Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet
Institut za fiziku

# Hamiltonijan Hajzenbergovog modela feromagneta sa bikvadratnom interakcijom u reprezentaciji Glauberovih koherentnih stanja

- diplomski rad -

Ilija Arsenic

mentor: Dr. Darko Kapor

Novi Sad, novembar, Leta Gospodnjeg 1993.

# Sadržaj

# Uvod

Krajnji cilj ovog rada je formulisanje spinskog Hamiltonijana anizotropnog feromagnetnog lanca usrednjenog po koherentnim stanjima, koji će nadalje biti upotrebljen za dobijanje solitonskih rešenja.
S obzirom da je ovo relativno novi pravac istraživanja i ovo prvi diplomski rad iz te oblasti, na našem fakultetu, napisan je nešto širi uvod nego što je uobičajeno.
Sam pojam solitona je relativno dugo poznat u hidrodinamici. U novije vreme solitonska rešenja se traže i u feromagneticima /4/. U prvo vreme razmatrani su Hamiltonijani koji nisu uzimali u obzir efekte čiji uticaj na krajnja rešenja može dosegnuti i nekoliko desetina procenata. U ovom radu je razmatran Hamiltonijan koji u sebi sadrži i uticaj bikvadratne izmene i uticaj kristalnog polja. Diskusija fizičkog smisla takvog Hamiltonijana urađena je u prvom poglavlju.
Pored toga, u ranijim radovima, prilikom dobijanja solitonskih rešenja u feromagnetnom lancu, spinovi su tretirani kao klasični vektori. Kratka receptura takvog pristupa data je u drugom poglavlju /5/. Međutim, ovde su spinovi tretirani kao kvantni operatori. Pri takvom pristupu, zbog više razloga, korisno je operatore spina predstaviti u nekoj od bozonskih /9/ reprezentacija opisanih u trećem poglavlju. Ovde je korišćena je reprezentacija Holštajn-Primakova /14/.
U cilju uračunavanja kvantnih popravki, u računu je u obzir uzet i član proporcionalan 1/S, koji se javlja u razvoju H.P. reprezentacije, što značajno usložnjava račun. Hamiltonijan napisan preko bozonskih operatora usrednjen je po koherentnim stanjima koja su opisana u četvrtom poglavlju. Sam račun sproveden je u petom i šestom poglavlju.
Na kraj napomenimo da su prilikom pisanja ovog rada uočene greške u nekim ranijim radovima /6/, /7/ koji su imali isti pristup ovom problemu. Samim završetkom ovog rada te greške su (nadamo se) ispravljene.

*Poglavlje* ***1.***

# Hamiltonijan feromagnetnog dielektrika

Savremena teorija magnetizma razmatra feromagnetni dielektrik kao sistem uređenih spinova, tako da spinovi obrazuju magnetnu kristalnu rešetku i povezani su međusobno silama izmene, kojima odgovaraju integrali izmene.
Da bi smo sagledali poreklo izmenskih sila, posmatrajmo sistem dva elektrona /10/. Hamiltonijan takvog sistema možemo napisati u obliku /11/:

$$\hat{H} = \hat{H}(1) + \hat{H}(2) + \hat{u}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \tag{1.1}$$

gde je $\hat{u}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ operator interakcije među elektronima. Ako je $\hat{u}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ kulonovski potencijal, talasna funkcija ovog sistema se može napisati u obliku proizvoda funkcije koja zavisi samo od koordinata i funkcije koja zavisi samo od spinova:

$$\Psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{s}_1, \vec{s}_2) = \Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)\Theta(\vec{s}_1, \vec{s}_2) \tag{1.2}$$

Kao što je poznato /11/ ukupna talasna funkcija koja opisuje sistem fermiona mora biti antisimetrična u odnosu na operaciju permutacije fermiona. Ukupan spin S sistema dva elektrona može imati vrednost S=0 što odgovara uređenju sa antiparalelnim spinovima, odnosno singletnom stanju, i vrednost S=1 što odgovara tripletnom stanju. Spinski deo talasne funkcije koji opisuje singletno stanje je antisimetričan u odnosu na permutaciju čestice, dok je spinski deo talasne funkcije tripletnog stanja simetričan u odnosu na istu operaciju. Zbog ovih činjenica, koordinatni deo talasne funkcije dva elektrona, koji inače ima oblik:

$$\Phi_a^s(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\varphi_{k_1}(\vec{r}_1)\varphi_{k_2}(\vec{r}_2) \pm \varphi_{k_1}(\vec{r}_2)\varphi_{k_2}(\vec{r}_1)\right] \tag{1.3}$$

u simetričnoj kombinaciji odgovara singletnom stanju, a u antisimetričnoj tripletnom. Popravku na energiju tražimo u prvoj aproksimaciji teorije perturbacija:

$$\Delta E = \left\langle \Phi_a^s \middle| u(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \middle| \Phi_a^s \right\rangle = \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \Phi_a^{s*}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) u(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \Phi_a^s(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = A \pm J \tag{1.4}$$

gde je A energija elektrostatičke interakcije, a J integral izmene:

$$\begin{aligned} A &= \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \varphi_{k1}^*(\vec{r}_1)\varphi_{k2}^*(\vec{r}_2) u(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\varphi_{k1}(\vec{r}_1)\varphi(\vec{r}_2) \geq 0 \\ J &= \int d^3\vec{r}_1 d^3\vec{r}_2 \varphi_{k1}^*(\vec{r}_1)\varphi_{k2}^*(\vec{r}_2) u(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\varphi_{k1}(\vec{r}_2)\varphi(\vec{r}_1) \end{aligned} \tag{1.5}$$

tako je ukupna energija ovog sistema:

$$E_a^s = E_1 + E_2 + A \pm J \tag{1.6}$$

Dakle, vidimo da je interakcija izmene posledica nemogućnosti razlikovanja identičnih čestica, odnosno posledica simetrizacije talasne funkcije. Pored toga, iz izraza (1.6), vidimo da interakcija izmene ima pozitivan energetski uticaj (u smislu stabilnosti

sistema) u singletnom stanju, jer smanjuje ukupnu energiju, dok je taj uticaj za tripletno stanje negativan, što je u skladu sa Paulijevim principom.
Interakcija izmene se može opisati i pomoću operatora izmene izraženog preko operatora spina /1/ koji ima osobinu:

$$\hat{P}S_1\hat{P}^{-1} = S_2 \ , \ \hat{P}S_2\hat{P}^{-1} = S_1 \tag{1.7}$$

Za slučaj spina S=1/2 on ima oblik:

$$\hat{P} = -\frac{1}{2}J\left(1 + 4\vec{S}_1\vec{S}_2\right) \tag{1.8}$$

Imajući u vidu relaciju:

$$\vec{S}_1\vec{S}_2 = \frac{1}{2}\left(S^2 - S_1^2 - S_2^2\right) \tag{1.9}$$

pomoću operatora (1.7) možemo reprodukovati rezultat (1.4) za popravku energije. Oblici operatora izmene za slučajeve S>1/2 mogu se naći u /1/.
Ako sada posmatramo kristal, u kojem na svakom čvoru rešetke $\vec{n}$ imamo po jedan nespareni elektron, interakciju izmene između čvorova $\vec{n}$ i $\vec{m}$ možemo opisati operatorom:

$$\hat{P}_{\vec{n}\vec{m}} = -\frac{1}{2}J_{\vec{n}\vec{m}}\left(1 + 4\vec{S}_{\vec{n}}\vec{S}_{\vec{m}}\right) \tag{1.10}$$

tako je spinski deo operatora energije celog kristala:

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n},\vec{m}} J_{\vec{n}\vec{m}} - 2\sum_{\vec{n},\vec{m}} J_{\vec{n}\vec{m}}\vec{S}_{\vec{n}}\vec{S}_{\vec{m}} \tag{1.11}$$

Ako energiju merimo od nivoa:

$$E_0 = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{n},\vec{m}} J_{\vec{n}\vec{m}} \tag{1.12}$$

Onda operator energije ima oblik:

$$H = -2\sum_{\vec{n},\vec{m}} J_{\vec{n}\vec{m}}\vec{S}_{\vec{n}}\vec{S}_{\vec{m}} \tag{1.13}$$

Ovde treba napomenuti da se integrali izmene $J_{\vec{n}\vec{m}}$ tretiraju kao fenomenološki parametri, jer ih je teško izračunati zbog problema izbora talasne funkcije.
Ako se kristal nalazi u spoljašnjem magnetnom polju B, koje je usmereno u pravcu z-ose, spinskom Hamiltonijanu treba dodati član (Zemanov term):

$$H_z = -g\mu_B B\sum_{\vec{n}} S_{\vec{n}}^z \tag{1.14}$$

gde je $\mu_B$ Borov-magneton a g-Landauov faktor atoma.
Dosadašnje izlaganje bilo je vezano za razmatranje kristalne strukture u čijim su čvorovima bili joni sa spinom S=1/2. Ako izlaganje uopštimo na spin S>1/2 u Hamiltonijanu se može pojaviti i član oblika:

$$H_A = -D\sum_{\vec{n}}\left(S_{\vec{n}}^z\right)^2 \tag{1.15}$$

gde je D-konstanta.
Ovaj član vodi poreklo od uticaja kristalnog polja na paramagnetne jone.

Pored toga u realnim dielektričnim kristalima se može pojaviti i bikvadratni član kao posledica više efekata. O efektima koji dovode do pojave bikvadratnog člana biće reči nešto kasnije, za sada se zadržimo samo na njegovom obliku:

$$H_B = -\frac{\upsilon}{2}\sum_{\vec{n},\vec{m}} J_{\vec{n}\vec{m}}\left(\vec{S}_{\vec{n}}\vec{S}_{\vec{m}}\right)^2 \tag{1.16}$$

gde je $\upsilon$-konstanta.

U radu će biti analiziran jednodimenzioni slučaj, odnosno feromagnetni lanac tako da

suma $\sum_{\vec{n}\vec{m}}$ prelazi u sumu $\sum_{j,\rho}$ (1.17)

gde $\rho$ uzima vrednosti $\pm 1$, jer u obzir uzimamo samo interakciju između najbližih suseda. Integral izmene $J_{\vec{n}\vec{m}}$ prelazi u $J_{j,j+\rho} = J$. Tako da ukupan spinski Hamiltonijan feromagnetnog lanca ima oblik:

$$H = -g\mu_B B\sum_j S_j^z - \frac{1}{2}J\sum_{j,\rho}\vec{S}_j\vec{S}_{j+\rho} - D\sum_j\left(S_j^z\right)^2 - \frac{1}{2}\upsilon J\sum_{j,\rho}\left(\vec{S}_j\vec{S}_{j+\rho}\right)^2 \tag{1.18}$$

U radu će biti tretiran beskonačni feromagnetni lanac. U tom slučaju zadnji izraz je divergentan. Da bi otklonili divergenciju posmatraćemo samo poremećaj u odnosu na osnovno stanje. Za osnovno stanje ćemo uzeti slučaj $S^z = S$, pa Hamiltonijan, koji u obzir uzima samo poremećaj, dobija oblik:

$$H = -g\mu_B B\sum_j\left(S_j^z - S\right) - \frac{1}{2}J\sum_{j,\rho}\left(\vec{S}_j\vec{S}_{j+\rho} - S^2\right) - D\sum_j\left(\left(S_j^z\right)^2 - S^2\right) - \frac{1}{2}\upsilon J\sum_{j,\rho}\left(\left(\vec{S}_j\vec{S}_{j+\rho}\right)^2 - S^4\right) \tag{1.19}$$

Pored do sada navedenih osobina spinskog Hamiltonijana treba istaći i činjenicu da integral izmene ne mora biti izotropan. U radu će u obzir biti uzeta magnetna anizotropija tipa:

$$I^x = I^y = I, I^z = I - \Delta I \tag{1.20}$$

Pa je konačni oblik Hamiltonijana koji ćemo koristiti u radu:

$$H = -g\mu_B B\sum_j\left(S_j^z - S\right) - \frac{1}{2}J\sum_{j,\rho}\left(\left(\vec{S}_j\vec{S}_{j+\rho}\right)_\Delta - (1-\Delta)S^2\right) - D\sum_j\left(\left(S_j^z\right)^2 - S^2\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\upsilon J\sum_{j,\rho}\left(\left(\vec{S}_j\vec{S}_{j+\rho}\right)_\Delta^2 - (1-\Delta)^2 S^4\right) \tag{1.21}$$

gde je:

$$\left(\vec{S}_j\vec{S}_{j+\rho}\right)_\Delta = S_j^x S_{j+\rho}^x + S_j^y S_{j+\rho}^y + (1-\Delta)S_j^z S_{j+\rho}^z = \frac{1}{2}\left(S_j^+ S_{j+\rho}^- + S_j^- S_{j+\rho}^+\right) + (1-\Delta)S_j^z S_{j+\rho}^z \tag{1.22}$$

Objasnimo, na kraju, u kratkim crtama efekte koji mogu dovesti do pojave bikvadratnog člana.

Potrebu za uvođenje bikvadratne izmene možemo tražiti u činjenici da se prilikom analize magnetnih osobina i faznih prelaza kod određenih materijala (EuO, EuSe) pokazalo da "standardni" Hajzenbergov Hamiltonijan nije dovoljan za objašnjenje eksperimentalnih rezultata. Jedna od mogućnosti za objašnjenje dobijenih rezultata je i uvođenje dodatnog člana oblika:

$$\sum_{j,\rho}\left(S_j S_{j+\rho}\right)^2 \tag{1.23}$$

Sada ćemo pokušati da ukažemo na moguće poreklo ovakvog člana.
Na početku, posmatrajmo Hamiltonijan /2/:

$$H = J\sum_j \vec{S}_j\vec{S}_{j+1} - \mu_B B\sum_j S_j^z - \gamma\sum_j\left(x_{j+1}-x_j\right)\vec{S}_j\vec{S}_{j+1} + \frac{1}{2m}\sum_j p_j^2 + \frac{k}{2}\sum_j\left(x_{j+1}-x_j\right)^2 \tag{1.24}$$

u kojem je očigledno u obzir uzeta i spin-fonon interakcija. U ovom Hamiltonijanu se spinovi tretiraju kao klasični vektori, a elongacija atoma $x_j$ i njegov impuls $p_j$ su kvantno mehanički operatori koji zadovoljavaju komutacione relacije:

$$\left[p_i, x_j\right] = -i\delta_{ij} \tag{1.25}$$

Ako definišemo unitarnu transformaciju:

$$U = \prod_j U_j \,;\, U_j = \exp\left\{i\frac{\gamma}{k}p_j\sum_{i<j}\vec{S}_i\vec{S}_{i+1}\right\} \tag{1.26}$$

koja delujući na operator pomeranja $x_j$ daje:

$$Ux_jU^{-1} = x_j + \frac{\gamma}{k}\sum_{i<j}\vec{S}_i\vec{S}_{i+1} \tag{1.26}$$

možemo gornji Hamiltonijan razbiti na dva dela, od kojih jedan zavisi samo od spinova a drugi od pomeranja atoma (fonona):

$$\begin{aligned} UHU^{-1} &= H_s + H_f \\ H_s &= J\sum_j \vec{S}_j\vec{S}_{j+1} - \mu_B B\sum_j S_j^z - A\sum_j\left(\vec{S}_j\vec{S}_{j+1}\right)^2 \end{aligned} \tag{1.27}$$

$$H_f = \frac{1}{2m}\sum_j p_j^2 + \frac{k}{2}\sum_j\left(x_{j+1}-x_j\right)^2 \tag{1.28}$$

gde je $A = \dfrac{\gamma^2}{2k}$

Kao što vidimo u spinskom delu Hamiltonijana pojavljuje se i bikvadratni član. Tako njegovo pojavljivanje možemo posmatrati kao posledicu dekuplovanja spinova i fonona. Naravno ovde je bitno naglasiti da je upotrebom unitarnog operatora U izbegnuta promena bilo svojstvenih vrednosti bilo statističke srednje vrednosti operatora na koje je transformacija primenjena.

Drugi slučaj u kome se pojavljuje bikvadratni član je pojava interakcije superizmene između dva paramagnetna atoma X preko nemagnetnog atoma Y koji se nalazi između njih. Pošto interakcija superizmene ima značajan udeo u ukupnoj interakciji izmene samo u slučaju kada su atomi na relativno velikom međusobnom rastojanju, to će doći do preklapanja elektronskih talasnih funkcija samo na repovima tih funkcija. Odnosno za procenu veličine integrala superizmene možemo uzeti samo eksponencijalni deo talasne funkcije. Tako da je integral superizmene proporcionalan sa:

$$\int dr e^{-\sigma(r-x_j)+\tau(r-y_j)} \int dr' e^{-\tau(r'-y_j)+\sigma(r'-x_{j+1})} \tag{1.29}$$

Hamiltonijan u kojem je uračunata i spin-fonon interakcija i interakcija superizmene ima oblik:

$$H' = J\sum_j \vec{S}_j\vec{S}_{j+1} - \mu_B B\sum_j S_j^z - \gamma\sum_j (x_{j+1}-x_j)\vec{S}_j\vec{S}_{j+1} + \sum_j\left[\frac{(p_j^x)^2}{2m}+\frac{(p_j^y)^2}{2M}\right] + \frac{k}{2}\sum_j\left[(y_j-x_j)^2+(y_j-x_{j+1})^2\right] \tag{1.30}$$

Razbijanje ovog Hamiltonijana na spinski i fononski deo možemo uraditi pomoću unitarnog operatora:

$$U' = \prod_j U_j' \; ; U_j' = \exp\left\{ i\left(p_j^x + p_j^y\right)\frac{2\gamma}{k}\sum_{i<j}\vec{S}_i\vec{S}_{i+1} + i\frac{\gamma}{k}p_j^y\vec{S}_j\vec{S}_{j+1}\right\} \tag{1.31}$$

pri čemu se dobija:

$$U'H'U'^{-1} = H_s' + H_f' \tag{1.32}$$

gde je:

$$H_s' = J\sum_j \vec{S}_j\vec{S}_{j+1} - \mu_B B\sum_j S_j^z - A'\sum_j\left(\vec{S}_j\vec{S}_{j+1}\right)^2 \tag{1.33}$$

$$A' = \frac{\gamma^2}{k}$$

$$H_f' = \sum_j\left[\frac{(p_j^x)^2}{2m}+\frac{(p_j^y)^2}{2M}\right] + \frac{k}{2}\sum_j\left[(y_j-x_j)^2+(y_j-x_{j+1})^2\right] \tag{1.34}$$

Kao što vidimo, i u ovom slučaju se javlja bikvadratni član kao posledica dekuplovanja spinova i fonona.

Kao što je gore napomenuto u ovim razmatranjima spinovi su posmatrani kao klasični vektori. Pored toga treba reći da je egzaktna generalizacija na spinove kao kvantne operatore nemoguća. Stoga sebi uzimamo slobodu da, na osnovu analogije pojavu bikvadratne interakcije posmatramo kao posledicu spin-fononskog dekuplovanja.

Posmatrajmo, na kraju, poluprovodnik u kojem postoje paramagnetni atomi /3/. U tom slučaju možemo sve elektrone podeliti na nepokretne f ili d-elektrone koji su lokalizovani na paramagnetnim atomima i pokretne s-elektrone koji u osnovnom stanju popunjavaju valentnu zonu poluprovodnika. Pokretni elektroni interaguju sa lokalizovanim posredstvom sila izmene. Kao rezultat ove interakcije pojavljuju se virtuelni elektroni u provodnoj i virtuelne šupljine u valentnoj zoni, koji prenose interakciju izmene (superizmene) među lokalizovanim spinovima.

Hamiltonijan ovakvog sistema napišimo iz dva dela, prvi deo $H_0$-koji opisuje slobodne elektrone i šupljine i drugi $H_1$-koji opisuje njihovu interakciju sa lokalizovanim spinovima, odnosno:

$$H = H_0 + H_1\,; \quad H_0 = \sum E_k a^+_{k\sigma} a_{k\sigma} + \sum L_k c^+_{k\sigma} c_{k\sigma}$$
$$H_1 = -\frac{D}{N} \sum \left(\vec{S}_{\vec{\lambda}} \vec{s}\right)_{\sigma\sigma'} \left(a^+_{k\sigma} c^+_{k+\lambda,\sigma} + c_{k\sigma'} a_{k+\lambda,\sigma'}\right) \tag{1.35}$$

$$\vec{S}_{\vec{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum e^{-i\vec{\lambda}\vec{g}} \vec{S}_{\vec{g}} \tag{1.36}$$

Magnetni Hamiltonijan se dobija korišćenjem teorije perturbacija. Međutim, ovde je bitno naglasiti da se teorija perturbacija ne koristi na uobičajen način, odnosno ne traže se prve popravke na talasnu funkciju nulte aproksimacije, već takve promene Hamiltonijana koje dejstvujući na talasnu funkciju nulte aproksimacije daju iste rezultate za energiju kao klasična teorija perturbacija.
Magnetni deo takvog Hamiltonijana ima oblik:

$$\begin{aligned} H_M = P\Big\{ & -H_1(H_0 - E_0)^{-1} H_1 + H_1(H_0 - E_0)^{-1} H_1 (H_0 - E_0)^{-1} H_1 - \\ & -H_1(H_0 - E_0)^{-1} H_1 (H_0 - E_0)^{-1}(1-P) H_1 (H_0 - E_0) H_1 + H_1(H_0 - E_0) H_1 P H_1 (H_0 - E_0)^{-2} H_1 \Big\} P \end{aligned} \tag{1.37}$$

gde je P-projektor na elektron-šupljinsko vakuumsko stanje.
Ako sada u izrazima (1.35) pređemo sa impulsnog u konfiguracioni prostor pomoću izraza (1.36) i tako dobijene izraze uvrstimo u izraz (1.37) dobijamo:

$$\begin{aligned} H_M = & -\sum_{\vec{f},\vec{g}} J(\vec{g} - \vec{f}) \vec{S}_{\vec{g}} \vec{S}_{\vec{f}} - \sum_{\vec{f},\vec{g}} \Big[ K\left(\vec{f}_1 - \vec{f}_2, \vec{f}_2 - \vec{g}_2, \vec{g}_1 - \vec{g}_2\right) - K\left(\vec{f}_1 - \vec{g}_1, \vec{g}_1 - \vec{g}_2, \vec{f}_2 - \vec{g}_2\right) + \\ & K\left(\vec{g}_1 - \vec{f}_2, \vec{f}_2 - \vec{g}_2, \vec{f}_1 - \vec{g}_2\right) \Big] \left(\vec{S}_{\vec{f}_1} \vec{S}_{\vec{f}_2}\right)\left(\vec{S}_{\vec{g}_1} \vec{S}_{\vec{g}_2}\right) \end{aligned} \tag{1.38}$$

gde je:

$$J\left(\vec{h}\right) = \frac{D^2}{4N^2} \sum_{\vec{k},\vec{\lambda}} \frac{e^{i\vec{\lambda}\vec{h}}}{E_{\vec{k}} + L_{\vec{k}+\vec{\lambda}}} \tag{1.39}$$

$$K\left(\vec{h}_1, \vec{h}_2, \vec{h}_3\right) = \frac{D^4}{4N^2} \sum_{\vec{k}\vec{\lambda}} \frac{e^{i\vec{\lambda}_1\vec{h}_1 + i\vec{h}_2\left(\vec{k}_2 - \vec{k}_1\right) + i\vec{h}_3\vec{\lambda}_2}}{\left(E_{\vec{k}_1+\vec{\lambda}_1} + L_{\vec{k}_1}\right)\left(E_{\vec{k}_2+\vec{\lambda}_2} + L_{\vec{k}_1}\right)\left(E_{\vec{k}_1+\vec{\lambda}_1} + L_{\vec{k}_2}\right)}$$

Iz izraza (1.38) vidimo da se u magnetnom Hamiltonijanu ne javlja popravka u bilo kojem neparnom redu po spinovima, to je posledica zakona održanja broja kvazičestica. Takođe se vidi da u slučaju dvospinske izmene $\left(\vec{f}_1 = \vec{g}_1, \vec{f}_2 = \vec{g}_2\right)$ u

Hamiltonijanu dobijamo bikvadratni član $(\vec{S}_1\vec{S}_2)^2$. Energija trospinske izmene je proporcionalna sa $(\vec{S}_1\vec{S}_2)(\vec{S}_2\vec{S}_3)$ a četvorospinske sa $(\vec{S}_1\vec{S}_2)(\vec{S}_3\vec{S}_4)$.
Znači, da zaključimo, bikvadratni član se može javiti kao posledica interakcije superizmene u kristalnim poluprovodnicima, gde se interakcija izmene između paramagnetnih atoma ostvaruje preko viruelnih elektrona u provodnoj i šupljina u valentnoj zoni.

*Poglavlje* 2.

# Solitoni u klasičnom feromagnetnom lancu

Solitoni /5/ su talasni oblici koji se dobijaju kao rešenja nelinearnih talasnih jednačina. Ovaj fenomen je interesantan zbog nekih vrlo bitnih osobina koje solitoni imaju, a to su:

a) imaju zvonastu formu koja se u vremenu ne menja

b) solitoni se mogu sudariti ili proći jedan kroz drugi bez promene oblika

c) brzina solitona može zavisiti od amplitude a često sa porastom brzine raste i amplituda

d) solitoni se ne rasejavaju i imaju praktično beskonačan život

Iz gore navedenih osobina vidi se da bi signal, koji bi se prenosio putem solitona, praktično bio prenet bez gubitka energije. Značaj zadnjeg stava nije potrebno posebno komentarisati.

Postojanje solitona u magnetnim materijalima je i eksperimentalno utvrđena činjenica. Po prvi put to je urađeno u eksperimentu rasejavanja neutrona na jedinjenju $CsNiF_3$.

U ovom odeljku ćemo se baviti klasičnim tretmanom solitona u anizotropnom Hajzenbergovom feromagnetu. Tada Hamiltonijan ima oblik:

$$H = -\mu B \sum_j S_j^z - \frac{1}{4} J \sum_{j,\rho} \left( S_j^+ S_{j+\rho}^- + S_{j+\rho}^+ S_j^- \right) - \frac{1}{2} \Delta J \sum_{j,\rho} S_j^z S_{j+\rho}^z \tag{2.1}$$

Iskoristimo sada razvoj:

$$f(j+\rho) \approx f(j) + a \frac{\partial}{\partial x} f(j) + \frac{1}{2} a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(j) \tag{2.2}$$

i pravilo za prelazak sa sume na integral:

$$\frac{1}{a} \sum_n a \Delta n \to \frac{1}{a} \int dx \tag{2.3}$$

da bi smo napisali Hamiltonijan u kontinualnom obliku:

$$H = \frac{1}{a} \int \mathcal{H} \, dx \tag{2.4}$$

tako dobijamo:

$$\mathcal{H} = -\mu B S^z + \frac{1}{2} J \left( \frac{\partial \vec{S}}{\partial x} \right)^2 - J(\Delta - 1)(S^z)^2 + \frac{1}{2} J (\Delta - 1) \left( \frac{\partial S^z}{\partial x} \right)^2 \tag{2.5}$$

Ako sada pređemo na sferne koordinate:

$$
\begin{aligned}
S^z &= S\cos\Theta = Su \\
S^x &= S\sin\Theta\cos\Phi \\
S^y &= S\sin\Theta\sin\Phi
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

gustinu Hamiltonijana (2.5) možemo napisati u obliku:

$$
\mathcal{H} = -\mu BSu + \frac{1}{2}JS^2\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\frac{1}{1-u^2} + (1-u^2)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2\right] - JS^2(\Delta-1)u^2 + \frac{1}{2}JS^2(\Delta-1)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2
\tag{2.7}
$$

Sada formirajmo Hamiltonove jednačine za par konjugovanih promenljivih $S^z$ i $\Phi$:

$$
\dot{S}^z = S\dot{u} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Phi} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\Phi_x}\right)
\tag{2.8}
$$

$$
\dot{u} = \frac{1}{S}\frac{\partial}{\partial x}JS^2(1-u^2)\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)
\tag{2.9}
$$

$$
\dot{\Phi} = -\mu B - 2JS(\Delta-1)u - JS\left[\frac{u}{(1-u^2)^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{1-u^2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] - JS(\Delta-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}
\tag{2.10}
$$

Ako zadnji izraz pomnožimo sa $\sin\Theta = \sqrt{1-u^2}$ i vratimo se na promenljive $\Theta$ i $\Phi$ dobijamo:

$$
\sin\Theta\,\dot{\Phi} = -\mu B\sin\Theta - 2JS(\Delta-1)\sin\Theta\cos\Theta - JS(\Theta_{xx} - \cos\Theta\Phi_x^2) +
$$

$$
+JS(\Delta-1)\frac{\partial}{\partial\Theta}(\sin\Theta\,\Theta_x)
\tag{2.11}
$$

$$
\frac{\partial}{\partial t}\cos\Theta = JS\frac{\partial}{\partial x}\left(\sin^2\Theta\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)
\tag{2.12}
$$

Uvedimo sada smenu:

$$
\xi = x - vt \qquad \frac{\partial}{\partial t} = -v\frac{\partial}{\partial\xi}
$$

$$
\Phi = \Phi(\xi, t) \qquad \frac{v}{JS} = V
\tag{2.13}
$$

i granične uslove u $\xi = \pm\infty$ :

$$
\Theta_\xi = 0 \quad , \qquad \sin\Theta = 0 \quad , \qquad \cos\Theta = 1
\tag{2.14}
$$

Sa ovako izabrnim graničnim uslovima mi smo se u stvari opredelili za solitonsko rešenje, jer oni impliciraju da poremećaj bude lokalizovan samo u manjem delu prostora. Ako sada integralimo jednačinu (2.12) dobijamo:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}=V\frac{1-\cos\Theta}{\sin^2\Theta}=\frac{V}{1+\cos\Theta} \tag{2.15}$$

Sada u izraz (2.11) uvedimo zadnji rezultat i smenu:

$$\Phi=\Omega t+\hat{\Phi}(\xi)$$

$$\dot{\Phi}=\Omega-V\hat{\Phi}_\xi \qquad \hat{\Phi}_\xi=\Phi_\xi \tag{2.16}$$

tako dobijamo:

$$\Gamma\sin\Theta+2(\Delta-1)\sin\Theta\cos\Theta-\frac{V^2\sin\Theta}{1+\cos\Theta}+\frac{V^2\sin\Theta\cos\Theta}{(1+\cos\Theta)^2}-\Theta_{\xi\xi}-(\Delta-1)\sin\Theta\frac{\partial}{\partial\xi}(\sin\Theta\Theta_\xi)=0 \tag{2.17}$$

gde je $\Gamma=\dfrac{\mu B+\Omega}{JS}$ ; $\gamma=\Delta-1$

Integraleći jednačinu (2.17) uz granične uslove (2.14) dobijamo:

$$\beta_\xi^2(1+4\gamma\sin^2\beta\cos^2\beta)=\Gamma\frac{\sin^2\beta}{\cos^2\beta}\left(\cos^2\beta+\frac{2\gamma}{\Gamma}\cos^4\beta-\frac{V^2}{4\Gamma}\right) \tag{2.18}$$

gde je $\beta=\dfrac{\Theta}{2}$

Vežimo sada naš koordinatni sistem za centar pobuđenja uslovom:

$$\xi=0\Rightarrow\beta_\xi=0 \tag{2.19}$$

što daje:

$$\cos^2\beta_0+\frac{2\gamma}{\Gamma}\cos^4\beta_0=\frac{V^2}{4\Gamma} \tag{2.20}$$

Ako se ima u vidu veza između $\xi$ i $x$ očigledno je da se amplituda $\beta_0$ kreće duž x-ose brzinom V. Ugao $\beta$ definiše projekciju spina na z-osu, a kako je $\beta_0$ ekstremna vrednost ($\beta_\xi=0$) ona određuje centar pobuđenja koje se nepromenjeno kreće duž x-ose. Uslov (2.20) daje nam ograničenje za brzinu solitona. Kako je $\cos^2\beta_0\geq 0$ dobijamo:

$$V^2\leq 4\Gamma+8\gamma \tag{2.21}$$

Sada još ostaje da se nađe solitonsko rešenje jednačine (2.18). Međutim ova jednačina se ne može analitički rešiti pa zbog toga izvršimo aproksimaciju:

$$1+4\gamma\sin^2\beta\cos^2\beta\approx 1 \tag{2.22}$$

Tako jednačina (2.18) dobija oblik:

$$\frac{d\sin\beta}{d\xi}=\pm\sqrt{2\gamma}\sin\beta\sqrt{\cos^4\beta+\frac{\Gamma}{2\gamma}\cos^2\beta-\frac{V^2}{8\gamma}} \tag{2.23}$$

Rešenje zadnje jednačine je oblika:

$$\phi^2 = \frac{\phi_0^2}{1+\frac{2A\phi_0^2}{\sqrt{a}} sh^2\sqrt{a\Gamma}\,\xi} \tag{2.24}$$

gde je:

$$\phi_0 = \frac{1}{\sin^2\beta}\,, \qquad a = 1+\frac{2\gamma}{\Gamma}-\frac{V^2}{4\Gamma}\,, \qquad A^2 = \frac{1+\frac{2\gamma}{\Gamma}}{4a}-\frac{2\gamma}{\Gamma}$$

Znajući ponašanje funkcije $sh^2$ može se pokazati da poremećaj ima značajnu vrednost samo u okolini tačke $\xi = 0$. Ovakav talsni paket kreće se duž x-ose brzinom definisanom izrazom (2.21) i ostaje nepromenjen.
Ako sada izraze za energiju, impuls i magnetizaciju uzmemo u obliku:

$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}\, dx \tag{2.25}$$

$$P = S\int_{-\infty}^{+\infty} dx \frac{\partial\Phi}{\partial x}(1-\cos\Theta) \tag{2.26}$$

$$M_z = S\int_{-\infty}^{+\infty} dx\,(1-\cos\Theta) \tag{2.27}$$

može se pokazati da između njih postoji veza:

$$E = \mu BM_z + 4JS^2\sqrt{2\gamma}\,\frac{ch\frac{M_z}{m_0}-\cos\frac{P}{2S}}{sh\frac{M_z}{m_0}} \tag{2.28}$$

gde je $m_0 = \frac{2S}{\sqrt{2\gamma}}$.

Ova veza nam pokazuje da soliton pored translatornog stepena slobode (koji daje zavisnost energije od impulsa) poseduje i jedan unutrašnji, rotacioni, stepen slobode koji daje zavisnost energije od magnetizacije.
Kao što je napomenuto, u ovom pristupu su spinovi tretirani kao klasični vektori. Opravdanost takvog pristupa je, u najmanju ruku, pod znakom pitanja. Kvantni pristup je u svakom slučaju opravdaniji. Dokaz zadnje tvrdnje nalazimo u činjenici što u kvantnom pristupu, u prvoj aproksimaciji dobijamo klasični rezultat, dok u narednoj aproksimaciji dobijamo i kvantnu popravku tog rezultata što će u daljem radu biti pokazano.

*Poglavlje* ***3.***

# Bozonske reprezentacije spinskih operatora

Kao što smo videli u poglavlju 1. ponašanje feromagnetnih materijala se može opisati pomoću spinskih Hamiltonijana. U njima figurišu spinski operatori $\vec{S}_{\vec{n}}$ koji zadovoljavaju komutacione relacije /9/.

$$S_{\vec{n}}^{\pm} = S_{\vec{n}}^{x} \pm iS_{\vec{n}}^{y} \tag{3.1}$$

$$\left[S_{\vec{n}}^{+}, S_{\vec{m}}^{-}\right] = 2S_{\vec{n}}^{z}\delta_{\vec{n}\vec{m}} \tag{3.2}$$

$$\left\{S_{\vec{n}}^{+}, S_{\vec{n}}^{-}\right\} = 2S(S+1) - 2\left(S_{\vec{n}}^{z}\right)^{2} \tag{3.3}$$

$$\left[S_{\vec{n}}^{z}, S_{\vec{m}}^{-}\right] = -S_{\vec{n}}^{-}\delta_{\vec{n}\vec{m}} \quad , \quad \left[S_{\vec{n}}^{z}, S_{\vec{m}}^{+}\right] = S_{\vec{n}}^{+}\delta_{\vec{n}\vec{m}} \tag{3.4}$$

U daljem tekstu, uglavnom, neće biti pisana oznaka čvora, radi konciznosti, ali se ona podrazumeva. Rad sa opisanim spinskim Hamiltonijanima je komplikovan pa je uputno koristiti bozonske ili fermionske reprezentacije spinskih operatora, jer za sisteme interagujućih fermiona i bozona postoje razrađeni metodi. Sa druge strane, ako želimo koristiti pojednostavljenja koja nam pruža simetrija kristala, moramo preći u prostor recipročne rešetke. Kao što je poznato taj prelaz se vrši Furijeovom transformacijom koja ne očuvava važenje komutacionih relacija spinskih operatora.
Radi sistematičnosti, pođimo od sistema sa dva energetska nivoa. Takav sistem se može opisati pomoću operatora spina s=1/2. Hamiltonijan sistema ima oblik:

$$H = \sum_{\vec{n},f} E_f a_{\vec{n}f}^{+} a_{\vec{n}f} + \frac{1}{2} \sum_{\vec{n},\vec{m},f_1,f_2,f_3,f_4} V_{\vec{n}\vec{m}}(f_1, f_2, f_3, f_4) a_{\vec{n}f_1}^{+} a_{\vec{m}f_2}^{+} a_{\vec{m}f_3} a_{\vec{n}f_4} \tag{3.5}$$

gde je $a_{\vec{n}f}^{+}$ fermi operator koji na čvoru $\vec{n}$ kreira elektron sa energijom $E_f$ , a $V_{\vec{n}\vec{m}}(f_1, f_2, f_3, f_4)$ je matrični element interakcije, izražen u bazisu jednočestičnih stanja. Ako se ograničimo na pobuđenje samo jednog elektrona na čvoru, možemo napisati uslov:

$$\sum_{f} a_{\vec{n}f}^{+} a_{\vec{n}f} = a_{\vec{n}0}^{+} a_{\vec{n}0} + a_{\vec{n}1}^{+} a_{\vec{n}1} = 1 \tag{3.6}$$

Ponašanje sistema opišimo pomoću kvanta pobuđenja $\Delta E = E_1 - E_0$ , i u tom cilju uvedimo operatore koji kreiraju i anihiliraju takva pobuđenja:

$$P_{\vec{n}}^{+} = a_{\vec{n}1}^{+} a_{\vec{n}0} \; ; \quad P_{\vec{n}} = a_{\vec{n}0}^{+} a_{\vec{n}1} \tag{3.7}$$

Prostor operatora P je unija dva prostora $H = F \oplus N$ sa bazisima:

$$F = \left\{\left|1_0, 0_1\right\rangle, \left|0_0, 1_1\right\rangle\right\} \quad ; \quad N = \left\{\left|1_0, 1_0\right\rangle, \left|0_1, 0_1\right\rangle\right\} \tag{3.8}$$

Lako se može pokazati da je uslov (3.6) zadovoljen samo u fizičkom prostoru F. Operatori $P^+$ i $P$ se nazivaju Pauli operatori i zadovoljavaju sledeće komutacione relacije:

$$\left[P_{\vec{n}},P_{\vec{m}}^+\right]=\left(1-P_{\vec{n}}^+P_{\vec{m}}\right)\delta_{\vec{n}\vec{m}} \quad ; \quad \left[P_{\vec{n}},P_{\vec{m}}\right]=\left[P_{\vec{n}}^+,P_{\vec{m}}^+\right]=0 \quad ; \quad P_{\vec{n}}^2=P_{\vec{n}}^{+2} \tag{3.9}$$

Ako sada usvojimo da je osnovno stanje sistema, stanje u kojem su svi spinovi usmereni u pravcu z-ose, odnosno stanje za koje važi $S_{\vec{n}}^z=S$, onda je čin smanjivanja z-projekcije spina za jedinicu ustvari čin elementarnog pobuđivanja sistema. Kvante takvog pobuđenja nazivamo magnonima. Znajući da operator $S_{\vec{n}}^+$ povećava z-projekciju spina za jedinicu a operator $S_{\vec{n}}^-$ smanjuje tu projekciju takođe za jedinicu, a s obzirom na gore navedene osobine Pauli operatora, jasno je da možemo usvojiti:

$$S_{\vec{n}}^+\to P_{\vec{n}} \quad , \quad S_{\vec{n}}^-\to P_{\vec{n}}^+ \quad , \quad S_{\vec{n}}^z\to\frac{1}{2}-P_{\vec{n}}^+P_{\vec{n}} \tag{3.10}$$

Posmatrajmo sada N spinskih operatora $\vec{S}_{\vec{n}}$ pridruženih čvorovima rešetke $\vec{n}$. Bazisne vektore pojedinačnih operatora obeležimo sa $|S,m\rangle_{\vec{n}}$:

$$S_{\vec{n}}^2|S,m\rangle_{\vec{n}}=S(S+1)|S,m\rangle_{\vec{n}} \tag{3.11}$$

$$S_{\vec{n}}^z|S,m\rangle_{\vec{n}}=m|S,m\rangle_{\vec{n}} \tag{3.12}$$

Hilbertov prostor kojeg čine ovi operatori ima dimenziju 2S+1. A Hilbertov prostor koji pridružujemo celom sistemu dobija se kao proizvod Hilbertovih prostora pojedinih operatora:

$$\tilde{H}_s=\tilde{H}_{S_1}\otimes\tilde{H}_{S_2}\otimes\tilde{H}_{S_3}\cdots\otimes\tilde{H}_{S_N} \tag{3.13}$$

Bozonski operatori koji zadovoljavaju komutacione relacije:

$$\left[B,B^+\right]=1 \quad , \quad \left[B,B\right]=\left[B^+,B^+\right]=0 \tag{3.14}$$

deluju u beskonačno dimenzionom bozonskom Hilbertovom prostoru:

$$\tilde{H}_B=\tilde{H}_{B_1}\otimes\tilde{H}_{B_2}\otimes\tilde{H}_{B_3}\cdots\otimes\tilde{H}_{B_N} \tag{3.15}$$

Bazis u svakom podprostoru grade svojstveni vektori operatora $n_{\vec{m}}=B_{\vec{m}}^+B_{\vec{m}}$ koje obeležimo sa $|n\rangle_{\vec{m}}$. Kada imamo ovo sve u vidu, put predstavljanja spinskih operatora u bozonskoj reprezentaciji je u stvari traženje takvih funkcija bozonskih operatora koji će u bazisu $H_B$ imati iste komutacione relacije kao i operatori $S^+$ i $S^-$, i iste statističke srednje vrednosti. Uočimo sada da ako je $\langle S_{\vec{n}}^z\rangle\approx S$ važi:

$$\left[S_{\vec{n}}^+,S_{\vec{m}}^-\right]\cong 2S\delta_{\vec{n}\vec{m}} \tag{3.16}$$

Odnosno, vidimo da se na niskim temperaturama spinovi ponašaju kao bozoni. Zato je prvi korak sledeća smena:

$$S_{\vec{n}}^-\to\sqrt{2S}B_{\vec{n}}^+ \quad , \quad S_{\vec{n}}^+\to\sqrt{2S}B_{\vec{n}} \quad , \quad S_{\vec{n}}^z\to S-B_{\vec{n}}^+B_{\vec{n}} \tag{3.17}$$

U teoriji magnetizma ova transformacija se naziva Blohova aproksimacija. Međutim, s obzirom da je prostor boze operatora beskonačno dimenzionalan, ova aproksimacija uvodi stanja sa z-projekcijom spina većom od S. Tako imamo "fizička" stanja ($n\le S$) i podprostor "nefizičkih" stanja. Osnovni problem je razdvajanje ova dva prostora. Prvi uspešniji pokušaj u tom pravcu učinili su Holštajn i Primakov /14/. Njihova reprezentacija je sledeća:

$$S^+ = \sqrt{2S-n}\, B = \sqrt{2S}\sqrt{1-\frac{B^+B}{2S}}\, B \tag{3.18}$$

$$S^- = \left(S^+\right)^+ \qquad S^z = S - B^+B$$

Pošto će u radu biti korištena ova reprezentacija potrebno je istaći neke njene osobine. Kao prvo pokažimo da važe komutacione relacije (3.1), (3.2), (3.3). Znajući da operator komutira sa funkcijom čiji je argument taj operator predpostavimo da važi komutaciona relacija:

$$\left[B^+B, \sqrt{1-\frac{B^+B}{2S}}\right] = 0 \tag{3.19}$$

Nešto kasnije će biti egzaktno dokazano važenje ove predpostavke u aproksimaciji koju ćemo koristiti. Koristeći relacije (3.14) i (3.19) dobijamo:

$$\left[S^z, S^-\right] = \sqrt{2S}\left\{\left(S - B^+B\right)B^+\sqrt{1-\frac{B^+B}{2S}} - B^+\sqrt{1-\frac{B^+B}{2S}}\left(S - B^+B\right)\right\} =$$

$$\sqrt{2S}\left\{-B^+\left(1+B^+B\right)\sqrt{1-\frac{B^+B}{2S}} + B^+\sqrt{1-\frac{B^+B}{2S}}B^+B\right\} \tag{3.20}$$

Ako sada iskoristimo izraz (3.19) dobijamo:

$$\sqrt{2S}\left\{-B^+\sqrt{1-\frac{B^+B}{2S}} - B^{+2}B\sqrt{1-\frac{B^+B}{2S}} + B^{+2}B\sqrt{1-\frac{B^+B}{2S}}\right\} =$$

$$= \sqrt{2S}\left\{-B^+\sqrt{1-\frac{B^+B}{2S}}\right\} \tag{3.21}$$

odnosno:

$$\left[S^z, S^-\right] = -S^- \tag{3.22}$$

Dalje, koristeći relaciju (3.19) imamo:

$$\left[S^+, S^-\right] = 2S\left\{\sqrt{1-\frac{B^+B}{2S}}BB^+\sqrt{1-\frac{B^+B}{2S}} - B^+\sqrt{1-\frac{B^+B}{2S}}\sqrt{1-\frac{B^+B}{2S}}B\right\} \tag{3.23}$$

Sada iskoristimo izraze (3.14) i (3.19):

$$\left[S^+, S^-\right] = 2S\left\{\left(1-\frac{B^+B}{2S}\right) + \left(1-\frac{B^+B}{2S}\right)B^+B - \left(1-\frac{B^+B}{2S}\right)B^+B - \frac{B^+B}{2S}\right\} \tag{3.24}$$

odnosno:

$$\left[S^{+}, S^{-}\right]=2S^{z}$$

Osnovni problem rada sa ovom reprezentacijom jeste rad sa korenom. Međutim, ako je zadovoljen uslov $\langle n\rangle/2S \ll 1$ odnosno $S \gg 1/2$, možemo koren razviti:

$$S^{+}=\sqrt{2S}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\left[\frac{B^{+}B}{S}\right]^{k}B \tag{3.25}$$

Napišimo sada članove reda u drugačijoj formi. U tom cilju pođimo od izraza:

$$\left(B^{+}B\right)^{k}=B^{+k}B^{k}+a_{k-1}^{k}B^{+k-1}B^{k-1}+\cdots+a_{2}^{k}B^{+2}B^{2}+B^{+}B \tag{3.26}$$

Razvijmo sada izraz $\left(B^{+}B\right)^{k+1}$:

$$\left(B^{+},B\right)^{k+1}=B^{+k+1}B^{k+1}+a_{k}^{k+1}B^{+k}B^{k}+\cdots+a_{2}^{k+1}B^{+2}B^{2}+B^{+}B \tag{3.27}$$

Sa druge strane možemo pisati:

$$\left(B^{+}B\right)^{k+1}=B^{+}B\left(B^{+}B\right)^{k}=B^{+}B\left(B^{+k}B^{k}+a_{k-1}^{k}B^{+k-1}B^{k-1}+\cdots+a_{2}^{k}B^{+2}B^{2}+B^{+}B\right) \tag{3.28}$$

koristeći komutacionu relaciju:

$$\left[B,B^{+k}\right]=kB^{+k-1} \tag{3.29}$$

izraz (3.28) možemo napisati u obliku:

$$\left(B^{+}B\right)^{k+1}=B^{+k+1}B^{k+1}+\left(a_{k-1}^{k}+k\right)B^{+k}B^{k}+\cdots \tag{3.30}$$

Sravnjujući jednačine (3.27) i (3.30) dobijamo:

$$a_{k}^{k+1}=a_{k-1}^{k}+k \tag{3.31}$$

odakle sledi da je:

$$a_{k-1}^{k}=\frac{k(k-1)}{2} \tag{3.32}$$

Pa ako se zadržimo na članu proporcionalnom 1/S jednakost (3.25) možemo napisati u obliku:

$$S^{+}=\sqrt{2S}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\left[\frac{B^{+k}B^{k}}{S^{k}}+\frac{1}{S}\frac{k(k-1)}{2}\frac{B^{+k-1}B^{k-1}}{S^{k-1}}\right]B \tag{3.33}$$

Zadnjim izrazom ćemo se praktično koristiti u daljem radu.

Sada, proverimo da li i ovaj izraz zadovoljava komutacione relacije spinskih operatora. Uradimo to za:

$$\left[S^{z},S^{-}\right]=-S^{-}\quad,\quad\left[S^{z},S^{+}\right]=S^{+} \tag{3.34}$$

$$\left[S^{z},S^{-}\right]=\sqrt{2S}\left\{\left(S-B^{+}B\right)B^{+}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\left[\frac{B^{+k}B^{k}}{S^{k}}-\frac{1}{S}\frac{k(k-1)}{2}\frac{B^{+k-1}B^{k-1}}{S^{k-1}}\right]-\right.$$

$$-B^{+}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\left[\frac{B^{+k}B^{k}}{S^{k}}-\frac{1}{S}\frac{k(k-1)}{2}\frac{B^{+k-1}B^{k-1}}{S^{k-1}}\right](S-B^{+}B)\}=$$

$$=\sqrt{2S}B^{+}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\left[\frac{B^{+k}B^{k}}{S^{k}}-\frac{1}{S}\frac{k(k-1)}{2}\frac{B^{+k-1}B^{k-1}}{S^{k-1}}\right]B^{+}B-$$

$$-\sqrt{2S}B^{+}BB^{+}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\left[\frac{B^{+k}B^{k}}{S^{k}}-\frac{1}{S}\frac{k(k-1)}{2}\frac{B^{+k-1}B^{k-1}}{S^{k-1}}\right]=$$

$$=\sqrt{2S}B^{+}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\left[\frac{B^{+k}B^{k}}{S^{k}}-\frac{1}{S}\frac{k(k-1)}{2}\frac{B^{+k-1}B^{k-1}}{S^{k-1}}\right]B^{+}B\right.$$

$$\left.-B^{+}B\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\left[\frac{B^{+k}B^{k}}{S^{k}}-\frac{1}{S}\frac{k(k-1)}{2}\frac{B^{+k-1}B^{k-1}}{S^{k-1}}\right]\right\}-$$

$$-\sqrt{2S}B^{+}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\left[\frac{B^{+k}B^{k}}{S^{k}}-\frac{1}{S}\frac{k(k-1)}{2}\frac{B^{+k-1}B^{k-1}}{S^{k-1}}\right] \qquad (3.35)$$

Koristeći komutacione relacije:

$$\left[B^{k},B^{+}\right]=kB^{k-1} \quad , \quad \left[B,B^{+k}\right]=kB^{+k-1} \qquad (3.36)$$

lako se pokazuje da važi jednakost:

$$B^{+}B\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\left[\frac{B^{+k}B^{k}}{S^{k}}+\frac{1}{S}\frac{k(k-1)}{2}\frac{B^{+k-1}B^{k-1}}{S^{k-1}}\right]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\left[\frac{B^{+k}B^{k}}{S^{k}}+\frac{1}{S}\frac{k(k-1)}{2}\frac{B^{+k-1}B^{k-1}}{S^{k-1}}\right]B^{+}B \qquad (3.37)$$

Zadnja jednakost povlači za sobom da je član u velikoj zagradi izraza (3.35) jednak nuli pa tako dobijamo:

$$\left[S^{z},S^{-}\right]=-\sqrt{2S}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}\left[\frac{B^{+k}B^{k}}{S^{k}}+\frac{1}{S}\frac{k(k-1)}{2}\frac{B^{+k-1}B^{k-1}}{S^{k-1}}\right]B \qquad (3.38)$$

odnosno:

$$\left[S^{z},S^{-}\right]=-S^{-}$$

Sličnim postupkom se dokazuje i druga od relacija (3.34).

Ovde se više nećemo zadržavati na osobinama H.P. reprezentacije, jer smo istakli njene osobine koje su od interesa za ovaj rad. Međutim, ipak napomenimo da H.P. reprezentacija nije dobro opisivala niskotemperaturno ponašanje Hajzenbergovog feromagneta, pa je bio neophodan dalji razvoj teorije. U tom svetlu možemo posmatrati čitav niz drugih bozonskih reprezentacija koje su se pojavile nakon H.P. reprezentacije. Navedimo kao primer neermitsku reprezentaciju Dajsona i Maljejeva koja ima oblik:

$$S^+ = \sqrt{2S}\left(1 - \frac{B^+B}{2S}\right)B$$

$$S^- = \sqrt{2S}B^+ \quad , \quad S^z = S - B^+B \tag{3.39}$$

Za ovu reprezentaciju se može pokazati da daje iste rezultate kao i H.P. reprezentacija do članova reda proporcionalnih 1/S, i da je povezana sa istom neunitarnom transformacijom.

Već se ovde može postaviti pitanje da li je moguće odrediti bozonsku reprezentaciju koja neće biti približna, već tačna? Odgovor na ovo pitanje je potvrdan. Bez pretenzija da se udubljujemo u ovu problematiku ipak u najkraćim crtama navedimo rezultate daljeg razvoja teorije. U tom cilju krenimo od reprezentacije Agranoviča i Tošića za spin s=1/2 koja je tačna. Oni su bozonsku reprezentaciju Pauli operatora tražili u obliku:

$$P = f^{\frac{1}{2}}B \quad , \quad P^+ = (P)^+ \quad , \quad P^+P = B^+f\,B \tag{3.40}$$

Pokazuje se da je:

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2)^k}{(k+1)!} B^{+k} B^k \tag{3.41}$$

Značajna osobina ove reprezentacije je to što operator $N = P^+P$ ima samo dve svojsvene vrednosti i to: nula kada deluje na stanja sa parnim n i jedan kada deluje na stanja sa neparnim n. ta činjenica u stvari znači da su isključena "nefizička" stanja. Takođe je lako videti da ako se zadržimo na prvom članu razvoja (3.41) dobijamo Blohovu aproksimaciju, a drugi član daje H.P. reprezentaciju.

Dalji razvoj teorije možemo tražiti u uopštavanju na spin $S \geq 1/2$. U tom cilju navedimo Goldhiršovu reprezentaciju koja se pokazala kao najuspešnija, ona ima oblik:

$$S^+ = B^+ \sum_{k=0}^{\infty} b_k B^{+k} B^k \quad , \quad S^- = (S^+)^+$$

$$S^z = \sum_{k=0}^{\infty} c_k B^{+k} B^k \tag{3.42}$$

gde je:

$$b_k = \frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{k}\binom{k}{l}(-1)^{k-l}\sqrt{\frac{S(S+1) - f(l)(f(l)+1)}{l+1}}$$

$$c_k = \frac{1}{k!}\sum_{l=0}^{\infty}\binom{k}{l}(-1)^{k-l-1} f(l) \quad , \quad f(l) = (2S+1)\left\{\frac{l}{2S+1}\right\} - S$$

Ova reprezentacija reprodukuje gore navedene rezultate i što je veoma bitno ne razlikuje slučajeve $S = 1/2$ i $S \geq 1$.

*Poglavlje* **4.**

# Bozonska (Glauberova) koherentna stanja u jednodimenzionim sistemima

Sam pojam koherentnih stanja u fizici postoji od ranih dana kvantne mehanike ali ga je ozbiljno razradio Glauber /8/, baveći se problemima optike odnosno kvantne teorije elektromagnetnog zračenja. Ipak, mi ćemo slediti pristup A.S. Davidova /12/, jer ga smatramo pristupačnijim.
Posmatrajmo longitudinalne oscilacije u jednodimenzionom nizu atoma mase M, koji se nalaze na međusobnom rastojanju **a**. Operator energije oscilovanja atoma u odnosu na ravnotežne položaje u reprezentaciji druge kvantizacije dat je sa:

$$H_0 = \frac{1}{2}\sum_k \hbar\Omega_k \left(b_k^+ b_k + b_k b_k^+\right) \tag{4.1}$$

Operatori kreacije i anihilacije fonona sa talasnim brojem k zadovoljavaju komutacione relacije:

$$\left[b, b_{k'}^+\right] = \delta_{kk'} \tag{4.2}$$

Svojstvene vrednosti energije $E_{\tilde{\nu}}$ i sopstvene funkcije $|\tilde{\nu}\rangle$ operatora (4.1) definišu se jednačinom:

$$H_0 |\tilde{\nu}\rangle = E_{\tilde{\nu}} |\tilde{\nu}\rangle \tag{4.3}$$

što daje:

$$E_{\tilde{\nu}} = \sum_k \hbar\Omega_k \left(\nu_k + \frac{1}{2}\right) \tag{4.4}$$

$$|\tilde{\nu}\rangle = |\cdots \nu_k \cdots\rangle = \prod_k (\nu_k!)^{-1/2} \left(b_k^+\right)^{\nu_k} |0\rangle \tag{4.5}$$

Brojevi $\nu_k$ su svojstvene vrednosti operatora broja fonona sa talasnim vektorom **k**:

$$b_k^+ b_k |\nu_k\rangle = \nu_k |\nu_k\rangle \tag{4.6}$$

dok je $\Omega_k$ ugaona frekvencija. Vakuumsko stanje, odnosno stanje bez fonona se definiše uslovom:

$$b_k|0\rangle = 0 \qquad (\forall k) \tag{4.7}$$

i njemu odgovara nulta energija:

$$E_0 = \langle 0|H_0|0\rangle = \frac{1}{2}\sum_k \hbar\Omega_k \tag{4.8}$$

Analizirajmo sada slučaj kada na ovako definisan niz atoma deluje spoljašnja perturbujuća sila. Operator interakcije napišimo u obliku:

$$H_{\text{int}} = F(k)b_k + F^*(k)b_k^+ \tag{4.9}$$

gde parametar $F(k)$ karakteriše intenzitet interakcije. Uvedimo sada u račun unitarni operator:

$$S(\tilde{\beta}) \equiv \exp\sum_k (\beta_k\, b_k^+ - \beta_k^* b_k) \tag{4.10}$$

koristeći operatorske jednakosti:

$$SMS^+ = M + [\Lambda, M] \quad , \quad S = \exp\Lambda$$

$$[\Lambda,[\Lambda,M]] = 0 \quad za \quad \Lambda^+ = -\Lambda \tag{4.11}$$

moguće je sa operatora kreacije $b^+$ i anihilacije $b$ broja fonona u nizu na koji ne dejstvuju spoljašnje sile, preći na nove operatore $a_k^+$ *i* $a_k$ koji karakterišu fonone u nizu na koji dejstvuju spoljašnje sile:

$$\begin{aligned} a_k^+ &= S(\tilde{\beta})b_k^+ S^+(\tilde{\beta}) = b_k^+ - \beta_k^* \\ a_k &= S(\tilde{\beta})b_k S^+(\tilde{\beta}) = b_k - \beta_k \end{aligned} \tag{4.12}$$

Odavde vidimo da se delovanje unitarnog operatora $S(\tilde{\beta})$ na operatore $b_k^+$ i $b_k$ svodi na pomeranje tih operatora za kompleksne brojeve $\beta$ i $\beta^*$, zbog toga se on naziva operator pomeranja. Novodobijeni operator (4.12) zadovoljavaju komutacionu relaciju:

$$[a_k, a_{k'}^+] = \delta_{kk'} \tag{4.13}$$

Operator pomeranja transformiše operator ukupne energije:

$$H = H_0 + H_{\text{int}} \tag{4.14}$$

na dijagonalan oblik:

$$\bar{\bar{H}} = S(\tilde{\beta})HS^+(\tilde{\beta}) = \sum_k \hbar\Omega_k \left( b_k^+ b_k + \frac{1}{2} - |\beta_k|^2 \right) \tag{4.15}$$

ako je zadovoljena jednakost:

$$\hbar\Omega_k \beta_k = F^*(k) \tag{4.16}$$

Vakuumskom stanju niza perturbovanih oscilatora odgovara funkcija $|\bar{\bar{o}}\rangle$ definisana uslovom:

$$a_k |\bar{\bar{0}}\rangle = 0 \tag{4.17}$$

To stanje ima energiju:

$$\bar{\bar{E}}_{\bar{0}} = \langle 0|\bar{\bar{H}}|0\rangle = E_0 - \sum_k \hbar\Omega_k |\beta_k|^2 \tag{4.18}$$

Fononi koji karakterišu oscilovanje atoma perturbovanog niza opisuju se funkcijama:

$$|\bar{\bar{\nu}}\rangle \equiv |\cdots \bar{\bar{\nu}}_k \cdots\rangle = \prod_k (\bar{\bar{\nu}}_k!)^{-1/2} (a_k^+)^{\bar{\bar{\nu}}_k} |\bar{\bar{0}}\rangle \tag{4.19}$$

a njima odgovara energija:

$$E_{\bar{\bar{\nu}}} = E_{\bar{\bar{0}}} + \sum_k \hbar\Omega_k \bar{\bar{\nu}}_k \tag{4.20}$$

gde su $\bar{\bar{\nu}}_k$ svojstvene vrednosti operatora broja fonona perturbovanog niza:

$$a_k^+ a_k \left| \bar{\bar{\nu}}_k \right\rangle = \bar{\bar{\nu}}_k \left| \bar{\bar{\nu}}_k \right\rangle \tag{4.21}$$

Pokušajmo sada da operatore perturbovanog niza izrazimo preko operatora kreacije i anihilacije neperturbovanog niza, jer na taj način ćemo moći bolje da sagledamo stvarno oscilovanje atoma. U tom cilju napišimo jednačinu (4.17) u obliku:

$$a_k \left| \bar{\bar{0}} \right\rangle \equiv S(\tilde{\beta}) b_k S^+(\tilde{\beta}) \left| \bar{\bar{0}} \right\rangle = 0 \tag{4.22}$$

Ovaj uslov će biti ispunjen ako je:

$$S^+(\tilde{\beta}) \left| \bar{\bar{0}} \right\rangle = |0\rangle \tag{4.23}$$

odnosno:

$$\left| \bar{\bar{0}} \right\rangle = S(\tilde{\beta}) |0\rangle \tag{4.24}$$

Pošto funkcija $\left| \bar{\bar{0}} \right\rangle$ zavisi od kompleksnih brojeva $\tilde{\beta}$ zgodno je napisati je u obliku koji će to eksplicitno i pokazivati, odnosno u obliku:

$$\left| \tilde{\beta} \right\rangle = \left| \bar{\bar{0}} \right\rangle = S(\tilde{\beta}) |0\rangle \tag{4.25}$$

A uzimajući u obzir oblik operatora $S(\tilde{\beta})$ možemo pisati:

$$\left| \tilde{\beta} \right\rangle = \prod_k |\beta_k\rangle \tag{4.26}$$

gde je:

$$|\beta_k\rangle = S(\beta_k)|0\rangle \tag{4.27}$$

i

$$S(\beta_k) = \exp(\beta_k b_k^+ - \beta_k^* b_k) = e^{-\frac{1}{2}|\beta_k|^2} e^{\beta_k b_k^+} e^{-\beta_k^* b_k} \tag{4.28}$$

Imajući u vidu jednačine (4.5) i (4.27) jednačinu (4.28) možemo napisati u obliku:

$$|\beta_k\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\beta_k|^2\right) \sum_{\nu_k=0}^{\infty} \frac{\beta_k^{\nu_k}}{\sqrt{\nu_k!}} |\nu_k\rangle \tag{4.29}$$

Iz zadnje jednačine vidimo da funkciju vakuumskog stanja sistema perturbovanih oscilatora možemo prikazati kao superpoziciju fononskih talasnih funkcija sistema neperturbovanog oscilatora. Svaka od tih funkcija ulazi u superpoziciju sa težinom:

$$\langle \nu_k \| \beta_k \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\beta_k|^2\right) \frac{\beta_k^{\nu_k}}{\sqrt{\nu_k!}} \tag{4.30}$$

Verovatnoća da u stanju $|\beta_k\rangle$ bude $\nu$ "fonona" data je Poasonovom raspodelom:

$$\left|\langle \nu \| \beta_k \rangle\right|^2 = \exp\left(-|\beta_k|^2\right)\frac{\beta_k^{2\nu}}{\nu!} \tag{4.31}$$

sa srednjom vrednošću:

$$\langle \nu \rangle = \langle \beta_k | \nu | \beta_k \rangle = |\beta_k|^2 \tag{4.32}$$

Ovde treba uočiti nekoliko bitnih činjenica:

a) Pod dejstvom spoljašnje perturbujuće sile oscilatori menjaju svoje ravnotežne položaje i osciluju oko novih. Ta oscilovanja su opisana fononskim funkcijama $|\bar{\bar{\nu}}_k\rangle$ i ona su stvarna. Međutim ako tih stvarnih fonona nema mi možemo i dalje smatrati da postoje nekakva oscilovanja ali samo u odnosu na ravnotežne položaje koje su oscilatori imali dok nije bila uključena spoljašnja perturbacija. Tim oscilovanjima pridružujemo "fonone" opisane talasnim funkcijama $|\tilde{\nu}_k\rangle$. Jasno je da ovako definisani fononi nisu realni pa ih stoga zovemo "virtuelnim".

b) Ukoliko u sumi (4.29) $\nu_k$ poprimaju sve pozitivne cele vrednosti, broj virtuelnih fonona u stanju $|\beta_k\rangle$ je neodređen, ali postoji određena fazna relacija između talasnih funkcija $|\nu_k\rangle$. Zbog zadnje osobine stanja $|\tilde{\nu}_k\rangle$ se nazivaju "koherentnim". Ovaj termin je uveo Glauber 1963. god. pa se ona često nazivaju "Glauberova koherentna stanja".

O osobinama ovako definisanih stanja moglo bi se dosta reći, međutim, zadržaćemo se samo na onim osobinama koje su od interesa za ovaj rad:

a) Svojstveni vektori $|\tilde{\beta}\rangle$ koherentnih stanja obrazuju normiran bazis u Hilbertovom prostoru:

$$\left|\langle \tilde{\beta} \| \tilde{\beta} \rangle\right|^2 = 1 \quad , \quad \left|\langle \beta_k \| \beta_k \rangle\right|^2 = 1 \tag{4.33}$$

Međutim, vektori $|\beta_k\rangle$, koji se odnose na različite mode nisu ortogonalni, što se lako može videti:

$$\langle \beta_k \| \beta_q \rangle \equiv \langle 0 | S^+(\beta_k) S(\beta_q) | 0 \rangle = \exp\left(\beta_k^* \beta_q - \frac{1}{2}\left(|\beta_k|^2 + |\beta_q|^2\right)\right) \tag{4.34}$$

$$\left|\langle \beta_k \| \beta_q \rangle\right|^2 = \exp\left(-|\beta_k - \beta_q|^2\right) \tag{4.35}$$

Ali se uočava, da sa udaljavanjem brojeva $\beta_k$ i $\beta_q$ u kompleksnoj ravni, proizvod odgovarajućih vektora brzo teži nuli.

b) pokušajmo sada da usrednjimo po koherentnim stanjima proizvod od m kreacionih a anihilacionih operatora koji su dovedeni na normalni proizvod:

$$\langle \tilde{\beta} | b_k^{+m} b_k^m | \tilde{\beta} \rangle = \langle \beta_k | b_k^+ \cdots b_k^+ b_k \cdots b_k | \beta \rangle = \langle 0 | S_k^+ b_k^+ S_k S_k^+ b_k^+ S_k S_k^+ b_k^+ \cdots S_k S_k^+ b_k S_k | 0 \rangle =$$

$$= \langle 0 | (b_k^+ + \beta_k^*)(b_k^+ + \beta_k^*) \cdots (b_k + \beta_k)(b_k + \beta_k) | 0 \rangle = \beta_k^{*m} \beta_k^m = |\beta_k|^{2m} \tag{4.36}$$

Na osnovu zadnje jednakosti možemo tvrditi da ako imamo fukciju od kreacionih i anihilacionih boze operatora, u kojoj su ti operatori dovedeni na normalni proizvod, usrednjavanje te funkcije po koherentnim stanjima se svodi na jednostavnu zamenu operatora $b^{+}$ sa brojem $\beta^{*}$ i operatora $b$ sa brojem $\beta$, odnosno:

$$\left\langle \tilde{\beta} \middle| \Phi\left(b_k^{+m} b_k^{m}\right) \middle| \tilde{\beta} \right\rangle = \Phi\left(\beta_k^{*m} \beta_k^{m}\right) \tag{4.37}$$

c) Srednja vrednost operatora energije slobodnih oscilacija neperturbovanog oscilatora:

$$H_0 = \sum_k \hbar\Omega_k \left( b_k^{+} b_k + \frac{1}{2} \right) \tag{4.38}$$

u koherentnom stanju $|\beta\rangle$ prima oblik:

$$\left\langle \tilde{\beta} \middle| H_0 \middle| \tilde{\beta} \right\rangle = \sum_k \hbar\Omega_k \left( |\beta_k|^2 + \frac{1}{2} \right) > 0 \tag{4.39}$$

Kako je $\beta_k$ proizvoljan kompleksan broj, srednja energija slobodnih oscilacija neperturbovanih oscilatora može poprimiti bilo koju pozitivnu vrednost. Minimum te energije odgovara vrednosti $\beta = 0$:

$$E_{\min} = \min \left\langle \tilde{\beta} \middle| H_0 \middle| \tilde{\beta} \right\rangle = \frac{\hbar}{2} \sum_k \Omega_k \tag{4.40}$$

Srednja vrednost operatora energije (4.15) sistema perturbovanih oscilatora u koherentnom stanju $|\tilde{\beta}\rangle$ je:

$$E_{\tilde{\beta}} = \left\langle \tilde{\beta} \middle| H \middle| \tilde{\beta} \right\rangle = \sum_k \left[ \hbar\Omega_k \left( |\beta_k|^2 + \frac{1}{2} \right) - F(k)\beta_k - F^{*}(k)\beta_k^{*} \right] \tag{4.41}$$

a minimum te energije je:

$$E_{\min} = \min \left\langle \tilde{\beta} \middle| H \middle| \tilde{\beta} \right\rangle = \sum_k \left( \frac{1}{2}\hbar\Omega_k - |F(k)|^2 \right) \tag{4.42}$$

što odgovara već uvedenom uslovu:

$$\beta_k = \frac{F^{*}(k)}{\hbar\Omega_k} \tag{4.43}$$

d) Značajna osobina koherentnih stanja ogleda se u njihovoj vremenskoj evoluciji. Kao što je poznato evolucija kvantnog sistema, opisanog Hamiltonijanom H, definiše se unitarnim operatorom:

$$U(t) = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \tag{4.44}$$

Ako energiju merimo od nivoa nultih oscilacija možemo pisati:

$$H = \hbar\Omega b^{+} b \tag{4.45}$$

U zadnjoj jednačini je izostavljen indeks k jer posmatramo samo jednu modu oscilovanja. U tom slučaju vremenska evolucija koherentnog stanja je:

$$U(t)|\beta\rangle = |\beta\rangle_t = U(t)S(\beta)|0\rangle = \left|e^{-i\Omega t}\beta\right\rangle \tag{4.46}$$

Kao što vidimo vremenska evolucija stanja $|\beta\rangle$ se dobija jednostavnom zamenom broja $\beta$ veličinom:

$$\beta(t) = \beta e^{-i\Omega t} \tag{4.47}$$

Ako sada kompleksnoj veličini $\beta$ pridružimo realna pomeranja q i realne impulse na osnovu izraza:

$$\beta = \frac{1}{\vartheta}\left(q + i\frac{p}{M\Omega}\right) \tag{4.48}$$

gde je:

$$\vartheta = \left(\frac{\hbar}{2M\Omega}\right)^{1/2} \tag{4.49}$$

jednačinu (4.37) možemo napisati u obliku:

$$q(t) = q_0 \cos\Omega t - \frac{p_0}{M\Omega}\sin\Omega t$$

$$p(t) = p_0 \cos\Omega t - M\Omega q_0 \sin\Omega t \tag{4.50}$$

A ovo su u stvari jednačine kretanja klasičnog oscilatora koji zadovoljava početne uslove:

$$p(t=0) = p_0 \quad , \qquad q(t=0) = q_0 \tag{4.51}$$

Zadnja jednačina (4.49) je interesantna iz razloga što iz nje vidimo da koherentno stanje $|\beta(t)\rangle = |p,q\rangle$ ne menja svoj oblik, već samo srednju koordinatu i srednji impuls.

A zadnji stav nas navodi na ideju da u reprezentaciji Glauberovih koherentnih stanja možemo adekvatno tretirati solitone.

Glauber je koristio koherentna stanja pri opisivanju elektromagnetnih talasa. Opravdanje za takav pristup se nalazi u činjenici da se elektromagnetno polje može posmatrati kao sistem oscilatora.

U kvantnoj teoriji magnetnih solitona, mi takođe koristimo koherentna stanja. Opravdanost takvog pristupa ogleda se u tome što sistem spinskih pobuđenja takođe možemo posmatrati kao sistem oscilatora.

*Poglavlje 5.*

# Usrednjavanje Hamiltonijana bez bikvadratnog člana po koherentnim stanjima

U naredna dva poglavlja biće sproveden račun usrednjavanja Hamiltonijana po koherentnim stanjima. Na samom početku, opišimo u kratkim crtama algoritam rada. Prvo se spinski Hamiltonijan predstavlja u H. P. reprezentaciji, zatim se Hamiltonijan usrednjava po koherentnim stanjima. Tim postupkom dobijamo usrednjen Hamiltonijan u diskretnoj slici. Zatim je potrebno tako dobijeni Hamiltonijan napisati u kontinuumu. Prilikom prelaska na kontinuum koriste se dva pravila:

$$\frac{1}{a}\sum_i a\,\Delta i \rightarrow \frac{1}{a}\int dx \tag{5.1}$$

$$\left|\tilde{\alpha}_{i+\rho}\right|^2 = \left|\tilde{\alpha}(x+\rho a)\right|^2 = \left|\tilde{\alpha}\right|^2 + \rho a\left|\tilde{\alpha}\right|_x^2 + \frac{1}{2}a^2\left|\tilde{\alpha}\right|_{xx}^2 \tag{5.2}$$

gde je $a$-parametar niza.

Očigledno smo se u razvoju zaustavili na članu proporcionalnom $a^2$, i u radu su uvek odbacivani članovi višeg reda po $a$, što neće uvek biti napominjano. Pored toga u razvoju H. P. reprezentacije smo se zaustavili na članu proporcionalnom 1/S. U toj aproksimaciji se i ovde zadržavamo, odnosno odbacujemo članove proporcionalne $1/S^2$. Na kraju se vrši sumiranje po $\rho$, pri čemu $\rho$ uzima vrednosti $\pm 1$. Kao rezultat te operacije potiru se članovi proporcionalni $\rho a$, a ispred ostalih članova se pojavljuje faktor 2.

Kao što je rečeno u uvodu, dobijeni Hamiltonijan će se koristiti za traženje solitonskih jednačina kretanja. U samom računu ta činjenica je uzeta u obzir prilikom izbora graničnih uslova.

Izraz, koji dobijamo ovakvom procedurom, dalje se posmatra kao klasična Hamiltonova funkcija u kojoj su $\tilde{\alpha}$ i $i\hbar\tilde{\alpha}^*$ kao konjugovane promenljive. Ovde se samo po sebi potavlja pitanje odakle nam pravo da kvantni Hamiltonijan, koji smo usrednjavali metodima kvantne statistike, na kraju posmatramo kao klasičan izraz? Da bi dali odgovor na ovo pitanje uočimo prvo da kvantne osobine Hamiltonijana potiču od toga što su u njemu spinovi tretirani kao kvantni operatori. Kao što je poznato iz elementarnih kurseva kvantne fizike, projekcija spina na izabranu osu ne može imati bilo koju vrednost već samo celobrojne vrednosti $m\hbar$. Tako je relativna promena projekcije spina manja što je spin veći. U graničnom slučaju, kada $S \rightarrow \infty$, $\hbar \rightarrow 0$, (klasični limes) promene projekcije spina možemo posmatrati kao kontinuirane. Naravno ovo ne predstavlja egzaktan odgovor na postavljeno pitanje ali u tim okvirima se može tražiti odgovor. Ovde još napomenimo da u klasičnom limesu veličina $\hbar S$ ostaje konstantna, odnosno:

$$\lim_{\substack{\hbar\to 0 \\ S\to\infty}} \hbar S = S_c \tag{5.3}$$

Kompletan račun u ovom radu sproveden je u sistemu jedinica $\hbar = 1$, zbog toga su moguće pojave određenih zabuna. Da bi to izbegli potrebno je dati par napomena o dimenzijama uvedenih konstanti, tako imamo da je:

$$D|=|\frac{E}{\hbar^2}, \quad \nu J = \frac{E}{\hbar^4}, \quad J \sim \frac{E}{\hbar^2} \tag{5.4}$$

Pa je dimenziono korektno ispisan Hamiltonijan, sa bezdimenzionim spinovima:

$$\begin{aligned} H = &-g\mu_B B\hbar \sum_j \left(S_j^z - S\right) - \frac{1}{2} J \sum_{j,\rho} \left[\left(\vec{S}_j \vec{S}_{j+\rho}\right) - (1-\Delta)S^2\right] - D\hbar^2 \sum_{j,\rho} \left(S_j^{z2} - S^2\right) - \\ &-\frac{1}{2} \nu J\hbar^4 \sum_{j,\rho} \left[\left(\vec{S}_j \vec{S}_{j+\rho}\right)^2 - (1-\Delta)^2 S^4\right] \end{aligned} \tag{5.5}$$

Konačno, pređimo na konkretna izračunavanja.
Računamo sa Hamiltonijanom:

$$H = H_Z + H_A + H_E \tag{5.6}$$

gde je:

$$H_Z = -g\mu_B B \sum_j \left(S_j^z - S\right) \tag{5.7}$$

$$H_E = -\frac{1}{2} J \sum_{j,\rho} \left(\vec{S}_j \vec{S}_{j+\rho}\right)_\Delta - (1-\Delta)S^2 \tag{5.8}$$

$$H_A = -D \sum_j \left(S_j^{z2} - S^2\right) \tag{5.9}$$

$$\left(\vec{S}_j \vec{S}_{j+\rho}\right)_\Delta = S_j^x S_{j+\rho}^x + S_j^y S_{j+\rho}^y + (1-\Delta) S_j^z S_{j+\rho}^z = \frac{1}{2}\left(S_j^+ S_{j+\rho}^- + S_j^- S_{j+\rho}^+\right) + (1-\Delta) S_j^z S_{j+\rho}^z \tag{5.10}$$

Sada ćemo redom usrednjavati članove po koherentnim stanjima. Prvo prelazimo sa spinskih na bozonske operatore u H.P. reprezentaciji:

$$S_j^z = S - B_j^+ B_j \tag{5.11}$$

Ako sada ovaj izraz usrednjimo dobijamo:

$$\langle \alpha | S_j^z | \alpha \rangle = \langle \alpha | S - B_j^+ B_j | \alpha \rangle = S - \left|\alpha_j\right|^2 \tag{5.12}$$

u klasičnoj slici je:

$$S^z = \cancel{S\cos\Theta} \qquad S(1- \tag{5.13}$$

Ako zadnji izraz uporedimo sa izrazom (5.7) vidimo da je:

$$|\alpha|^2 = S\cancel{\cos\Theta} \qquad S(1-\cos\Theta) \tag{5.14}$$

međutim u klasičnom limesu očigledno je da koherentna amplituda $|\alpha|$ divergira. Zbog toga prelazimo na novu veličinu koja nije divergentna, tako da izraz (5.7) dobija oblik:

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{\sqrt{S}} \tag{5.15}$$

tako da izraz (5.12) dobija oblik:

$$\langle \alpha | S_j^z | \alpha \rangle = S\left(1 - |\alpha_j|^2\right) \tag{5.16}$$

pa je usrednjeni deo Hamiltonijana (5.7):

$$\langle \alpha | H_Z | \alpha \rangle = g\mu_B BS \sum_j |\tilde{\alpha}_j|^2 \tag{5.17}$$

pređimo sa sume na integral na osnovu pravila (5.1), tada izraz (5.17) dobija oblik:

$$\langle \alpha | H_Z | \alpha \rangle = \frac{g\mu_B BS}{a} \int_{-\infty}^{\infty} dx |\tilde{\alpha}|^2 \tag{5.18}$$

Ponovimo sada istu proceduru za izraz (5.8). Prvo usrednjimo $S_i^+$ i $S_i^-$:

$$\langle \alpha | S_j^+ | \alpha \rangle = \langle \alpha | \sqrt{2S} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \left[ \frac{B_j^{+k} B_j^k}{S^k} + \frac{1}{S} \frac{k(k-1)}{2} \frac{B_j^{+k-1} B_j^{k-1}}{S^{k-1}} \right] B_j | \alpha \rangle =$$

$$= \sqrt{2S} \left\{ \sqrt{1 - \frac{1}{2} |\tilde{\alpha}_j|^2}\, \tilde{\alpha}_j + \frac{1}{2S} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k k(k-1) |\tilde{\alpha}_j|^{2k-1} \tilde{\alpha}_j \right\} \tag{5.19}$$

Iskoristimo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k k x^{(k-1)} = \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k x^k = \frac{d}{dx} \sqrt{1 - \frac{1}{2} x} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} x}} \tag{5.20}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k k^2 x^{(k-1)} = \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^k x^k = \frac{d}{dx} x \frac{d}{dx} \sqrt{1 - \frac{1}{2} x} = -\frac{1}{4} \frac{1 - \frac{1}{4} x}{\left(1 - \frac{1}{2} x\right)^{3/2}} \tag{5.21}$$

tako dobijamo:

$$\frac{1}{2S}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{k}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}k(k-1)\left|\tilde{\alpha}_j\right|^{2(k-1)}\tilde{\alpha}_j=-\frac{1}{32S}\frac{\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2\tilde{\alpha}_j}{\left(1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2\right)^{3/2}} \tag{5.22}$$

Pa je:

$$\left\langle\alpha\left|S_j^+\right|\alpha\right\rangle=\sqrt{2}S\sqrt{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2}\,\tilde{\alpha}_j\left[1-\frac{1}{32S}\frac{\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2}{\left(1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2\right)^2}\right] \tag{5.23}$$

$$\left\langle\alpha\left|S_j^-\right|\alpha\right\rangle=\sqrt{2}S\sqrt{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2}\,\tilde{\alpha}_j^*\left[1-\frac{1}{32S}\frac{\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2}{\left(1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2\right)^2}\right] \tag{5.24}$$

Tako da je:

$$\left\langle\alpha\left|S_j^+S_{j+\rho}^-+S_j^-S_{j+\rho}^+\right|\alpha\right\rangle=2S^2\sqrt{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2}\left(\tilde{\alpha}_j\alpha_{j+\rho}^*+\tilde{\alpha}_{j+\rho}\alpha_j^*\right)\cdot$$

$$\cdot\left[1-\frac{1}{32S}\frac{\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2}{\left(1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2\right)^2}\right]\left[1-\frac{1}{32S}\frac{\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2}{\left(1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2\right)^2}\right] \tag{5.25}$$

Pređimo sada na kontinuum po pravilu (5.2), tako je:

$$\left(\tilde{\alpha}_j\alpha_{j+\rho}^*+\tilde{\alpha}_{j+\rho}\alpha_j^*\right)=2\left|\tilde{\alpha}\right|^2+\rho a\left|\tilde{\alpha}\right|_x^2+\frac{1}{2}a^2\left|\tilde{\alpha}\right|_x^2-a^2\left|\tilde{\alpha}_x\right|^2 \tag{5.26}$$

$$\sqrt{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2}=\left(1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}\right|^2-\frac{1}{2}\rho a\left|\tilde{\alpha}\right|_x^2-\frac{1}{4}a^2\left|\tilde{\alpha}\right|_{xx}^2\right)^{1/2}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}\right|^2\right)^{1/2}\left[1+\left(-\frac{1}{2}\rho a\frac{\left|\tilde{\alpha}\right|_x^2}{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}\right|^2}-\frac{1}{4}a^2\frac{\left|\tilde{\alpha}\right|_{xx}^2}{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}\right|^2}\right)\right]^{1/2}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)^{1/2}\left[1-\frac{1}{4}\rho a\frac{|\tilde{\alpha}|_x^2}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2}-\frac{1}{8}a^2\frac{|\tilde{\alpha}|_{xx}^2}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2}-\frac{1}{32}a^2\frac{\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)^2}\right] \tag{5.27}$$

prilikom izvođenja zadnjeg izraza korišćen je razvoj:

$$(1+x)^{1/2}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2 \tag{5.28}$$

zatim imamo:

$$\sqrt{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_j|^2}\sqrt{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2}=1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2-\frac{1}{4}\rho a|\tilde{\alpha}|_x^2-\frac{1}{8}a^2|\tilde{\alpha}|_{xx}^2-\frac{1}{32}a^2\frac{\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2} \tag{5.29}$$

množeći izraze (5.26) i (5.29) dobijamo:

$$\sqrt{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_j|^2}\sqrt{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2}\left(\tilde{\alpha}_j\alpha_{j+\rho}^*+\tilde{\alpha}_{j+\rho}\alpha_j^*\right)=2|\tilde{\alpha}|^2-|\tilde{\alpha}|^4+\rho a|\tilde{\alpha}|_x^2\left(1-|\tilde{\alpha}|^2\right)+$$
$$+\frac{1}{2}a^2|\tilde{\alpha}|_{xx}^2\left(1-|\tilde{\alpha}|^2\right)-a^2|\tilde{\alpha}_x|^2\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)-\frac{1}{4}a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2-\frac{1}{16}a^2\frac{|\tilde{\alpha}|^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2} \tag{5.30}$$

Dalje, zanemarujući član proporcionalan $1/S^2$ možemo pisati:

$$\left[1-\frac{1}{32S}\frac{|\tilde{\alpha}_j|^2}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_j|^2\right)^2}\right]\left[1-\frac{1}{32S}\frac{|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right)^2}\right]=$$

$$=1-\frac{1}{32S}\frac{|\tilde{\alpha}_j|^2}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_j|^2\right)^2}-\frac{1}{32S}\frac{|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right)^2} \tag{5.31}$$

Zatim, koristeći izraze (5.25) i:

$$(1-x)^{-2}=1-2x+3x^2 \tag{5.32}$$

dobijamo:

$$\left[1-\frac{1}{32S}\frac{|\tilde{\alpha}_{ji}|^2}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_{ji}|^2\right)^2}\right]\left[1-\frac{1}{32S}\frac{|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_{j+\rho i}|^2\right)^2}\right]=1-\frac{1}{32S}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)^2}\left[2|\tilde{\alpha}|^2+\right.$$

$$\left.+\rho a|\tilde{\alpha}|^2_x\frac{1+\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2}+\frac{1}{2}a^2|\tilde{\alpha}|^2_{xx}\frac{1+\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2}+a^2\left(|\tilde{\alpha}|^2_x\right)^2\frac{1+\frac{1}{4}|\tilde{\alpha}|^2}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)^2}\right] \qquad (5.33)$$

Ako sada pomnožimo izraze (5.33) i (5.30), zatim sumiramo $\rho=\pm 1$ i integralimo sa graničnim uslovima:

$$|\tilde{\alpha}|^2_x(\pm\infty)=|\tilde{\alpha}|^2_{xx}(\pm\infty)=\cdots=0 \qquad (5.34)$$

dobijamo:

$$\sum_{j,\rho}\langle\alpha\,|S_j^+S_{j+\rho}^-+S_j^-S_{j+\rho}^+|\,\alpha\rangle=\frac{2S^2}{a}\int_{-\infty}^{\infty}dx\left\{2|\tilde{\alpha}|^2-|\tilde{\alpha}|^4-a^2|\tilde{\alpha}_x|^2\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)-\frac{1}{4}a^2\left(|\tilde{\alpha}|^2_x\right)^2\frac{1-\frac{3}{4}|\tilde{\alpha}|^2}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{32S}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)^2}\left[4|\tilde{\alpha}|^4-2|\tilde{\alpha}|^6-a^2|\tilde{\alpha}_x|^2\left(2|\tilde{\alpha}|^2-|\tilde{\alpha}|^4\right)+a^2\left(|\tilde{\alpha}|^2_x\right)^2\frac{\frac{1}{8}|\tilde{\alpha}|^4+|\tilde{\alpha}|^2-1}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2}\right]\right\}$$

(5.35)

Prilikom integracije korišćena je jednakost;

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{|\tilde{\alpha}|^{2n}|\tilde{\alpha}|^2_{xx}}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)^p}=-\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{|\tilde{\alpha}|^{2(n-1)}\left(|\tilde{\alpha}|^2_x\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)^p}\left(\frac{p}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2}+n-p\right) \qquad (5.36)$$

Na osnovu izraza (5.16) možemo pisati:

$$\langle\alpha\,|S_j^zS_{j+\rho}^z|\,\alpha\rangle=S^2\left(1-|\tilde{\alpha}_j|^2\right)\left(1-|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right) \qquad (5.37)$$

Ako sada iskoristimo izraz (5.2) imamo da je:

$$\langle \alpha | S_j^z S_{j+\rho}^z | \alpha \rangle = S^2\left(1-|\tilde{\alpha}|^2\right)\left(1-|\tilde{\alpha}|^2-\rho a|\tilde{\alpha}|_x^2-\frac{1}{2}a^2|\tilde{\alpha}|_{xx}^2\right) \tag{5.38}$$

Posle sumiranja po $\rho$ i integracije dobijamo:

$$\sum_{j+\rho}\langle \alpha | S_j^z S_{j+\rho}^z | \alpha \rangle = \frac{2}{a}\int_{-\infty}^{\infty} dx S^2\left(1-2|\tilde{\alpha}|^2+|\tilde{\alpha}|^4-\frac{1}{2}a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2\right) \tag{5.39}$$

Ako saberemo izraze (5.35) i (5.39) i od njih odbijemo član $(1-\Delta)S^2$, pri tom primenivši klasični limes objašnjen na početku ovog poglavlja, tako što uvodimo:

$$JS_c^2=\tilde{J} \quad , \quad DS_c^2=\tilde{D} \quad , \quad g\mu_B S_c=\mu_{cl}$$

Konačno dobijamo:

$$\langle \alpha | H_E | \alpha \rangle = -\frac{\tilde{J}}{a}\int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ 2|\tilde{\alpha}|^2-|\tilde{\alpha}|^4-a^2|\tilde{\alpha}_x|^2\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)-\frac{1}{4}a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2\frac{1+\frac{3}{4}|\tilde{\alpha}|^2}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2}\right.$$

$$+(1-\Delta)\left(-2|\tilde{\alpha}|^2+|\tilde{\alpha}|^4-\frac{1}{2}a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2\right)-$$

$$\left.-\frac{1}{32S}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)^2}\left[4|\tilde{\alpha}|^4-2|\tilde{\alpha}|^6-a^2|\tilde{\alpha}_x|^2\left(2|\tilde{\alpha}|^2-|\tilde{\alpha}|^4\right)+a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2\frac{\frac{1}{8}|\tilde{\alpha}|^4+|\tilde{\alpha}|^2+1}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2}\right]\right\} \tag{5.40}$$

Dalje imamo da je:

$$\begin{aligned}\langle \alpha | S_j^{z2} | \alpha \rangle &= \langle \alpha | \left(S-B_j^+B_j\right)^2 | \alpha \rangle = \langle \alpha | S^2-2SB_j^+B_j+B_j^+B_j+B_j^{+2}B_j^2 | \alpha \rangle = \\ &= S^2\left(1+|\tilde{\alpha}|^4+\left(\frac{1}{S}-2\right)|\tilde{\alpha}|^2\right)\end{aligned} \tag{5.41}$$

Pa je:

$$\langle \alpha | H_A | \alpha \rangle = -\frac{\tilde{D}}{a}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(|\tilde{\alpha}|^4+\left(\frac{1}{S}-2\right)|\tilde{\alpha}|^2\right) \tag{5.42}$$

Ako saberemo članove $H_Z$, $H_A$, $H_E$, dobijamo krajnje rešenje koje možemo podeliti na klasični deo i kvantni deo, koji je posledica uračunavanja člana proporcionalnog 1/S u razvoju H.P. reprezentacije:

$$\tilde{H}^{cl} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ -\tilde{D}\left(|\tilde{\alpha}|^4 - 2|\tilde{\alpha}|^2\right) - \tilde{J}\left[ 2|\tilde{\alpha}|^2 - |\tilde{\alpha}|^4 - a^2|\tilde{\alpha}_x|^2\left(1 - \frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right) - \right.\right.$$

$$-\frac{1}{4}a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2 \frac{1-\frac{3}{4}|\tilde{\alpha}|^2}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2} + \left(|\tilde{\alpha}|^4 - 2|\tilde{\alpha}|^2 - \frac{1}{2}a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2\right) -$$

$$\left.\left. -\Delta\left(|\tilde{\alpha}|^4 - 2|\tilde{\alpha}|^2 - \frac{1}{2}a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2\right)\right] + \mu_{cl} B|\tilde{\alpha}|^2 \right\} \tag{5.43}$$

$$H^{kv} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} dx \left\{ 2\tilde{D}|\tilde{\alpha}|^2 + \frac{\tilde{J}}{32S}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)^2}\left[ 4|\tilde{\alpha}|^4 - 2|\tilde{\alpha}|^6 - a^2|\tilde{\alpha}_x|^2\left(2|\tilde{\alpha}|^2 - |\tilde{\alpha}|^4\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2 \frac{\frac{1}{8}|\tilde{\alpha}|^4 + |\tilde{\alpha}|^2 - 1}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2} \right]\right\} \tag{5.44}$$

Bitno je naglasiti da ovaj izraz donekle koriguje formulu datu u ref. /7/ u delu koji se odnosi na kvantne popravke, što je veoma važno, s obzirom da se planira uračunavanje uticaja kvantnih efekata na jednačine kretanja solitona u Hajzenbergovom lancu.

*Poglavlje* **6.**

# Usrednjavanje bikvadratnog člana Hamiltonijana

Ovaj član je izdavojen u posebno poglavlje iz razloga što račun, sproveden prilikom njegovog usrednjavanja, nosi težište ovog rada. Sada ćemo, samo u kratkim crtama pokazati račun i navesti dobijene rezultate.
Koristeći izraz (5.6) i komutacione relacije spinskih operaratora lako se pokazuje da je:

$$\left(\vec{S}_j\vec{S}_{j+\rho}\right)_\Delta = \frac{1}{4}\left[S_j^{-2}S_{j+\rho}^{+\ 2} + S_j^{+2}S_{j+\rho}^{-\ 2} + 2S_j^zS_{j+\rho}^-S_{j+\rho}^+ + 2S_j^-S_j^+S_{j+\rho}^z + 2S_j^-S_j^+S_{j+\rho}^-S_{j+\rho}^+\right] +$$

$$+\frac{1}{2}(1-\Delta)\left[2S_j^zS_j^+S_{j+\rho}^-S_{j+\rho}^z + 2S_j^-S_j^zS_{j+\rho}^zS_{j+\rho}^+ - S_j^+S_{j+\rho}^-S_{j+\rho}^z - S_j^-S_j^zS_{j+\rho}^+ -\right.$$

$$\left.-S_j^-S_{j+\rho}^zS_{j+\rho}^+ - S_j^zS_j^+S_{j+\rho}^-\right] + (1-\Delta)^2 S_j^{z2}S_{j+\rho}^{z\ 2} \tag{6.1}$$

polazeći od izraza za $S^-$ i $S^+$ u H.P. reprezentaciji dobili smo da je:

$$\langle \alpha | S_j^{-2} | \alpha \rangle = 2S^2\tilde{\alpha}_j^{*2}\left(1 - \frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_j|^2 - \frac{1}{4S}\right) \tag{6.2}$$

$$\langle \alpha | S_j^{+2} | \alpha \rangle = 2S^2\tilde{\alpha}_j^2\left(1 - \frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_j|^2 - \frac{1}{4S}\right) \tag{6.3}$$

tako imamo:

$$\langle \alpha | S_j^{-2}S_{j+\rho}^{+\ 2} + S_j^{+2}S_{j+\rho}^{-\ 2} | \alpha \rangle = 4S^4\left(\tilde{\alpha}_j^2\tilde{\alpha}_{j+\rho}^{*\ 2} + \tilde{\alpha}_j^{*2}\tilde{\alpha}_{j+\rho}^2\right)\left[1 - \frac{1}{2S} + \left(\frac{1}{8S} - \frac{1}{2}\right)\left(|\tilde{\alpha}_j|^2 + |\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}|\tilde{\alpha}_j|^2|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right] \tag{6.4}$$

Zatim na osnovu izraza (5.11), (5.19) i (5.20) dobijamo:

$$\langle \alpha | S_j^zS_{j+\rho}^-S_{j+\rho}^+ + S_j^-S_j^+S_{j+\rho}^z | \alpha \rangle = 2S^3\left[|\tilde{\alpha}_j|^2 + |\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2 - \frac{1}{2}\left(|\tilde{\alpha}_j|^4 + |\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^4\right) - 2|\tilde{\alpha}_j|^2|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(|\tilde{\alpha}_j|^4|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2 + |\tilde{\alpha}_j|^2|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^4\right)\right] \tag{6.5}$$

dalje imamo:

$$\langle \alpha | S_j^-S_j^+S_{j+\rho}^-S_{j+\rho}^+ | \alpha \rangle = 4S^4|\tilde{\alpha}_j|^2|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\left[1 - \frac{1}{2}\left(|\tilde{\alpha}_j|^2 + |\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right) + \frac{1}{4}|\tilde{\alpha}_j|^2|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right] \tag{6.6}$$

$$\langle\alpha\,|S_j^zS_j^+S_{j+\rho}^-S_{j+\rho}^z+S_j^-S_j^zS_{j+\rho}^zS_{j+\rho}^+|\,\alpha\rangle=2S^4\sqrt{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_j|^2}\sqrt{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2}\left(\tilde{\alpha}_j^*\tilde{\alpha}_{j+\rho}+\tilde{\alpha}_j\tilde{\alpha}_{j+\rho}^*\right)\cdot$$

$$\cdot\left[1-\left(|\tilde{\alpha}_j|^2+|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right)+|\tilde{\alpha}_j|^2|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2+\frac{1}{32S}\left(\frac{7|\tilde{\alpha}_j|^2-3|\tilde{\alpha}_j|^4}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_j|^2\right)^2}\left(1-|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right)+\frac{7|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2-3|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^4}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right)^2}\left(1-|\tilde{\alpha}_j|^2\right)\right)\right] \tag{6.7}$$

$$\langle\alpha\,|S_j^-S_j^zS_{j+\rho}^++S_j^+S_{j+\rho}^-S_{j+\rho}^z+S_j^-S_{j+\rho}^zS_{j+\rho}^++S_j^zS_j^+S_{j+\rho}^-|\,\alpha\rangle=2S^3\sqrt{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_j|^2}\sqrt{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2}\cdot$$

$$\cdot\left(\tilde{\alpha}_j^*\tilde{\alpha}_{j+\rho}+\tilde{\alpha}_j\tilde{\alpha}_{j+\rho}^*\right)\left\{2-\left(|\tilde{\alpha}_j|^2+|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right)-\frac{1}{32S}\left[\frac{7|\tilde{\alpha}_j|^2-3|\tilde{\alpha}_j|^4}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_j|^2\right)^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{|\tilde{\alpha}_j|^2}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_j|^2\right)^2}\left(1-|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right)+\frac{7|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2-3|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^4}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right)^2}+\frac{|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right)^2}\left(1-|\tilde{\alpha}_j|^2\right)\right]\right\} \tag{6.8}$$

$$\langle\alpha\,|S_j^{z^2}S_{j+\rho}^{z\;2}|\,\alpha\rangle=S^4\left[1+|\tilde{\alpha}_j|^4+|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^4+\left(\frac{1}{S}-2\right)\left(|\tilde{\alpha}_j|^2+|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2+|\tilde{\alpha}_j|^4|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2+\right.\right.$$

$$\left.\left.+|\tilde{\alpha}_j|^2|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^4+|\tilde{\alpha}_j|^4|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right)+|\tilde{\alpha}_j|^4|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^4-4\left(\frac{1}{S}-1\right)|\tilde{\alpha}_j|^2|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right] \tag{6.9}$$

Zbir izraza od (6.4) do (6.9) predstavlja usrednjeni bikvadratni član Hamiltonijana u diskretnoj slici. Međutim, zbog pojednostavljenja daljeg računa. kojim ćemo preći na kontinuum, ovaj deo Hamiltonijana je bolje napisati u obliku 12 sabiraka koje ćemo sada navesti:

$$\tilde{H}_1=-\frac{\nu JS^4}{2}\sum_{j,\rho}\left(1-\frac{1}{2S}\right)\left(\tilde{\alpha}_j^2\tilde{\alpha}_{j+\rho}^{*\,2}+\tilde{\alpha}_j^{*2}\tilde{\alpha}_{j+\rho}^2\right) \tag{6.10}$$

$$\tilde{H}_2=-\frac{\nu JS^4}{2}\sum_{j,\rho}\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{8S}\right)\left(\tilde{\alpha}_j^2\tilde{\alpha}_{j+\rho}^{*\,2}+\tilde{\alpha}_j^{*2}\tilde{\alpha}_{j+\rho}^2\right)\left(|\tilde{\alpha}_j|^2+|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right) \tag{6.11}$$

$$\tilde{H}_3 = -\frac{\nu JS^4}{2}\left[\frac{1}{S}+\left(\frac{1}{S}-2\right)(1-\Delta)^2\right]\sum_{j,\rho}\left(\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2+\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2\right) \tag{6.12}$$

$$\tilde{H}_4 = -\frac{\nu JS^4}{2}\frac{1}{4}\sum_{j,\rho}\left(\tilde{\alpha}_j^2\tilde{\alpha}_{j+\rho}^{*\,2}+\tilde{\alpha}_j^{*2}\tilde{\alpha}_{j+\rho}^2\right)\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2 \tag{6.13}$$

$$\tilde{H}_5 = -\nu JS^4\left[1-\frac{1}{S}+2\left(1-\frac{1}{S}\right)(1-\Delta)^2\right]\sum_{j,\rho}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2 \tag{6.14}$$

$$\tilde{H}_6 = -\nu JS^4\left[-\frac{1}{4S}+\frac{1}{2}(1-\Delta)^2\right]\sum_{j,\rho}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^4+\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^4 \tag{6.15}$$

$$\tilde{H}_7 = -\nu JS^4\left[\frac{1}{4S}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{S}\right)(1-\Delta)^2\right]\sum_{j,\rho}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2\left(\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2+\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2\right) \tag{6.16}$$

$$\tilde{H}_8 = -\nu JS^4\left[\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(1-\Delta)^2\right]\sum_{j,\rho}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^4\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^4 \tag{6.17}$$

$$\tilde{H}_9 = -\nu JS^4(1-\Delta)\left(1-\frac{1}{S}\right)\sum_{j,\rho}\left(\tilde{\alpha}_j\tilde{\alpha}_{j+\rho}^*+\tilde{\alpha}_j^*\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right)\sqrt{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2} \tag{6.18}$$

$$\tilde{H}_{10} = -\nu JS^4(1-\Delta)\left(-1+\frac{1}{2S}\right)\sum_{j,\rho}\left(\tilde{\alpha}_j\tilde{\alpha}_{j+\rho}^*+\tilde{\alpha}_j^*\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right)\sqrt{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2}\left(\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2+\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2\right) \tag{6.19}$$

$$\tilde{H}_{11} = -\nu JS^4(1-\Delta)\sum_{j,\rho}\left(\tilde{\alpha}_j\tilde{\alpha}_{j+\rho}^*+\tilde{\alpha}_j^*\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right)\sqrt{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2 \tag{6.20}$$

$$\tilde{H}_{12} = -\nu JS^4(1-\Delta)\frac{1}{32S}\sum_{j,\rho}\left(\tilde{\alpha}_j\tilde{\alpha}_{j+\rho}^*+\tilde{\alpha}_j^*\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right)\sqrt{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{7\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2-3\left|\tilde{\alpha}_j\right|^4}{\left(1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2\right)^2}\left(1-\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2\right)+\frac{7\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2-3\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^4}{\left(1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2\right)^2}\left(1-\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2\right)\right] \tag{6.21}$$

Sada je još ostalo da se ovih 12 članova napiše u kontnuumu. Polazeći od izraza (5.2) imamo:

$$\left(\tilde{\alpha}(x+\rho a)\right)^2 = \tilde{\alpha}^2+2a\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}_x+a^2\left(\tilde{\alpha}\tilde{\alpha}_{xx}+\tilde{\alpha}_x^2\right) \tag{6.22}$$

pa je:

$$\tilde{\alpha}_j^2\tilde{\alpha}^{*\,2}_{j+\rho} + \tilde{\alpha}_j^{*2}\tilde{\alpha}_{j+\rho}^2 = 2|\tilde{\alpha}|^4 + 2\rho a|\tilde{\alpha}|^2|\tilde{\alpha}|_x^2 + a^2\left[|\tilde{\alpha}|^2|\tilde{\alpha}|_{xx}^2 - 4|\tilde{\alpha}|^2|\tilde{\alpha}_x|^2 + \left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2\right] \tag{6.23}$$

Ako sada ovaj izraz uvrstimo u izraz (6.10) zatim pređemo sa sume na integral, na osnovu pravila (5.1), i sumiramo po $\rho$ , pri tome koristeći izraz (5.36) dobijamo:

$$\tilde{H}_1 = -\frac{\nu JS^4}{a}\left(1-\frac{1}{2S}\right)\int_{-\infty}^{\infty} dx\left[2|\tilde{\alpha}|^4 - 4a^2|\tilde{\alpha}|^2|\tilde{\alpha}_x|^2\right] \tag{6.24}$$

koristeći izraze (6.23) i (5.2) možemo pisati:

$$\left(\tilde{\alpha}_j^2\tilde{\alpha}^{*\,2}_{j+\rho} + \tilde{\alpha}_j^{*2}\tilde{\alpha}_{j+\rho}^2\right)\left(|\tilde{\alpha}_j|^2 + |\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right) = 4|\tilde{\alpha}|^6 + 6\rho a|\tilde{\alpha}|^2|\tilde{\alpha}|_x^2 +$$

$$+a^2\left[3|\tilde{\alpha}|_{xx}^2 - 8|\tilde{\alpha}|^4|\tilde{\alpha}_x|^2 + 4|\tilde{\alpha}|^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2\right] \tag{6.25}$$

što posle integrcije i sumiranja po $\rho$ daje:

$$\tilde{H}_2 = -\frac{\nu JS^4}{a}\left(\frac{1}{4S}-1\right)\int_{-\infty}^{\infty} dx\left[2|\tilde{\alpha}|^6 - 4a^2|\tilde{\alpha}|^4|\tilde{\alpha}_x|^2 - a^2|\tilde{\alpha}|^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2\right] \tag{6.26}$$

Koristeći ponovo izraze (6.23) i (5.2) istim postupkom se dobijaju i sledeća 3 člana u koninuumu:

$$\tilde{H}_3 = -\frac{2\,\nu JS^4}{a}\left(\frac{1}{S}+\left(\frac{1}{S}-2\right)(1-\Delta)^2\right)\int_{-\infty}^{\infty} dx|\tilde{\alpha}|^2 \tag{6.27}$$

$$\tilde{H}_4 = -\frac{\nu JS^4}{4a}\int_{-\infty}^{\infty} dx\left[2|\tilde{\alpha}|^8 - 3a^2|\tilde{\alpha}|^4\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2 - 4a^2|\tilde{\alpha}|^6|\tilde{\alpha}_x|^2\right] \tag{6.28}$$

$$\tilde{H}_5 = -\frac{\nu JS^4}{a}\left(-\frac{1}{S}+1+2\left(1-\frac{1}{S}\right)(1-\Delta)^2\right)\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(2|\tilde{\alpha}|^4 - a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2\right) \tag{6.29}$$

da bi izračunali 6. član koristimo razvoj:

$$|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^4 = \left(|\tilde{\alpha}|^2 + \rho a|\tilde{\alpha}|_x^2 + \frac{1}{2}a^2|\tilde{\alpha}|_{xx}^2\right)^2 = |\tilde{\alpha}|^4 + 2\rho a|\tilde{\alpha}|^2|\tilde{\alpha}|_x^2 + a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2 + a^2|\tilde{\alpha}|_{xx}^2|\tilde{\alpha}|^2 \tag{6.30}$$

na osnovu kojega, gore opisanom procedurom dobijamo:

$$\tilde{H}_6 = -\frac{2\nu JS^4}{a}\left(-\frac{1}{4S}+\frac{1}{2}(1-\Delta)^2\right)\int_{-\infty}^{\infty} dx\, 2|\tilde{\alpha}|^4 \tag{6.31}$$

$$\tilde{H}_7 = -\frac{4\nu JS^4}{a}\left(\frac{1}{4S}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{S}\right)(1-\Delta)^2\right)\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(|\tilde{\alpha}|^6 - a^2|\tilde{\alpha}|^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2\right) \tag{6.32}$$

$$\tilde{H}_8 = -\frac{\nu JS^4}{a}\left(\frac{1}{2}+(1-\Delta)^2\right)\int_{-\infty}^{\infty} dx\left(|\tilde{\alpha}|^8 - 2a^2|\tilde{\alpha}|^4\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2\right) \tag{6.33}$$

$$\tilde{H}_9 = -\frac{2\nu JS^4}{a}\left(1-\frac{1}{S}\right)(1-\Delta)\int_{-\infty}^{\infty} dx\left[2|\tilde{\alpha}|^2 - |\tilde{\alpha}|^4 + \frac{1}{4}a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2 - \right.$$

$$\left. -a^2|\tilde{\alpha}_x|^2\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right) - \frac{1}{16}a^2\frac{|\tilde{\alpha}|^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)}\right] \tag{6.34}$$

$$\tilde{H}_{10} = -\frac{4\nu JS^4}{a}\left(\frac{1}{2S}-1\right)(1-\Delta)\int_{-\infty}^{\infty} dx\left[2|\tilde{\alpha}|^4 - |\tilde{\alpha}|^6 + \frac{3}{4}a^2|\tilde{\alpha}|^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2 - \frac{1}{2}a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2 - \right.$$

$$\left. -a^2|\tilde{\alpha}|^2|\tilde{\alpha}_x|^2\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right) - \frac{1}{16}a^2\frac{|\tilde{\alpha}|^4\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)}\right] \tag{6.35}$$

$$\tilde{H}_{11} = -\frac{2\nu JS^4}{a}(1-\Delta)\int_{-\infty}^{\infty} dx\left[2|\tilde{\alpha}|^6 - |\tilde{\alpha}|^8 + a^2\left(\frac{7}{4}|\tilde{\alpha}|^4 - 2|\tilde{\alpha}|^2\right)\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2 - \right.$$

$$\left. -a^2|\tilde{\alpha}|^4|\tilde{\alpha}_x|^2\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right) - \frac{1}{16}a^2\frac{|\tilde{\alpha}|^6\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)}\right] \tag{6.36}$$

Zatim, koristeći razvoj:

$$\left(1+x^2\right)^{-2}=1-2x+3x^2 \tag{6.37}$$

dobijamo:

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2\right)^2}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}\right|^2\right)^2}\left[1+\rho a\frac{\left|\tilde{\alpha}\right|_x^2}{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}\right|^2}+\frac{1}{2}a^2\frac{\left|\tilde{\alpha}\right|_{xx}^2}{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}\right|^2}+\frac{3}{4}a^2\frac{\left(\left|\tilde{\alpha}\right|_x^2\right)}{\left(1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}\right|^2\right)^2}\right] \tag{6.38}$$

Zatim, koristeći (5.2) imamo:

$$\left(7\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2-3\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^4\right)\left(1-\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2\right)=3\left|\tilde{\alpha}\right|^6-10\left|\tilde{\alpha}\right|^4+7\left|\tilde{\alpha}\right|^2+\rho\left|\tilde{\alpha}\right|_x^2a\left(6\left|\tilde{\alpha}\right|^4-13\left|\tilde{\alpha}\right|^2+7\right)+$$

$$+\frac{1}{2}a^2\left|\tilde{\alpha}\right|_{xx}^2\left(6\left|\tilde{\alpha}\right|^4-13\left|\tilde{\alpha}\right|^2+7\right)-3a^2\left(\left|\tilde{\alpha}\right|_x^2\right)\left(1-\left|\tilde{\alpha}\right|^2\right) \tag{6.39}$$

množeći zadnji izraz sa izrazom (5.30) dobijamo:

$$\left(6\left|\tilde{\alpha}\right|^8-20\left|\tilde{\alpha}\right|^6+7\left|\tilde{\alpha}\right|^4\right)\left(1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}\right|^2\right)-\frac{1}{2}a^2\left|\tilde{\alpha}_x\right|^2\left(-3\left|\tilde{\alpha}\right|^8+16\left|\tilde{\alpha}\right|^6-27\left|\tilde{\alpha}\right|^4+14\left|\tilde{\alpha}\right|^2\right)+$$

$$+\rho a\left|\tilde{\alpha}\right|_x^2\left(-9\left|\tilde{\alpha}\right|^8+38\left|\tilde{\alpha}\right|^6-50\left|\tilde{\alpha}\right|^4+21\left|\tilde{\alpha}\right|^2\right)-\frac{1}{4}a^2\left(\left|\tilde{\alpha}\right|_x^2\right)^2\left(39\left|\tilde{\alpha}\right|^6-122\left|\tilde{\alpha}\right|^4+111\left|\tilde{\alpha}\right|^2-28\right)+$$

$$+\frac{1}{2}a^2\left|\tilde{\alpha}\right|_{xx}^2\left(-9\left|\tilde{\alpha}\right|^8+38\left|\tilde{\alpha}\right|^6-50\left|\tilde{\alpha}\right|^4+21\left|\tilde{\alpha}\right|^2\right)-\frac{1}{16}a^2\frac{\left(\left|\tilde{\alpha}\right|_x^2\right)^2}{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}\right|^2}\left(3\left|\tilde{\alpha}\right|^8-10\left|\tilde{\alpha}\right|^6+7\left|\tilde{\alpha}\right|^4\right) \tag{6.40}$$

ako sada sve ovo pomnožimo sa izrazom (6.38) zatim integralimo i sumiramo po $\rho$ dobijamo:

$$\sum_{j,\rho}\left(\tilde{\alpha}_j\tilde{\alpha}_{j+\rho}^*+\tilde{\alpha}_j^*\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right)\sqrt{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2}\sqrt{1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2}\frac{7\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2-3\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^4}{\left(1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right|^2\right)^2}\left(1-\left|\tilde{\alpha}_j\right|^2\right)=$$

$$=\frac{2}{a}\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\left|\tilde{\alpha}\right|^2\right)^2}\left\{-3\left|\tilde{\alpha}\right|^{10}+16\left|\tilde{\alpha}\right|^8-27\left|\tilde{\alpha}\right|^6+14\left|\tilde{\alpha}\right|^4-\frac{1}{2}a^2\left|\tilde{\alpha}_x\right|^2\left(-3\left|\tilde{\alpha}\right|^8+16\left|\tilde{\alpha}\right|^6-\right.\right.$$

$$-27|\tilde{\alpha}|^4+14|\tilde{\alpha}|^2\Big)-\frac{1}{16}a^2\frac{\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2}\left(21|\tilde{\alpha}|^8-146|\tilde{\alpha}|^6+361|\tilde{\alpha}|^4-328|\tilde{\alpha}|^2+56\right)\Bigg\} \quad (6.41)$$

sličnim postupkom dobijamo i:

$$\sum_{j,\rho}\left(\tilde{\alpha}_j\tilde{\alpha}^*_{j+\rho}+\tilde{\alpha}^*_j\tilde{\alpha}_{j+\rho}\right)\sqrt{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_j|^2}\sqrt{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2}\frac{7|\tilde{\alpha}_j|^2-3|\tilde{\alpha}_j|^4}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}_j|^2\right)^2}\left(1-|\tilde{\alpha}_{j+\rho}|^2\right)=$$

$$=\frac{2}{a}\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)^2}\Bigg\{-3|\tilde{\alpha}|^{10}+16|\tilde{\alpha}|^8-27|\tilde{\alpha}|^6+14|\tilde{\alpha}|^4-\frac{1}{2}a^2|\tilde{\alpha}_x|^2\Big(-3|\tilde{\alpha}|^8+16|\tilde{\alpha}|^6-$$

$$-27|\tilde{\alpha}|^4+14|\tilde{\alpha}|^2\Big)-\frac{1}{16}a^2\frac{\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2}\left(21|\tilde{\alpha}|^8-146|\tilde{\alpha}|^6+361|\tilde{\alpha}|^4-328|\tilde{\alpha}|^2+56\right)\Bigg\} \quad (6.42)$$

Vidimo da su zadnja dva člana ista u kontinuumu, što je i logično, jer usrednjena slika oko bilo koja dva čvora mora biti ista. Međutim, usrednjavanje izraza (6.41) je mnogo koplikovanije nego izraza (6.42), pa stoga je bitno napomenuti da se račun može znatno uprostiti, ako se pre prelaska na kontinuum izvrši translacija za jedan čvor.
Sabirajući zadnja dva izraza dobijamo i 12. član bikvadratnog dela Hamiltonijana:

$$\tilde{H}_{12}=-\frac{\nu JS^4}{8a}\frac{1-\Delta}{S}\int_{-\infty}^{\infty}dx\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)^2}\Bigg\{-3|\tilde{\alpha}|^{10}+16|\tilde{\alpha}|^8-27|\tilde{\alpha}|^6+14|\tilde{\alpha}|^4-\frac{1}{2}a^2|\tilde{\alpha}_x|^2\Big(-3|\tilde{\alpha}|^8+$$

$$+16|\tilde{\alpha}|^6-27|\tilde{\alpha}|^4+14|\tilde{\alpha}|^2\Big)-\frac{1}{16}a^2\frac{\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2}\left(21|\tilde{\alpha}|^8-146|\tilde{\alpha}|^6+361|\tilde{\alpha}|^4-328|\tilde{\alpha}|^2+56\right)\Bigg\}$$

(6.43)

Ako saberemo sve članove koje smo izračunali, konačno i ceo bikvadratni član možemo napisati u kontinuumu:

$$
\begin{aligned}
\langle \alpha | H_B | \alpha \rangle = -\frac{\nu J S^4}{a}\int_{-\infty}^{\infty} dx \Bigg\{ & |\tilde\alpha|^8 \Delta^2 + |\tilde\alpha|^6\left(-4\Delta^2 + \frac{1}{S}\left(-\frac{1}{2} + 2\Delta^2\right)\right) + |\tilde\alpha|^4\left(-2\Delta + 6\Delta^2 - \frac{4}{S}\Delta^2\right) + \\
& + |\tilde\alpha|^2\left(4\Delta - 4\Delta^2 + \frac{1}{2S}\left(1-\Delta+4\Delta^2\right)\right) + \frac{1}{S}(1-\Delta) - \frac{1}{S}\frac{1-\Delta}{1-\frac{1}{2}|\tilde\alpha|^2} - a^2|\tilde\alpha_x|^2\Bigg[ |\tilde\alpha|^6\Delta + \\
& + |\tilde\alpha|^4\left(-\frac{3}{4S} - 4\Delta + \frac{7}{4S}\Delta\right) + |\tilde\alpha|^2\left(-1 + 5\Delta + \frac{2}{S}(1-2\Delta)\right) + 2 - 2\Delta + \frac{1}{S}\left(-\frac{7}{4} + \frac{7}{4}\Delta\right) - \\
& - \frac{1}{4S}\frac{1-\Delta}{1-\frac{1}{2}|\tilde\alpha|^2}\Bigg] - a^2\left(|\tilde\alpha|^2_x\right)^2\Bigg[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\Delta + 2\Delta^2 - \frac{37}{32S} + \frac{69}{32S}\Delta - \frac{2}{S}\Delta^2 + |\tilde\alpha|^2\Bigg(-\frac{3}{8} + \frac{19}{8}\Delta - \\
& - 6\Delta^2 + \frac{1}{S}\left(\frac{47}{64} - \frac{159}{64}\Delta + 4\Delta^2\right)\Bigg) + |\tilde\alpha|^4\left(\frac{1}{16} - \frac{25}{16}\Delta + \frac{13}{2}\Delta^2 + \frac{1}{S}\left(-\frac{5}{16} + \frac{21}{16}\Delta - \frac{5}{2}\Delta^2\right)\right) + \\
& + |\tilde\alpha|^6\left(\frac{1}{2}\Delta - 3\Delta^2 + \frac{1}{S}\left(\frac{3}{64} - \frac{15}{64}\Delta + \frac{1}{2}\Delta^2\right)\right) + |\tilde\alpha|^8\left(-\frac{1}{16}\Delta + \frac{1}{2}\Delta^2\right) + \frac{3}{32S}\frac{1-\Delta}{1-\frac{1}{2}|\tilde\alpha|^2}\Bigg]\Bigg\}
\end{aligned}
\qquad (6.44)
$$

Međutim, korisnije je zadnji izraz napisati iz dva dela, od kojih će prvi deo biti klasični a drugi kvantna popravka. Takođe, ta dva dela ćemo podeliti na izotropne i anizotropne delove i preći na klasičan limes:

$$\lim_{\substack{\hbar\to 0\\ S\to\infty}} \nu J S^4 = \tilde\nu \tilde J_c$$

Tako dobijamo:

$$\tilde H_B^{is} = \tilde\nu \tilde J_c \left\{ a^2|\tilde\alpha_x|^2\left(2-|\tilde\alpha|^2\right) + \frac{1}{4}a^2\left(|\tilde\alpha|^2_x\right)^2\left(1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}|\tilde\alpha|^2}\right)\right\} \qquad (6.45)$$

$$\tilde{H}_{B}^{an_1} = \tilde{\nu}\tilde{J}_c\Delta\left\{ -4|\tilde{\alpha}|^2 + 2|\tilde{\alpha}|^4 + a^2|\tilde{\alpha}_x|^2\left(-2+5|\tilde{\alpha}|^2 - 4|\tilde{\alpha}|^4 + |\tilde{\alpha}|^6\right) + \right.$$

$$\left. + a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2\left( -\frac{1}{4}|\tilde{\alpha}|^4 + |\tilde{\alpha}|^2 - \frac{5}{4} - \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2}\right)\right\} \tag{6.46}$$

$$H_{B}^{an_2} = \tilde{\nu}\tilde{J}_c\Delta^2\left\{4|\tilde{\alpha}|^2 - 6|\tilde{\alpha}|^4 + 4|\tilde{\alpha}|^6 - |\tilde{\alpha}|^8 + 2a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2\left(1-|\tilde{\alpha}|^2\right)^2\right\} \tag{6.47}$$

$$\tilde{H}_{is\,B}^{kv} = \tilde{\nu}\tilde{J}_c\frac{1}{S}\left\{-1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2} + a^2|\tilde{\alpha}_x|^2\left(-\frac{7}{4} + 2|\tilde{\alpha}|^2 - \frac{3}{4}|\tilde{\alpha}|^4 - \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2}\right) + \right.$$

$$\left. + a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2\left(\frac{3}{16}|\tilde{\alpha}|^2 - \frac{1}{2} - \frac{3}{32}\frac{1}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2} - \frac{9}{16}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)^2} + \frac{3}{32}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)^3}\right)\right\} \tag{6.48}$$

$$\tilde{H}_{an_1\,B}^{kv} = \tilde{\nu}\tilde{J}_c\frac{\Delta}{S}\left\{1+\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2 + \frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^6 - \frac{1}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2} + a^2|\tilde{\alpha}_x|^2\left(\frac{7}{4} - 4|\tilde{\alpha}|^2 + \frac{7}{4}|\tilde{\alpha}|^4 + \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2}\right) + \right.$$

$$\left. + a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2\left(-\frac{15}{16}|\tilde{\alpha}|^2 + \frac{3}{2} + \frac{3}{32}\frac{1}{1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2} + \frac{9}{16}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)^2} - \frac{3}{32}\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}|\tilde{\alpha}|^2\right)^3}\right)\right\} \tag{6.49}$$

$$\tilde{H}_{an_2\,B}^{kv} = \tilde{\nu}\tilde{J}_c\frac{\Delta^2}{S}\left\{-2|\tilde{\alpha}|^2\left(1-|\tilde{\alpha}|^2\right)^2 - 2a^2\left(|\tilde{\alpha}|_x^2\right)^2\left(1-|\tilde{\alpha}|^2\right)\right\} \tag{6.50}$$

Ovde bismo mogli završiti. Međutim, radi sticanja potpunije slike o ovom radu treba naglasiti da najviše uloženog rada stoji iza zadnja dva poglavlja, što se na prvi pogled ne vidi, u kojima je sproveden konkretan račun.
U toku rada, kao što je napomenuto u uvodu, uočene su greške u nekim ranijim radovima /6/ i /7/, koji su se bavili istom problematikom. Naša sigurnost, u pogledu tačnosti navedenih rezultata potiče otuda što su iste rezultate dobili i prof.dr.Darko Kapor (mentor) i prof.dr.Stanoje Stojanović, nezavisno jedan od drugoga. Rad /6/ je bio prvi rad posvećen ovoj problematici. Autori su razvijali H.P. reprezentaciju do osmog reda po boze operatorima, i onda pretpostavili da postoji određena veza između dimenzije solitona i veličine $\sqrt{S}$. Na taj način, polazeći od različitih oblika ove zavisnosti, mogu se od istog Hamiltonijana dobiti potpuno različite jednačine kretanja. Suština greške je u tome što nisu uočili da se fizički merljive veličine zadaju ne sa $\alpha$, već sa $\tilde{\alpha}$ koje u sebe "apsorbuje" $\sqrt{S}$, tako da ove zavisnosti ustvari nema. Zbog toga je bilo veoma važno napisati korektan Hamiltonijan koji će poslužiti kao osnova za dalje račune.
Konačnu reč o vrednosti ovog rada treba prepustiti onima koji će se dalje koristiti ovim Hamiltonijanom, mada je već sada jasno da će biti neophodno izvršiti još niz aproksimacija na njemu da bi se mogli dobiti upotrebljivi rezultati.
Napomenimo i to da su ovi rezultati prezentovani na XIV jugoslovenskom simpozijumu o f.k.m. /13/, u Vrnjačkoj Banji, septembra 1993.

# Literatura

/1./ Schrödinger E // Proc. Roy. Irish. Acad. Ser. A. (1941) pp 491-514
/2./ M.Barma: Physical Review B 12 (1975) 2710-2715
/3./ E.L. Nagaev: Magnetiki so slozhnymi obmennymi vzaimodeistviyami "Nauka" ,Moskva 1988
/4./ J. Tjon, J. Wright, Phys. Rev. B 15 (1977), 3470
/5./ J.Mišić: Solitoni u klasičnom feromagnetnom lancu sa anizotropijom tipa XXZ, diplomski rad, PMF, Novi Sad (1985)
/6./ Zhu-Pei-Shi, Guoxiang Huang, Ruibao Tao: Phys. Rev. B 42 (1990), 747-750
/7./ D.V. Kapor, M.J. Škrinjar, S.D. Stojanović, PMF-Univerzitet u Novom Sadu, Zbornik radova, knjiga 18, (1988)
/8./ R. Glauber: Phys. Rev. 131, (1963), 2766-2788
/9./ B. Tošić, S. Stojanović, M. Škrinjar, D. Kapor, Lj. Mašković i J. Šetrajčić, SFIN 5 (1992), 27-49
/10./ J.S. Smart: Effective Field Theory of Magnetism, N.B. Sanders, Philadelphia (1966) /ruski prevod "Mir", moskva (1968)
/11./ A.S. Davydov: Kvantovaya Mehanika II, "Nauka", Moskva (1973)
/12./ A.S. Davydov: Solitony v molekulyarnyh sistemah "Naukova dumka" (1984)
/13./ D. Kapor, M.J. Škrinjar, S.D. Stojanović, I. Arsenić: Solitoni u Hajzenbergovom modelu sa bikvadratnom izmenom, Saopštenje na XIV Jug. simpozijumu o f.k.m, Vrnjačka banja (1993)
/14./ T. Holstein and H. Primakoff: Phys. Rev. 58. (1940) 1098