UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO - MATEMATIČKI FAKULTET
INSTITUT ZA FIZIKU

ŽIROVIĆ S. IVAN

MIKROTEORIJA MAGNETNOAKUSTIČNE REZONANCE U ANIZOTROPNOM FEROMAGNETIKU

(DIPLOMSKI RAD)

NOVI SAD, 1981.

Zahvaljujem se dr Mariju Škrinjaru na sugestiji u izboru teme i pomoći koju mi je pružio prilikom izrade ovog rada.

U Novom Sadu, aprila 1981.g.

Žirović S. Ivan

S A D R Ž A J

U V O D

Teorijska istraživanja magnetnoakustične rezonance i magnetnoakustičnih talasa u feromagneticima su, uglavnom, polufenomenološke prirode (vidi |3|). Mi ćemo pokušati da damo mikroteoriju ove pojave polazeći od hamiltonijana magnon-fonon interakcije. S obzirom da standardni oblik hamiltonijana ne dovodi do hibridizacije magnonskih i fononskih ekscitacija (koje bi predstavljale kvante magnetoakustičnih talasa), Vejlovom transformacijom ćemo preći na ekvivalentni hamiltonijan magnon-fonon interakcije koji predstavlja kvadratnu formu po magnonskim i fononskim operatorima, te dovodi do hibridizacije. Pored toga, izračunaćemo magnetnoakustični tenzor koji povezuje vektor magnetnog momenta i vektor pomeranja atoma u feromagnetiku.

1. OSNOVNI POJMOVI O MAGNETIZMU

Magnetna svojstva supstanci karakterišemo vektorom magnetizacije $\vec{M}$. Eksperimentalno je utvrdjeno da je vektor magnetizacije funkcija spoljašnjeg magnetnog polja $\vec{H}$ i za neke materijale, u odredjenom temperaturskom intervalu i za odredjene vrednosti polja, pri kvazistatičkom procesu namagnetisanja, ta zavisnost je linearna:

$$\vec{M} = \chi \cdot \vec{H}$$

Koeficijent proporcionalnosti je magnetna susceptibilnost posmatranog uzorka, i u opštem slučaju, pod njom podrazumevamo promenu magnetizacije po jedinici spoljašnjeg polja

$$\chi(H) = \frac{\partial M}{\partial H}$$

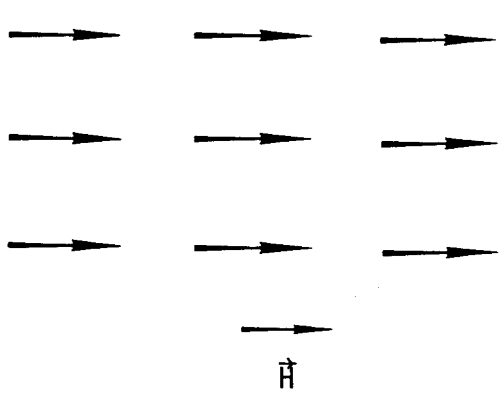
1.1. PODELA MAGNETNIH MATERIJALA

Najopštija podela supstanci sa stanovišta magnetnih osobina izvršena je na osnovu vrednosti magnetne susceptibilnosti χ, odnosno na osnovu ponašanja supstance u spoljašnjem magnetnom polju.

Supstance čija je magnetna susceptibilnost mala, reda veličine 10^{-3}- 10^{-6} nazivamo slabim magnetnim materijalima, i njih čine: paramagnetici ($\chi > 0$) i dijamagnetici ($\chi < 0$).

Jaki magnetni materijali imaju veliku magnetnu susceptibilnost i uredjenu magnetnu strukturu, koja se ogleda u posedovanju velikog makroskopskog magnetnog momenta reda veličine $N \cdot \mu_B$, gde je N - broj atoma uzorka, a μ_B - Borov magneton. Ovi materijali su u čvrstom agregatnom stanju, imaju kristalnu strukturu i svrstavamo ih u tri grupe: feromagnetike, antiferomagnetike i ferimagnetike.

Tipični feromagnetici su gvoždje, kobalt i nikl, zatim neki metali iz grupe lantanida i legure i jedinjenja ovih metala sa neferomagnetnim elementima. Feromagnetizam se u njima opaža od temperature 0 K do neke kritične temperature - Kirijeve tačke, iznad koje se ponašaju kao paramagnetici. Kada se feromagnetni materijal nadje u spoljašnjem magnetnom polju na temperaturama nižim od Kirijeve, svi spinovi a samim tim i magnetni momenti atoma u proseku se orijentišu duž polja, pa je rezultujući magnetni moment uzorka znatan.

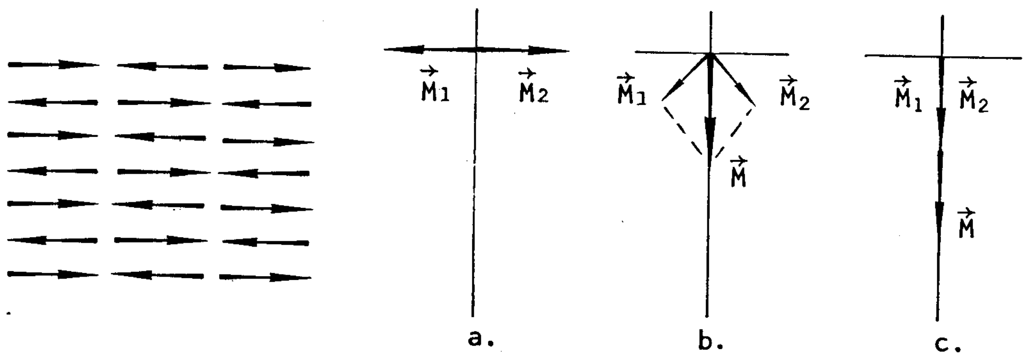


Spontana magnetizacija (u odsustvu spoljašnjeg polja) u blizini tačke faznog prelaza data je izrazom:

$$M(T) \simeq \text{const.}\left(1 - \frac{T}{T_C}\right)^{\beta}$$

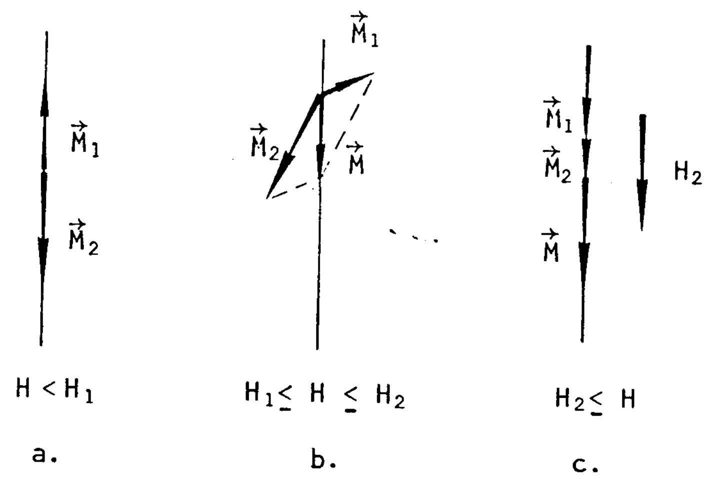
gde je T_C - Kirijeva temperatura, a β - takozvani kritični eksponent, reda veličine $\beta \sim 0.33 - 0.42$.

U antiferomagnetike spadaju kiseline i soli prelaznih metala: FeO, CoO, $NiSO_4$, CoF, $RbMnF_3$, itd. Antiferomagnetike možemo predstaviti kao skup dve feromagnetne podrešetke postavljene tako da im je ukupni magnetni moment jednak nuli za temperature niže od Nelove temperature T_N. U odsustvu spoljašnjeg magnetnog polja ukupni magnetni moment antiferomagnetika jednak je nuli. Delujući promenljivim spoljašnjim magnetnim poljem na antiferomagnetik, magnetizacija linearno raste sa povećanjem jačine magnetnog polja sve do nekog kritičnog, pri kome nastupa magnetizacija zasićenja. Na temperaturama višim od Nelove, antiferomagnetik se ponaša kao paramagnetik. Podrešetke antiferomagnetika imaju jednake antiparalelne spinove i u različitim magnetnim poljima, magnetni momenti podrešetki $\vec{M}_1$ i $\vec{M}_2$ predstavljeni su na slici:



gde je a) - antiferomagnetik u odsustvu spoljašnjeg polja, b) - u slabom spoljašnjem magnetnom polju, i c) - u jakom spoljašnjem polju. Pri konstantnom spoljašnjem magnetnom polju sa povećanjem temperature, magnetizacija antiferomagnetika slabi.

Predstavnici ferimagnetika su kompleksne soli prelaznih metala: $MnO{\cdot}Fe_2O_3$, $FeO{\cdot}Fe_2O_3$, $CoO{\cdot}Fe_2O_3$, itd. Magnetna rešetka ferimagnetika se sastoji iz nekoliko podrešetki, čiji spinovi imaju različitu veličinu i orijentaciju, pa je rezultujući magnetni moment različit od nule. Ako se ferimagnetik nadje u promenljivom spoljašnjem magnetnom polju; od nekog kritičnog polja H_1, magnetni moment mu raste linearno sa porastom polja do neke druge kritične vrednosti H_2, kada nastupa magnetizacija zasićenja. Na slici je šematski prikazan raspored spinova feromagnetika sa dve podrešetke u promenljivom spoljašnjem magnetnom polju:



gde je a) ferimagnetik u slabom spoljašnjem magnetnom polju, b) - u jakom polju, i c) - u veoma jakom polju.

Pored navedenih, u jake magnetne materijale spadaju još antiferomagnetici sa slabim feromagnetizmom, kao i magnetni materijali sa spiralnim strukturama. Prvu grupu možemo posmatrati kao antiferomagnetike čiji magnetni momenti podrešetaka nisu strogo antiparalelni, zbog uticaja magnetne anizotropije, a kod drugih se raspored spinova u kristalnoj rešetki karakteriše zavrtanjskom simetrijom. Može se reći da kod tzv. spiralnih struktura komponente spinskih vektora se periodično menjaju pri različitim položajima u odnosu na neki odredjeni pravac.

1.2. IZOTROPNI I ANIZOTROPNI FEROMAGNETICI

Feromagnetni materijali imaju kristalnu strukturu koju čine atomi sa nepopunjenim unutrašnjim ljuskama, i to je jedan od uslova za pojavu jakog magnetizma. Pored toga, magnetne osobine materijala zavise i od raspodele gustine elektrona u kristalnoj rešetki. Ipak savremena teorija nije uspela još da formuliše neophodne i dovoljne uslove za pojavu jakog magnetizma na osnovu elektronske konfiguracije atoma u kristalnoj rešetki.

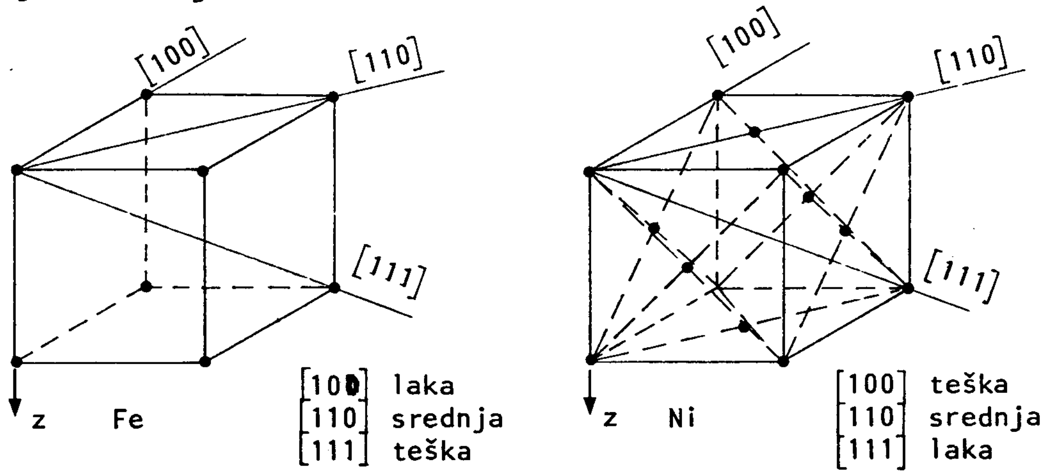
Ukupni magnetni moment uzorka sačinjen je iz sopstvenih i orbitalnih magnetnih momenata atomskih elektrona. Poznato je da je Landeov faktor g, u jedinicama e/2mc 2 za sopstveni i 1 za orbitalni magnetnomehanički odnos slobodnog elektrona. Na osnovu ovih eksperimentalnih činjenica može se shvatiti da magnetni moment feromagnetika grade spinski magnetni momenti elektrona nepopunjenih ljusaka, dok njihovi orbitalni momenti nemaju značajnijeg uticaja. Isto tako, pojava makroskopskog magnetnog momenta uzorka, posledica je uredjenosti spinova elektrona nepopunjenih ljusaka atoma, a uzrok ove uredjenosti je interakcija izmedju elektrona.

Ovu predpostavku je učinio Hajzenberg (Heisenberg) (1928.g.) i na njoj se zasniva savremena teorija jakog magnetizma.

Uredjenost spinova kod feromagnetika ispod Kirijeve temperature je spontana. Što je temperatura niža, uredjenost je veća i na 0 K svi spinovi su paralelni i orijentisani u pravcu tzv. ose kvantizacije. Magnetni moment po jedinici zapremine feromagnetika, koji pri tome nastaje, je spontana magnetizacija a njegova najveća moguća teorijska vrednost je magnetizacija zasićenja.

S obzirom da nisu do danas poznati jaki magnetici u tečnom i gasovitom agregatnom stanju, ukazuje se na povezanost pojave jakog magnetizma sa postojanjem kristalne rešetke. Uticaj kristalne rešetke na magnetna svojstva materije potvrdjuje i postojanje magnetno-kristalografske anizotropije. Naime, kod pojedinih feromagnetika magnetne karakteristike zavise od pravca u kom se mere. Feromagnetici sa magnetno-kristalografskom anizotropijom čine grupu anizotropnih feromagnetika, o kojima se u ovom radu upravo i govori.

Relativna orijentacija spinova elektrona susednih atoma nastaje usled njihove medjusobne interakcije (Kulonova interakcija), pa je opšta orijentacija spinova proizvoljna. Spin-spinska i spin-orbitalna interakcija, uglavnom, otklanjaju ovu degeneraciju po pravcima; u kristalnoj rešetki se javlja nekoliko takvih pravaca da, u slučaju kada su spinovi (grupe spinova) usmereni u jednom od njih, termodinamički potencijal sistema je minimalan. Te pravce nazivamo osama lake magnetizacije, i proizvoljni monokristal u odsustvu spoljašnjeg magnetnog polja, ima orijentaciju spinova duž jedne od osa lake magnetizacije. Magnetno zasićenje feromagnetika najbrže se postiže duž osa lake magnetizacije. Na slici su predstavljene kristalne rešetke gvoždja i nikla sa osama magnetizacije:



Priroda magnetnih momenata atoma u osnovi je spinska, pa je moguće opisati ponašanje elektrona nepopunjenih ljuski atoma, kao ponašanje sistema spinova koji se nalaze u čvorovima kristalne rešetke. Relativna orijantacija spinova je posledica tzv. interakcije izmene, koja predstavlja faktor zavisnosti energije sistema od prostorne simetrije talasne funkcije sistema i proporcionalna je veličini njegovog ukupnog spina. Tako na primer, kod atoma vodonika pri paralelnoj orijentaciji spinova atomi se odbijaju, a pri antiparalelnoj orijentaciji se privlače.

I sa ovako uprošćenim modelom materije kvantitativan račun je veoma složen, pa je moguće s odredjenom tačnošću operatore spina elektrona zameniti klasičnim vektorima. Tada u odnosu na magnetna svojstva, monokristal predstavlja sistem dipola razmeštenih po čvorovima kristalne rešetke, koji medjusobno interaguju energijom jednakom energiji izmene. Ovakva kvaziklasična šema daje dosta dobro kvalitativno i približno kvantitativno objašnjenje jakih magnetnih materijala.

Magnetizacija zasićenja kristalne rešetke je:

$$M_0 = \mu \cdot N$$

gde je: μ - magnetni moment atoma, N - broj atoma kristalne rešetke. Merenjem magnetizacije uzorka M dobiju se uvek manje vrednosti od M_0 usled uticaja toplotnih oscilacija spinskih momenata atoma, magnetnokristalografske anizotropije i konačnosti uzorka. Povećanjem spoljašnjeg magnetnog polja spinovi počinju da skreću sa osa lake magnetizacije prema pravcu spoljašnjeg polja i za odredjenu vrednost jačine polja, orijentišu se u pravcu polja. Daljim povećanjem polja sputavaju se termodinamičke oscilacije spinskih momenata i u toj oblasti susceptibilnost opada sa porastom polja.

Pri Kirijevoj temperaturi kod feromagnetika dolazi do razuredjivanja spinova usled izjednačavanja srednje termodinamičke energije sa energijom interakcije izmene. Vrednosti Kirijeve temperature za feromagnetike su reda veličine 10^3 K, što odgovara energiji $kT_c \sim 10^{-13}$ erg (k - Bolcmanova konstanta). Energija izmene J je reda e^2/a, gde je e - naelektrisanje elektrona, a a - konstanta rešetke. Za konstantu rešetke a = 2 - 3 Å je energija izmene $J \sim 10^{-12}$ - 10^{-13} erg. Prema tome, procene ove dve energije slažu se po redu veličine.

Energija magnetne anizotropije je uporediva sa energijom magnetne interakcije elektrona (spin-spinska i spin-orbitalna) i reda je veličine $\mu^2/a^3 \sim 10^{-16} - 10^{-17}$ erg. Ako feromagnetik stavimo u jako magnetno polje ono će potpuno eliminisati anizotropiju u slučaju kada je $H \geq \mu/a^2$, odnosno $H \geq 10^3 - 10^4$ ersteda, što se i opaža u eksperimentu. Magnetno-kristalografska anizotropija mnogo zavisi i od temperature.

Na osnovu navedenih procena nije moguće sa klasične tačke gledišta opisati feromagnetik kao sistem magnetnih momenata razmeštenih u čvorovima rešetke sa čisto dipolnim interakcijama. Naime, energija dipolne interakcije je reda veličine $\mu^2/a^3 \sim (10^{-16} - 10^{-17})$ erga, što odgovara Kirijevoj temperaturi $(1 - 10^{-1})$ K, pa se u kvazi-klasičnoj šemi prećutkuje interakcija dipola sa energijom jednakom energiji interakcije izmene.

Za opisivanje svojstava i veličina koje karakterišu feromagnetik neophodno je poznavanje opšteg oblika hamiltonijana, koje se bazira na prethodno učinjenim predpostavkama. Uvodi se Heisenbergov model izotropnog feromagnetika koji eksplicitno uračunava samo interakciju izmene, zanemarujući spin-orbitalnu i spin-spinsku interakciju, u poredjenju sa interakcijom izmene. Hamiltonijan izotropnog feromagnetika u spoljašnjem magnetnom polju H, usmerenom u pravcu z-ose ima oblik

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} J_{\vec{n},\vec{m}}\, \hat{\vec{S}}_{n}\, \hat{\vec{S}}_{\vec{m}} - g\mu_B H \sum_{\vec{n}} \hat{S}^z_{\vec{n}} \qquad (1.1)$$

gde je: g - Landeov faktor, μ_B - Bohrov magneton, $\vec{n}$ i $\vec{m}$ - vektori čvorova kristalne rešetke, $\vec{S}_{\vec{n}}$ i $\vec{S}_{\vec{m}}$ - operatori spina u čvoru rešetke $\vec{n}$, odnosno $\vec{m}$ i $J_{\vec{n},\vec{m}}$ - integral izmene koji se odnosi na interakciju $\vec{n}$-tog i $\vec{m}$-tog čvora kristalne rešetke i ima dimenzije energije. Drugi član je energija interakcije spinova svih čvorova rešetke sa spoljašnjim magnetnim poljem H, tj. energija magnetnog polja koja je lokalizovana u čvorovima kristalne rešetke.

Kod anizotropnih feromagnetika, u opštem slučaju, interakcija medju spinovima je različita u raznim pravcima, tako da hamiltonijan možemo napisati u najopštijem obliku:

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}\vec{i}\vec{j}} J^{\vec{i},\vec{j}}_{\vec{n},\vec{m}}\, \hat{S}_i\, \hat{S}_j - g\mu_B H \sum_{n} \hat{S}^z_n$$

gde su $i,j = x,y,z$. U slučaju jednoosnog anizotropnog feromagnetika (osa z), hamiltonijan ima oblik:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} J_{\vec{n},\vec{m}}\, \hat{\vec{S}}_{\vec{n}}\, \hat{\vec{S}}_{\vec{m}} - g\mu_B H \sum_{\vec{n}} \hat{S}^z_{\vec{n}} - \frac{1}{2} c \sum_{\vec{n}\vec{m}} J_{\vec{n},\vec{m}}\, \hat{S}^z_{\vec{n}}\, \hat{S}^z_{\vec{m}} \qquad (1.2)$$

gde je c - konstanta anizotropije. Integral izmene zavisi samo od rastojanja izmedju spinova, tj. važi relacija

$$J_{\vec{n},\vec{m}} = J_{\vec{n},\vec{m}} = J_{\vec{n},-\vec{m}}$$

2. MAGNON - FONON INTERAKCIJA

Ako u relaciji (1.2) grupišemo članove i stavimo da je $H_A = g\mu_B H$, hamiltonijan anizotropnog feromagnetika imaće oblik:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n},\vec{m}} J_{\vec{n}-\vec{m}}[\hat{\vec{S}}_{\vec{n}}\hat{\vec{S}}_{\vec{m}} + c\hat{S}^z_{\vec{n}}\hat{S}^z_{\vec{m}}] - H_A\sum_{\vec{n}}\hat{S}^z_{\vec{n}} \tag{2.1}$$

Da bi smo izdvojili energiju osnovnog stanja, prećićemo na operatore S^+ (povećava z-projekciju spina za 1) i S^- (smanjuje z-projekciju spina za 1) relacijama:

$$S^+_n = S^x_n + iS^y_n \qquad\qquad S^-_n = S^x_n - iS^y_n$$

pa je hamiltonijan:

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n}\vec{m}} J_{\vec{n}-\vec{m}}[S^-_{\vec{n}} S^+_{\vec{m}} + (1+c)S^z_{\vec{n}} S^z_{\vec{m}}] - H_A\sum_{\vec{n}} S^z_{\vec{n}} \tag{2.2}$$

Spinski operatori ne zadovoljavaju ni bozonske ni fermijonske komutacione relacije, pa ćemo preći Blohovim aproksimacijama na bozonske operatore: kreacije $B^+_{\vec{n}}$ i anihilacije $B_{\vec{n}}$.

$$S^-_{\vec{n}} \simeq \sqrt{2S}\, B^+_{\vec{n}}; \qquad S^+_{\vec{n}} \simeq \sqrt{2S}\, B_{\vec{n}}; \qquad S^z_{\vec{n}} \simeq S - B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} \tag{2.3}$$

Ove aproksimacije važe samo za slabo eksitirane feromagnetike, tj. kada je broj bozona $B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}}$ manji od 2S, što važi za sisteme na niskim temperaturama. Blohove aproksimacije nas obavezuju da odbacimo članove višeg reda od drugog, po operatorima $B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}}$. Uzevši u obzir da je:

$$J_0 = \sum_{\vec{m}} J_{\vec{n}-\vec{m}}$$

$$\sum_{\vec{n}\vec{m}} J_{\vec{n}-\vec{m}}(B^{+}_{\vec{m}} B_{\vec{m}} + B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}}) = 2 \sum_{\vec{n}\vec{m}} J_{\vec{n}-\vec{m}} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}}$$

hamiltonijan nakon Blohovih aproksimacija dobija oblik:

$$H = H_0 + H_2 + H_4$$

gde je:

$$H_0 = -\frac{1}{2}(1+c)S^2 N J_0 - SNH_A$$

$$H_2 = \left[(1+c)S J_0 + H_A\right] \sum_{\vec{n}} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}} - $$

$$- S \sum_{\vec{n}\vec{m}} J_{\vec{n}-\vec{m}} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{m}}$$

$$H_4 = -\frac{1}{2}(1+c) \cdot \sum_{\vec{n}\vec{m}} J_{\vec{n}-\vec{m}} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}} B^{+}_{\vec{m}} B_{\vec{m}}$$

H_0 - je energija osnovnog stanja. Nakon odbacivanja člana H_4 konačni oblik hamiltonijana će biti:

$$H = H_0 + \left[(1+c)S J_0 + H_A\right] \cdot \sum_{n} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{n}} -$$

$$- S \sum_{\vec{n}\vec{m}} J_{\vec{n}-\vec{m}} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{m}} \qquad (2.4)$$

Zatim ćemo ga dijagonalizovati kanonskom Furije-transformacijom, i preći iz konfiguracionog u impulsni prostor:

$$B^{+}_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} B^{+}_{\vec{k}} \, e^{-i\vec{k}\vec{n}}$$

$$B_{\vec{n}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}} B_{\vec{k}} \, e^{i\vec{k}\vec{n}} \tag{2.5}$$

$$J_{\vec{k}} = \sum_{\vec{\ell}} J(\vec{\ell}) \, e^{-i\vec{k}\vec{\ell}} \qquad \vec{\ell} = \vec{n} - \vec{m}$$

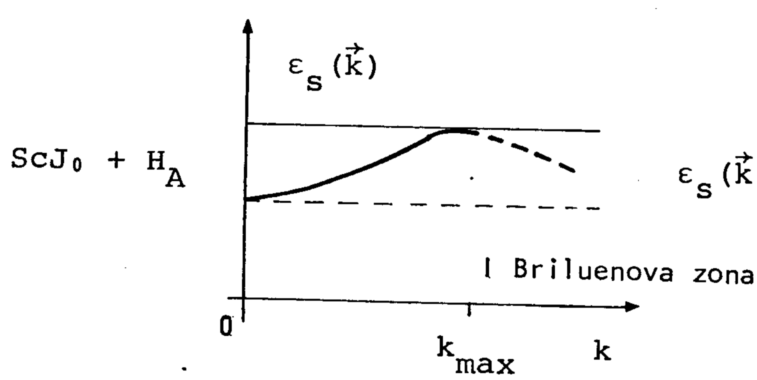
Nakon sumiranja po svim vrednostima k koje pripadaju prvoj Briluenovoj zoni dobijamo:

$$H = H_0 + \sum_{\vec{k}} \left[S(J_0 - J_{\vec{k}}) + ScJ_0 + H_A \right] B^{+}_{\vec{k}} B_{\vec{k}}$$

odnosno:

$$H = H_0 + \sum_{\vec{k}} \varepsilon_s(\vec{k}) \, B^{+}_{\vec{k}} B_{\vec{k}} \tag{2.6}$$

Ovako dijagonalizovan hamiltonijan ima oblik hamiltonijana idealnog gasa. Operator $B^{+}_{\vec{k}} B_{\vec{k}}$ predstavlja broj kvazičestica (magnona) sa impulsom $\vec{k}$, a $\varepsilon_s(\vec{k})$ je energija tih čestica, odnosno energija spinskih talasa i data je sa:



$$\varepsilon_s(\vec{k}) = S(J_0 - J_{\vec{k}}) + ScJ_0 + H_A \tag{2.7}$$

Sada ćemo izračunati integral izmene $J_{\vec{k}}$ u aproksimaciji najbližih suseda, za prostu kubnu rešetku sa parametrom a.

$$J_{\vec{k}} = J\sum_{\lambda nm} e^{-ik\lambda} = J(e^{-ik_x a} + e^{ik_x a} + e^{-ik_y a} +$$

$$+ e^{ik_y a} + e^{-ik_z a} + e^{ik_z a}) = 2J(\cos k_x a +$$

$$+ \cos k_y a + \cos k_z a) = 2J\sum_i \cos k_i a \qquad i = x,y,z$$

za $k = 0$ je $J_0 = 6J$, pa je:

$$S(J_0 - J_{\vec{k}}) = 2SJ(3 - \sum_i \cos k_i a)$$

Kada $\cos k_i a$ razvijemo u Tajlorov red i zadržimo prva dva člana, dobićemo:

$$S(J_0 - J_{\vec{k}}) = SJk^2a^2 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_e} \qquad (2.8)$$

pa je efektivna masa magnona

$$m_e = \frac{\hbar^2}{2SJa^2} \qquad (2.9)$$

gde je J interakcija izmedju najbližih suseda.

Sada ćemo se vratiti na jednačinu (2.4) čiji drugi član H_2 predstavlja hamiltonijan interakcije izmedju spinova. Kada stavimo da je $\Delta = (1+c)SJ_0 + H_A$, imaćemo:

$$H_2 = \sum_{\vec{n}} \Delta B^+_{\vec{n}} B_{\vec{n}} - S\sum_{\vec{n}\vec{m}} J_{\vec{n}-\vec{m}} B^+_{\vec{n}} B_{\vec{m}}$$

$$H_2 = \sum_{\vec{n}\vec{m}} \Delta\delta_{\vec{n}\vec{m}} B^+_{\vec{n}} B_{\vec{m}} - S\sum_{\vec{n}\vec{m}} J_{\vec{n}-\vec{m}} B^+_{\vec{n}} B_{\vec{m}}$$

i dobijamo da je tzv. spinski hamiltonijan oblika:

$$H_S = H_2 = \sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}-\vec{m}} B^+_{\vec{n}} B_{\vec{m}} \qquad (2.10)$$

gde je integral izmene $I_{\vec{n}-\vec{m}} = \Delta\delta_{\vec{n},\vec{m}} - SJ_{\vec{n}-\vec{m}}$.

Ovakav hamiltonijan $H = H_0 + H_s$ važi pod predpostavkom da atomi u čvorovima kristalne rešetke miruju, ne vrše nikakva fononska pomeranja oko ravnotežnih položaja. Tada su, uglavnom, svi atomski magnetni momenti usmereni u jednu stranu; što odgovara energetski najnižem stanju. Povećanjem temperature feromagnetika, njegova energija će se povećavati na račun pojave "prevrnutih" elektronskih spinova. Usled interakcije izmene izmedju spinova ekscitacija će se prenositi u vidu spinskih talasa kroz kristal.

U stvarnosti atomi osciluju oko čvorova kristalne rešetke, pa ukupnu energiju feromagnetika čini još: oscilatorna energija i energija interakcije izmedju spinskih talasa (magnona) i kvanata toplotnog oscilovanja (fonona). Na osnovu ovoga ukupni hamiltonijan anizotropnog feromagnetika u spoljašnjem magnetnom polju ima oblik:

$$H = H_0 + H_s + H_{sp} + H_p \tag{2.11}$$

gde je:

$$H_0 = - \sum_{\vec{k}} \left[\frac{S^2}{2} (1+c) J_0 + S g \mu_B H \right] + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k} j} \hbar \omega_{\vec{k} j}$$

energija osnovnog stanja kojoj je dodata energija nultih oscilacija,

$$H_s = \sum_{\vec{k}} \varepsilon_s(\vec{k}) \, B^{+}_{\vec{k}} B_{\vec{k}}$$

spinski deo hamiltonijana, H_{sp} - hamiltonijan spin-fonon interakcije,

$$H_p = \sum_{\vec{q} j} \hbar \, \omega_{\vec{q} j} \, b^{+}_{\vec{q} j} \, b_{\vec{q} j} \, .$$

fononski deo hamiltonijana. Ovde su: $b^{+}_{\vec{q} j}$ - operator kreacije fonona sa impulsom $\vec{q}$, $b_{\vec{q} j}$ - operator anihilacije fonona, a operator $b^{+}_{\vec{q} j} b_{\vec{q} j}$ - predstavlja ukupan broj fonona.

Da bi smo došli do oblika hamiltonijana spin-fonon interakcije, moramo razviti integral izmene $I_{\vec{n}-\vec{m}}$ po fononskim promenljivima. Neka su vektori položaja čvorova rešetke u ravnotežnom položaju n i m, a rastojanja čvorova od ravnotežnog položaja $\vec{u}_{\vec{n}}$ i $\vec{u}_{\vec{m}}$. Tada ćemo imati:

$$\vec{n} \to \vec{n} + \vec{u}_{\vec{n}} \qquad \vec{m} \to \vec{m} + \vec{u}_{\vec{m}}$$

odnosno, integral izmene:

$$I_{\vec{n}-\vec{m}} \to I_{\vec{n}-\vec{m}+\vec{u}_{\vec{n}}-\vec{u}_{\vec{m}}}$$

Njega ćemo razviti u red i zadržati prva dva člana.

$$I_{\vec{n}-\vec{m}+\vec{u}_{\vec{n}}-\vec{u}_{\vec{m}}} \simeq I_{\vec{n}-\vec{m}} + (\vec{u}_{\vec{n}} - \vec{u}_{\vec{m}})\,\nabla_{\vec{n}-\vec{m}}\, I_{\vec{n}-\vec{m}}$$

Kada ovako razvijen integral izmene uvrstimo u (2.10) imaćemo:

$$H_s \to H_s + H_{sp}$$

odnosno

$$H_s + H_{sp} = \sum_{\vec{n}\vec{m}} I_{\vec{n}-\vec{m}} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{m}} + \sum_{\vec{n}\vec{m}} (\vec{u}_{\vec{n}} - \vec{u}_{\vec{m}})\,\nabla_{\vec{n}-\vec{m}}\, I_{\vec{n}-\vec{m}} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{m}}$$

pa je

$$H_{sp} = \sum_{\vec{n}\vec{m}} (\vec{u}_{\vec{n}} - \vec{u}_{\vec{m}})\,\nabla_{\vec{n}-\vec{m}}\, I_{\vec{n}-\vec{m}} B^{+}_{\vec{n}} B_{\vec{m}} \qquad (2.12)$$

Furije transformacija za integral izmene

$$I_{\vec{n}-\vec{m}} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}} I_{\vec{k}} \cdot e^{i\vec{k}(\vec{n}-\vec{m})}$$

pošto je

$$I_{\vec{k}} = \Delta - SJ_{\vec{k}}$$

biće

$$I_{\vec{n}-\vec{m}} = \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} (\Delta - SJ_{\vec{k}})\, e^{i\vec{k}(\vec{n}-\vec{m})} \tag{2.13}$$

Zatim ćemo naći izvod integrala izmene:

$$\nabla_{\vec{n}-\vec{m}} I_{\vec{n}-\vec{m}} = \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} (\Delta - SJ_{\vec{k}})\nabla_{\vec{n}-\vec{m}}\, e^{i\vec{k}(\vec{n}-\vec{m})} =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{\vec{k}} (\Delta - SJ_{\vec{k}})\nabla_{\vec{u}}\, e^{i\vec{k}\vec{u}}$$

$$\nabla_{\vec{n}-\vec{m}} I_{\vec{n}-\vec{m}} = \frac{i}{N}\sum_{\vec{k}} \vec{k}(\Delta - SJ_{\vec{k}})\, e^{i\vec{k}(\vec{n}-\vec{m})} \tag{2.14}$$

Hamiltonijan magnon-fonon interakcije dobijamo kada u izraz (2.12) pored relacije (2.14) uvrstimo operator pomeranja izražen preko fononskih operatora:

$$\vec{u}_{\vec{n}} - \vec{u}_{\vec{m}} = \sum_{\vec{q}j} \sqrt{\frac{\hbar}{2Nm\omega_{\vec{q}j}}}\, \vec{e}_{\vec{q}j}(b_{\vec{q}j} + b^{+}_{-\vec{q}j})(e^{i\vec{q}\vec{n}} - e^{i\vec{q}\vec{m}}) \tag{2.15}$$

(gde je N - broj atoma, m - masa atoma, a $\omega_{\vec{q}j}$ - frekvencija oscilovanja atoma), izraze za $B^{+}_{\vec{n}}$ i $B_{\vec{m}}$ iz relacije (2.5):

$$H_{sp} = \frac{i}{N^2}\sum_{\vec{k},\vec{k}_1,\vec{k}_2,\vec{q},j} \sqrt{\frac{\hbar}{2Nm\omega_{\vec{q}j}}}\, (\vec{k}\cdot\vec{e}_{\vec{q}j}) B^{+}_{\vec{k}_1} B_{\vec{k}_2} \times$$

$$\times\ (b_{\vec{q}j} + b^{+}_{-\vec{q}j})(\Delta - SJ_{\vec{k}}) \sum_{\vec{n}\vec{m}} e^{i\vec{k}(\vec{n}-\vec{m})} \times$$

$$\times\ (e^{i\vec{q}\vec{n}} - e^{i\vec{q}\vec{m}})\, e^{-i\vec{k}_1\vec{n}}\, e^{i\vec{k}_2\vec{m}}$$

Pri izračunavanju izraza pod $\sum_{\vec{n}\vec{m}}$ koristićemo jednakost:

$$\sum_{\vec{n}} e^{\pm i\vec{n}(\vec{k}_1-\vec{k}_2)} = N\delta_{\vec{k}_1,\vec{k}_2}$$

pa je:

$$\sum_{\vec{n}\vec{m}} e^{i\vec{k}(\vec{n}-\vec{m})}\left(e^{i\vec{q}\vec{n}} - e^{i\vec{q}\vec{m}}\right) e^{-i\vec{k}_1\vec{n}} e^{-i\vec{k}_2\vec{m}} =$$

$$= N^2\delta_{\vec{k}+\vec{q},\vec{k}_1}\,\delta_{\vec{k}_2,\vec{k}} - N^2\delta_{\vec{k}_1,\vec{k}_1}\,\delta_{\vec{k}_1,\vec{k}_2+\vec{q}}$$

Kronekeri ukidaju sume po $\vec{k}_1$ i $\vec{k}_2$, pa je hamiltonijan

$$H_{sp} = i\sum_{\vec{k}\vec{q}j}\sqrt{\frac{\hbar}{2Nm\omega_{\vec{q}j}}}\,(\vec{k}\cdot\vec{e}_{\vec{q}j})B^{+}_{\cancel{\vec{k}+\vec{q}}}\cancel{B}_{\vec{k}}(b_{\vec{q}j} + b^{+}_{-\vec{q}j})\times$$

$$\times\ (\Delta - SJ_{\vec{k}})\left(B^{+}_{\vec{k}+\vec{q}}B_{\vec{k}} - B^{+}_{\vec{k}}B_{\vec{k}-\vec{q}}\right)$$

ako uzmemo da je $\vec{k}+\vec{q} = \vec{k}'$ i predjemo sa $\vec{k}'\to\vec{k}$, biće

$$H_{sp} = -i\sum_{\vec{k}\vec{q}j}\sqrt{\frac{\hbar}{2Nm\omega_{\vec{q}j}}}\,\{(\vec{q}\cdot\vec{e}_{\vec{q}j})[\Delta - SJ_{\vec{k}-\vec{q}}] +$$

$$+\ (\vec{k}\cdot\vec{e}_{\vec{q}j})S\,[J_{\vec{k}-\vec{q}} - J_{\vec{k}}]\}\ B^{+}_{\vec{k}}B_{\vec{k}-\vec{q}}(b_{\vec{q}j} + b^{+}_{-\vec{q}j})$$

pa je hamiltonijan magnon-fonon interakcije oblika:

$$H_{sp} = \sum_{\vec{k}\vec{q}j}\Phi_j(\vec{k},\vec{q})B^{+}_{\vec{k}}B_{\vec{k}-\vec{q}}(b_{\vec{q}j} + b^{+}_{-\vec{q}j}) \tag{2.16}$$

za $j = 1,2,3$, gde su $\Phi_j(\vec{k},\vec{q})$ - koeficijenti magnon-fonon interakcije.

$$\Phi_j(\vec{k},\vec{q}) = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2Nm\omega_{\vec{q}j}}}\{(\vec{e}_{\vec{q}j}\cdot\vec{q})[\Delta - SJ_{\vec{k}-\vec{q}}] +$$

$$+\ (\vec{e}_{\vec{q}j}\cdot\vec{k})S[J_{\vec{k}-\vec{q}} - J_{\vec{k}}]\} \tag{2.17}$$

Iz prethodne ralecije možemo videti da je

$$\Phi_j(0,\vec{q}) = - i \sqrt{\frac{\hbar}{2Nm\omega_{\vec{q}j}}}(\vec{e}_{\vec{q}j}\cdot\vec{q}) \; [\Delta - SJ_{\vec{q}}]$$

$$\Phi_j(\vec{q},\vec{q}) = - i \sqrt{\frac{\hbar}{2Nm\omega_{\vec{q}j}}}(\vec{e}_{\vec{q}j}\cdot\vec{q}) \; [\Delta - SJ_{\vec{q}}] \tag{2.18}$$

odnosno:

$$\Phi_j(0,\vec{q}) = \Phi_j(\vec{q},\vec{q}) = \Phi_j(\vec{q})$$

$$\Phi_j(\vec{k},0) = 0 \tag{2.19}$$

Prema tome, ukupni hamiltonijan anizotropnog feromagnetika u spoljašnjem magnetnom polju (2.11) biće:

$$H = H_0 + \sum_{\vec{k}} \varepsilon_s(\vec{k}) \, B^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}} + \sum_{\vec{q}j} \hbar\,\omega_{\vec{q}j} \, b^+_{\vec{q}j} \, b_{\vec{q}j} +$$

$$\sum_{\vec{k}\vec{q}j} \Phi_j(\vec{k},\vec{q}) \, B^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}-\vec{q}}(b_{\vec{q}j} + b^+_{-\vec{q}j}) \tag{2.20}$$

U ovakvom hamiltonijanu ne može doći do hibridizacije izmedju magnona i fonona, jer on sadrži proizvode tri operatora, od kojih su dva magnonska a jedan fononski.

3. HIBRIDNE EKSCITACIJE U JEDNOM FEROMAGNETIKU

U ovom delu ćemo pokušati da analiziramo pojavu: da se do uspostavljanja stanja termodinamičke ravnoteže u anizotropnom feromagnetiku izmedju ostalih procesa, desi i proces hibridizacije fononskih i magnonskih ekscitacija, koje predstavljaju kvante magnetnoakustičnih talasa u feromagneticima.

Koristićemo Vejlov identitet

$$H_{eq} = e^{-S}\, H\, e^{S} = H + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} [S,[S,[S,\ldots[S,H]]]] \tag{3.1}$$

da bi sa hamiltonijana (2.20) prešli pogodnim izborom antihermitskog operatora S, na ekvivalentni hamiltonijan drugog reda, koji sadrži forme po magnonskim i fononskim operatorima tipa: $B^+b + b^+B + B^+b^+ + Bb$. Kao što je poznato, ovakav oblik hamiltonijana dovodi do hibridizacije u sistemu magnona i fonona.

Identitet (3.1) koristićemo u aproksimaciji:

$$H_{eq} = H - [S,H] + \frac{1}{2}[S,[S,H]] \tag{3.2}$$

a operator S odabrati u obliku:

$$S = S_1 - S_1^+ \;; \qquad S_1 = X_0 B_0 + \sum_{\vec{\nu} i} Y_{\vec{\nu} i}\, B_{\vec{\nu}}\, b_{-\vec{\nu} i} \tag{3.3}$$

gde su X_0 i $Y_{\vec{\nu}i}$ - funkcije koje ćemo izabrati tako da dobijemo hamiltonijan kvadratne forme po mešanim magnonskim i fononskim operatorima.

Prvo ćemo izračunati komutacione relacije identiteta (3.2). Iz prve relacije (3.3) sledi da je:

$$[S,H] = [S_1,H] + [S_1, H]^+ \qquad (3.4)$$

i koristeći se relacijama (2.20) i (3.3) izračunaćemo komutator $[S_1,H]$, a zatim mu dodati konjugovan $[S_1,H]^+$ i dobiti (3.4).

$$\begin{aligned}
[S_1,H] = {} & X_0 \sum_{\vec{k}} \varepsilon_s(\vec{k})[B_0, B^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}}] + X_0 \sum_{\vec{q}j} \hbar\omega_{\vec{q}j} \cdot \\
& \cdot [B_0, b^+_{\vec{q}j} b_{\vec{q}j}] + X_0 \sum_{\vec{k}\vec{q}j} \Phi_j(\vec{k},\vec{q})[B_0, B^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}-\vec{q}} \cdot \\
& \cdot (b_{\vec{q}j} + b^+_{-\vec{q}j})] + \sum_{\vec{\nu}\vec{k}i} Y_{\vec{\nu}i}\, \varepsilon_s(\vec{k}) \cdot \\
& \cdot [B_{\vec{\nu}} b_{-\vec{\nu}i}, B^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}}] + \sum_{\vec{\nu}\vec{q}ij} Y_{\vec{\nu}i}\, \hbar\omega_{\vec{q}j} \cdot \\
& \cdot [B_{\vec{\nu}} b_{-\vec{\nu}i}, b^+_{\vec{q}j} b_{\vec{q}j}] + \sum_{\vec{\nu}\vec{k}\vec{q}ij} \Phi_j(\vec{k},\vec{q})\, Y_{\vec{\nu}i} \cdot \\
& \cdot [B_{\vec{\nu}} b_{-\vec{\nu}i}, B^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}-\vec{q}}(b_{\vec{q}j} + b^+_{-\vec{q}j})]
\end{aligned}$$

Za izračunavanje komutatora koristili smo komutacione relacije za boze operatore:

$$\begin{aligned}
&[B_{\vec{k}}, B^+_{\vec{q}}] = \delta_{\vec{k},\vec{q}} \\
&[b_{\vec{k}i}, b^+_{\vec{q}j}] = \delta_{\vec{k},\vec{q}}\, \delta_{i,j} \qquad (3.5) \\
&[B_{\vec{k}}, b^+_{\vec{q}i}] = [B_{\vec{k}}, B_{\vec{q}}] = 0
\end{aligned}$$

Uz osobinu kronekera da ukida sumu, dobićemo:

$$[S_1, H] = \alpha B_0 + \sum_{\vec{k}j} Y_{\vec{k}j}[\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}j}]\, B_{\vec{k}} b_{-\vec{k}j} +$$

$$+ X_0 \sum_{\vec{q}j} \Phi_j(0,\vec{q}) B_{-\vec{q}} (b_{\vec{q}j} + b^{+}_{-\vec{q}j}) + \sum_{\vec{k}\vec{q}j} \Phi_j(\vec{k},\vec{q}) \cdot$$

$$\cdot\, Y_{\vec{q}j}\, B^{+}_{\vec{k}}\, B_{\vec{k}-\vec{q}}\, B_{\vec{q}} + \sum_{\vec{k}\vec{q}ij} \Phi_j(\vec{k},\vec{q})\, Y_{\vec{k}i}\, B_{\vec{k}-\vec{q}} \cdot$$

$$\cdot\, (b_{-\vec{k}i}\, b_{\vec{q}j} + b^{+}_{-\vec{q}j}\, b_{-\vec{k}i}) \tag{3.6}$$

gde je: $\alpha = \varepsilon_s(0)\, X_0 + \sum_{\vec{k}j} \Phi_j(\vec{k},\vec{k})\, Y_{\vec{k}j}$. Kada (3.6) saberemo sa njoj konjugovanom, dobićemo izraz za komutator (3.4):

$$[S,H] = \hat{A} = \alpha B_0 + \alpha^* B_0^{+} + \sum_{\vec{k}j} [\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}j}] \cdot$$

$$\cdot\, (Y_{\vec{k}j}\, B_{\vec{k}}\, b_{-\vec{k}j} + Y^{*}_{\vec{k}j}\, B^{+}_{\vec{k}}\, b^{+}_{-\vec{k}}) + \sum_{\vec{q}j} [X_0^{*} \Phi_j^{*}(0,\vec{q}) \cdot$$

$$\cdot\, B^{+}_{-\vec{q}} (b^{+}_{\vec{q}j} + b_{-\vec{q}j}) + X_0\, \Phi_j(0,\vec{q}) B_{-\vec{q}} [b^{+}_{\vec{q}j} + b_{-\vec{q}j}]]$$

$$+ \sum_{\vec{k}\vec{q}j} [\Phi_j(\vec{k},\vec{q})\, Y_{\vec{q}j}\, B^{+}_{\vec{k}}\, B_{\vec{k}-\vec{q}}\, B_{\vec{q}} + \Phi_j^{*}(\vec{k},\vec{q})\, Y^{*}_{\vec{q}j}$$

$$B^{+}_{\vec{q}}\, B^{+}_{\vec{k}-\vec{q}}\, B_{\vec{k}}] + \sum_{\vec{k}\vec{q}ij} [\Phi_j(\vec{k},\vec{q})\, Y_{\vec{k}i}\, B_{\vec{k}-q} \cdot$$

$$\cdot\, (b_{-\vec{k}i}\, b_{\vec{q}j} + b^{+}_{-\vec{q}j}\, b_{-\vec{k}i}) + \Phi_j^{*}(\vec{k},\vec{q})\, Y^{*}_{\vec{k}i}\, B^{+}_{\vec{k}-q}$$

$$\cdot\, (b^{+}_{\vec{q}j}\, b^{+}_{-\vec{k}i} + b^{+}_{-\vec{k}i}\, b_{-\vec{q}j})] \tag{3.7}$$

pri čemu su uvedene oznake:

$$\begin{aligned} \alpha &= \varepsilon_s(0) X_0 + \sum_{\vec{k}j} \Phi_j(\vec{k}) Y_{\vec{k}j} \\ \alpha^{*} &= \varepsilon_s(0) X_0^{*} + \sum_{\vec{k}j} \Phi_j^{*}(\vec{k}) Y^{*}_{\vec{k}j} \end{aligned} \tag{3.8}$$

Drugi komutator u relaciji (3.2), uz korišćenje (3.3), možemo napisati:

$$[S,[S,H]] \equiv [S,A] = [S_1,A] + [S_1,A]^+ \tag{3.9}$$

Postupak je sličan prethodnom: prvo ćemo izračunati $[S_1,A]$ uz korišćenje relacija (3.3) i (3.7), biće:

$$[S_1,A] = \hat{B}_1 + \hat{B}_2 \tag{3.10}$$

gde su operatori $\hat{B}_1$ i $\hat{B}_2$ dati:

$$\hat{B}_1 = X_0[B_0,A] \; ; \quad \hat{B}_2 = \sum_{\vec{\nu}i} Y_{\vec{\nu}i}[B_{\vec{\nu}}\, b_{-\vec{\nu}i},\, A] \tag{3.11}$$

$$\hat{B}_1 = \alpha^* X_0 + X_0 \sum_{\vec{k}j}[\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}j}]\, Y^*_{\vec{k}j}[B_0, B^+_{\vec{k}}\, b^+_{-\vec{k}j}] +$$
$$+ |X_0|^2 \sum_{\vec{q}j} \Phi^*_j(0,\vec{q})[B_0,\, B^+_{-\vec{q}}(b^+_{\vec{q}j} + b_{-\vec{q}j})] +$$
$$+ X_0 \sum_{\vec{k}\vec{q}j} \Phi_j(\vec{k},\vec{q}) Y_{\vec{q}j}[B_0,\, B^+_{\vec{k}}\, B_{\vec{k}-\vec{q}}\, B_{\vec{q}}] + X_0 \sum_{\vec{k}\vec{q}j} \cdot$$
$$\cdot\, \Phi^*_j(\vec{k},\vec{q}) Y^*_{\vec{q}j}\, [B_0,\, B^+_{\vec{q}}\, B^+_{\vec{k}-\vec{q}}\, B_{\vec{k}}] + X_0 \sum_{\vec{k}\vec{q}ij} \Phi^*_j(\vec{k},\vec{q}) \cdot$$
$$\cdot\, Y^*_{\vec{k}i}[B_0,\, B^+_{\vec{k}-\vec{q}}(b^+_{\vec{q}j}\, b^+_{-\vec{k}i} + b^+_{-\vec{k}i}\, b_{-\vec{q}j})]$$

što je, kada izračunamo komutatore pomoću (3.5) i uzmemo u obzir osobine $\Phi_j(\vec{k},\vec{q})$ (2.19), jednako:

$$\hat{B}_1 = \alpha^* X_0 + \sum_j X_0 \varepsilon_s(0) Y^*_{0j}\, b^+_{0j} + \sum_{\vec{q}j} X_0 \Phi_j(\vec{q})\, Y_{\vec{q}j} \cdot$$
$$\cdot\, B_{-\vec{q}}\, B_{\vec{q}} + X_0 \sum_{\vec{q}j} \Phi^*_j(\vec{q}) Y^*_{\vec{q}j}\, B^+_{\vec{q}}\, B_{\vec{q}} + X_0 \sum_{\vec{q}ij} \Phi^*_j(\vec{q}) \cdot$$
$$\cdot\, Y^*_{\vec{q}i}\, b^+_{-\vec{q}i}(b^+_{\vec{q}j} + b_{-\vec{q}j}) \tag{3.12}$$

Operator $\hat{B}_2$ dobićemo ubacujući izraz za $\hat{A}$ (3.7) u relaciju (3.11):

$$\hat{B}_2 = \alpha^* \sum_{\vec{\nu}i} Y_{\vec{\nu}i} [B_{\vec{\nu}}\, b_{-\vec{\nu}i},\, B_0^+] + \sum_{\vec{\nu}\vec{k}ij} \Omega_{\vec{k}j}\, Y_{\vec{\nu}i}\, Y^*_{\vec{k}j}\, \cdot$$

$$\cdot\, [B_{\vec{\nu}}\, b_{-\vec{\nu}i},\, B^+_{\vec{k}}\, b^+_{-\vec{k}j}] + \sum_{\vec{\nu}\vec{q}ij} \{X_0 \Phi_j(\vec{q})\, Y_{\vec{\nu}i}\, \cdot$$

$$\cdot\, [B_{\vec{\nu}}\, b_{-\vec{\nu}i},\, B_{-\vec{q}}\, b^+_{-\vec{q}j}] + X_0^* \Phi_j^*(\vec{q})\, Y_{\vec{\nu}i}\, \cdot$$

$$\cdot\, [B_{\vec{\nu}}\, b_{-\vec{\nu}i},\, B^+_{-\vec{q}}(b^+_{\vec{q}j} + b_{-\vec{q}})]\} + \sum_{\vec{\nu}\vec{k}\vec{q}ij} \{\Phi_j(\vec{k},\vec{q})\, \cdot$$

$$\cdot\, Y_{\vec{q}j}\, Y_{\vec{\nu}i} [B_{\vec{\nu}}\, b_{-\vec{\nu}i},\, B^+_{\vec{k}}\, B_{\vec{k}-\vec{q}}\, B_{\vec{q}}] + \Phi^*_j(\vec{k},\vec{q})\, Y^*_{\vec{q}j}\, \cdot$$

$$\cdot\, Y_{\vec{\nu}i} [B_{\vec{\nu}}\, b_{-\vec{\nu}i},\, B^+_{\vec{q}}\, B^+_{\vec{k}-\vec{q}}\, B_{\vec{k}}]\} + \sum_{\vec{\nu}\vec{k}\vec{q}ijj'} \{\Phi_j(\vec{k},\vec{q})\, \cdot$$

$$\cdot\, Y_{\vec{k}j'}\, Y_{\vec{\nu}i} [B_{\vec{\nu}}\, b_{-\vec{\nu}i},\, B_{\vec{k}-\vec{q}}\, b^+_{-\vec{q}j}\, b_{-\vec{k}j'}] + \Phi^*_j(\vec{k},\vec{q})\, \cdot$$

$$\cdot\, Y^*_{\vec{k}j'}\, Y_{\vec{\nu}i} [B_{\vec{\nu}}\, b_{-\vec{\nu}i},\, B^+_{\vec{k}-\vec{q}}(b^+_{\vec{q}j}\, b^+_{-\vec{q}j'} +$$

$$+ b^+_{-\vec{k}j'}\, b_{-\vec{q}j})]\}$$

gde je stavljeno: $\Omega_{\vec{k}j} = \varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}j}$ (3.13)

Kada izračunamo komutatore uz korišćenje relacija (3.5) i (2.19) i ubacimo rezultate, nakon ukidanja suma, sredjivanja i odbacivanja članova trećeg reda po magnonskim i fononskim operatorima, dobićemo:

$$\hat{B}_2 = \alpha^* \sum_j Y_{0j}\, b_{0j} + \sum_{\vec{k}ij} \Omega_{\vec{k}j}\, Y_{\vec{k}i}\, Y^*_{\vec{k}j} [\, b^+_{-\vec{k}j}\, b_{-\vec{k}i} +$$

$$+ \delta_{ij}(1 + B^+_{\vec{k}}\, B_{\vec{k}})] + \sum_{\vec{q}j} X_0 Y_{\vec{q}j}\, \Phi_j(\vec{q})\, B_{\vec{q}}\, B_{-\vec{q}} +$$

$$+ \sum_{\vec{q}j} Y_{\vec{q}j}\, X_0^*\, \Phi_j^*(\vec{q}) (B^+_{-\vec{q}}\, B_{-\vec{q}} + 1) + \sum_{\vec{q}ij} Y_{\vec{q}i}\, \Phi_j^*(\vec{q})\, \cdot$$

$$\cdot\, X_0^*\, b^+_{\vec{q}j}\, b_{\vec{q}i} + \sum_{\vec{q}ij} Y_{\vec{q}i}\, \Phi_j^*(\vec{q})\, X_0^*\, b_{\vec{q}i}\, b_{-\vec{q}j} +$$

$$+ \sum_{\vec{q}jj'} Y^*_{\vec{q}j} \Phi^*_j(\vec{q})\ Y_{0_{j'}}\ b_{0_{j'}} \qquad (3.14)$$

Tako da će relacija (3.10) nakon sabiranja (3.12) i 3.14) imati oblik:

$$\begin{aligned}
[S_1, A] = {} & \alpha^* X_0 + \sum_{\vec{q}j} \Omega_{\vec{q}j} |Y_{\vec{q}j}|^2 + \sum_{\vec{q}j} Y_{\vec{q}j} X_0^* \ \Phi^*_j(\vec{q}) + \\
& + \Big[\alpha^* + \sum_{\vec{q}j} Y^*_{\vec{q}j} \Phi^*_j(\vec{q})\Big] \sum_i Y_{0_i}\ b_{0_i} + \\
& + \sum_i X_0 \varepsilon_S(0) Y^*_{0_i}\ b^+_{0_i} + 2 \cdot \sum_{\vec{q}j} X_0 \Phi_j(\vec{q}) Y_{\vec{q}j} B_{-\vec{q}} B_{\vec{q}} + \\
& + \sum_{\vec{q}j} X_0 \Phi^*_j(\vec{q}) Y^*_{\vec{q}j} B^+_{\vec{q}}\ B_{\vec{q}} + \sum_{\vec{q}ij} Y_{\vec{q}i} \Phi^*_j(\vec{q}) X^*_0\ b^+_{\vec{q}j}\ b_{\vec{q}i} + \\
& + \sum_{\vec{q}j} \Omega_{\vec{q}j} |Y_{\vec{q}j}|^2 B^+_{\vec{q}}\ B_{\vec{q}} + \sum_{\vec{q}j} Y_{\vec{q}j} X^*_0 \Phi^*_j(\vec{q})\ B^+_{-\vec{q}}\ B_{-\vec{q}} + \\
& + \sum_{\vec{q}ij} X_0 \Phi^*_j(\vec{q}) Y^*_{\vec{q}i}\ b^+_{-\vec{q}i} b^+_{\vec{q}j} + \sum_{\vec{q}ij} X_0 \Phi^*_j(\vec{q}) Y^*_{\vec{q}i} \cdot \\
& \cdot b^+_{-\vec{q}i}\ b_{-\vec{q}j} + \sum_{\vec{q}ij} \Omega_{\vec{q}j} Y_{\vec{q}i} Y^*_{\vec{q}j}\ b^+_{-\vec{q}j}\ b_{-\vec{q}i} + \\
& + \sum_{\vec{q}ij} Y_{\vec{q}i} \Phi^*_j(\vec{q}) X^*_0\ b_{\vec{q}i}\ b_{-\vec{q}j} \qquad (3.15)
\end{aligned}$$

Kada ovoj relaciji dodamo njoj konjugovanu $[S_1, A]^+$, dobićemo desnu stranu izraza (3.9). Nakon sredjivanja, uz identičnost

$$\Phi_j(\vec{q}) = - \Phi^*_j(\vec{q})$$

(jer je čisto imaginarna), i oznake (3.8), dobićemo

$$\begin{aligned}
[S, [S, H]] = {} & \alpha^* X_0 + \alpha X^*_0 + 2 \sum_{qj} |Y_{\vec{q}j}|^2 \Omega_{\vec{q}j} + \\
& + \sum_{\vec{q}j} X^*_0 \Phi^*_j(\vec{q}) Y_{\vec{q}j} + \sum_{\vec{q}j} X_0 \Phi_j(\vec{q}) Y^*_{\vec{q}j} +
\end{aligned}$$

$$+ 2\alpha^* \sum_{i} Y_{0i}\, b_{0i} + 2\alpha \sum_{i} Y^*_{0i}\, b^+_{0i} + 2 \sum_{\vec{q}i} X_0 \cdot$$

$$\cdot\ \Phi_j(\vec{q}) Y_{\vec{q}j}\, B_{\vec{q}}\, B_{-\vec{q}} + 2 \sum_{\vec{q}j} X^*_0 \Phi^*_j(\vec{q}) Y^*_{\vec{q}j}\, B^+_{\vec{q}}\, B^+_{-\vec{q}} +$$

$$+ \sum_{\vec{q}j} \Omega_{\vec{q}j} |Y_{\vec{q}j}|^2\, B^+_{\vec{q}}\, B_{\vec{q}} + \sum_{\vec{k}ij} (\Omega_{\vec{k}j} + \Omega_{\vec{k}i}) \cdot$$

$$\cdot\ Y_{\vec{k}i} Y^*_{\vec{k}j}\, b^+_{\vec{k}j}\, b_{\vec{k}i} \tag{3.16}$$

Ekvivalentni hamiltonijan dobićemo kada u tu relaciju ubacimo izraze (2.20), (3.7) i (3.16), uz napomenu da smo zanemarili članove trećeg reda po operatorima. Tako je nakon sredjivanja:

$$H_{eq} = H^e_0 + H^e_1 + H^e_2 \tag{3.17}$$

gde je:

$$H^e_0 = H_0 + \frac{1}{2}(\alpha X^*_0 + \alpha^* X_0) + \frac{1}{2} X^*_0 \sum_{\vec{q}j} Y_{\vec{q}j} \Phi^*_j(\vec{q}) + \frac{1}{2} X_0 \sum_{\vec{q}j} \cdot$$

$$\cdot\ Y^*_{\vec{q}j} \Phi_j(\vec{q}) + \sum_{\vec{q}j} |Y_{\vec{q}j}|^2 \left[\varepsilon_s(\vec{q}) + \hbar\omega_{\vec{q}j}\right] \tag{3.18}$$

$$H^e_1 = -\alpha B_0 - \alpha^* B^+_0 + \alpha^* \sum_{i} Y_{0i}\, b_{0i} + \alpha \sum_{i} Y^*_{0i}\, b^+_{0i}$$

(3.19)

$$H^e_2 = \sum_{\vec{k}} \{\varepsilon_s(\vec{k}) + \sum_{j} [\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}j}]\ |Y_{\vec{k}j}|^2\}\, B^+_{\vec{k}}\, B_{\vec{k}} -$$

$$- \sum_{q} \sum_{j=1}^{3} \{X^*_0 \Phi^*_j(\vec{q})\, B^+_{\vec{q}}\, b_{\vec{q}j} + X_0 \Phi_j(\vec{q})\, b^+_{\vec{q}j}\, B_{\vec{q}}\} +$$

$$+ \sum_{k} \sum_{ij=1}^{3} \{\hbar\omega_{\vec{k}j} \delta_{ij} + \frac{\Omega_{\vec{k}i} + \Omega_{\vec{k}j}}{2}\, Y^*_{\vec{k}i}\, Y_{\vec{k}j}\} b^+_{\vec{k}i}\, b_{\vec{k}j} + X_0 \cdot$$

$$\cdot \sum_{\vec{k}} \{\sum_{j=1}^{3} \Phi_j(\vec{k}) Y_{\vec{k}j}\}\, B_{\vec{k}}\, B_{-\vec{k}} + X^*_0 \sum_{\vec{k}} \{\sum_{j=1}^{3} \Phi^*_j(\vec{k}) Y^*_{\vec{k}j}\} \cdot$$

$$\cdot\ B^{+}_{\vec{k}}\, B^{+}_{-\vec{k}} - \sum_{\vec{k}} \sum_{j=1}^{3} \{ Y_{\vec{k}j}[\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}j}] +$$

$$+ X_0\Phi_j(\vec{k})\} B_{\vec{k}}\, b_{-\vec{k}j} - \sum_{\vec{k}} \sum_{j=1}^{3} \{ Y^{*}_{\vec{k}j} [\varepsilon_s(\vec{k}) +$$

$$+ \hbar\omega_{\vec{k}j}] + X^{*}_0\, \Phi^{*}_j(\vec{k})\}\, B^{+}_{\vec{k}}\, b^{+}_{-\vec{k}j} \qquad (3.20)$$

Kod hamiltonijana ovakvog oblika (3.17), osnovno stanje H^e_0 nije dobro definisano. Da bi ga stabilisali eliminisaćemo članove linearne po operatorima, tj. H^e_1. Stavićemo da je $\alpha = 0$, pa iz relacije (3.8) sledi:

$$X_0 = \frac{-1}{\varepsilon_s(0)} \sum_{\vec{k}j} \Phi_j(\vec{k}) Y_{\vec{k}j} \qquad (3.21)$$

Prema tome, kada u relaciju (3.18) stavimo da je $\alpha = 0$ i izraz za H_0 (2.11), dobićemo da je:

$$H^e_0 = - \sum_{\vec{k}} [\frac{S^2}{S} cJ_0 + Sg\mu_B H + \frac{S^2}{2} J_0] + \sum_{\vec{k}} \sum_{j=1}^{3} |Y_{\vec{k}j}|^2 \cdot$$

$$\cdot [\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}j}] + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}j} \hbar\omega_{\vec{k}j} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \sum_{j=1}^{3} [X^{*}_0 \Phi^{*}_j(\vec{k}) \cdot$$

$$\cdot\ Y_{\vec{k}j} + X_0\Phi_j(\vec{k}) Y^{*}_{\vec{k}j}]$$

Da bi red kod Vejlovog identiteta što brže konvergirao, funkcije X i Y moraju biti takve da dovedu do konvergencije. Iz tog zahteva sledi drugi uslov:

$$\sum_{j=1}^{3} |Y_{kj}|^2 \ [\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}j}] = \frac{S^2}{2} cJ_0 + Sg\mu_B H \qquad (3.22)$$

Pošto su uslovi (3.21) i (3.22) ispunjeni, hamiltonijan osnovnog stanja će biti:

$$H^e_0 = - \sum_{\vec{k}} \frac{S^2}{2} J_0 + \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}j} \hbar\omega_{\vec{k}j} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{q}j} (X^{*}_0 \Phi^{*}_j(\vec{q}) Y_{\vec{q}j} +$$

$$+ \quad X_0 \Phi_j(\vec{q}) Y^{*}_{\vec{q}j}) \qquad (3.23)$$

Mi ćemo posmatrati samo interakciju magnona sa longitudinalnom granom fonona, i staviti da je:

$$\Phi_j(\vec{q}) = \Phi_\ell(\vec{q})\delta_{j,\ell} \qquad Y_{\vec{k}j} = Y_{\vec{k}\ell}\,\delta_{j,\ell} \qquad (3.24)$$

pa su relacije (3.21) i (3.22) oblika:

$$X_0 = -\frac{1}{\varepsilon_s(0)}\sum_{\vec{k}} Y_{\vec{k}}\Phi_\ell(\vec{k})$$

$$|Y_{\vec{k}}|^2\left[\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}\ell}\right] = \Delta_0 \qquad (3.25)$$

gde je Δ_0 - energija anizotropije:

$$\Delta_0 = \frac{S^2}{2}cJ_0 + g\mu_B H \qquad (3.26)$$

U oblasti magnon-fonon rezonancije, gde je moguća hibridizacija magnonskih i fononskih ekscitacija je:

$$\varepsilon_s(\vec{k}) \approx \hbar\omega_{\vec{k}\ell} \simeq \hbar\omega_D \qquad (3.27)$$

gde je ω_D - Debajeva frekvencija, pa je:

$$|Y_{\vec{k}}|^2 = \frac{\Delta_0}{\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}\ell}} \simeq \frac{\Delta_0}{2\hbar\omega_D} \sim 10^{-2} - 10^{-3}$$

a $Y_{\vec{k}\ell}$ je:

$$Y_{\vec{k}\ell} = \sqrt{\frac{\Delta_0}{\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}\ell}}} \qquad (3.28)$$

Da bi smo izračunali $\Phi_\ell(\vec{q})$ u relaciju (2.18) uvrstićemo $\Delta = (1+c)SJ_0 + g\mu_B H$ i (3.24), a zatim na osnovu (2.7), dobićemo:

$$\Phi_\ell(q) = - i \sqrt{\frac{\hbar}{2Nm\ \omega_{\vec{q}\ell}}} \cdot \vec{q}\ \varepsilon_s(\vec{q}) \qquad (3.29)$$

pošto je $\omega_{\vec{q}\ell} = v_\ell \dot{q}$, gde je v_ℓ - brzina prostiranja longitudinalnog talasa, a q - talasni vektor, možemo pisati da je

$$\Phi_\ell(\vec{q}) = - i \sqrt{\frac{\hbar\ \omega_D}{2Nm\ v_\ell^2}}\ \varepsilon_s(\vec{q}) \qquad (3.30)$$

Za X_0 dato izrazom (3.25) u saglasnosti sa uslovima za magnon-fonon rezonanciju (3.27), kada ubacimo relacije (3.28) i (3.29) dobićemo:

$$X_0 = i\ \frac{\overline{\varepsilon_s(\vec{k})}}{\varepsilon_s(0)} \sqrt{\frac{N\Delta_0}{4m\ v_\ell^2}} \qquad (3.31)$$

gde je $\overline{\varepsilon_s(\vec{k})}$- srednja energija spinskih talasa definisana sa:

$$\sum_{\vec{k}} \varepsilon_s(\vec{k}) = N\overline{\varepsilon_s(\vec{k})} \qquad (3.32)$$

Prema tome, $Y_{\vec{k}\ell}$ je realna veličina, a $\Phi_\ell(\vec{k})$ i X_0 su čisto imaginarne veličine, pa je:

$$X_0 \Phi_\ell(\vec{k}) = X_0^* \ \Phi_\ell^*(\vec{k}) \qquad (3.33)$$

Na osnovu ovih izraza dobićemo da je:

$$X_0\ Y_{\vec{k}\ell}\ \ \Phi_\ell(\vec{k}) \simeq \frac{\Delta_0}{4m\ v_\ell^2} \frac{\overline{\varepsilon_s(\vec{k})}^{\,2}}{\varepsilon_s(0)} \qquad (3.34)$$

što je približno

$$X_0\ Y_{\vec{k}\ell}\ \Phi_\ell(\vec{k}) \simeq \frac{\Delta\hbar\ \omega_D}{4m\ v_\ell^2} \frac{\overline{\varepsilon_s(\vec{k})}}{\varepsilon_s(0)} < 10^{-1}\ \Delta_0 \qquad (3.35)$$

Kada (3.24) i (3.33) uvrstimo u izraz (3.23) biće:

$$H_0^e = -\sum_{\vec{k}} \frac{S^2}{2} J_0 + \frac{1}{2}\sum_{\vec{k}j} \hbar\omega_{\vec{k}j} + \sum_{\vec{k}} X_0 Y_{\vec{k}\ell}\Phi_\ell(\vec{k})$$

Izraz pod prvom sumom ćemo proširiti sa $\pm \frac{S^2}{2} cJ_0$ i $\pm Sg\mu_B H$, i nakon grupisanja članova, kada uzmemo u obzir (2.11) i (3.26) dobićemo za energiju osnovnog stanja ekvivalentnog hamiltonijana:

$$H_0^e = H_0 + \sum_{\vec{k}} \left[\Delta_0 + X_0\, Y_{\vec{k}\ell}\Phi_\ell(\vec{k})\right] \tag{3.36}$$

S obzirom na relaciju (3.35) drugi član pod sumom možemo zanemariti u odnosu na prvi, pa ako iskoristimo relaciju (3.26), dobićemo da je povećanje energije osnovnog stanja ekvivalentnog hamiltonijana

$$\Delta H_0 = \sum_{\vec{k}} \left[\Delta_0 + X_0 Y_{\vec{k}\ell}\Phi_\ell(\vec{k})\right] \simeq \sum_{\vec{k}} \left(\frac{S^2}{2} cJ_0 + Sg\mu_B H\right) \tag{3.37}$$

približno jednako energiji anizotropije (3.26).

Usled toga je hibridizacija metastabilna, dolazi do prigušivanja magnetnoakustičnih talasa, i sistem teži da se vrati u energetski najniže stanje. Vreme života hibridnih ekscitacija u feromagnetiku može se izračunati jer je povećanje energije osnovnog stanja $\Delta E \simeq \Delta_0 = (10^{-15} - 10^{-17})$ erga, pa na osnovu relacije neodredjenosti je:

$$\Delta\tau \simeq \frac{\hbar}{\Delta E} \simeq (10^{-10} - 10^{-12})\,s$$

Ovo vreme se po redu veličine poklapa sa vremenom života ekscitacija u feromagneticima.

Sada ćemo izračunati još neke relacije koje će nam biti potrebne kasnije. Kada uvrstimo (3.30) i (3.31), dobićemo da je:

$$X_0\ \Phi_\ell(\vec{k}) \simeq \sqrt{\frac{\varepsilon_s(\vec{k})}{\varepsilon_s(0)}}\ \sqrt{\frac{\varepsilon_s(\vec{k})}{2m\ v_\ell^2}}\ \sqrt{\frac{\Delta_0\ \hbar\ \omega_D}{2}} \tag{3.38}$$

Ako uzmemo (3.28) i (3.27) dobićemo da je:

$$Y_{\vec{k}\ell}\ [\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}\ell}] = \sqrt{\frac{\Delta_0}{2\hbar\omega_D}[\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}\ell}]} \tag{3.39}$$

Pošto je $m \sim 10^{-22}\,g$, $v_\ell \sim 10^5$ cm/s, mogu se proceniti veličine:

$$X_0\ \Phi_\ell(\vec{k}) \sim 10^{-2}\ \hbar\omega_D;\quad X_0 Y_{\vec{k}\ell}\Phi_\ell(\vec{k}) \sim 10^{-3}\hbar\omega_D \tag{3.40}$$

$$|Y_{\vec{k}\ell}|^2[\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}\ell}] = \Delta_0 \simeq (10^{-2} - 10^{-3})\hbar\omega_D$$

Sada ćemo se vratiti na kvadratni član ekvivalentnog hamiltonijana (3.20) koji će, kada uzmemo u obzir relacije (3.33) i grupišemo članove, imati oblik:

$$\begin{aligned} H_2^e = & \sum_{\vec{k}}\{\varepsilon_s(\vec{k}) + \sum_j [\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}j}]\,|Y_{\vec{k}j}|^2\}\ B^+_{\vec{k}} B_{\vec{k}} - \\ & - \sum_{\vec{k}}\sum_{j=1}^{3} X_0\ \Phi_j(\vec{k})\,(B^+_{\vec{k}}\, b_{\vec{k}j} + b^+_{\vec{k}j}\, B_{\vec{k}}) + \sum_{k}\sum_{j=1}^{3}[\hbar\omega_{\vec{k}j}\ \cdot \\ & \cdot\ \delta_{i,j} + \frac{\Omega_{\vec{k}i} + \Omega_{\vec{k}j}}{2}\ Y_{\vec{k}i}\ Y_{\vec{k}j}]\cdot b^+_{\vec{k}i}\ b_{\vec{k}j} + \sum_{\vec{k}}\sum_{j=1}^{3} X_0\ \cdot \\ & \cdot\ \Phi_j(\vec{k})\ Y_{\vec{k}j}\,(B_{\vec{k}}\ B_{-\vec{k}} + B^+_{\vec{k}}\ B^+_{-\vec{k}}) - \sum_{\vec{k}}\sum_{j=1}^{3}\{Y_{\vec{k}j}[\varepsilon_s(\vec{k}) + \\ & \cdot\ \hbar\omega_{kj}] + X_0\ \Phi_j(\vec{k})\}\cdot B_{\vec{k}}\ b_{-\vec{k}j} + B^+_{\vec{k}}\ b^+_{-\vec{k}j}) \end{aligned}$$

Ako zatim uvrstimo (3.24) i (3.28) i uzmemo u obzir da je

$$X_0\ \Phi_j(\vec{k})\ Y_{\vec{k}\ell} \simeq 0$$

hamiltonijan će biti:

$$H_2^e = \sum_{\vec{k}} \{[\varepsilon_s(\vec{k}) + \Delta_0]\, B_{\vec{k}}^+ B_{\vec{k}} - X_0\Phi_\ell(\vec{k})\,(B_{\vec{k}}^+ b_{\vec{k}\ell} + b_{\vec{k}\ell}^+ B_{\vec{k}}) +$$

$$+ (\hbar\omega_{\vec{k}\ell} + \Delta_0) b_{\vec{k}\ell}^+ b_{\vec{k}\ell} + \hbar\omega_{\vec{k}_2} b_{\vec{k}_2}^+ b_{\vec{k}_2} + \hbar\omega_{k_3} b_{\vec{k}_3}^+ b_{\vec{k}_3} -$$

$$- \left[[\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}\ell}]\sqrt{\frac{\Delta_0}{\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}\ell}}} + X_0\Phi_\ell(\vec{k})\right] \cdot$$

$$\cdot\, (B_{\vec{k}}^+ b_{-\vec{k}\ell}^+ + B_{\vec{k}}\, b_{-\vec{k}\ell})\} \tag{3.41}$$

Kada uvedemo nove oznake za operatore:

$$B_{\vec{k}} = c_1 \qquad b_{\vec{k}\ell} = c_2 \qquad b_{\vec{k}_2} = c_3 \quad b_{\vec{k}_3} = c_4 \tag{3.42}$$

svešćemo hamiltonijan na oblik:

$$H_2^e = \sum_{\vec{k}} H_{\vec{k}} \tag{3.43}$$

gde je:

$$H_{\vec{k}} = \sum_{\alpha\beta=1}^{4} S_{\alpha\beta}\, c_\alpha^+ c_\beta + \sum_{\alpha\beta=1}^{4} (R_{\alpha\beta}\, c_\alpha^+ c_\beta^+ + R_{\alpha\beta}^* \, c_\alpha c_\beta) \tag{3.44}$$

i zadovoljeni su uslovi:

$$S_{\alpha\beta} = S_{\beta\alpha}^* \qquad i \qquad R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha} \tag{3.45}$$

Kada se izraz (3.44) razvije i (3.43) uporedi sa (3.41) dobiće se vrednosti za koeficijente razvoja. Navešćemo samo one koji su različiti od nule:

$$\begin{aligned}
&S_{11} = \varepsilon_s(\vec{k}) + \Delta_0 \qquad S_{22} = \hbar\omega_{\vec{k}\ell} + \Delta_0 \\
&S_{33} = S_{44} = \hbar\omega_{\vec{k}t} \qquad (t = 2,3) \\
&S_{12} = S_{21} = -X_0\Phi_\ell(\vec{k}) \\
&R_{12} = R_{21} = S_{12} - [\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}\ell}]\sqrt{\frac{\Delta_0}{2\hbar\omega_D}}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

Pošto je u oblasti rezonancije:

$$|X_0\Phi_\ell(\vec{k})| \gtrsim [\varepsilon_s(\vec{k}) + \hbar\omega_{\vec{k}\ell}]\sqrt{\frac{\Delta_0}{2\hbar\omega_D}}$$

sledi da je:

$$R_{12} \simeq S_{12}$$

Oblik hamiltonijana (3.43) ćemo dijagonalizovati, prećićemo na nove operatore ξ_μ i ξ_μ^+ koji su takodje boze operatori.

$$C_\alpha(\vec{k}) = \sum_{\mu=1}^{4}[u_{\alpha\mu}\,\xi_\mu(\vec{k}) + v^*_{\alpha\mu}\xi^+_\mu(-\vec{k})] \tag{3.47}$$

pri čemu važe Heisenbergove jednačine:

$$i\hbar\,\frac{dC_\alpha}{dt} = [C_\alpha, H_{\vec{k}}] \qquad i\hbar\,\frac{d\xi_\mu}{dt} = E_\mu\xi_\mu \tag{3.48}$$

Funkcije u i v zadovoljavaju uslove kanoničnosti

$$\sum_\alpha (u_{\alpha\mu}\,u^*_{\alpha\nu} - v_{\alpha\mu}\,v^*_{\alpha\nu}) = \delta_{\mu\nu} \tag{3.49}$$

$$\sum_\mu (u_{\alpha\mu}\,u^*_{\beta\mu} - v_{\beta\mu}\,v^*_{\alpha\mu}) = \delta_{\alpha\beta} \tag{3.50}$$

tako da će hamiltonijan imati dijagonalan oblik:

$$H_{\vec{k}} = \Delta E_0 + \sum_{\mu=1}^{4} E_\mu\,\xi^+_\mu\,\xi_\mu \tag{3.51}$$

gde je:

$$\Delta E_0 = -\sum_{\alpha\mu} E_\mu|v_{\alpha\mu}|^2 \tag{3.52}$$

Funkcije u i v, kao i svojstvene vrednosti energije dobićemo rešavanjem sistema jednačina:

$$E\,u_{\alpha\mu} = \sum_{\beta=1}^{4} S_{\alpha\beta}u_{\beta\mu} + \sum_{\beta=1}^{4} R_{\alpha\beta}v_{\beta\mu}$$

$$\alpha,\mu = 1,2,3,4,\ldots$$

$$-\,E\,v_{\alpha\mu} = \sum_{\beta=1}^{4} S^{*}_{\alpha\beta}v_{\beta\mu} + \sum_{\beta=1}^{4} R^{*}_{\alpha\beta}u_{\beta\mu} \qquad (3.53)$$

koje kada se razviju i kada se uzme u obzir da je $S_{12} = R_{12}$ i $R_{21} = R_{12}$, čine sledeći sistem jednačina:

$$\begin{aligned}
(E - S_{11})u_{1\mu} - S_{12}u_{2\mu} - S_{12}v_{2\mu} &= 0\\
-S_{12}u_{1\mu} + (E - S_{22})u_{2\mu} - S_{12}v_{1\mu} &= 0\\
-S_{12}u_{2\mu} - (E + S^{*}_{11})v_{1\mu} - S_{12}v_{2\mu} &= 0\\
-S_{12}u_{1\mu} - S_{12}v_{1\mu} - (E + S^{*}_{22})v_{2\mu} &= 0
\end{aligned} \qquad (3.54)$$

Da bi ovaj sistem jednačina imao netrivijalna rešenja njegova determinanta mora biti jednaka nuli:

$$\begin{vmatrix}
E - S_{11} & -S_{12} & 0 & -S_{12}\\
-S_{12} & E - S_{22} & -S_{12} & 0\\
0 & -S_{12} & -(E + S_{11}) & -S_{12}\\
-S_{12} & 0 & -S_{12} & -(E + S_{22})
\end{vmatrix} = 0$$

i iz tog uslova ćemo dobiti energije elementarnih ekscitacija koje nastaju kao rezultat metastabilne hibridizacije. Nakon dužeg računa, rešenja koja zadovoljavaju sistem (3.54) su:

$$E_{12} = \frac{1}{2}(S^{2}_{11} + S^{2}_{22}) \pm \sqrt{\frac{1}{4}(S^{2}_{11} - S^{2}_{22})^{2} + 4S^{2}_{12}S_{11}S_{22}} \qquad (3.55)$$

dok su druga dva korena, energije neinteragujućih fonona:

$$E_3 = \hbar\omega_{\vec{k}t} \qquad \text{i} \qquad E_4 = \hbar\omega_{\vec{k}t}$$

Prema tome, imamo samo dve grane hibridnih ekscitacija sa energijama:

$$E_1 = \frac{1}{2}(S_{11}^2 + S_{22}^2) + \sqrt{\frac{1}{4}(S_{11}^2 - S_{22}^2)^2 + 4S_{12}^2 S_{11} S_{22}}$$

$$E_2 = \frac{1}{2}(S_{11}^2 + S_{22}^2) - \sqrt{\frac{1}{4}(S_{11}^2 - S_{22}^2)^2 + 4S_{12}^2 S_{11} S_{22}} \tag{3.56}$$

Za koeficijent S_{12} dat u (3.46) iz izraza (3.38) dobićemo da je:

$$S_{12} = -\sqrt{\frac{\Delta_0}{4mv_\ell^2}}\sqrt{\frac{\hbar\omega_{\vec{k}\ell}}{2mv_\ell^2}}\,\overline{\frac{\varepsilon_s(\vec{k})}{\varepsilon_s(0)}}\cdot\varepsilon_s(\vec{k})$$

i s obzirom da je u oblasti magnon-fonon rezonancije

$$\varepsilon_s(\vec{k}) = \hbar\omega_s(\vec{k}) = \hbar\omega_{\vec{k}\ell}$$

biće:

$$S_{12} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\Delta_0}{2m^2v_\ell^4\hbar\omega_{\vec{k}\ell}}}\,\varepsilon_s(\vec{k})\,\varepsilon_f(\vec{k}) \tag{3.57}$$

jer je u oblasti rezonancije $\overline{(\varepsilon_s(\vec{k}))/(\varepsilon_s(0))} \simeq 1$, a $\hbar\omega_{\vec{k}\ell} = \varepsilon_f(\vec{k})$ je energija elastičnih (fononskih) talasa. Sada ćemo u aproksimaciji najbližih suseda izračunati frekvenciju spinskih talasa $\omega_s(\vec{k})$, pri čemu ćemo uzeti da je Landeov faktor 2, pošto se radi o čisto spinskom magnetizmu. Iz formule (2.7), kada ubacimo (2.8) i stavimo $H_A = 2\mu_B H$ i $J_0 = 6J$, dobićemo

$$\omega_s(\vec{k}) = gM_0(\alpha k^2 + \beta + \frac{H}{M_0}) \tag{3.58}$$

gde je:

$$g = \frac{2\mu_B}{\hbar}\ ;\quad \alpha = \frac{SJa^2}{2\mu_B M_0}\ ;\quad 6ScJ_0 = \beta g\hbar M_0 = 2\beta\mu_B M_0 \tag{3.59}$$

pa na osnovu ovih relacija dobijamo da je energija anizotropije u našoj aproksimaciji iz (3.26) jednaka:

$$\Delta_0 = 2S\,\mu_B M_0\,(\frac{\beta}{2} + \frac{H}{M_0}) \tag{3.60}$$

a M_0 je magnetni moment jedinice zapremine. Kada u izraz (3.57) stavimo da je $m = \rho\Omega_0$ i ubacimo relaciju (3.60), dobićemo da je:

$$S_{12} = -\frac{1}{2}f\sqrt{\frac{gM_0}{\rho v_\ell^2}}\,\varepsilon_s(\vec{k})\sqrt{\varepsilon_f(\vec{k})}$$

gde je

$$f = \sqrt{\frac{S(\frac{\beta}{2}+\frac{H}{M_0})}{2m\,\Omega_0\,v_\ell^2}} \sim 10^4 - 10^5$$

i konačno u oblasti rezonancije je:

$$S_{12} = -\frac{\xi}{2}\sqrt{\varepsilon_s(\vec{k})\ \varepsilon_f(\vec{k})} \qquad (3.61)$$

a

$$\xi = f\sqrt{\frac{gM_0\varepsilon_s(\vec{k})}{\rho\ v_\ell^2}} \simeq f\sqrt{\frac{gM_0\varepsilon_f(\vec{k})}{\rho\ v_\ell^2}} \simeq 10^{-3} - 10^{-5}$$

na osnovu (3.46) u oblasti rezonancije je:

$$S_{11} \simeq \varepsilon_s(\vec{k}) \qquad\qquad S_{22} \simeq \varepsilon_f(\vec{k}) \qquad (3.62)$$

Kada u jednačinu (3.55) ubacimo izraze iz (3.61) i (3.62), dobićemo da su energije elementarnih ekscitacija:

$$E_{1/2} = \frac{1}{2}[\varepsilon_s^2(\vec{k}) + \varepsilon_f^2(\vec{k})] \pm$$

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{[\varepsilon_s^2(\vec{k}) - \varepsilon_f^2(\vec{k})]^2 + 4\xi^2\varepsilon_s^2(\vec{k})\varepsilon_f^2(\vec{k})} \qquad (3.63)$$

U oblasti magnetno-akustične rezonancije je $\omega_s(\vec{k}) = \omega_\ell(\vec{k})$, pa ćemo iz jednačine (3.58), koju ćemo rešiti po k, naći frekvencije pri kojima dolazi do rezonancije. Pošto je $\omega_{\vec{k}\ell} = v_\ell \cdot k$, kada $k \to k_0$, pri slabom spoljašnjem magnetnom polju ($H \ll M_0$) dobićemo kvadratnu jednačinu

$$k_0^2 - \frac{v_\ell}{gM_0\alpha}k_0 + \frac{\beta}{\alpha} = 0$$

čija su rešenja:

$$k_{01} \simeq \frac{\beta g M_0}{v_\ell} \qquad k_{02} \simeq \frac{v_\ell}{g M_0 \alpha}$$

odnosno, rezonantne frekvencije su:

$$\omega_{1_r} \simeq \beta g M_0 \qquad \omega_{2_r} \simeq \frac{v_\ell^2}{g M_0 \alpha}$$

Kada uzmemo za:

$$M_0 \simeq 10^3 \text{ gausa}, \quad v_\ell = 3\cdot 10^5 \text{ cm/s}$$

$$\alpha = \frac{\theta_c}{\alpha_0 M_0} a^2 \simeq 10^{-2} \text{ cm}$$

dobićemo

$$k_{01} \simeq 10^5 \text{ cm}^{-1} \qquad k_{02} \simeq (10^7 - 10^8) \text{ cm}^{-1}$$

odnosno (3.64)

$$\omega_{1_r} \simeq 10^{10} \text{ Hz} \qquad \omega_{2_r} \simeq (10^{12} - 10^{13}) \text{ Hz}$$

Prema tome, do magnetnoakustične rezonancije dolazi u oblasti ultra zvuka (ω_{1_r}) i oblasti hiper zvuka (ω_{2_r}). Nas će interesovati energije elementarnih ekscitacija u oblasti talasnih vektora od nule do okoline prve rezonantne frekvencije (ultra zvuk).

1^0 U okolini nule: $k \to 0$ i $\lim 4\xi^2 \varepsilon_s \varepsilon_f \to 0$, pa je na osnovu (3.63):

$$E_1^2(\vec{k}) = \varepsilon_s^2(\vec{k}) \Rightarrow E_1(\vec{k}) \to \varepsilon_s(\vec{k})$$
$$E_2^2(\vec{k}) = \varepsilon_f^2(\vec{k}) \Rightarrow E_2(\vec{k}) \to \varepsilon_f(\vec{k}) \tag{3.65}$$

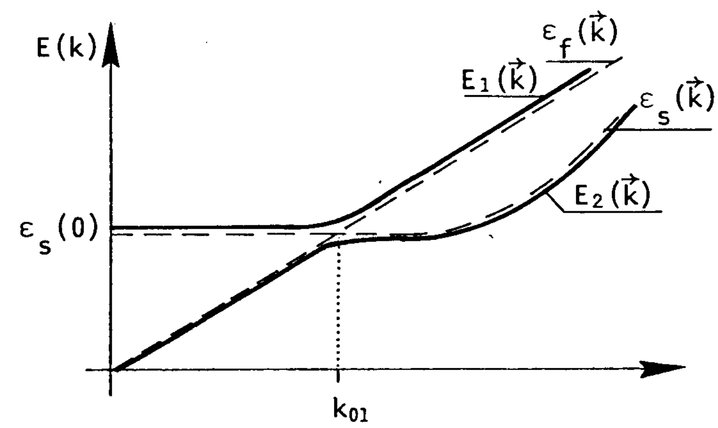
2^0 U oblasti rezonancije je $k \simeq k_{01}$ odnosno $\varepsilon_s(k_0') \simeq \varepsilon_f(k_0)$ i pomoću relacije (3.63) dobićemo, nakon razvoja korena u Tajlorov red

$$E_1(\vec{k}_0) \simeq \varepsilon_s(\vec{k}_0)(1 + \frac{1}{2}\xi)$$
$$E_2(\vec{k}_0) \simeq \varepsilon_f(\vec{k}_0)(1 - \frac{1}{2}\xi) \qquad (3.66)$$

3^0 Za $k > k_{01}$ je $\varepsilon_f > \varepsilon_s$, pa u (3.63) vrednost veličine pod kvadratnim korenom je približno $\varepsilon_f^2(\vec{k}) - \varepsilon_s^2(\vec{k})$, a energije elementarnih ekscitacija su:

$$E_1(\vec{k}) \to \varepsilon_f(\vec{k}) \qquad E_2(\vec{k}) \to \varepsilon_s(\vec{k}) \qquad (3.67)$$

Prema tome, energije elementarnih ekscitacija u feromagnetiku u zavisnosti od talasnog vektora ponašaju se kao na grafiku:



Sada ćemo tražiti izraze za operatore $\xi_{\mu\vec{k}}$, koji su dati inverznim transformacijama u odnosu na (3.47).

$$\xi_{\mu\vec{k}} = \sum_{\alpha=1}^{4} (u^*_{\alpha\mu}\, c_\alpha(\vec{k}) - v^*_{\alpha\mu} c^+_\alpha(-\vec{k})) \qquad \alpha = 1,2,3,4 \qquad (3.68)$$

Za $\mu = 1$ je $E_\mu(\vec{k}) = E_1(\vec{k})$, pa ćemo iz sistema jednačina (3.54) nakon korišćenja relacija (3.62),(3.46), i pošto je $S_{12} \simeq R_{12}$, $R_{21} = R_{12}$ i $S^*_{21} = S_{21}$ dobiti

$$1. \quad (E_1 - \varepsilon_s)u_{11} = S_{12}\,(u_{21} + v_{21})$$

$$\begin{aligned}
&2. \quad (E_1 + \varepsilon_s) v_{11} = - S_{12} (u_{21} + v_{21}) \\
&3. \quad (E_1 - \varepsilon_f) u_{21} = S_{12} (u_{11} + v_{11}) \qquad (3.69) \\
&4. \quad (E_1 + \varepsilon_f) v_{21} = - S_{12} (u_{11} + v_{11})
\end{aligned}$$

Iz prve i druge jednačine dobijamo da je:

$$u_{11} = - \frac{E_1 + \varepsilon_s}{E_1 - \varepsilon_s} v_{11} \qquad (3.70)$$

pa kada ovo uvrstimo u treću, odnosno četvrtu jednačinu, dobićemo:

$$\begin{aligned}
u_{21} &= - \frac{2S_{12} \varepsilon_s}{(E_1 - \varepsilon_s)(E_1 - \varepsilon_f)} v_{11} = \\
&= \frac{2S_{12} \varepsilon_s}{(E_1 - \varepsilon_f)(E_1 + \varepsilon_s)} u_{11} \\
u_{21} &= \frac{2S_{12} \varepsilon_s}{(E_1 - \varepsilon_s)(E_1 + \varepsilon_f)} v_{11} = \qquad (3.71) \\
&= - \frac{2S_{12} \varepsilon_s}{(E_1 + \varepsilon_f)(E_1 + \varepsilon_s)} u_{11}
\end{aligned}$$

Pošto su u i v realne veličine, na osnovu (3.68) i (3.42) je:

$$\xi_{1\vec{k}} = u_{11} B_{\vec{k}} + u_{21} b_{\vec{k}\ell} - v_{11} B^{+}_{\vec{k}} - v_{21} b^{+}_{\vec{k}\ell} \qquad (3.72)$$

jer su ostali koeficijenti (u i v) sistema (3.53) jednaki nuli

$$u_{31} = v_{31} = u_{41} = v_{41} = 0 \qquad (3.73)$$

pa ćemo u i v tražiti po oblastima:

1^0 Kada $k \to 0$, na osnovu (3.65), $E_1(0) \to \varepsilon_s(0)$. Iz uslova (3.49), kada ubacimo relacije (3.71), pošto $S_{12} \to 0$ biće

$$|v_{11}|^2 \simeq \frac{(E_1 - \varepsilon_s)^2}{(E_1 + \varepsilon_s)^2}$$

a zatim, kada to ubacimo u (3.70), dobićemo da je $u_{11} = 1$. S obzirom da je $E_1 - \varepsilon_s << E_1 + \varepsilon_s$, možemo uzeti da je $v_{11} \simeq 0$ a prema (3.71) je $u_{21} \simeq v_{21} \simeq 0$, pa je

$$\xi_{1\vec{k}} \simeq B_{\vec{k}} \qquad (3.74)$$

što znači da imamo čiste magnone.

2^0 U oblasti rezonance, kada u (3.72) uvrstimo (3.70) i uzmemo u obzir da je

$$v_{21} = -\frac{E_1 - \varepsilon_f}{E_1 + \varepsilon_f} u_{21}$$

dobićemo:

$$\xi_{1\vec{k}} = u_{11}\left(B_{\vec{k}} + \frac{E_1 - \varepsilon_s}{E_1 + \varepsilon_s} B^+_{\vec{k}}\right) + u_{21}\left(b_{\vec{k}\ell} + \frac{E_1 - \varepsilon_f}{E_1 + \varepsilon_f} b^+_{\vec{k}\ell}\right)$$

odnosno, pošto je u oblasti rezonancije

$$\frac{E_1 - \varepsilon_s}{E_1 + \varepsilon_s} \simeq \frac{E_1 - \varepsilon_f}{E_1 + \varepsilon_f} << 1 \qquad (3.75)$$

kada umesto u_{21} ubacimo izraz (3.71), dobićemo:

$$\xi_{1\vec{k}} \simeq u_{11}\left(B_{\vec{k}} + \frac{2S_{12}\,\varepsilon_s}{(E_1 - \varepsilon_f)(E_1 + \varepsilon_s)} b_{\vec{k}\ell}\right) \qquad (3.76)$$

i ovde imamo mešavinu magnona i fonona. Funkciju u_{11} ćemo odrediti iz uslova (3.50), gde možemo zanemariti v_{11} i v_{21} na osnovu (3.70), (3.71) i (3.75), a umesto u_{21} unosimo relaciju (3.71), pa je

$$u_{11} = \frac{(E_1 - \varepsilon_f)(E_1 + \varepsilon_s)}{\sqrt{(E_1 - \varepsilon_f)^2 (E_1 + \varepsilon_s)^2 + 4S_{12}^2 \varepsilon_s^2}} \tag{3.77}$$

3^0 Za $k > k_{01}$ prema (3.67), $E_1(\vec{k}) \to \varepsilon_f(\vec{k})$. Od nule je različit samo koeficijent u_{21}, tj. $u_{21} = 1$, pa imamo čiste fonone

$$\xi_{1\vec{k}} \simeq b_{\vec{k}\ell} \tag{3.78}$$

Za $\mu = 2$ iz sistema jednačina (3,54) dobićemo:

$$\begin{aligned}
&1. \quad (E_2 - \varepsilon_s)u_{12} = S_{12}(u_{22} + v_{22}) \\
&2. \quad (E_2 + \varepsilon_s)v_{12} = -S_{12}(u_{22} + v_{22}) \\
&3. \quad (E_2 - \varepsilon_f)u_{22} = S_{12}(u_{12} + v_{12}) \\
&4. \quad (E_2 + \varepsilon_f)v_{22} = -S_{12}(u_{12} + v_{12})
\end{aligned} \tag{3.79}$$

Iz prve i druge, odnosno iz treće i četvrte jednačine sledi:

$$u_{12} = -\frac{E_2 + \varepsilon_s}{E_2 - \varepsilon_s} v_{12} \qquad u_{22} = -\frac{E_2 + \varepsilon_f}{E_2 - \varepsilon_f} v_{22} \tag{3.80}$$

pa iz prve, pdnosno druge dobijamo da je:

$$\begin{aligned}
u_{12} &= -\frac{2S_{12}\varepsilon_f}{(E_2 - \varepsilon_s)(E_2 - \varepsilon_f)} v_{22} \\
v_{12} &= \frac{2S_{12}\varepsilon_f}{(E_2 + \varepsilon_s)(E_2 - \varepsilon_f)} v_{22}
\end{aligned} \tag{3.81}$$

Pošto su koeficijenti:

$$u_{32} = v_{32} = u_{42} = v_{42} = 0 \tag{3.82}$$

biće na osnovu relacije (3.68):

$$\xi_{2\vec{k}} = u_{12} B_{\vec{k}} + u_{22} b_{\vec{k}\ell} - v_{12} B^{+}_{\vec{k}} - v_{22} b^{+}_{\vec{k}\ell} \tag{3.83}$$

1^0 Kada $k \to 0$, prema (3.65) $E_2 \to \varepsilon_f$ pošto $S_{12} \to 0$, iz uslova (3.50) sledi da je:

$$|v_{22}|^2 \simeq \frac{(E_2 - \varepsilon_f)^2}{(E_2 + \varepsilon_f)^2}$$

pa kada to uvrstimo u drugu jednačinu (3.80), dobićemo da je $u_{22} \simeq 1$. Pošto je $E_2 + \varepsilon_f >> E_2 - \varepsilon_f$, i na osnovu (3.81) dobijamo za ostale koeficijente

$$v_{22} \simeq u_{12} \simeq v_{12} \simeq 0$$

te prema tome za male talasne vektore imamo čiste fonone, jer je:

$$\xi_{2\vec{k}} \simeq b_{\vec{k}} \tag{3.84}$$

2^0 U oblasti rezonance, kada uzmemo u obzir (3.80) i

$$v_{12} = - \frac{E_2 - \varepsilon_s}{E_2 + \varepsilon_s} u_{12}$$

za $\xi_{2\vec{k}}$ dobićemo iz (3.83)

$$\xi_{2\vec{k}} = u_{12} (B_{\vec{k}} + \frac{E_2 - \varepsilon_s}{E_2 + \varepsilon_s} B^{+}_{\vec{k}}) + u_{22} (b_{\vec{k}\ell} + \frac{E_2 - \varepsilon_f}{E_2 + \varepsilon_f} b^{+}_{\vec{k}\ell})$$

i pošto u oblasti rezonancije važi (3.75), imaćemo

$$\xi_{2\vec{k}} \simeq u_{22}\,(b_{\vec{k}\ell} + \frac{2S_{12}\ \varepsilon_f}{(E_2 - \varepsilon_s)(E_2 + \varepsilon_f)}\, B_{\vec{k}}) \tag{3.85}$$

a to je mešavina magnona i fonona.

3^0 Za $k > k_{01}$ je $E_2 \sim \varepsilon_s$, pa pošto je samo u_{12} različito od nule, $u_{12} = 1$, imaćemo čiste magnone:

$$\xi_{2\vec{k}} \simeq B_{\vec{k}} \tag{3.86}$$

Za $\mu = 3$ u izrazu (3.68) je $u_{33} = 1$, a svi ostali koeficijenti su približno jednaki nuli, pa je:

$$\xi_{3\vec{k}} \simeq b_{\vec{k}t_1} \tag{3.87}$$

Za $\mu = 4$ je u (3.68) $u_{44} = 1$, dok su ostali koeficijenti nula, pa je:

$$\xi_{4\vec{k}} \simeq b_{\vec{k}t_2} \tag{3.88}$$

Ove dve grane odgovaraju transverzalnim fononima čiju interakciju sa magnonima mi ne posmatramo.

Nas će interesovati samo $\xi_{1\vec{k}}$ i $\xi_{2\vec{k}}$ u oblasti rezonancije, i pošto je

$$\frac{2S_{11}\,\varepsilon_s(\vec{k}_0)}{\xi\varepsilon_s(\vec{k}_0)\,2\varepsilon_f(\vec{k}_0)} \simeq \frac{1}{2} \tag{3.89}$$

biće

$$\xi_{1\vec{k}} \simeq u_{11}\,(B_{\vec{k}} - \tfrac{1}{2}b_{\vec{k}\ell}) \qquad \xi_{2\vec{k}} \simeq u_{22}\,(b_{\vec{k}} + \tfrac{1}{2}\,B_{\vec{k}}) \tag{3.90}$$

Koristeći uslove (3.50) i (3.89) u ovoj oblasti ćemo dobiti:

$$u_{11} = 2/\sqrt{5};\quad u_{22} = 2/\sqrt{5};\quad u_{21} = -\,1/\sqrt{5};\quad u_{12} = 1/\sqrt{5} \tag{3.91}$$

Prema tome, kada uzmemo u obzir relacije (3.47) i (3.42), za magnonski, odnosno fononski operator ćemo dobiti:

$$B_{\vec{k}} \simeq u_{11}\,\xi_{1\vec{k}} + u_{12}\,\xi_{2\vec{k}}$$
$$b_{\vec{k}\ell} \simeq u_{21}\,\xi_{1\vec{k}} + u_{22}\,\xi_{2\vec{k}} \tag{3.92}$$

a kada uvrstimo koeficijente iz (3.91), biće:

$$B_{\vec{k}} \simeq \frac{2}{\sqrt{5}}(\xi_{1\vec{k}} + \frac{1}{2}\xi_{2\vec{k}})$$
$$b_{\vec{k}\ell} \simeq \frac{2}{\sqrt{5}}(-\frac{1}{2}\xi_{1\vec{k}} + \xi_{2\vec{k}}) \tag{3.93}$$

Prema izloženom u ovom delu, vidimo da je moguć proces stvaranja hibridnih ekscitacija kod feromagnetika, da se to dešava u oblasti magnetnoakustične rezonancije i u narednom delu ovog rada ćemo pokušati da nadjemo oblik tenzora koji vrši pretvaranje mehaničke energije u magnetnu i obrnuto.

4. MAGNETNOMEHANIČKI TENZOR

4.1. LINEARNI ODZIV SISTEMA

Izračunavanje neravnotežne srednje vrednosti dinamičke varijable

$$\hat{F}(t) = \sum_{\vec{n}} f_{\vec{n}}(t)$$

vrši se pomoću relacije

$$\langle \hat{F}(t) \rangle_{n.eq.} = \langle \hat{S}^{-1}(t) F(t) S(t) \rangle_0$$

S matrica je oblika:

$$\hat{S}(t) = \hat{T}\, e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t} H_{int}(t')dt'}$$

gde je $H_{int}(t')$ - hamiltonijan spoljašnje perturbacije, a $\hat{T}$ - Dajsonov hronološki operator. Oblik hamiltonijana spoljašnje perturbacije koji ćemo koristiti je:

$$H_{int}(t') = \sum_{\vec{n}'} \hat{B}(\vec{n}', t')\ \varepsilon(\vec{n}', t') \qquad (4.1)$$

gde je $\hat{B}$ - operator neke dinamičke varijable B, a funkcije $\varepsilon(\vec{n}', t')$ nisu operatori i često ih nazivamo c-brojevima.

S obzirom da S-matrica predstavlja beskonačan operatorski red, mi ćemo računati neravnotežne srednje vrednosti dinamičkih varijabli u linearnoj aproksimaciji, ili kako se to kaže: u aproksimaciji linearnog odziva.

$$\langle\hat{F}(t)\rangle_{n.eq.} = \langle\hat{F}\rangle_o + \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{t}\langle\langle\hat{F}(t)|H_{int}(t')\rangle\rangle dt'$$

gde je $\langle F\rangle_0$ ravnotežna vrednost operatora $\hat{F}$ u reprezentaciji interakcije, a drugi član je linearni odziv sistema na spoljašnju perturbaciju i predstavlja popravku na ravnotežnu vrednost usled neravnotežnih procesa. Kada ubacimo izraz (4.1) za hamiltonijan spoljašnje perturbacije i za F(t) dobićemo:

$$\langle\hat{F}(t)\rangle_{n.eq.} = \sum_{\vec{n}}\langle f_{\vec{n}}(t)\rangle_o + \frac{1}{i\hbar}\sum_{\vec{n}\vec{n}'}\int_{-\infty}^{t}\langle\langle\hat{f}_{\vec{n}}(t)|$$

$$\cdot\left[\hat{B}(\vec{n}', t')\rangle\rangle\, \varepsilon(\vec{n}', t')\, dt' \qquad (4.2)$$

gde je dvovremenska temperaturska retardovana Grinova funkcija data sa:

$$G(\vec{n},\vec{n}'; t,t') \equiv \langle\langle f_{\vec{n}}(t)|B_{\vec{n}'}(t')\rangle\rangle =$$

$$= \Theta(t-t')\langle\left[f_{\vec{n}}(t), B_{\vec{n}'}(t')\right]\rangle \qquad (4.3)$$

4.2. MAGNETNOMEHANIČKI TENZOR

S obzirom da je nastajanje magnetnoakustične rezonancije vezano za neravnotežan statistički proces, da bi našli srednju promenu operatora pomeranja $\hat{r}^{\alpha}_{\vec{n}}(t)$, koristićemo se aproksimacijom linearnog odziva, i ona je prema (4.2) data sa:

$$< \hat{r}^{\alpha}_{\vec{n}}(t) >_{n.eq.} - < \hat{r}^{\alpha}_{\vec{n}}(t) >_{o} = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \ll \hat{r}^{\alpha}_{\vec{n}}(t) |$$

$$\cdot | \hat{H}_{int}(t') \gg dt' \qquad (4.4)$$

pri čemu su hamiltonijan spoljašnje perturbacije i operator pomeranja:

$$H_{int}(t') = - 2\mu_0 \sum_{\vec{n}'\beta} S^{\beta}_{\vec{n}'}(t')\, h^{\beta}_{\vec{n}'}(t') \qquad (4.5)$$

$$r^{\alpha}_{\vec{n}}(t) = \sum_{\vec{k}j} \sqrt{\frac{\hbar}{2mNv_{jk}}}\, e^{\alpha}_{j}(\vec{k})\, [b_j(\vec{k},t) + b^{+}_{j}(-\vec{k},t)] \cdot$$

$$\cdot e^{i\vec{k}\vec{n}} \qquad (4.6)$$

gde je: $S^{\beta}_{\vec{n}'}(t')$ - operator spina, $e^{\alpha}_{j}(\vec{k})$ - vektor polarizacije j-te grane, $b^{+}_{j}(-\vec{k},t)$ - operator kreacije fonona j-te grane, $b_j(\vec{k},t)$ - operator anihilacije fonona.

Nakon Furije transformacije

$$r^{\alpha}_{\vec{n}}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{\vec{n}} \int_{-\infty}^{\infty} dt\, r^{\alpha}_{\vec{n}}(t)\, e^{-i\vec{k}\vec{n} + i\omega t}$$

izraz (4.4) biće:

$$<r^{\alpha}(\vec{k},\omega)>_{n.eq.} - <r^{\alpha}(\vec{k},\omega)>_{o} = \frac{1}{2\pi i\hbar N} \sum_{\vec{n}} e^{-i\vec{k}\vec{n}} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \ll r^{\alpha}_{\vec{n}}(t) |\, H_{int}(t') \gg$$

$$(4.7)$$

pa ako uzmemo u obzir relaciju (4.5) i (4.6) i izraz za operatore spinova:

$$S^{\beta}_{\vec{n}'}(t') = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{q}} S^{\beta}_{\vec{q}}(t')\, e^{i\vec{q}\vec{n}'} \qquad (4.8)$$

Za srednju promenu operatora pomeranja dobićemo:

$$<r^{\alpha}(\vec{k},\omega)>_{n.eq.} - <r^{\alpha}(\vec{k},\omega)>_{o} = -\frac{\mu_0}{\pi i\hbar N^2}\sum_{\vec{k}\vec{k}'\vec{q}\beta j}\sqrt{\frac{\hbar}{2mv_j k'}}\cdot$$

$$\cdot\, e_j^{\alpha}(\vec{k}')\int_{-\infty}^{\infty}dt\, e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{\vec{n}\vec{n}'} h_{\vec{n}'}^{\beta}(t')\, e^{i\vec{n}(\vec{k}'-\vec{k})+i\vec{q}\vec{n}'}\cdot$$

$$\cdot <<[b_j(\vec{k}',t)+b_j^{+}(-\vec{k}',t)]\,|\,S_{\vec{q}}^{\beta}(t')>> dt'$$

odnosno, uz relaciju (4.3)

$$\Gamma_{\beta}(\vec{k},\vec{q};\, t-t') = <<[b_j(\vec{k},t)+b_j^{+}(-\vec{k},t)]\,|\,S_{\vec{q}}^{\beta}(t')>>$$

i izraze za c-brojeve

$$h^{\beta}(\vec{q},t') = \frac{1}{N}\sum_{\vec{n}'} h_{\vec{n}'}^{\beta}(t)\, e^{-i\vec{q}\vec{n}'}$$

$$h^{\beta}(-\vec{q},t') = \frac{1}{N}\sum_{\vec{n}'} h_{\vec{n}'}^{\beta}(t')\, e^{i\vec{q}\vec{n}'} \qquad (4.9)$$

dobićemo:

$$<r^{\alpha}(k,\omega)>_{n.eq.} - <r^{\alpha}(\vec{k},\omega)>_{o} = \frac{i\mu_0}{\pi}\sum_{\beta\vec{q}j}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega_{\vec{k}j}}}\cdot$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}dte^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}e_j^{\alpha}(\vec{k})\Gamma_{\beta}(\vec{k},\vec{q};t-t')\, h^{\beta}(-\vec{q},t')dt'$$

i s obzirom da posmatramo interakciju sa longitudinalnim fononima otpašće suma po "j" i nakon zamene $\vec{q}$ sa $-\vec{k}$, za srednju promenu operatora pomeranja dobićemo:

$$<r^{\alpha}(\vec{k},\omega)>_{n.eq} - <r^{\alpha}(\vec{k},\omega)>_{o} = 2i\mu_0\sum_{\beta}\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega_{\vec{k}\ell}}}\cdot$$

$$\cdot\, e_{\vec{k}}^{\alpha}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}dt\, e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_{\beta}(\vec{k},t-t')h^{\beta}(\vec{k},t')dt' \qquad (4.10)$$

gde je Grinova funkcija

$$\Gamma_\beta(\vec{k},t-t') = \langle\langle [b_{\vec{k}}(t) + b^+_{-\vec{k}}(t)] \mid S^\beta_{-\vec{k}}(t')\rangle\rangle \tag{4.11}$$

Prvo ćemo izračunati ubacivanjem smene $t-t' = u$ integral

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_\beta(\vec{k},t-t')\, h^\beta(\vec{k},t')dt' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt' \cdot$$

$$\cdot\, e^{i\omega t'}\, h^\beta(\vec{k},t')\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_\beta(\vec{k},u)du\, e^{i\omega u} =$$

$$= 2\pi\Gamma_\beta(\vec{k},\omega)\; h^\beta(\vec{k},\omega)$$

gde je

$$\Gamma_\beta(\vec{k},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\Gamma_\beta(\vec{k},u)\; e^{i\omega u}$$

$$h^\beta(\vec{k},\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h^\beta(\vec{k},t')\; e^{i\omega t'} dt' \tag{4.12}$$

pa kada u (4.10) uvrstimo vrednost integrala, za srednju promenu operatora pomeranja dobićemo:

$$\langle r^\alpha(\vec{k},\omega)\rangle_{n.eq.} - \langle r^\alpha(\vec{k},\omega)\rangle_0 = \hat{R}(\vec{k},\omega)\;\vec{h}(\vec{k},\omega) \tag{4.13}$$

gde su komponente tenzora $\hat{R}(\vec{k},\omega)$ date sa

$$R_{\alpha\beta}(\vec{k},\omega) = 4\pi i\mu_0\sqrt{\frac{1}{2m\hbar\omega_{\vec{k}\ell}}}\; e^\alpha_{\vec{k}}\;\Gamma_\beta(\vec{k},\omega) \tag{4.14}$$

Pošto je $\Gamma_z(\vec{k},\omega) = 0$ sledi da je $R_{\alpha z}(k,\omega) = 0$ za svako α pa je u matričnom obliku tenzor $\hat{R}(\vec{k},\omega)$ dat:

$$\hat{R}(\vec{k},\omega) = \begin{bmatrix} R_{xx} & R_{xy} & 0 \\ R_{yx} & R_{yy} & 0 \\ R_{zx} & R_{zy} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.15}$$

$$\Gamma_x(\vec{k},\omega) = \sqrt{\frac{S}{2}}[u_{11}\,u_{21}\,(<<\xi_{1\vec{k}}|\xi^{+}_{1\vec{k}}>> +$$

$$+ <<\xi^{+}_{1-\vec{k}}|\ \xi_{1-\vec{k}}>>) + u_{22}\,u_{12}(<<\xi_{2\vec{k}}|\xi^{+}_{2\vec{k}}>> +$$

$$+ <<\xi^{+}_{2-\vec{k}}|\xi_{2-\vec{k}}>>)] \qquad (4.18)$$

pri čemu su Grinove funkcije date relacijama:

$$G_{\nu\vec{k}}(E) = <<\xi_{\nu\vec{k}}|\xi^{+}_{\nu\vec{k}}>>_E$$

$$G^{+}_{\nu-\vec{k}}(E) = <<\xi^{+}_{\nu-\vec{k}}|\ \xi_{\nu-\vec{k}}>>_E \qquad (\nu = 1,2)$$

$$(4.19)$$

i njih ćemo izračunati preko jednačina:

$$1.\quad EG_{\nu\vec{k}}(E) = \frac{i}{2\pi} + <<[\xi_{\nu\vec{k}},H]|\ \xi^{+}_{\nu\vec{k}}>>$$

$$(4.20)$$

$$2.\quad EG^{+}_{\nu-\vec{k}}(E) = -\frac{i}{2\pi} - <<\xi^{+}_{\nu-\vec{k}}|[\xi_{\nu-\vec{k}},H]>>$$

Kada uvrstimo hamiltonijan (3.51), izračunamo komutatore i iskoristimo (4.19), dobićemo iz prve jednačine da je:

$$G_{\nu\vec{k}}(E) = \frac{i}{2\pi}\,\frac{1}{E - E_\nu(\vec{k})} \qquad (4.21)$$

a iz druge:

$$G^{+}_{\nu-\vec{k}}(E) = -\frac{i}{2\pi}\,\frac{1}{E + E_\nu(\vec{k})} = G^{+}_{\nu\vec{k}}(E) \qquad (4.22)$$

pošto je $E_\mu(\vec{k}) = E_\mu(-\vec{k})$.

Kada u jednačinu (4.18) zamenimo Grinove funkcije iz (4.19) i uzmemo u obzir (4.22), dobićemo:

$$\Gamma_x(\vec{k},E) = \sqrt{\frac{S}{2}}\{u_{11}\,u_{21}\,[G_1(\vec{k},E)+G^{+}_1(\vec{k},E)] + u_{22}\,u_{12}[G_2(\vec{k},E) +$$
$$+ G^{+}_2(\vec{k},E)]\} \qquad (4.23)$$

Na sličan način ćemo izračunati $G_y(\vec{k},E)$ iz relacije (4.17), pa je:

$$\Gamma_y(\vec{k},\omega) = \langle\langle (b_{\vec{k}} + b^+_{-\vec{k}}) \mid S^y_{-\vec{k}} \rangle\rangle_\omega$$

Kada uvrstimo relacije (3.92) i (4.16), biće:

$$\Gamma_y(\vec{k},\omega) = i\sqrt{\frac{S}{2}}\,[u_{11}\,u_{21}\,(\langle\langle \xi_{1\vec{k}} \mid \xi^+_{1\vec{k}} \rangle\rangle - \langle\langle \xi^+_{1-\vec{k}} \mid \xi_{1-\vec{k}} \rangle\rangle) + u_{22}\,u_{12}\,(\langle\langle \xi_{2\vec{k}} \mid \xi^+_{2\vec{k}} \rangle\rangle - \langle\langle \xi^+_{2-\vec{k}} \mid \xi_{2-\vec{k}} \rangle\rangle)] \quad (4.24)$$

a zatim ubacimo relacije (4.19) uz relaciju (4.22); dobićemo:

$$\Gamma_y(\vec{k},E) = i\sqrt{\frac{S}{2}}\,\{u_{11}\,u_{21}\,[G_1(\vec{k},E) - G^+_1(\vec{k},E)] + u_{22}\,u_{12}\,[G_2(\vec{k},E) - G^+_2(\vec{k},E)]\} \quad (4.25)$$

Za $\Gamma_z(\vec{k},\omega)$ iz (4.17) na osnovu

$$S^z_{\vec{k}} = S - \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}_1} B^+_{\vec{k}+\vec{k}_1} B_{\vec{k}_1}$$

sledi da je

$$\Gamma_z(\vec{k},E) = 0 \quad (4.26)$$

Na osnovu (4.26) u relaciji (4.14) je $R_{\alpha z} = 0$, a to znači da kada je promenljivo magnetno polje H usmereno u pravcu z-ose u kristalu se ne pobudjuju zvučne oscilacije.

Postupkom koji je korišćen pri izračunavanju srednje promene operatora pomeranja odredićemo visokofrekventnu magnetnu susceptibilnost kristala, odnosno srednju promenu magnetnog momenta u zavisnosti od promenljivog spoljašnjeg magnetnog polja. Magnetni moment po jedinici zapremine kristala je:

$$\vec{m}(\vec{n},t) = \frac{2\mu_0}{\Omega_0} \vec{S}_{\vec{n}}(t) \tag{4.27}$$

a komponente

$$m^{\alpha}(\vec{n},t) = \frac{2\mu_0}{\Omega_0} \vec{S}^{\alpha}_{\vec{n}}(t)$$

U aproksimaciji linearnog odziva srednja promena magnetnog momenta, kada uzmemo u obzir relacije (4.2) i (4.27) je:

$$\langle m^{\alpha}(\vec{n},t)\rangle_{n.eq.} - \langle m^{\alpha}(\vec{n},t)\rangle_{0} = \frac{2\mu_0}{i\hbar\Omega_0} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} \langle\langle S^{\alpha}_{\vec{n}}(t) \mid H_{int}(t')\rangle\rangle \, dt' \tag{4.28}$$

Kada u ovaj izraz stavimo relaciju za $S^{\alpha}_{\vec{n}}(t)$ (4.8) i $H_{int}(t')$ (4.5), dobićemo uz korišćenje (4.9):

$$\langle m^{\alpha}(\vec{n},t)\rangle_{n.eq.} - \langle m^{\alpha}(\vec{n},t)\rangle_{0} = \frac{4\mu_0^2 i}{\hbar\Omega_0 N} \cdot \sum_{\vec{k}\vec{q}\vec{n}'\beta} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\vec{k}\vec{n} + i\vec{q}\vec{n}'} h^{\beta}_{\vec{n}'}(t') \langle\langle S^{\alpha}_{\vec{k}} | S^{\beta}_{\vec{q}} \rangle\rangle \, dt'$$

pa kada izvršimo Furije transformacije

$$m^{\alpha}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{2\pi N} \sum_{\vec{n}} \int_{-\infty}^{\infty} dt \; m^{\alpha}(\vec{n},t) \, e^{-i\vec{k}\vec{n} + i\omega t}$$

i predjemo sa $-\vec{q}$ na $\vec{k}$, dobićemo:

$$\langle m^{\alpha}(\vec{k},\omega)\rangle_{n.eq.} - \langle m^{\alpha}(\vec{k},\omega)\rangle_{0} = \frac{4\mu_0^2 i}{\hbar\,\Omega_0} \sum_{\beta} \frac{1}{2\pi} \cdot$$

$$\cdot \int_{-\infty}^{\infty} dt \; e^{i\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} D_{\alpha\beta}(\vec{k},t-t') \, h(\vec{k},t') dt' \tag{4.29}$$

gde su Grinove funkcije oblika:

$$D_{\alpha\beta}(\vec{k},t-t') = \langle\langle S^{\alpha}_{\vec{k}}(t) \mid S^{\beta}_{-\vec{k}}(t') \rangle\rangle \tag{4.30}$$

Vrednost integrala ćemo izračunati uz korišćenje smene $t-t'= u$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{i\omega t}\int_{-\infty}^{\infty} D_{\alpha\beta}(\vec{k},t-t')\, h(\vec{k},t') =$$

$$= 2\pi\, D_{\alpha\beta}(\vec{k},\omega)\; h(\vec{k},\omega)$$

gde je

$$\begin{aligned} D_{\alpha\beta}(\vec{k},\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} D_{\alpha\beta}(\vec{k},u)\, e^{i\omega u}\, du \\ h(\vec{k},\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(\vec{k},t')\, e^{i\omega t'}\, dt' \end{aligned} \tag{4.31}$$

pa je srednja promena magnetnog momenta:

$$\langle m^{\alpha}(\vec{k},\omega)\rangle_{n.eq.} - \langle m^{\alpha}(\vec{k},\omega)\rangle_{o} = \hat{\chi}(\vec{k},\omega)\; \vec{h}(\vec{k},\omega) \tag{4.32}$$

gde su komponente tenzora magnetne susceptibilnosti date:

$$\chi_{\alpha\beta}(\vec{k},\omega) = \frac{8i\pi\mu_0^2}{\hbar\Omega_0} D_{\alpha\beta}(\vec{k},\omega) \tag{4.33}$$

a Grinova funkcija:

$$D_{\alpha\beta}(\vec{k},\omega) = \langle\langle S^{\alpha}_{\vec{k}} \mid S^{\beta}_{-\vec{k}} \rangle\rangle_{\omega} \tag{4.34}$$

Pošto je ravnotežna vrednost magnetnog momenta različita od nule samo u pravcu z-ose:

$$\langle m^{z}(\vec{k},\omega)\rangle_{o} = \chi_{st} h^{z}$$

to će srednja promena magnetnog momenta za $\alpha,\beta = x,y$ biti:

$$<m(\vec{k},\omega)>_{n.eq.} = \hat{\chi}(\vec{k},\omega)\ \vec{h}(\vec{k},\omega)$$

gde su koeficijenti tenzora magnetne susceptibilnosti dati relacijom (4.33), a u matričnom obliku

$$\hat{\chi}(\vec{k},\omega) = \begin{bmatrix} \chi_{xx} & \chi_{xy} & 0 \\ \chi_{yx} & \chi_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \chi_{st} \end{bmatrix} \tag{4.35}$$

Relacije za Grinove funkcije (4.34) izračunaćemo korišćenjem (4.16):

$$\langle\langle S^x_{\vec{k}} \mid S^x_{-\vec{k}} \rangle\rangle = \langle\langle S^y_{\vec{k}} \mid S^y_{-\vec{k}} \rangle\rangle = \frac{S}{2}\ [\langle\langle B_{\vec{k}} \mid B^+_{\vec{k}} \rangle\rangle + \\ + \langle\langle B^+_{-\vec{k}} \mid B_{-\vec{k}} \rangle\rangle] \tag{4.36}$$

$$\langle\langle S^x_{\vec{k}} \mid S^y_{-\vec{k}} \rangle\rangle = - \langle\langle S^y_{\vec{k}} \mid S^x_{-\vec{k}} \rangle\rangle = - \frac{S}{2i} \cdot \\ \cdot [\langle\langle B_{\vec{k}} \mid B^+_{\vec{k}} \rangle\rangle - \langle\langle B^+_{-\vec{k}} \mid B_{-\vec{k}} \rangle\rangle]$$

u oblasti rezonancije je $B_{\vec{k}}$ dato sa (3.92), pa je:

$$\langle\langle B_{\vec{k}} \mid B^+_{\vec{k}} \rangle\rangle = u^2_{11} \langle\langle \xi_{1\vec{k}} | \xi^+_{1k} \rangle\rangle + u^2_{12} \langle\langle \xi_{2k} | \xi^+_{2k} \rangle\rangle \tag{4.37}$$

$$\langle\langle B^+_{-\vec{k}} \mid B_{-\vec{k}} \rangle\rangle = u^2_{11} \langle\langle \xi^+_{1-\vec{k}} \mid \xi_{1-\vec{k}} \rangle\rangle + \\ + u^2_{12} \langle\langle \xi^+_{q-\vec{k}} \mid \xi_{2-k} \rangle\rangle$$

a Grinove funkcije iz ove relacije mogu se naći pomoću relacija (4.19), (4.21) i (4.22).

Potražićemo vezu izmedju operatora pomeranja atoma i njegovog magnetnog momenta. Iz relacija (4.13) i (4.32) sledi:

$$< \vec{r}(\vec{k},\omega) > \; = \; \hat{R}(\vec{k},\omega)\; \vec{h}(\vec{k},\omega)$$
$$< \vec{m}(\vec{k},\omega) > \; = \; \hat{\chi}(\vec{k},\omega)\; \vec{h}(\vec{k},\omega) \qquad (4.38)$$

gde su tenzori $\hat{R}(\vec{k},\omega)$ i $\hat{\chi}(\vec{k},\omega)$ dati relacijama (4.15) i (4.35). Iz druge jednačine je:

$$\vec{h}(\vec{k},\omega) = \hat{\chi}^{-1}(\vec{k},\omega) < \vec{m}(\vec{k},\omega) >$$

pa kada to ubacimo u prvu, dobićemo:

$$<\vec{r}(\vec{k},\omega) > \; = \; \hat{Q}(\vec{k},\omega) < \vec{m}(\vec{k},\omega) > \qquad (4.39)$$

gde je $\hat{Q}(\vec{k},\omega)$ tenzor koji povezuje pomeranje atoma sa magnetnim momentom atoma, i mi ćemo naći njegov oblik u matričnom zapisu:

$$\hat{Q}(\vec{k},\omega) = \hat{R}(\vec{k},\omega)\; \hat{\chi}^{-1}(\vec{k},\omega) \qquad (4.40)$$

Iz matrične jednačine $\hat{\chi}\cdot\hat{\chi}^{-1} = \hat{I}$ gde je $\hat{I}$ jedinični tenzor, a $\hat{\chi}^{-1}(\vec{k},\omega) = \{\alpha_{ij}\}$ kada dobijeni sistem jednačina rešimo po α_{ij}, dobićemo koeficijente inverznog tenzora.

$$\hat{\chi}^{-1}(\vec{k},\omega) = \begin{bmatrix} \frac{\chi_{yy}}{D} & -\frac{\chi_{xy}}{D} & 0 \\ -\frac{\chi_{yx}}{D} & \frac{\chi_{xx}}{D} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\chi_{st}} \end{bmatrix} \qquad (4.41)$$

gde je $D = \chi_{xx}\,\chi_{yy} - \chi_{xy}\chi_{yx}$, a komponente $\chi_{\alpha\beta}(\vec{k},\omega)$ su date relacijama (4.33). Kada izmnožimo tenzore u relaciji (4.40) date sa (4.15) i (4.41), dobićemo:

$$\vec{Q}(\vec{k},\omega) = \begin{bmatrix} \dfrac{\chi_{yy}R_{xx} - \chi_{yx}R_{xy}}{D} & \dfrac{\chi_{xx}R_{xy} - \chi_{xy}R_{xx}}{D} & 0 \\ \dfrac{\chi_{yy}R_{yx} - \chi_{yx}R_{yy}}{D} & \dfrac{\chi_{xx}R_{yy} - \chi_{xy}R_{yx}}{D} & 0 \\ \dfrac{\chi_{yy}R_{zx} - \chi_{yx}R_{zy}}{D} & \dfrac{\chi_{xx}R_{zy} - \chi_{xy}R_{zx}}{D} & 0 \end{bmatrix} \tag{4.42}$$

gde su koeficijenti $R_{\alpha\beta}(\vec{k},\omega)$ dati relacijama (4.14).

Ovaj tenzor zvaćemo magnetnomehaničkim tenzorom i on povezuje mehanička svojstva feromagnetika sa magnetnim. Drugim rečima, magnetnomehanički tenzor vrši pretvaranje mehaničke energije u magnetnu, i obrnuto.

5. ZAKLJUČAK

Osnovne rezultate ovog rada možemo ukratko rezimirati na sledeći način:

- Vejlovom unitarnom transformacijom [4] dobili smo hamiltonijan magnon-fonon interakcije u obliku kvadratne forme po magnonskim i fononskim operatorima.

- Dijagonalizacijom tog hamiltonijana dobili smo spektar hibridnih ekscitacija u feromagnetiku, koje predstavljaju kvante magnetnoakustičnih talasa.

- Zahvaljujući hibridizaciji definisali smo magnetnoakustični tenzor, koji povezuje vektor magnetnog momenta sistema sa vektorom pomeranja atoma, i karakteriše pretvaranje magnetne u mehaničku energiju.

- Koeficijente magnetnomehaničkog tenzora dobili smo preko Grinovih funkcija [2].

- Kao što smo pokazali do magnetnoakustične rezonancije dolazi u oblasti ultra i hiper zvuka [3], te se ova pojava može koristiti za konstrukciju generatora ultra i hiper zvuka.

6. L I T E R A T U R A

1. **Charles Kittel:**
Uvod u fiziku čvrstog stanja, Izd. "Savremena administracija", Beograd 1970.

2. **Bratislav Tošić:**
Statistička fizika, Izd. "Institut za fiziku PMF-a", Novi Sad 1978.

3. А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский:
Спиновые волный , Изд. "Наука", Москва 1967.

4. **Vuca Petar:**
Diplomski rad, PMF Novi Sad 1977.