



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU



Disipativna dinamika samerljivog Frenkel-Kontorova modela pod dejstvom spoljašnjih sila

- MASTER RAD -

Mentor: dr Slobodan Radošević

Kandidat: Igor Sokolović

Novi Sad, 2016

*Zahvaljujem se dr Petru Malom na sprovedenom istraživanju
i na svom znanju koje je podelio sa mnom.*

Zahvaljujem se porodici koja mi je uvek pružala beskrajnu podršku.

Sažetak

Pored već dobro utvrđenih činjenica vezanih za Frenkel-Kontorova model, Farejeve nizove i Kantorovu funkciju, u ovom radu su prikazani rezultati dosadašnjih istraživanja i istraživanja sprovedenih u toku izrade ovog rada na temu odziva samerljivog Frenkel-Kontorova modela na dejstvo kombinacije delovanja jednolične i naizmenične sile. Ispitivan je generalizovan samerljiv Frenkel-Kontorova model sa asimetričnim deformacionim substratnim potencijalom pri tri različite vrednosti deformacionog parametra. Posebna pažnja je posvećena načinu pojave i relativnim veličinama subharmonijskih Šapiro stepenika između prvog i drugog harmonijskog Šapiro stepenika, kao i ispitivanju potpunosti đavoljeg stepeništa između prvog i drugog harmonijskog Šapiro stepenika. Prikazane su zavisnosti širine odabranih subharmonijskih Šapiro stepenika, njihov broj i njihova lokacija u zavisnosti od promene parametara amplitude naizmenične sile, deformacionog parametra i amplitude ravnomerne sile. Takođe je pokazano da odzivna funkcija srednje brzine čestica pri određenim vrednostima parametra sistema može obrazovati potpuno đavolje stepenište.

Dissipative dynamics of commensurate Frenkel-Kontorova model under the influence of external forces

Abstract

Besides presenting some of the well established facts on Frenkel-Kontorova model, Farey sequences and Cantor function, this Master thesis presents the results of some previously published research papers and the research conducted in the making of this thesis on the subject of Frenkel-Kontorova model under the influence of the combination of dc and ac forces. We have examined the behavior of generalized Frenkel-Kontorova model with asymmetric deformable substrate potential for three values of deformation parameter. The main goal of research presented in this paper is the appearance and relative sizes of subharmonic Shapiro steps which are present between the first and second harmonic Shapiro step, as well as the appearance of complete Devil's staircase in this range. This thesis presents the dependence of subharmonic Shapiro steps' widths, their number and their location on the value of deformation parameter, amplitude of the oscillatory force and the amplitude of the uniform force. It is shown that the function of averaged particles' velocities can form a complete Devil's staircase under certain system parameters.

Sadržaj

Uvod

1 Frenkel-Kontorova model	3
1.1 Osnovno stanje	5
1.2 Samerljiva konfiguracija	8
2 Dejstvo ravnomerne sile na samerljivi FK model	12
2.1 Midltononovo pravilo o nezaobilaženju	13
2.2 Kretanje čestica pod dejstvom \bar{F}	14
2.3 Klizeći režim	15
2.4 Oslobođanje lanca	17
3 Dejstvo naizmenične i ravnomerne sile na samerljivi FK model	20
3.1 Celobrojno rastojanje između čestica $\omega \in \mathbb{Z}$	22
3.2 Polucelo srednje rastojanje između čestica, $\omega = \frac{1}{2}$	24
3.3 Generalizovani FK model	28
4 Farejevi nizovi	31
4.1 Konstrukcija	34
5 Detaljna analiza Šapiro stepenika	40
5.1 Relativne veličine Šapiro stepenika	41
5.1.1 Kritična sila i prvi harmonijski Šapiro stepenik	41
5.1.2 Stepenik $\frac{3}{2}$	42
5.1.3 Stepenici $\frac{4}{3}$ i $\frac{5}{2}$	44
5.1.4 Stepenici $\frac{5}{4}$ i $\frac{7}{4}$	45
5.1.5 Stepenici $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{5}$ i $\frac{9}{5}$	45
5.1.6 Stepenici viših Farejevih skupova	47
5.1.7 Zaključci	49
5.2 Raspon Šapiro stepenika	51
5.2.1 $r = 0.01$	51
5.2.2 $r = 0.25$	52
5.2.3 $r = 0.5$	53
5.3 Ukupan broj Šapiro stepenika	54

6	Fraktalna dimenzija Kantorove funkcije	57
6.1	Kantorov skup i Kantorova funkcija	57
6.2	Potpunost đavoljeg stepeništa	58
6.3	Fraktalna dimenzija svih dobijenih funkcija $\bar{v}(\bar{F})$	60
6.3.1	$r=0.01$	61
6.3.2	$r=0.25$	63
6.3.3	$r=0.5$	65
7	Zaključak	66
A	Program za analizu	67

Uvod

Frenkel-Kontorova model opisuje jednodimenzioni nelinearni fizički sistem sa prisutnom frustracijom koja je posledica takmičenja, u opštem slučaju, dve različite konfiguracije osnovnog stanja od kojih jedna predstavlja minimum energije čestica smeštenih u substratni potencijal dok druga odgovara minimumu energije čestica sa harmonijskom interakcijom između prvih suseda. Sama furstracija i diskretnost konfiguracije izuzetno otežava traženje minimuma energije konfiguracije i nije ga moguće analitički pronaći već se pribegava numeričkim metodama.

Dejstvo ravnomerne sile izaziva kretanje cele konfiguracije dok u kombinaciji sa naizmeničnoim silom dolazi do efekata sinhronizacije koji se ocrtava kao niz platoa u odzivnoj funkciji srednje brzine čestica. Efekat sinhronizacije frekvencija sopstvenih oscilacija čestica i frekvencije spoljnične sile prisutan je u ne malom broju jednodimenzionih i dvodimenzionih fizičkih sistema sa sličnom postavkom. U prethodnih tridesetak godina ispitivan je efekat sinhronizacije koji se, između ostalog, javlja prilikom propagacije talasa gustine električnog naboja i talasa gustine spina [[1] - [8]], u Džozefsonim spojevima i nizovima Džozefsonovih spojeva ozračenih spoljašnjim naizmeničnim zračenjem [[9]-[13]] i u superprovodnim nanožicama [[14] - [15]]. U svim ovim sistemima dolazi do pojave Šapiro stepenika.

Frenkel-Kontorova model kao jedan od najjednostavnijih modela u kom dolazi do pojave Šapiro stepenika služi kao odlična osnova ispitivanju realnih sistema i teorijski zahtevnijih modela. Rezultati ostvareni na Frenkel-Kontorova modelu po dejstvu ravnomernih i naizmeničnih spoljašnjih sila umnogome liče na rezultate dobijene u spomenutim sistemima i svi zaključci doneseni prilikom ispitivanja Frenkel-Kontorova modela mogu se, direktno ili posredno, primeniti na komplikovanije sisteme.

Ovaj rad je podeljen na tri konceptualne celine. Prva celina se odnosi na prezentovanje opšte poznatih karakteristika Frenkel-kontorova modela u glavi 1 i 2 i Farejevih nizova u glavi 4. Druga celina se sastoji od glave 3 i opisuje rezultate dosadašnjih istraživanja na temu pojave subharmonijskih Šapiro stepenika pod dejstvu ravnomerne i naizmenične sile na samerljivi Frenkel-Kontorova model. Treća celina predstavlja originalne rezultate istraživanja sprovedenog u izradi ovog rada i saстоji se od glave 5 u kojoj je ispitivana priroda subharmonijskih rezonanci i glave 6 u kojoj je ispitivana potpunost đavoljeg stepeništa.

Postavka Frenkel-Kontorova modela biće opisana u glavi 1 gde će se uvesti Lagranžijan i Hamiltonijan sistema iz kojih se može pronaći apsolutno mirujuća konfiguracija. Uvešće se pojma srednjeg rastojanja između čestica i uz pomoć dve teoreme će se dokazati postojanje samerljive konfiguracije. Pokazane karakteristike osnovnog stanja samerljive konfiguracije koristiće se u obliku transformacija simetrije u narednim glavama.

Mirujući Frenkel-Kontorova model se pokreće delovanjem ravnomerne sile na način koji će biti opisan u glavi 2. Pokazaće se prelaz sistema iz mirujućeg stanja u stanje kolektivnog kretanja u slučaju jednočestičnog i višečestičnog modela. Kritična vrednost ravnomerne sile

koja indukuje kolektivno kretanje konfiguracije Frenkel-Kontorova modela igraće bitnu ulogu u određivanju svojstva dinamike i pod dejstvom dodatnih sila.

Glava 3 će uvesti efekte dejstva naizmenične sile u kombinaciji sa ravnomernom silom na samerljivi Frenkel-Kontorova model od kojih će se posebna pažnja posvetiti pojavi efekta sinhronizacije u obliku harmonijskih i subharmonijskih rezonanci nazvanih Šapiro stepenicima. Pokazaće se rezultati pređasnijih istraživanja oblika i funkcionalnih zavisnosti harmonijskih Šapiro stepenika od promene intenziteta ravnomerne i naizmenične sile kao i od deformacije substratnog potencijala. Predstaviće se metoda izračunavanja maksimalnog Ljapunovljevog eksponenta koja je pokazala da u posmatranom sistemu ne dolazi do pojave haotičnog kretanja i da se uz pomoć ove metode mogu primetiti Šapiro stepenici. Uvešće se asimetrični deformacioni substratni potencijal zbog jasnije izraženosti subharmonijskih rezonanci u ovakvoj postavci Frenkel-Kontorova modela. U ovoj glavi se naslućuje distribucija širina Šapiro stepenika koja prati Farejevu konstrukciju.

Pojava Farejeve konstrukcije kao zakonitost po kojoj se javljaju subharmonijski Šapiro stepenici iziskivala je pružanje pažnje Farejevim nizovima u glavi 4 pre nastavka istraživanja subharmonijskih Šapiro stepenika. Pokazaće se neke ključne osobine Farejevih nizova i mehanizmi prelazaka iz nižih u više Farejeve nizove. Takođe će se pokazati i rezultat nesputavane Farejeve konstrukcije koja dovodi do stvaranja Stern-Brokot drveta koje će imati izuzetno bitnu ulogu u budućim razmatranjima, kao i primenjivost Farejeve konstrukcije prilikom stvaranja skupa svih racionalnih brojeva.

Glava 5 će pokazati originalne rezultate detaljnog ispitivanja subharmonijskih Šapiro stepenika koji se javljaju između prvog i drugog harmonijskog stepenika pod dejstvom kombinacije ravnomerne i naizmenične sile. Cela analiza sprovedena u ovoj glavi odnosiće se na Frenkel-Kontorova model pod određenim skupom parametara od kojih će neki biti fiksirani dok će se drugi menjati diskretno ili skoro kontinualno. Doneće se zaključci vezani za način pojave subharmonijskih Šapiro stepenika, pokazaće se njihova lokacija u odzivnoj funkciji srednje brzine čestica i ispitaće se ukupan broj subharmonijskih Šapiro stepenika koji se javljaju u posmatranom opsegu.

Doneti zaključci i rezultati o subharmonijskim Šapiro stepenicima biće generalizovani u glavi 6 uvođenjem Kantorove funkcije i đavoljeg stepeništa pomoću kojih će se pokazati pri kom skupu parametara sistema srednja brzina čestica može da obrazuje potpuno đavolje stepenište, odnosno koji će parametri sistema obezbediti pojavu svih subharmonijskih stepenika. Takva analiza omogućena je ispitivanjem Minkovski-Bulgan fraktalne dimenzije funkcije srednje brzine čestica od amplitude ravnomerne sile pri fiksiranim ostalim parametrima sistema. Pokazaće se da se u Frenkel-Kontorova sistemu ispitivanom u ovom radu mogu pojaviti dve različite vrste potpunog đavoljeg stepeništa.

Na posletku prilog A opisaće osnovne postavke programa za analizu korištenog u svim analizama istraživanja sprovedenog u izradi ovog rada.

Glava 1

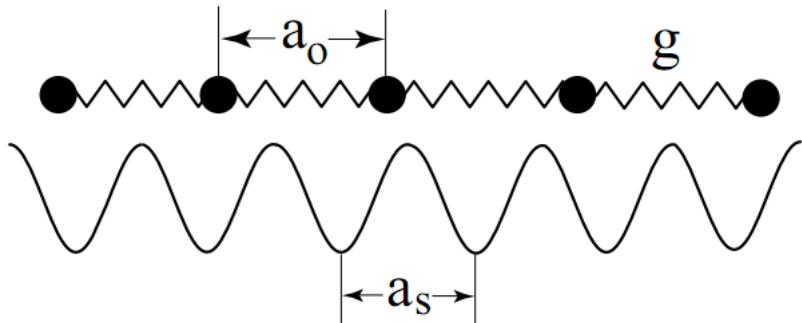
Frenkel-Kontorova model

Frenkel-Kontorova model (FK model) opisuje jednodimenzioni lanac čestica smešten u spoljašnji potencijal [16].

Frenkel-Kontorova model je prost mehanički model koji ilustruje pojam frustracije. Frustracija u FK modelu se sastoji u takmičenju dve vrste interakcija [17]: međučestičnog potencijala između najbližih suseda koji teži da se čestice rasporedi ekvidistantno sa međusobnim razmakom a_0 , i spoljašnjeg potencijala koji teži da rasporedi čestice ekvidistantno u minimume sa međusobnim razmakom od a_s .

Na slici 1.1 je prikazana uprošćena šema Frenkel-Kontorova modela. Označene su sve relevantne veličine čije vrednosti definišu ponašanje sistema.

Efekat frustracije proizvodi bogata dinamička svojstva prostog mehaničkog modela kao što je Frenkel-Kontorova model [17]. Upravo zbog ispitivanja efekata frustracije, model je prvo bitno spomenut od strane dva nezavisna autora Prandl [18] i Delindžer [19] 1928. i 1929. godine. Kasnije su model zajedno razvili Frenkel i Kontorova [20] iz istog razloga, 1938. godine.



Slika 1.1: Uprošćena šema Frenkel-Kontorova modela kao jednodimenzionog lanca čestica smeštenih u spoljašnji potencijal. Slika preuzeta iz [17]

Dinamička svojstva FK modela se opisuju koristeći ukupni i pojedinačni Lagranžijan ili Hamiltonijan sistema u koji ulaze doprinosi obe vrste ponecijala.

Harmonijski deo potencijalne energije j -te čestica lanca se sastoji od doprinosa harmonijske interakcije j -te čestice sa dve susedne čestice:

$$g(u_{j+1} - u_j - a_0)^2 \quad \text{i} \quad g(u_j - u_{j-1} - a_0)^2 \quad (1.1)$$

U jednačini (1.1) položaji čestica u lancu su predstavljeni sa u_j , dok je $u_{j+1} - u_j$ razdaljina između dve susedne čestice. Ravnotežno rastojanje čestica je označeno sa a_0 što predstavlja rastojanje između čestica u odsustvu spoljašnjeg potencijala. Elastična konstanta harmonijske interakcije najbližih suseda predstavljena je sa g .

Ukupan doprinos potencijalnoj energiji harmonijskih interakcija svih N čestica je:

$$U_{\text{int}} = \frac{g}{2} \sum_j (u_{j+1} - u_j - a_0)^2 \quad (1.2)$$

Svaka od čestica lanca takođe oseti i spoljašnji potencijal koji je periodičan sa periodom a_s i čiji maksimalni intenzitet, odnosno visina potencijalne barijere, iznosi $\frac{K}{(2\pi)^2}$. U standardnom FK modelu su sve čestice izložene istoj vrsti spoljašnjeg potencijala što podrazumeva da potencijalna energija čestice koja potiče od spoljašnjeg potencijala zavisi samo od trenutne pozicije date čestice. Stoga je zbirni doprinos potencijalnoj energiji celog lanca koji potiče od spoljašnjeg potencijala jednak zbiru pojedinačnih doprinsosa potencijala svake čestice u spoljašnjem potencijalu:

$$U_{\text{sub}} = \frac{K}{(2\pi)^2} \sum_j \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi u_j}{a_s} \right) \right] \quad (1.3)$$

Spoljašnji potencijal U_{sub} se naziva substratnim potencijalom zbog fizičkih problema u kojima je FK model ostvariv.

Ukupna potencijalna energija celog sistema je napokon:

$$U = U_{\text{int}} + U_{\text{sub}} \quad (1.4)$$

Ukupna kinetička energija je zbir kinetičkih energija svake čestice:

$$T = \frac{m_a}{2} \sum_j \left(\frac{du_j}{dt} \right)^2 \quad (1.5)$$

Poznavajući ukupnu potencijalnu i kinetičku energiju, Lagranžijan sistema se konstruiše kao:

$$L = \sum_j \left\{ \frac{m_a}{2} \left(\frac{du_j}{dt} \right)^2 - \frac{K}{(2\pi)^2} \left[1 - \cos \left(\frac{2\pi u_j}{a_s} \right) \right] - \frac{g}{2} (u_{j+1} - u_j - a_0)^2 \right\} \quad (1.6)$$

Standardni FK model nema spoljašnjih sila i stoga su jednačine kretanja:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{u}_j} - \frac{\partial L}{\partial u_j} = 0 \quad (1.7)$$

Kada je period substratnog potencijala $a_s = 1$, Hamiltonijan sistema postaje:

$$H = \sum_j \left\{ \frac{m_a}{2} \left(\frac{du_j}{dt} \right)^2 + \frac{K}{(2\pi)^2} [1 - \cos(2\pi u_j)] + \frac{g}{2} (u_{j+1} - u_j - a_0)^2 \right\} \quad (1.8)$$

Jednačina kretanja bilo koje čestice se dobija korišćenjem izraza (1.7):

$$m_a \frac{d^2 u_j}{dt^2} + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi u_j) - g(u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j) = 0 \quad (1.9)$$

1.1 Osnovno stanje

Stacionarno stanje konfiguracije čestica zadovoljava jednačinu (1.9) tako da da nema ubrzanja čestica, odnosno $\frac{d^2 u_j}{dt^2} = 0$ za svaku česticu. Jednačine kretanja čestica se tada svode na:

$$u_{j+1} = 2u_j + \frac{K}{2\pi g} \sin(2\pi u_j) - u_{j-1} \quad (1.10)$$

Sistem od $N - 2$ jednačina (1.10) (ako se primene ciklični granični uslovi tada ima $N - 1$ jednačina) je zadovoljen kada se svih N čestica lanca nalaze u položajima koji odgovaraju stacionarnom rešenju. Ovaj sistem se može rešiti iterativno ako se poznaju ili prepostavite položaji prve dve čestice u_0 i u_1 . Tada se položaj svake sledeće čestice određuje jednačinom (1.10).

Iterativno rešavanje jednačina stacionarnog stanja se vrši uzastopnim primenjivanjem ne-linearne transformacije T_s [21] počevši sa primenom na koordinate u_0 i u_1 :

$$\begin{bmatrix} u_{j+1} \\ u_j \end{bmatrix} = T_s \begin{bmatrix} u_j \\ u_{j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2u_j + \frac{K}{2\pi g} \sin(2\pi u_j) - u_{j-1} \\ u_j \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Kada je $\{u_j\}$ rešenje (1.10), tada je $\{u_j + 1\}$ takođe rešenje stacionarnog stanja. Zbog periodičnosti rešenja preslikavanje T_s se može presaviti na cilindar dimenzija $[0, 1] \times [0, 1]$ definisanjem novog skupa koordinata:

$$\theta_j = u_j \bmod 1 \quad (1.12)$$

$$p_j = u_j - u_{j-1} \quad (1.13)$$

Uz pomoć novih koordinata, iteraciono rešenje se nalazi transformaciom \tilde{T}_s [22]:

$$\begin{bmatrix} p_{j+1} \\ \theta_{j+1} \end{bmatrix} = \tilde{T}_s \begin{bmatrix} p_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_j + \frac{K}{2\pi g} \sin(2\pi \theta_j) \\ (p_{j+1} + \theta_j) \bmod 1 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

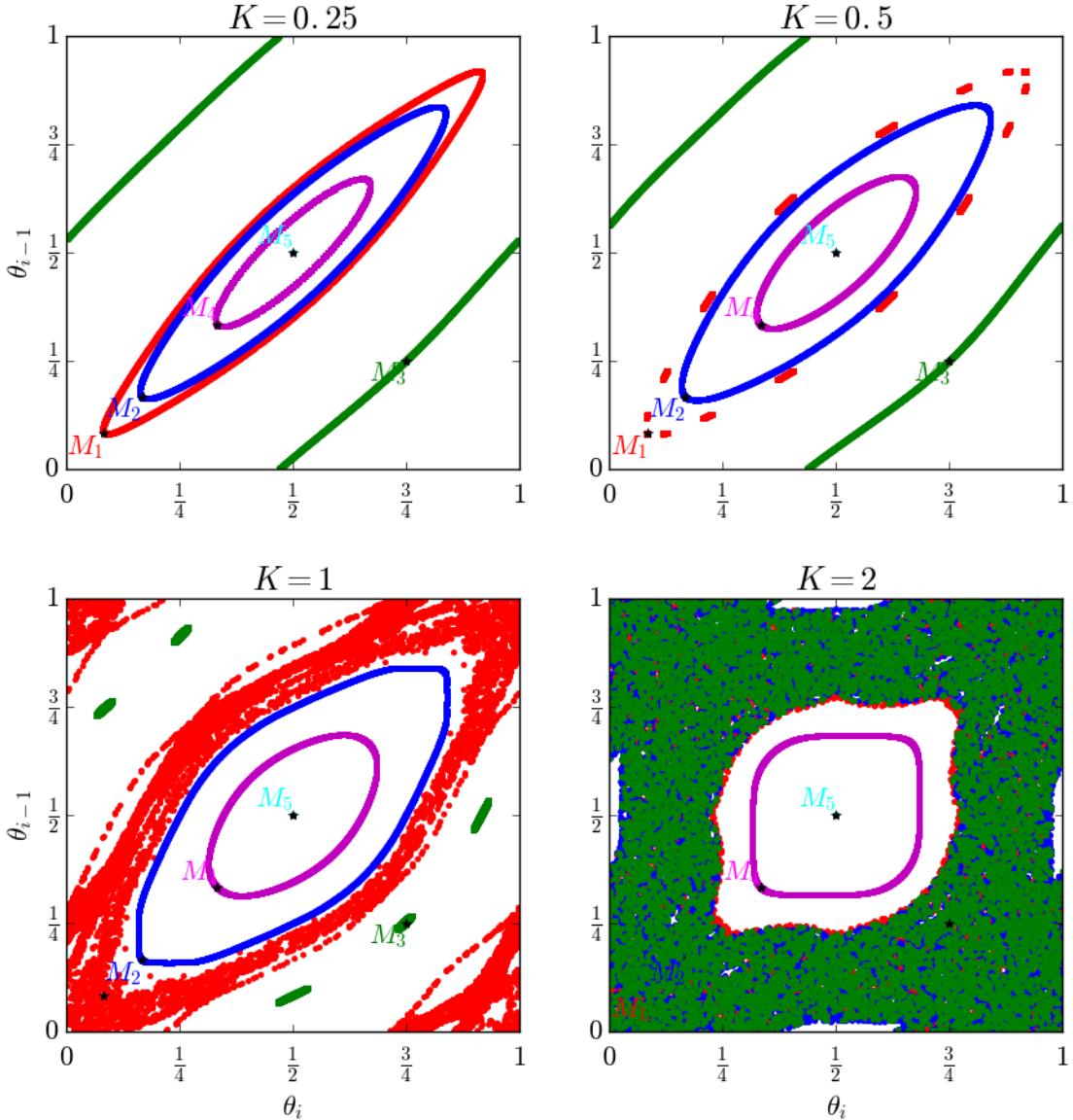
Determinanta Jakobijana transformacije \tilde{T}_s je jednaka:

$$J = \frac{\partial p_{j+1}}{\partial p_j} \frac{\partial \theta_{j+1}}{\partial \theta_j} - \frac{\partial p_{j+1}}{\partial \theta_j} \frac{\partial \theta_{j+1}}{\partial p_j} = 1 \quad (1.15)$$

Stoga je nelinearno preslikavanje \tilde{T}_s ujedno i preslikavanje koja ne menja apsolutne veličine površina originala i slike [23].

Na slici 1.2 su prikazana preslikavanja \tilde{T}_s za četiri različite vrednosti parametra K . Posmatrane su putanje pet različitih parova početnih koordinata u_0 i u_1 . Tačke M_1 i M_2 predstavljaju koordinate u_0 i u_1 koje se razlikuju za period substratnog potencijala 1 a da pritom nijedna od koordinata nije jednaka 0 ni $n \in \mathbb{Z}$. Kada se za početne koordinate čestica izaberu ekstremi substratnog potencija (tačka M_5 na slici) tada transformacija \tilde{T}_s ne proizvodi putanju već sve iteracije zbog presavijanja celog preslikavanja na cilindar daju rešenje sa koordinatama samih početnih čestica i putanja je predstavljena tačkom. Početne koordinate predstavljene tačkama M_3 i M_4 su izabrane proizvoljno.

Pri najmanjoj vrednosti amplitude substratnog potencijala $K = 0.25$ putanje svih početnih koordinata leže na glatkim linijama. Putanje tački M_1 i M_2 su elipse jer sve čestice pri takvom



Slika 1.2: Mapa transformacije \tilde{T}_s na kojoj su prikazane trajektorije pet različitih parova početnih pozicija čestica u_0 i u_1 pri $g = 1$. Četiri slike odgovaraju putanjama istih parova početnih čestica pri različitim vrednostima amplitudne substratnog potencijala K .

izboru imaju međusobno rastojanje jednako 1. Glatka putanja početne tačke potvrđuje da je za takve početne uslove, kojim odgovara data početna tačka, moguće stacionarno stanje. Pri malim vrednostima K bilo koji izbor početnih uslova može da stvori stacionarnu konfiguraciju.

Povećanjem amplitude substratnog potencijala na standardnom preslikavanju sa slike 1.2 počinju da se javljaju putanje koje ne mogu da se smatraju glatkim linijama već predstavljaju haotične regije. Dati početni uslovi kojim odgovara putanja koja nije glatka linija ne mogu da stvaraju stacionarnu konfiguraciju. Pri vrednostima $K = 0.5$ i $K = 1$ postoji izbor početnih

koordinata koji iterativno stvara stacionarnu konfiguraciju. Daljim povećanjem K skup početnih koordinata čestica koje mogu da obrazuju stacionarnu konfiguraciju se drastično smanjuje. Pri vrednostima $K \gg 2$ mogući izbor početnih koordinata koje zadovoljavaju jednačinu (1.10) se svodi samo na tačku koja odgovara ekstremima substratnog potencijala.

Slika 1.2 pokazuje da se pri određenim vrednostima amplitude substratnog potencijala svi proizvoljno izabrani početni položaji čestica ne mogu smatrati ekvivalentim jer će neki od njih nakon primene preslikavanja \tilde{T}_s proizvesti stacionarnu, dok će drugi stvarati haotičnu konfiguraciju.

Iteraciono preslikavanje se može proizvesti i za različite vrste substratnog potencijala [24] stvaranjem odgovarajuće transformacije \tilde{T}_q iz jendačina kretanja stvorenih izrazom (1.7).

Stacionarne konfiguracije koje se otkrivaju pomoću preslikavanja \tilde{T}_s imaju manju energiju od konfiguracija u stanju kretanja pošto je doprinos kinetičke energije (1.5) strogo pozitivan. Dakle, traženje konfiguracije sa absolutnim minimumom energije počinje sa otkrivanjem stabilnih konfiguracija.

Konfiguracija sa absolutnim minimumom energije se definiše kao konfiguracija kojoj pri konačnoj promeni koordinata određenog dela konfiguracije ukupna energija raste:

$$\sum_{j=N'}^N [H_j(u_n + \delta_n, u_{n-1} + \delta_{n-1}) - H_j(u_n, u_{n-1})] \geq 0 \quad (1.16)$$

Konačna promena koordinata segmenta konfiguracije je $\delta_n = 0$ za $n < N'$ i $n > N$ dok su $N' < N$ proizvoljno izabrane čestice za koje važi $\delta_n \neq 0$.

U slučaju beskonačnog lanca, Hamiltonian oblika (1.8) je nepogodan za pronađak energije sistema jer predstavljen beskonačnom sumom. Međutim, iz njega se može pronaći srednja energija po čestici lanca kao [16]:

$$\epsilon = \lim_{(N-M) \rightarrow \infty} \frac{1}{N-M} \sum_{j=M}^{N-1} H_j \quad (1.17)$$

gde je H_j energija proizvoljne čestice jednaka izrazu pod sumom ukupnog Hamitonijana (1.8).

Na sličan način se definiše srednje rastojanje ω između čestica¹ u beskonačnom lancu [16]:

$$\omega = \langle u_{j+1} - u_j \rangle = \lim_{(N-M) \rightarrow \infty} \frac{u_N - u_M}{N - M} \quad (1.18)$$

Prema [25] svako stanje sa minimumom energije ima dobro definisanu srednju energiju po čestici (1.17). Takođe, svaka konfiguracija sa minimumom energije ima definisano srednje rastojanje čestica (1.18).

Parametar ω može biti racionalan broj $\omega = \frac{p}{q}$ i tada je FK model samerljiv jer se konačan broj čestica može smestiti u konačan broj substratnih jama. Parametar ω takođe može biti iracionalan broj i tada je FK model nesamerljiv. Nesamerljive vrednosti ω se ispituju tražeći najbolju aproksimaciju iracionalnog broja racionalnim.

U svim diskusijama koje slede posmatra se samerljivi FK model, tj FK model sa racionalnom vrednosti ω .

¹winding number

1.2 Samerljiva konfiguracija

Teorema 1. [25] Ako je $\frac{\omega}{2a}$ racionalan broj $\frac{\omega}{2a} = \frac{r}{s}$, gde su r i s nesvodljivi celi brojevi, tada postoji osnovno stanje koje je okarakterisano važenjem sledeće relacije:

$$u_{n+s} = u_n + 2ar \quad (1.19)$$

Dokaz teoreme 1. Konačan lanac sa ks čestica koji ima dužinu $u_{ks} - u_0 = 2kra$, gde je u_{ks} poslednja čestica u lancu a $2a$ period substratnog potencijala, ima konfiguraciju osnovnog stanja opisanu položajima čestica:

$$u_0^k, u_1^k, \dots, u_{ks-1}^k, u_{ks}^k = u_0^k + 2kra \quad (1.20)$$

Izabrana konfiguracija osnovnog stanja predstavlja absolutni minimum funkcije H_k od ks argumenta $x_0^k, x_1^k, \dots, x_{ks-1}^k, x_{ks}^k = x_0^k + 2kra$:

$$H_k = \sum_{n=0}^{n=ks-1} H(x_{n+1}, x_n) \quad (1.21)$$

Sada se može napraviti konfiguracija $\{u_n\}$ za svako n tako što će se konfiguracija (1.20) transformisati u:

$$u_n = u_q^k + 2akpr \quad (1.22)$$

U gornjoj jednačini broj n je predstavljen kao:

$$n = p(ks) + q \quad (1.23)$$

gde je ceo broj p rezultat celobrojnog deljenja $\text{Int}(\frac{n}{ks})$, a ceo broj q ostatak celobrojnog deljenja $\text{Int}(\frac{n}{ks})$, $0 \leq q < ks$. Primetno je da je konfiguracija definisana (1.22) identična sa konfiguracijom (1.20) ako broj n ne prelazi broj ks . U suprotnom su ove dve konfiguracije samo translatorno pomerene.

Dokaz tvrdnje (1.19) se može izvršiti pretpostavkom da je tvrdnja netačna:

$$u_{n+s} > u_n + 2ar \quad (1.24)$$

Sada se može definisati translirana konfiguracija:

$$v_n = u_{n+s} - 2ar \quad (1.25)$$

za koju važi da je $v_n > u_n$, a samim tim i da je $v_{n+ks} > u_{n+ks}$. Poslednja nejednakost se može napisati i kao:

$$v_m > u_m \quad (1.26)$$

Gornja nejednačina važi za svako m za koje je $n \leq m \leq n + ks$ međutim, prema jendačini (1.23), nejednakost (1.26) je ispunjena i za svako m .

Nejednakost (1.26) se sada može predstaviti rekurzivnim nejednačinama:

$$\begin{aligned}
 u_n < v_n &= u_{n+s} - 2ar < v_{n+s} - 2ar = \\
 &= u_{n+2s} - 4ar < v_{n+2s} - 4ar = \\
 &\vdots \\
 &= u_{n+(k-1)s} - 2a(k-1)r < v_{n+(k-1)s} - 2a(k-1)r = \\
 &= u_{n+ks} - 2akr
 \end{aligned} \tag{1.27}$$

Krajnji rezultat rekurzivnih nejednačina (1.27) jeste da je :

$$u_n < u_{n+ks} - 2akr \tag{1.28}$$

Ova nejednakost povezuje početnu i krajnju česticu lanca jer im se indeksi razlikuju za ukupan broj čestica ks . Gornja nejednakost je u direktnoj suprotnosti sa postavkom konačnog lanca sa jasno definisanim položajima krajnjih čestica kakva je postavka u jednačini (1.20). Dakle, pokazano je da je pretpostavka (1.24) nemoguća i time je dokazana jednačina (1.19). \square

Relacija $u_{n+s} = u_n + 2ar$ važi za dva proizvoljna nesvodljiva broja r i s i time predstavlja svojstvo konfiguracije osnovnog stanja da je rekurentno i periodično. Ceo broj s je broj čestica koje pripadaju elementarnoj celini koja se periodično ponavlja duž lanca dok ceo broj r predstavlja broj perioda substratnog potencijala koji zauzima elementarna celina.

Pošto je konfiguracija koja predstavlja absolutni minimum energije H_k periodična, energija konfiguracije se može predstaviti kao umnožak energije elementa lanca koji se ponavlja i broja ponavljanja k :

$$H_k = kH_1 \tag{1.29}$$

gde je H_1 energija osnovnog elementa lanca koji se ponavlja:

$$H_1 = \sum_{n=p}^{p+s-1} H(u_n, u_{n-1}) \tag{1.30}$$

Svaka konfiguracija osnovnog stanja koja sadrži više od jedne elementarne ćelije, $k > 1$ se ostvaruje ponavljanjem elementarne ćelije k puta na osnovu obrasca (1.22) dok je energija takve konfiguracije data jednačinom (1.29).

Velika pogodnost teoreme 1 leži u tome da dozvoljava svađenje beskonačnog i mnogočestičnog sistema na lanac sa konačnim brojem substratnih jama i čestica uz održavanje svih bitnih karakteristika beskonačnog sistema.

Teorema 2. [25] Za bilo koje dve čestice samerljive konfiguracije važi:

$$\left| \frac{u_n - u_m}{n - m} - \omega \right| \leq 2a \tag{1.31}$$

Dokaz teoreme 2. Za proizvoljna dva broja p i q važi jedna od tri nejednakosti:

$$\begin{aligned}
 u_{n+p} + 2aq &> u_n \\
 u_{n+p} + 2aq &< u_n \\
 u_{n+p} + 2aq &= u_n
 \end{aligned} \tag{1.32}$$

Nejednakosti (1.32) se svode na tri mogućnosti za proizvoljni broj q :

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+p} - u_n}{2a} &< q \\ \frac{u_{n+p} - u_n}{2a} &> q \\ \frac{u_{n+p} - u_n}{2a} &= q \end{aligned} \quad (1.33)$$

Sva tri uslova se mogu objediniti u jedinstven uslov da veličina σ_p :

$$\sigma_p = \text{Int}\left(\frac{u_{n+p} - u_n}{2a}\right) \quad (1.34)$$

ne zavisi od n . Može se definisati i promenljiva σ_{p+q} znajući da je $u_{n+p+q} = u_{n+p} + u_{n+q} - u_n$:

$$\sigma_{p+q} = \text{Int}\left(\frac{u_{n+p} + u_{n+q} - 2u_n}{2a}\right) \quad (1.35)$$

Koristeći nejednakost

$$\text{Int}(x) + \text{Int}(y) \leq \text{Int}(x + y) \leq \text{Int}(x) + \text{Int}(y) + 1 \quad (1.36)$$

Dobijaju se dve nejednakosti:

$$\begin{aligned} \sigma_{p+q} + 1 &\leq \sigma_p + 1 + \sigma_q + 1 \\ \sigma_{p+q} &\geq \sigma_p + \sigma_q \end{aligned} \quad (1.37)$$

Kada se pusti da broj p ide u beskončnost posmatra se desni deo lanca od čestice u_n za kojivaži:

$$\frac{\omega}{2a} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \left(\frac{u_{n+p} - u_n}{2a} \right) \leq \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{p} \left(\text{Int}\left(\frac{u_{n+p} - u_n}{2a}\right) + 1 \right) = \frac{\sigma_p + 1}{p} \quad (1.38)$$

A kada se broj p pusti da ide u negativnu beskončnost (posmatra se levi deo lanca od čestice u_n) tada važi:

$$\frac{\omega}{2a} = \lim_{p \rightarrow -\infty} \frac{1}{p} \left(\frac{u_{n+p} - u_n}{2a} \right) \geq \lim_{p \rightarrow -\infty} \frac{1}{p} \left(\text{Int}\left(\frac{u_{n+p} - u_n}{2a}\right) \right) = \frac{\sigma_p}{p} \quad (1.39)$$

Kombinujući dve nejednakosti dobija se:

$$\sigma_p \leq \frac{p\omega}{2a} \leq \sigma_p + 1 \quad (1.40)$$

što se, koristeći osobine celobrojnog deljenja, može zapisati kao:

$$-1 \leq p \frac{\omega}{2a} - \left(\frac{u_{n+p} - u_n}{2a} \right) \leq 1 \quad (1.41)$$

Konačno:

$$\left| \frac{u_{n+p} - u_n}{p} - \omega \right| \leq \frac{2a}{p} \quad (1.42)$$

Što potvrđuje pretpostavku (1.31) i pritom dodaje još veću preciznost položaja čestica.

Dokazivanjem teoreme 2 pokazana je još jedna osobina koja potvrđuje periodičnost konfiguracije osnovnog stanja i predstavlja jednaku popunjenošć svih celija. \square

Teoreme 1 i 2 pokazuju da kada je beskonačni limit (1.18) jednak nekom racionalnom broju tada postoji samerljivo osnovno stanje. Takođe je pokazano da se takvo samerljivo stanje sastoji od elementarnih čelija koje se periodično ponavljaju. Dakle, parametar kojim se može opisati osnovno stanje sistema je srednje rastojanje između čestica:

$$\omega = \frac{r2a}{s} \quad (1.43)$$

gde su r i s dva cela nesvodljiva broja i $2a$ je period substratnog potencijala. Ovakva definicija parametra ω se tumači kao broj čestica s koji se nalazi u elementarnoj čeliji dužine $r2a$.

Glava 2

Dejstvo ravnomerne sile na samerljivi FK model

Frenkel Kontorova model pokazuje izuzetno bogato ponašanje kada se nalazi u stanju kretanja. U ovom odeljku će biti pokazane neke ključne osobine dejstva ravnomerne sile \bar{F} na proizvoljnu konfiguraciju FK modela. Ukupna sila koja deluje na svaku od čestica u lancu prilikom dejstva spoljašnje sile je:

$$F = m \frac{d^2 u_j}{dt^2} + \Gamma \frac{du_j}{dt} = g(u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j) - \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi u_j) + \bar{F} \quad (2.1)$$

Kada je disipativni koeficijent $\Gamma = 1$ i konstanta kuplovanja među česticama $g = 1$ tada se može uvesti aproksimacija po kojoj se dinamika svodi na disipativnu dinamiku. U radu [26] je pokazano da je validnost disipativne aproksimacije Fk modela ostvarena kada je:

$$0 < m \leq \frac{1}{4(2+K)} \quad (2.2)$$

i tada se ubrzanje čestica može zanemariti. Jednačine kretanja koje opisuju disipativnu dinamiku FK modela su:

$$\frac{du_j}{dt} = u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j - \frac{K}{2\pi} \sin 2\pi u_j + \bar{F} \quad (2.3)$$

Sistem sada karakterišu vremenski zavisne konfiguracije $\{u_j(t)\}$. Svakoj početnoj konfiguraciji $\{u_j(t_0)\}$ odgovara svojstveno vremenski zavisno rešenje $\{u_j(t)\}$. Izbor početne konfiguracije $\{u_j(t_0)\}$ definije srednje rastojanje između čestica ω koje se održava tokom kretanja lanca [16].

Posledica održavanja srednjeg rastojanja čestica jeste da vremenska evolucija konfiguracije zadržava iste karakteristike simetrije kakve je posedovala i početna konfiguracija. Na primer, ako je početna konfiguracija bila simetrična:

$$\{u_{j+r}(t_0) + r\} = \{u_j(t_0)\} \quad (2.4)$$

tada je i konfiguracija nastala vremenskom evolucijom pod dejstvom spoljašnje ravnomerne sile takođe periodična:

$$\{u_{j+r}(t) + r\} = \{u_j(t)\} \quad (2.5)$$

Uopšteno, translatorne transformacije $\sigma_{r,m} \{u_j\} = \{u_{j+r} + m\} = \{u'_j\}$ koje se primene na početnu konfiguraciju ostaju vremenski nepromjenjene i mogu se primeniti u svakom trenutku vremena. Dakle, početnoj konfiguraciji $\sigma_{r,m} \{u_j(t_0)\}$ odgovara vremenska evolucija $\sigma_{r,m} \{u_j(t)\}$.

Jednoznačna određenost vremenski promenljive konfiguracije $\{u_j(t)\}$ sa njenom početnom konfiguracijom pri datoј vrednosti spoljašnje sile se može strožije opisati Midltonovim pravilom o nezaobilaženju¹.

2.1 Midltonovo pravilo o nezaobilaženju

Midltonovo pravilo o nezaobilaženju tvrdi [27] da dinamika lanca zadržava uređenost kakvu je imala početna konfiguracija. Formuliše se kao tvrdnja da ako dve početne konfiguracije zadovoljavaju uslov $\{u_j(t_0)\} < \{v_j(t_0)\}$ tada i vremenske evolucije obe konfiguracije zadovoljavaju uslov $\{u_j(t)\} < \{v_j(t)\}$.

Dokaz Midltonovog pravila se najlakše izvodi pretpostavkom da pravilo nije tačno. Pretpostavljujući da se tokom evolucije dvaju početno potpuno razvojenih konfiguracija $\{u_j(t_0)\} < \{v_j(t_0)\}$ u nekom vremenskom trenutku t^* prvi put dogodi da se čestice dve konfiguracije poklope:

$$u_{j^*}(t^*) = v_{j^*}(t^*) \quad (2.6)$$

i rešavajući jednačine kretanja (2.3) za j^* -tu česticu obe konfiguracije:

$$\dot{u}_{j^*}(t^*) - \dot{v}_{j^*}(t^*) = u_{j^*+1}(t^*) - v_{j^*+1}(t^*) + u_{j^*-1}(t^*) - v_{j^*+1}(t^*) < 0 \quad (2.7)$$

dobija se da je brzina j^* -te čestice iz konfiguracije $\{u_j(t)\}$ manja od brzine j^* -te čestice iz konfiguracije $\{v_j(t)\}$. Ako bi to bio slučaj tada j^* -ta čestica iz konfiguracije $\{u_j(t)\}$ ne bi bila u stanju da "stigne" j^* -tu česticu iz konfiguracije $\{v_j(t)\}$ pošto su pre vremenskog trenutka t^* vremenski evoluirane konfiguracije imale isti odnos $\{u_j(t < t^*)\} < \{v_j(t < t^*)\}$ kao i njima odgovarajuće početne konfiguracije $\{u_j(t_0)\} < \{v_j(t_0)\}$.

Midltonovo pravilo važi u disipativnoj dinamici, u odsustvu inercije, gde je kretanje čestica indukovano jedino spoljašnjom silom. Takođe, Midltonovo pravilo ne mora da važi pri nekonveksnim substratnim potencijalima. U dokazu Midltonovog pravila nisu korištene osobine simetrije jednačina kretanja i stoga ono važi i za neperiodične substratne potencijale. Midltonovo pravilo o nezaobilaženju leži u osnovi mnogim osobinama kretanja FK lanca. Jedna od bitnih posledica jeste jedinstvenost brzine konfiguracije.

Konfiguraciono usrednjena brzina definiše se kao:

$$v(t) = \langle \dot{u}_j(t) \rangle = \lim_{(N-M) \rightarrow \infty} \frac{1}{N-M} \sum_{j=M}^{N-1} \dot{u}_j(t) \quad (2.8)$$

Srednja brzina čestica lanca se može i usrednjiti po vremenu:

$$\bar{v} = \overline{\dot{v}(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} v(t) dt = \overline{\langle \dot{u}_j(t) \rangle} \quad (2.9)$$

¹Middleton no-passing rule

Posmatrajući dve početne konfiguracije $\{u_j(t_0)\} < \{v_j(t_0)\}$ može se, translatornom transformacijom, stvoriti konfiguracija $\{u'_j(t_0)\} = \sigma_{r,m}\{u_j(t_0)\}$ takva da važi:

$$\{u'_j(t_0)\} > \{v_j(t_0)\} > \{u_j(t_0)\} \quad (2.10)$$

Midltonovo pravilo nalaže da je:

$$\{u'_j(t)\} > \{v_j(t)\} > \{u_j(t)\} \quad (2.11)$$

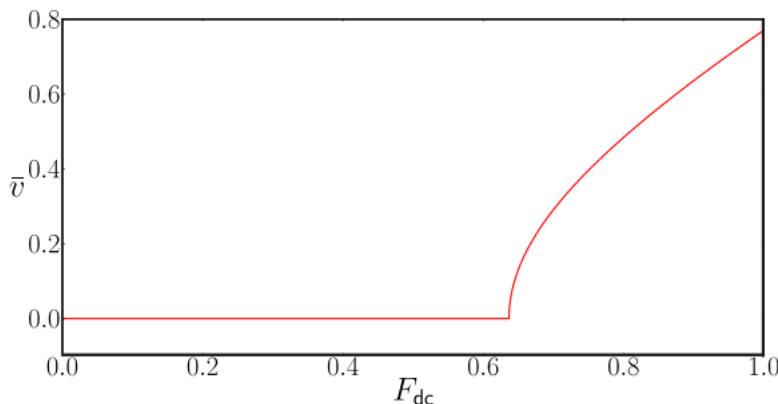
Prethodno je pokazano da su konfiguracije $\{u_j(t_0)\}$ i $\{u'_j(t_0)\} = \sigma_{r,m}\{u_j(t_0)\}$ ekvivalentne pri kretanju i da su im i vremenski usrednjene brzine jednake. Prema Midltonovom pravilu ove dve ekvivalentne konfiguracije čine granice u kojima može da se nalazi konfiguracija $\{v_j(t)\}$. Tokom dugoročne vremenske evolucije konfiguracija $\{v_j(t)\}$ ne sme da napusti ove okvire i stoga se zaključuje da vremenski usrednjene brzine konfiguracija $\{v_j(t)\}$ i $\{u_j(t)\}$ moraju biti jednake [27]:

$$\overline{\langle \dot{u}_j(t) \rangle} = \overline{\langle \dot{v}_j(t) \rangle} \quad (2.12)$$

Midltonovo pravilo je izuzetno korisno jer pokazuje, između ostalog, da se sve početne konfiguracije sa istim srednjim razmakom između čestica ω kreću jednakom srednjom brzinom.

2.2 Kretanje čestica pod dejstvom \bar{F}

Na slici 2.1 se vidi odzivna funkcija FK modela na ravnomeru silu u vidu srednje brzine \bar{v} . Razlikuju se dva odvojena regionala u ovoj odzivnoj funkciji: region u kom je srednja vrednost brzine čestica jednaka nuli i region u kom je srednja brzina čestica monotono restuća funkcija od \bar{F} .



Slika 2.1: Zavisnost srednje brzine lanca od intenziteta ravnomerne sile \bar{F} u jednočestičnom standardnom FK modelu pri $K = 4$. Kritična sile je $F_c \approx 0.636$. Slika preuzeta iz [28].

Sistem doživjava fazni prelaz na određenoj vrednosti sile koja se naziva kritična sila F_c . Pri vrednostima sile manjoj od kritične sile srednja brzina čestica je jednaka nuli i čestice se smatraju zarobljenim u substratnom potencijalu. Nakon faznog prelaza srednja brzina počinje da raste i lanac se nalazi u klizećem režimu ².

²Sliding state

2.3 Klizeći režim

Kada je primenjena sila većeg intenziteta od kritične sile za dati skup parametara sistema, sve čestice lanca obrazuju kolektivno kretanje i zasistem se tada kaže da se nalazi u klizećem režimu. U klizećem režimu sve brzine čestica su pozitivne kada je sile \bar{F} pozitivna.

Pozitivnost brzina svih čestica lanca se najlakše pokazuje polazeći od pretpostavke da se u lancu sa svim pozitivnim brzinama u trenutku vremena t^* prvi put brzina jedne od čestica $\dot{u}_j(t)$ spusti na nulu $\dot{u}_j(t^*) = 0$. Tada se diferenciranjem jednačine kratanja j -te čestice po vremenu dobija:

$$\ddot{u}_j(t)|_{t^*} = \dot{u}_{j+1}(t)|_{t^*} + \dot{u}_{j-1}(t)|_{t^*} - 2\dot{u}_j(t)|_{t^*} - K \cos(2\pi u_j) \dot{u}_j(t)|_{t^*} \quad (2.13)$$

Pošto je $\dot{u}_j(t^*) = 0$ gornja jednačina pokazuje da je $\ddot{u}_j(t^*) > 0$ jer su brzine susednih čestica prema pretpostavci pozitivne. Pozitivno ubrzanje j -te čestice ne može da zaustavi tu česticu ako je njena početna brzina bila pozitivna i stoga je ovakvo rešenje kontradikcija početnoj pretpostavci i sve čestice moraju imati pozitivnu brzinu. Konstrukcija konfiguracije sa svim pozitivnim brzinama se najpogodnije ostvaruje tako što se za početnu konfiguraciju pri $t = 0$ izabere apsolutno mirujuća konfiguracija u kojoj su $u_j(0) = 0$ za svako j pri $\bar{F} = 0$. Delovanjem pozitivne sile svaka čestica ove konfiguracije ima pozitivnu brzinu.

Posmatrajući proizvoljnu konfiguraciju u klizećem režimu $\{v_j(t)\}$ može se pokazati da se njena dinamika svodi na dinamiku konfiguracije sa pozitivnim brzinama svih čestica [27].

Vremenska evolucija konfiguracije sa pozitivnim brzinama svih čestica $\{u_j^p(t)\}$ može se posmatrati kao skup konfiguracija $\{u_j^p(s)\}$ koje se razlikuju po indeksu s i predstavljaju konfiguraciju u vremenskom trenutku $s = t$. Skup ovako predstavljenih konfiguracija broji onoliko članova koliko ima vremenski različitih trenutaka. Ako se konstruiše funkcija koja predstavlja najkasniji trenutak u kom je proizvoljna konfiguracija $\{v_j(t)\}$ manja od konfiguracije sa pozitivnim brzinama $\{u_j^p(s)\}$:

$$\tau^-(t) = \sup [s | \{v_j(t)\} \geq \{u_j^p(s)\}] \quad (2.14)$$

i funkcija koja predstavlja najraniji trenutak u kom je $\{v_j(t)\}$ veća od $\{u_j^p(s)\}$:

$$\tau^+(t) = \inf [s | \{v_j(t)\} \leq \{u_j^p(s)\}] \quad (2.15)$$

onda se proizvoljna konfiguracija $\{v_j(t)\}$ nalazi u granicama između $\{u_j^p(\tau^-(t))\}$ i $\{u_j^p(\tau^+(t))\}$ i dodiruje se sa njima u jednoj tački konfiguracije. Pošto jednačine kretanja (2.3) diktiraju razdvajanje konfiguracija koje se dodiruju u nekom trenutku t_0 a nisu identične i na osnovu definicije funkcije $\tau^+(t)$, za proizvoljni vremenski trenutak t' može se definisati funkcija:

$$W_j(t') = u_j^p(\tau^-(t_0 + t')) - v_j(t_0 + t') \quad (2.16)$$

za koju važi da je pozitivna $W_j(t') > 0$ pri svakom t' . Ovakav uslov nameće da konfiguracije koje su se dodirivale u trenutku $t' = 0$ u nekom drugom trenutku $t' > 0$ moraju biti odvojene. Zbog konačnosti brzine svih konfiguracija važi:

$$\tau^+(t_0 + t') < \tau^+(t_0) \quad (2.17)$$

što čini funkciju $\tau^+(t)$ monotono opadajućom, a funkciju $\tau^-(t)$ monotono rastućom. Drugim rečima, granice u kojim se nalazi proizvoljna funkcija $\{v_j(t)\}$ se postepeno smanjuju sa protokom vremena dok se konačno proizvoljna konfiguracija ne poklopi sa konfiguracijom pozitivnih brzina u beskonačno udaljenom vremenskom trenutku:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [\{v_j(t)\} - \{u_j^p(t + \tau)\}] = 0 \quad (2.18)$$

Gornja jendačina pokazuje asimptotsku jedinstvenost svih proizvoljnih konfiguracija u klizećem režimu sistema. Asimptotska jedinstvenost kretanja svih konfiguracija sa istim ω dopušta analizu klizećeg režima kao kretanje rotaciono uređene konfiguracije za koju važe sve simetrijske transformacije uvedene do sada. Desna strana jednačine (2.3) ne zavisi eksplicitno od vremena što dozvoljava uvođenje dodatnih transformacija simetrije koje sadrže i vremensku translaciju. Ako su r i m proizvoljni celi brojevi tada transformacija $\sigma_{r,m,\tau}$ definiše novu konfiguraciju:

$$\sigma_{r,m,\tau} \{u_j(t)\} = \{u_{j+r}(t - \tau) + m\} = \{u'_j(t)\} \quad (2.19)$$

Neka je $\{u_j(t)\}$ stabilno rešenje, i r proizvoljan ceo broj. Pošto je $\{u_{j+r}(t)\}$ takođe stabilno rešenje, postoji neki broj τ za koji važi $\{u_j(t + \tau)\} = \{u_{j+r}(t)\}$, pri svakom t . Srednja brzina čestica je tada periodična sa periodom τ (može biti periodična i sa periodom τ/n , $n \in \mathbb{Z}$):

$$\bar{v}\tau = \langle u_j(t + \tau) - u_j(t) \rangle = \langle u_j(t) - u_j(t) \rangle = r\omega \quad (2.20)$$

odakle sledi:

$$\left\{ u_{j+r} \left(t - \frac{r\omega}{\bar{v}} \right) \right\} = \{u_j(t)\} \quad (2.21)$$

Isti argument periodičnosti konfiguracije može se primeniti za pređeni put j -te čestice u jedinicama mere periodičnosti substratnog potencijala. Neka za vreme τ čestica j predje ceo broj potencijalnih jama m i nađe se u konfiguraciji koja je ista početnoj konfiguraciji samo translirana za m potencijalnih jama u pozitivnom smeru $\{u_j(t + \tau)\} = \{u_j(t) + m\}$, odnosno $\{u_j(t - \tau)\} + m = \{u_j(t)\}$. Srednja brzina čestica može se izraziti kao:

$$\bar{v}\tau = \langle u_j(t + \tau) - u_j(t) \rangle = m \quad (2.22)$$

Odakle sledi:

$$\left\{ u_j \left(t - \frac{m}{\bar{v}} \right) + m \right\} = \{u_j(t)\} \quad (2.23)$$

Iz jednakosti (2.22) i (2.23) se vidi da ako su r i m proizvoljni celi brojevi tada je svaka ravnomerna konfiguracija $\{u_j(t)\}$, sa srednjim rastojanjem između čestica ω i srednjom brzinom \bar{v} , invarijantna na transformaciju:

$$\sigma_{r,m,[\frac{r\omega+m}{\bar{v}}]} \{u_j(t)\} = \{u_j(t)\} \quad (2.24)$$

Gornja jednakost opisuje sve osobine rotacionog uređenja ravnomerno kretajuće konfiguracije. Invarijantnost konfiguracije $\{u_j(t)\}$ u odnosu na transformaciju $\sigma_{r,m,[\frac{r\omega+m}{\bar{v}}]}$ se može opisati

stvaranjem realne trupne funkcije³ $f(x)$ koja će sadržati sve osobine transformacije (2.24). Definisanjem funkcije $f(x)$ kao $f(x) = \{u_j(t)\}$ gde je $x = j\omega + \bar{v}t$ postiže se da je vrednost $f(x)$ jedinstvena za svako x zbog osobine (2.22). Zbog osobine (2.23) za ovako definisani trupnu funkciju važi $f(x+1) = f(x)$ što je analitičkom i monotono rastućom.

Jedinstvenost trupne funkcije garantuje da za bilo koju konfiguraciju koja se ravnomerno kreće $\{v_j(t)\}$ postoji realan broj α takav da se položaj svake čestice može dobiti kao [16]:

$$v_j(t) = f(j\omega + \bar{v}t + \alpha) \quad (2.25)$$

Gornja jednačina takođe pokazuje da za svako realno α postoji odgovarajuća ravnomerno krećuća konfiguracija. Sa slike 2.1 se vidi da je FK model u klizećem režimu opisan analitičkom i monotono rastućom trupnom funkcijom.

2.4 Oslobađanje lanca

Lanac čestica se smatra zarobljenim ako je srednja brzina čestica pod dejstvom spoljašnje sile jednaka nuli. Dejstvo ravnomerne sile narušava apsolutno mirujući lanac. U opštem slučaju samerljivih struktura čestice izvode međusobno antisimetrično kretanje sve dok intenzitet spoljašnje sile ne postane dovoljno velik da indukuje kolektivno kretanje cele konfiguracije u jednom smeru.

Ilustrativni primer indukovanja ravnomernog kretanja celog lanca dejstvom ravnomerne sile jeste oslobađanje⁴ u standardnom FK lancu sa jednom česticom po jami substratnog potencijala $\omega = 1$. U standardnom FK modelu čestice zauzimaju minimume substratnog potencijala i stoga su sve čestice međusobno jednakо udaljene pa je prvi izvod potencijala jednak za sve čestice. Takav sistem se svodi na jednočestični sistem i može se opisati jednačinom kretanja sa jednim stepenom slobode:

$$\dot{u} = -V'(u) + F \quad (2.26)$$

Kritična sile je, prema gornjoj jednačini, jednaka upravo maksimumu prvog izvoda substratnog potencijala:

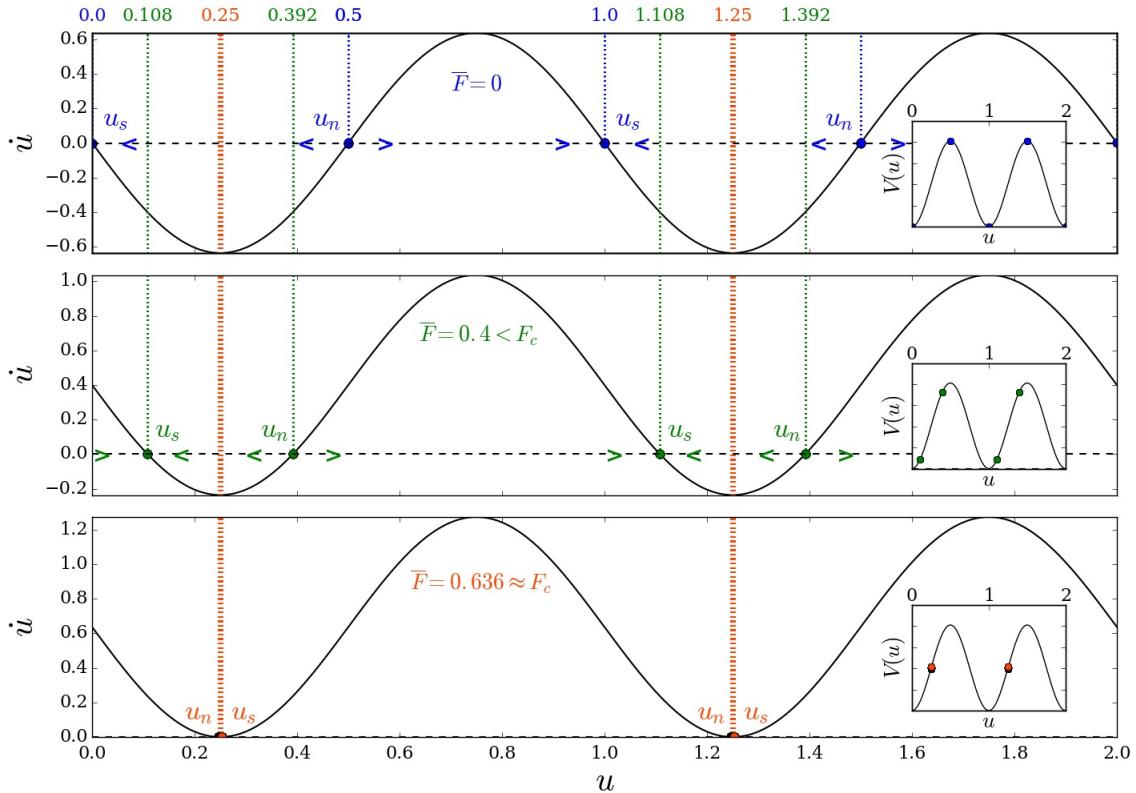
$$F_c = \max V'(u_0) \quad (2.27)$$

Na slici 2.2 se vidi zavisnost brzine čestice od njene pozicije u substratnom potencijalu u slučaju jednočestičnog modela. Funkcija $\dot{u}(u, \bar{F})$ ima dve nule po periodu substratnog potencijala kada je intenzitet sile \bar{F} manji od kritične sile F_c . Tačke u kojima je $\dot{u}(u, \bar{F}) = 0$ su fiksne tačke ove funkcije od kojih je jedna stabila a druga nestabila pri $\bar{F} < F_c$. Stabilna fiksna tačka u_s je ona fiksna tačka za koju važi da je $V''(u_s) > 0$ i ona deluje kao atraktor trajektorija čestica. Za nestabilnu fiksnu tačku u_n važi $V''(u_n) < 0$ i trajektorije svih čestica koje se nalaze u blizini nestabilne fiksne tačke teže da se udalje. Umetnute slike na slici 2.2 prikazuju položaj fiksnih tačaka na substratnom potencijalu.

Povećavanjem intenziteta ravnomerne sile razmak između fiksnih tačaka se smanjuje dok se obe fiksne tačke konačno ne spoje pri kritičnom intenzitetu ravnomerne sile F_c . Nakon što

³hull function

⁴depinning



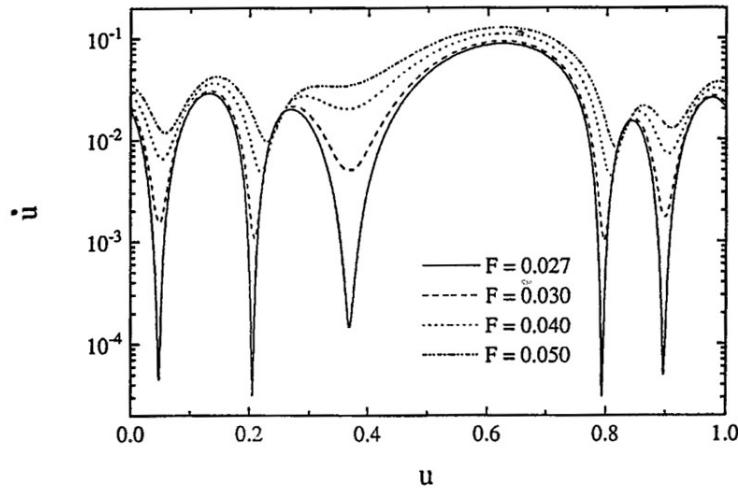
Slika 2.2: Zavisnost brzine čestice od njenog položaja za tri vrednosti intenziteta primenjene revnomerne sile \bar{F} u jednočestičnom modelu.

se dve fiksne tačke poklope, dalje povećanje ravnomerne sile čini funkciju $\dot{u}(u, \bar{F})$ pozitivnom u celom domenu u . Anihilacija dve fiksne tačke pri nekoj vrednosti parametra naziva se sedlasta bifurkacija [29]. Nakon sedlaste bifurkacije nastupa kolektivno kretanje čestica i lanac se smatra oslobođenim. Nakon oslobođanja lanca iz minimuma potencijala, lanac se nalazi u klizećem režimu gde je kolektivna brzina čestica monotono rastuća funkcija intenziteta ravnomerne sile odgovarajuće opisana dinamičkom trupnom funkcijom.

Vrednost kritične sile oslobođanja samerljivih struktura koje se ne mogu svesti na jednočestični sistem $\omega = \frac{p}{q}$, jer sadrže q jednačina kretanja, može se u opštem slučaju opisati minimumom dinamičke trupne funkcije koja opisuje sistem u kretanju. Ovaj pristup omogućava srođenje sistema sa q stepeni slobode na sistem sa jednim stepenom slobode čije je kretanje opisano jednačinom:

$$\dot{u} = h(u) \tag{2.28}$$

gde je dinamička trupna funkcija $h(u)$ jednaka $h(u) = \bar{v}f(x)$ a $x = f^{-1}(u)$.



Slika 2.3: Dinamička trupna funkcija pri različitim vrednostima intenziteta ravnomerne sile u sistemu sa $\omega = \frac{3}{5}$, $K = 2$. Vrednost kritične sile za ovaj sistem je $F_c \approx 0.026$. y-osa grafika je u logaritamskoj skali. Slika preuzeta iz [16].

Na slici 2.3 je prikazana dinamička trupna funkcija u zavisnosti od intenziteta primenjene sile. Kada je primenjena sila neznatno veća od kritične sile za dati sistem dinamička trupna funkcija ima q minimuma na mestima na kojim se nalaze pozicije sedlastih bifurkacija mirujućeg sistema.

Glava 3

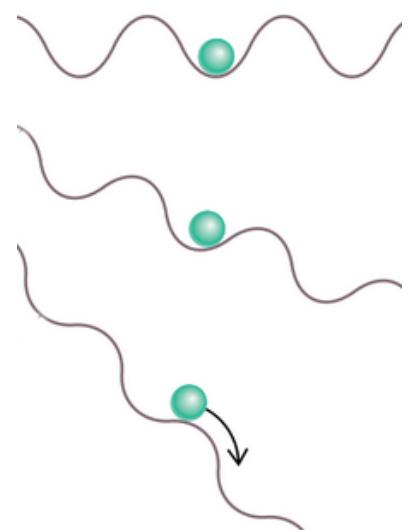
Dejstvo naizmenične i ravnomerne sile na samerljivi FK model

Izuzetno bogatstvo kretanja se javlja kada se na FK model deluje kombinacijom ravnomerne i naizmenične sile. Ilustracija kretanja pod ovakvim okolnostima lepo je opisana u tekstu koji su napisali Stjuart Braun i Georg Gruner za "Scientific American" [4] i koji se odnosi na kretanje talasa gustine električnog naboja. Sledeći pasus sadrži prevedenu i sažetu verziju odlomka iz tog teksta prilagođenu tako da se odnosi na FK model.

"Kada bi se FK model pojednostavio kreatnjem samo jedne čestice, ili ekvivalentog jednočestičnog modela $\omega = 1$, tada bi se laički model mogao predstaviti jednim klikerom koji se nalazi u kartonu za jaja.

Jednodimenzionalnost postavke je postignuta time što se karton za jaja iseče tako da sadrži samo jedan red u kom je kliker dozvoljeno da se kreće isključivo napred ili nazad. Delovanje ravnomerne sile može se predstaviti u ovakovom modelu kao naginjanje kartona za jaja pod nekim uglom proporcionalnim intenzitetu ravnomerne sile. Kada je ugao nagiba dovoljno velik tada je kliker u stanju da napusti jamu u kojoj je prvo bitno smešten i nastavi kretanje ka zemlji niz karton. Kritična vrednost nagiba celog kartona je ekvivalentna kritičnoj sili u FK modelu nakon koje čestice napuštaju potencijalne Jame u kojima su se nalazile u osnovnom stanju. Dalje povećanje nagiba dovodi do sve veće brzine kotrljanja klikeru niz karton i može se reći da je brzina klikeru linearna rastuća funkcija nagiba kartona.

Dejstvo naizmenične sile u ovako opisanom modelu može se predstaviti nazmeničnim mrdanjem kartona levo-desno. Bez dejstva ravnomerne sile, dakle bez nagiba kartona, kliker bi usled cimanja levo-desno skakutao po jami u kojoj se nalazi sve dok jačina cimanja ne prevaziđa određenu vrednost koja je dovoljna da se kliker pri jednom cimanju prebaci u susednu jamu a odmah potom i vrati nazad u prvo bitnu jamu. Daljim povećavanjem intenziteta mrdanja kliker bi bio u stanju da skače i po nekoliko jama u jednom pravcu da bi se opet vratio u prvo bitnu jamu pri sledećem skoku.



Slika 3.1: Ilustracija FK modela sa $\omega = 1$ pod dejstvom \vec{F} . Slika preuzeta iz [4].

Prateći dosadašnju analogiju jednočestičnog FK modela sa kućnim eksperimentom, dejstvo kombinacije ravnomerne i naizmenične sile na kliker u redu kartona za jaja podrazumevalo bi malo drugačiju sliku jer se kliker više uopšte ne kotrlja usled naizmeničnih skokova. Delovanje ove dve sile na FK model može se predstaviti mrdanjem horizontalno postavljenog kartona, stim da dve ruke koje mrdaju karton rade to različitim jačinama na sledeći način: mrdanje kartona tako da se kliker kreće unazad vrši se jačinom proporcionalnom intenzitetu naizmenične sile, dok se mrdanje kartona sa ciljem kretanja klikeru unapred vrši jačinom koja je proporcionalna zbiru intenziteta naizmenične i ravnomerne sile. Iako se kliker kreće nazad-napred, rezultat ovakvog eksperimenta biće kretanje klikeru unapred zbog većeg intenziteta sile koja deluje u tom smeru. Međutim, pri fiksiranoj vrednosti intenziteta naizmenične sile, resultantna brzina klikeru više neće biti isključivo monotono rastuća funkcija intenziteta ravnomerne sile. Pri određenim vrednostima intenziteta naizmenične sile dešava se situacija u kojoj resultantna brzina klikeru ostaje nepromenjena pri porastu intenziteta ravnomerne sile jer se kliker nakon skoka unazad opet vraća u jamu u kojoj se nalazio tik pred skok. Kliker može da napusti ovakvo "zaključavanje" tek kada intenzitet ravnomerne sile bude dovoljno velik da obezbedi napredovanje klikeru u sledeću jamu nakon skoka nazad-napred. Opseg u kom resultantna brzina ne raste uprkos povećanju intenziteta ravnomerne sile ocrtava se kao plato na grafiku funkcije srednje brzine \bar{v} od \bar{F} i predstavlja rezonantno rešenje jednačina kretanja."

Fizički se dejstvo ravnomerne i naizmenične sile na FK model u disipativnom limitu opisuje jednačinama kretanja (2.3) sa dodatkom člana koji opisuje naizmeničnu silu:

$$\frac{du_j}{dt} = u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j - V'(u_j) + \bar{F} + F_{ac} \cos(2\pi\nu_0 t) \quad (3.1)$$

gde je F_{ac} amplituda a ν_0 frekvencija naizmenične sile.

Rešenja jednačina kretanja (3.1) su, kao i u dosadašnjim primerima različitih fizičkih situacija u FK modelu, podložana transformacijama simetrije. Dakle, ako je $\{u_j(t)\}$ rešenje jednačina kretanja koje odgovara početnoj konfiguraciji $\{u_j(t_0)\}$, tada rešenje oblika $\sigma_{r,m,s}\{u_j(t)\}$ odgovara početnoj konfiguraciji $\sigma_{r,m,s}\{u_j(t_0)\}$, gde je dejstvo transformacije $\sigma_{r,m,s}$ dato sa:

$$\sigma_{r,m,s}\{u_j(t)\} = \left\{ u_{j+r}\left(t - \frac{s}{\nu_0}\right) + m \right\} \quad (3.2)$$

Rezonantnim rešenjem jednačina kretanja $\{u_j(t)\}$ se smatra rešenje za koje postoji transformacija simetrije koja takvu konfiguraciju ostavlja nepromenjenom:

$$\{u_j(t)\} = \sigma_{r,m,s}\{u_j(t)\} \quad (3.3)$$

Da bi postojala transformacija simetrije koja konfiguraciju ostavlja nepromenjenom, ceo lanac mora u nekom intervalu \bar{F} da se kreće ravnomereno bez porasta brzine pri povećanju ravnomerne sile. Invarijatnost konfiguracije je ostvarena samo kada je:

$$\frac{s}{\nu_0} = \frac{r\omega + m}{\bar{v}} \quad (3.4)$$

odnosno

$$\frac{\bar{v}}{\nu_0} = \frac{r\omega + m}{s} \quad (3.5)$$

Za određenu rezonantnu brzinu \bar{v} u samerljivim strukturama gde je $\omega = \frac{p}{q}$ postoji beskonечно mnogo triplata (r, m, s) koji zadovoljavaju gornju jednačinu. Najmanji triplet celih brojeva (r, m, s) je onaj za koji važi:

$$\text{NZD}(rp + mq, s) = 1 \quad (3.6)$$

Međutim, triplet određen ovim uslovom nije jedinstven jer za triplet $(r' = r + lq, m' = m - lp, s)$ takođe važi $(r'p + m'q, s) = 1$.

Iako brojevi r i m nisu jedinstveni u minimalnom tripletu, broj s po definiciji minimalnog triplata mora biti jedinstven i stoga je upravo taj broj jedinstvena odlika minimalnog triplata (r, m, s) .

Kada je $s = 1$ tada je rezonanca sistema harmonijska a kada je $s > 1$ rezonanca je subharmonijska.

Pojava rezonantnih rešenja u spektru mogućih konfiguracija koje zadovoljavaju jednačine (3.1) se može protumačiti pojavom sinhronizacije frekvencije oscilovanja kuplovanih oscilatora - čestica sa frekvencijom dejstva naizmenične sile.

3.1 Celobrojno rastojanje između čestica $\omega \in \mathbb{Z}$

Intuitivni opis dinamike FK modela pod dejstvom kombinacije ravnomerne i naizmenične sile iz prethodnom poglavlja najlakše se primjenjuje na FK model sa celobrojnim srednjim rastojanjem između čestica.

Harmonijska rezonanca $s = 1$ u odzivnoj funkciji srednje brzine na delovanje ravnomerne sile pri fiksiranoj vrednosti naizmenične sile može se videti na slici 3.2. Sa slike se vidi da za celobrojno srednje rastojanje između čestica do sinhronizacije dolazi samo kada je $s = 1$, odnosno pojavljuju se samo harmonijske rezonance.

Pojava isključivo harmonijskih rezonanci u sistemu sa celobrojnim srednjim rastojanjem $\omega \in \mathbb{Z}$ može se čak pokazati i analitički [34] u standardnom FK modelu. Kada je srednje rastojanje između čestica celobrojno tada se čestice uvek nalaze u različitim potencijalnim jamama i rastojanje između njih ostaje uvek isto kroz celo kretanje. Stoga se jednačine kretanja mogu svesti na:

$$\frac{du_j}{dt} = -\frac{K}{2\pi} \sin(2\pi u_j) + \bar{F} + F_{\text{ac}} \cos(2\pi\nu_0 t) = -v_d + F_{\text{ac}} \cos(2\pi\nu_0 t) \quad (3.7)$$

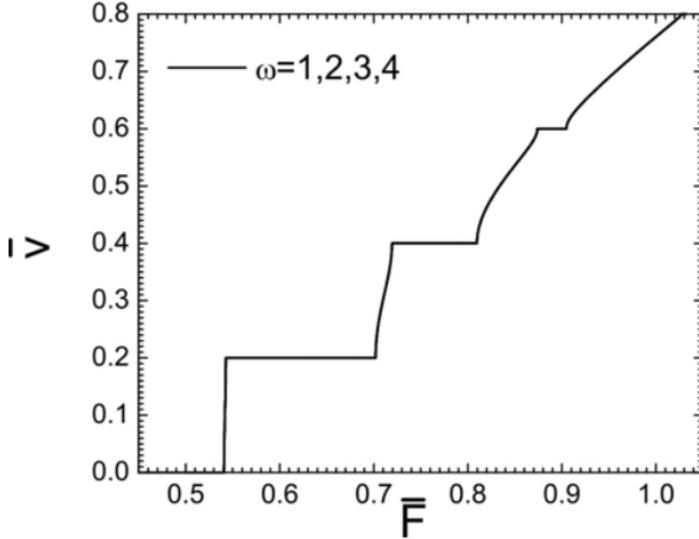
gde je uvedena brzina drifta v_d kao brzina kojom bi se nezavisna čestica kretala po substratnom potencijalu samo pri dejsvu ravnomerne sile. Integracija gornje jednačine daje:

$$u_j = -v_d t + \frac{F_{\text{ac}}}{2\pi\nu_0} \sin(2\pi\nu_0 t) + u_0 \quad (3.8)$$

gde je u_0 aditivna konstanta koja se može uzeti i kao početna koordinata j -te čestice.

Standardni substratni potencijal može se razviti u Furije red kao:

$$V(u) = \frac{a_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} a_q \cos(2\pi qu) \quad (3.9)$$



Slika 3.2: Odzivna funkcija srednje brzine \bar{v} pri dejstvu opsega \bar{F} na standardni FK model sa celobrojnim srednjim rastojanjem između čestica pri $K = 4, \nu_0 = 0.2, F_{\text{ac}} = 0.2$. Slika preuzeta iz [33].

Položaj bilo koje čestice dat je jednačinom (3.8) i stoga se potencijal može zapisati kao:

$$\begin{aligned} V(u) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} a_q \cos \left[2\pi q \left(-v_d t + \frac{F_{\text{ac}}}{2\pi\nu_0} \sin(2\pi\nu_0 t) + u_0 \right) \right] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{1}{2i} \sum_{q=1}^{\infty} a_q \left[e^{-i2\pi q(-v_d t + u_0)} e^{-i2\pi q \left(\frac{F_{\text{ac}}}{2\pi\nu_0} \sin(2\pi\nu_0 t) \right)} + e^{i2\pi q(-v_d t + u_0)} e^{i2\pi q \left(\frac{F_{\text{ac}}}{2\pi\nu_0} \sin(2\pi\nu_0 t) \right)} \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

Dva eksponencijalna člana u gornjoj jednačini mogu se transformisati pomoću Beselovih funkcija znajući da je [35]:

$$e^{iA \sin(\alpha t)} = \sum_{p=-\infty}^{\infty} J_p(A) e^{ip\alpha t} \quad (3.11)$$

gde je $J_p(A)$ Beselova funkcija p -tog reda. Pošto su Beselove funkcije parne, izraz za potencijal sada postaje:

$$\begin{aligned} V(u) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_q J_p \left(\frac{qF_{\text{ac}}}{\nu_0} \right) \frac{1}{2i} [e^{-i2\pi q(-v_d t + u_0)} e^{-ip2\pi\nu_0 t} + e^{i2\pi q(-v_d t + u_0)} e^{ip2\pi\nu_0 t}] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_q J_p \left(\frac{qF_{\text{ac}}}{\nu_0} \right) \cos [2\pi(-v_d q + p\nu_0)t + 2\pi q u_0] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Vremenski usrednjeni potencijal će biti jednak upravo nultom članu Fureije ekspanzije

$$\langle V(u) \rangle = \frac{a_0}{2} \quad (3.13)$$

osim kada je $p\nu_0 = qv_d$. U tom slučaju vremenski usrednjjen potencijal ima dodatni polarizacioni doprinos:

$$\langle V(u) \rangle = \frac{a_0}{2} + \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_q J_p \left(\frac{qF_{ac}}{\nu_0} \right) \cos(2\pi qu_0) \quad (3.14)$$

gde se dodatni polarizacioni doprinos može zapisati i kao suma po n , gde n predstavlja sve vrednosti na kojim kombinacija brojeva p i q obezbeđuje postojanje doprinosa $\frac{p}{q} = \frac{v_d}{\nu_0}$:

$$\delta \langle V(u_0) \rangle = \sum_n a_q J_p \left(\frac{qF_{ac}}{\nu_0} \right) \cos(2\pi qu_0) \quad (3.15)$$

Prvi izvod dodatnog doprinosa potencijalu je:

$$\delta \langle V'(u_0) \rangle = - \sum_n 2\pi q a_q J_p \left(\frac{qF_{ac}}{\nu_0} \right) \sin(2\pi qu_0) \quad (3.16)$$

i jednak je negativnoj superpoziciji neparnih funkcija.

Da bi suma neparnih funkcija bila različita od nule potrebno je da ima neparan broj članova, odnosno da ceo broj q bude neparan. Međutim, kada je vrednost $q \neq 1$ postoji beskonačno mnogo svodljivih reprezentacija odnosa $\frac{p}{q}$ po kojim se neparna funkcija sumira. Usrednjena vrednost ovako beskonačnih suma smatra se nulom. Stoga, jedina dozvoljena vrednost broju q jeste $q = 1$ jer je tada odnos $\frac{p}{q}$ uvek nesvodljiv i prvi izvod dodatnog doprinosa potencijalu je različit od nule.

Negativna vrednost dodatnog doprinosa potencijalu pri $\frac{p}{q} = p \in \mathbb{Z}$ se suprotstavlja povećanju intenziteta ravnomerne sile i nastaje rezonanca. Pošto $q \neq 1$, pri $\omega = 1$, nije dozvoljeno dosadašnjem izlaganjem, dolazi se do zaključka da se u jednočestičnim sistemima javljaju samo harmonijske rezonance. Ovakav odziv se lepo vidi na slici 3.2.

3.2 Polucelo srednje rastojanje između čestica, $\omega = \frac{1}{2}$

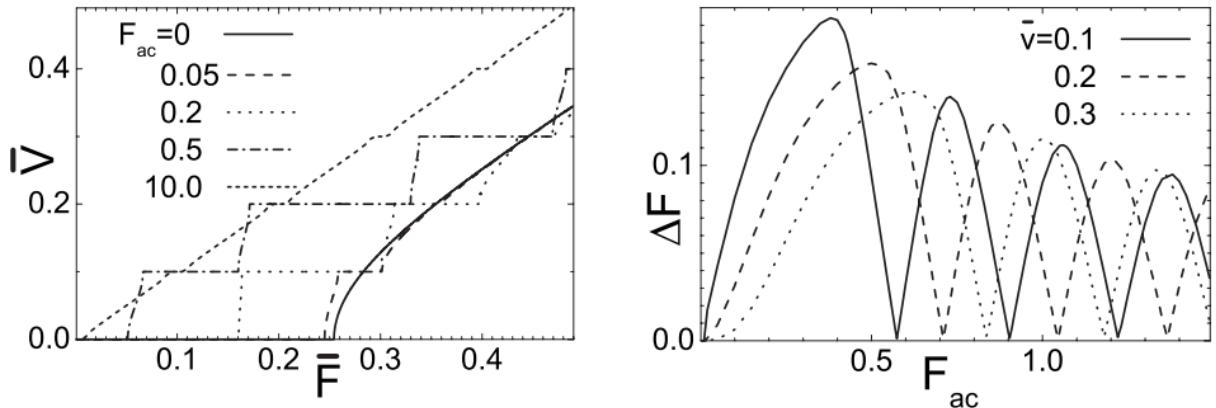
Srednje rastojanje čestica ω definisano u jednačini (1.43) u samerljivim strukturama predstavljeno je racionalnim brojem

$$\omega = \frac{p}{q}, \quad (p, q) = 1 \quad (3.17)$$

gde su p i q celi brojevi bez zajedničkog delioca osim broja 1. Ovako definisano srednje rastojanje između čestica se u samerljivim strukturama može protumačiti kao broj čestica q koje se nalaze u p jama substratnog potencijala. U odeljku 1.2 je pokazano da se FK lanac proizvoljne dužine može stvoriti ponavljanjem osnovnog motiva koji je nazvan elementarnom celijom. Dakle, ω predstavlja broj čestica u elementarnoj celiji FK lanca.

U nastavku ovog rada ispitivaće se ponašanje FK modela sa dve čestice po jami substratnog potencijala $\omega = \frac{1}{2}$ jer je tada doprinos diskretnog Laplasijana $(u_{j+1} + u_{j-1} - 2u_j)$ iz jednačine (3.1) u opštem slučaju različit od nule i menja se vremenom. Zbog dodatnog člana u jednačinama kretanja koji opisuje harmonijsku interakciju među susednim česticama dinamika FK modela postaje znatno bogatija.

Na slici 3.3 se može videti oblik funkcije srednje brzine u zavisnosti od intenziteta naizmenične i ravnomerne sile pri fiksiranim ostalim parametrima sistema. Odziv srednje brzine je, kao i u jednočestičnom sistemu, okarakterisan pojavom harmonijskih rezonanci. Rezonantna rešenja jednačina kretanja se i u ovakovom modelu javljaju usled takmičenja sila sa suprotnim dejstvom : \bar{F} koja teži da čestice kolektivno kreće u jednom smeru i $V'(u_j)$ koja teži da čestice zadrži pričvršćenim u minimumima substratnog potencijala.



Slika 3.3: (levo) Srednje brzine \bar{v} u zavisnosti od intenziteta ravnomerne sile \bar{F} pri nekoliko vrednosti amplitude naizmenične sile F_{ac} ; (desno) Spektar širine prvog, drugog i trećeg harmonijskog stepenika u širokom ospegu F_{ac} . Odzivi sa slike odgovaraju dvočestičnom standardnom FK modelu sa $\omega = \frac{1}{2}$, $K = 4$, $\nu_0 = 0.2$. Slika preuzeta iz [36].

Sa slike 3.3 se vidi da se porastom F_{ac} smanjuje kritična sila otključavanja FK lanca F_c . Čak i najmanja vrednost intenziteta naizmenične sile perturbuje čestice unutar potencijalnih jama u kojim se nalaze u stanju mirovanja. Usled već indukovanih kretanja, doduše malog pri malim vrednostima F_{ac} , oslobođanje lanca iz pričvršćene konfiguracije je olakšano i vrednost kritične sile je manja. Pri izuzetno velikim amplitudama $F_{ac} = 10$ kritična sila je jednaka nuli $F_c = 0$ jer su čestice iz stanja mirovanja poremećene velikim uticajem naizmenične sile koji je u stanju da ih razmesti iz potencijalnih jama u kojim su se nalazile u stanju mirovanja. Dejstvo i najmanje ravnomerne sile $F_c \approx 0$ na ovako razmeštenu konfiguraciju izaziva kolektivno kretanje celog lanca.

Kada je $F_{ac} = 0$ srednja brzina je opisana dinamičkom trupnom funkcijom kao na slici 2.3. Povećanje intenziteta naizmenične sile dovodi do pojava harmonijskih stepenika. Njihova širina raste porastom F_{ac} sve dok se ne dostigne određena vrednost intenziteta nakon kojeg širine rezonantnih stepenika počinju da opadaju. Pri velikim vrednostima intenziteta naizmenične sile, na primer $F_{ac} = 10$ razmeštanje čestica po jamama substratnog potencijala je toliko veliko da harmonijski stepenici imaju izuzetno malu širinu. Dalje povećanje intenziteta naizmenične sile dodatno bi smanjilo stepenike i oni bi pri nekoj kritičnoj vrednosti F_{ac} u potpunosti nestali. Kada $F_{ac} \rightarrow \infty$ sistem čestica je podlegnut toliko velikoj sili da substratni potencijal više nema uticaj na njihovo kretanje i odziv odgovara odzivu sistema slobodnih čestica pod dejstvom rezultantne sile [37].

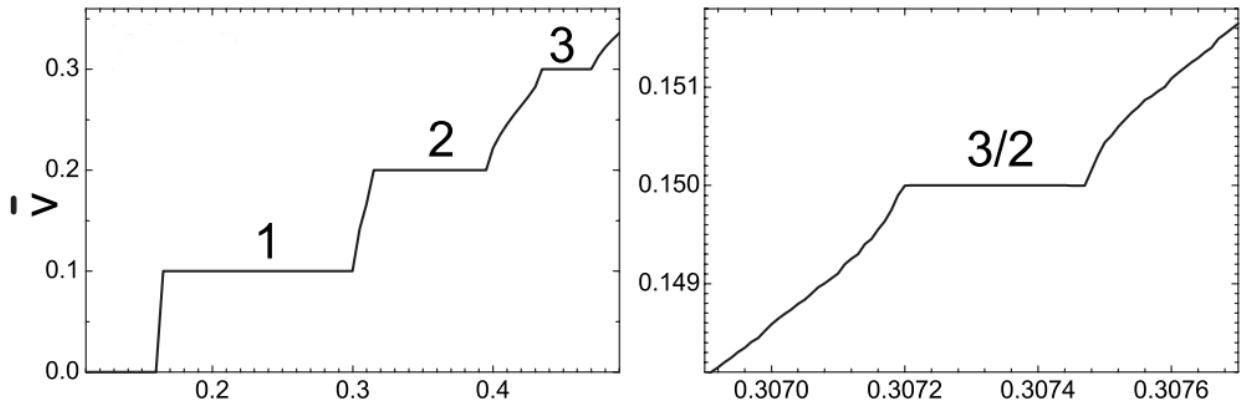
Desna strana slike 3.3 predstavlja širine ΔF prva tri harmonijska stepenika

$$\bar{v} = \frac{i}{s} \omega \nu_0, \quad \frac{i}{s} = \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1} \quad (3.18)$$

merene u velikom opsegu F_{ac} . Sve tri funkcije ispoljavaju Beselovsko oscilovanje u tom pogledu da im je svaki sledeći maksimum manji od prethodnog i da period oscilacije postepeno smanjuje napredovanjem po x -osi. Beselovsko oscilovanje stepenika je predviđeno jednačinom (3.16) u koju eksplicitno ulaze Beselove funkcije argumenta F_{ac} . Iako se sistem sa $\omega = \frac{1}{2}$ ne rešava analitički, sam oblik funkcije širine stepenika u zavisnosti od intenziteta naizmenične sile $\Delta F(F_{ac})$ bi morao da se poviňuje sličnim zavisnostima kao analitičko rešenje.

Pri malim vrednostima F_{ac} maksimumi širina stepenika opadaju sa porastom harmonika. Povećanjem F_{ac} širine sva tri harmonika postaju približno iste. Upoređujući desnu i levu stranu slike 3.3 može se prepostaviti da porastom intenziteta preko $F_{ac} > 1.5$ širine sva tri harmonika opadaju ka nuli imajući sve vreme približno jednakе maksimume.

FK model u kom srednje rastojanje između čestica nije ceo broj $\omega \notin \mathbb{Z}$ ima, u opštem slučaju, imati subharmonijske rezonance u odzivu srednje brzine.



Slika 3.4: $\bar{v}(\bar{F})$ pri jednoj vrednosti $F_{ac} = 0.2$. Desna slika predstavlja uvećan deo iste funkcije kao na levoj slici u malom intervalu \bar{F} . Parametri sistema su $\omega = \frac{1}{2}$, $K = 4$, $\nu_0 = 0.2$.

Slika preuzeta iz [38].

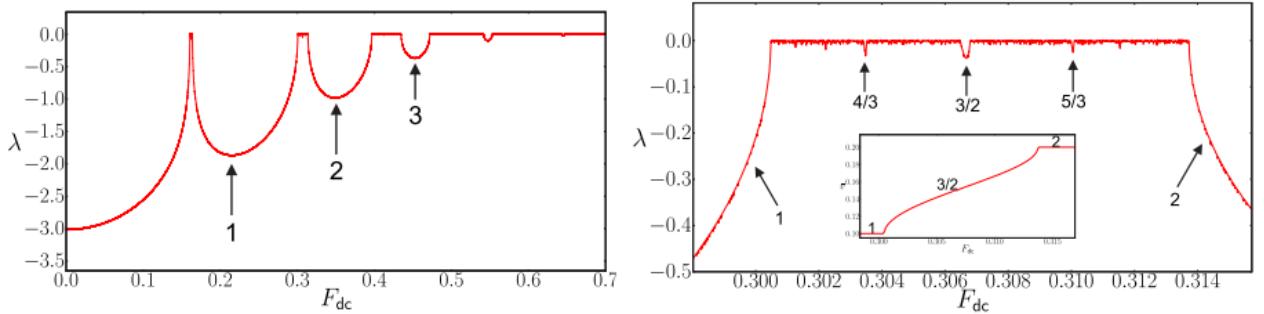
Slika 3.4 ilustruje činjenicu da iako odzivna funkcija snimljena u širikom opsegu \bar{F} naočigled nema subharmonijske stepenike, oni se mogu otkriti u izuzetno uskom intervalu \bar{F} . Na slici je prikazan stepenik $\frac{3}{2}$ koji predstavlja stepenik sa najmanjim imenocem različitim od jedinice, $s = 2$. Traženje stepenika $\frac{3}{2}$ u čitavoj odzivnoj funkciji postaje mnogo lakše kada se zna na kojoj vrednosti srednje brzine se taj stepenik javlja. Srednja brzina prve subharmonijske rezonance može se izračunati kao:

$$\bar{v} = \frac{i}{s} \omega \nu_0, \quad \frac{i}{s} = \frac{3}{2} \quad (3.19)$$

Upoređujući opseg \bar{F} u kom odziv sistema doživjava harmonijsku i subharmonijsku rezonancu očigledno je da je širina harmonijskog stepenika neuporedivo veća od širine prvog subharmonijskog stepenika zbog čega je traženje dodatnih subharmonijskih rezonanci teško prateći ovaj metod. Pogodnija metoda otkrivanja subharmonijskih rezonanci nalazi se u ispitivanju maksimalnog Ljapunovljevog eksponenta [39]. Metoda Ljapunovljevog eksponenta se u dinamičkim sistemima koristi da bi se otkrilo da li je u sistemu prisutan haos [41], međutim pokazala se i kao izvrsna metoda detektovanja rezonanci u FK modelu.

Gubljenje informacije o početnoj postavci dinamičkog sistema je jedna od fundamentalnih karakteristika pojave haosa. Zbog gubitka informacija o početnoj konfiguraciji u slučaju

prusustva haosa, odzivna funkcija takvog dinamičkog sistema nije reverzibilna. Ljapunovljev



Slika 3.5: Najveći Ljapunovljev eksponent λ u FK modelu sa $\omega = \frac{1}{2}$ pri jednoj vrednosti $F_{ac} = 0.2$. Ostali parametri sistema su $K = 4$, $\nu_0 = 0.2$. Slika preuzeta iz [28].

eksponent upravo meri razdvajanje usled dinamike dve konfiguracije koje su prvo bitno bile infinitezimalno malo razdvojene. Ljapunovljev eksponent λ se javlja kao mera disperzije u jednačini:

$$|\delta Z(t)| \approx e^{\lambda t} |\delta Z_0| \quad (3.20)$$

gde su $|\delta Z(t)|$ i $|\delta Z_0|$ absolutne vrednosti razdvojenosti dve konfiguracije u proizvoljnem i početnom trenutku respektivno. Ljapunovljev eksponent uveliko zavisi od izbora početnih konfiguracija koje se posmatraju. Zbog toga se uvek računa spektar Ljapunovljevih eksponenata koji ima onoliko komponenata koliko ima stepeni slobode u posmatranom dinamičkom sistemu. Rezultat sa slike 3.5 je računat za FK lanac od osam čestica što podrazumeva osam, u opštem slučaju, različitih Ljapunovljevih eksponenata. Međutim, dovoljno je posmatrati samo najveći [41] λ_m eksponent u celom spektru λ_i da bi se dobila odgovaraajuća slika dinamike.

Pošto je maksimalni Ljapunovljev eksponent λ_m dovoljan za razmatranje dinamike, često se ovaj eksponent naziva upravo Ljapunovljevim eksponentom λ i definiše se u vremenskim i prostornim limitom:

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\delta Z_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{|\delta Z(t)|}{|\delta Z_0|} \quad (3.21)$$

U diskretnom modelu kao što je FK, Ljapunovljev eksponent je računat u radovima [28] i [42] uzimajući samo maksimalni Ljapunovljev eksponent za seriju različitih početnih razmaka dvaju konfiguracija:

$$u'_l(t_{ss}) = u_l(t_{ss}) \pm \sqrt{\frac{d_0^2}{N}} \quad (3.22)$$

gde su N broj čestica, d_0 parametar koji karakteriše razdvojenost konfiguracija, t_{ss} vreme u kom je konfigracija FK modela stabilna. Plus i minus se u jednačini uzimaju nasumično da bi se pokrio čitav podprostor mogućih Ljapunovljevih eksponenata i našao upravo maksimalni.

Iz jednačine (3.20) se vidi da pozitivna vrednost Ljapunovljevog eksponenta doprinosi razlaženju dve prvo bitno bliske konfiguracije i podrazumeva pojavu haosa u sistemu. Dinamički sistem u kom nema haosa mora imati Ljapunovljev eksponent $\lambda \leq 0$ jer se jedino tada ne povećava relativan odnos dve početne konfiguracije.

Slika 3.5 prikazuje izračunati maksimalni Ljapunovljev eksponent λ u širokom i uskom opsegu \bar{F} odakle se vidi da λ nigde nije pozitivno što implicira da u FK modelu nije prisutan haos.

Kada se sistem nalazi u rezonanci, harmonijskoj ili subharmonijskoj, konfiguracije čestica su vremenski periodične. Posmatranje maksimalnog Ljapunovljevog eksponenta podrazumeva da se posmatraju konfiguracije koje se najviše udaljuju tokom vremena, a pošto su u pitanju periodične konfiguracije njihovo najveće međusobno udaljenje dešava se kada su u kontrafazi. Iako u kontrafazi, konfiguracije se moraju periodično dodirivati i konvergirati jedna ka drugoj. Ljapunovljev eksponent je stoga uvek negativan u oblasti \bar{F} u kojoj je prisutna rezonanca.

Dok sistem nije u rezonanci, srednja brzina je rastuća funkcija i rešenja jednačina kretanja su kvazi-periodična. Pošto je evolucija konfiguracija u ovakovom režimu linearne, razlika između dve konfiguracije se održava tokom vremena i Ljapunovljev eksponent je jednak nuli.

Velika pogodnost metode ispitivanja Ljapunovljevog eksponenta je upravo u tome što se njom lakše pronalaze subharmonijski stepenici posmatrajući samo predele u kojim je $\lambda < 0$. Slike 3.5 i 3.4 predstavljaju rezultate računanja FK modela sa istim parametrima. Sa grafikom $\lambda(\bar{F})$ se jasno vidi pojava dve dodatne identifikovane subharmonijske rezonance, $\frac{4}{3}$ i $\frac{5}{3}$, pored svih do sada primećenih stepenika. Takođe, posmatrajući opseg između $\frac{1}{1}$ i $\frac{4}{3}$, kao i opseg između $\frac{5}{3}$ i $\frac{2}{1}$ može se naslutiti postojanje još subharmonika.

3.3 Generalizovani FK model

U prethodnim poglavljima se posmatrao FK model sa substratnim potencijalom oblika (1.3). Takav model se naziva standardni Frenkel Kontorova model. U ovom poglavljju će se opisati postavka generalizovanog FK modela koja će se koristiti u ostatku ovog istraživanja.

Standardni FK model je retko ostvariv u realnim fizičkim sistemima. Na primer, ako bi substrat činila atomska rešetka, tada bi standardni FK model bio ostvariv jedino ako kristalna rešetka substrata ima jedan atom po elementarnoj celiji[30].

Ponašanje jednodimenzionog lanca sa harmonijskom međučestičnom interakcijom može da se smesti u najrazličitije vrste substratnih potencijala [31] koji se biraju tako da približno opisuju željeni fizički sistem. Kada je FK lanac smešten u substratni potencijal koji se razlikuje od (1.3) tada se takav model naziva generalisanim FK modelom.

Ramoazne i Pejra su predložili klasu substratnih potencijala opisanih jednačinom [32]:

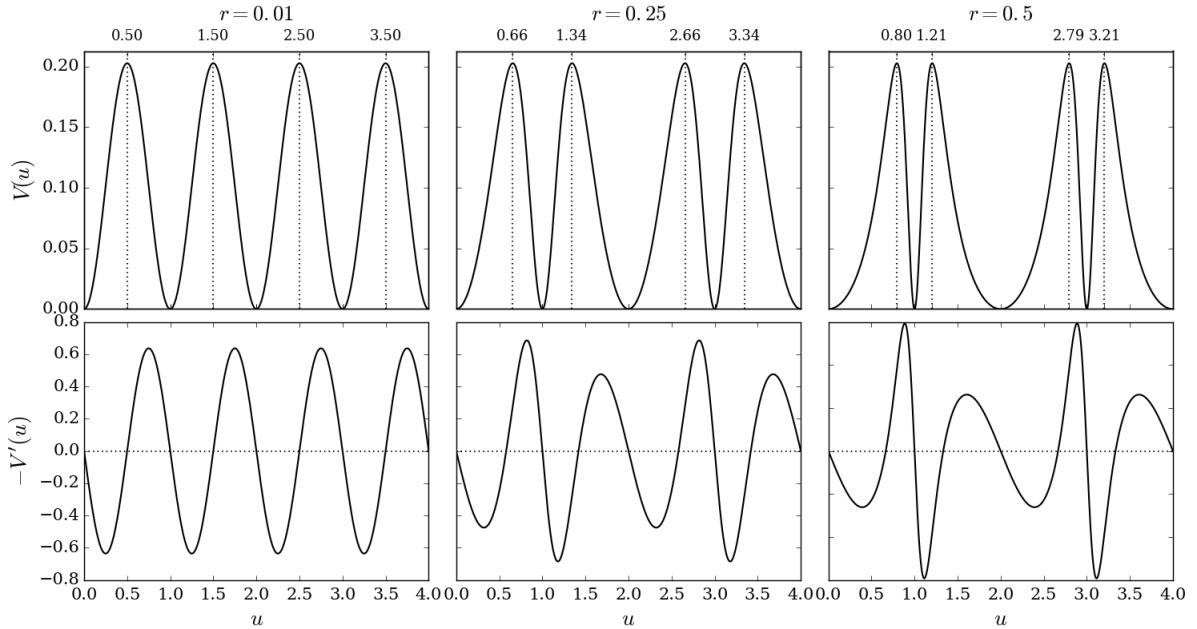
$$V(u) = \frac{K}{(2\pi)^2} A(r) \frac{1 + e \cos(2\pi u)}{\left[1 + r^2 + 2r \cos\left(\frac{2\pi u}{m}\right)\right]^p} \quad (3.23)$$

gde je $A(r)$ normirana amplituda, p i m celi brojevi, $e = \pm 1$, dok je r parametar deformacije koji se nalazi u opsegu $r \in [-1, 1]$. Ovako definisan potencijal se odabirom parametara može štimeniti za proučavanje talasa električnog naboja, Džozensonovih spojeva, kristala sa dislokacijama itd. Pri $r = 0$ potencijal (3.23) se svodi na potencijal standardnog FK modela.

Funkcija (3.23) dozvoljava stvaranje mnoštva različitih oblika potencijala. Jedan od njih je asimetrični deformacioni substratni potencijal (ASDP) definisan kao [32]:

$$V(u) = \frac{K}{(2\pi)^2} \frac{(1 - r^2)^2 [1 - \cos(2\pi u)]}{[1 + r^2 + 2r \cos(\pi u)]^2} \quad (3.24)$$

Ovako definisan potencijal može se videti na slici 3.6. Na slici su prikazani oblici ASDP za tri vrednosti pozitivnog deformacionog parametra r . Deformacioni parametar može imati negativne vrednosti i tada je oblik ASDP antisimetričan u odnosu na pozitivni r istog intenziteta što stvara ekvivalentnu situaciju kao na slici 3.6 samo transliranu za jedan period substratnog potencijala. Zbog toga se r može definisati u opsegu $r \in [0, 1]$.

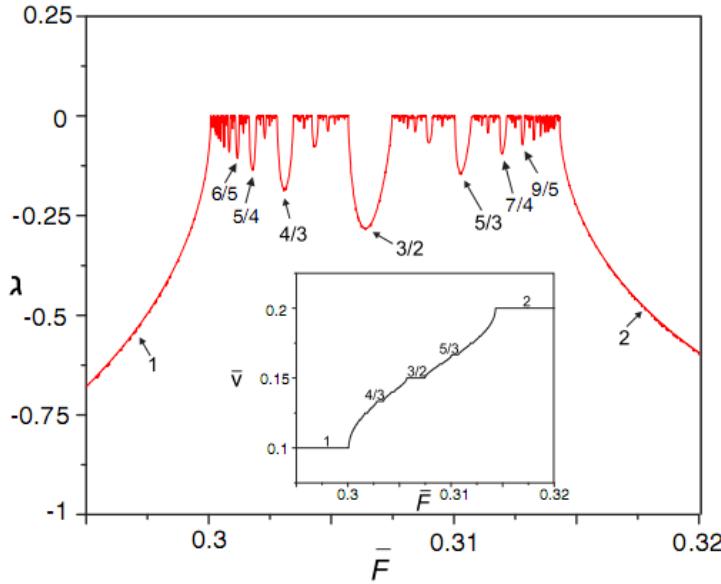


Slika 3.6: Oblik asimetričnog deformacionog substratnog potencijala (3.24) (gore) i njegov negativni prvi izvod (dole) za tri različite vrednosti deformacionog parametra r .

Promena deformacionog parametra r dovodi do sužavanja, odnosno širenja potencijalnih jama. U periodu potencijala od 2π sada se nalaze dve neekvivalentne lame. Velika pogodnost asimetričnog deformacionog substratnog potencijala jeste u tome što se visina potencijalne barijere substrata ne menja sa promenom deformacionog parametra. Međutim, u prvom izvodu potencijala sada se nalaze dve različite visine potencijalnih barijera u okviru periode 2π . Različite visine potencijalnih barijera prvog izvoda dovodi do različitih energija pričvršćenih čestica u različitim jamama i oktrivanje vrednosti kritične sile za sistem sa $\omega = 1$ više nije jednostavan kao u standardnom slučaju (2.27).

Na slici 3.7 je prikazan izračunat maksimalni Ljapunovljev eksponent λ u generalisanom FK modelu pri izuzetno maloj vrednosti deformacionog parametra $r = 0.01$. Poredeći sliku 3.7 i desnu stranu slike 3.5, i uzimajući u obzir da obe slike odgovaraju FK modelu sa istim skupom parametara izuzev deformacionog parametra, primećuje se mnogo izraženija pojave subharmonijskih rezonanci u generalisanom FK modelu. Čak i najmanja perturbacija standardnom obliku substratnog potencijala dovela je do lakše identifikacije najmanje četiri dodatne subharmonijske rezonance. Sa slike se vidi da je prisutno još neobeleženih rezonanci u obliku oblasti spektra \bar{F} u kojim je maksimalni Ljapunovljev eksponent manji od nule $\lambda < 0$. Umetnuta slika ilustruje veću izraženost subharmonijskih rezonanci u odzivnom fukniji $\bar{v}(\bar{F})$.

Metod maksimalnog Ljapunovljevog eksponenta pruža uvid u relativne odnose subharmonijskih rezonanci ali ne i u njihove absolutne odnose. Površina oblasti u kojoj je $\lambda < 0$ za dati



Slika 3.7: Maksimalni Ljapunovljev eksponent u generalisanom FK modelu sa deformacionim parametrom $r = 0.01$ i $\omega = \frac{1}{2}$. Ostali parametri sistema su $F_{ac} = 0.2$, $K = 4$, $\nu_0 = 0.2$. Slika preuzeta iz [42]

stepenik je direktno korelisana sa širinom tog stepenika. Sa slike 3.7 se vidi da je stepenik $\frac{3}{2}$ najveći subharmonijski stepenik, odmah iza njega su stepenici $\frac{4}{3}$ i $\frac{5}{3}$ koje prate stepenici $\frac{5}{4}$ i $\frac{7}{4}$ itd. Može se zaključiti da su stepenici istog imenioca približno jednakih veličina i da veličina stepenika opada sa porastom imenioca. Ovakva raspodela širina među stepenicima je u mnogome slična algoritmu za stvaranje Farejevih skupova koji će biti detaljno predstavljeni u sledećem poglavljju.

Dosadašnji opis rezonanci u FK modelu sa $\omega \notin \mathbb{Z}$ pomoću jednačina tipa (3.16)i metodom maksimalnog Ljapunovljevog eksponenta pokazuje da nema suštinske razlike između harmonijskih i subharmonijskih rezonanci. Rezonanti stepenici ili platoi u odzivnoj funkciji se u fizici nazivaju Šapiro stepenicima i u ovom modelu se dele na harmonijske i subharmonijske. Dalje istraživanje će ispitivati karakteristike subharmonijskih Šapiro stepenika u generalisanom FK modelu.

Glava 4

Farejevi nizovi

Farejev niz n - tog reda \mathcal{F}_n predstavlja rastući niz nesvodljivih razlomaka između 0 i 1 čiji imenici ne prelaze vrednost n [43]. Razlomak $\frac{h}{k}$ pripada Farejevom nizu \mathcal{F}_n ako:

$$0 \leq h \leq k \leq n, \quad (h, k) = 1 \quad (4.1)$$

gde $(h, k) = 1$ označava da celi brojevi h i k imaju za najveći zajednički delilac broj 1. Nekoliko prvih Farejevih nizova su [44]:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_1 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\} \\ \mathcal{F}_2 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\} \\ \mathcal{F}_3 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\} \\ \mathcal{F}_4 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\} \\ \mathcal{F}_5 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\} \\ \mathcal{F}_6 &= \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{1}{1} \right\} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Karakteristične osobine Farejevih nizova se sastoje u sledećim teoremmama:

Teorema 3. [43] Ako su $\frac{h}{k}$ i $\frac{h'}{k'}$ dva uzastopna člana Farejevog niza \mathcal{F}_n tada važi:

$$kh' - hk' = 1 \quad (4.3)$$

Teorema 4. [43] Ako su $\frac{h}{k}$, $\frac{h''}{k''}$ i $\frac{h'}{k'}$ tri uzastopna člana Farejevog niza \mathcal{F}_n tada važi:

$$\frac{h''}{k''} = \frac{h + h'}{k + k'} \quad (4.4)$$

Teorema 5. [43] Ako je $n > 1$ tada u Farejevom nizu \mathcal{F}_n ne postoji dva uzastopna člana sa istim imeniocem.

Dokaz Teoreme 5. Ako je $k > 1$ i razlomak $\frac{h'}{k}$ se nalazi ispred razlomka $\frac{h}{k}$ u nizu \mathcal{F}_n tada je $h + 1 \leq h' \leq k$. Međutim, u tom slučaju je :

$$\frac{h}{k} < \frac{h}{k-1} < \frac{h+1}{k} \leq \frac{h'}{k} \quad (4.5)$$

što je kontradiktorno sa početnom pretpostavkom. \square

Pre dokazivanja teorema 1 i 2, pokazaće se da ispravnost jedne od teorema implicira tačnost druge i da su stoga one ekvivalentne.

Ekvivalentnost teoreme 1 i teoreme 2. [43]

Na osnovu teoreme 1 rešava se skup jednačina:

$$kh'' - hk'' = 1 \quad , \quad k''h' - h''k' = 1 \quad (4.6)$$

po h'' i k'' . Dobija se:

$$h''(kh' - hk') = h + h' \quad , \quad k''(kh' - k'h) = k + k' \quad (4.7)$$

i stoga

$$\frac{h''}{k''} = \frac{h + h'}{k + k'} \quad (4.8)$$

Dakle teorema 4 je posledica teoreme 3.

Na osnovu teoreme 2 za sve Farejeve nizove, i tačnosti teoreme 1 za Farejev skup \mathcal{F}_{n-1} , pokazaće se da je teorema 1 posledica teoreme 2. Neka su razlomci $\frac{h}{k}$ i $\frac{h'}{k'}$ uzastopni u nizu koji odgovara skupu \mathcal{F}_{n-1} i neka se razlomak $\frac{h''}{k''}$ nalazi između njih u nizu \mathcal{F}_n . Imenioci k i k' moraju biti manji od imenioca k'' jer se razlomak sa imeniocem k'' prvi put pojavio u skupu \mathcal{F}_n , dakle $k < k < k'' = n$. Prema teoremi 2 za neki ceo broj λ mora da važi :

$$h + h' = \lambda h'' \quad , \quad k + k' = \lambda k \quad (4.9)$$

Pošto su u ovakvoj postavci k i k' manji od k'' ceo broj λ ne može biti veće od 1, dakle $\lambda = 1$:

$$h + h' = h'' \quad , \quad k + k' = k'' \quad (4.10)$$

Množeći prvu jednačinu sa k i drugu jednačinu sa h i potom oduzimajući te dve jednačine dobija se:

$$kh'' - hk'' = kh + kh' - kh - hk' = kh' - hk' \quad (4.11)$$

Pošto su razlomci $\frac{h}{k}$ i $\frac{h'}{k'}$ uzastopni u skupu \mathcal{F}_{n-1} i pošto za njih po pretpostavci važi teorema 1, razlika sa desne strane jednačine jednaka je jedinici. Stoga:

$$kh'' - hk'' = 1 \quad (4.12)$$

i time je teorema 2 dokazana.

Dakle, teorema 3 je posledica teoreme 4. \square

Dokaz Teoreme 4. Dokaz je induktivan pošto i teorema 1 i teorema 2 važe kada je $n = 1$. Smatranjem teorema tačnih za skup \mathcal{F}_{n-1} pokazuje se da one važe i za skup \mathcal{F}_n .

Pretpostavljajući da su dva uzastopna razlomka $\frac{h}{k}$ i $\frac{h'}{k'}$ u nizu \mathcal{F}_{n-1} razdvojena razlomkom $\frac{h''}{k''}$ u nizu \mathcal{F}_n . Pošto se posmatra skup \mathcal{F}_n za koji se utvrđuje važenje teorema, jednačina (4.3) se ne može unapred smatrati zadovoljenom. Međutim, sa sigurnošću se može reći da su sledeće nejednakosti ispunjene za neke pozitivne cele brojeve r i s :

$$kh'' - hk'' = r > 0 \quad , \quad k''h' - h''k' = s > 0 \quad (4.13)$$

Rešavajući gornje jednačine po h'' i k'' :

$$h''(kh' - hk') = h'r + hs \quad , \quad k''(kh' - k'h) = k'r + ks \quad (4.14)$$

dobija se razlomak

$$\frac{h''}{k''} = \frac{hs + h'r}{ks + k'r} \quad (4.15)$$

r i s nemaju zajedničkog delioca većeg od 1 jer $(h'', k'') = 1$ i različiti su od nule jer se posmatraju dva različita razlomka $\frac{h}{k}$ i $\frac{h'}{k'}$. Posmatrajući skup S svih razlomaka

$$\frac{H}{K} = \frac{\mu h + \lambda h'}{\mu k + \lambda k'} \quad (4.16)$$

gde su λ i μ pozitivni celi brojevi različiti od nule takvi da je $(\lambda, \mu) = 1$, primećuje se da razlomak $\frac{h''}{k''}$ pripada skupu S . Svaki razlomak iz skupa S se nalazi između razlomaka $\frac{h}{k}$ i $\frac{h'}{k'}$, odnosno $\frac{h}{k} \leq \frac{H}{K} \leq \frac{h'}{k'}$. Zbog toga će se pre ili kasnije javiti svi članovi skupa S u nekom od Farejevih skupova \mathcal{F}_Q .

Prvi razlomak iz skupa S koji će se pojaviti u Farejevim skupovima je razlomak sa najmanjim imeniocem K što podrazumeva da su λ i μ jednaki jedinici. Dakle, prvi razlomak koji se javlja između razlomaka $\frac{h}{k}$ i $\frac{h'}{k'}$ jeste :

$$\frac{h''}{k''} = \frac{h + h'}{k + k'} \quad (4.17)$$

I na taj način je dokazana druga teorema. Pokazano je da su teorema 1 i teorema 2 ekvivalentne i stoga je na ovaj način dokazana i prva teorema. \square

Ako se iz nekog razloga Farejev niz posmatra od najvećeg člana ka najmanjem, tada za dva uzastopna člana važi :

$$kh' - hk' = -1 \quad (4.18)$$

Dakle, tačnost teoreme 1 može da se proširi tako da uopšteno važi za dva uzastopna člana Farejevog niza $\frac{h}{k}$ i $\frac{h'}{k'}$ bez obzra na njihov redosled:

$$|k'h - kh'| = 1 \quad (4.19)$$

Teorema 6. [45] Prelaskom iz Farejevog niza \mathcal{F}_{n-1} u niz \mathcal{F}_n stvaraju se samo nesvodljivi razlomci.

Dokaz Teoreme 6. Pokazano je da za dva susedna člana Farejevog niza, $\frac{h}{k}$ i $\frac{h'}{k'}$, važi jednačina (4.19) i poznato je da su razlomci skupa \mathcal{F}_{n-1} nesvodljivi. Ako se novonastali član $\frac{h''}{k''}$ prilikom prelaska u viši Farejev niz \mathcal{F}_n nalazi između razlomaka $\frac{h}{k}$ i $\frac{h'}{k'}$ tada moraju da važe relacije :

$$kh'' - kh'' = \pm 1 \quad (4.20)$$

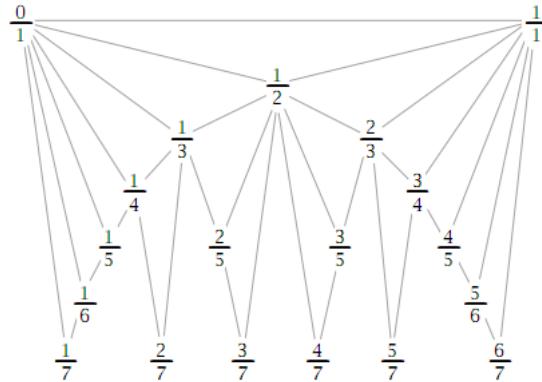
$$k''h' - k'h'' = \pm 1 \quad (4.21)$$

Ako bi novonastali razlomak bio svodljiv, celi brojevi h'' i k'' bi imali zajedničkog delioca. U tom slučaju, njihov zajednički delioci bi mogao da celobrojno podeli jednačine (4.20) i (4.21). Međutim iz jednačina (4.20) i (4.21) se vidi da one mogu biti celobrojno podeljene samo sa brojevima ± 1 . Dakle, jedini zajednički delioci brojeva h'' i k'' jesu ± 1 i razlomak $\frac{h''}{k''}$ je nesvodljiv. \square

4.1 Konstrukcija

Skup svih racionalnih brojeva između 1 i 0 se može predstaviti skupom razlomaka. Prvo se napišu sve nesvodljive polovine, zatim sve nesvodljive trećine, zatim sve nesvodljive četvrtine i postupak se može ponavljati beskonačno. Zaustavljujući se na određenoj vrednosti imenioca n dobija se Farejev skup \mathcal{F}_n .

Stvaranje uzastopnih Farejevih nizova se grafički može prikazati kao na slici 4.1.



Slika 4.1: Farejev dijagram na kom je predstavljeno generisanje celog \mathcal{F}_7 niza.

Na slici 4.1 svaki naredni nivo je popunjeno razlomcima koji se dobijaju prilikom prelaska na viši Farejev niz. Svi razlomci sa slike 4.1 pripadaju Farejevom nizu \mathcal{F}_7 . Razlomci koji su pripadali nižim Farejevim nizovima i od kojih su nastali novi razlomci prilikom prelaska u viši Farejev niz nazivaju se roditeljima. Novonastali razlomci se nazivaju deca. Razlomci $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{1}$ su jedini pripadnici Farejevih nizova koji su uvek roditelji dok su svi drugi razlomci koji se javljaju napredovanjem ka višim Farejevim nizovima su i roditelji i deca.

Svaki razlomak koji se smatra detetom nastaje od dva roditelja $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ prema teoremi 4 i jednak je $\frac{a+c}{b+d}$. Jedan roditelj je prvi razlomak koji se nalazi iznad deteta sa leve strane dok je drugi roditelj prvi razlomak koji se nalazi iznad deteta sa desne strane.

Sa Farejevog dijagrama se može videti da se prilikom prelaska u viši Farejev niz \mathcal{F}_n javljaju najmanje dva razlomka : $\frac{1}{n}$ i $\frac{n-1}{n}$, osim ako je $\frac{1}{n} = \frac{n-1}{n}$. Najmanji razlomak $\frac{1}{n}$ se uvek javlja jer su svi razlomci sa jediničnim brojiocem nesvodljivi. Najveći razlomak $\frac{n-1}{n}$ se uvek javlja jer dva uzastopna cela broja nemaju zajedničkog delioca osim jedinice i stoga je razlomak čiji su imenioce i brojioce dva uzastopna cela broja nesvodljiv.

Iako je proces stvaranja Farejevih nizova sa slike 4.1 misaono jednostavan, određivanje broja članova svakog od Farejevih nizova zahteva poznavanje Ojlerove φ - funkcije. Ojlerova φ - funkcija $\varphi(n)$ nekog celog broja n broji koliko ima celih brojeva manjih ili jednakih sa n , a sa kojim n nema zajedničkih delioca osim broja 1. Primera radi, φ - funkcija broja 8 je jednaka : $\varphi(8) = 4$ jer u intervalu $[1, 8]$ ima četiri broja za koje važi $(8, m) = 1$. Ti brojevi su: $m = \{1, 3, 5, 7\}$.

Teorema 7. [46] *Funkcija $\varphi(p^k)$ bilo kog prostog broja p ili njegovog stepena p^k , gde je $k \geq 1$, je jednaka :*

$$\varphi(p^k) = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad (4.22)$$

Dokaz teoreme 7. Pošto je broj p^k prost, jedini brojevi sa kojima je on deljiv su upravo umošći i stepeni samog proja p . Dakle, $(p^k, m) \neq 1$ samo ako je broj m neki umnožak broja p : $m = \{p, 2p, 3p, \dots, p \cdot p, \dots, p^{k-1} \cdot p\}$.

Skup brojeva m broji ukupno p^{k-1} članova. Svi ostali brojevi koji su različiti od m nemaju zajedničkih delioca sa brojem p^k . Takvih brojeva ima ukupno :

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k \left(1 - \frac{1}{p}\right) \quad (4.23)$$

□

Teorema 5 može da se proširi i da se uz pomoć nje odredi $\varphi(n)$ funkcija bilo kog celog broja. Međutim, prvo moraju da se iskoriste dve teoreme :

I) Bilo koji ceo broj može se zapisati kao proizvod prostih brojeva ili njihovih stepena:

$$n = (p_1)^{k_1} (p_2)^{k_2} \dots (p_q)^{k_q} \quad (4.24)$$

Ova teorema je poznata kao fundamentalna teorema aritmetike [47].

II) Funkcija $\varphi(nm)$ proizvoda dva broja n i m koji nemaju zajedničkog delioca osim broja 1 je multiplikativna [48]:

$$\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m), \quad (n, m) = 1 \quad (4.25)$$

Koristeći ove dve teoreme može se pronaći vrednost funkcije $\varphi(n)$ bilo kog celog broja n . Koristeći fundamentalnu teoremu aritmetike može se napisati:

$$\varphi(n) = \varphi((p_1)^{k_1} (p_2)^{k_2} \dots (p_q)^{k_q}) \quad (4.26)$$

Pošto je broj n je faktorizovan na proste brojeve, na funkciju $\varphi(n)$ može se primeniti teorema o multiplikativnosti:

$$\varphi(n) = \varphi((p_1)^{k_1})\varphi((p_2)^{k_2}) \dots \varphi((p_q)^{k_q}) \quad (4.27)$$

Primenjujući jednačinu (4.22) na jednačinu (4.27):

$$\varphi(n) = p_1^{k_1}(1 - \frac{1}{p_1})p_2^{k_2}(1 - \frac{1}{p_2}) \dots p_q^{k_q}(1 - \frac{1}{p_q}) = n(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2}) \dots (1 - \frac{1}{p_q}) \quad (4.28)$$

Dobija se konačan izraz za vrednost φ - funkcije bilo kog broja n :

$$\varphi(n) = n \prod_i (1 - \frac{1}{p_i}) \quad (4.29)$$

Razlika Farejevog niza \mathcal{F}_n i \mathcal{F}_{n-1} jeste skup svih nesvodljivih razlomaka sa imeniocem n . Skup nesvodljivih razlomaka sa imeniocem n sadrži onoliko članova koliko ima brojeva q , $1 \leq q < n$ koji nemaju zajedničkog delioca sa n osim broja 1, tj. da bi razlomak $\frac{q}{n}$ pripadao nizu \mathcal{F}_n mora da važi $(q, n) = 1$. Broj takvih razlomaka određen je upravo Ojlerovom funkcijom $\varphi(n)$.

Dakle, razlika u dužini dva uzastopna Farejeva niza određena je sa relacijom :

$$|\mathcal{F}_n| - |\mathcal{F}_{n-1}| = \varphi(n) \quad (4.30)$$

Prateći indukciju iz jednačine (4.30), dužina bilo kog Farejevog niza može da se odrediti kao zbir Ojlerovih funkcija svih brojeva q , $1 \leq q \leq n$:

$$|\mathcal{F}_n| = \sum_{q=1}^n \varphi(q) \quad (4.31)$$

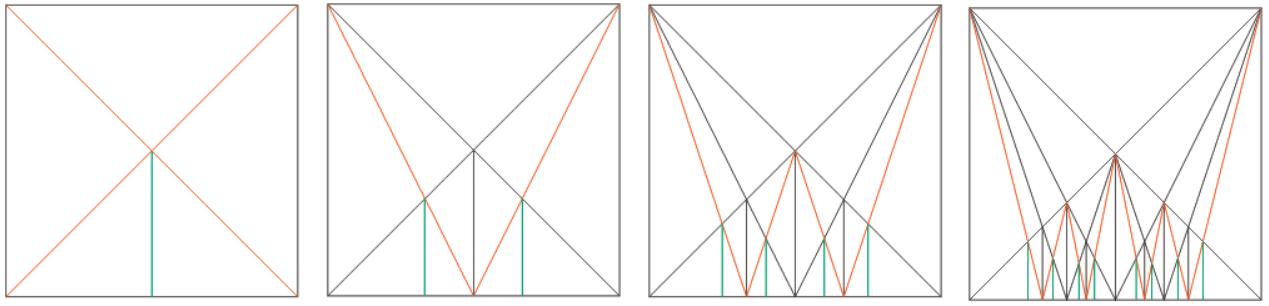
Beskonačna suma Ojlerovih funkcija se može predstaviti aritmetičkim nizom i ponaša se kao $\frac{3}{\pi^2}n^2$ sa greškom $n \log n$. Dakle, dužina Farejevog niza sa asimptotski velikim n može da se predstavi kao [49]:

$$|\mathcal{F}_n| = \frac{3}{\pi^2}n^2 + O(n \log n) \quad (4.32)$$

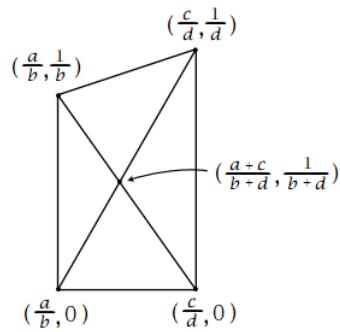
Slika 4.1 prikazuje logičko stvaranje Farejevih skupova i time i svih realnih brojeva između 0 i 1. Međutim, proces stvaranja svih realnih brojeva između 0 i 1 se efikasnije vrši geometrijski [50], procesom predstavljenim na slici 4.2.

Velika pogodnost konstrukcije sa slike 4.2 jeste što se izborom jediničnog početnog kvadrata, x - koordinata svakog nastalog razlomka upravo nalazi na samoj vrednosti razlomka. Nedostatak ovakve konstrukcije jeste što svaka sledeća iteracija ne stvara potune Farejeve nizove. Međutim, pokazaće se da se potpuni Farejevi skupovi mogu lako pronaći iz ovakve konstrukcije.

Veoma bitna karakteristika konstrukcije sa slike 4.2 jeste da se tačka nastala presekom dvaju duži u ovom procesu nalazi na koordinatama $(\frac{a}{b}, \frac{1}{b})$. Ovo je očigledno tačno za prvi razlomak u konstrukciji $\frac{1}{2}$ i nastavlja biti tačno za sve sledeće razlomke jer se dijagonale paralelograma, sa kordinatama temena kao na slici 4.3, sekut na koordinatama $(\frac{a+c}{c+d}, \frac{1}{c+d})$.



Slika 4.2: Geometrijska konstrukcija svih racionalnih brojeva između 0 i 1.



Slika 4.3: Segment konstrukcije sa slike 4.2 koji sadrži jedan novonastali razlomak. Slika preuzeta iz [50].

Da bi se ilustrovala tačnost ove tvrdnje, pokazuje se da se tačka $(\frac{a+c}{c+d}, \frac{1}{c+d})$ nalazi na obe dijagonale [50] paralelograma sa slike:

Uslov da izabrana tačka leži na duži dijagonale jeste da je koeficijent pravca segmenta dijagonale od tačke $(\frac{a}{b}, 0)$ do $(\frac{a+c}{c+d}, \frac{1}{c+d})$:

$$\frac{\frac{1}{b+d}}{\frac{a+c}{c+d} - \frac{a}{b}} = \frac{b}{b(a+c) - a(b+d)} = \frac{b}{bc - ad} \quad (4.33)$$

isti kao koeficijent pravca segmenta dijagonale od tačke $(\frac{a+c}{c+d}, \frac{1}{c+d})$ do $(\frac{c}{d}, \frac{1}{c})$:

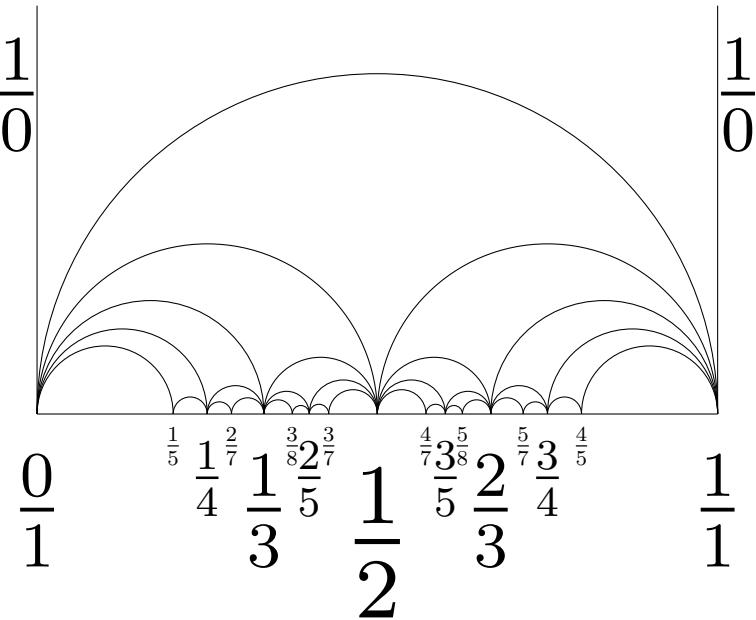
$$\frac{\frac{1}{d} - \frac{1}{b+d}}{\frac{c}{d} - \frac{a+c}{b+d}} = \frac{b}{c(b+d) - d(a+c)} = \frac{b}{bc - ad} \quad (4.34)$$

Smenom $a \rightarrow c$ i $b \rightarrow d$ dobija se izraz koji pokazuje da se tačka $(\frac{a+c}{c+d}, \frac{1}{c+d})$ nalazi i na drugoj dijagonali i time potvrđuje pretpostavku da se nalazi u preseku dve dijagonale paralelograma sa slike.

Dakle, prilikom konstrukcije sledećeg Farejevog niza y - koordinata tačke čija je x - koordinata jednaka novodobijenom razlomku je upravo jednaka recipročnoj vrednosti imenioca novodibjenog razlomka. Koristeći ovu činjenicu, željeni Farejev niz \mathcal{F}_n dobija se biranjem svih tačaka koje se nalaze na pravi $y = \frac{1}{n}$ i iznad nje.

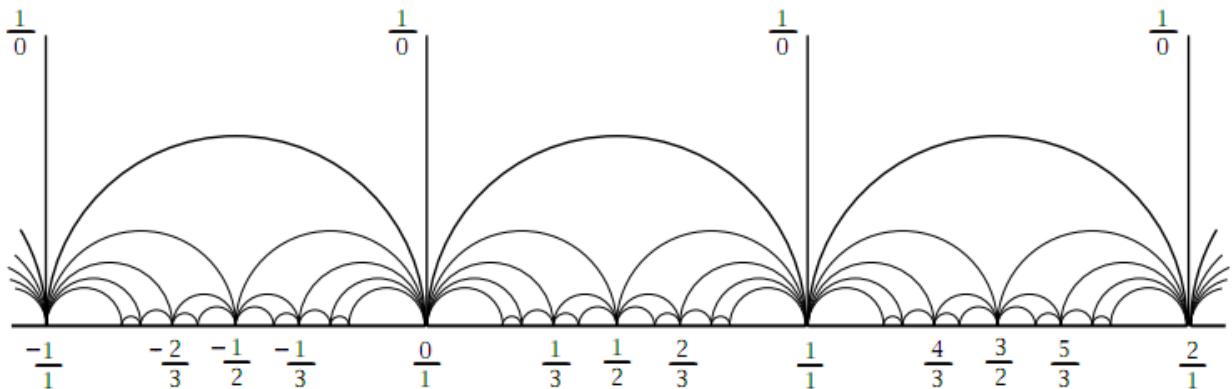
Primetno je da geometrijska konstrukcija sa slike 4.2 vrlo brzo postaje nepregledna pri većem broju iteracija. Transformacijom ovog prikaza se može stvoriti prikaz sa slike 4.4.

Transformacija se sastoji u redukovanju vertikalnih duži u svoje najniže tačke i pretvaranjem svih pravouglih trouglova u krivolinijske [50]. Svaka tačka na x -osi je istovremeno teme dva krivolinijska trougla.



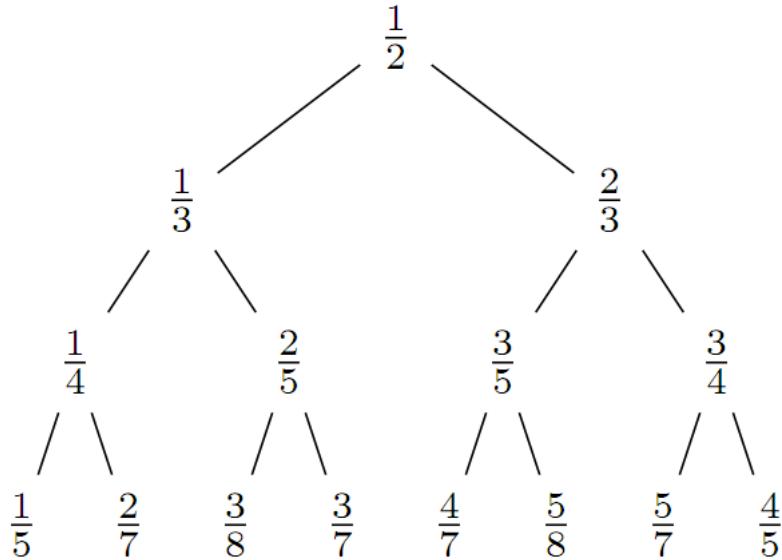
Slika 4.4: Pregledniji prikaz geoemtrijske konstrukcije sa slike 4.2.

Najveći luk na slici 4.4 koji spaja cele brojeve 0 i 1 ukazuje na činjenicu da je broj 1 ipak dete neka dva roditelja, suprotno slici 4.1. Ovde će se navesti, bez dokaza, da je broj 1 dete brojeva 0 i beskonačnog "broja" ∞ . Tvrđnja postaje očigledna ako se dva razlomka roditelja zapišu kao $\frac{0}{1}$ i $\frac{1}{0}$ što čini razlomak deteta $\frac{0+1}{1+0} = \frac{1}{1}$. Na sličan način se mogu stvoriti i svi drugi celi brojevi, a samim tim i svi racionalni razlomci između bilo koja dva cela broja. Čitav prostor racionalnih brojeva se može konstruisati stvaranjem Farejevih nizova kao što je ilustrovano na slici 4.5.



Slika 4.5: Konstrukcija svih racionalnih brojeva.

Ovo poglavlje je ograničeno na Farejeve nizove između brojeva 0 i 1 jer je analiza ovog podskupa Farejevih nizova dovoljna da se prikažu sve njihove karakteristike i posledice. Bilo koji racionalan broj $\frac{h}{k}$ koji se nalazi između neka druga dva cela broja q i $q+1$ se može prestaviti kao $\frac{qk+h-qk}{k} = q + \frac{h-qk}{k}$, dakle translacijom duž x -ose razlomka koji se nalazi u intervalu $[0, 1]$.



Slika 4.6: Stern-Brokot drvo.

Na slici 4.2 je primetno da pri geometrijskoj konstrukciji sukcesivne iteracije ne stvaraju potpune sukcesivne Farejeve nizove. Pregledniji prikaz razlomaka stvorenih sukcesivnim iteracijama se nalazi na slici 4.6. Konstrukcija sa slike 4.6 je podskup prikaza koji se naziva Stern-Brokot drvo [52]. Stern-Brokot drvo je beskonačno i kompletno binarno drvo koje sadrži sve racionalne razlomke isto kao i Farejevi skupovi [53].

Kompletno binarno drvo podrazumeva da iz svakog čvora uvek nastaju samo dva nova čvora. Dakle, svaki red, označen sa rednim brojem i Stern-Brokot drveta sadži 2^i članova. Takva notacija podrazumeva da se koren drveta - razlomak $\frac{1}{2}$ smatra nultim redom i takva notacija će biti korištena u daljem tekstu.

Drvo je beskonačno jer ne postoji ograničenje na broj redova. Autori su Stern-Brokot drvo konstruisali iz tehničkih razloga za potrebe pravljenja satova [51]. Dakle, do kog reda će se drvo konstruisati zavisi samo od konkretnih potreba. Kasnije se ova konstrukcija koristila za što bolju aproksimaciju iracionalnih brojeva pomoću racionalnih brojeva pa je maksimalan red drveta najčešće bio određen tehničkim ograničenjima.

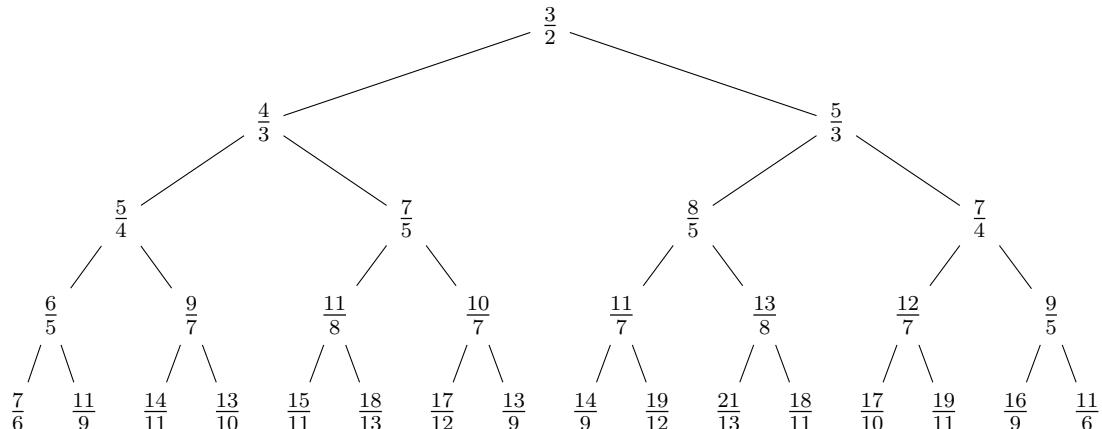
Iz geometrijske konstrukcije sa slike 4.2 se vidi da se članovi Stern-Brokot drveta stvaraju istim pravilom po kom se stvaraju i članovi Farejevih nizova, uz razliku da pri konstrukciji Stern-Brokot drveta ne postoji ograničenje imenioca. Upravo se zbog toga Stern-Brokot drvo naziva brzim algoritmom za aproksimaciju iracionalnih brojeva [52] jer se željenom iracionalnom broju sukcesivno približava birajući sve manje i manje intervale u kojima se on nalazi.

Pošto je drvo kompletno binarno, prava povučena kroz razlomak koji predstavlja koren drveta $\frac{1}{2}$, tako da preseca bilo koju pravu sa slike 4.2 (osim koordinatnih osa i njihovih paralela) u maksimalno jednoj tački $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, predstavlja osu simetrije drveta. Članovi koji su simetrični u odnosu na osu drveta su aritmetički simetrični.

Glava 5

Detaljna analiza Šapiro stepenika

Istraživanje Šapiro stepenika u raznim sistemima se, između ostalog, svodi na ispitivanje pravila po kojem se javljaju kao i ispitivanje njihovih strukturnih stabilnosti. U radu [39] je otkriveno da se Šapiro stepenici u disipativnom FK modelu javljaju prateći Farejevu konstrukciju dok se strukturna stabilnost Šapiro stepenika ispituje praćenjem promena izazvanih promenom parametara sistema. U ovom poglavlju su predstavljeni rezultati ispitivanja dejstva parametara F_{ac} i r na pojavu i veličinu harmonijskih i subharmonijskih Šapiro stepenika u disipativnom FK modelu sa $\omega = \frac{1}{2}$. Sva ispitivanja su se vršila za sistem podlegnut naizmeničnoj sili frekvencije $\nu_0 = 0.2$.



Slika 5.1: Deo Stern-Brokot drveta na kom su prikazani svi članovi Farejevog reda F_6 i mnoštvo članova viših Farejevih nizova koji se moraju konstruisati da bi se na drvetu nalazili svi članovi F_6 .

Intervali \bar{F} između dva harmonijska stepenika, u opštem slučaju, rastu sa porastom rednog broja harmonika između kojih se posmatra interval kao što se može videti sa slike 3.4. Pri fiksiranom parametru F_{ac} , oblast \bar{F} između zaključanog stanja $\bar{v} = 0$ i prvog harmonijskog Šapiro stepenika $\frac{1}{1}$ sadrži sve subharmonike kao i interval između bilo koja dva uzastopna harmonijska stepenika. Međutim, njihova relativna širina je manja od relativnih širina stepenika koji se javljaju između bilo koje dve harmonijske rezonance. Optimalni opseg \bar{F} za istraživanje pojave i veličine Šapiro stepenika je opseg između prvog $\frac{1}{1}$ i drugog $\frac{2}{1}$ harmonijskog stepenika jer Šapiro stepenici imaju dovoljno velike širine da se mogu detektovati i da dovoljno dobro

oslikavaju svojstva subharmonijskih stepenika između bilo koja dva harmonika. Na slici 5.1 je prikazano nekoliko prvih iteracija Stern-Brokot drveta na kojem se nalaze stepenici u ovom opsegu.

U celom intervalu F_{ac} koji je ispitivan svi članovi Farejevog niza \mathcal{F}_{10} bili su prisutni na svakoj vrednosti F_{ac} za koju je izvršena simulacija. Zbog preglednosti rezultata analiziraće se samo pažljivo odabrani Šapiro stepenici.

5.1 Relativne veličine Šapiro stepenika

FK model se ispituje vršenjem numeričkih simulacija koje rešavaju sistem jednačina (3.1) u određenom vremenskom intervalu i za određeni interval sile \bar{F} . Uvid u relativne veličine proizvoljnih Šapiro stepenika ostvaruje se korištenjem programa za analizu opisanog u dodatku A.

5.1.1 Kritična sila i prvi harmonijski Šapiro stepenik

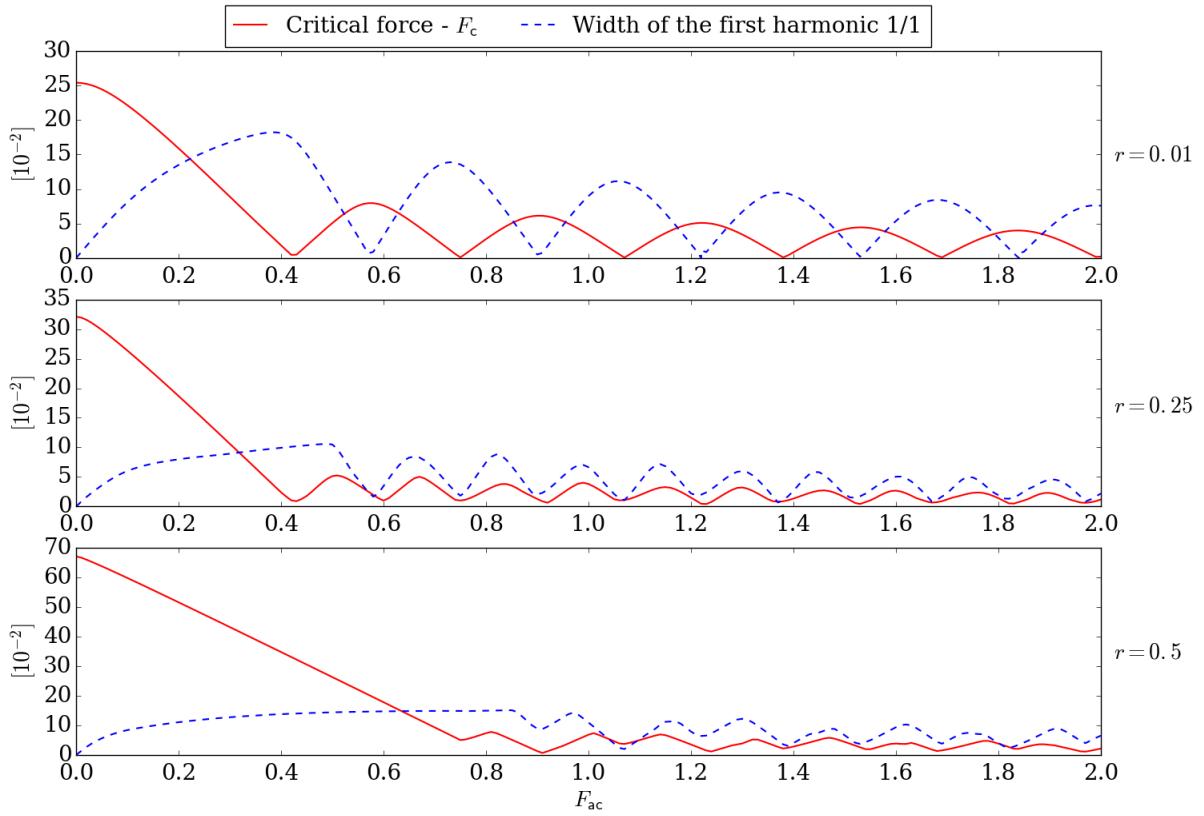
Na slici 5.2 se vidi da povećanje deformacionog parametra znatno utiče na oblik i karakteristike kritične sile F_c . Vrednost kritične sile pri $F_{ac} = 0$ raste povećanjem r jer, iako se visine potencijalnih barijera ne menjaju, sa porastom r raste i visina jedne od dve barijere prvog izvoda deformisanog substratnog potencijala. Kritična sila u sva tri slučaja deformisanog substratnog potencijala teži nuli $F_c \rightarrow 0$ kada $F_{ac} \rightarrow \infty$ što je bilo i naslućeno na slici 3.3.

Pri najmanjoj vrednosti deformacionog parametra $r = 0.01$ kritična sila ispoljava Beselovsko oscilovanje u zavisnosti od F_{ac} : prvi maksimum je najveći dok je svaki sledeći maksimum manji od prethodnog. Takođe period oscilacije opada sa povećanjem F_{ac} . Ovakvo ponašanje kritične sile je zabeleženo i u standardnom FK modelu sa proizvoljnim srednjim rastojanjem između čestica.

Povećanje deformacionog parametra dovodi do postepenog gubitka Beselovkse forme oscilovanja F_c sa F_{ac} . Već pri $r = 0.25$, kao i pri $r = 0.5$, oscilovanje se ne može nazvati Beselovskim jer svaki sledeći maksimum krive oscilacije nije manji od prethodnog. Međutim, može se primetiti da oscilovanje jeste Beselovsko ako se oscilacija kritične sile razloži na dve oscilacije i to tako da svaki drugi maskimum pripada istoj vrsti oscilacije, odnosno da parni maksimumi pripadaju jednoj Beselovskoj oscilaciji dok svi neparni maksimumi pripadaju drugoj Beselovskoj oscilaciji. Tada se može reći da su obe sastavne komponente ovog oscilovanja ponaosob Beselovske jer je svaki parni maksimum oscilacije F_c manji od prethodnog parnog maksimuma, što se može reći i za neparne maksimume. Opravданje za razlaganje oscilacije F_c na dve nezavisne nalazi se u činjenici pri ovakvim deformacijama dve uzastopne jame substratnog potencijala imaju različite energije pribadanja čestica.

Oscilacija širine prvog harmonijskog Šapiro stepenika je u (savršenoj) antifazi sa oscilacijom F_c pri najmanjoj vrednosti deformacionog potencijala $r = 0.01$ jer svaki maksimum širine stepenika $\frac{1}{1}$ odgovara minimumu F_c . Obe oscilacije imaju svaki sledeći maksimum manji od prethodnog i smanjenje perioda oscilacije sa povećanjem F_{ac} . Može se reći da pri ovom r kritična sila F_c osciluje slično nultoj Beselovskoj funkciji dok širina prvog harmonika $\Delta F(\frac{1}{1})$ prvog harmomika osciluje nalik prvoj Beselovskoj funkciji.

Povećanje deformacije menja ovakav odnos F_c i $\Delta F(\frac{1}{1})$ i pri $r = 0.25$ i $r = 0.5$ indukuje oscilovanje u fazi F_c i $\Delta F(\frac{1}{1})$. Ove dve veličine su i dalje u direktnoj korelaciji širom ispitivanog



Slika 5.2: Kritična sila F_c i širina ΔF prvog harmonijskog Šapiro stepenika $\frac{1}{1}$ u funkciji F_{ac} za tri različite vrednosti deformacionog parametra r .

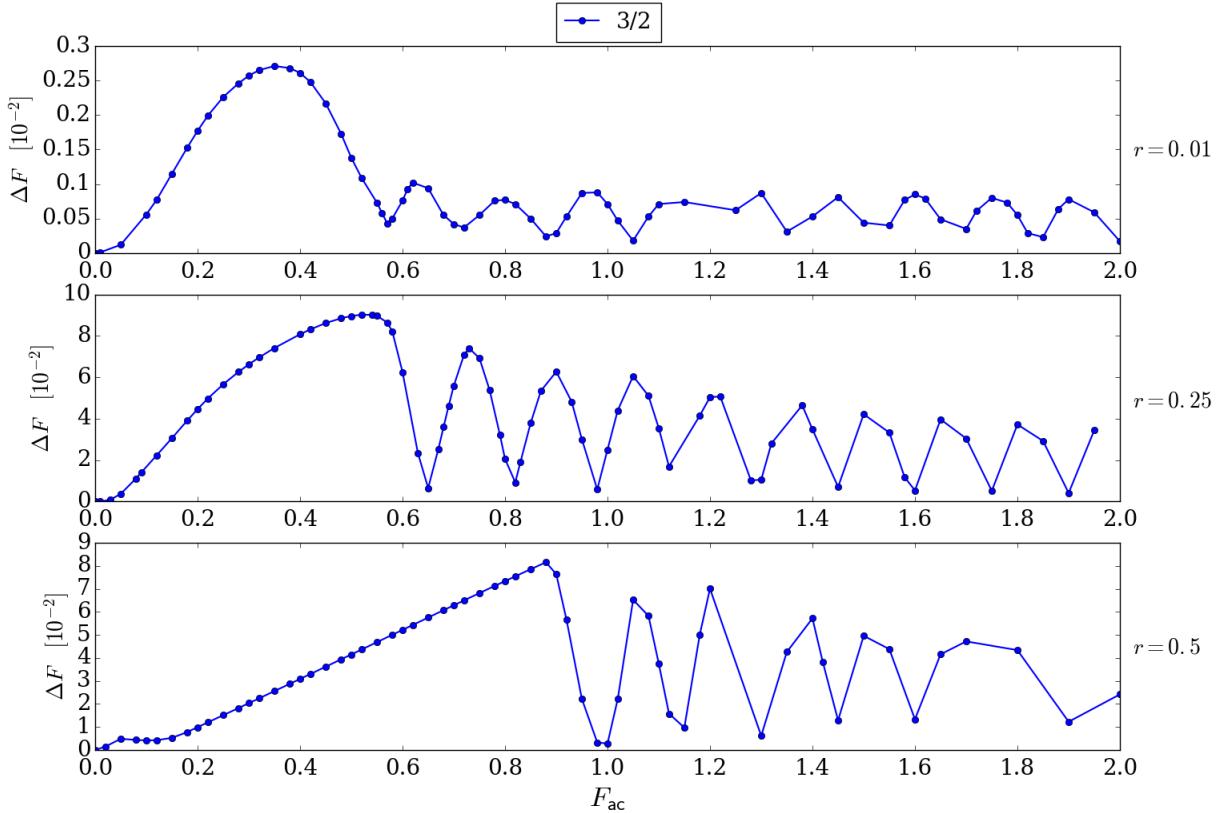
opsegu F_{ac} osim u oblasti koju prekriva prvi maksimum širine ΔF ($\frac{1}{1}$). Za razliku od sistema sa malom deformacijom, pri $r = 0.25$ prvi minimum F_c uopšte ne utiče na širinu prvog harmonika. Pri ovoj vrednosti deformacije na ΔF ($\frac{1}{1}$) utiče tek drugi maksimum F_c izazivajući maksimum ΔF ($\frac{1}{1}$) i dalje oscilovanje u fazi. Na još većoj deformaciji, $r = 0.5$ na oblast prvog maksimuma ΔF ($\frac{1}{1}$) ne utiče ni drugi maksimum F_c već tek drugi minimum izazivajući prvi minimum ΔF ($\frac{1}{1}$) nakon kojeg ove dve funkcije nastave oscilovanje u fazi.

5.1.2 Stepenik $\frac{3}{2}$

Prema Farejevoj konstrukciji prvi subharmonijski stepenik koji se javlja između prvog i drugog harmonijskog Šapiro stepenika je stepenik $\frac{3}{2}$. Oscilovanje širine ovog stepenika sa F_{ac} za tri različite vrednosti r prikazano je na slici 5.3.

U modelu veoma sličnom standardnom FK modelu, $r = 0.01$ širina ovog stepenika ΔF ($\frac{3}{2}$) ne ispoljava Beselovsko oscilovanje. Svi maksimumi osim prvog imaju približno iste veličine i period oscilovanja se ne smanjuje povećanjem F_{ac} . Minimumi i maksimumi oscilovanja ΔF ($\frac{3}{2}$) nisu u direktnoj korelaciji sa ekstremima oscilovanja F_c sa F_{ac} jer se neki ekstremi poklapaju dok su drugi ekstremi indukovani mehanizmom čiji se uticaj ne vidi u funkciji oscilovanja kritične sile.

Povećanje deformacije dovodi do narušavanja pravilnosti o opadanju relativne širine Šapiro



Slika 5.3: Širina ΔF prvog subharmonijskog Šapiro stepenika prema Farejevoj konstrukciji $\frac{3}{2}$ u funkciji F_{ac} za tri različite vrednosti deformacionog parametra r .

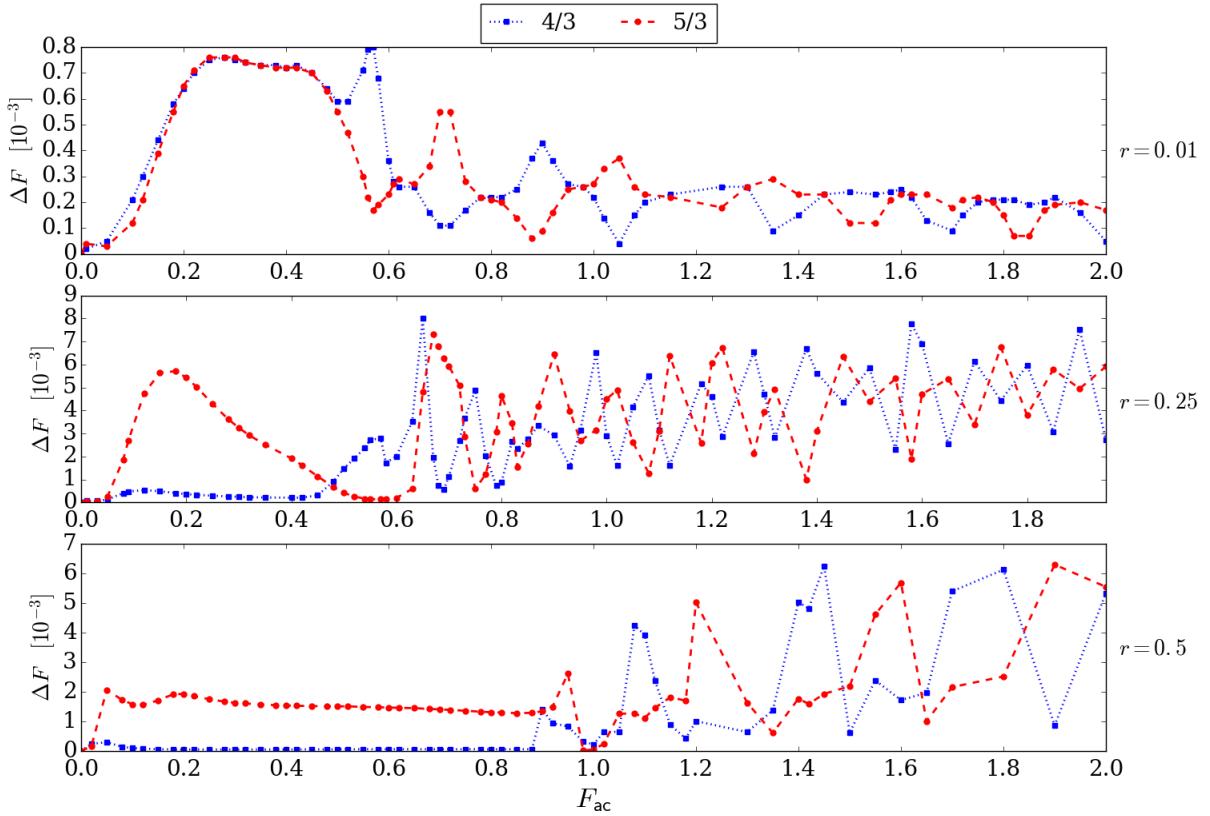
stepenika sa porastom imenioca. Kada je deformacioni parametar $r = 0.25$ tada najveći subharmonijski stepenik ima veću širinu od prvog harmonijskog stepenika $\Delta F\left(\frac{3}{2}\right) > \Delta F\left(\frac{1}{1}\right)$. Sa slike 5.2 je bilo primećeno da prvi harmonijski stepenik ne osciluje Beselovski dok se sa slike 5.3 primećuje da prvi subharmonijski stepenik ispoljava pravilno Beselovsko oscilovanje koje liči na Beselovu funkciju prvog reda. Ekstremi $\Delta F\left(\frac{3}{2}\right)$ su direktno korelirani sa ekstremima F_c nakon što F_c doživi drugi minimum nakon kojeg ove dve funkcije osciluju u kontra fazi.

Na najvećem ispitivanom deformacionom parametru $r = 0.5$ širina $\Delta F\left(\frac{3}{2}\right)$ ispoljava anomalno Beselovsko oscilovanje koje bi na sličan kvalitativan način moglo da se objasni pomoću dve nezavisne Beselove funkcije koje opisuju ponaosob parne i neparne maksimume slično kao i prilikom analize oscilovanja $\Delta F\left(\frac{1}{1}\right)$. Kao i u slučaju funkcije oscilovanja $\Delta F\left(\frac{1}{1}\right)$ sa F_{ac} pri ovom deformacionom parametru, na funkciju oscilovanja $\Delta F\left(\frac{1}{1}\right)$ prvi put počinje da utiče tek drugi minimum kritične sile. Međutim, širina stepenika $\frac{3}{2}$ osciluje u kontra fazi sa F_c a samim ti i u kontra fazi sa prvim harmonikom.

Uvid u relativne širine prvog harmonijskog Šapiro stepenika pokazuje da se pri maloj deformaciji $r = 0.01$ Beselovsko oscilovanje gubi već u prvoj iteraciji Stern-Brokot drveta. Takođe je pokazano da se pogodnim odabirom r može indukovati model u kom je prvi subharmonijski stepenik veći od dva harmonijska stepenika između kojih se javlja. Sa slikama 5.3 i 5.2 se može zaključiti da je pri $r = 0.25$ pravilno Beselovsko oscilovanje odluka najvećeg stepenika. Ovakav zaključak ne стоји при velikoj deformaciji jer je tada sistem toliko izmenjen u odnosu na

standardni u kom je važila jednačina (3.16) da se jasne Beselovske oscilacije ni ne pojavljuju.

5.1.3 Stepenici $\frac{4}{3}$ i $\frac{5}{3}$



Slika 5.4: Širina ΔF subharmoničkih Šapiro stepenika $\frac{4}{3}$ i $\frac{5}{3}$ u funkciji F_{ac} za tri različite vrednosti deformacionog parametra r .

Prelaskom iz Farejevog niza \mathcal{F}_2 u Farejev niz \mathcal{F}_3 ili izvođenjem druge iteracije Stern-Brokot drveta javljaju se dva nova razlomka: $\frac{4}{3}$ i $\frac{5}{3}$. Širine Šapiro stepenika koji se javljaju na brzinama koje odgovaraju ovim razlomcima prikazane su na slici 5.4 za tri vrednosti r .

Kada je deformacija izuzetno mala $r = 0.01$ širine stepenika $\Delta F(\frac{4}{3})$ i $\Delta F(\frac{5}{3})$ su jednake pri malim vrednostima F_{ac} . Funkcije širina ova dva stepenika počinju da se razlikuju u okolini $F_{ac} \approx 0.58$ na kojoj kritična sila ima drugi maksimum i u ostaku ospega F_{ac} osciluju u kontra fazi. Iako jača izraženost jednog od stepenika podrazumeva slabu izraženost drugog, može se reći da ova dva stepenika imaju približno jednake širine.

Povećanjem deformacije na $r = 0.25$ nestaje simetrija između stepenika $\frac{4}{3}$ i $\frac{5}{3}$. Iako oba stepenika pripadaju istom nivou Stern-Brokot drveta, u opsegu malih vrednosti F_{ac} postoji jasna izraženost samo stepenika $\frac{5}{3}$. Kao i u približno standardnom slučaju, povećanje F_{ac} oznad određene vrednosti dovodi do oscilacija ova stepenika u kontra fazi sa približno jednakim amplitudama. Vrednost F_{ac} na kojoj dolazi do oscilovanja oba stepenika odgovara drugom minimumu F_c , tj. $F_{ac} \approx 0.6$. U funkcijama širina ovih stepenika prisutan je i blag uticaj prvog

minimuma kritiče sile $F_{ac} \approx 0.42$. U predelu F_{ac} u kom je prisutno oscilovanje oba stepenika, oscilovanje Šapiro stepenika koji odgovara većem od ova dva razlomka $\frac{5}{3}$ odvija se u fazi sa oscilovanjem kritične sile dok je oscilovanje Šapiro stepenika koji odgovara manjem razlomku $\frac{4}{3}$ u kontra fazi sa oscilovanjem F_c .

Kada se substratni potencijal uveliko razlikuje od savršeno simetričnog standardnog potencijala, $r = 0.5$, oblast u kojoj je izražen samo veći razlomak je proširena do većih vrednosti F_{ac} . Povećanje deformacije izazvalo je potpun nedostatak stepenika $\frac{4}{3}$ sve dok vrednost F_{ac} ne dostigne $F_{ac} \approx 0.9$ što odgovara drugom minimumu kritične sile. Pojavljivanje stepenika $\frac{4}{3}$ praćeno je kratkim nepravilnostima u dotadašnjem oscilovanju dok intenzitet naizmenične sile ne pređe $F_{ac} = 1$ na kojoj kritična sila ima treći maksimum nakon čega ova dva stepenika osciluju u kontra fazi sa približno jednakim amplitudama.

Relativne širine ova dva subharmonijska Šapiro stepenika najmanje su pri maloj deformaciji i najveće pri $r = 0.25$ što je bio slučaj i sa prvim subharmonijskim stepenikom $\frac{3}{2}$. Stepenici $\frac{4}{3}$ i $\frac{5}{3}$ su simetrični na Stern-Brokot drvetu i oscilovanje njihovih širina može se smatrati izuzetno korelisanim pri maloj deformaciji. Međutim, porast deformacije favorizuje izražavanje samo većeg od ova dva stepenika u opsegu malih vrednosti F_{ac} za dati generalisani FK model. Nakon oblasti selektivnog izražavanja stepenika sledi zajedničko oscilovanje u kontra fazi prilikom kog se amplituda oscilacija povećava sa porastom F_{ac} .

5.1.4 Stepenici $\frac{5}{4}$ i $\frac{7}{4}$

Farejev niz \mathcal{F}_4 razlikuje se od Farejevog niza \mathcal{F}_3 za dva razlomka: $\frac{5}{4}$ i $\frac{7}{4}$. Ovi stepenici nalaze se na trećem nivou Stern-Brokot drveta simetrično jedan u odnosu na drugi. Zavisnost širine ovih stepenika od amplitude naizmenične sile prikazana je na slici 5.5.

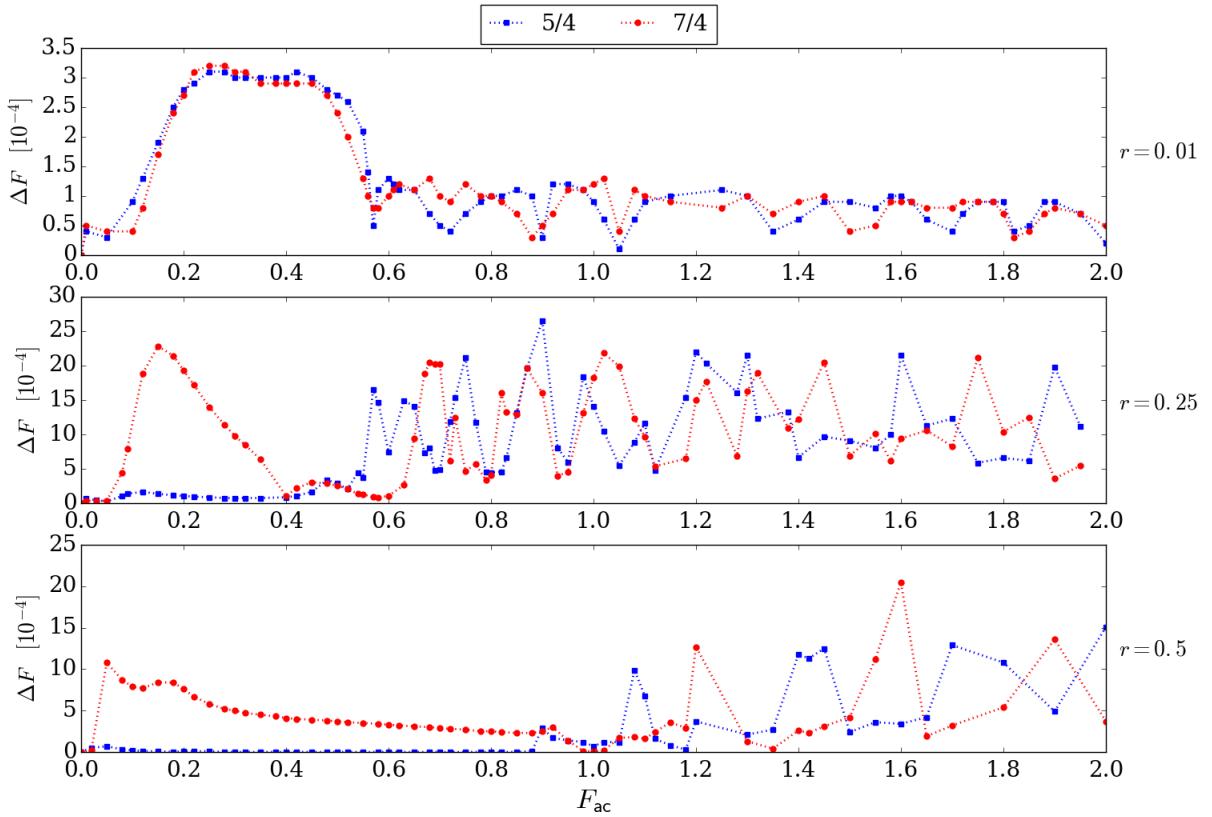
Širine ova dva stepenika su približno jednake samo pri maloj vrednosti deformacije $r = 0.01$ i samo je tada prvi maksimum oscilacija veći od ostalih. Povećanje imenioca posmatranih subharmonijskih Šapiro stepenika je u potpunosti narušilo sličnost oscilacije sa nekom od Beselovskih oscilacija. Degradacija Beselovksog oscilovanja praćena je povećanjem kompleksnosti oscilovanja. Oblast prvog maxima se proteže do vrednosti $F_{ac} \approx 0.58$ što odgovara drugom maksimumu kritične sile. Uticaj prvog minima kritične sile primetan je u funkciji oscilacija ovih širina kao lokalni minimum u oblasti prvog maxima funkcija $\Delta F(\frac{5}{4})$ i $\Delta F(\frac{7}{4})$.

Pri deformaciji $r = 0.25$ dolazi do jasnog izražaja samo stepenika $\frac{7}{4}$ u prvoj oblasti F_{ac} koja se prostire do vrednosti $F_{ac} \approx 0.42$ koja odgovara prvom minimumu kritične sile pri ovoj deformaciji. Nakon vrednosti $F_{ac} \approx 0.6$ stepenici osciluju u kontra fazi približno jednakih amplituda.

Dodatno povećanje deformacije substratnog potencijala na $r = 0.5$ indukuje povećanje oblasti F_{ac} u kojoj je izražen samo veći od dva stepenika : $\frac{7}{4}$. Stepenik $\frac{5}{4}$ se prvi put pojavljuje na vrednosti $F_{ac} \approx 0.9$ na kojoj kritična sila ovog sistema doživljava drugi minimum. Nakon vrednosti $F_{ac} \approx 1$, na kojoj kritična sila ima treći maksimum, stepenici osciluju u kontra fazi sa približno jednakim, rastućim, amplitudama.

5.1.5 Stepenici $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{5}$ i $\frac{9}{5}$

Nastavak povećavanja imenioca dovodi do pojavljivanja četiri nesvodljiva razlomka između 1 i $2 : \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}$ i $\frac{9}{5}$. Za razliku od subharmonijskih stepenika koji su prikazani do sada, prelazak iz skupa \mathcal{F}_4 u \mathcal{F}_5 stvara razlomke koji se ne nalaze na istom nivou Stern-Brokot drveta.



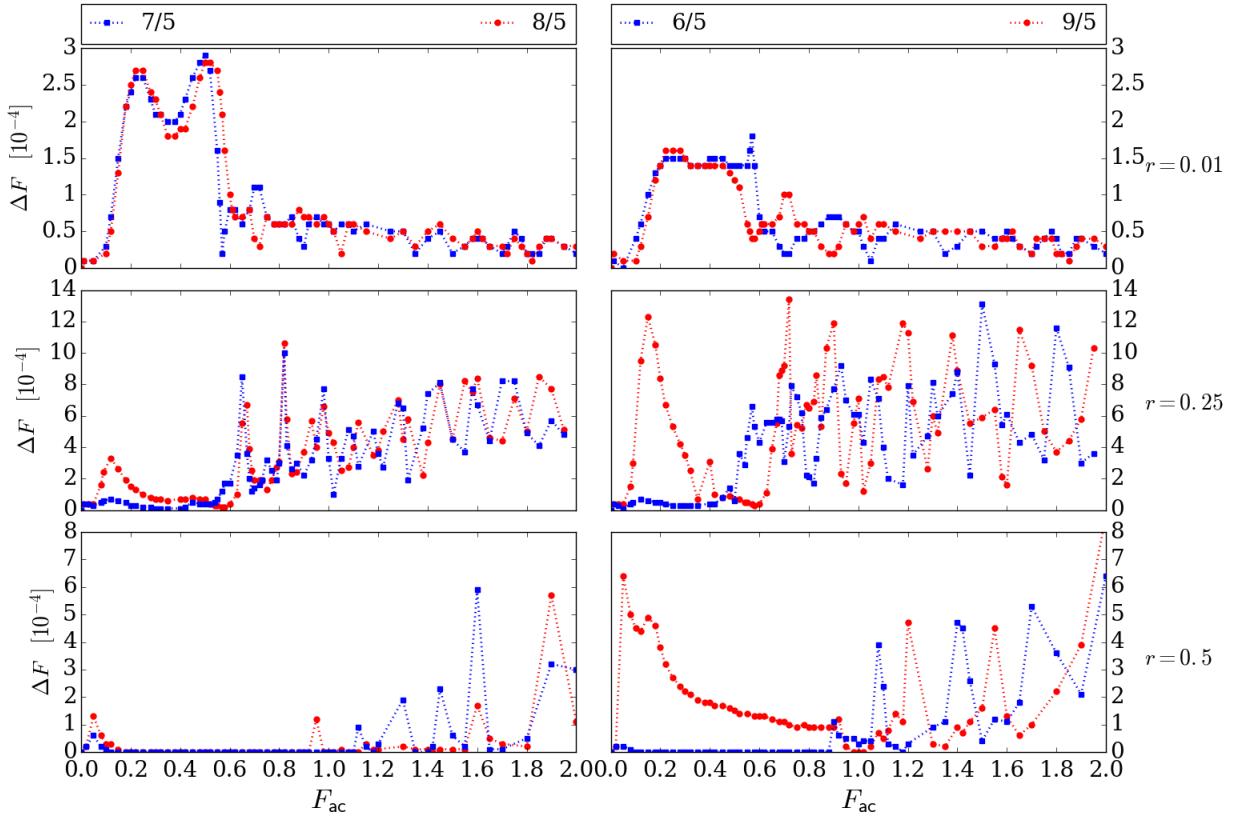
Slika 5.5: Širina ΔF subharmoničkih Šapiro stepenika $\frac{4}{3}$ i $\frac{5}{3}$ u funkciji F_{ac} za tri različite vrednosti deformacionog parametra r .

Oscilacije širine svih stepenika sa imenocem jednakim broju 5 prikazane su na slici 5.6. Leva strana slike poredi stepenike $\frac{7}{5}$ i $\frac{8}{5}$ koji pripadaju trećem nivou Stern-Brokot drveta dok desna strana slike poredi stepenike $\frac{6}{5}$ i $\frac{9}{5}$ koji pripadaju četvrtom nivou. Oba poređenja su izvršena za stepenike koji su simetrični u odnosu na vertikalnu osu Stern-Brokot drveta, odnosno posmatrani su simetrični parovi.

U približno standardnom FK modelu, $r = 0.01$, poređenje širine stepenika koji su simetrični parovi otkriva približno jednakе amplitude oscilacije stepenika koji su simetrični na Stern-Brokot drvetu. Stepenici koji formiraju simetričan par osciluju u fazi sa jednakim amplitudama u oblasti prvog maskimuma koja se proteže do vrednosti $F_{ac} \approx 0.6$, na kojoj kritična sila ima drugi maksimum, nakon čega međusobno osciluju u kontra fazi. Uticaj prvog minimuma kritične sile se može videti kao pojava lokalnog minimuma u oblasti prvog maksimuma oscilacije svakog od ovih stepenika.

Pripadnici istog Farejevog niza koji su na različitim granama Stern-Brokot drveta razlikuju se po amplitudi samo u predelu prvog maksimuma oscilacije širine i to tako da stepenici koji su nastali pomoću manjeg broja iteracija Stern-Brokot drveta (nalaze se na nivou nižeg rednog broja) imaju veću širinu od stepenika na nivoima većeg rednog broja. Nakon oblasti prvog maksimuma oscilacija $F_{ac} > 0.6$ svi stepenici Farejevog skupa \mathcal{F}_5 imaju približno jednake amplitude.

Poređenje simetričnih parova stepenika koji se javljaju u generalizovanom FK modelu sa



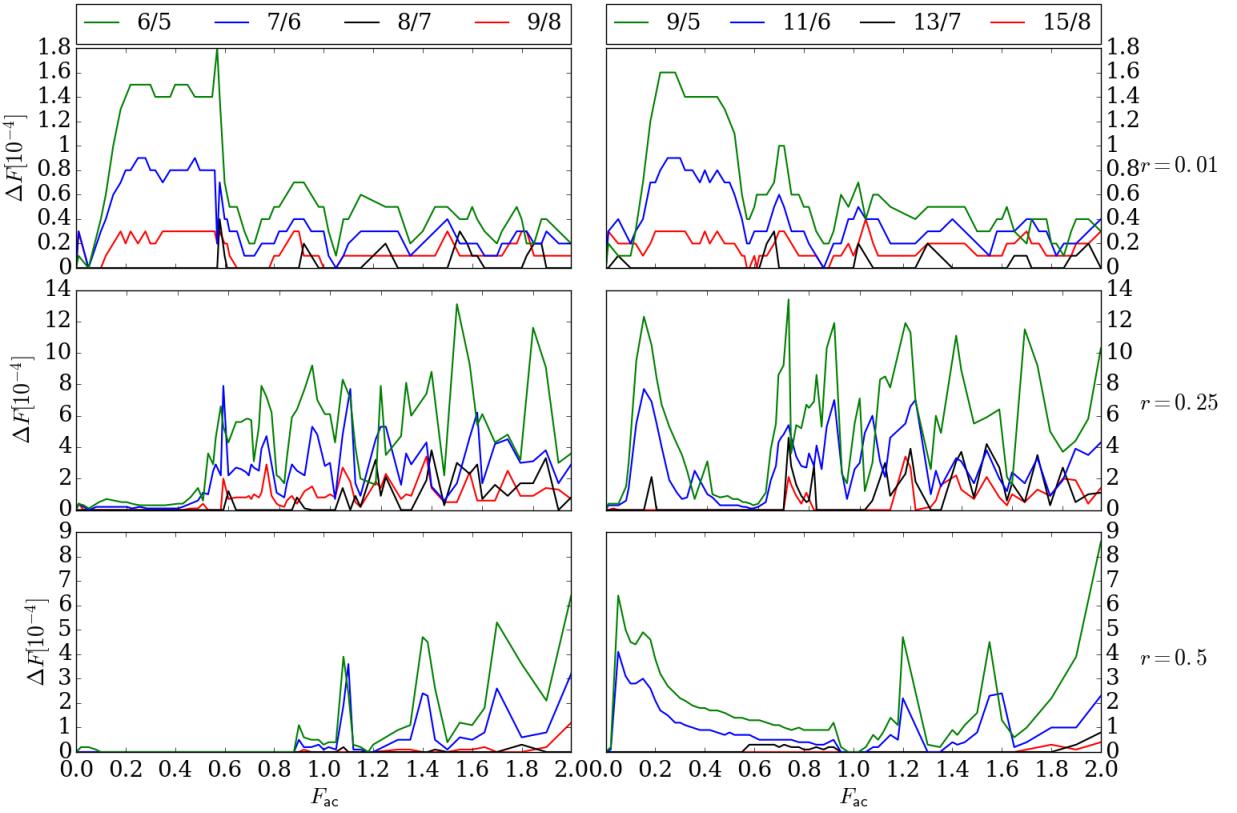
Slika 5.6: Širina ΔF subharmonijskih Šapiro stepenika $\frac{6}{5}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{8}{5}$ i $\frac{9}{5}$ u funkciji F_{ac} za tri različite vrednosti deformacionog parametra r . Međusobno su poređeni stepenici koji pripadaju istom nivou Stern-Brokot drveta.

umerenom vrednosti deofrmacije $r = 0.25$ otkriva jasnu izraženost samo većeg od posmatrana dva stepenika u opsegu niskih vrednosti F_{ac} : u trećem nivou Stern-Brokot drveta izraženije je prisustvo stepenika $\frac{8}{5}$, dok je u četvrtom nivou izraženiji stepenik $\frac{9}{5}$. Poređenjem sva četiri stepenika sa imeniocem jednakim broju 5 primećuje se da u oblasti niskih vrednosti F_{ac} najveću amplitudu ima stepenik sa najvećim imeniocem i da ona opada sa smanjenjem imenioaca. Oblast F_{ac} u kom dolazi do selektivnog izražaja subharmonijskih Šapiro stepenika se prostire do vrednosti $F_{ac} \approx 0.6$ na kojoj kritična sila ima drugi minimum nakon čega simetrični parovi osciluju u međusobno teško opisivom odnosu na ovoj vrednosti deformacionog parametra.

Sistem sa najvećom ispitivanom deformacijom $r = 0.5$ u oblasti niskih F_{ac} ispoljava isto ponašanje stepenika sa imeniocem 5 kao i umereno deformisan FK model: širina stepenika opada sa smanjenjem imenioaca a u simetričnim parovima do izražaja dolazi samo veći stepenik od posmatrana dva.

5.1.6 Stepenici viših Farejevih skupova

Na slici 5.7 su prikazani odabrani stepenici koji pripadaju nizu \mathcal{F}_6 i višim Farejevim nizovima. Zajedničko svim ovim stepenicima je njihova lokacija na "kičmi" Stern-Brokot drveta, odnosno na obvojnici u čijoj unutrašnjosti se nalaze svi članovi beskonačnog binarnog drveta. Leva



Slika 5.7: Širine ΔF nekoliko subharmonijskih Šapiro stepenika koji su deo obvojnice Stern-Brokot drveta u funkciji F_{ac} za tri različite vrednosti deformacionog parametra r .

strana slike poredi stepenike sa leve strane drveta u odnosu na centralnu vertikalnu osu dok desna strana slike poredi stepenike sa desne strane Stern-Brokot drveta. Posmatranje stepenika koji se nalaze na kičmi drveta obezbeđuje simetričnost stepenika sa istim imeniocem u odnosu na centralnu vertikalnu osu. Stepenici koji čine simetrične članove obeleženi su istom bojom na slici 5.7.

Pri najmanjoj deformaciji, $r = 0.01$, svi simetrični parovi osciluju na sličan način i imaju približno jednake magnitudo oscilacija u čitavom posmatranom opsegu F_{ac} . Nakon vrednosti $F_{ac} \approx 0.58$, na kojoj kritična sila ima drugi maksimum, stepenici koji čine simetričan par osciluju u kontra fazi dok u predelu prvog maksimuma oscilacije njihovih širina ima veoma malo razlike. Svi stepenici sa jedne strane drveta međusobno osciluju u fazi. Povećanje imenioca jednakog utiče na stepenike sa obe strane drveta i to tako da se amplituda oscilacija smanjuje sa porastom imenioca što je prethodno utvrđeno i provereno pravilo za stepenike različitih imenioca. Međutim, primetno je da su kroz ceo opseg F_{ac} prisutni stepenici sa imeniocem jednakim broju 8 dok se stepenici sa imeniocem jednakim broju 7 sporadično pojavljuju, tj. širine im se razlikuju od nule. Narušavanje pravila o opadanju širina sa porastom imenioca ne može da se opovrgne samo ovim primerom jer je ovakvo odstupanje od pravila moguća posledica izuzetno malih širina poređenih stepenika.

Povećanje deformacije potencijala na $r = 0.25$ dovodi do potpunog nedostatka stepenika sa leve strane Stern-Brokot drveta sve do vrednosti $F_{ac} \approx 0.6$ na kojoj kritična sila ima drugi

minimum. Nakon ove vrednosti F_{ac} prisutni su svi stepenici gde se oscilacije simetričnih parova odvijaju u kontra fazi. I pri ovoj deformaciji nema puno razlike između širina stepenika iz sedmog i osmog Farejevog niza ali je potrebna detaljnija analiza da bi se moglo izmeniti pravilo o opadanju širina sa porastom imenioca jer su i pri ovoj deformaciji, na kojoj su subharmonijski stepenici najizraženiji, širine posmatranih stepenika i dalje izuzetno male.

Pri najvećoj ispitivanoj vrednosti deformacije, $r = 0.5$ samo stepenici sa desne strane Stern-Brokot drveta su prisutni u prvoj oblasti F_{ac} u kojoj oscilacija kritične sile još nije dostigla svoj treći maksimum. Nakon ove vrednosti dolazi do pojavljivanja svih stepenika. Iako su stepenici iz \mathcal{F}_7 i \mathcal{F}_8 veoma malih širina primetno je da su prisutni kada je $F_{ac} > 1$ i da se samo desna strana drveta javlja pri $F_{ac} < 1$.

5.1.7 Zaključci

Prezentovani rezultati pokazuju da se svi subharmonijski stepenici mogu opisati na sličan način. Promena deformacije umnogome menja odziv sistema ali pri sve tri vrednosti deformacionog parametra r mogu se prepoznati dve odvojene regije parametra F_{ac} :

Prvi region ili region niskih vrednosti F_{ac} okarakterisan je pojavom prvog maksimuma oscilacija svih subharmonijskih Šapiro stepenika pri $r = 0.01$. U ovoj oblasti F_{ac} svi simetrični parovi imaju jednake magnitude. Pri većim deformacijama, $r = 0.25$ i $r = 0.5$, ovaj region okarakterisan je selektivnim ispoljavanjem stepenika i to tako da su izrazito dominantni stepenici sa desne strane Stern-Brokot drveta. Ovakva favorizacija stepenika je prisutna već na drugom nivou i postoji u svim sledećim nivoima drveta što implicira da bi se takav odnos zadržao i pri proizvoljnoj iteraciji Stern-Brokot drveta.

Drugi region, oscilatorni region ili region visokih vrednosti F_{ac} okarakterisan je zajedničim oscilovanjem svih primećenih Šapiro stepenika. Na svim vrednostima deformacije r u ovom regionu F_{ac} stepenici koji čine simetrični par osciluju međusobno u kontra fazi sa približno jednakim amplitudama. Kada je sistem izuzetno sličan standardnom tada u ovoj oblasti oscilacije svih Šapiro stepenika se odvijaju sa smanjenjem amplitude pri porastu F_{ac} , dok se povećanjem deformacije oscovanje svih subharmonijskih stepenika (osim $\frac{3}{2}$) odvija sa porastom amplitude pri porastu F_{ac} .

Pri fiksiranoj vrednosti deformacionog parametra struktura oscilacija svih subharmonijskih Šapiro stepenika je u direktoj korelaciji sa oscilacijom kritične sile 5.2 sa F_{ac} i to:

U približno standardnom slučaju $r = 0.01$ vrednost $F_{ac} \approx 0.58$ se ističe kao kraj prvog regiona zajedničkog oscilovanja svih subharmonijskih stepenika. Na ovoj vrednosti F_{ac} kritična sila doživljava drugi maksimum. Uticaj prvog minimuma F_c , tj. pri $F_{ac} \approx 0.4$, je jasno vidljiv kao prvi maksimum širine prvog harmonika kao i u svim subharmonijskim stepenicima kao pojava lokalnog minimuma u oblasti prvog maksimuma.

U umereno deformisanom modelu $r = 0.25$ početak drugog regiona zajedničkog oscilovanja svih stepenika se javlja na vrednosti $F_{ac} \approx 0.6$ na kojoj kritična sila doživljava drugi minimum. Kraj prvog regiona ili regiona selektivnog izražaja stepenika završava sa prvim minimumom kritične sile koji se javlja pri $F_{ac} \approx 0.42$. Oblast između ove dve vrednosti F_{ac} je okarakterisana komplikovanim ponašanjem oscilacija koje se razlikuju od stepenika do stepenika. U ovoj oblasti između prvog i drugog regiona najverivatnije se odvijaju mehanizmi koji odziv sistema prevode iz stanja selektivnog izražaja stepenika u stanje kolektivnih oscilacija. Prvi minimum kritične sile takođe utiče na pojavu prvog maksimuma širine prvog harmonika.

U izuzetno deformisanom modelu $r = 0.5$ početak drugog regiona zajedničkog oscilovanja svih stepenika se javlja na vrednosti $F_{ac} \approx 1$ na kojoj kritična sila doživljava treći maksimum. Kraj prvog regiona se nalazi na $F_{ac} \approx 0.9$ gde kritična sila doživljava drugi minimum. Sudeći po iznetim rezultatima prvi minimum i drugi maksimum kritične sile uopšte ne utiču na širine subharmonijskih stepenika, čak ni na širinu prvog harmonijskog Šapiro stepenika.

Rezultati ovog istraživanja pružili su uvid i načun nastanka, odnosno raspodelu širina subharmonijskih Šapiro stepenika u FK modelu. Potvrđena je prethodna hipoteza o nastanku subharmonijskih stepenika uz dodatak njihove hijerarhije prema Stern-Brokot drvetu pri malim deformacijama. Naime, u prvom regionu stepenici sa istim imeniocem nemaju iste širine ako se ne nalaze na istom nivou Stern-Brokot drveta. Stepenici koji pripadaju nižim nivoima, odnosno nalaze se bliže korenu drveta, imaju veću širinu od stepenika koje se nalaze na višem nivou. U drugoj oblasti svi stepenici istog imenioca imaju približno jednake amplitude. Poređenje stepenika $\frac{9}{8}$ i $\frac{15}{8}$ sa $\frac{8}{7}$ i $\frac{13}{7}$ pokazalo je da za ove stepenike ne važi pravilo o opadanju širine sa porastom imenioca. Pošto su apsolutne širine ovih stepenika male potrebno je dodatno istražiti njihove odnose preciznijim simulacijama.

Porast deformacije u potpunosti narušava pravilnost pojave stepenika po Farejevoj konstrukciji kakva je bila prisutna u približno standardnom nivou. U prvom regionu znazno veću širinu imaju stepenici sa desne strane Stern-Brokot drveta. Pri izuzetno velikim deformacijama u prvom regionu javljaju se isključivo stepenici sa desne strane drveta. U drugom regionu zajedničkog oscilovanja javljaju se svi stepenici prema Ferejevoj konstrukciji. Međutim, i pri povećanoj deformaciji se i dalje primećuje odstupanje relativnog odnosa stepenika $\frac{9}{8}$ i $\frac{15}{8}$ i stepenika $\frac{8}{7}$ i $\frac{13}{7}$ od predviđenog.

Harmonijski stepenici su veći od bilo kog subharmonijskog stepenika u standardnom i približno standardnom FK modelu. U prethodnim radovima utvrđeno je da porast deformacije može načiniti prvi subharmonijski stepenik $\frac{3}{2}$ većim od harmonijskog. U ovom istraživanju pokazalo se da je stepenik $\frac{3}{2}$ veći od prvog harmonijskog $\frac{1}{1}$ samo kada je $r = 0.25$ i da su pri ovoj vrednosti deformacije svi subharmonijski stepenici najveći. Uticaj umereno deformisanog potencijala, $r = 0.25$ na prvi subharmonijski stepenik se, pored činjenja tog stepenika većeg od prvog harmonika, može primetiti Beselovskim oscilovanjem ovog stepenika sa promenom F_{ac} . Kritična sila i prvi harmonijski stepenik ne ispoljavaju Beselovsko oscilovanje pri ovoj vrednosti deformacije što navodi na zaključak da je Beselovsko oscilovanje (u ovom slučaju oscilovanje nalik prvoj Beselovoj funkciji) rezervisano samo za stepenik sa većom amplitudom.

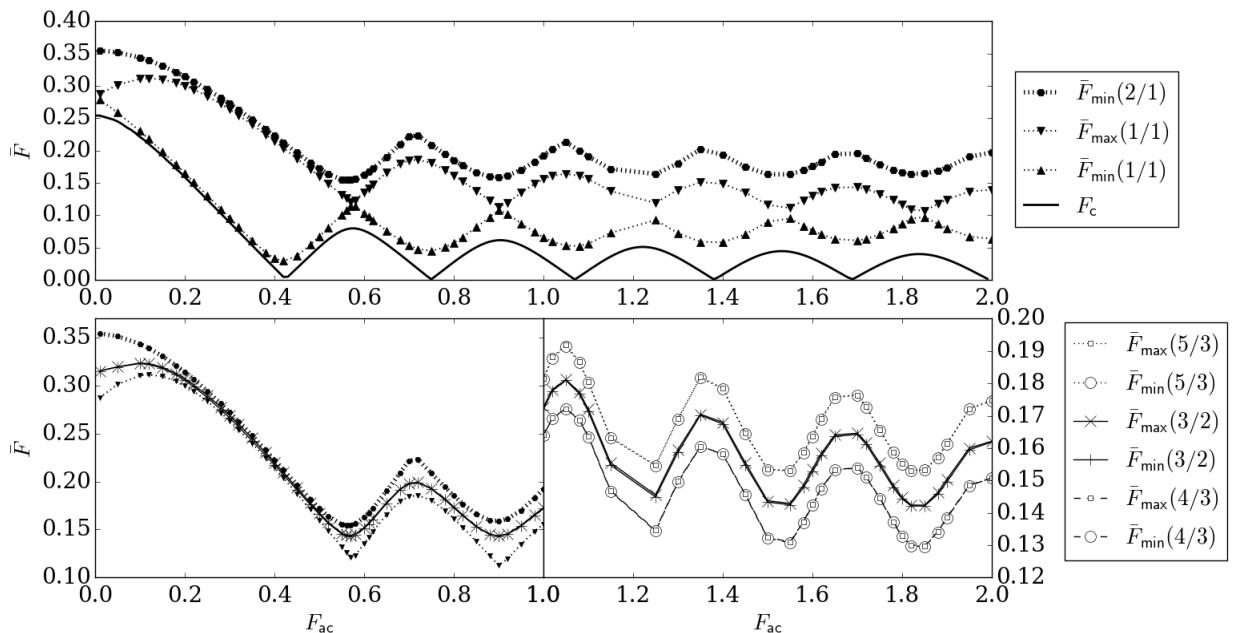
5.2 Raspon Šapiro stepenika

U ovom odeljku će se prikazati rezultati ispitivanja položaja stepenika u odzivnoj funkciji $\bar{v}(\bar{F})$ za sve ispitivane vrednosti parametara F_{ac} i r . Položaj stepenika definisan je njegovim početkom i krajem na \bar{F} osi dok širina stepenika sledi kao razlika ove dve veličine. Uvid u početak i kraj stepenika omogućen je prilagođavanjem programa opisanog u A.

Ispitivanje pozicije stepenika izvršeno je sa ciljem pružanja dodatnih informacija vezanih za strukturu odziva FK modela na delovanje ravnomerne i naizmenične sile koje bi mogle detaljnije da opišu efekat sinhronizacije u ovim sistemima.

Zarad lakše preglednosti u ovom odeljku će se posvetiti pažnja svakom deformacionom parametru ponaosob.

5.2.1 $r = 0.01$



Slika 5.8: Početak i kraj nekoliko različitih stepenika u ispitivanom opsegu F_{ac} pri $r = 0.01$.

Gornja polovina slike 5.8 prikazuje kritičnu silu, početak $\bar{F}_{\min}\left(\frac{1}{1}\right)$ i kraj $\bar{F}_{\max}\left(\frac{1}{1}\right)$ prvog harmonijskog Šapiro stepenika kao i početak drugog harmonijskog stepenika $\bar{F}_{\min}\left(\frac{2}{1}\right)$. Slika potvrđuje direktnu korelisanost harmonijskih stepenika i kritične sile.

Početak prvog harmonika $\bar{F}_{\min}\left(\frac{1}{1}\right)$ u potpunosti prati oscilovanje kritične sile - svaki minimum i maksimum $\bar{F}_{\min}\left(\frac{1}{1}\right)$ odgovaraju minimumu i maksimumu F_c i stoga je funkcija koja ih povezuje bijekcija. Kraj prvog harmonika nije pod uticajem prvog minimuma kritične sile i doživljava prvi minimum kada kritična sila, samim tim i početak $\frac{1}{1}$, ima drugi maksimum nakon čeka ove dve veličine osciluju u kontra fazi. Sa slike se vidi da razlika početka i kraja stepenika grafički opisuje oscilovanje širine stepenika $\frac{1}{1}$ u kontra fazi sa kritičnom silom.

Drugi harmonijski stepenik počinje na vrednostima \bar{F} bliskim kraju prvog harmonika implimirajući veoma uzak interval \bar{F} u kom se nalaze svi subharmonijski stepenici koje smo ispitivali. Iako uzak, ovaj interval je širi od razlike početka prvog harmonika i kritične sile. Početak drugog harmonika $\bar{F}_{\min} \left(\frac{2}{1}\right)$ osciluje u potpunosti prateći kraj prvog harmonika i samim tim nije pod uticajem prvog minimuma kritične sile. Poznavajući ponašanje širine stepenika $\frac{2}{1}$ sa porastom F_{ac} u standardnom FK modelu, koji je veoma sličan modelu prikazanom na slici, može se zaključiti da kraj stepenika $\frac{2}{1}$ neće biti pod uticajem ni prvog nimuma ni drugog maksimuma kritične sile već će doživeti prvi minimum upravo na drugom minimumu kritične sile nakon čega će oscilovati u fazi sa kritičnom silom. Ovakav odnos rezultira oscilacijom širine $\frac{2}{1}$ koja je oblika druge Beselove funkcije.

Donji deo slike podeljen je na dve slike koje zajedno prikazuju čitav opseg ispitivanih vrednosti parametra F_{ac} . Podela na dve odvojene slike napravljena je sa ciljem lakšeg prikaza početka i kraja subharmonijskih stepenika koji pri ovakvoj deformaciji imaju veoma malu širinu što implicira da im su im početak i kraj veoma blizu.

Leva strana donje slike prikazuje kraj prvog harmonika $\bar{F}_{\max} \left(\frac{1}{1}\right)$, početak drugog harmonika $\bar{F}_{\min} \left(\frac{2}{1}\right)$ i funkcije početka $\bar{F}_{\min} \left(\frac{3}{2}\right)$ i kraja $\bar{F}_{\max} \left(\frac{3}{2}\right)$ prvog subharmonika. Bitna karakteristika oscilovanja početka i kraja stepenika $\frac{3}{2}$ jeste da obe ove funkcije osciluju u fazi sa krajem prvog harmonika a samim tim i u kontra fazi sa kritičnom silom. Pošto bi ovakvo oscilovanje impliciralo konstantnost širine ovog stepenika sigurno je da dolazi do malih perturbacija ovakvog oscilovanja na mestima gde su u prethodnom poglavljiju utvrđeni ekstremi širine stepenika $\frac{3}{2}$.

Desna strana donje slike prikazuje uvećan deo ospega F_{ac} koji pripada drugom regionu. Pored prvog subharmonika prikazani su počeci i krajevi stepenika $\frac{4}{3}$ i $\frac{5}{3}$. Vidi se da početak i kraj oba stepenika sa drugog nivoa Stern-Brokot drveta u potpunosti prate oscilovanje početka i kraja stepenika $\frac{3}{2}$ i da samim tim imaju slične funkcije širine kao i prvi subharmonijski Šapiro stepenik.

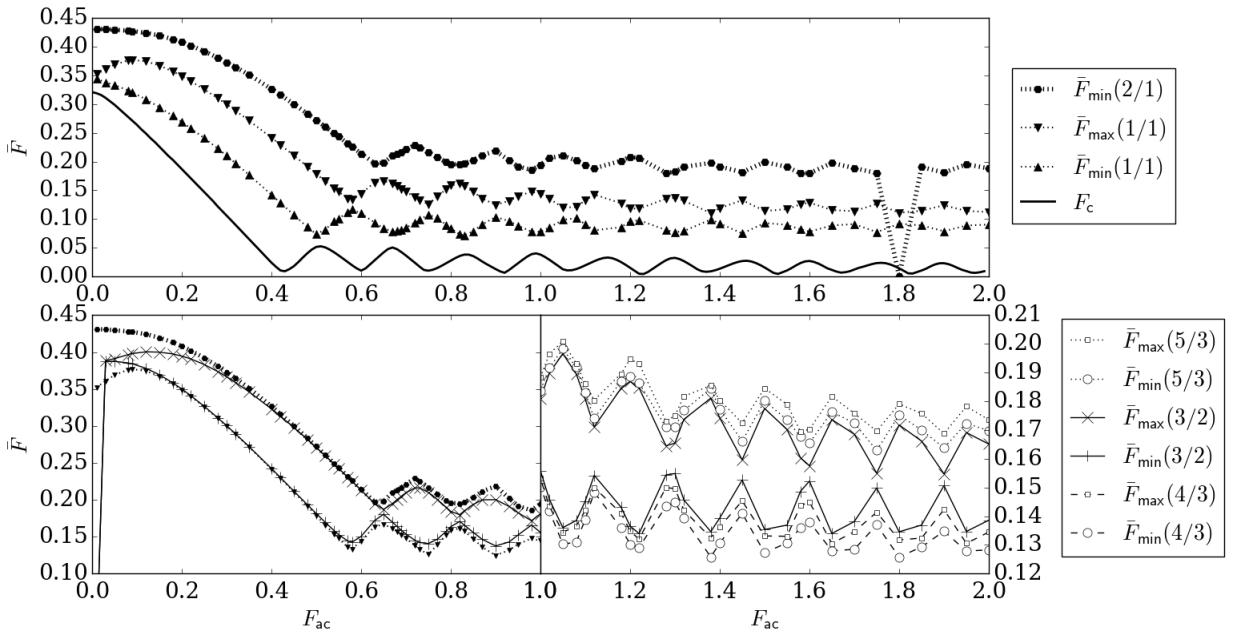
Prema ovakvoj analizi, kraj prvog harmonijskog stepenika određuje oscilatorno ponašanje početka i kraja svih subharmonijskih stepenika koji se nalaze između prvog i drugog harmonika. Moglo bi se prepostaviti da će na sličan način kraj drugog harmonika određivati početak i kraj svih subharmonijskih stepenika između drugog i trećeg harmonika itd.

5.2.2 $r = 0.25$

Slike 5.9 i 5.10 koncipirane su isto kao slika 5.8 i prikazuju zavisnosti početka i kraja istih stepenika pri različitim vrednostima deformacije r .

Povećanje deformacije na $r = 0.25$ izazvalo je značajne promene početka i kraja harmonijskih i subharmonijskih stepenika u odnosu na približno standardni model. Na početak prvog harmonika više ne utiče prvi minimum kritične sile već $\bar{F}_{\min} \left(\frac{1}{1}\right)$ doživljava prvi minimum na mestu na kom kritična sila F_c doživljava drugi maksimum. Kraj prvog harmonika, slično kao i pri $r = 0.01$ fazno je pomeren u odnosu na početak prvog harmonika za jedan ekstrem kritične sile. Početak drugog harmonika više nije u direktoj korelaciji sa krajem prvog harmonika već je fazno pomeren za jedan ekstrem kritične sile u odnosu na njega.

Posmatranje ponašanja kraja i početka prvog subharmonika $\frac{3}{2}$ otkriva razlog faznog pomeranja za jedan ekstrem kritične sile svih veličina vezanih za pojavu harmonijskih stepenika. Sa donje leve slike se primećuje da početak stepenika $\frac{3}{2}$ osciluje u direktoj korelaciji sa krajem $\frac{1}{1}$ dok kraj stepenika $\frac{3}{2}$ osciluje u direktnoj korelaciji sa početkom $\frac{2}{1}$. U prethodnom odeljku je spomenuto da pri deformaciji $r = 0.25$ prvi subharmonijski stepenik ima veću širinu od prvog



Slika 5.9: Početak i kraj nekoliko različitih stepenika u ispitivanom opsegu F_{ac} pri $r = 0.25$.

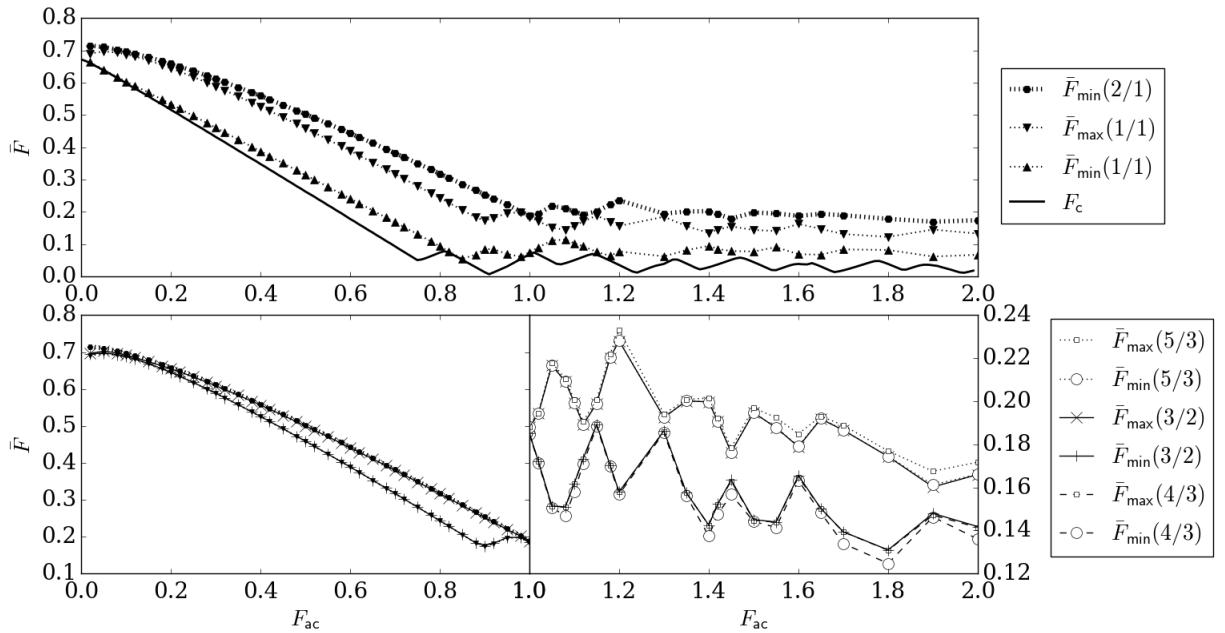
harmonijskog stepenika i da njegova širina osciluje Beselovski što je odlika samo harmonijskih stepenika u malo deformisanom i standardnom FK modelu. Fazna pomerenost kraja stepenika u odnosu na početak stepenika je pri maloj deformaciji bilo isključivo karakteristika harmonijskih stepenika. Prisutnost takve zavisnosti kraja i početka stepenika $\frac{3}{2}$ je još jedna indicija da prvi subharmonijski stepenik pri deformaciji $r = 0.25$ uzima ulogu harmonijskog stepenika i da ga ne treba posmatrati kao subharmonijski stepenik.

Desna strana donje slike pokazuje oscilovanje početka i kraja stepenika $\frac{4}{3}$ i $\frac{5}{3}$ u odnosu na početak i kraj stepenika $\frac{3}{2}$. Pored jasnog oscilovanja $\bar{F}_{\min}(\frac{3}{2})$ i $\bar{F}_{\max}(\frac{3}{2})$ u kontra fazi u celoj ispitivanoj oblasti F_{ac} , sa ove slike primetno je da ostali subharmonijski stepenici ne ispoljavaju takvu vrstu oscilovanja što je još jedna indikacija fundamentalne razlike između $\frac{3}{2}$ i svih drugih subharmonika. Smatrujući $\frac{3}{2}$ nekom vrstom harmonijskog stepenika može se reći da svi ostali subharmonijski stepenici osciluju u fazi sa krajem njima najbližeg harmonijskog stepenika. Leva strana donje slike ne prikazuje stepenike iz drugog nivoa Stern-Brokot drveta jer se u prvom regionu F_{ac} ne javljaju subharmonici sa leve strane drveta.

Poznavajući ponašanje stepenika $\frac{3}{2}$ može se pretpostaviti da stepenik $\frac{1}{2}$ ispoljava slično ponašanje sa tom razlikom da minimum početka stepenika $\frac{1}{2}$ osciluje u fazi sa kritičnom silom kroz ceo opseg ispitivanih vrednosti F_{ac} dok kraj stepenika $\frac{1}{2}$ osciluje u fazi sa početkom prvog harmonika.

5.2.3 $r = 0.5$

Velika vrednost deformacije potencijala, $r = 0.5$, dovela je do pojave oscilovanja početka i kraja harmonijskih stepenika čiji ekstremi nisu direktno povezani sa ekstremima kritične sile već su fazno pomereni za neku vrednost. Ista ta vrednost faznog pomeraja odnosu na kritičnu silu prisutna je i prilikom posmatranja širine prvog harmonika. Oscilacije svih stepenika su postale



Slika 5.10: Početak i kraj nekoliko različitih stepenika u ispitivanom opsegu F_{ac} pri $r = 0.5$.

znatno komplikovanije.

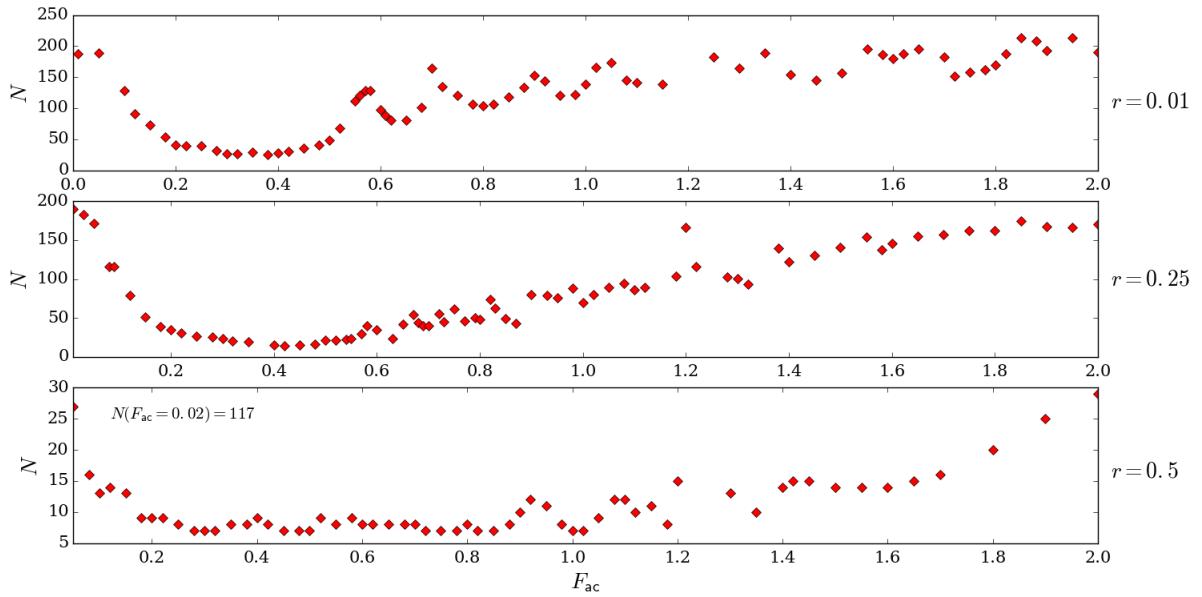
Prvi subharmonijski stepenik i pri ovoj vrednosti deformacije uvodi fazni pomeraj u funkcije početka i kraja harmonijskih stepenika. Za razliku od približno standardnog slučaja, početak drugog harmonijskog stepenika je fazno pomeren u odnosu na kraj prvog harmonika za istu fazu za koju je i početak prvog harmonijskog stepenika pomeren u odnosu na kritičnu silu. Ova fazna razlika nije konstantna kao što je bio slučaj u slabije deformisanom sistemu već se menja u zavisnosti od vrste ekstrema kritične sile. Kada kritična sila ima minimume tada su funkcije početaka stepenika u kontra fazi sa kritičnom silom bez faznog pomeraja dok su krajevi stepenika u fazi sa kritičnom silom bez faznog pomeraja. Fazni pomeraj između oscilacija kritične sile i funkcija početka i kraja harmonijskih stepenika javlja se samo kada kritična sila ima lokalne maksimume.

Prvi subharmonijski stepenik $\frac{3}{2}$ unosi fazni pomeraj od jedne poluperiode kritične sile između kraja prvog i početka drugog harmonika. Donja desna slika pokazuje da se $\frac{3}{2}$ i pri ovoj deformaciji suštinski razlikuje od ostalih subharmonijskih stepenika čiji počeci i krajevi osciluju u fazi sa krajem ili početkom najbližeg harmonijskog stepenika.

Porast parametra F_{ac} indukuje opadanje početka i kraja svih stepenika što implicira konvergiranje širina stepenika ka nuli, suprotno trendu prisutnom na graficima širina subharmonijskih stepenika pri ovoj vrednosti deformacije.

5.3 Ukupan broj Šapiro stepenika

Analiza širina stepenika i njihovih raspona je u pređašnjim izlaganjima bila ograničena na izabran broj stepenika. Ista analiza može se proširiti i na proizvoljan Farejev niz \mathcal{F}_{30} ako je od interesa ponašanje nekih od stepenika koji nisu diskutovani do sada. Do sada je primećeno da



Slika 5.11: Ukupan broj N Šapiro stepenika različitih od nule iz Farejevog niza \mathcal{F}_{30} u ispitivanom opsegu F_{ac} i \bar{F} pri tri različite vrednosti deformacionog parametra r .

su širine stepenika koji su odlika nizova \mathcal{F}_7 i \mathcal{F}_8 veoma male što čini detaljnu analizu oscilacija širine članova viših Farejevih nizova teškom jer je dostupan mali broj informacija. Stoga se analiza svih stepenika koji nisu diskutovani do sada može svesti na traženje ukupnog broja Šapiro stepenika koji se pojavljuju a da im se širina razlikuje od nule $\Delta F \neq 0$.

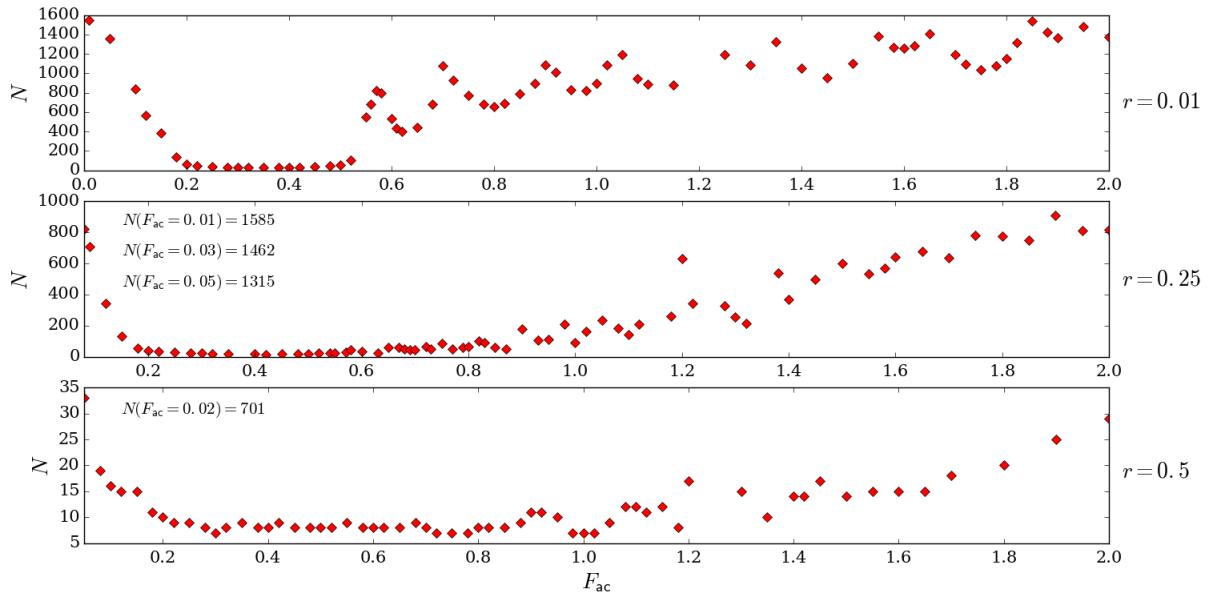
Slika 5.11 prikazuje raspodelu ukupnog broja stepenika prisutnih u odzivnoj funkciji $\bar{v}(\bar{F})$ koji su članovi niza \mathcal{F}_{30} i uticaj deformacije na ovu veličinu.

Pri sve tri vrednosti deformacije lokalno se najveći broj stepenika javlja pri izuzetno malim vrednostima $F_{ac} < 0.05$. Imajući u vidu da su posmatrani samo stepenici iz Farejevog niza \mathcal{F}_{30} , koji broji ukupno 278 članova, vidi se da ovaj maksimum broja stepenika ne sadrži sve članove niza \mathcal{F}_{30} .

Porast F_{ac} indukuje značajno smanjenje broja stepenika između jednog ili dva reda veličine. Oblast malog broja stepenika različitih od nule se proteže sve do kraja prvog regiona identifikovanog pri postmaranju funkcija širine stepenika. Dakle, pri svakoj deformaciji dolazi do podele funkcije ukupnog broja stepenika na dva regiona koji se poklapaju sa regionima identifikovanim u funkcijama širina sa tom razlikom da se pri $F_{ac} < 0.05$ javlja lokalno najveći broj stepenika.

Drugi ili oscilatori region okarakterisan je oscilacijom broja stepenika sa porastom F_{ac} . Pri sve tri vrednosti deformacije ukupan broj stepenika raste. Na najmanjoj deformaciji, $r = 0.01$ maksimumi funkcije $N(F_{ac})$ odgovaraju minimumima oscilacije stepenika $\frac{3}{2}$ dok pri većim deformacijama takva veza komlikovanija. Tek pred kraj ispitivanog opsega F_{ac} broj stepenika dostiže vrednost koja se javlja pri najmanjim vrednostima $F_{ac} < 0.05$ i ima tendenciju daljeg rasta. Pošto je svaki sledeći maksimum broja stepenika veći od prethodnog, može se desiti da se nakon određene vrednosti F_{ac} javljaju svi članovi niza \mathcal{F}_{30} .

Slika 5.12 prikazuje istu funkciju kao i slika 5.11 sa tom razlikom da se sada broje svi prisutni članovi niza \mathcal{F}_{120} . Oblik funkcije $N(F_{ac})$ i mesta njenih ekstremi su ostali isti kao pri



Slika 5.12: Ukupan broj N Šapiro stepenika različitih od nule iz Farejevog niza \mathcal{F}_{120} u ispitivanom opsegu F_{ac} i \bar{F} pri tri različite vrednosti deformacionog parametra r .

razmatranju članova skupa \mathcal{F}_{30} ali su se absolutne vrednosti broja prisutnih stepenika uvećale u većini opsega F_{ac} .

Prvi maksimum broja stepenika se i dalje javlja kada je $F_{ac} < 0.1$, ali je apsolutna vrednost višestruko uvećana. Na srednjem i donjem segmentu slike 5.12 su vrednosti nekoliko prvih maksimuma uklonjeni sa grafika i istaknuti odvojeno da bi se mogla videti oscilatorna zavisnost funkcije $N(F_{ac})$. Ovako veliko uvećanje broja stepenika i dalje ne obezbeđuje pojavu svih članova Farejevog niza \mathcal{F}_{120} koji broji 4408 članova. Sa Stern-Brokot drveta 5.1 može se zaključiti da se prilikom konstrukcije drveta do te mere da su prisutni svi članovi skupa \mathcal{F}_{120} obavezno stvaraju i svi članovi \mathcal{F}_{30} . Nedostatak stepenika koji bi činili potpun niz \mathcal{F}_{30} i pojave mnogo većeg broja stepenika prilikom razmatranja niza \mathcal{F}_{120} implicira da se ne javljaju svi članovi svakog niza Stern-Brokot drveta čak ni pri najmanjoj deformaciji $r = 0.01$ na kojoj nije bilo selektivnog izražaja stepenika.

Oblast malog broja stepenika prati prvi maksimum $N(F_{ac})$ i proteže se do kraja prvog regiona ili regiona malih vrednosti F_{ac} . Ukupan broj stepenika u ovoj oblasti nije se promenio posmatranjem posmatranjem mnogo većeg Farejevog niza što implicira da se u ovoj oblasti zaista ne nalazi velik broj stepenika bez obzira na način koji se posmatraju. Drugi ili oscilatorički region karakterisan je oscilacijom broja stepenika sa monotono rastućim amplitudama. Apsolutne vrednosti broja stepenika su se u ovom regionu znatno uvećale posmatranjem većeg Farejevog niza pri malim i umerenim deformacijama dok su u slučaju velike deformacije $r = 0.5$ ostale nepromenjene. Očito je da se u jako deformisanom FK modelu pri svim vrednostima F_{ac} , izuzev izuzetno malih vrednosti, javljaju samo članovi niskih Farejevih nizova.

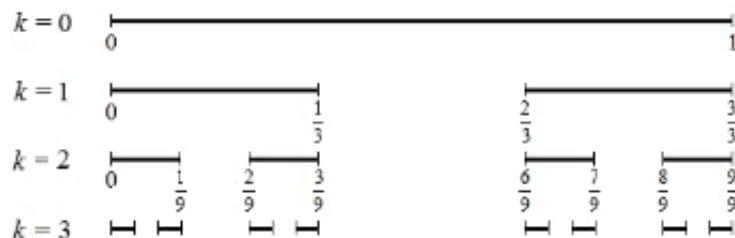
Glava 6

Fraktalna dimenzija Kantorove funkcije

Odzivna funkcija $\bar{v}(\bar{F})$ generalizovanog ili standardnog FK modela prikazana na slici 3.3 umnogome liči na Kantorovu funkciju. Promena parametara sistema dovodi do promene oblika odzivne funkcije $\bar{v}(\bar{F})$ koja, iako znatno imenjena, zadržava neke osobine Kantorove funkcije i stoga ova glava posvećuje posebnu pažnju Kantorovoj funkciji i njenim karakteristikama koje su relevantne za ovaj rad.

6.1 Kantorov skup i Kantorova funkcija

Nemački matematičar Georg Kantor godine 1883. u svom radu [54] uvodi skup koji kasnije po njemu dobija ime. Kantorov skup je skup svih tačaka koje preostanu nakon konstrukcije Kanorotovog skupa. Kantorov skup se konstruiše tako što se u prvom koraku jedinični interval $I = [0, 1]$ podeli na tri jednakata dela $[0, \frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ i $[\frac{2}{3}, 1]$ da bi se potom srednji interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ obrisao rezultirajući unijom dva intervala $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$. U drugom koraku se svaki od ovih intervala pojedinačno deli na tri jednakata dela i briše se srednji deo. Postupak se ponavlja beskonačno puta, a prvih nekoliko koraka su prikazani na slici 6.1.



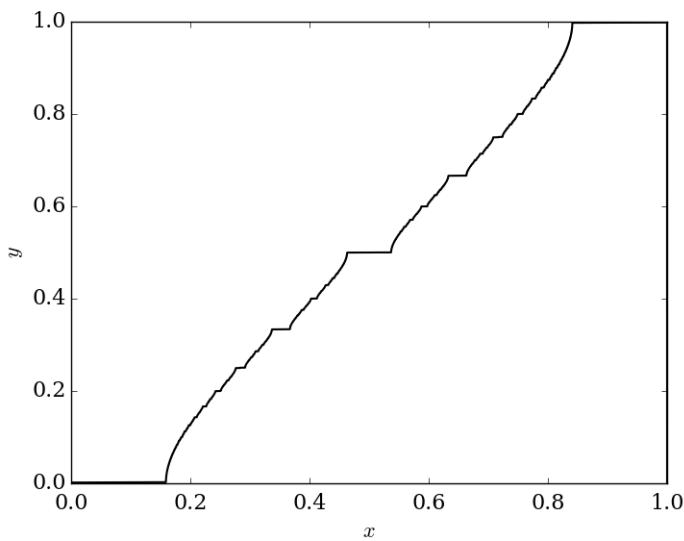
Slika 6.1: Četiri iteracije konstrukcije Kantorovog skupa. Slika preuzeta iz [55].

Kantorov skup je eksplicitno dan sa [56] :

$$C = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=0}^{3^{n-1}-1} \left(\frac{3k+1}{3^n}, \frac{3k+2}{3^n} \right) \quad (6.1)$$

Kantorov skup je neprebrojiv zatvoren skup koji se sastoji jedino od krajnjih tačaka svih intervala stvorenih konstrukcijom. Pošto svaki segment konstrukcije posmatran ponaosob ocratava čitavu konstrukciju, Kantorov skup je samosličan [56].

Kantorova funkcija se konstruiše tako što se na dvodimenzionalnom grafiku sve susedne krajnje tačke intervala nastalih konstrukcijom Kantorovog skupa C_n spoje linijama konstante visine jednake srednjoj vrednosti dvaju tačaka koje se spajaju. Ako su dve tačke koje se spajaju tačka $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ tada su na dvodimenzionalnom grafiku $y(x)$ one predstavljene tačkama $M\left(\frac{a}{b}, \frac{a+c}{b+d}\right)$ i $N\left(\frac{c}{d}, \frac{a+c}{b+d}\right)$ koje su spojene linijom $y = \frac{a+c}{b+d}$. Na slici 6.2 je prikazana Kantorova funkcija nastala iz Kantorovog skupa C_n , $n \rightarrow \infty$.



Slika 6.2: Kantorova funkcija ili potpuno đavolje stepenište.

Kantorova funkcija [56] je rastuća funkcija jediničnog intervala $I = [0, 1]$ na jedinični interval I koja je na konstantna u rezonantnim intervalima kojih ima beskonačno. Pri izvod Kantorove funkcije je skoro uvek jednak nuli.

Kantorova funkcija je, kao i Kantorov skup, samoslična u tom smislu da bilo koji izabrani motiv funkcije predstavlja oblik cele funkcije. Pošto Kantorova funkcija vizuelno podseća na stepenište i pošto stepenika u Kantorovoj funkciji ima besokančno, za Kantorovu funkciju se koristi i termin "potpuno đavolje stepenište". Nepotpunim đavoljim stepeništem se naziva odzivna funkcija koja liči na Kantorovu funkciju ali nema beskonačno mnogo stepenika.

Širine platoa na slici 6.2 opadaju sa porastom imenjica razlomka kojem odgovara visina na kojoj se plato nalazi. Najveći plato odgovara stepeniku $\frac{3}{2}$, sledeća dva najveća platoa po veličini odgovaraju stepenicima $\frac{4}{3}$ i $\frac{5}{3}$ i tako dalje prateći konstrukciju Stern-Brocot drveta koje je i samo po sebi fraktal u tom smislu da je beskonačno i da posmatranje nivoa ispod proizvoljno odabranog nultog nivoa drveta u potpunosti oslikava oblik celog drveta.

6.2 Potpunost đavoljeg stepeništa

Pristup velikom broju subharmonijskih Šapiro stepenika između prvog i drugog harmonika modifikacijom programa za analizu ostvaruje mogućnost eksperimentalnog izračunavanja frak-

talne dimenzije dobijenih đavoljih stepeništa.

Eksperimentalno izračunavanje fraktalne dimenzije izvršeno je Minkovski-Buligan metodom [63] koji se naziva i metod brojanja segmenata. Osnova ove metode je smanjenje oblasti posmatranja date funkcije i brojanje koliko se elemenata funkcije nalazi u svakoj izabranoj oblasti. Pošto su fraktali samoslični promena skale dovodi do oslikavanja svih elemenata koji su bili prisutni na skali koja obuhvata celokupnu funkciju i stoga će i infinitezimalno mala skala posmatranja sadržati sve karakteristike celokupne funkcije. Fraktalna dimenzija se ovim metodom računa kao:

$$D(S) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log(N(\epsilon))}{\log\left(\frac{1}{\epsilon}\right)} \quad (6.2)$$

gde je ϵ segment, u istodimenzionom prostoru kao i posmatrani fraktal, unutar kog se broji koliko je elemenata fraktala $N(\epsilon)$ sadržano.

Kada se računa fraktalna dimenzija funkcije $f(x)$ tada se promena skale zasniva na promeni dužine intervala koji se posmatra:

$$D(f(x)) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\log(N(l))}{\log\left(\frac{1}{l}\right)} \quad (6.3)$$

Računanje fraktalne dimenziye u ovom poglavlju rađeno je verzijom Minkovski-Buligan metode prikazanoj u radu [62] u kom je utvrđeno da zavisnost stabilnosti sistema opisanog kružnom mapom ima rezonantne intervale na racionalnim vrednostima srednjeg rastojanja između čestica. Ova metoda računanja fraktalne dimenziye može se primeniti na sve vrste đavoljeg stepeništa. Metoda se sastoji u promeni referentnog l intervala i zatim brojanja $S(l)$ koliko je stepenika prisutno u čitavoj odzivnoj funkciji koji su veći od posmatranog intervala. Mera broja stepenika pri svakoj vrednosti referentnog intervala potom se računa kao:

$$N(l) = \frac{1 - S(l)}{l} \quad (6.4)$$

Računanje fraktalne dimenziye na ovaj način omogućava posmatranje đavoljih stepeništa koja nisu preslikavanje jediničnog intervala $I = [0, 1]$ na jedinični interval I jer preko $S(l)$ uzima u obzir eksperimentalno dobijeni interval na kom se celo stepenište nalazi. U našem slučaju taj interval se nalazi između prvog i drugog harmonijskog Šapiro stepenika za koji je pokazano u glavi 5 da se menja sa promenom F_{ac} . Svi rezultati koji slede ispituju samo ovaj ospec i ne uzimaju u obzir širine harmonijskih stepenika tako da dobijeni rezultati daju odgovor na pitanje da li je đavolje stepenište sastavljen isključivo od subharmonijskih Šapiro stepenika potpuno ili ne.

Nakon dovoljno izvršenih merenja prema jednačini (6.4) svi rezultati se nanose na logaritamski grafik i vrši se linearna regresija tj. sve tačke se fituju metodom najmanjih kvadrata. Linearna regresija kao rezultat daje vrednost koeficijenta pravca funkcije $\log(N(l)) = f(\log(\frac{1}{l}))$ sa odgovarajućom greškom. Vrednost ovako dobijog koeficijenta pravca odgovara upravo fraktalnoj dimenziji D posmatranog đavoljeg stepeništa, odnosno može se reći da je:

$$N(l) \sim \left(\frac{1}{l}\right)^D \quad (6.5)$$

U radu [62], odakle je i preuzeta ova metodologija, ispitivana je kružna mapa:

$$f(\theta) = \theta + \Omega - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi\theta) \quad (6.6)$$

Može se povući analogija kružne mape sa FK modelom ako se θ smatra rastojanjem između čestica, $f(\theta)$ brzinom date čestice, Ω dejstvom spoljašnjih sila i preostali član prvim izvodom standardnog substratnog potencijala sa $K = 1$.

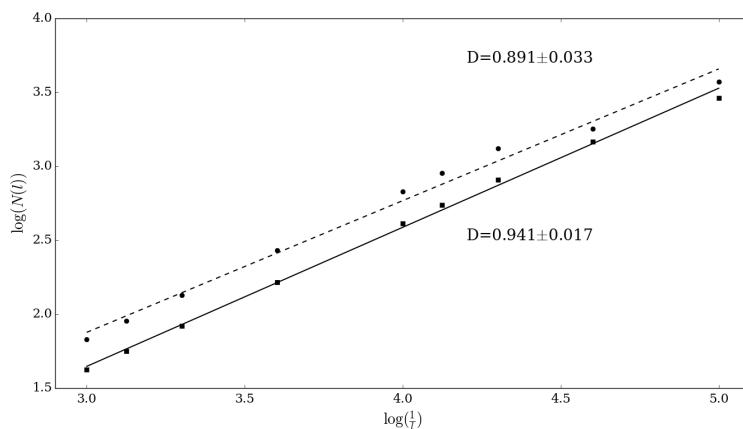
Fraktalna analiza stepeništa dobijenog funkcijom (6.6) u radu [62] dovodi do rezultata $D \approx 0.87$ što prema radovima ([58] - [62]) implicira da je dobijeno davolje stepenište ovakve kružne mape potpuno.

Prilikom istraživanja prezentovanog u ovoj glavi ispitivali smo, između ostalog, i standardni FK model sa $\omega = \frac{1}{2}$ i $K = 1$. Ti rezultati nisu predstavljeni iz praktičnih razloga ali smo utvrdili da se pri ovim parametrima sistema uvek javlja potpuno davolje stepenište sa fraktalnom dimenzijom $D \approx 0.87$ što potvrđuje ekvivalentnost standardnog FK modela sa kružnom mapom.

Hausdorfova fraktalna dimenzija d_H korištena u radovima ([58] - [61]) i fraktalna dimenzija dobijena Minkovski-Buligan metodom D u opštem slučaju se razlikuju kada se ispituju zatvoreni skupovi. Međutim, kada je eksperimentalno dobijeno davolje stepenište zaista fraktal tada se ove dve vrste fraktalnih dimenzija podudaraju [64]. Pošto je analitički izračunata vrednost Hausdorfove fraktalne dimenzije jednaka $d \approx 0.87$, kada se vrednost eksperimentalno izračunate Minkovski-Buligan fraktalne dimenzije podudara sa ovom vrednosti tada je posmatrano davolje stepenište zaista fraktal i tvrdimo da se javilo potpuno davolje stepenište.

6.3 Fraktalna dimenzija svih dobijenih funkcija $\bar{v}(\bar{F})$

Modifikacijom programa za analizu tako da izvodi brojanje segmenata i vrši linearnu regresiju izračunali smo fraktalnu dimenziju za odzivnu funkciju $\bar{v}(\bar{F})$ sistema pri svakoj ispitivanoj vrednosti F_{ac} i r . Na slici 6.3 prikazan je primer linearne regresije izvršene za dve vrednosti F_{ac} i izračunat koeficijent pravca sa odgovarajućom greškom.

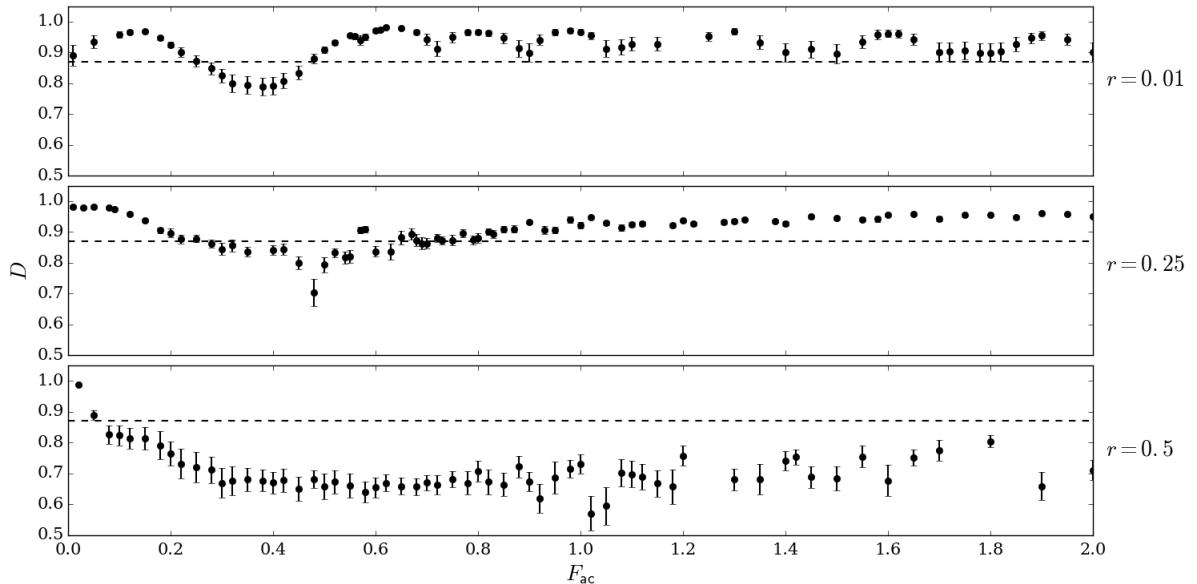


Slika 6.3: Rezultati metode brojanja fitovani metodom najmanjih kvadrata za dve različite vrednosti F_{ac} .

Grafik je u logaritamskoj skali zbog čega birani intervali za posmatranje naizgled nisu ravnomerno raspoređeni. Međutim, intervali jesu ravnomerni i birani su tako da obuhvate i najveći subharmonijski stepenik $\frac{3}{2}$ i najmanje stepenike širine i do 10^{-5} , kao i da ne dovedu do prevelike reprezentacije određenih stepenika. Isti raspored intervala za posmatranje primjenjen je prilikom računanja svih fraktalnih dimenzija. Prilagođena R^2 vrednost je iznad 0.98 u svim izvršenim regresijama što implicira da su linearni fitovi odlični.

Obogaćenje linearnih regresija dodatnim tačkama van opsega prikazanog na slici 6.3 može se ostvariti jedino uključivanjem harmonijskih stepenika u analizu što bi, u opštem slučaju, dodalo još tački u opseg $\log\left(\frac{1}{l}\right) < 3$. Dodavanje tački u ospegu $\log\left(\frac{1}{l}\right) > 5$ moguće je jedino vršenjem simulacija FK modela sa korakom sile manjim od 10^{-5} .

Na slici 6.4 prikazane su izračunate fraktalne dimenzije za sve ispitivane vrednosti F_{ac} i r za đavolja stepeništa između prvog $\frac{1}{1}$ i drugog $\frac{2}{1}$ harmonijskog Šapiro stepenika. Isprekidana linija predstavlja vrednost $D \approx 0.87$.



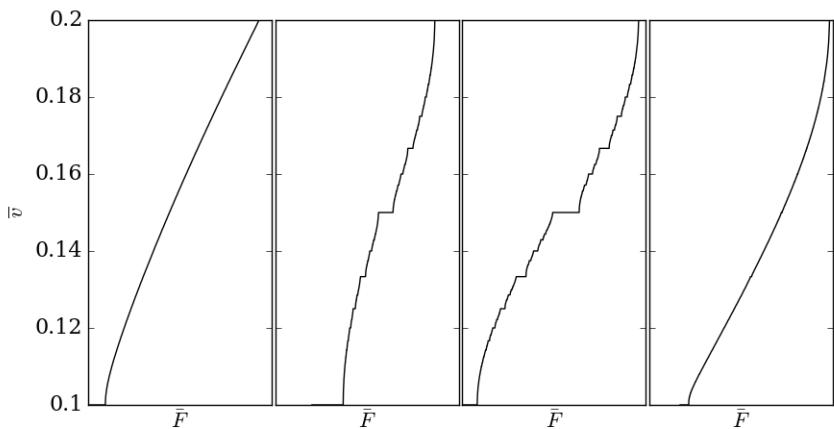
Slika 6.4: Zavisnost fraktalne dimenzije D od amplitude naizmenične sile F_{ac} za tri vrednosti deformacionog parametra r . Prikazana fraktalna dimenzija računata je za đavolje stepenište između prvog i drugog harmonijskog Šapiro stepenika.

6.3.1 $r=0.01$

Samo pri najmanjoj vrednosti deformacije $r = 0.01$ prisutne su očite pravilnosti u raspodeli fraktalne dimenzije. Kada je amplituda naizmenične sile izuzetno mala $F_{ac} = 0.01$ fraktalna dimenzija je približno jednaka $D \approx 0.87$ i ta vrednost D se javlja još dva puta u celom opsegu F_{ac} . Na nekoliko mesta D periodično teži vrednosti od $D \approx 0.87$ ali je diskutabilno da li se može tvrditi da se na tim mestima zaista podudara sa $D \approx 0.87$. U svakom slučaju može se reći da se potpuno đavolje stepenište bar tri puta ostvaruje u samerljivom FK modelu sa $\omega = \frac{1}{2}$, $K = 4$ i $r = 0.01$.

Poredeći sliku 6.4 koja opisuje $r = 0.01$ sa odgovarajućom slikom 5.11 primećuje se da postoji pozitivna korelacija između ukupnog broja stepenika i težnji fraktalne dimenzije ka $D \approx 0.87$. Pri najmanjem $F_{ac} = 0.01$ javlja se velik broj stepenika i, kako je intuitivno bilo pretpostavljeno, tu se javlja potpuno đavolje stepenište. U oblasti F_{ac} koja sledi javlja se izuzetno mali broj stepenika dok analiza fraktalne dimenzije ukazuje da se u toj oblasti pri dve vrednosti F_{ac} javlja potpuno đavolje stepenište. U oblasti u kojoj broj stepenika oscilatorno raste dolazi i do oscilacije fraktalne dimenzije gde maksimumi broja stepenika odgovaraju vrednostima D najbližim vrednosti $D \approx 0.87$. Ostvarivanje potpunog đavoljeg stepeništa u oblastima malih i velikih brojeva ukupnih stepenika ukazuje na dva različita mehanizma pod kojim je potpuno stepenište ostvarivo pri $r = 0.01$.

Prva i četvrta slika na slici 6.5 prikazuju potpuno đavolje stepenište ostvareno na dve vrednosti F_{ac} na kojim se javlja lokalni maksimum broja stepenika. Srednje dve slike na slici 6.5 prikazuju potpuno đavolje stepenište koje se ostvaruje na dve vrednosti F_{ac} koje se obe nalaze u oblasti F_{ac} u kojoj se javlja izuetno mali broj stepenika.



Slika 6.5: Potpuno đavolje stepenište pri $r = 0.01$, $K = 4$ na četiri vrednosti F_{ac} sleva na desno: $F_{ac} = 0.01$, $F_{ac} = 0.22$, $F_{ac} = 0.48$, $F_{ac} = 0.9$.

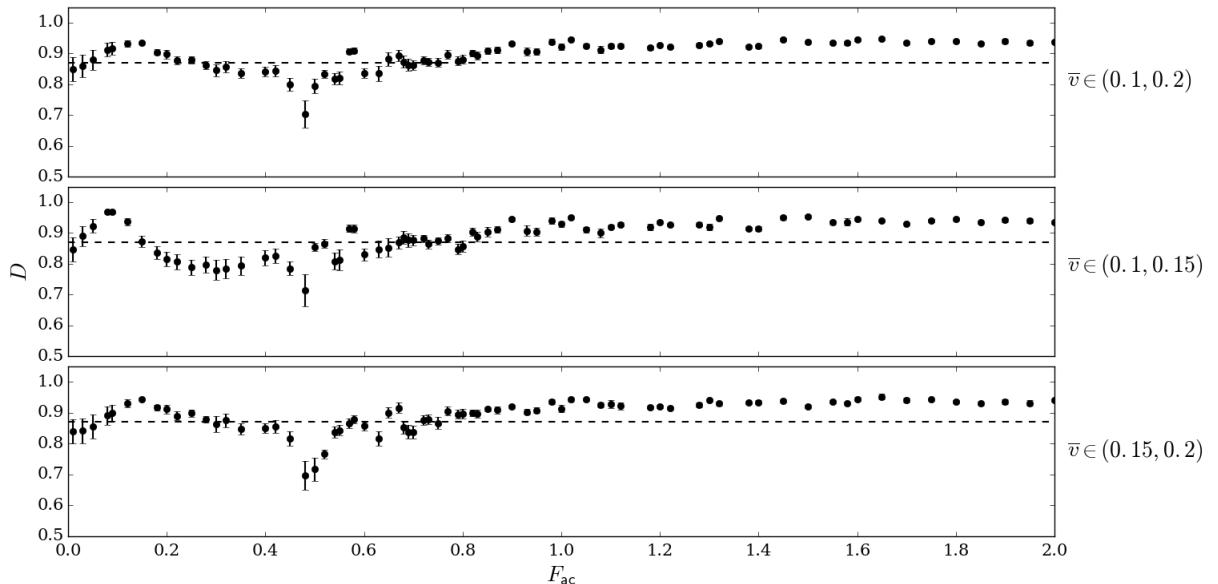
Uzmajući u obzir dosadašnje razmatranje relativnih veličina subharmonijskih Šapiro stepenika u celom opsegu F_{ac} dolazi se do zaključka da se maksimumi brojeva stepenika javljaju kada veličina subharmonijskog stepenika $\frac{3}{2}$ ima lokalne minimume. Kada veličina stepenika $\frac{3}{2}$ ima lokalne minimume tada su približno svi subharmonijski stepenici jednakih veličina i odzivna funkcija $\bar{v}(\bar{F})$ ima karakteristike fraktalata. Računanje fraktalne dimenzije pokazalo je da na tim vrednostima F_{ac} đavolje stepenište jeste fraktal ili je veoma približno fraktalu. Prva i četvrta slika na slici 6.5 prikazuju izgled odzivne funkcije $\bar{v}(\bar{F})$ na dve vrednosti F_{ac} na kojim se javlja lokalni maksimum stepenika ili na kojim širina stepenika $\frac{3}{2}$ ima lokalni minimum. Iako đavolje stepenište u ovim slučajevima podseća na monotono rastuću funkciju, uvećanje bilo kog dela ove funkcije pokazuje da je ova naočigled prava linija sastavljena od velikog broja stepenika i da je cela funkcija sastavljena isključivo od rezonantnih stepenika. Ovakav oblik đavoljeg stepeništa odgovara fraktalu koji je sastavljen od stepenika iste verovatnoće i sa istim Euklidskim merama za koji je analitički pokazano u radu [58] da jeste uistinu fraktal sa fraktalnom dimenzijom $D \approx 0.87$.

Druga vrsta potpunog đavoljeg stepeništa javlja se na vrednostima F_{ac} na kojim ima

izuzetno malo subharmonijskih stepenika i na kojim je širina prvog i ostalih subharmonijskih stepenika u oblasti prvog maksimuma oscilacije širine. Đavolje stepeništa koja odgovaraju ovim vrednostima F_{ac} prikazana su na srednjim slikama slike 6.5. Pošto subharmonijski stepenik nije u minimumu širine na ovim vrednostima F_{ac} , đavolje stepenište više nije fraktal sa jednakim Euklidskim veličinama već fraktal koji odgovara preslikavanju širina koje prate konstrukciju Stern-Brokot drveta. Takav fraktal odgovara Kantorovoj funkciji na jediničnom intervalu i može se videti sličnost ove dve slike sa slikom 6.2. Veličine stepenika su manje u našem slučaju jer se stepenište ne ostvaruje na I već na proizvoljnog intervalu čije je razlikovanje od I kompenzovano opisanom metodom računanja fraktalne dimenzije. U radovima ([58] - [61]) pokazano je da je fraktalna dimenzija ovakvog frakta $D \approx 0.87$ i stoga se može tvrditi da je na ovim vrednostima F_{ac} ostvareno potpuno đavolje stepenište.

6.3.2 $r=0.25$

Karakteristika svih frakta jest da proizvoljno odabrani segment konstrukcije frakta oslikava motiv kakav ima i ceo fraktal. U glavi 5 je pokazano da pri deformaciji $r = 0.25$ dolazi do selektivnog izražaja subharmonijskih stepenika koji pripadaju levoj strani Stern-Brokot drveta što podrazumeva da posmatranje celog intervala između prvog i drugog harmonijskog stepenika kao na slici 6.4 ne može rezultirati ispravnom fraktalnom dimenzijom. Stoga se na slici 6.6 analiziraju intervali "levo" i "desno" od prvog subharmonijskog stepenika $\frac{3}{2}$ za koji je pokazano da uzima neke karakteristike harmonijskih stepenika.



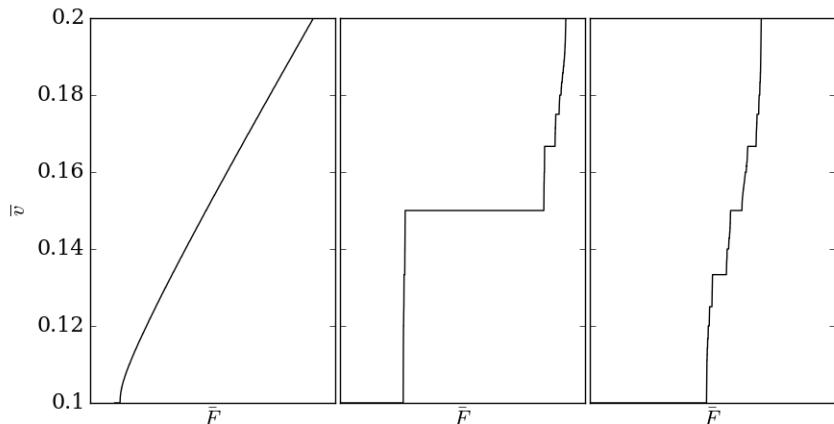
Slika 6.6: Zavisnost fraktalne dimenzije D od amplitudne sile F_{ac} u tri različita opsega $\bar{v} (\bar{F})$ pri $r = 0.25$.

Fraktalna dimenzija se razlikuje u dva neekivalentna intervala između harmonijskih stepenika i prvog subharmonijskog stepenika. Ova razlika je primetna samo u regionu niskih vrednosti F_{ac} ili regiona u kom dolazi do selektivnog izražaja subharmonijskih stepenika. U

drugom ili oscilatornom regionu ova dva intervala \bar{v} su ekvivalentna i fraktalna dimenzija se ne razlikuje.

Đavolje stepenište koje se javlja u opsegu $\bar{v} \in (0.1, 0.15)$ uglavnom nije potpuno u oblasti F_{ac} u kojoj dolazi do selektivnog izražaja. Međutim, u istoj toj oblasti ali u intervalu $\bar{v} \in (0.15, 0.2)$ đavolje stepenište je skoro uvek potpuno. Kada je fraktalna dimenzija u oba posmatrana intervala \bar{v} ista i jednaka $D \approx 0.87$, đavolje stepenište je potpuno i na intervalu $\bar{v} \in (0.1, 0.2)$. Detaljnije ispitivanje pojedinačnih đavoljih stepeništa pokazuje da se potpuno stepenište ostvaruje kao stepenište sa jednakim Euklidnskim dužinama stepenika jedino pri vrednosti $F_{ac} = 0.01$ dok se na svim drugim mestima gde je prisutno potpuno đavolje stepenište javlja kao stepenište koje prati konstrukciju jedne od strana ili obe strane Stern-Brokot drveta.

Na slici 6.7 prikazana su tri đavolja stepeništa za koje računanje fraktalne dimenzije pokazuju da sadrže potpuno đavolje stepenište u nekom opsegu. Pri $F_{ac} = 0.01$ fraktalne dimenzije oba posmatrana opsega se podudaraju i jednake su $D \approx 0.87$ što implicira da je đavolje stepenište potpuno na celom opsegu između $\frac{1}{1}$ i $\frac{2}{1}$. Slika 6.7 potvrđuje da je potpuno đavolje stepenište realizovano kao unija stepenika istih Euklidskih širina kao što je bio slučaj u malo deformisanom sistemu, $r = 0.01$, na malim vrednostima F_{ac} .



Slika 6.7: Đavolje stepenište pri $r = 0.25$, $K = 4$ na tri vrednosti F_{ac} sleva na desno:

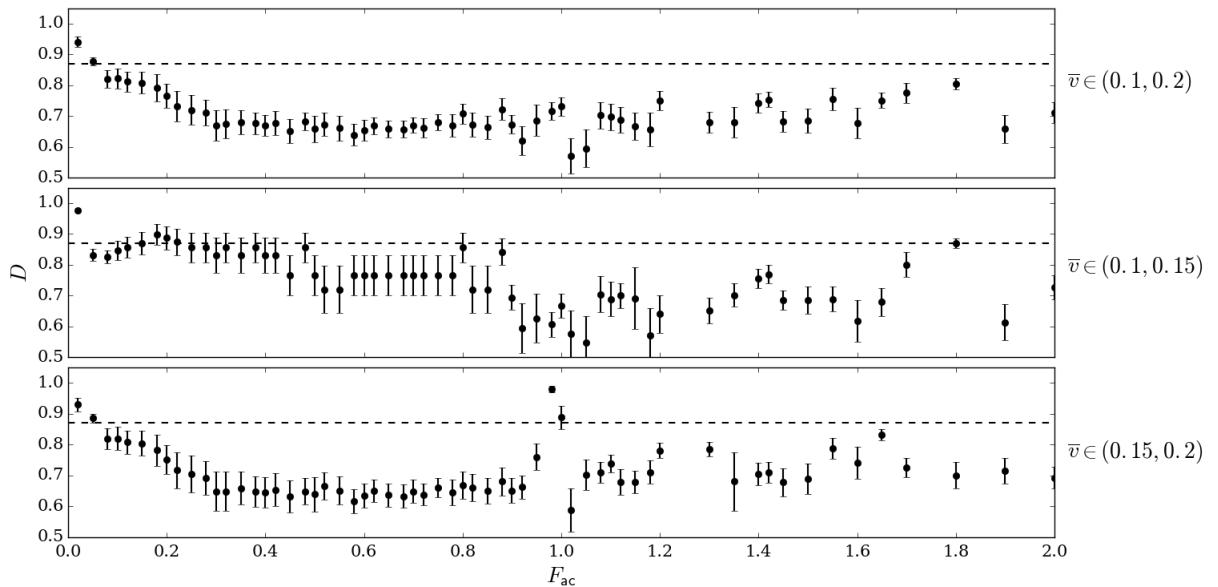
$$F_{ac} = 0.01, F_{ac} = 0.25 \text{ i } F_{ac} = 0.65.$$

Kada je $F_{ac} = 0.25$ potpuno đavolje stepenište prisutno je samo u oblasti $\bar{v} \in (0.15, 0.2)$. Stepenika u opsegu $\bar{v} \in (0.1, 0.15)$ ima veoma malo i nalaze se na izuzetno malom opsegu \bar{F} i time nisu dovoljno reprezentovani u računanju fraktalne dimenzije celog opsega $\bar{v} \in (0.1, 0.2)$ što je rezultiralo sa dimenzijom $D \approx 0.87$ na celom intervalu iako nije prisutan fraktal. Ova slika potvrđuje da se moraju uzeti u obzir svi rezultati prilikom razmatranja fraktalne dimenzije. Iako je analiza dala rezultate potpunosti đavoljeg stepeništa na celom intervalu $\bar{v} \in (0.1, 0.2)$ detaljnije ispitivanje je pokazalo da stepenište nije potpuno na intervalu $\bar{v} \in (0.1, 0.15)$ i da se stoga ne javljaju svi subharmonijski stepenici između dva harmonijska.

Pri $F_{ac} = 0.65$ fraktalne dimenzije oba intervala $\bar{v} \in (0.1, 0.15)$ i $\bar{v} \in (0.15, 0.2)$ su jednake $D \approx 0.87$ implicirajući da se potpuno đavolje stepenište zaista javlja između prvog i drugog harmonijskog stepenika. Slika 6.7 pruža uvid u vrstu potpunog đavoljeg stepeništa koje se javlja i pokazuje da se pri ovoj vrednosti $F_{ac} = 0.65$ ostvaruje potpuno đavolje stepenište koje odgovara Štern-Brokot konstrukciji.

Cela slika 6.7 pokazuje da informacija o vrednosti fraktalne dimenzije pokazuje samo da li je đavolje stepenište potpuno ili ne, i ne nosi informaciju o tome da li je potpuno stepenište ostvareno kao stepenište jednakih Euklidskih širina ili kao stepenište sastavljen od stepenika čije širine prate Štern-Brokot konstrukciju. Takođe pokazuje da se pre ispitivanja fraktalne dimenzije moraju uzeti u obzir i prethodni rezultati o relativnim veličinama Šapiro stepenika.

6.3.3 $r=0.5$



Slika 6.8: Zavisnost fraktalne dimenzije D od amplitudu naizmenične sile F_{ac} u tri različita opsega $\bar{v}(\bar{F})$ pri $r = 0.5$.

Na slici 6.8 prikazana je zavisnost $D(F_{ac})$ u celom intervalu \bar{v} i u dva intervala između prvog subharmonika $\frac{3}{2}$ i susednih harmonika. Sa gornje slike se vidi da je potpuno đavolje stepenište ostvareno samo pri vrednosti $F_{ac} = 0.05$ kada su fraktalne dimenzije svih posmatranih intervala jednake. Velika rezlika između izračunatih fraktalnih dimenzija u dva intervala \bar{v} odvojena intervalom $\bar{v} = 0.15$ implicira veliku asimetriju leve i desne Stern-Brokot drveta.

Potpuno đavolje stepenište prisutno je u širokom opsegu F_{ac} u intervalu \bar{v} između prvog harmonijskog stepenika i stepenika $\frac{3}{2}$. Citav ovaj opseg F_{ac} odgovara prvom regionu u kom su širine većine subharmonijskih Šapiro stepenika približno jednake nuli. Međutim, fraktalna analiza pokazuje da se u toj oblasti javlja potpuno đavolje stepenište koje u uslovim malih širina stepenika može biti ostvareno jedino kao fraktal sastavljen od stepenika istih Euklidskih širina. U oscilatornom regionu gde su svi subharmonijski Šapiro stepenici prisutni ne javlja se odgovarajući odnos širina stepenika koji bi rezultirao pojavom potpunog đavoljeg stepeništa u intervalu $\bar{v} \in (0.1, 0.2)$.

Glava 7

Zaključak

Frenkel-Kontorova model je u ovom radu ispitivan pri promeni nekoliko parametara sistema od kojih su neki parametri posmatrani skoro kontinualno dok su drugi posmatrani diskretno na nekoliko izabranih vrednosti. Primećeno je da promena bilo kog parametra značajno utiče na pojavu i osobine subharmonijskih Šapiro stepenika.

Pri svim kombinacijama parametara sistema pokazano je da su karakteristike svih subharmonijskih Šapiro stepenika korelisane sa oscilacijom kritične sile. Ova zavisnost se menja odabirom parametara ali se uvek ponašanje subharmonijskih Šapiro stepenika može umnogome povezati sa ponašanjem kritične sile.

Pokazano je da pri svim deformacijama zavisnost širina subharmonijskih Šapiro stepenika od intenziteta naizmenične sile može da se podeli u dva odvojena regiona. Prvi region okarakterisan je zajedničkim oscilovanjem svih stepenika pri najmanjoj deformaciji dok povećanje deformacije u ovom regionu dovodi do selektivog izražaja stepenika gde su favorizovani stepenici koji odgovaraju razlomcima sa desne strane Stern-Brokot drveta. Drugi region okarakterisan je zajedničkim oscilovanjem svih stepenika bez obzira na vrednost deformacionog parametra.

Detaljna analiza subharmonijskih Šapiro stepenika i njihovih relativnih veličina pokazala je da se njihove širine povezuju raspodeli razlomaka na Stern-Brokot drvetu u približno standardnom FK modelu. U prvom regionu stepenici sa manjih nivoa Stern-Brokot drveta imaju veće širine od stepenika koji se nalaze na većim nivoma. Pošto je takav odnos primećen i među stepenicima sa istom vrednošću imenica pravilo o opadanju širine subharmonijskih Šapiro stepenika sa porastom imenica u standardnom FK modelu mora se upotpuniti pravilom o opadanju širina sa povećanjem nivoa Stern-Brokot drveta.

Preslikavanje Stern-Brokot konstrukcije na širine subharmonijskih Šapiro stepenika nije ostvareno u znatno deformisanim sistemima jer dolazi do selektivog izražaja stepenika u prvom regionu. Oscilovanje svih stepenika u drugom regionu je komplikovano i utvrđivanje opštih pravila je veoma otežano.

Ispitivanje fraktalne dimenzije funkcije srednje brzine čestica pokazalo je da je potpuno đavolje stepenište prisutno proizvoljno deformisanim modelu. Potpuno đavolje stepenište može se javiti i u obliku fraktala sa svim jednakim Euklidskim dužinama i u obliku fraktala koji preslikava Stern-Brokot konstrukciju. U znatno deformisanim sistemima potrebno je podeliti interval između dva harmonika na dva intervala u koje ne spada prvi subharmonijski stepenik i odvojeno posmatrati potpunost đavoljeg stepeništa.

Primena svih zaključaka na fizičke sisteme slične FK modelu ostaje kao predmet budućih istraživanja.

Prilog A

Program za analizu

U ovom dodatku će se istaći glavne crte programa koji je napravljen za pronađenje i merenje širine subharmonijskih Šapiro stepenika. Program služi za automatsko analiziranje svih Šapiro stepenika koji pripadaju odabranom Farejevom nizu u rezultatima izvršenih simulacija. Program za analizu je napisan u programskom jeziku C++ dok su simulacije vršene u programskom jeziku Fortran.

Svaka simulacija FK modela u prisustvu ravnomerne i naizmenične sile pušta čitav opseg vrednosti ravnomerne sile \bar{F} za jednu vrednost amplitute spoljašnje naizmenične sile F_{ac} pri fiksiranim drugim parametrima sistema. Opseg vrednosti ravnomerne sile \bar{F} , za jednu vrednost amplitute spoljašnje naizmenične sile F_{ac} , bira se tako da početnoj vrednosti \bar{F} odgovara srednja brzina čestica manja ili jednak prvom harmonijskom stepeniku $\frac{1}{1}$ a krajnjoj vrednosti \bar{F} odgovara srednja brzina čestica veća ili jednak drugom harmonijskom stepeniku $\frac{2}{1}$. Pri svakoj simulaciji se opseg iznova bira i pokušava se minimizovati da bi dužina trajanja simulacije bila što manja. U okviru izabranog opsega, jačina ravnomerne sile \bar{F} se povećava sa inkrementom od 10^{-5} .

Simulacija ispituje srednju vrednost brzine čestica sistema za određen broj vrednosti \bar{F} za jednu vrednost amplitute spoljašnje naizmenične sile F_{ac} pri fiksiranim ostalim parametrima sistema. Vremenski korak delovanja F_{ac} pri svakoj od ovih vrednosti je jednak 1 i simulacija ispituje ponašanje sistema u toku 1200 vremenskih koraka na svakoj vrednosti \bar{F} iz izabranog opsega. Brzina čestica se u toku jednog vremenskog koraka računa Runge-Kutta metodom četvrtog stepena i usrednjava po svim česticama sistema. Krajnji rezultat simulacije jeste jedna ".dat" datoteka koja sadrži informacije o srednjoj vrednosti brzine čestica za svaku od sila \bar{F} .

Istraživanje sprovedeno u ovom radu ispituje čitav opseg vrednosti F_{ac} na kojima se javljaju subharmonijski Šapiro stepenici između harmonijskih stepenika $\frac{1}{1}$ i $\frac{2}{1}$ što podrazumeva da je izvršen velik broj navedenih simulacija. Svi rezultati simulacija koje su vršene za iste vrednosti ostalih parametara sistema ($r, \omega...$) smeštaju se u jednu fasciklu koja služi kao unos podataka u program za analizu. Putanja do fascikle sa rezultatima simulacija kao i putanja do fascikle u koju će biti smešteni rezultati se navodi u samom kodu programa pomoću okruženja za stvaranje kodova u programskom jeziku C++.

Pokretanjem programa se od korisnika traži da unese željeni redni broj Farejevog niza koji se ispituje. Mehanizam samog programa pre svega stvara željeni Farejev niz a potom prelazi na analizu rezultata simulacija. Automatsko stvaranje proizvoljnih Farejevih nizova ima veliku prednost u odnosu na ručni unos članova određenog Farejevog niza, ne samo zbog brzine i

pogodnosti korištenja već zato što čini dostupnim ispitivanja Farejevih skupova velikog rednog broja. Iz jednačine (4.29) se može izračunati da Farejev niz rednog broja 18 ima 102 člana dok Farejev niz rednog broja 57 ima 1004 člana. Automatsko stvaranje željenog Farejevog niza omogućava nesmetano ispitivanje ovih, a i većih Farejevih nizova.

Pre početka analize od korisnika se zahteva da unese i željenu preciznost otkrivanja Šapiro stepenika. Računski smisao ove preciznosti jeste u tome da program za svaku vrednost unete srednje brzine čestica traži tri broja r , m i s koji kada se unesu u jednačinu (3.5) proizvode broj koji se razlikuje od unesene srednje brzine čestica za vrednost manju od navedene preciznosti. Ako se pronađe triplet brojeva (i, j, m) za koje je ovo ispunjeno za određenu unetu srednju brzinu tada se ta srednja brzina smatra pripadnikom skupa Šapiro stepenika. Međutim, ako pronađeni triplet brojeva (r, m, s) uz pomoć jednačine (3.5) ne rezultira brojem koji se od prethodne ili sledeće unete srednje brzine razlikuje za manju vrednost od željene preciznosti, tada je širina pronađenog Šapiro stepenika jednaka nuli i takav Šapiro stepenik se može smatrati neizraženim pri zadatim parametrima sistema i vrednosti sile F_{ac} za koju je simulacija vršena.

```

ex C:\DOCUME-1\User\Desktop\SHAPIR-1\FR_0-1.01\FR_001_-1.exe
Enter the order of Farey sequence to be researched <integer>
8
Enter the desired precision <decimal, 0.0001 recommended>
0.0001
1
Fac = 0.01.txt
1
Fac = 0.05.txt
1
Fac = 0.1.txt
1
Fac = 0.12.txt
1
Fac = 0.15.txt
1
Fac = 0.17.txt
1
Fac = 0.25.txt
1
Fac = 0.3.txt
1
Fac = 0.35.txt
1
Fac = 0.4.txt
1
Fac = 0.45.txt
1
Fac = 0.5.txt
1
Fac = 0.55.txt
1
Fac = 0.6.txt
1
Fac = 0.65.txt
1
Fac = 0.7.txt
1
Fac = 0.75.txt
1
Fac = 0.8.txt
1
Fac = 0.85.txt
1
Fac = 0.9.txt
1
Fac = 0.95.txt
1
Fac = 1.0.txt
1
Fac = 1.1.txt
1
Fac = 1.2.txt
1
Fac = 1.3.txt
1
Fac = 1.4.txt
1
Fac = 1.5.txt
1
Fac = 1.6.txt
1
Fac = 1.7.txt
1
Fac = 1.75.txt
1
Fac = 1.8.txt
1
Fac = 1.85.txt
1
Fac = 1.9.txt
1
Fac = 1.95.txt
1
Fac = 2.0.txt
number of files63
Test for files with incorrect scope? y/n
y

1.7good
1.75good
1.8good
1.85good
1.9good
1.95good
2good

Process exited after 26.18 seconds with return value 0
Press any key to continue . . .

```

Slika A.1: Fotografija rada programa za analizu.

Rad programa se može videti na slici A.1. Nakon unesenog rednog broja željenog Farejevog niza i unesene preciznosti, program analizira svaku od datoteka iz fascikle koja služi za unos i ispisuje na ekran upravo obrađenu datoteku. Broj koji se nalazi iznad naziva svake od obrađenih datoteka predstavlja vrednost srednje brzine čestica prve linije datoteke koja se obrađuje. Kao što se može videti na slici A.1 svi ovi brojevi su jednaki 1 što potvrđuje da ospek \bar{F} na kojem je vršena simulacija počinje sa prvim harmonijskim Šapiro stepenikom $\frac{1}{1}$.

Nakon što se sve datoteke iz fascikle za unos ispitaju, ispisuje se ukupan broj datoteki koje su analizirane i korisnik se pita da li želi da proveri ispravan ospek datoteka sa rezultatima simulacija. Odabirom opcije "y" na ekran se ispisuju imena svih ispitanih datoteka sa dodatkom "good" ako ospek sile \bar{F} u toj datoteci podrazumeva i vrednost \bar{F} kojoj odgovara harmonijski stepenik $\frac{2}{1}$. U suprotnom se ispisuje "not good" pored imena datoteke u kojoj nije zabeležen drugi harmonijski Šapiro stepenik i korisnik treba da ukloni tu datoteku i iznova pokrene program za analizu.

Izvršenjem programa za analizu stvara se mnoštvo tekstualnih datoteka: jedna tekstualna datoteka koja sadrži tabelarni prikaz rezultata i koja nalazi u istoj fascikli u kojoj se nalazi i program za analizu, i po dve tekstualne datoteke za svaku vrednost F_{ac} za koju su simulacije vršene koje su sve smeštene u zasebnu fasciklu.

Glavni rezultat programa za analizu jeste tekstualna datoteka čiji je primer pokazan na slici A.2. Ime datoteke se sastoji od naziva "TABLE" pored kojeg je naznačen broj datoteka koje su ispitane, izabrana preciznost i vrednosti deformacionog parametra r koja je zajednička svim ispitanim datotekama.

Tabela sa slike A.2 je zapravo odgovarajuće odštampana matrica čiji broj redova zavisi od dužine izabranog Farejevog skupa a broj kolona od broja datoteka koje predstavljaju rezultate simulacija.

0.0001	0	0.01	0.05	0.1	0.12	0.15	0.18	0.2
9/8	0	3e-005	0	0	1e-005	2e-005	3e-005	2e-005
8/7	0	0	0	0	0	0	0	0
7/6	0	3e-005	0	3e-005	4e-005	6e-005	7e-005	8e-005
6/5	0	1e-005	0	4e-005	6e-005	0.0001	0.00013	0.00014
5/4	0	4e-005	3e-005	9e-005	0.00013	0.00019	0.00025	0.00028
9/7	0	2e-005	0	2e-005	3e-005	5e-005	8e-005	9e-005
4/3	0	2e-005	5e-005	0.00021	0.0003	0.00044	0.00058	0.00064
11/8	0	2e-005	2e-005	2e-005	2e-005	3e-005	6e-005	6e-005
7/5	0	1e-005	1e-005	3e-005	7e-005	0.00015	0.00022	0.00024
10/7	0	2e-005	2e-005	2e-005	2e-005	5e-005	3e-005	4e-005
3/2	0	1e-005	0.00012	0.00011	0.00077	0.00115	0.00153	0.00177
11/7	0	4e-005	3e-005	1e-005	2e-005	4e-005	4e-005	3e-005
8/5	0	1e-005	1e-005	2e-005	5e-005	0.00013	0.00022	0.00025
13/8	0	4e-005	4e-005	0	1e-005	3e-005	5e-005	6e-005
5/3	0	4e-005	3e-005	0.00012	1e-005	0.00039	0.00055	0.00065
12/7	0	1e-005	0	1e-005	2e-005	4e-005	8e-005	0.0001
7/4	0	5e-005	4e-005	4e-005	8e-005	0.00017	0.00024	0.00027
9/5	0	2e-005	1e-005	1e-005	3e-005	7e-005	0.00012	0.00014
11/6	0	3e-005	4e-005	2e-005	3e-005	4e-005	7e-005	7e-005
13/7	0	0	1e-005	0	0	0	0	0
15/8	0	3e-005	2e-005	2e-005	1e-005	2e-005	3e-005	

Slika A.2: Fotografija rezultata analize u obliku tabele.

Prvi red tabele sadrži sve vrednosti sile F_{ac} za koje su simulacije izvršene pri jednoj vrednosti fiksiranih parametara. Ostali redovi sadrže širine odgovarajućih subharmonijskih Šapiro stepenika čija se identifikacija nalazi u prvoj koloni tabele. Prilikom grafičkog prikaza zavisnosti širine subharmonijskih Šapiro stepenika od intenziteta naizmenične sile F_{ac} , sve vrednosti F_{ac} iz prvog reda tabele predstavljaju vrednosti na apscisi dok se na ordinati nalaze sve vrednosti iz reda koji odgovara željenom stepeniku čija se širina posmatra. Olakšan pristup proizvoljnom redu tabele, a time i željenom stepeniku, se prilikom grafičkog prikaza vrši unosom naziva željenog stepenika.

Pored zbirnog zapisa svih nepodnijih informacija za analizu subharmonijskih Šapiro ste-

penika predstavljenih u tabeli sa slike A.2 program za analizu stvara i po jednu tekstualnu datoteku sa imenom "ID" kao i po jednu tekstualnu datoteku sa imenom "Shapiro Spectrum" za svaku vrednost ispitane amplitude F_{ac} . Takve datoteke kojih ima puno (u ovom primeru 126) sadrže dopunske informacije koje mogu služiti za proveru tačnosti tabele, kao i za lakši pregled dobijenih rezultata za jednu vrednost F_{ac} . Sve ovakve datoteke se automatski smeštaju u fasciklu sa nazivom "Results". Primer dve datoteke za jednu vrednost F_{ac} se vidi na slici A.3.

velocity	step velocity	step force	i	j	m	1
1/1	0.100000040518044	0.289999916553497	-5	3	1	1
step width:	0.01486000					
9/8	0.1125039990043115	0.3053499912675761	-1	5	8	1489
step width:	0.00003000					
7/6	0.1166666716559761	0.3057099912584818	-3	5	6	1493
step width:	0.00007000					
6/5	0.1199999970546518	0.3060699912493874	-4	5	5	1501
step width:	0.00013000					
5/4	0.1250000013424369	0.3067199912329670	-5	5	4	1515
step width:	0.00025000					
9/7	0.1285763667088391	0.3073799912162940	-1	5	7	1541
step width:	0.00008000					

frequency	amplitude	phase	i	j	m	1	2
0.100000052863673	0.3048399912804598	yes	-5	3	1	1/1	1485
0.100000052732262	0.30484799912802072	yes	-5	3	1	1/1	1486
0.100000053205337	0.3048599912799546	yes	-5	3	1	1/1	1487
0.100000055482490	0.3048699912797019	yes	-5	3	1	1/1	1488
0.1125039990043115	0.3053499912675761	yes	-1	5	8	9/8	1489
0.1125040181297900	0.3053599912673235	yes	-1	5	8	9/8	1490
0.1125040325739798	0.3053699912670709	yes	-1	5	8	9/8	1491
0.1125043898000560	0.3053799912668183	yes	-1	5	8	9/8	1492
0.1166666716559761	0.3057099912584818	yes	-3	5	6	7/6	1493
0.1166666719479170	0.3057199912582291	yes	-3	5	6	7/6	1494
0.1166666723146034	0.3057299912579765	yes	-3	5	6	7/6	1495
0.11666667219445185	0.3057399912577239	yes	-3	5	6	7/6	1496
0.1166666720147126	0.3057499912574713	yes	-3	5	6	7/6	1497
0.1166666723011915	0.3057599912572186	yes	-3	5	6	7/6	1498
0.1166666718789233	0.3057699912569660	yes	-3	5	6	7/6	1499
0.1166666717299140	0.3057799912567134	yes	-3	5	6	7/6	1500
0.1199999970546518	0.3060699912493874	yes	-4	5	5	6/5	1501
0.1200000027049212	0.3060799912491348	yes	-4	5	5	6/5	1502
0.1200000023749107	0.3060899912488821	yes	-4	5	5	6/5	1503
0.1200000022832415	0.3060999912486295	yes	-4	5	5	6/5	1504
0.1200000021684174	0.3061099912483769	yes	-4	5	5	6/5	1505
0.1200000026556874	0.3061199912481243	yes	-4	5	5	6/5	1506

Slika A.3: Fotografija dva dodatna rezultata analize za silu $F_{ac} = 0.18$.

Datoteka pod imenom "ID" beleži sve primećene Šapiro stepenike kao i njihovu širinu, brzinu i silu početka stepenika, triplet brojeva (i, j, m) koji odgovaraju tom stepeniku i dodatni broj koji služi za navigaciju. Druga datoteka, "Shapiro spectrum" beleži iste informacije kao i prva sa tom razlikom da se u ovoj datoteci ispisuju sve vrednosti brzine (prva kolona) i sile (druga kolona) koje odgovaraju određenom Šapiro stepeniku identifikovanom u sedmoj koloni. Osma kolona sadrži broj za navigaciju koji se koristi tako što se prvo pronađe stepenik koji korisnika posebno interesuje u datoteci "ID" a zatim se pomoću tog broja pronađu i detaljnije informacije o tom stepeniku u datoteci "Shapiro spectrum".

Velika pogodnost ovako konstruisanog programa jeste u tome što omogućava brzu i podešivu analizu velikog broja numeričkih rezultata i pruža detaljan uvid u bogatstvo prisutnih subharmonijskih Šapiro stepenika.

Literatura

- [1] A. Zettl, G. Grüner *Phase coherence in the current-carrying charge-density-wave state: ac-dc coupling experiments in NbSe₃*, Phys. Rev. B **29**, 755 (1984).
- [2] G. Grüner, A. Zettl *Charge density wave conduction: a novel collective transport phenomenon in solids*, Physics Reports **119**, No. 3 (1985)
- [3] G. Grüner, *The dynamics of charge-density waves*, Reviews of Modern Physics **60**, 1129 (1988).
- [4] Stewart Brown, George Gruner *Charge and Spin Density Waves*, Scientific American **270**, No. 4, 50 (1994).
- [5] R. E. Thorne, J. S. Hubacek, W. G. Lyons, J. W. Lyding, J. R. Tucker, *ac-dc interference, complete mode locking, and origin of coherent oscillations in sliding charge-density-wave systems*, Phys. Rev. B **37**, 10055 (1988).
- [6] R. E. Thorne, W. G. Lyons, J. W. Lyding, J. R. Tucker, and J. Bardeen, *Charge-density-wave transport in quasi-one-dimensional conductors. I. Current oscillations*, Phys. Rev. B **35**, 6348 (1987).
- [7] R. E. Thorne, W. G. Lyons, J. W. Lyding, J. R. Tucker, and J. Bardeen, *Charge-density-wave transport in quasi-one-dimensional conductors. II. ac-dc interference phenomena* Phys. Rev. B **35**, 6360 (1987).
- [8] G. Kriza, G. Quirion, O. Traetteberg, W. Kang, D. Jerome *Shapiro interference in a spin-density-wave system*, Phys. Rev. Lett. **66**, 1922 (1991).
- [9] S. P. Benz, M. S. Rzchowski, M. Tinkham, and C. J. Lobb *Fractional giant Shapiro steps and spatially correlated phase motion in 2D Josephson arrays*, Phys. Rev. Lett. **64**, 693 (1990).
- [10] H. Sellier, C. Baraduc, F. Lefloch, and R. Calemczuk *Half-Integer Shapiro Steps at the 0 – π Crossover of a Ferromagnetic Josephson Junction*, Phys. Rev. Lett. **92**, 257005 (2004).
- [11] J. U. Free, S. P. Benz, M.S. Rzchowski, M. Tinkham, C.J. Lobb, M. Octavio *Dynamical simulations of fractional giant Shapiro steps in two-dimensional Josephson arrays*, Phys. Rev. B **41**, 7267 (1990).

- [12] Yu. M. Shukrinov, S. Yu. Medvedeva, A. E. Botha, M. R. Kolahchi, A. Irie *Devil's staircase and continued fractions in Josephson junctions*, Phys. Rev. B **88**, 214515 (2013).
- [13] Yu. M. Shukrinov, A. E. Botha, S. Yu. Medvedeva, M. R. Kolahchi, A. Irie *Structured chaos in a devil's staircase of the Josephson junction* , Chaos **24**, 033115 (2014)
- [14] R. C. Dinsmore III, M. H. Bae, A. Bezryadin *Fractional order Shapiro steps in superconducting nanowires* , Appl. Phys. Lett. **93**, 192505 (2008).
- [15] M. H. Bae, R. C. Dinsmore III, T. Aref, M. Brenner, A. Bezryadin *Current-Phase Relationship, Thermal and Quantum Phase Slips in Superconducting Nanowires Made on a Scaffold Created Using Adhesive Tape*, Nano Lett. **9**, 1889 (2009).
- [16] L. M. Floría , J. J. Mazo *Dissipative dynamics of the Frenkel-Kontorova model* Adv. Phys. **45**, 505 (1996).
- [17] O. Braun and Yu. S. Kivshar *The Frenkel-Kontorova Model*, (Springer, Berlin, 2003).
- [18] Ludwig Prandtl *Ein Gedankenmodell zur kinetischen Theorie der festen Körper*, ZAMM **8** 2, 85-106 (1928)
- [19] Ulrich Dehlinger *Zur theorie der rekristallisation reiner metalle* Annalen der Physik, **394** 7, 749-793 (1929)
- [20] J. Frenkel, T. Kontorova *On the theory of plastic deformation and twinning*, Phys. Z. Sowjetunion **13**, 1-10 (1938)
- [21] Aubry Serge, *The Twist Map, The Extended Frenkel-Kontorova Model and The Devil's Staircase*, Physica D **7** 1-3, 240-258 (1983).
- [22] Titus Sebastiaan van Erp, *Frenkel-Kontorova Model on Quasiperiodic Substrate Potentials*, (Diss. PhD thesis, Katholieke Universiteit Nijmegen, 1999).
- [23] N.A.Dogson, M.S.Floater, M.A.Sabin, *Advances in Multiresolution for Geometric Modeling* , (Springer, 2006).
- [24] Bambi Hu and Jicong Shi , *Nonanalytic twist maps and Frenkel-Kontorova models* Physica D **71** 1, 23-38 (1994)
- [25] S.Aubry and P.Y. Le Daeron, *The discrete Frenkel-Kontorova model and its extensions: I. Exact results for the ground-states* Physica D **8** 3, 381-422 (1983).
- [26] Floría, L. M., C. Baesens, J. Gómez-Gardenes *Dynamics of coupled map lattices and of related spatially extended systems*, (Springer Berlin Heidelberg, 2005) 209-240
- [27] A. Alan Middleton *Asymptotic Uniqueness of the Sliding State for Charge-Density Waves*, Phys. Rev. Lett. **68** 5, 670 (1992).
- [28] Jovan Odavić, Petar Mali, Jasmina Tekić, Milan Pantić, Milica Pavkov Hrvojević *Application of largest Lyapunov exponent analysis on the studies of dynamics under external forces*, arXiv preprint arXiv:1510.07267 (2015)

- [29] Yuri A. Kuznetsov *Elements of Applied Bifurcation Theory*, Second Edition , (Springer,1995).
- [30] Jasmina Tekić, Petar Mali *The ac driven Frenkel-Kontorova Model*, (University of Novi Sad, 2015)
- [31] Oleg M. Braun, Yuri S. Kivshar *Nonlinear dynamics of the Frenkel–Kontorova model*, Physics Reports **306** (1998) 1–108
- [32] Remoissenet M., M. Peyrard *Soliton dynamics in new models with parametrized periodic double-well and asymmetric substrate potentials*, Phys. Rev. **29** 6, 3153 (1984)
- [33] Petar Mali, Jasmina Tekić *Shapiro steps in the commensurate structures with integer value of the winding number*, Journal of Research in Physics **38** 1, 3153 (2014)
- [34] Petar Mali *Doktorska disertacija*, (University of Novi Sad, 2015)
- [35] B.G.Korenev *Bessel Functions and Their Applications*, (CRC Press, 2002)
- [36] Hu Bambi, Jasmina Tekić *Amplitude and frequency dependence of the Shapiro steps in the dc- and ac-driven overdamped Frenkel-Kontorova model*, Phys. Rev. E **75**, 056608 (2007)
- [37] Jasmina Tekić *Amplitude dependence of the Shapiro steps*, International Journal of Modern Physics B **21**, 23n24 (2007)
- [38] Jasmina Tekić, Bambi Hu *Properties of the Shapiro steps in the ac driven Frenkel-Kontorova model with deformable substrate potential*, Phys. Rev. E **81** 3, 036604 (2010)
- [39] F. Falo, L. M. Floria, P. J. Martinez, and J. J. Mazo *Unlocking mechanism in the ac dynamics of the Frenkel-Kontorova model*, Phys. Rev. B **48** 10, 7434 (1993)
- [40] A.Wolf *Analysis of bifurcation and Chaos of tension-slack oscillator by Lyapunov exponent*, Physica D **16**, 285 (1985)
- [41] R. Hilborn *Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers*, 2nd ed., (Oxford University Press, Oxford, UK, 2001).
- [42] Jovan Odavić, Petar Mali, Jasmina Tekić *Farey sequence in the appearance of subharmonic Shapiro steps* , Phys. Rev. E **91** 052904 (2015)
- [43] G.H. Hardy , E.M.Wright , *An Introduction to The Theory of Numbers*, (Oxford, 1960).
- [44] John H. Conway, Richard Guy, *The Book of Numbers*, (Springer, 1996)
- [45] Oleg Karpenov, *Geometry of Continued Fractions*, (Springer, 2013)
- [46] Joseph A. Galian, *Contemporary Abstract Algebra*, (Cengage Learning, 2013)
- [47] Harold M. Stark *An Introduction to Number Theory*, (Cambridge, 1970)
- [48] N. A. Carella *Topics in Primitive Roots*, arXiv preprint arXiv:1405.0161 (2014)

- [49] R.R. Hall, P.Shiu *The Index of Farey Sequence* , (Loughborough University, 2001)
- [50] Allen Hatcher *Topology of Numbers*, Unpublished manuscript, in preparation (2002)
- [51] Brian Hayes, *On the Teeth of Wheels* American Scientist **88** 4, 296-300 (2000)
- [52] Ronald L. Graham, Donald E. Knuth, Oren Patashnik *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, (Addison-Wesley publishing company, 1994)
- [53] Marc Kessenboher, Bernd O. Stratmann *Dichotomy Between Uniform Distributions of the Stern-Brocot Tree and the Farey Sequence*, arXiv:1009.1823v1 (2010)
- [54] George Cantor *Ueber unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten*, Fortsetzung des Artikels in Bd. **XXI** , 1883
- [55] Ferdinand Chovanec *Cantor sets*, Science & Military Journal **5** 1 5, 2010
- [56] Robert W. Vallin *The elements of Cantor sets with applications*, (John Wiley & Sons, 2013)
- [57] Michel L. Lapidus, Machiel Van Frankenhuyzen *Fractal Geometry and Number Theory: Complex dimensions of fractal strings and zeros of zeta functions*, (Boston: Birkhäuser, 2000)
- [58] Losada M. Piacquadio *A formula for the fractal dimension $d = 0.87$ of the Cantorian set underlying the Devil's staircase associated with the Circle Map*, arXiv preprint arXiv:0711.2706 (2007)
- [59] Losada M. Piacquadio *The geometry of Farey staircases*, International Journal of Bifurcation and Chaos **14** 12 4075-4096 (2004)
- [60] Losada M. Piacquadio, Eda Cesaratto *Multifractal spectrum and thermodynamical formalism of the Farey tree*, International Journal of Bifurcation and Chaos **11** 05, 1331-1358 (2001)
- [61] Grynberg Sebastian, Losada M. Piacquadio *Self-similarity of Farey staircases*, arXiv preprint math-ph/0306024 (2003)
- [62] M. Høgh Jensen, Per Bak, Tomas Bohr *Complete devil's staircase, fractal dimension, and universality of mode-locking structure in the circle map*, Phys. Rev. Lett. **50** 21, 1637 (1983)
- [63] Carl Bovill *Fractal geometry in architecture and design*, (Springer Science & Business Media, 1996)
- [64] Kenneth Falconer *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, (John Wiley & Sons, 2004)

Biografija



Igor Sokolović je rođen 01.10.1989. Osnovnu i srednju tehničku školu, smer elektrotehničar računara, završava u Somboru i upisuje Prirodno-Matematički fakultet u Novom Sadu 2008. godine, modul astronomija sa astrofizikom. Osnovne studije završava 2013. godine i iste godine upisuje master studije modul teorijska fizika kondenzovane materije. Poslednji ispit polaže oktobra 2015. godine i pristupa izradi ovog master rada.

LITERATURA

Univerzitet u Novom Sadu
Prirodno-matematički fakultet

Ključna dokumentacijska informacija:

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije:

TD

Tip zapisa:

TZ

Vrsta rada:

VR

Autor:

AU

Mentor:

MN

Naslov rada:

NR

Jezik publikacije:

JP

Jezik izvoda:

JI

Zemlja publikovanja:

ZP

Uže geografsko područje:

UGP

Godina:

GO

Izdavač:

IZ

Mesto i adresa:

MA

Fizički opis rada:

FO

Naučna oblast:

NO

Naučna disciplina:

ND

Ključne reči:

Monografska dokumentacija

Tekstualni štampani materijal

Master rad

Igor Sokolović

doc. dr Slobodan Radošević

Disipativna dinamika samerljivog
Frenkel-Kontorova modela
pod dejstvom spoljašnjih sila
srpski (latinica)

srpski

Srbija

Vojvodina

2016

Autorski reprint

Prirodno-matematički fakultet,
Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad
(poglavlja/strana/citata/tabela/grafika/priloga)
(7/74/64/0/41/1)

Fizika

Teorijska fizika
kondenzovane materije

Nelinearna dinamika, Farejevi nizovi,
Kantorova funkcija, ravnomerna i naizmenična sila,

LITERATURA

KR

Čuva se:

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

Šapiro stepenik, rezonanca
Biblioteka departmana za fiziku,
PMF-a u Novom Sadu
nema

Pored već dobro utvrđenih činjenica vezanih za Frenkel-Kontorova model, Farejeve nizove i Kantorovu funkciju, u ovom radu su prikazani rezultati dosadašnjih istraživanja i istraživanja sprovedenih u toku izrade ovog rada na temu odziva samerljivog Frenkel-Kontorova modela na dejstvo kombinacije delovanja jednolične i naizmenične sile. Ispitivan je generalizovan samerljiv Frenkel-Kontorova model sa asimetričnim deformacionim substratnim potencijalom pri tri različite vrednosti deformacionog parametra. Posebna pažnja je posvećena načinu pojave i relativnim veličinama subharmonijskih Šapiro stepenika između prvog i drugog harmonijskog Šapiro stepenika, kao i ispitivanju potpunosti đavoljeg stepeništa između prvog i drugog harmonijskog Šapiro stepenika. Prikazane su zavisnosti širine odabranih subharmonijskih Šapiro stepenika, njihov broj i njihova lokacija u zavisnosti od promene parametara amplitude naizmenične sile, deformacionog parametra i amplitude ravnomerne sile. Takođe je pokazano da odzivna funkcija srednje brzine čestica pri određenim vrednostima parametra sistema može obrazovati potpuno đavolje stepenište.

IZ

Datum prihvatanja teme od NN veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik komisije:

dr Milica Pavkov-Hrvojević

Član:

dr Miodrag Krmar

Član:

dr Slobodan Radošević, mentor

LITERATURA

University of Novi Sad
Faculty of Science

Key Words Documentation:

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Documentation type:

Monograph publication

DT

Type of record:

Textual printed material

TR

Content code:

Master Thesis

CC

Author:

Igor Sokolović

AU

Mentor:

doc. dr Slobodan Radošević

MN

Title:

Dissipative dynamics of
Frenkel-Kontorova model
under external forces

TI

Language of text:

Serbian (latin)

LT

Language of abstract:

English

JI

Country of publication:

Serbia

CP

Locality of publication:

Vojvodina

LP

Publication year:

2016

PY

Publisher:

Author's reprint

PU

Publication place:

Prirodno-matematički fakultet,
Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

PP

Physical description:

(chapter/page/citation/table/figure/appendix)
(7/74/64/0/41/1)

PD

Scientific field:

Physics

SF

Scientific discipline:

Theoretical Physics
of condensed matter

SD

Subject/Key words:

Nonlinear dynamics, Farey sequence,
Cantor function, dc+ac force,

LITERATURA

SKW

Holding data

Shapiro step, resonance

Library of Department of Physics,
Trg Dositeja Obradovića 4

HD

Note:

none

N

Abstract:

Besides presenting some of the well established facts on Frenkel-Kontorova model, Farey sequences and Cantor function, this Master thesis presents the results of some previously published research papers and the research conducted in the making of this thesis on the subject of Frenkel-Kontorova model under the influence of the combination of dc and ac forces. We have examined the behavior of generalized Frenkel-Kontorova model with asymmetric deformable substrate potential for three values of deformation parameter. The main goal of research presented in this paper is the appearance and relative sizes of subharmonic Shapiro steps which are present between the first and second harmonic Shapiro step, as well as the appearance of complete Devil's staircase in this range. This thesis presents the dependence of subharmonic Shapiro steps' widths, their number and their location on the value of deformation parameter, amplitude of the oscillatory force and the amplitude of the uniform force. It is shown that the function of averaged particles' velocities can form a complete Devil's staircase under certain system parameters.

AB

Accepted by the Scientific Board:

ASB

Defended on:

DE

Thesis defend board:

DB

President:

dr Milica Pavkov-Hrvojević

Member:

dr Miodrag Krmar

Member:

dr Slobodan Radošević, mentor