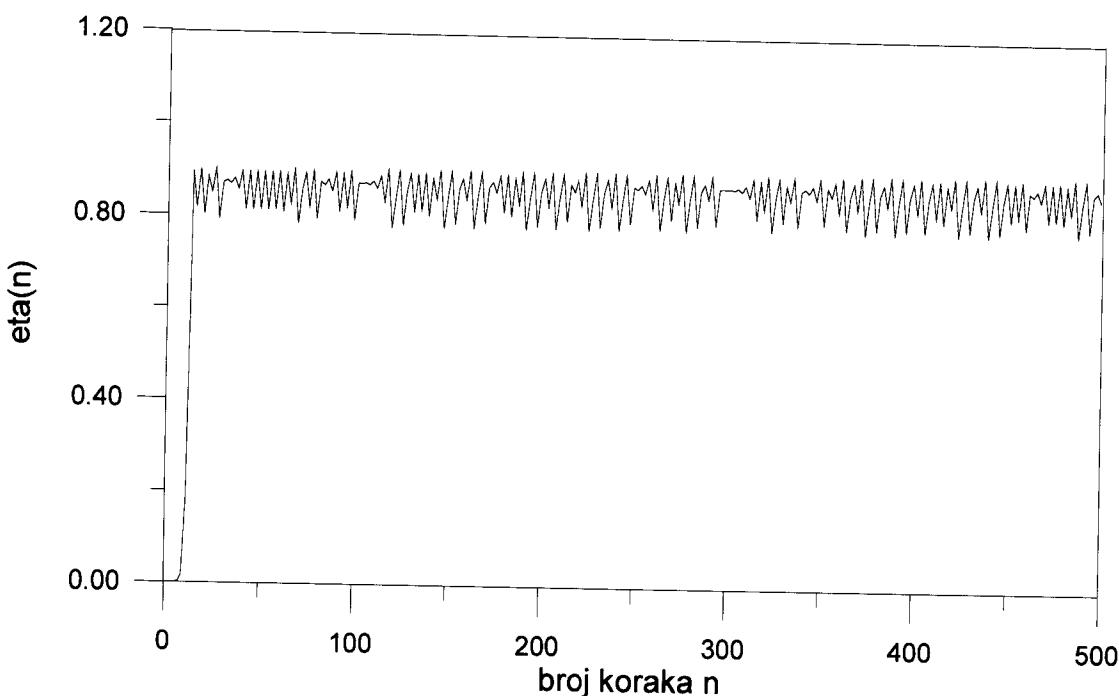
Rešenja logističke jednačine (vrednosti  $\eta$  za prvi 500 iteracija) prikazana su na grafiku 3.3.

naziv	oznaka	brojna vrednost
koeficijent transporta osetne toplotne [J/(Ksm <sup>2</sup> )]	$c_h$	9,824
koeficijent transporta latentne toplotne [J/(mb sm <sup>2</sup> )]	$c_l$	0,0998
koeficijent transporta toplote u dublje slojeve zemljišta [J/(Ksm <sup>2</sup> )]	$c_d$	8,936
zemljišni toplotni kapacitet [J/(°Cm <sup>2</sup> )]	$c_g$	116 736,5
parametar forsiranja neto zračenjem [J/(Ksm <sup>2</sup> )]	$a$	125
temperatura vazduha [°C]	$T_a$	12,375
početna razlika temperatura (prva iteracija) [°C]	$\Delta t$	0,05
parametar $\zeta$ iz prethodne iteracije [°C]	$\zeta_n$	0,214
parametar u Tejlorovom razvoju [°C <sup>-1</sup> ]	$b$	0,06337

Tabela 3.1: ulazni parametri

oznaka	brojna vrednost
$\xi [^{\circ}C]$	0,785
$\eta(0)$	$5,280477 e-7$
$A_I$	3,621543
$\lambda$	0,2112246
$T_d [^{\circ}C]$	15,61

Tabela 3.2: izlazne vrednosti promenljivih



Grafik 3.3: vrednosti promenljive  $\eta$  (eta) iz logističke jednačine tokom 500 iteracija, za  $\eta(0)$  i  $A_I$  iz tabele 3.2.

Kao što vidimo iz tabele 3.2, a i sa grafika 3.3, za ovako odabране forsirajuće uslove sistem se nalazi u haotičnom režimu, tj. imamo pozitivnu vrednost Ljapunovljevog eksponenta. Vrednost parametra  $a$  je veštački smanjena do vrednosti od  $120 \text{ J}/(\text{Ksm}^2)$  da bi smo dobili ovakav režim. To znači da je intezitet zračenja smanjen sa 121,45 na  $83,76 \text{ W/m}^2$ . Ovo ne predstavlja veliko smanjenje u vrednosti inteziteta zračenja i sasvim sigurno ne predstavlja fizički nerealnu vrednost. Naime, ulazni podaci koje dobijamo iz programa *bareoil.f* predstavljaju jedno moguće stanje vremena, ako bi se, na primer, desilo da se u datom vremenskom koraku poveća oblačnost došlo bi do

smanjenja inteziteta kratkotalsnog zračenja. Što znači da bi za takvo stanje meteoroloških parametara (koje je sasvim moguće u prirodi) došlo do pojave haosa u računu.

## 2. Vremenski korak $\Delta t = 450 \text{ s}$

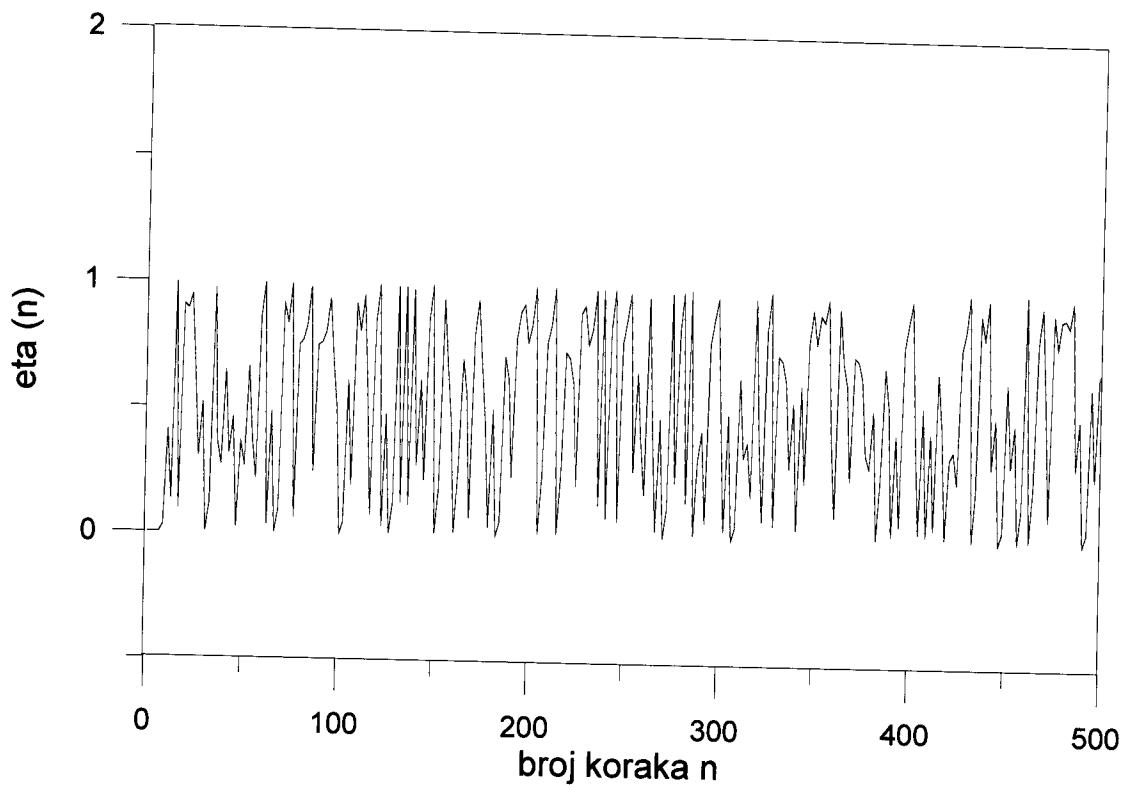
Radi jednostavnosti, izdvojićemo samo dve iteracije, počevši od vremenskog trenutka  $t=8,625 \text{ h}$ . Ovom trenutku odgovara razlika temperatura  $T_g - T_a = 0,08K$  (očitavamo iz ulaznih podataka) što predstavlja početni uslov  $\xi(0)$ . Podsetimo se da se ulazni podaci iz programa *bareoil.f* uzimaju nakon svakog vremenskog koraka. Nakon prve napravljenе iteracije nemamo traženu kritičnu vrednost za parametar  $A_1$  (on iznosi 6,4322), ali se tokom sledeće iteracije ta vrednost smanjuje na 3,99 i ulazi u kritični interval. Vrednosti ulaznih parametara na početku druge iteracije prikazane su u tabeli 3.3. Ponovo vidimo da je vrednost parametra  $b\xi$  mala (tabela 3.3) i opravdava zanemarivanje viših članova Maklorenovog razvoja. Izlazne veličine nakon druge iteracije date su u tabeli 3.4, dok su rešenja logističke jednačine (vrednosti  $\eta$  za prvih 500 iteracija) prikazana na grafiku 3.4

<b>naziv</b>	<b>oznaka</b>	<b>brojna vrednost</b>
koeficijent transporta osetne toplove [J/(Ksm <sup>2</sup> )]	$c_h$	15,262
koeficijent transporta latentne toplove [J/(mb sm <sup>2</sup> )]	$c_l$	0,1303
koeficijent transporta toplove u dublje slojeve zemljишta [J/(Ksm <sup>2</sup> )]	$c_d$	8,9345
zemljinski toplotni kapacitet [J/ (°Cm <sup>2</sup> )]	$c_g$	116 705,7
parametar forsiranja neto zračenjem [J/(Ksm <sup>2</sup> )]	$a$	814,614
temperatura vazduha [°C]	$T_a$	14
početna razlika temperatura (prva iteracija) [°C]	$\Delta t$	0,08
parametar $\xi$ iz prethodnog koraka [°C]	$\xi_n$	0,05
parametar u Tejlorovom razvoju [°C <sup>-1</sup> ]	$b$	0,06337

Tabela 3.3: ulazni parametri

<b>oznaka</b>	<b>brojna vrednost</b>
$\xi [^{\circ}C]$	2,056
$\eta(0)$	1,844115 e-7
$A_1$	3,996823
$\lambda$	0,6654055
$T_d [^{\circ}C]$	25,37

Tabela 3.4: izlazne vrednosti promenljivih



Grafik 3.4: vrednosti promenljive  $\eta$  iz logističke jednačine tokom 500 iteracija, za  $\eta(0)$  i  $A_I$  iz tabele 3.4.

I u ovom slučaju, dobili smo pozitivnu vrednost Ljapunovljevog eksponenta  $\lambda$ , što znači da se ponovo nalazimo u takvom opsegu forsirajućih parametara koji uslovjava haotičan režim. Ovog puta smo do takve situacije došli bez uvođenja veštačkih forsirajućih parametara. Intenzitet zračenja koji odgovara ovoj situaciji iznosi 132,77 W/m<sup>2</sup>. Dakle, ponovo se radi o sasvim realnom skupu parametara.

## 4 Zaključak

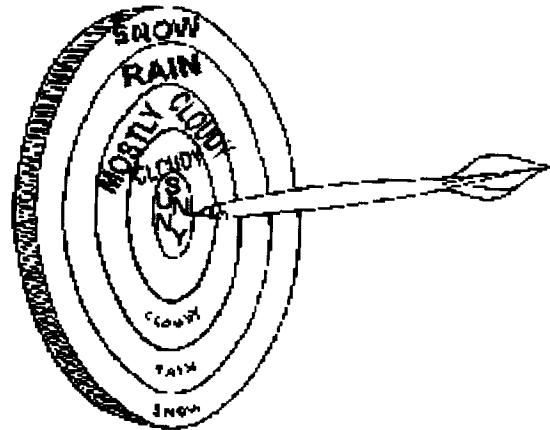
Kolika su, dakle, ograničenja postojećih modela? U kom momentu jedan "lepо funkcionući model" postaje haotičan?

U prvom poglavlju pokazano je da pri primeni šeme unatrag kod LAPS modela, postoji ograničenje u pogledu veličine vremenskog koraka, dok šema unapred daje rešenja za sve vremenske korake u opsegu od 1 do 3600 s.

Zatim je isti problem rešavanja jednačine energetskog bilansa na površini golog zemljишta tretiran sa stanovišta haosa. U tom cilju, jednačina energetskog bilansa iz LAPS-a je transformisana i uz uvođenje određenih fizičkih uslova značajno uprošćena. Konačno, primenom šeme unapred, ova jednačinu svedena je na logističku diferencnu jednačinu, koja nam omogućava da jednostavno detektujemo vrednosti forsirajućih parametara koji dovode do nastanka haosa. Provera nastanka haotičnog režima vršena je izračunavanjem Ljapunovljevih eksponenata.

Sve ovo rađeno je puštanjem više modela. Prvi model (deo LAPS-a) uzimao je ulazne podatke iz merenja i izračunavao vrednosti ulaznih parametara potrebnih za drugi model, koji rešava logističku diferencnu jednačinu. Zatim je treći model računao Ljapunovljev eksponent za odabранe izlazne vrednosti. Izdvojene su dve realne situacije, za koje je dobijena pozitivna vrednost Ljapunovljevog eksponenta. Dakle, uz odgovarajuću "nenemoguću" kombinaciju ulaznih parametara u računu se može pojaviti haos.

Šta ovo zapravo znači? Male razlike u početnim uslovima izazvaće potpuno različite realizacije datog procesa, što znači da nije moguće prognozirati naredne realizacije. Robert Mej tvrdi da bi svet postao bolji, ako bi smo svi uzeli digitron i poigrali se sa logističkom diferencnom jednačinom, jer bi se tad ispravilo jedno izobličeno osećanje o stvarnim osobinama sveta. Ovde smo na primeru veoma prostog modela logističke diferencne jednačine naišli na "bizarre" rezultate. Zamislimo šta bi se desilo kada bi zavirili u sve složene jednačine jednog globalnog modela? U svakom slučaju, kritike na račun meteorologa bi se sigurno smanjile, kada bi ljudi postali svesni komplikovanog ponašanja nelineranih sistema koji opisuju svet oko nas. I možda onda slike poput slike 8 ne bi kružile internetom? A možda i bi...



..... JUST IN CASE

$$\left(\nabla^2 + \frac{f_0^2 a^2}{\sigma^2}\right)\omega - \frac{f_0 a}{\sigma^2} \left[\nabla_3 \cdot \nabla \left( \frac{1}{\sigma} \nabla^2 \omega \right) \right] + \frac{1}{\sigma^2} \nabla^2 \left[ \frac{1}{\sigma} \nabla \cdot \left( \frac{\omega}{\sigma^2} \right) \right]$$

THIS DOESN'T WORK

slika 8

## DODATAK 1: Problem prediktabilnosti i uvod u teoriju determinističkog haosa

U ovom poglavlju dati su osnovni pojmovi i definicije vezani za prediktabilnost, haos i parametre koji ga kvalitativno i kvantitativno određuju. Ono bi trebalo da posluži kao praktičan podsetnik čitaocima kojima su ovi pojmovi već poznati ili da pomogne onima koji se nisu susretali sa navedenom problematikom kroz uvođenje najosnovnije terminologije. Definicije su preuzete iz monografija E. Lorentza [5] i M. Belića [1].

### D1 Istorijski osvrt

Mnogo pre nego što su eksperimenti sa prediktabilnošću postali aktuelni, Tomson (Thompson) (1957) je zaključio da male greške u početnim vrednostima (ulaznim parametrima) imaju tendenciju ka uvećavanju. Prvi eksperimenti su rađeni sa krajnje uprošćenim atmosferskim modelima. Lorenc (Lorentz) 1965. analizira dvodimenzionalni kvazigeostrofski model kojeg čini sistem od 28 običnih diferencijalnih jednačina. Simuliran je period od 64 dana. On primećuje da porast vrednosti malih grešaka fluktuiraju u zavisnosti od sinoptičke situacije; tokom pojedinih četvorodnevnih perioda praktično da i ne dolazi do porasta vrednosti greške, dok je tokom drugih došlo do desetostrukog povećanja. Posmatrano kroz srednje vrednosti, male greške u brzini veta i temperaturi su se povećale dva puta za približno četiri dana.

Šta ovo znači gledano sa aspekta prognoze vremena? Tipična greška osmatranja za temperaturu iznosi  $1^{\circ}\text{C}$  ili manje. Za osam dana njena vrednost bi iznosila  $4^{\circ}\text{C}$ , što je još uvek prihvatljivo i možemo reći da su prognoze nedelju dana unapred moguće. Nakon dvadeset dana greška bi iznosila  $32^{\circ}\text{C}$  što je u potpunosti neprihvatljivo iz čega sledi da prognoze 3 nedelje unapred nisu moguće.

Nakon ovoga, eksperimenti vezani za prediktabilnost su vršeni na mnogim modelima, naročito pošto su globalni modeli ušli u upotrebu. Ovi modeli su imali mnogo veću vertikalnu i horizontalnu rezoluciju, kao i poboljšanu reprezentaciju fizičkih procesa. Ispitivanja su vršena i na potpuno nasumičnom izboru početnih grešaka i na izboru zasnovanom na karakterističnim razmerama ili karakterističnim vrednostima za datu oblast. Njihova analiza dala je tri dana ili manje kao vreme za koje greška poraste dva puta.

Treba napomenuti da su opisani rezultati slika situacije u srednjim i severnim geografskim širinama, ali ne i u tropima. Postoji više razloga za ovakvo stanje. Pre svega, fizički procesi u tropima, naročito oni koji se odnose na količinu vode u atmosferi nisu uvek dobro izmodelirani. Zatim, varijacije vremena u tropima su male u poređenju sa srednjim geografskim širinama, tako da je potrebno definisati specijalnu težinsku funkciju za svaki tip greške da bi se dobili smisleni rezultati.

Osim grešaka u početnim vrednostima, koje mogu biti posledica greške u osmatranjima ili greške koja sledi iz zaokruživanja na određeni broj decimalnih mesta, važno je napomenuti uticaj procesa manjih prostornih razmara koji takođe unose nezanemarljivu grešku. Globalni model sa svojim horizontalnim i vertikalnim razmerama

nije u mogućnosti da "vidi" pojedinačnu grmljavinsku oluju ili kumulusni oblak ili bilo koju sličnu pojavu manjih razmara (par stotina km i manje) koja ima uticaj na procese velikih razmara (hiljadu i više km). Uticaj grešaka procesa malih prostornih razmara na procese velikih prostornih razmara razmatrao je Lorenc, razvijajući sistem jednačina gde su zavisno promenljive varijanse odstupanja brzine za različite intervale unutar spektra horizontalnih vrednosti. On je došao do zaključka da do dvostrukog povećanja greške kod procesa velikih razmara dolazi u vremenskom intervalu reda dana, dok se greške koje odgovaraju manjim razmerama udvostručuju nakon vremenskog intervala reda dana ili sata. Najvažniji zaključak do koga je Lorenc ovom prilikom došao jeste da greške koje korespondiraju bilo kom razmeru ubrzo uslovjavaju greške na nekom drugom razmeru. Tako da čak i ako nismo imali inicijalnih grešaka za procese velikih razmara, inicijalne greške malih razmara bi nakon dana ili malo duže uslovile pojavu greške na skalamu 1000 km i više.

Situacija, ipak, nije savim pesimistična u pogledu dugoročnih prognoza vremena. Pored tradicionalnih metoda dugoročne prognoze poput metoda analogija, stanja polarnog leda, praćenja vremenskih tipova, danas se sve više pažnje posvećuje sistemima sa manjom inercijom. Tako, na primer, okean sa svojom velikom vrednošću topotognog kapaciteta predstavlja sistem u kome se promene dešavaju relativno sporo u odnosu na atmosferu. Pri tome, on ima važan uticaj na atmosferska kretanja. Iz ovoga sledi da ako u nekoj oblasti uočimo temperaturne anomalije okeanske vode, možemo očekivati da će se njihov uticaj na atmosferska kretanja ispoljiti u roku od jedne do dve nedelje što nam daje mogućnost za razvoj dugoročne prognoze. Verovatno najpoznatiji primer uticaja temperaturnih anomalija okeana na karakter vremena je južno-atlantska oscilacija ili El Nino. Osim okeansko-atmosferskih modela, razvoj dugoročnih i srednjoročnih prognoza pomaže usavršavanje prognostičkih modela u smislu sve bolje parametrizacije fizičkih procesa. Ovo znači da je moguće ukloniti greške koje potiču od procesa manjih razmara parametrišući njihov statistički uticaj na procese velikih razmara.

Sve do sada navedeno se zasniva na prepostavci da se radi o predvidljivim procesima, i da su jedina ograničenja vezana za nesavršenost naših prognostičkih modela. Da li je ovakva prepostavka tačna? Ili postoje određeni opsezi vrednosti promenljivih za koje ovo važi nakon čega nije moguće napraviti prognozu? Koji su to parametri koji određuju ove granice? Odgovor nije nimalo jednostavan, i pre uvođenja osnovnih pokazatelja definisani su razni pojmovi koji će biti u upotrebi.

## D2 Osnovne definicije

Pod *prediktabilnošću* datog sistema podrazumevamo stepen tačnosti sa kojom je moguće predvideti stanje u kojem će se sistem nalaziti u bližoj, ali i daljoj budućnosti. Ovu definiciju dao je Lorenc.

*Proste vremenske serije* predstavljaju funkcije čija je nezavisna promenljiva vreme, vremenske serije koje su od interesa u meteorologiji su promene različitih

meteoroloških veličina sa vremenom. To mogu biti funkcije sa neprekidnim domenom (npr. temperatura u Novom Sadu u odabranom višegodišnjem periodu merenja) ili sa domenom koji se sastoji od diskretnih vrednosti u vremenu (npr. maksimalna dnevna temperatura u Novom Sadu za dati vremenski period).

*Višestruke vremenske serije* predstavljaju niz prostih vremenskih serija koje su obično fizički povezane, kao na primer, temperature u susednim gradovima. Takođe, višestruke vremenske serije mogu predstavljati partikularno rešenje nekog sistema diferencijalnih jednačina.

Na osnovu ovoga, Lorenc definiše dogadaj ili proces (prost ili višestruk) kao ansambl vremenskih serija. Pojedinačni (odgovarajući) članovi ansambla čine neke od mogućih realizacija datog procesa. Imajući prethodnu definiciju u vidu, on globalno vreme posmatra kao jednu od realizacija višestrukog procesa, dok se pitanje *prediktabilnosti* sistema svodi na prediktabilnost vremenskih serija promenljivih definisanih u datom sistemu.

## Determinizam

U upotrebi su dve definicije *determinističkih procesa*:

I : Za proces kažemo da je deterministički ako sadašnje stanje realizacije u potpunosti određuje stanje u bilo kom trenutku u budućnosti, što znači da dve realizacije koje su identične u nekom trenutku moraju biti identične i u svim budućim trenucima. Proces je *slučajan (nasumičan)* ili *stohastički*, ako trenutno stanje realizacije determiniše samo verovatnoću raspodele stanja u nekom budućem trenutku; što znači da dve pomenute identične realizacije iz sadašnjeg trenutka ne moraju biti identične i u budućnosti.

Ako sva moguća trenutna stanja determinišu iste buduće verovatnoće raspodele u svim narednim trenucima, proces je u *potpunosti nasumičan*, i u ovom slučaju stanje realizacija u sadašnjem trenutku nam ne govori ništa o budućnosti sistema.

U opštem slučaju, vreme kao trenutno stanje meteoroloških pojava i promenljivih u atmosferi, predstavlja realizaciju *potpuno nasumičnog* sistema. Ipak, većina matematičkih modela atmosfere su definisani nad determinističkim procesima.

II: Ako trenutno i prošlo stanje realizacije određuju budućnost sistema, iako samo sadašnje stanje ne može u potpunosti da odredi buduće stanje, kažemo da je proces deterministički. Ako ovo ne važi, proces je *slučajan*.

Primetimo da proces koji je po drugoj definiciji deterministički može biti *slučajan* u slučaju ‘strožije’ definicije - npr. proces definisan diferencijalnom jednačinom drugog reda.

## Stabilnost i nestabilnost

Razlika između dve realizacije istog procesa u datom vremenu, predstavlja apsolutnu vrednost njihovih brojnih vrednosti. U slučaju višestrukog procesa, razlika dve realizacije se određuje izračunavanjem korena iz srednje kvadratne greške, uzimajući u obzir i težinske faktore za svaku vremensku seriju.

Kažemo da je realizacija determinističkog procesa *stabilna* ako razlika realizacija ostaje mala u budućnosti, pod uslovom da je mala u sadašnjosti. U suprotnom, realizacija je nestabilna, tj. možemo naći realizacije čija je razlika mala u sadašnjem trenutku, ali ona raste u toku vremena, i u nekom budućem trenutku može dostići velike vrednosti.

Sledi da važan faktor za prediktabilnosti pored determinizma/nasumičnosti čini stabilnost/nestabilnost. Ako je realizacija nestabilna, druge realizacije koje imaju bliske vrednosti u sadašnjosti mogu biti greškom zamjenjene sa ovom, što će dovesti do velike greške u prognozi budućeg stanja. Naprotiv, ako je realizacija stabilna, ovakva zamena neće dovesti do tako katastrofalnog rezultata. Stoga je važno odrediti stepen sa kojim se male početne greške umnožavaju u toku vremena. Ovo se često postiže proverom prisustva nestabilnosti u istoriji realizacija.

Ako je realizacija stabilna, istorija će se u manjoj ili većoj meri ponavljati i sistem će se menjati periodično. Iz ovoga sledi da, ako sistem varira neperiodično, iako mogu postojati povremena "skoro" ponavljanja, realizacija mora biti nestabilna. Osmatranja atmosfere nam ukazuju da ona ne predstavlja periodično varirajući sistem. Tačnije, postoje određene komponente periodičnog karaktera, ali u celini to ne važi. Ovaj nedostatak periodičnosti je uzrok nepredvidljivosti atmosferskih pojava u daljoj budućnosti.

## D3 Osnovni pojmovi teorije determinističkog haosa

Neka se razmatraju ustaljena kretanja diferencijalnih dinamičkih sistema zadata pomoću običnih diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dx}{dt} = F_\mu(x(t)), \quad (1)$$

odnosno:

$$x_{n+1} = f_\mu(x_n), \quad (2)$$

gde je  $x$  vektor iz faznog prostora  $\mathbb{R}^m$ ,  $m \geq 1$ , a  $\mu$  parametar pod našom kontrolom.

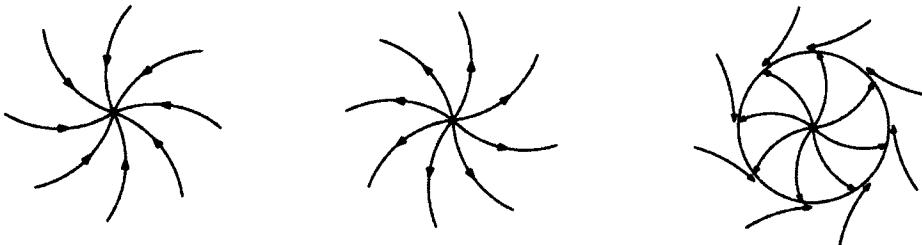
Pod ustaljenim kretanjem se misli na asimptotsko ponašanje kada  $t \rightarrow \infty$ . Ograničimo se na dinamičke sisteme kod kojih su  $F_\mu(x)$  i  $f_\mu(x)$  nelinearne funkcije

od  $x$  iz razloga što se neuređeno ili haotično kretanje može pojaviti samo kod nelinearnih dinamičkih sistema. Rešenje jednačine (1) zajedno sa početnim uslovom  $x_0$ ,  $x(t) = \Phi_t(x_0)$ , generiše trajektoriju ili orbitu diferencijalne jednačine. Skup trajektorija iz nekog domena u  $R^n$  definiše struju  $\Phi_t$ . Vremensko ponašanje datog dinamičkog sistema u faznom prostoru dato je Luivilovom teoremom:

*Neka skup svih početnih uslova definiše neku faznu zapreminu. Jednačine vremenske evolucije zadaju kretanje te zapremine u faznom prostoru. Ukoliko se tokom kretanja fazna zapremina kontrahuje, reč je o disipativnom sistemu; ukoliko ona ostaje konstantna, imamo konzervativni sistem.*

Nakon beskonačno dugog vremenskog intervala kod disipativnih sistema fazna zapremina će težiti nuli. Doći će do zgušnjanja trajektorija i njihovog privlačenja ka nekom geometrijskom objektu. Ovi objekti predstavljaju atraktore. Oni mogu imati sasvim jednostavnu geometrijsku strukturu poput *ravnotežne* ili *fiksne tačke*, ili veoma složenu kao što je slučaj sa čudnim atraktorima. Stabilni atraktori disipativnih sistema ne moraju da budu samo ravnotežne tačke. Naime, iako se ukupna fazna zapremina smanjuje, to ne mora dešavati jednako u svim pravcima.

Ravnotežna tačka može biti stabilna ili nestabilna. Kažemo da je fiksna tačka stabilna ukoliko privlači sve trajektorije u nekoj oblasti faznog prostora i ona tada predstavlja ponor strujnica. U suprotnom, fiksna tačka je nestabilna i može biti izvor u faznom prostoru ili sedlasta tačka. Kada ponor lokalno postane izvor, onda se oko njega formira granični krug. Ovo je prikazano na slici 1.



slika 1: stabilna ravnotežna tačka, nestabilna ravnotežna tačka i granični krug

Najjednostavnija definicija atraktora sledi iz prethodnog razmatranja: atraktor je skup tačaka na kojima se akumuliraju trajektorije  $\Phi_t(x)$  kada vreme teži ka beskonačnosti, za svako  $x$  iz domena atrakcije.

Haotično kretanje nije periodično ni ravnotežno i njemu odgovaraju posebni atraktori čudnih osobina. Njihova osnovna karakteristika je osetljivost na početne uslove, što je posledica anizotropne kontrakcije faznog prostora. Na primer, ako bar u jednom pravcu dolazi do istezanja umesto kontrakcije, bliske tačke će se tokom vremena naći proizvoljno daleko jedne od drugih, što dovodi do neodredljivosti njihovog položaja, porasta entropije u sistemu, pozitivnih Ljapunovljevih koeficijenata i haosa.

### D3.1 Kvalitativni pokazatelji determinističkog haosa

#### Spektar snage dinamičkog sistema

Za kvalitativno razlikovanje periodičnog kretanja sa više frekvencija od haotičnog kretanja pogodno je uvesti spektar snage dinamičkog sistema. On predstavlja kvadrat modula Furijeovog transforma duž trajektorije:

$$P(\omega) = |\bar{x}(\omega)|^2, \quad (3)$$

gde je  $\bar{x}(\omega) = \int_0^\infty \exp(i\omega t) x(t) dt$ . (4)

U spektru periodičnog kretanja vide se samo oštре linije koje odgovaraju određenim frekvencijama, dok u spektru haosa preovladava širok ravan kontinuum.

#### Autokorelaciona funkcija

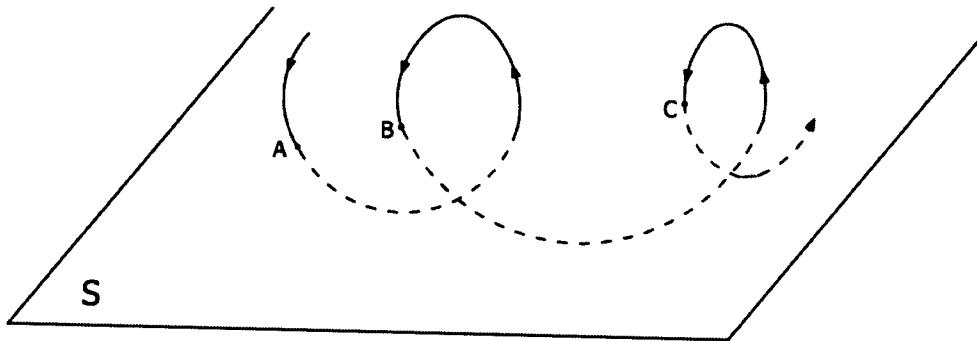
Autokorelaciona funkcija se takođe može koristiti za ispitivanje haosa. Ona je definisana kao:

$$C(\tau) = \int_0^\infty \tilde{x}(t) \tilde{x}(t+\tau) dt, \quad (5)$$

gde je  $\tilde{x}(t) = x(t) - \bar{x}(0)$  odstupanje od srednje vrednosti. Ova funkcija određuje korelaciju (sličnost) signala sa samim sobom u različitim vremenskim intervalima. Stoga je ona visoka (konstantna ili oscilirajuća) za regularna kretanja, dok za haotična kretanja ona eksponencijalno opada ka nuli. Ovo opadanje autokorelace funkcije na nulu je jedan od kvalitativnih pokazatelja determinističkog haosa.

Na kraju, spomenimo i Poenkarov presek. Posmatramo neku trajektoriju u  $m$ -dimenzionalnom faznom prostoru i presecimo je nekom  $(m-1)$  – dimenzionalnom površi. Skup tačaka u preseku, pri čemu se u obzir uzimaju samo ulazne tačke trajektorije sa jedne strane površi, zove se Poenkarov presek (slika 2). Preslikavanje koje daje redom tačke preseka duž trajektorije naziva se Poenkarovo preslikavanje. Pogodnost ovog preseka je u tome što se iz njegovog izgleda može odrediti karakter kretanja koje ga generiše. Granični ciklus generiše samo jednu tačku u Poenkarovom preseku, kvaziperiodično kretanje sa dve nesamerljive frekvencije ostavlja otisak kruga. Kod

haotičnog kretanja se ne mogu nikakve figure razaznati u preseku, već haotične tačke uglavnom ravnomerno ispunjavaju ravan preseka.



slika 2: Poenkarov presek i preslikavanje  $P_{n+1} = f_p(P_n)$

Haos predstavlja aperiodično kretanje koje generiše čudne atraktore u faznom prostoru. Spektar snage prilikom prelaska u haos karakteriše pojava širokog kontinuma, a autokorelaciona funkcija brzo opada na nulu. U Poenkarovom preseku tačke ravnomerno ispunjavaju neku oblast ravnih preseka. Ovo su kvalitativni pokazatelji determinističkog haosa, dok se za njegove kvantitativno opisivanje uvode novi pojmovi.

### 3.2 Kvantitativni pokazatelji determinističkog haosa

Za tzv. kvantifikaciju haosa najčešće se koriste pokazatelji poput Ljapunovljevih eksponenta, Kolmogorovljeve entalpije, frakタルnih dimenzija itd. U ovom radu analiza će se vršiti preko Ljapunovljevih eksponenta, pa će stoga o njima biti više reči.

#### Ljapunovljevi eksponenti

Posmatraćemo jednodimenzionalno preslikavanje dato sa:

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Ljapunovljev eksponent meri razdvajanje dveju bliskih početnih tačaka tokom iteracija. Neka se početno rastojanje menja po zakonu  $\varepsilon \exp(N\lambda)$ , gde je  $N$  broj primenjenih iteracija, a  $\lambda$  Ljapunovljev eksponent tada je on dat sledećom definicijom:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln \left| \frac{df^N(x_0)}{dx} \right| \quad (6)$$

ovaj izraz se može transformisati u pogodniju formu:

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln |f'(x_i)| \quad (7)$$

Ukoliko je  $\lambda$  veći od nule, razdvajanje je eksponencijalno, postoji velika osetljivost na početne uslove i u ponašanju sistema će se pojaviti haos.

Postoji čitav spektar Ljapunovljevih eksponenata – njihov broj odgovara broju dimenzija faznog prostora. Ipak, brzinu povećanja nekog infinitezimalnog razmaka između trajektorija kontroliše najveći od eksponenata. Povećanje/ smanjenje elementa zapremine faznog prostora dato je sumom svih Ljapunovljevih eksponenta. Ako je sistem konzervativan (nema disipacije) zapremina elementa faznog prostora će ostati ista tokom trajektorije i suma svih Ljapunovljevih eksponenata mora biti nula. Ako je sistem disipativan, suma eksponenata je manja od nule. Ukoliko je makar jedan od eksponenata pozitivan, sistem je haotičan. Zgodno je primetiti da je Ljapunovljev spektar isti u svim tačkama domena atrakcije, a do njegove promene može doći promenom kontrolnog parametra.

Ljapunovljevi eksponenti su praktični za klasifikaciju stacionarnih ponašanja i atraktora. Naime, za bilo koji atraktor kontrakcija mora biti veća od ekspanzije, što znači da suma eksponenata mora biti manja od nule. Za granični krug je  $\lambda_1 = 0$ , dok su ostali eksponenti manji od nule, za torus je  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ , a ostali su manji od nule. U slučajevima čudnih atraktora, najmanje jedan eksponent mora biti veći od nule.

DODATAK 2: Strukture FORTRAN programa korišćenih pri izradi rada

**program logisticka**

implicit none

```
real E,Ta,ksi,delt,cg,a,cd,b,Td,Tg,ea,vreme,time
real met,ch,cl,Tgg,A1,A2,B1,B2,eta
integer nmax,n,x,i,imax
parameter (b=0.06337,delt=3150.,nmax=28,imax=5000)
dimension E(nmax),Ta(nmax),ksi(nmax),cg(nmax),vreme(nmax),a(nmax)
dimension time(nmax),Tg(nmax),A1(nmax),A2(nmax),B1(nmax)
dimension B2(nmax),eta(imax)
dimension cd(nmax),Td(nmax),ea(nmax),rnet(nmax),ch(nmax),cl(nmax)

c      open(8,file='ksi450.dat')
c      open(9,file='Td450.dat')
c      open(10,file='T450 n.dat')
c      open(11,file='A450n.dat')
c      open(12,file='B450n.dat')
c      open(13,file='C450n.dat')
c      open(14,file='eta450.dat')

open(8,file='ksi3150.dat')
open(9,file='Td3150.dat')
open(10,file='T3150n.dat')
open(11,file='A3150n.dat')
open(12,file='B3150n.dat')
open(13,file='C3150n.dat')
open(14,file='eta3150.dat')

do n=0,27
    read(10,'(f13.6,3f30.10)') time(n),Tg(n),Ta(n),ea(n)
    read(12,'(3f30.10)') ch(n),cl(n),cd(n)
    read(11,'(f30.6)') rnet(n)
    read(13,'(f30.6)') cg(n)
end do
close (10)
close (11)
close (12)
close (13)
```

```

ksi(0)=0.05

do n=0,10

a(n)=abs(rnet(n)/(Tg(n)-Ta(n)))
a(9)=125.

E(n)= 610.7*10.**(7.5*Ta(n)/(237.3+Ta(n)))

!
ksi(n)=Tg(n)-Ta(n)
A1(n)=1+delt*(a(n)-ch(n)-cd(n)-cl(n)*b*E(n))/cg(n)
A2(n)=0.5*cl(n)*E(n)*(b**3.)/cg(n)
B1(n)= 3.57*cg(n)/(a(n)-ch(n)-cd(n)-cl(n)*b*E(n))
B2(n)= 3*cg(n)/(a(n)-ch(n)-cd(n)-cl(n)*b*E(n))

ksi(n+1)=ksi(n)+ delt*(a(n)-ch(n)-cd(n)-cl(n)*b*E(n))*ksi(n)/cg(n)
& - delt*0.5*cl(n)*E(n)*(b**3.)*(ksi(n)**3.)/cg(n)

      write(8,'(2f20.10)')    n*315./360.,ksi(n)
c      print *,n, n*315./360.,A1(n),ksi(n+1),ch(n),cl(n),cd(n)
c      &,cg(n),abs(rnet(n)/(Tg(n)-Ta(n))),Tg(n)-Ta(n),Ta(n),rnet(n)

end do

do n=1,10
  Td(n)=Ta(n)+ (cl(n)*E(n)+cg(n)*(Ta(n)-Ta(n-1))
  &/delt-cl(n)*ea(n)+0.1667*cl(n)*E(n)*(b*ksi(n))**3.)/cd(n)
  write(9,'(2f20.10)')    n*315./360.,Td(n)

  print *, 'Td=' , Td(n)

end do

print *, 9.*315./360.,A1(9),ksi(9),ksi(10),ch(9),cl(9),cd(9),cg(9)
&,abs(rnet(9)/(Tg(9)-Ta(9))),Td(9),Tg(9)-Ta(9),Ta(9),a(9),
&a(9)*(Tg(9)-Ta(9)),rnet(9)

do i=1,5000
  eta(1)=A2(9)*ksi(10)/A1(9)
  print *,eta(1)
  stop
  eta(i+1)=A1(9)*eta(i)*(1-eta(i))
  print *, i, eta(i)
  write(14,*) i, eta(i)
end do
end

```

```

program rmse

real suma,raz
integer i,dtime
character oz*5, dtime1*4 , imef1*12      , imef2*12 , oz1*5
dtime=2940.      !menjam ! Intervencija (prstima bez automatike)!!!!
dtime1='2940'
oz='b.dat'      !menjam ! Intervencija (prstima bez automatike)!!!!
oz1='f.dat'

imef1 = 'T'//dtime1//oz
imef2 = 'T'//dtime1//oz1

open (27,file=imef1,status='unknown') !menjam
open (28,file=imef2,status='unknown') !menjam
open (29,file='RMSEp300.dat',status='unknown',position='append')
! open (29,file='RMSEsb.dat',status='unknown',position='append')
! open (29,file='RMSEse.dat',status='unknown',position='append')

i=0.
suma=0.
do
read (27,*,end=2) v,t
read (28,*,end=2) v1,t1
suma=suma+(t-t1)**2
i=i+1
enddo
2   raz=sqrt(suma/i)
      write (29,'(i10.0,f15.10)') dtime,raz

end

```

## Literatura

- [1] Milivoj R. Belić, "Deterministički haos"; Sveske fizičkih nauka, SFIN, god. III, broj 3, (1990).
- [2] C. M. Bhumralkar, "Numerical experiments on the computation of ground surface temperature in an atmospheric general circulation model"; Journal of Applied Meteorology 14, 1246-1258, (1975).
- [3] James Gleick, "Haos"; Narodna knjiga, Beograd, ( 2001).
- [4] A.A. Holtstag, A.P. van Ulden, "A simple scheme for daytime estimates of the surface fluxes from routine weather data"; Journal of Applied Meteorology 22, 517-529, (1983).
- [5] E. Lorentz, "Problems and prospects in long and medium range weather forecasting"; Springer-Verlag, New York, (1984).
- [6] D. Mihailović, E. Nikolić-Đorić, D. Kapor, "Chaotic behavior of the energy balance equation solution on soil-atmosphere interface depending on changes in soil heat capacity"; (submitted)
- [7] D. Mihailović, "Description of a land-air parametrization scheme (LAPS)"; Global and Planetary Change 13, (1996).
- [8] <http://mathworld.wolfram.com/>
- [9] [www.wikipedia.org](http://www.wikipedia.org)

## Kratka biografija



Ivana Cvijanović rođena je 04.11.1982. u Beogradu. Završila je Osnovnu školu "Prva vojvođanska brigada" i prirodno-matematički smer Gimnazije "Isidora Sekulić" u Novom Sadu. Školske 2001/2002 upisala je Prirodno-matematički fakultet, profil Fizika, meteorologija i modeliranje životne sredine.

Konferencije, seminari i diplome u periodu od 2002 do 2005:

- Kongres fizičara Srbije, Petrovac, 2004., prezentacija rada: "Uticaj Koriolisove sile na kretanja u atmosferi i okeanu" u okviru poster sekcije; rad predstavlja zajednički projekat sa kolegama sa smera meteorologija.
- Primatijada 2004. Bečići, II mesto u grupi za fiziku (zajedno sa J. Matić).
- Diploma ambasade Kraljevine Norveške "500 hiljada za 500 najboljih".
- Nagrade Univerziteta u Novom Sadu za postignut uspeh u školskim 2001/2002 i 2002/2003 godinama.
- First International Course of Computational Engineering – organized by DAAD in the framework of the Stability Pact for South-Eastern Europe, Pamporovo, Bulgaria, 2004.
- U saradnji sa Elektro-tehničkim fakultetom u Novom Sadu i organizacijom EESTEC učestvovala je u studentskoj razmeni u Finskoj, Oulu, februar 2005. po pozivu EESTEC LC OULU i University of Oulu.
- Primatijada 2005. Budva, III mesto u grupi za fiziku sa radom na temu: "Određivanje vrednosti flukseva količine kretanja i topote primenom Monin – Obuhov teorije"
- International conference of physics students (ICPS) 2005. Coimbra, Portugal; presentacija rada u okviru poster sekcije ("Numerical solution of the fluxes problem in the Monin-Obuhov theory").

Do pre par godina se bavila ronilaštvom, ponosni je vlasnik sertifikata CMAS-a (Confédération Mondiale des Activités Subaquatiques) u kategoriji I ronilačke zvezde.

Aktivan učesnik "Fruškogorskog maratona" od 1998.

Od interesantnih stvari "zanimala se" fotografijom, veštinom tai chi-a i učenjem španskog jezika, neskriveni je obožavalac rada Daglasa Adamsa.

UNIVERZITET U NOVOM SADU  
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

<i>Redni broj:</i>	
<b>RBR</b>	
<i>Identifikacioni broj:</i>	
<b>IBR</b>	
<i>Tip dokumentacije:</i>	Monografska dokumentacija
<b>TD</b>	
<i>Tip zapisa:</i>	Tekstualni štampani materijal
<b>TZ</b>	
<i>Vrsta rada:</i>	Diplomski rad
<b>VR</b>	
<i>Autor:</i>	Ivana Cvijanović
<b>AU</b>	
<i>Mentor:</i>	dr Darko Kapor, profesor
<b>MN</b>	
<i>Naslov rada:</i>	Pojava haosa u jednačini energetskog bilansa na dodirnoj površini Zemlje i atmosfere
<b>NR</b>	
<i>Jezik publikacije:</i>	srpski (latinica)
<b>JP</b>	
<i>Jezik izvoda:</i>	srpski/engleski
<b>JI</b>	
<i>Zemlja publikovanja:</i>	Srbija i Crna Gora
<b>ZP</b>	
<i>Uže geografsko područje:</i>	Vojvodina
<b>UGP</b>	
<i>Godina:</i>	2006
<b>GO</b>	
<i>Izdavač:</i>	Autorski reprint
<b>IZ</b>	
<i>Mesto i adresa:</i>	Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
<b>MA</b>	
<i>Fizički opis rada:</i>	4 / 49/ 12/ 5/ 8/ 18/ 2
<b>FO</b>	
<i>Naučna oblast:</i>	fizika
<b>NO</b>	
<i>Naučna disciplina:</i>	meteorologija
<b>ND</b>	
<i>Predmetna odrednica/ ključne reči:</i>	Jednačina energetskog bilansa, šeme unapred i unatrag, logistička diferencna jednačina, haos, Ljapunovljevi eksponenti.
<b>PO</b>	
<b>UDK</b>	
<i>Čuva se:</i>	Biblioteka Departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu
<b>ČU</b>	
<i>Važna napomena:</i>	nema
<b>VN</b>	
<i>Izvod:</i>	Jednačina energetskog bilansa na dodirnoj površini Zemlje i atmosfere, rešavana je primenom LAPS modela uz upotrebu različitih vremenskih šema (unapred i unatrag). Pokazano je da šema unapred pokazuje bolje osobine pri primeni u ovom modelu. Uz određene fizičke uslove i primenu šeme unapred, jednačina energetskog bilansa je transformisana u oblik logističke diferencne jednačine.
<b>IZ</b>	

Analizirane su vrednosti spoljašnjih parametara za koje može doći do pojave haosa u njenom rešenju. Kao kvalitativni pokazatelji haosa korišćeni su Ljapunovljevi eksponenti.

*Datum prihvatanja teme od NN veća:  
DP*

06.03.2006.

*Datum odbrane:  
DO*

17.03.2006.

*Članovi komisije:  
KO*

*Predsednik:*

dr Mario Škrinjar, redovni profesor PMF

*član*

dr Darko Kapor, redovni profesor PMF

*član:*

dr Dragutin Mihailović, redovni profesor Poljoprivrednog fakulteta

*član:*

dr Mirko Budinčević, redovni profesor PMF

UNIVERSITY OF NOVI SAD  
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

*Accession number:*

**ANO**

*Identification number:*

**INO**

*Document type:*

**DT**

Monography publication

**TR**

*Type of record:*

Textual printed material

**TR**

*Content code:*

**CC**

Final paper

*Author:*

**AU**

Ivana Cvijanović

*Mentor/comentor:*

**MN**

Darko Kapor, Ph.D

**TI**

*Title:*

Chaos arising in an energy balance equation on the atmosphere-soil interface

**LT**

*Language of text:*

Serbian (Latin)

**LA**

*Country of publication:*

Serbia and Montenegro

**CP**

*Locality of publication:*

Vojvodina

**LP**

*Publication year:*

2006

**PY**

*Publisher:*

Author's reprint

**PU**

*Publication place:*

Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

**PP**

*Physical description:*

4 / 49/ 12/ 5/ 8/ 18/ 2

**PD**

*Scientific field:*

Physics

**SF**

*Scientific discipline:*

Meteorology

**SD**

*Subject/ Key words:*

Energy balance equation, upward and backward schemes, logistic map, chaos, Lyapunov exponent

**SKW**

**UC**

*Holding data:*

Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4

**HD**

*Note:*

none

**N**

*Abstract:*

**AB**

The energy balance equation on the atmosphere-soil interface has been solved by means of the LAPS model using different time schemes (backward and forward). Better results were obtained when applying the forward scheme. Using certain physical conditions and the forward scheme, the energy balance equation has been transformed into a logistic map. Values of the forcing parameters, which lead to chaotic solution of this equation, have been analyzed. The Lyapunov exponent has been used as a

chaos indicator.

*Accepted by the Scientific Board:* 06.03.2006.  
**ASB**

*Defended on:* 17.03.2006.  
**DE**

*Thesis defend board:*  
**DB**  
*President:* dr Mario Škrinjar, Professor  
*Member:* dr Darko Kapor, Professor  
*Member:* dr Dragutin Mihailović, Professor  
*Member:* dr Mirko Budinčević, Professor

