

U N I V E R Z I T E T U N O V O M S A D U

P R I R O D N O - M A T E M A T I C K I F A K U L T E T

UTICAJ LASERSKOG ZRACENJA NA SUPERPROVODNOST

-doktorska disertacija-

Gradimir Vujičić

V I N Č A

1976.

G. Vujičić

Ovim putem želim da izrazim zahvalnost Profesoru Dr. Bratislavu Tošiću, rukovodiocu ovog rada, na sugestiji teme i velikoj pomoći pri radu.

Takodje želim da se zahvalim Dr. D. Loviću, Dr. R. Žakuli i Dr. V. Veljkoviću na korisnim diskusijama.

S A D R Ž A J	
UVOD	1
1. GLAVA - TEORIJA SUPERPROVODNOSTI	4
1.1. BCS teorija	4
1.2. Elektromagnetska svojstva superprovodnika	23
2. GLAVA - UTICAJ LASERSKE SVETLOSTI NA SUPERPROVODNOST	32
2.1. Uticaj svetlosti na elektronska stanja	32
2.2. Energijski gep na apsolutnoj nuli	56
2.3. Energijski gep na konačnim temperaturama	62
ZAKLJUČAK	71
LITERATURA	73

## U V O D

Superprovodnost je otkrio 1911 god. Kamerlingh Onnes [1], konstatujući da električni otpor nekih metala pada do nemerljivo male vrednosti na temperaturi tečnog helijuma. Takodje je bilo iznenadjujuće i otkriće Meissnera i Ochsenfelda [2] da se, pod idealnim uslovima, superprovodnik ponaša kao idealni dijamagnetik, tj. magnetno polje isčezava u unutrašnjosti superprovodnika. Objašnjenje neobičnog ponašanja superprovodnika u spoljnjem električnom i magnetnom polju, kao i ostalih osobina superprovodnika, bilo je godinama predmet istraživanja teorijske fizike. Tek 1957 god. Bardeen, Cooper i Schrieffer [3] su dali mikroskopsku teoriju, poznatu kao BCS teorija, koja objašnjava suštinski sve glavne manifestacije superprovodnosti. U BCS teoriji dato je objašnjenje, pored ostalog, i svojstava superprovodnika u konstantnom magnetnom polju. Međutim, veliki fizički interes predstavlja i ponašanje superprovodnika u promenljivom elektromagnetskom polju. Pogodno je tada izučavati uticaj laserskog zračenja (monohromatski i koherentni snop) na superprovodnost.

Prvi relevantni eksperiment o laserskom uticaju na superprovodnost obavio je Testardi [4] na tankom filmu Pb, debljine poredljive sa optičkom dubinom prodiranja i manje od superprovodne dužine koherentnosti. Konstatovano je da laserska svetlost smanjuje superprovodnu kritičnu tačku, sa objašnjenjem da fotoni rasparuju Cooperove parove i zatim eksituju elektrone. Kada broj eksitovanih elektrona predje neku kritičnu vrednost, dolazi do razaranja superprovodnosti.

Owen i Scalapino [5] su dali prost model, pretpostavivši da su rešetka i elektronski gas u termalnoj ravnoteži. Ova pretpostavka je sugerisana time da je vreme rekombinacije eksitovanih elektrona znatno veće od vremena termalizacije eksitovanih elektrona sa rešetkom. Usled dejstva svetlosti menjaju se hemijski potencijal eksitovanih elektrona i fenomenološki je uveden dodatni hemijski potencijal. Skoro svi rezultati ovog modela su potvrđeni eksperimentalno [6], izuzev zaključka o faznom prelazu prve vrste koji nije opažen u eksperimentima [7] i [8].

Detaljniji teorijski pristup dat je u radovima [9] i [10], gde je uticaj laserske svetlosti na superprovodnost izučavan na bazi Eliašbergove kinetičke jednačine [11]. Jelesin [9] je dobio da energijski gip (procep) kontinualno teži nuli sa povećanjem intenziteta laserske svetlosti, tj. da nema predvidjenog [5] faznog prelaza prve vrste. U ref. [10] dobi-jen je eksplicitni izraz za dodatni hemijski potencijal. Međutim, ovde kao i u radovima [9] i [11] ulaze kinetički koeficijenti kao fenomenološki parametri. Takodje, treba pomenuti da nije izučavana detaljna zavisnost energijskog gipa od intenziteta svetlosti i od temperature. U svim pomenutim radovima [4] do [11], a takodje i u našoj analizi [12] i [13], razmatraju se superprovodni tanki filmovi debljine uglavnom ne veće od optičke dubine prodiranja.

Osnovna ideja radova [12] i [13], odnosno teze, je razvijanje mikroskopskog pristupa za proučavanje uticaja laserskog zračenja na superprovodnost. Prepostavljen je,

shodno ref. [5], da je sistem u termalnoj ravnoteži, tj. da je termalizaciono vreme znatno manje od vremena rekombinacije. Dobijen je dodatni hemijski potencijal elektrona tako što je na hamiltonijan sistema (elektron u elektromagnetskom polju) primenjena unitarna transformacija analogna Fröhlichovoj [14] u slučaju elektron-fonon interakcije. Glavna razlika izmedju ove dve interakcije je u veličini interakcione konstante, koja je u slučaju fotona znatno veća nego kod elektron-fonon interakcije. S obzirom na veličinu elektron-foton interakcije (u glavnom se razmatra oblast vidljive svetlosti), korekcija na jednočestičnu energiju elektrona sada se ne može zanemariti kao što je to uradjeno u ref. [14]. Dobijeni dodatni hemijski potencijal elektrona je izražen preko karakteristika elektromagnetskog polja i superprovodnika, dakle nije uveden kao fomenološki parametar kao u modelu Owena i Scalapina. Ispitivanjem energijskog gepa u funkciji intenziteta svetlosti, dobijeno je da energijski gep kontinualno teži nuli što je u saopštinitvama sa eksperimentima [7] i [8]. Takodje je detaljno ispitivana zavisnost energijskog gepa od intenziteta svetlosti i temperature, i dobijeno je zadovoljavajuće slaganje sa pomenutim rezultatima eksperimentalnih i teorijskih radova. Međutim treba istaći da u našem pristupu nije obuhvaćen proces rekombinacije, taj problem je diskutovan na kraju druge glave teze.

## 1. G L A V A

### TEORIJA SUPERPROVODNOSTI

#### 1.1. B C S TEORIJA

Pre nego što predjemo na izlaganje uticaja laserskog zračenja na superprovodnost, daćemo kratki pregled nekih aspekata BCS teorije relevantnih za rad na pomenutom problemu.

Ideju da je elektron-fonon interakcija primarno odgovorna za superprovodnost prvi je dao Fröhlich [15]. Veliki podstrek za dalji razvoj ove ideje bilo je eksperimentalno otkriće izotopskog efekta [16] i [17]. Elektron-fonon interakcija dovodi do rasejanja elektrona iz Blochovog stanja definisanog talasnim vektorom  $\vec{k}$  u stanje karakterisano sa  $\vec{k}' = \vec{k} + \vec{q}$ , apsorpcijom ili emisijom fonona talasnog vektora  $\vec{q}$ . Doprinos elektron-fonon interakcije energiji elektrona može biti ocenjen korišćenjem kanonske transformacije, koja eliminiše iz hamiltonijana linearne članove elektron-fonon interakcije. U drugom redu postoji član koji daje privlačnu interakciju medju elektronima, koja može da dovede do superprovodnog stanja. Transformaciju takvog tipa dao je Fröhlich [14].

Hamiltonijan sistema provodnih elektrona koji interaguju sa fononima je oblika

$$H = H_e + H_{\text{fon}} + H_{\text{int}} \quad (1.1)$$

gde je

$$H_e = \sum_{\vec{k}, \epsilon} E_{\vec{k}} a_{\vec{k}\epsilon}^+ a_{\vec{k}\epsilon} \quad (1.2)$$

hamiltonijan sistema elektrona,  $E_K$  energija elektrona u zoni provodnosti računata od Fermijevog nivoa,  $a_{Kb}^+$  i  $a_{Kb}$  fermi operatori,  $\vec{k}$  talasni vektor elektrona, i  $b$  spin elektrona. Za talasne funkcije elektrona u zoni provodnosti uzimaju se Blochove funkcije (koje mogu biti i ravni talasi).

$$H_{\text{fon}} = \sum_{\vec{q}} \hbar \omega_{\vec{q}} b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}} \quad (1.3)$$

$H_{\text{fon}}$  je hamiltonijan sistema fonona,  $\vec{q}$  talasni vektor fonona,  $\omega_{\vec{q}}$  frekvencija vibracija rešetke,  $b_{\vec{q}}^+$  i  $b_{\vec{q}}$  boze operatori.

Treći član u hamiltonijanu (1.1)  $H_{\text{int}}$  je hamiltonijan interakcije elektrona i fonona oblika

$$H_{\text{int}} = \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \left\{ i D_{\vec{q}} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}} b_{\vec{q}} + \text{H.C.} \right\} \quad (1.4)$$

gde je  $D_{\vec{q}}$  matrični element elektron-fonon interakcije

$$D_{\vec{q}} = q W_{\vec{q}} \sqrt{\frac{\hbar}{2NM\omega_{\vec{q}}}} \quad (1.5)$$

$N$  je broj atoma u kristalu,  $M$  masa atoma,  $W_{\vec{q}}$  Fourier transform elektron-jon interakcije. Kako operator elektron-fonon interakcije (1.4) ne zavisi od spina elektrona, nismo pisali spin-ski indeks (koji ćemo ispustiti i u izrazu za  $H_e$  (1.2)). Takođe treba napomenuti da radimo samo sa akustičnim fononima pošto u  $H_{\text{int}}$  imaju udela samo longitudinalni zvučni talasi, tj.  $\omega_{\vec{q}} = sq$  gde je  $s$  brzina longitudinalnih fonona. Hamiltonijan

$H_{\text{fon}}$  je napisan samo za longitudinalne talase te ćemo i dalje

uzimati samo ovu granu fononskog spektra.

Fröhlich [14] je primenio na hamiltonijan (1.1) kanonsku transformaciju koja treba da isključi interakcioni član što je moguće više

$$H_{eqv} = e^{-iS} H e^{iS} = H + i[H, S] - \frac{1}{2} [[H, S], S] + \dots \quad (1.6)$$

$S$  je operator oblika interakcije

$$S = S^+ \equiv \sum_{\vec{q}} S_{\vec{q}} = \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \left\{ \phi(\vec{k}, \vec{q}) a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}} b_{\vec{q}} + \text{H.C.} \right\} \quad (1.7)$$

Funkcija  $\phi(\vec{k}, \vec{q})$  je povezana sa interakcijom i biće odredjena nešto kasnije.

Ako u razvoju (1.6) grupišemo članove istog reda veličine, tj. po interakciji, dobijamo

$$H_{eqv} = H_0 + \sum_{\vec{q}} \left\{ i[H_0, S_{\vec{q}}] + H_{\vec{q}} \right\} + i \sum_{\vec{q}} \left\{ (\frac{i}{2}[H_0, S_{\vec{q}}] + H_{\vec{q}}), \sum_{\vec{q}'} S_{\vec{q}'} \right\} + \dots \quad (1.8)$$

$$\text{gde je } H_0 \equiv H_e + H_{\text{fon}} \text{ i } H_{\text{int}} \equiv \sum_{\vec{q}} H_{\vec{q}}.$$

Koristeći činjenicu da fermi operatori komutiraju sa boze operatorima i koristeći sledeće komutatorske jednakosti:

$$\begin{aligned} [a_k^+ a_l, a_m^+ a_n] &= \delta_{lm} a_k^+ a_n - \delta_{kn} a_m^+ a_l \quad i \\ [b_{\vec{q}}^+ b_{\vec{q}}, b_{\vec{q}'}^+] &= - b_{\vec{q}} \delta_{\vec{q}'}, \vec{q} \end{aligned} \quad (1.9)$$

dobijamo za član linearan po interakciji u izrazu (1.8)

$$i[H_0, S_{\vec{q}}] + H_{\vec{q}} = i \left\{ \sum_{\vec{k}} (E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}-\vec{q}} - \hbar\omega_{\vec{q}}) \phi(\vec{k}, \vec{q}) + D_{\vec{q}} \right\} a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}} b_{\vec{q}} + \text{H.C.}$$

Izaberimo funkciju  $\phi(\vec{k}, \vec{q})$  tako da svi članovi u gornjem izrazu postaju nula, tj.

$$\phi(\vec{k}, \vec{q}) = \frac{D_{\vec{q}}}{E_{\vec{k}-\vec{q}} - E_{\vec{k}} + \hbar\omega_{\vec{q}}} \quad (1.10)$$

Od vrednosti  $\phi(\vec{k}, \vec{q})$  zavisi valjanost konvergencije reda (1.8). Sada treba da izračunamo kvadratni član po interakciji u razvoju (1.8) koristeći jedn. (1.10). Posle nešto dužeg računa i usrednjavanja po vakuumskom stanju fonona dobijamo za poslednji napisani član u izrazu (1.8) (označićemo ga sa  $H_2$ )

$$\langle 0_f | H_2 | 0_f \rangle = -\frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}, \vec{q}, \vec{k}'} \frac{|D_{\vec{q}}|^2}{E_{\vec{k}-\vec{q}} - E_{\vec{k}'} + \hbar\omega_{\vec{q}}} (a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}'-\vec{q}}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}} a_{\vec{k}'} + \text{H.C.}) \quad (1.11)$$

$|0_f\rangle$  je vakuumsko stanje fonona. Izraz (1.11) predstavlja interakciju medju elektronima koja je nastala virtualnom izmenom fonona. Ova interakcija je privlačna kada je  $|E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}-\vec{q}}| < \hbar\omega_{\vec{q}}$ . Mi nećemo dalje slediti Fröhlichove radove [14] i [15], jer nije u potpunosti objašnjeno nastajanje superprovodnog stanja.

Cooper [18] je razmatrao problem elektronskog gasa kada izmedju dva elektrona (koji su oko Fermijeve površi) postoji privlačna interakcija, koja bi mogla biti uslovljena npr. Fröhlichovom privlačnom interakcijom. (1.11). Pokazano je da osnovno stanje sistema ima energijski gap, tj. dobija se vezano

stanje elektrona ma koliko konačno mala bila privlačna interakcija medju elektronima. Osnovno stanje je najniže kada po dva elektrona imaju nulti totalni moment (Cooperovi parovi). Tako se dobija stanje koje je kvalitativno novo u odnosu na početno stanje. Ovim je Cooper dalje razvio ideju da će metal imati superprovodna svojstva ako elektronski energijski spektar ima energijski gap (Bardeen [19]).

Shodno Cooperovim zaključcima, Bardeen, Cooper i Schrieffer [3] su mesto interakcije (1.11) razmatrali redukovani interakciju koja ima matrične elemente samo za elektrone sa suprotnim impulsom. Takodje, redukovana interakcija se posmatra samo za elektrone sa suprotnim spinom, tj. medju elektronima sa suprotnim totalnim momentom  $\vec{k}_6 \rightarrow -\vec{k}-6$ . Ostali deo interakcije može da se tretira perturbaciono i pokazano je [3] da je doprinos tih članova osnovnom stanju mali. Konačno, za sistem elektrona imamo redukovani BCS hamiltonijan (pišemo i spinske indekse)

$$H_{red} = \sum_{\vec{k}, 6} E_{\vec{k}} a_{\vec{k}6}^+ a_{\vec{k}6} - \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}, \vec{k}', 6} V_{\vec{k}, \vec{k}'} a_{\vec{k}6}^+ a_{-\vec{k}-6}^+ a_{-\vec{k}'-6} a_{\vec{k}'6} \quad (1.12)$$

gde je

$$V_{\vec{k}, \vec{k}'} = \frac{2N |D_{\vec{k}+\vec{k}'}|^2}{E_{-\vec{k}} - E_{\vec{k}'} + \hbar \omega_{\vec{k}+\vec{k}'}} \quad (1.13)$$

Pošto matrični elementi u hamiltonijanu (1.12) ne zavise od spinskog indeksa, napisaćemo

$$H_{red} = 2 \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} a_{\vec{k}1/2}^+ a_{\vec{k}1/2} - \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} V_{\vec{k}, \vec{k}'} a_{\vec{k}1/2}^+ a_{-\vec{k}-1/2}^+ a_{-\vec{k}'-1/2} a_{\vec{k}'1/2} \quad (1.14)$$

Pored privlačne interakcije medju elektronima  $V_{\vec{k}, \vec{k}'}$  (1.13), trebalo bi uključiti i odbojnu ekrанизovanu Coulombovu interakciju. Rešavanje sopstvenog problema  $H_{red}$  (1.14) sa ekrанизovanom Coulombovom interakcijom dao je Bogoliubov [20] i [21]. Problem uzimanja u obzir i ekrанизovane Coulombove interakcije nećemo dalje razmatrati.

Na osnovu rezultata Fröhlicha [14] i razmatranja Coopera [18] može se zaključiti da je obična teorija perturbacija neprimenljiva za rešavanje  $H_{red}$ , iako je elektron-fonon interakcija mala u odnosu na elektronske energije oko Fermijevih površi. O originalnom BCS metodu [3] rešavanja osnovnog i eksitovanih stanja hamiltonijana (1.14) kazaćemo samo par reči. Uzeta je talasna funkcija osnovnog stanja elektrona oblika

$$\Psi = \prod_{\vec{k}} \left[ (1 - h_{\vec{k}})^{1/2} + h_{\vec{k}} a_{\vec{k} 1/2}^+ a_{-\vec{k} - 1/2}^+ \right] |0\rangle \quad (1.15)$$

gde su  $h_{\vec{k}}$  realni koeficijenti koje treba odrediti, a  $|0\rangle$  je vakuum. Variacionim metodom traži se minimum energije osnovnog stanja  $\langle \Psi | H_{red} | \Psi \rangle$  (uz uslov  $\langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle = N$ , gde je  $\hat{N}$  operator broja čestica), te se tako odrede koeficijenti  $h_{\vec{k}}$  u talasnoj funkciji  $\Psi$  jedn. (1.15), zatim energija osnovnog stanja itd. Pošto talasna funkcija  $\Psi$  opisuje sistem sa različi-brojem čestica, potrebno je koristiti uslov  $\langle \Psi | \hat{N} | \Psi \rangle = N$  tj. broj elektrona je fiksiran. Ovaj problem se rešava, kao što je poznato iz statističke fizike, uvodjenjem hemijskog potencijala  $\mu$ . Tada je energija elektrona  $E_{\vec{k}}$  računata od  $\mu$ , a ne od Fermijevog nivoa. Za sistem slobodnih elektrona  $\mu$  je jednako Fermijevoj energiji  $e_f$ .

Sada ćemo ukratko izložiti Bogoljubovljev metod di-jagonalizacije hamiltonijana oblika (1.14), pogledati ref.: [22], [23], [24] i [25]. Izvrsni pregledi BCS teorije i Bogolju-bovljevog metoda mogu se naći u knjigama: [26], [27], [28], [29], [30] i [31]. Kanonska transformacija fermi operatora prema Bo-goljubovu je

$$\begin{aligned} a_{\vec{k}1/2} &= u_{\vec{k}} A_{\vec{k}0} + v_{\vec{k}} A_{\vec{k}1}^+ \\ a_{-\vec{k}-1/2} &= u_{\vec{k}} A_{\vec{k}1} - v_{\vec{k}} A_{\vec{k}0}^+ \end{aligned} \quad (1.16)$$

gde su  $u_{\vec{k}}$  i  $v_{\vec{k}}$  realni koeficijenti i simetrični u odnosu na transformaciju  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ , vezani relacijom

$$u_{\vec{k}}^2 + v_{\vec{k}}^2 = 1 \quad (1.17)$$

Lako se može proveriti da transformacija (1.16), uz uslov (1.17), održava sva komutaciona svojstva fermi operatorai da je, prema tome, kanonska. Dakle, operatori  $A_{\vec{k}0}$  i  $A_{\vec{k}1}$  su fermi operatori i obrnuta transformacija transformacije (1.16) glasi

$$A_{\vec{k}0} = u_{\vec{k}} a_{\vec{k}1/2} - v_{\vec{k}} a_{-\vec{k}-1/2}^+ \quad (1.18)$$

$$A_{\vec{k}1} = u_{\vec{k}} a_{-\vec{k}-1/2} + v_{\vec{k}} a_{\vec{k}1/2}^+$$

Primetimo da transformacija (1.18) predstavlja u-opštenje transformacije pomoću koje se uvode operatori kreaci-je i anihilacije šupljina unutar Fermijeve površi i elektrona van te površi, tj. ako stavimo

$$u_{\vec{k}} = 1, v_{\vec{k}} = 0 \quad \text{za} \quad E_{\vec{k}} > e_f$$

$$u_{\vec{k}} = 0, v_{\vec{k}} = 1 \quad \text{za} \quad E_{\vec{k}} < e_f$$

dobijamo

$$A_{\vec{k}0} = a_{\vec{k}1/2}, A_{\vec{k}1} = a_{-\vec{k}-1/2} \quad \text{za} \quad E_{\vec{k}} > e_f$$

$$A_{\vec{k}0} = -a_{-\vec{k}-1/2}^+, A_{\vec{k}1} = a_{\vec{k}1/2}^+ \quad \text{za} \quad E_{\vec{k}} < e_f$$

Npr.  $A_{\vec{k}0}$  van Fermijeve površi je operator anihilacije elektro-  
na sa impulsom  $\vec{k}$  i spinom  $1/2$ , a unutar Fermijeve površi je ope-  
rator anihilacije šupljine sa impulsom  $-\vec{k}$  i spinom  $-1/2$ . U  
opštem slučaju kada su  $(u_{\vec{k}}, v_{\vec{k}}) \neq (0, 1)$  imamo superpoziciju šu-  
pljina i elektrona.

Posle primene transformacije (1.16) hamiltonijan  
(1.14) dobija oblik

$$H_{\text{red}} = E_0 + H_0 + H_1 + H_2 \quad (1.19)$$

gde su:

$$E_0 = 2 \sum_{\vec{k}} E_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^2 - \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} v_{\vec{k}, \vec{k}'} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} \quad (1.20)$$

$E_0$  energija osnovnog stanja,

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} \left\{ E_{\vec{k}} (u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2) + \frac{2u_{\vec{k}} v_{\vec{k}}}{N} \sum_{\vec{k}'} v_{\vec{k}, \vec{k}'} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'} \right\} (A_{\vec{k}0}^+ A_{\vec{k}0} + A_{\vec{k}1}^+ A_{\vec{k}1}) \quad (1.21)$$

dijagonalni deo transformisanog hamiltonijana,

$$H_1 = \sum_{\vec{k}} \left\{ 2E_{\vec{k}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} - \frac{1}{N} (u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2) \sum_{\vec{k}'} v_{\vec{k}, \vec{k}'} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'} \right\} (A_{\vec{k}0}^+ A_{\vec{k}1}^+ + A_{\vec{k}1} A_{\vec{k}0}) \quad (1.22)$$

nedijagonalni deo hamiltonijana koji sadrži proizvode po dva

kreaciona i anihilaciona fermi operatora. Operator  $H_2$  sadrži proizvode četiri novi fermi operatora  $A_{\vec{k}0}$  i  $A_{\vec{k}1}$ , tj. interakciju medju kvazičesticama. Kada je sistem malo eksitovan,  $H_2$  se može zanemariti jer je znatno manji od ostalih članova; inače se može tretirati kao perturbacija.

Bogoliubov je došao do zaključka [22], [24] da je neophodna uzajamna kompenzacija dijagrama koji vode ka virtualnom kreiranju iz vakuma para čestica sa suprotnim impulsima i spinovima, u protivnom ti članovi bi mogli biti i beskonačni. To je poznati Bogoliubovljev princip kompenzacije opasnih dijagrama, koji se svodi na uslov da svi članovi u  $H_1$  (1.21) budu jednaki nuli za svako  $\vec{k}$  tj.

$$2E_{\vec{k}} u_{\vec{k}} v_{\vec{k}} = \frac{1}{N} (u_{\vec{k}}^2 - v_{\vec{k}}^2) \sum_{\vec{k}'} v_{\vec{k}, \vec{k}'} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'} \quad (1.23)$$

Može se videti da je uslov (1.23) istovremeno i uslov minimuma energije osnovnog stanja  $E_0$  jedn. (1.20). Osnovna stanja Bogoliubovljevog metoda i BCS teorije su identična.

Uvedimo oznaku

$$\Delta_{\vec{k}} = \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}'} u_{\vec{k}'} v_{\vec{k}'} v_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (1.24)$$

$\Delta_{\vec{k}}$  ćemo zvati potencijal sparivanja. Sada možemo izraziti koeficijente  $u_{\vec{k}}$  i  $v_{\vec{k}}$  preko  $E_{\vec{k}}$  i  $\Delta_{\vec{k}}$  koristeći jedn. (1.17) i (1.23)

$$u_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 + \frac{E_{\vec{k}}}{\sqrt{\Delta_{\vec{k}}^2 + E_{\vec{k}}^2}} \right], \quad v_{\vec{k}}^2 = \frac{1}{2} \left[ 1 - \frac{E_{\vec{k}}}{\sqrt{\Delta_{\vec{k}}^2 + E_{\vec{k}}^2}} \right] \quad (1.25)$$

Ako dobijene izraze zamenimo u jedn. (1.24), dobijamo jednaciju koja određuje  $\Delta_{\vec{k}}$

$$\Delta_{\vec{k}} = \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}'} \frac{v_{\vec{k}, \vec{k}'} \Delta_{\vec{k}'}}{\sqrt{\Delta_{\vec{k}'}^2 + E_{\vec{k}'}^2}} \quad (1.26)$$

Jednačina (1.26) je nelinearna i može se rešavati iteracionim postupkom, slično kao Hartree-Fok samousaglašenim metodom. Ako izraze za  $\Delta_{\vec{k}}$  jedn. (1.24) i  $u_{\vec{k}}$  i  $v_{\vec{k}}$  jedn. (1.25) zamenimo u (1.21), tada  $H_0$  (dijagonalni deo hamiltonijana) postaje

$$H_0 = \sum_{\vec{k}} \sqrt{E_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2} (A_{\vec{k}0}^+ A_{\vec{k}0} + A_{\vec{k}1}^+ A_{\vec{k}1}) \quad (1.27)$$

Tako smo dobili spektar elementarnih eksitacija određen većinom

$$E_{\vec{k}}^e = \sqrt{E_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2}, \quad (1.28)$$

dok je energija osnovnog stanja  $E_0$

$$E_0 = \sum_{\vec{k}} \frac{E_{\vec{k}} \left[ \sqrt{E_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2} - E_{\vec{k}} \right] - \frac{1}{2} \Delta_{\vec{k}}^2}{\sqrt{E_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2}} \quad (1.29)$$

Kada je  $\Delta \neq 0$  tada je  $E_0 < 0$ , tj. imamo stanje koje je energijski niže od normalnog stanja metala.

Funkcija osnovnog stanja je definisana uslovima

$$A_{\vec{k}0} \Psi_0 = A_{\vec{k}1} \Psi_0 = 0 \quad \text{za svako } \vec{k} \quad (1.30)$$

tj.  $\Psi_0$  je vakuum za kvazičestice i oblika je

$$\Psi_0 = \prod_{\vec{k}} (u_{\vec{k}} + v_{\vec{k}} a_{\vec{k}1/2}^+ a_{-\vec{k}-1/2}^+) |0\rangle \quad (1.31)$$

dakle istog oblika kao BCS talasna funkcija jedn. (1.15). Jednočestična eksitaciona stanja se dobijaju primenom kreacionih kvazičestičnih operatora  $A_{k_0}^{\pm}$ ,  $A_{k_1}^{\pm}$  na  $\Psi_0$ .

Pomenućemo kako se uporedno sa rešavanjem jedn. (1.26) izračunava hemijski potencijal. Hemijski potencijal osnovnog stanja određuje se iz uslova

$$\langle \Psi_0 | \hat{N} | \Psi_0 \rangle = N \quad (1.32)$$

gde je  $N$  broj elektrona u sistemu,  $\Psi_0$  funkcija osnovnog stanja (1.31). Operator broja čestica  $\hat{N} = 2 \sum_{\vec{k}} a_{\vec{k}1/2}^+ a_{\vec{k}1/2}^-$  treba izra-

ziti preko novih operatora  $A_{k_0}$  i  $A_{k_1}$ , transformacija (1.16), i posle sredjivanja se dobija

$$N = 2 \sum_{\vec{k}} v_{\vec{k}}^2 = \sum_{\vec{k}} \left[ 1 - \frac{E_{\vec{k}}}{\sqrt{E_{\vec{k}}^2 + \Delta_{\vec{k}}^2}} \right] \quad (1.33)$$

gde je  $E_{\vec{k}} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - \mu = \frac{\hbar^2}{2m} (k^2 - k_0^2)$ . Poznavanjem broja  $N$ , odnosno gustine čestica u sistemu, može se iz jedn. (1.33) izračunati  $k_0$  odnosno  $\mu$ . Za sistem koji ima simetriju čestica-supljina u oblasti oko Fermijeve površi, što važi za  $H_{\text{red}}$  (1.14), dobija se  $\mu = e_f$  tj.  $k_0 = k_f$ .

Objasnimo nešto podrobnije fizički smisao veličina  $\Delta_{\vec{k}}$  i  $E_{\vec{k}}^e$ . Promena veličine jednočestičnog spektra, tj. razlika  $E_{\vec{k}} - E_{\vec{k}}^e$ , određuje se sa  $\Delta_{\vec{k}}$ . Energiju eksitacije  $E_{\vec{k}}^e$  (1.28) možemo napisati (uzimamo  $k_0 = k_f$ )

$$E_{\vec{k}}^e = \frac{\hbar^2}{2m} \left[ (k^2 - k_f^2)^2 + \left( \frac{2m \Delta_{\vec{k}}}{\hbar^2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.34)$$

Za impulse  $\vec{k}$  koji su bliski impulsu  $\vec{k}_f$ , eksitaciona energija ne teži nuli već konačnoj vrednosti

$$\lim_{|\vec{k}| \rightarrow k_f} E_{\vec{k}}^e = \Delta_{\vec{k}_f} \quad (1.35)$$

Prema tome, veličina  $\Delta_{\vec{k}_f}$  određuje razliku energije medju prvim eksitovanim stanjem i osnovnim stanjem sistema. Dakle, u spektru elementarnih eksitacija sistema fermiona postoji energijski gep. Parametar  $E_{\vec{k}}^e$  je energija potrebna da se kreira kvazičestica u stanju  $\vec{k}$ . Sistem ne može da primi energiju manju od  $\Delta_{\vec{k}_f}$  što ga čini stabilnim i dovodi u superprovodno stanje. Minimalna energija potrebna da kreira jednočestičnu eksitaciju iz superprovodnog osnovnog stanja je  $2 \Delta_{\vec{k}_f}$ ,  $\Delta_{\vec{k}_f}$  da se elektron raspari (pomeri iz jednog stanja) i  $\Delta_{\vec{k}_f}$  da dođe u drugo stanje (da se eksituje). Ovaj efekt pojavljivanja energijskog gepa, uzrokovani privlačnom interakcijom (1.13) medju elektronima sa suprotnim impulsima i spinovima, naziva se efekt sparivanja.

Jednačinu za energijski gep (1.26) rešićemo aproksimativno shodno BCS radu [3]. Predpostavlja se da je interakcija  $V_{\vec{k}, \vec{k}'}$  (1.13) konstantna  $V_{\vec{k}, \vec{k}'} = V$  za talasne vektore  $\vec{k}$  i  $\vec{k}'$  koji su unutar intervala  $(\vec{k}_f - \vec{k}_g, \vec{k}_f + \vec{k}_g)$  (tj. razlika elektronskih energija je manja od  $\hbar \omega_c \approx \hbar \omega_D$ ,  $\omega_D$  - Debyeova frekvencija), i jednak nuli kada  $\vec{k}$  i  $\vec{k}'$  leže van tog intervala.

U stvari, van pomenutog intervala  $V_{\vec{k}, \vec{k}'}$  postaje odbojna interakcija, videti imenilac jedn. (1.13). Shodno pretpostavci za  $V_{\vec{k}, \vec{k}'}$ , dobijamo da je  $\Delta_{\vec{k}}$  konstantno  $\Delta_{\vec{k}} = \Delta_0$  za talasne vektore pomenutog intervala, a van tog intervala je  $\Delta_{\vec{k}} = 0$  jer nema parnih korelacije. Dakle, jedn. (1.26) postaje

$$1 = \frac{V}{2N} \sum_{k_f - k_g \leq k \leq k_f + k_g} \frac{1}{\sqrt{\Delta_0^2 + E_{\vec{k}}^2}} \quad (1.36)$$

Ako sa sume predjemo na integral i uzimajući

$$E_{\vec{k}} \approx \frac{\hbar^2 k_f (k - k_f)}{m} \quad \text{i} \quad d^3 k \approx 4\pi k_f^2 dk \quad \text{dobijamo}$$

$$1 = \frac{V k_f^2 a^3}{4\pi l^2} \int_{k_f - k_g}^{k_f + k_g} \frac{dk}{\sqrt{\Delta_0^2 + \frac{\hbar^4 k_f^2}{m^2} (k - k_f)^2}},$$

gde je  $a$  konstanta rešetke. Rešavajući dalje ovaj integral

$$\text{smenom } k - k_f = x \text{ i stavljajući } \frac{\hbar k_f}{m} = v_f, \text{ imamo}$$

$$\frac{4\pi^2}{a^3 V k_f^2} = \frac{1}{\hbar v_f} \ln \frac{k_g \hbar v_f + \sqrt{(\hbar v_f k_g)^2 + \Delta_0^2}}{k_g \hbar v_f + \sqrt{(\hbar v_f k_g)^2 + \Delta_0^2}}.$$

Aproksimirajući dalje  $\Delta \ll \hbar v_f k_g$  (superprovodnik sa slabom vezom) konačno dobijamo

$$\Delta_0 = 2\hbar v_f k_g e^{-\frac{2\pi^2 \hbar v_f}{a^3 k_g^2 V}} \quad (1.37)$$

Stavljaajući  $\hbar v_f^k g = \hbar \omega_c$  (granična energija fonona koju razmenjuju elektroni) i

$$N(0) = \frac{k_f^2 a^3}{2 \pi^2 \hbar v_f}, \quad (1.38)$$

$N(0)$  je gustina elektronskih stanja za jedan spin po jedinici energije [3], dobijamo konačno poznati aproksimativni BCS izraz za energijski gep na absolutnoj nuli

$$\Delta_0 = 2\hbar\omega_c e^{-\frac{1}{N(0)V}} \quad (1.39)$$

Kako teorija perturbacije daje popravke energiji u vidu stepena male interakcije (ovde  $V$ ), vidimo da se gornji rezultat ne može dobiti ni u kojem redu perturbacione teorije. Naime, trebalo bi sumirati beskonačan broj grafova da bi se dobio izraz (1.39). Dakle, kada postoji dominantna privlačna interakcija medju elektronima, ma koliko bila konačno mala, dobija se stanje koje ima energijski gep tj. superprovodno stanje.

Koristeći izraz za energijski gep  $\Delta_0$  (1.39), možemo dobiti razliku energija izmedju normalnog i superprovodnog stanja na absolutnoj nuli  $W_0 = E_0 - E_n$  ( $E_n$  energija osnovnog stanja normalnog metala) za slučaj slabe veze  $N(0)V \ll 1$

$$W_0 = -2N(0) (\hbar\omega_c)^2 e^{-\frac{2}{N(0)V}} \quad (1.40)$$

BCS teorija objašnjava i termodinamička svojstva superprovodnog stanja te ćemo preći na izračunavanje energijskog gepea na konačnim temperaturama. Pomenućemo samo princip dobijanja spektra za  $T \neq 0$ , videti osnovni BCS rad [3] i revijalni

članak Bardeena i Schrieffera [32]. Takodje su dali metode za konačne temperature, sa identičnim rezultatom, Bogoljubov, Zubarev i Cerkovnjikov [33]. Talasna funkcija za eksitovana stanja je oblika (uporediti sa jedn. (1.15))

$$\Psi_{\text{eks}} = \prod_{\vec{k}(0)} \left[ (1-h_{\vec{k}})^{1/2} + h_{\vec{k}}^{1/2} a_{\vec{k}1/2}^+ a_{-\vec{k}-1/2}^- \right] \quad (1.41)$$

$$\prod_{\vec{k}'(P)} \left[ (1-h_{\vec{k}})^{1/2} a_{\vec{k}'1/2}^+ a_{-\vec{k}'-1/2}^- - h_{\vec{k}'}^{1/2} \right] \prod_{\vec{k}''(J)} a_{(\vec{k}'')}^+ | 0 >$$

gde  $0, P, J$  označavaju stanja zaposednuta parovima u osnovnom stanju, eksitovanim parovima i eksitovanim pojedinačnim kvazičesticama respektivno.  $a_{(\vec{k}'')}^+$  označava da su uključena stanja ili  $\vec{k}_{1/2}''$ , ili  $-\vec{k}_{-1/2}''$ . Zatim se minimizira srednja vrednost slobodne energije sistema  $\langle \Psi_{\text{eks}} F_s \Psi_{\text{eks}} \rangle$  ( $F_s = H_{\text{red}} - ST$ ,  $S$  entropija,  $T$  temperatura) u odnosu na  $h_{\vec{k}}$  (odnosno  $u_{\vec{k}}$  i  $v_{\vec{k}}$ ), i dobija se jednačina za energijski gep na konačnim temperaturama.

$$\Delta_{\vec{k}} = \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}'} v_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{\Delta_{\vec{k}'}}{\sqrt{E_{\vec{k}'}^2 + \Delta_{\vec{k}'}^2}} (1 - 2 f_{\vec{k}'}) \quad (1.42)$$

gde je  $f_{\vec{k}'}$  funkcija Fermi-Diracove raspodele  $f_{\vec{k}'} = \frac{1}{e^{\frac{E_{\vec{k}'}^e}{k_B T}} + 1}$ ,

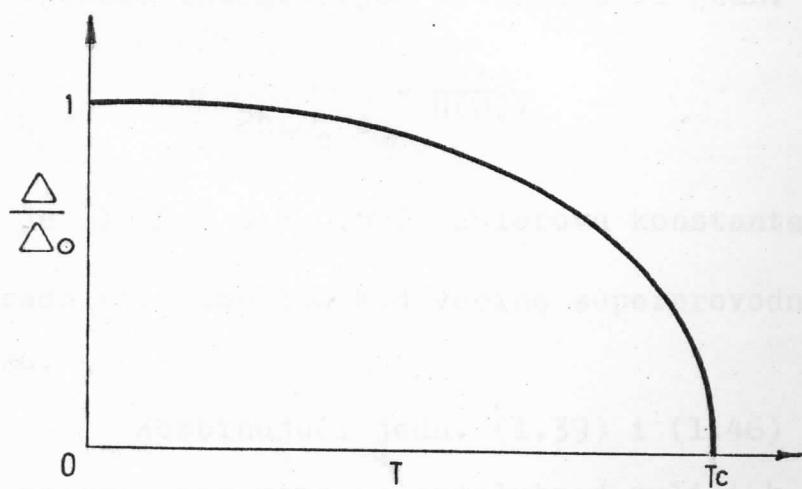
$E_{\vec{k}'}^e$  energija eksitacija oblika (1.28),  $k_B$  Boltzmannova konstanta. Jednačina (1.42) može da se napiše

$$\Delta_{\vec{k}} = \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}'} v_{\vec{k}, \vec{k}'} \frac{\Delta_{\vec{k}'}}{\sqrt{E_{\vec{k}'}^2 + \Delta_{\vec{k}'}^2}} \tanh \frac{\sqrt{E_{\vec{k}'}^2 + \Delta_{\vec{k}'}^2}}{2k_B T} \quad (1.43)$$

Ako izvršimo standardne aproksimacije, kao u rešavanju jednacine za energijski gep na apsolutnoj nuli, dobijamo

$$1 = \frac{N(0)V}{2} \int_{-\hbar\omega_c}^{\hbar\omega_c} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}} \tanh \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}}{2k_B T} \quad (1.44)$$

Iz jedn. (1.44) može se zaključiti da se sa porastom temperature energijski gep  $\Delta$  smanjuje, i numeričkim rešavanjem dobija se kriva kao na slici 1..



S1.1. Energijski gep  $\Delta$  ( $\Delta_0$  energijski gep za  $T = 0$ ) u funkciji temperature.

Temperatura  $T_c$  za koju energijski gep postaje jednak nuli je temperatura prelaza, i iznad te temperature nema realne vrednosti  $\Delta$  koja zadovoljava jedn. (1.44). Ispod  $T_c$   $\Delta \neq 0$  i imamo superprovodno stanje. Dakle, ako u (1.44) stavimo  $\Delta=0$  dobija se

$$1 = \frac{N(0)V}{2} \int_{-\hbar\omega_c}^{\hbar\omega_c} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} \tanh \frac{\varepsilon}{2k_B T_c} \quad (1.45)$$

Uzimajući da je  $\tanh x \approx x$  za  $x < 1$  i  $\tanh x \approx 1$  za  $x > 1$ ,

dobijamo da je  $k_B T_c \sim \hbar \omega_c e^{-\frac{1}{N(0)V}}$  i numeričkim rešavanjem se nalazi

$$k_B T_c = 1,14 \hbar \omega_c e^{-\frac{1}{N(0)V}} \quad (1.46)$$

Temperatura prelaza  $T_c$  je proporcionalna sa  $\hbar \omega_c$  ( $\sim \frac{1}{\sqrt{M}}$ ), što je u skladu sa izotopskim efektom.

Elegantan izraz za  $T_c$  dat je u ref. [34]. Naime, parcijalnom integracijom integrala iz jedn. (1.45) se dobija

$$k_B T_c = \frac{\gamma}{\pi} 2\hbar \omega_c e^{-\frac{1}{N(0)V}} \quad (1.47)$$

gde je  $\ln \gamma = C = 0,577$  Eulerova konstanta, a  $\frac{\hbar \omega_c}{2k_B T_c}$  (koje je reda veličine 100 kod većine superprovodnika) je zamenjeno sa  $\infty$ .

Kombinujući jedn. (1.39) i (1.46) možemo dobiti odnos energijskog gepa na apsolutnoj nuli i  $k_B T_c$

$$\frac{2 \Delta_0}{k_B T_c} = 3,50 \quad (1.48)$$

koji je jednak za sve superprovodnike, što se dobro slaže sa eksperimentima npr. [32].

Aproksimativnim rešavanjem jedn. (1.44) (koristi se da je  $\Delta \ll \hbar \omega_c$  i  $\tanh x \approx x$  za  $x \leq 1$  i  $\tanh x \approx 1$  za  $x \gg 1$ ) u slučaju  $T \approx T_c$ , dobija se

$$\Delta \approx a k_B T_c \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}} \quad (1.49)$$

gde je  $a \approx 3,2$ . Ovaj izraz je sugerisao Buckingham [35] pre BCS rada [3]. Iz jednačine (1.49) vidimo da energijski gep teži nuli sa beskonačnim izvodom kada  $T \rightarrow T_c$ . Beskonačni izvod funkcije  $\Delta(T)$  u tački  $T = T_c$  dovodi do skoka u elektronskoj specifičnoj topotri [3], tj. nastaje fazni prelaz druge vrste. Detaljnije o termodinamičkim osobinama superprovodnika može se videti u ref. [32].

Razmatraćemo, u najprostijem vidu, osnovno superprovodno stanje sa električnom strujom. Eksperiment koji je obavio K. Onnes [1] sastojao se u sledećem: materijal u obliku žice zatvorenog prstena je smešten izmedju polova magneta na sobnoj temperaturi. Sistem je hladjen do ispod superprovodne prelazne temperature  $T_c$ . Zatim je prsten uklonjen od magneta i držan na istoj temperaturi  $T < T_c$ . U zatvorenom prstenu postoji električna struja i posle uklanjanja magneta, i u idealnom superprovodniku trajala bi beskonačno. Dakle, električno polje je nula, a postoji struja!

Posmatrajmo, zbog jednostavnosti, superprovodnik sa strujom na apsolutnoj nuli npr. Bogoliubov [22]. Potrebno je naći sopstvene vrednosti hamiltonijana  $H_{\text{red}}$  jedn. (1.12) pri dopunskom uslovu

$$\sum_{\vec{k}} \hbar \vec{k} a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}b} = \vec{p} \quad (1.50)$$

tj. postoji impuls elektrona  $\vec{p}$  različit od nule. Možemo uvesti srednju brzinu elektrona  $\vec{u}$  koja se može odrediti iz uslova (1.50), kada se uzme srednja vrednost sume na levoj strani. Dakle, umesto talasnih vektora  $\vec{k}$  imamo pomeraj za  $\frac{\vec{m}\vec{u}}{\hbar} \equiv \vec{q}_u$ ,

tj.  $\vec{k} \rightarrow \vec{k} + \vec{q}_{\vec{u}}$  te fermi operatori  $a_{\vec{k}b}$  prelaze u  $a_{\vec{k}+\vec{q}_{\vec{u}}b}$ . Prema prethodnom jasno je da imamo translaciju u prostoru  $\vec{k}$

$$\vec{k} \rightarrow \vec{k} + \vec{q}_{\vec{u}}, \quad a_{\vec{k}b} \rightarrow a_{\vec{k}+\vec{q}_{\vec{u}}b} \quad (1.51)$$

Elektronski parovi nisu više u stanjima sa ukupnim  $\vec{k} = 0$ , već su parovi sa talasnim vektorima  $\vec{k} + \vec{q}_{\vec{u}}$  i  $-\vec{k} + \vec{q}_{\vec{u}}$ . Takođe, hemijskom potencijalu  $\mathcal{M} = e_f$  treba dodati srednju kinetičku energiju elektrona  $\frac{mu^2}{2}$  tj.

$$\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M} + \frac{mu^2}{2} \quad (1.52)$$

Ako u hamiltonijan (1.12) uključimo izmene shodno (1.51) i (1.52), dobijamo hamiltonijan za sistem elektrona sa strujom koji se može tretirati na isti način kao u slučaju bez struje. U ranije dobijene formule treba samo izvršiti transformaciju obratnu od (1.51), i tako se dobija da je energija osnovnog stanja, sa srednjom brzinom  $\vec{u}$ , veća od energije osnovnog stanja jedn. (1.29) za  $\frac{mu^2}{2}$ . Veličina energijskog gепа за sistem sa strujom je

$$\Delta_{\vec{u}} = \Delta_0 - \vec{k}_f \cdot \vec{u} \geq \Delta_0 - k_f u \quad (1.53)$$

gde je  $\Delta_0$  energijski gep na apsolutnoj nuli za stanje bez struje. Iz jednačine (1.53) sledi da za uslov

$$k_f u < \Delta_0 \quad (1.54)$$

stanje sa strujom, iako je više energije od stanja bez struje, ima energijski gеп.

## 1.2. ELEKTROMAGNETSKA SVOJSTVA SUPERPROVODNIKA

Kada se superprovodnik stavi u magnetno polje (na temperaturi nižoj od  $T_c$  posmatranog superprovodnika), konstataju se da su linije magnetnog polja izvan uzorka znatno drukčije, nego kada je superprovodnik iznad  $T_c$  [2]. Promena linijsa magnetnog polja je konzistentna s tim da superprovodnik istiskuje magnetno polje iz svoje unutrašnjosti. Istiskivanje magnetnog polja je skoro potpuno, magnetno polje prodire po površini uzorka do dubine oko  $10^{-6}$ - $10^{-5}$  cm. Ovaj fenomen je čuveni Meissnerov efekt, ili Meissner-Ochsenfeldov efekt. Za potpuniji pregled elektromagnetskih svojstava superprovodnika videti ref. [26], [27], [32].

F. London (1935 god.) je prvi dao deskriptivne nomenološke jednačine za superprovodnik u elektromagnetnom polju, koje su sugerisane Meissnerovim eksperimentom. Londonov pristup nećemo iznositi, već ćemo samo ukazati na rezultate. Navešćemo Londonovu jednačinu za "supertok" elektrona

$$\text{rot } \vec{j}_s = - \frac{n_s e^2}{mc} \vec{B}, \text{ ili } \vec{j}_s = - \frac{n_s e^2}{mc} \vec{A} \quad (1.55)$$

gde su:  $\vec{j}_s$  gustina struje,  $n_s$  gustina elektrona,  $\vec{B}$  magnetska indukcija, a  $\vec{A}$  magnetski vektor potencijal. London je dobio dubinu prodiranja magnetnog polja

$$\lambda = c \sqrt{\frac{\Lambda}{4\pi}} \quad (1.56)$$

gde je  $\Lambda$  "materijalna konstanta" jednaka

$$\Lambda = \frac{m}{n_s e^2} \quad (1.57)$$

$\lambda$  je za većinu superprovodnika veličine  $10^{-5}$ - $10^{-6}$  cm, što je u saglasnosti sa eksperimentom.

Zakon prodiranja polja je eksponencijalan, tj.

$e^{-\frac{x}{\lambda}}$  gde se x uzima od površine superprovodnika, što dovođi do toga da je polje praktično nula u sredini uzorka normalne veličine. Kako je polje kod dijamagnetika manje unutar uzorka nego primenjeno polje, vidimo da bi superprovodnike mogli da svrstamo u dijamagnetike. Međutim, u superprovodnicima polje je u unutrašnjosti praktično nula, tako da je preciznije reći da je superprovodnost dijamagnetizam novog tipa.

Londonova teorija ne daje najbolje rezultate za rastojanja koja nisu ni suviše velika (ka unutrašnjosti superprovodnika) ni mala, te je Pippard [36] i [37] (na bazi mnogih eksperimentalnih rezultata) uveo nelokalnu generalizaciju Londonove teorije. Naime, Pippard je zaključio da gustina struje  $\vec{j}_s$  (1.55) u datoj tački  $\vec{r}$  zavisi od magnetskog potencijala i u drugim tačkama  $\vec{r}'$ , koje su u oblasti  $\vec{r} - \vec{r}'$  veličine do  $\xi_0 \sim 10^{-4}$  cm. Veličina  $\xi_0$  je poznata kao Pippardova dužina koherentnosti. Videćemo iz BCS teorije da je  $\xi_0$  mera rastojanja Cooperovih parova. Pippard je dao jednačinu za gustinu struje  $\vec{j}_s$  oblika

$$\vec{j}_s(\vec{r}) = -\frac{3}{4\pi\xi_0 c \Lambda} \int \frac{\vec{R}[\vec{R} \cdot \vec{A}(\vec{r}')] }{R^4} e^{-\frac{R}{\xi}} d^3 r', \quad \vec{R} \equiv \vec{r} - \vec{r}' \quad (1.58)$$

gde je  $\xi$  Pippardova dužina koherentnosti materijala u prisustvu nečistoća. Na osnovu Pippardove generalizacije preciznije je objasnjen Meissnerov efekt.

Pored Meissnerovog efekta, značajno elektromagnetsko svojstvo superprovodnika je postojanje kritičnog polja. Pri određenom intenzitetu spoljnog magnetnog polja  $H_c$  uzorak gubi superprovodna svojstva. Tada dolazi do termodinamičkog prelaza na normalno stanje, sa latentnom toplotom, tj. faznog prelaza prve vrste. Dakle, toplota mora biti dovodjena uzorku da bi došlo do prelaza iz superprovodnog u normalno stanje na konstantnoj temperaturi i konstantnom primenjenom magnetnom polju. Iako je ovaj fenomen spektakularan, objasnjenje se dobija direktno termodinamičkim razmatranjem. Kritično polje  $H_c$  je dostignuto kada se izjednači razlika slobodnih energija normalnog i superprovodnog stanja. S obzirom da je u superprovodnom stanju magnetno polje praktično istisnuto iz materijala, a u normalnom stanju magnetno polje prodire u materijal, potrebno je dodati energiju (rad mora biti izvršen), tj. potrebna je latentna toplota. Takodje se može zaključiti da kritično polje  $H_c$  opada sa temperaturom po zakonu (prema Gorteru i Casimiru vid. npr. [26])

$$H_c(T) = H_c(0) \left[ 1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2 \right] \quad (1.59)$$

sto je u izvrsnom slaganju sa eksperimentom.

Mikroskopska teorija superprovodnosti trebalo bi da daje objasnjenje i elektromagnetskih svojstava superprovodnika. Videćemo da BCS teorija objašnjava elektromagnetska

svojstva superprovodnika, bar što se tiče pomenutih problema. Prvo ćemo diskutovati problem izračunavanja kritičnog polja  $H_c$ . Kritično polje je dato sa

$$\frac{H_c^2}{8\pi} = F_n - F_s \quad (1.60)$$

gde su  $F_n$  i  $F_s$  slobodne energije normalnog i superprovodnog stanja respektivno. Daćemo samo rezultate za  $H_c$  prema ref [3]. Dobija se da kritično polje  $H_c$  zavisi od temperature veoma približno kao u jedn. (1.59), najveće odstupanje je oko 4% [38], [39], a za niske temperature  $T \ll T_c$  može se dobiti relacija

$$H_c \approx H_c(0) \left[ 1 - 1.07 \left( \frac{T}{T_c} \right)^2 \right] \quad (1.61)$$

Kritično polje za  $T = 0$  je

$$H_c(0) = \left[ 4\pi N(0) \right]^{1/2} \Delta_0 = 1,75 \left[ 4\pi N(0) \right]^{1/2} k_B T_c \quad (1.62)$$

Objašnjenje Meissnerovog efekta dano je perturbacionim tretmanom i taj pristup [3] je rigurozan, jer se radi o slučaju kada je  $\vec{A}(\vec{r})$  malo. Činjenica da sistem pokazuje Meissnerov efekt može se utvrditi ispitivanjem Fourier transforme gustine struje  $\vec{j}_s$  u limesu kada  $q \rightarrow 0$  (velika rastojanja - unutrašnjost superprovodnika), i dobija se (uporediti sa jedn. (1.55) i (1.57))

$$\lim_{\vec{q} \rightarrow 0} \vec{j}_s(\vec{q}) = - \frac{1}{c \Lambda_T} \vec{A}(\vec{q}) \quad (1.63)$$

"Materijalna konstanta"  $\Lambda_T$  zavisi od temperature i jednaka je Londonovoj vrednosti (1.57) za  $T = 0$ , i raste do beskonačnosti za temperaturu prelaza  $T_c$ .

Elektromagnetska interakcija za elektron u drugoj kvantizaciji je oblika

$$H_I = \int \Psi^*(\vec{r}) \left[ -\frac{ie\hbar}{2mc} (\vec{A} \cdot \nabla + \nabla \cdot \vec{A}) + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}) d\vec{r} \quad (1.64)$$

gde je  $\Psi(\vec{r})$  Blochova funkcija elektrona, a izbor gradijentne invarijantnosti je [3]  $\operatorname{div} \vec{A} = 0$ , i  $\vec{A} = 0$  ako je magnetno polje nula. Kada se u interakcionom hamiltonijanu  $H_I$  zanemari član višeg reda po  $\vec{A}$ , i  $\Psi$  i  $\Psi^*$  se razviju po operatorima a i  $a^+$  dobija se

$$H_I = \frac{e\hbar}{mc} \frac{(2\pi)^{3/2}}{V} \sum_{\vec{k}, \vec{q}, b} a_{\vec{k}+\vec{q}b}^+ a_{\vec{k}b} \vec{A}(\vec{q}) \cdot \vec{k} \quad (1.65)$$

gde je  $V$  zapremina (ne mešati sa interakcijom  $V$ ), a operator struje je

$$\vec{j}_s(\vec{r}) = \frac{ie\hbar}{2m} (\Psi^* \nabla \cdot \Psi - H.C.) - \frac{e^2}{mc} \Psi^* \vec{A} \Psi \quad (1.66)$$

Prvi deo u izrazu (1.66) je paramagnetni deo struje, a drugi dijamagnetni.

U prisustvu elektromagnetskog polja talasna funkcija sistema može biti napisana u perturbacionom razvoju

$$\phi(\vec{A}) = \phi_0 + \phi_1 + (\text{članovi reda } A^2 \dots) \quad (1.67)$$

gde je  $\phi_0$  oblika (1.41), a  $\phi_1$

$$\phi_1 = \sum_{i \neq 0} \frac{\langle \Psi_i | H_I | \Psi_0 \rangle}{E_0 - E_i} | \Psi_i \rangle \quad (1.68)$$

gde su:  $\Psi_0, \Psi_1, \dots, \Psi_i, \dots$  talasne funkcije oblika (1.41), a  $E_0, E_1, \dots, E_i, \dots$  odgovarajuće energije. Zatim je računata srednja gustina struje  $\langle \phi | \vec{j}_s(\vec{r}) | \phi \rangle$  do reda linearog po  $\vec{A}$ , s tim da je  $\langle \phi_0 | \vec{j}_s(\vec{r}) | \phi_0 \rangle = 0$ , tj. u odustvu polja srednja gustina struje je nula. Posle dužeg računa dobija se izraz (1.63), tj. Londonova jednačina, što znači da sistem istiskuje polje iz svoje unutrašnjosti.

Za dubinu prodiranja  $\Lambda_T$ , koja zavisi od temperature, dobijeno je

$$\Lambda_T = \Lambda \left( 1 + \frac{\beta}{\Delta} \frac{d\Delta}{d\beta} \right) \quad (1.69)$$

gde je  $\beta = 1/k_B T$ . Vidimo da je za  $T = 0$   $\Lambda_T = \Lambda$  jedn. (1.57), a za  $T = T_c$   $\Lambda_T \rightarrow \infty$ , tj. za kritičnu temperaturu dubina prodiranja polja je beskonačna, polje potpuno prodire u uzorak. Zavisnost  $\Lambda_T$  od temperature je u izvrsnom slaganju sa eksperimentom i rezultatom Fabera i Pipparda [40].

U osnovnom BCS radu [3] izračunata je i prostorna raspodela gustine struje i dobijena je u obliku veoma sličnom Pippardovom jedn. (1.58). Dakle, BCS teorija i precizno daje objašnjenje Meissnerovog efekta. Takodje je dato tumačenje Pippardove dužine koherentnosti  $\xi_0$ , tj.  $\xi_0$  je srednje rastojanje sparenih elektrona. Dobijen je izraz za  $\xi_0$

$$\xi_0 = \frac{\hbar v_f}{\pi \Delta_0} = 0,18 \frac{\hbar v_f}{k_B T_c} \quad (1.70)$$

dok je empirijski utvrđena vrednost Fabera i Pipparda [40]

$$\xi_0 = 0,15 \frac{\hbar v_f}{k_B T_c} \cdot$$

Kao opšti zaključak može se reći da je BCS teorija u dobrom slaganju sa eksperimentima i sa fenomenološkim teorijama o elektromagnetskim svojstvima superprovodnika. Međutim, BCS teorija primenjena na elektromagnetska svojstva superprovodnika ima jedan nedostatak redukovani hamiltonijan jedn. (1.14) nije gradijentno invarijantan. Redukovani hamiltonijan sadrži član (1.13), tj. interakciju koja zavisi od impulsa i daje gradijentno zavisan rezultat. Naime, Schafroth [41] je pokazao da gustina struje, jedn. (1.66), ne zadovoljava jednačinu kontinuiteta. V, jedn. (1.13), predstavlja interakciju koja na složen način zavisi od koordinata i impulsa (u stvari V je definisano u vidu matričnih elemenata za sopstvena stanja impulsa slobodnih čestica), i komutator V sa koordinatom elektrona nije jednak nuli

$$[\vec{r}_i, V] \neq 0 \quad (1.71)$$

Međutim da bi gustina struje (1.66) zadovoljavala jednačinu kontinuiteta, potrebno je da ([41])

$$[\vec{r}_i, V] \equiv 0 \quad (1.72)$$

Kako gornji identitet nije zadovoljen, vidi se da BCS teorija nije gradijentno invarijantna te može da dovede do lažnog Meissnerovog efekta.

Rikayzen [42] je razmatrao ovaj problem pošavši od kompletног hamiltonijana (1.1), koji je gradijentno invari-

jantan, primenio Bogoljubovljev metod [20] i dobio u aproksimaciji rezultate BCS teorije [3]. Prilikom aproksimacije zanemario je kvadratni član po elektron-fonon interakciji i članove reda  $\frac{\Delta}{\hbar\omega_D}$ , koji su mali za većinu superprovodnika. Tako-

dje je i Anderson [43] pokazao da je, u slučaju slabe veze ( $k_B T_c \ll \hbar\omega_D$ ), greška koja proističe usled redukovana hamiltonijana mala. Diskusija o ovom problemu vodjena je u mnogim radovima, npr. ref. [45] i [46].

Bogoljubov [24] je generališući svoju transformaciju zadržao gradijentnu invarijantnost teorije i u aproksimaciji, opravdanoj za većinu superprovodnika, dobio rezultate BCS teorije.

Metod Greenovih funkcija primenili su u teoriji superprovodnosti Garkov i Eliašberg ([46] i [47]) sa velikim uspehom, i pored ostalih rezultata je i taj da je dobijena gradijentno invarijantna teorija. Pokazano je da se dobijaju BCS rezultati za superprovodnik u elektromagnetskom polju ako

se zanemare članovi reda  $\frac{k_B T_c}{\hbar\omega_D}$ . Konkretno, u objašnjenu Meissnerovog efekta BCS teorija [3] uvodi nefizičku longitudinlnu komponentu za gustinu struje, vid. ref. [34] i [26], koja je znatno manja od ostalih članova. Zaključak je da BCS teorija sa redukovanim hamiltonijanom unosi malu grešku u objašnjenju Meissnerovog efekta, dok za termodinamička svojstva superprovodnika daje sjajne rezultate. Mi ćemo se u daljem radu, 2. glava, u izučavanju svojstava superprovodnika u elektromagnetskom polju koristiti BCS teorijom sa redukovanim

hamiltonijanom (kao i većina autora), imajući u vidu da se čini eventualna greška reda  $\frac{k_B T_c}{\hbar \omega_D}$ .

S obzirom da ćemo u sledećoj glavi govoriti o superprovodnim tankim filmovima (debljine poredljive sa Londonovom dubinom prodiranja  $\lambda$ ), ukazaćemo na neke njihove osobine. Superprovodni tanki film pokazuje Meissnerov efekt, mada je istiskivanje polja daleko od toga da bi bilo kompletno. Naime, za film debljine male u poređenju sa  $\lambda$ , magnetno polje se neznatno menja po debljini filma. Tada fazni prelaz postaje drugog reda, nema latentne topote. Shodno Londonovim jednačinama npr. ref. [48] opadanje polja je dato zakonom  $\frac{\text{ch}(x/\lambda)}{\text{ch}(d/2\lambda)}$ , gde je  $d$  debljina filma. Rezultat ovoga je da primenjeno polje mora biti znatno veće da bi se balansirala razlika slobodnih energija normalne i superprovodne faze jedn. (1.60), tj. kritično polje za superprovodni tanki film je veće od kritičnog polja za uzorak normalne veličine.

Kritična temperatura  $T_c$  tankih filmova veće debljine je praktično ista kao za normalni uzorak, dok za manje debljine može da bude i veoma različita. Interesantno je primestiti da su neki materijali superprovodni samo u obliku filma, npr.: beriliyum, bizmut, pa čak i gvoždje vid. [27]. Može se reći, s obzirom na teškoće u teorijskom tretiranju tankih filmova, da objašnjenje promene kritične temperature za tanke filmove nema u potpunosti zadovoljavajući tretman npr. [49].

## 2. G L A V A

### UTICAJ LASERSKE SVETLOSTI NA SUPERPROVODNOST

#### 2.1. UTICAJ SVETLOSTI NA ELEKTRONSKA STANJA

U prvoj glavi dat je kratki pregled osnova BCS teorije i svojstava superprovodnika u konstantnom magnetnom polju. Veliki fizički interes predstavlja i ponašanje superprovodnika u promenljivom elektromagnetnom polju, tj. pitanje o specifičnosti apsorbovanja i emitovanja elektromagnetskog zračenja koje pada na površinu superprovodnika. Termodinamički ravnotežni pristup, na kom se zasnivalo izlaganje u prvoj glavi, u slučaju promenljivog polja je neprimenljiv neposredno [34]. Poslednjih godina bilo je više radova, teorijskih [50] i [51] i eksperimentalnih [52] i [53], posvećenih problemu superprovodnika u promenljivom polju. Razmatran je problem nestacionarnih stanja superprovodnika i pristup ([50] i [51]) je bio sa fenomenološkim parametrima.

Dalji interes u problemu superprovodnika u promenljivom elektromagnetnom polju je izučavanje neravnotežnih stacionarnih stanja. Uglavnom su korišćeni laserski izvori, ili dovoljno dugih pojedinačnih impulsa, ili je superprovodnik ozračivan neprekidnim laserskim zračenjem. Laserska svetlost je upotrebljavana zbog nekih od svojih osobina (monohromatičnost, koherentnost), te omogućava efikasnije proučavanje problema neravnotežnih stanja superprovodnika. Da bi se bolje sagledalo dejstvo svetlosti na superprovodnost, proučavani su superprovodni tanki filmovi debljine uglavnom ne veće od optičke dubine

prodiranja.

Testardi [4] je eksperimentalno proučavao uticaj laserskog zračenja na superprovodni tanki film Pb. Debljina filma je bila poredljiva sa optičkom dubinom prodiranja  $\lambda = 390 \text{ \AA}$  za Pb i manja od superprovodne dužine koherentnosti  $\xi_0 = 830 \text{ \AA}$ . Tanki film Pb oko  $300 \text{ \AA}$  ima gotovo iste karakteristike ( $T_c$ , električni otpor) kao i normalni materijal Pb. Laseri su bili argonski sa izlazom svetlosti talasne dužine  $5145 \text{ \AA}$  i impulsa u trajanju  $40 \mu\text{sec}$  i snage  $2W$ , ili impulsa u trajanju  $6 \mu\text{sec}$  i snage  $5W$ . Konstatovano je da laserska svetlost smanjuje kritičnu tačku superprovodnika sa objašnjenjem da fotoni rasparuju Cooperove parove i stvaraju kvazičestice (eksituju elektrone). Kada broj eksitovanih elektrona predje neku kritičnu vrednost, dolazi do razaranja superprovodnosti. Fizički se može očekivati da se energija fotona (ovde  $2\text{eV}$ ) razdeli na više elektrona u kratkom vremenu, zatim sledi konverzija sa fononima i konačno se transmituje kao toplota. Elektroni bi, dakle, bili na višoj temperaturi od rešetke. Stoga je mereno precizno zagrevanje filma u toku trajanja impulsa, tako da je u ponovljenom eksperimentu obavljano hladjenje ( $0.02 \text{ }^{\circ}\text{K}/\mu\text{sec}$ ). Na taj način su isključeni efekti zagrevanja i posmatrani samo optički fenomeni. Gornji zaključci su dobijeni i kada je sprovedeno hladjenje. Za deblje filmove zapaženi su samo termalni efekti.

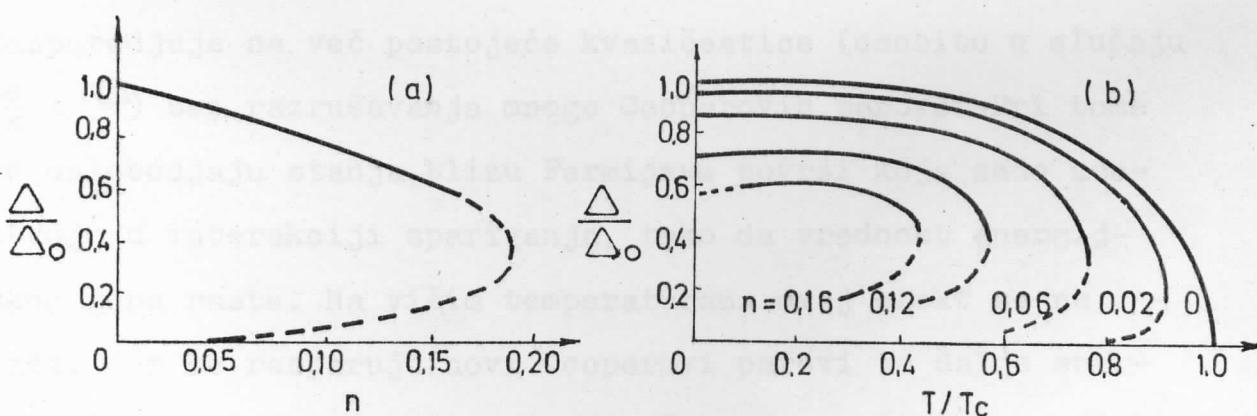
Owen i Scalapino [5] su dali model za superprovodnik ozračen laserskom svetlošću, prema kome je broj eksitovanih elektrona veći nego u termodinamičkoj ravnoteži. Prepostavili su da su rešetka i elektronski gas (Cooperovi parovi i

raspareni eksitovani elektroni) u termalnoj ravnoteži, tj. karakterisani su istom temperaturom. Međutim, spareni i nespareni eksitovani elektroni nisu u hemijskoj ravnoteži. Ova pretpostavka je sugerisana time da je vreme rekombinacije parova (ref. [54], [55], [56], [57]), za koncentracije kvazičestica od interesa, znatno veće od vremena termalizacije kvazičestica sa rešetkom. Pomenimo da se pod rekombinacijom ovde misli na proces kada dva eksitovana elektrona iznad energijskog gепа ponovo obrazuju Cooperove parove preko virtualne izmene fonona. Vreme za koje se vrši rekombinacija preko emisije fotona [58], znatno je duže od vremena preko emisije fonona, tako da je taj proces zanemarlјiv. Rekombinacija (preko fonona) nema značajniji efekt na elektronska svojstva na niskim temperaturama, ali može da daje znatan doprinos za više temperature (bliže  $T_c$ ) kao i za velike koncentracije kvazičestica. Mi ćemo u daljem izlaganju posvetiti, kasnije, više pažnje rekombinacionom procesu.

Owen i Scalapino su pošli od bazične BCS teorije [3] s tim što su uveli dopunski uslov na broj kvazičestica, kao što se u velikom kanonskom ansablu uvodi uslov za fiksiran broj elektrona. Efekt ovog dopunskog uslova je uvođenje dodatnog hemijskog potencijala  $\mu^*$ , tako da jednačina za energijski gеп (1.44) postaje

$$I = \frac{N(0)V}{2} \int_{-\hbar\omega_c}^{\hbar\omega_c} \frac{d\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2}} \tanh \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + \Delta^2} - \mu^*}{2k_B T} \quad (2.1)$$

U razmatranje je uzeta i bezdimenzionalna varijabla  $n$ , koja karakteriše eksces kvazičestičnog broja u odnosu na broj kvazičestica za sistem u ravnoteži.  $n$  je srazmerno intenzitetu laserske svetlosti, međutim to se fenomenološki povezuje. Jednačina (2.1) je rešavana numerički i dobijena je zavisnost energijskog gepa od temperature i intenziteta laserske svetlosti kao na sl. 2.



Sl. 2. (a) Redukovani energijski gep u funkciji bezdimenzionog kvazičestičnog broja  $n$  na absolutnoj nuli. (b) Redukovani energijski gep u funkciji temperature za razne vrednosti  $n$  počev od  $n = 0$  (BCS bez polja) do  $n = 0,16$ . Crtičasta linija (za sve krive) definiše oblast u kojoj je slobodna energija superprovodnika veća od slobodne energije normalnog stanja.

Na sl. 2. se vidi da za male intenzitete svetlosti energijski gep linearno opada sa  $n$  sve dok vrednost gepa za  $T = 0$  ne postane  $\Delta = 0,62 \Delta_0$ , gde nastaje fazni prelaz prve vrste. Naime, slobodna energija superprovodnog stanja za tu

vrednost postaje veća od slobodne energije normalnog stanja. Dakle, pre nego što je energijski gep postao jednak nuli razrušena je superprovodnost. Ovaj rezultat biće predmet daljih diskusija. Drugi interesantan rezultat ovog rada je da je dobijen pozitivan izvod funkcije  $\Delta = f(T)$  u tački  $T = 0$ . Ostali deo krive  $\Delta = f(T)$  je sličan BCS slučaju bez polja. Povećanje energijskog gepa sa temperaturom u  $T = 0$  (i dalje za malo  $T$  u odnosu na  $T_c$ ) je veoma malo. Za ovaj fenomen je dato tumačenje da je početni efekt termalne energije taj da se rasporedjuje na već postojeće kvazičestice (osobito u slučaju  $E_k^e < \mu$ ) bez razrušavanja mnogo Cooperovih parova. Pri tome se oslobođaju stanja blizu Fermijeve površi koja sada učeštuju u interakciji sparivanja, tako da vrednost energijskog gepa raste. Na višim temperaturama ovaj efekt se ne zapaža, jer se rasparuju novi Cooperovi parovi te dalje energijski gep opada sa temperaturom. I ovaj rezultat ćemo diskutovati kroz druge i naše radove.

Parker i Williams [6] su izvršili eksperimente na superprovodnim tunelskim spojevima tankih filmova Sn i Pb ozačenih iz He-Ne lasera. Kako je debljina filmova bila reda optičke dubine prodiranja, gustina kvazičestica je približno uniformna za osvetljeni tanki film. Koristeći tunelske spojeve Sn-Sn-oksid-Sn ili Pb-Pb-oksid-Pb i I-V karakteristiku, konstatovano je da pri niskim temperaturama (u odnosu na  $T_c$ ) energijski gep zaista malo raste sa temperaturom. Porast energijskog gepa je reda  $\mu\text{eV}$ , tj. iznosi nekoliko hiljaditih delova od njegove vrednosti  $\Delta_0$ . Merenjem zavisnosti  $\Delta$  od  $n$

(a time i od intenziteta svetlosti), potvrđeno je da za manje intenzitete važi aproksimativna relacija iz [5]

$$\Delta \approx \Delta_0 (1 - 2n) \quad (2.2)$$

tj. energijski gep linearno opada sa intenzitetom svetlosti. Zavisnost energijskog gepa od većih intenziteta svetlosti (bliskih intenzitetu za koji je energijski gep jednak nuli) nije ispitivana, te se nije moglo zaključiti da li postoji fazni prelaz prve vrste predviđen modelom Owena i Scalapina. Međutim, eksperimenti Parkera i Williamsa su kao što vidimo gotovo u celosti potvrđili tačnost modela Owena i Scalapina.

Eventualni fazni prelaz prve vrste manifestovao bi se u naglom diskontinuitetu energijskog gepa u funkciji intenziteta laserske svetlosti. Eksperimenti na Sn filmovima sa primjenjenim Ga-As laserom vršeni su [7] za razne intenzitete laserske svetlosti. Za manje intenzitete svetlosti potvrđena je tačnost formule (2.2), dok za veće intenzitete predviđeni fazni prelaz prve vrste [5] nije opažen. Takođe je ispitivano ponašanje energijskog gepa u funkciji laserskog intenziteta [8] na Sn-oksid-Sn tunelskim spojevima sa 30 nsec impulsima argonskog lasera. I u ovom radu nije konstatovan diskontinuitet u funkciji koja pokazuje zavisnost energijskog gepa od intenziteta svetlosti. Jedan od autora rada [5] Scalapino, zajedno sa Jhy-Jiun Changom [59], zaključuje da u intervalu temperature  $T/T_c < 0,7$  dolazi do nestabilnosti usled fluktuacija gustine kvazičestica za laserske intenzitete nešto manje nego one koje su potrebne da dovedu do faznog prelaza prve vrste.

Tako, ta nestabilnost sprečava manifestovanje faznog prelaza prve vrste. Za više temperature  $T/T_c \geq 0,7$  sistem, takodje, postaje nestabilan u odnosu na fazni prelaz prve vrste usled uticaja rekombinacionog procesa. U ovoj oblasti temperature vreme rekombinacije uglavnom nije više mnogo veće od kvazičističnog termalizacionog vremena, te model Owena i Scalapina nije dovoljno tačan (u ovom slučaju) za opisivanje sistema.

Detaljniji teorijski pristup problemu superprovodnog tankog filma u promenljivom polju dao je Eliašberg [11]. Izučavanje neravnotežnog stacionarnog stanja superprovodnika, koje se dobija npr. osvetljavanjem laserom, je sprovedeno na bazi dinamičkih jednačina za superprovodnik koje su Garkov i Eliašberg [50] dobili radeći Greenovim funkcijama. Naime, Eliašberg [11] je dobio kinetičku jednačinu odakle se može izvesti sistem jednačina, koji se po formi slaže sa jedn. (1.42) za BCS energijski gep, ali sa neravnotežnom funkcijom raspodele. U Eliašbergov pristup ulaze koeficijent difuzije i srednja dužina slobodnog puta elektrona kao fenomenološki parametri. Dati pristup je korektan u oblasti temperature  $k_B T \sim \Delta$ .

Na osnovu Eliašbergove kinetičke jednačine Jelesin [9] je izučavao neravnotežna stanja superprovodnika i za niske temperature  $\Delta \gg k_B T$ . U oblasti manjih intenziteta laserske svetlosti za energijski gep je dobio formulu (2.2), tj. slaganje sa eksperimentom [6]. Za veće intenzitete svetlosti, tj. intenzitete koji dovode energijski gep do 0, dobio je aproksimativno formulu za energijski gep na apsolutnoj nuli.

$$\Delta = \Delta_0 (1-2n) \left(1 + \ln \frac{4\Delta_0}{\Delta}\right)^{-1} \quad (2.3)$$

tj. energijski gep monotono teži nuli što je u saglasnosti sa eksperimentima [7] i [8]. Detaljna zavisnost energijskog gepa od temperature, kao i kompletна zavisnost energijskog gepa od intenziteta svetlosti nisu izvedene. Jelesin je došao do interesantnog zaključka da energijski gep  $\Delta$  postaje 0 za  $n = 1/2$ , tj. neravnotežna funkcija raspodele je tada jednaka  $1/2$ .

Takodje su Vardanjan i Ivljev [10] razmatrali superprovodnik u promenljivom elektromagnetsnom polju na bazi Eliašbergove kinetičke jednačine [11]. Slično kao i u [10], dobijeno je da energijski gep za male intenzitete svetlosti opada linearno (2.2) sa intenzitetom. Dobijen je efektivni hemijski potencijal uveden kao u ref. [5], s tim da je ovde  $\mu^*$  neposredno izražen preko intenziteta polja i drugih karakteristika. Ovi autori su takodje ispitivali i deblje filmove čija je debljina znatno veća od dubine prodiranja elektromagnetsnog polja. Kvazičestice koje su formirane u predelu optičke dubine prodiranja difuzijom dalje prodiru u ostali deo uzorka. Uvodjenjem difuzije autori su dobili zavisnost energijskog gepa od koordinate. Detaljna zavisnost energijskog gepa od intenziteta svetlosti i temperature nije data. Jasno je da u radovima [9] i [10], koji su bazirani na pomenutoj Eliašbergovoj kinetičkoj jednačini, ulaze kao fenomenološki parametri koeficijent difuzije i srednja dužina slobodnog puta elektrona.

Osnovni cilj našeg rada [12] je formiranje mikroskopskog pristupa koji bi objašnjavao uticaj laserske svetlosti na superprovodnost. Na interakcioni hamiltonijan (elektron u elektromagnetsnom polju) primenjena je unitarna transformacija

analogna Fröhlichovoј [14]. Glavna razlika izmedju ove dve interakcije je u veličini interakcione konstante, koja je u slučaju elektron-foton znatno veća nego kod elektron-fonon interakcije. Zahvaljujući ovoj činjenici korekcija na hemijski potencijal elektrona ne može se sada zanemariti, kao što je to moglo u slučaju elektron-fonon interakcije. Tako je dobijen dodatni hemijski potencijal elektrona u funkciji karakteristika elektromagnetskog polja i superprovodnika, a ne kao fenomenološki parametar kao u modelu Owena i Scalapina [5].

Predpostavljamo (shodno [5]) da je sistem u termalnoj ravnoteži, tj. da je vreme za rekombinaciju veliko u poređenju sa vremenom potrebnim da se eksitovani elektroni termalizuju sa rešetkom ref. [60] i [61]. Ova predpostavka nije u potpunosti opravdana jedino u slučaju kada je sistem blizu kritične tačke (energijski gip jednak nuli), bilo usled većeg intenziteta laserske svetlosti ili usled temperature bliske  $T_c$  ref. [7], [54], [55], [60] i [61]. U daljem izlaganju ćemo smatrati da rekombinacioni proces zanemarljiv, a kasnije ćemo prodiskutovati taj uticaj na dobijene rezultate.

Interakcija elektrona sa elektromagnetskim poljem, u nerelativističkoj aproksimaciji, može biti napisana preko zamenе impulsa elektrona  $\vec{p}$  impulsom  $\vec{p} - \frac{e}{c} \vec{A}$ .

$$H_{int} = -\frac{e}{mc} \vec{p} \cdot \vec{A} + \frac{e^2}{2mc^2} \vec{A}^2 \quad (2.4)$$

Koristićemo uobičajeni uslov za magnetski vektor potencijal

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0 \quad (2.5)$$

tj. Coulombovsku gradijentnost potencijala. U jedn. (2.4) zanemarićemo drugi član (viši red po  $\vec{A}$ ), koji je inače manji od prvog člana, te u drugoj kvantizaciji imamo za interakciju

$$H_{\text{efot}} \equiv H_{\text{int}}^{\text{EM}} = -\frac{e}{mc} \int \Psi^*(\vec{r}) \vec{p} \cdot \vec{A} \Psi(\vec{r}) d\vec{r} \quad (2.6)$$

Talasne funkcije  $\Psi(\vec{r})$  možemo izraziti preko Blochovih elektronskih funkcija  $\Psi_{\vec{k}b} = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) \chi_b$  i

fermi operatora  $a_{\vec{k}b}$

$$\Psi(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}, b} a_{\vec{k}b} e^{i\vec{k}\vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) \chi_b \quad (2.7)$$

gde je  $\chi_b$  elektronska funkcija za spin. Magnetski vektor potencijal  $\vec{A}$  možemo napisati

$$\vec{A} = \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{Na^3}} \sum_{\vec{q}, j} \frac{1}{\sqrt{q}} \vec{e}_{\vec{q}j} (b_{\vec{q}j} e^{i\vec{q}\vec{r}} + b_{-\vec{q}j}^+ e^{-i\vec{q}\vec{r}}) \quad (2.8)$$

gde su:  $\vec{q}$  talasni vektor,  $b_{\vec{q}j}$  boze operatori, a  $\vec{e}_{\vec{q}j}$  jedinični vektor polarizacije sa  $j = 1, 2$  jer shodno uslovu (2.5) imamo dve poprečne polarizacije fotona.

Ako zamenimo razvoje (2.7) i (2.8) u (2.6), dobijamo izraz za interakciju elektrona sa elektromagnetskim poljem u impulsnom prostoru

$$H_{int}^{EM} = \frac{i}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}, j, \ell} F_j(\vec{q}) a_{\vec{k}\ell}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}\ell} (b_{\vec{q}j} + b_{-\vec{q}j}^+) \quad (2.9)$$

gde je

$$F_j(\vec{q}) = \sqrt{\frac{2\pi\hbar^3 e^2}{m_c^2 q a^2}} \vec{M}_{\vec{k}} \cdot \vec{e}_{\vec{q}j} \quad (2.10)$$

$$\vec{M}_{\vec{k}} = \int u_{\vec{k}}^*(\vec{r}) \nabla_{\vec{r}} u_{\vec{k}}(\vec{r}) d\vec{r} \quad (2.11)$$

$\vec{M}_{\vec{k}}$  predstavlja matrični element koji se odnosi na elektronski impuls. Problem izračunavanja  $\vec{M}_{\vec{k}}$  može se pogledati u ref. [62].

Razmatraćemo veličinu interakcije  $F_j(\vec{q})$  za lasersku svetlost, oblast vidljive, infracrvene i donekle ultraljubičaste svetlosti. Ako za talasni vektor  $\vec{q}$  uzmemo vrednosti  $10^{-4}$  -  $10^5 \text{ cm}^{-1}$  i za  $\vec{M}_{\vec{k}} \sim \vec{k}_f$  (talasni vektor elektrona Fermijeve sferre), dobijamo da je  $F_j(\vec{q})$  reda nekoliko eV tj. reda elektronskih energija na Fermi površi. Dakle, interakcija je takva da može bitno da menja elektronska stanja. Inače, poznato je iz teorije eksitona [63] da retardovana interakcija medju elektronima (usled transverzalnih fotona) bitno utiče na elektronska stanja i da se dobijaju nove eksitacije zvane polaritonii.

Hamiltonijan sistema elektroni + elektromagnetno polje može se napisati, shodno prethodnim razmatranjima, u sledećem obliku

$$H^{EM} = H_e + H_{fot} + H_{efot} \quad (2.12)$$

gde je

$$H_e = \sum_{\vec{k}, b} E_{\vec{k}b} a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}b} \quad (2.13)$$

$H_e$  hamiltonijan elektrona (pišemo indeks  $b$  uz  $E_{\vec{k}b}$ , mada elektronska energija ne zavisi od spina vid. jedn. (1.2)),

$$H_{\text{fot}} = \sum_{\vec{q}, j} \hbar c_q b_{\vec{q}j}^+ b_{\vec{q}j} \quad (2.14)$$

$H_{\text{fot}}$  hamiltonijan transverzalnih fotona  $j = 1, 2$ , i  $H_{\text{efot}}$  je dat jedn. (2.9).

Ukupni hamiltonijan za superprovodnik u elektromagnetsnom polju, izuzimajući ekranizovanu Coulombovu interakciju medju elektronima, je

$$H_{\text{tot}} = H_e + H_{\text{fon}} + H_{\text{fot}} + H_{\text{efon}} + H_{\text{efot}} \quad (2.15)$$

gde su  $H_{\text{fon}}$  hamiltonijan fonona jedn. (1.3) i  $H_{\text{efon}}$  elektron-fonon interakcija jedn. (1.4). Na hamiltonijan (2.15) primećemo transformaciju Fröhlichovog tipa jedn. (1.6)

$$H_{\text{eqv}}^{\text{tot}} = e^{-iS} H_{\text{tot}} e^{iS} \quad (2.16)$$

$S$  je oblika interakcije, hermitski je operator  $S^+ = S$ , i možemo pisati

$$S = S_1 + S_2 \quad (2.17)$$

zde je

$$S_1 = \sum_{\vec{k}, \vec{q}} (\phi(\vec{k}, \vec{q}) a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}} b_{1\vec{q}} + H.C.) \quad (2.18)$$

$$S_2 = \sum_{\vec{k}, \vec{q}, j, b} (x_j(\vec{k}, \vec{q}) a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}b} b_{2\vec{q}j} + H.C.) \quad (2.19)$$

Operatorima koji se odnose na fonone stavljamo indeks 1, a na fotone indeks 2.  $\phi(\vec{k}, \vec{q})$  i  $x_j(\vec{k}, \vec{q})$  su funkcije koje treba odrediti procedurom analognom slučaju samo elektron-fonon interakcije. Kasnije ćemo videti da je  $\phi(\vec{k}, \vec{q})$  jednako vrednosti jedn. (1.10), međutim to se ne može tvrditi apriori.

Pokazaćemo da se transformacija (2.16), uz odredjene uslove, može izvršiti u dva nezavisna dela, posebno za elektron-fonon i elektron-foton interakciju. Obeležimo:  $H_1 \equiv H_{\text{fon}} + H_{\text{efon}}$ ,  $H_{\text{fon}} \equiv H_{o1}$ ,  $H_{\text{efon}} \equiv H_{il}$ ,  $H_2 \equiv H_{\text{fot}} + H_{\text{efot}}$ ,  $H_{\text{fot}} \equiv H_{o2}$  i  $H_{\text{efot}} \equiv H_{i2}$ . Odavde sledi da je  $H_1 \equiv H_{o1} + H_{il}$  i  $H_2 \equiv H_{o2} + H_{i2}$ . Ako označimo  $H'_1 \equiv H_e + H_1$  i  $H'_2 \equiv H_e^{\text{EM}} = H_e + H_2$  imamo

$$H_{\text{tot}} = H'_1 + H'_2 + H_e = H_1 + H_2 + H_e \quad (2.20)$$

Treba dokazati da je

$$\begin{aligned} H_{\text{eqv}}^{\text{tot eff}} &\equiv H_{\text{tot}} + i[H_{\text{tot}}, S] - \frac{1}{2} \left[ [H_{\text{tot}}, S], S \right] = H'_1 + i[H'_1, S_1] - \\ &- \frac{1}{2} \left[ [H'_1, S_1], S_1 \right] + H'_2 + i[H'_2, S_2] - \frac{1}{2} \left[ [H'_2, S_2], S_2 \right] - H_e \end{aligned} \quad (2.21)$$

pri uslovima

$$i [ (H_e + H_{o1}), S_1 ] + H_{il} \equiv 0 \quad (2.22)$$

$$i [ (H_e + H_{o2}), S_2 ] + H_{i2} \equiv 0$$

tj. shodno jedn. (1.9) i (1.10) linearni članovi u odnosu na interakciju su identički jednakim nuli. U izražu (2.21) je u-zeta srednja vrednost hamiltonijana po bozonskim stanjima. Takodje treba napomenuti da razmatramo razvoj (2.21) samo do drugog reda po  $S$ ; o korektnosti razvoja diskutovaćemo kasnije. Jednakost (2.21) će nam omogućiti da umesto ukupnog hamiltonijana (2.15) i kompletog  $S$  (2.17), uzmememo  $H^{\text{EM}}$  (2.12) i izvr-

šimo transformaciju  $e^{-iS_2} H^{\text{EM}} e^{iS_2}$ . Zatim dobijamo  $H_{\text{eqv}}^{\text{tot eff}}$  tako da dodamo doprinos fononskog dela (shodno jedn. (1.11) i

(2.21)) na rezultat transformacije  $e^{-iS_2} H^{\text{EM}} e^{iS_2}$ .

Da bismo dokazali (2.21), podjimo od eksplicitnog izraza leve strane jednakosti (2.21) bez usrednjjenja po bozon-skim stanjima

$$\begin{aligned} H_{\text{eqv}}^{\text{tot}} &= H_{\text{tot}} + i [ H_{\text{tot}}, S ] - \frac{1}{2} [ [ H_{\text{tot}}, S ], S ] = H_e + H_1 + H_2 + \\ &+ i [ (H_e + H_1 + H_2), (S_1 + S_2) ] - \frac{1}{2} [ [ (H_e + H_1 + H_2), (S_1 + S_2) ], (S_1 + S_2) ] \end{aligned}$$

Posle sredjivanja i korišćenja uslova (2.22), dobijamo

$$H_{\text{eqv}}^{\text{tot}} = H_e + H_{01} + H_{02} + \frac{i}{2} \left[ (H_{i1} + H_{i2}), (S_1 + S_2) \right] - \\ - \frac{1}{2} \left[ \left[ (H_{i1} + H_{i2}), (S_1 + S_2) \right], (S_1 + S_2) \right] \quad (2.23)$$

Razmotrimo efektivnu vrednost izraza (2.23). Posmatrajmo prvo četvrti član, tj.  $\frac{i}{2} \left[ (H_{i1} + H_{i2}), (S_1 + S_2) \right]^{\text{eff}}$ . Lako se može videti da su članovi  $[H_{i1}, S_2]^{\text{eff}}$  i  $[H_{i2}, S_1]^{\text{eff}}$  jednaki nuli. Uzmimo npr.  $[H_{i1}, S_2]^{\text{eff}}$ ;  $H_{i1}$  je oblika  $H_{i1} \rightarrow a^+ a b_1 + a^+ a b_1^+$ , a  $S_2 \rightarrow a^+ a b_2 + a^+ a b_2^+$  i imamo  $\left[ (a^+ a b_1 + a^+ a b_1^+), (a^+ a b_2 + a^+ a b_2^+) \right]^{\text{eff}}$ . Ako iskoristimo sledeću komutatorsku jednakost

$$[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B \quad (2.24)$$

s tim da je  $a^+ a = A$ ,  $b_1 = B$  ( $b_1^+ = B$ ) i  $a^+ a b_2 = C$  ( $a^+ a b_2^+ = C$ ), vidimo da je  $[B, C] = 0$ , a  $[A, C]B$  daje članove sa bozonskim operatorima oblika  $\langle b_1 b_2^+ \rangle, \langle b_1^+ b_2 \rangle, \langle b_1 b_2 \rangle, \langle b_1^+ b_2^+ \rangle$  koji su jednaki nuli.  $\langle \rangle$  je oznaka za srednju vrednost po bozonskim stanjima. I na kraju pokazaćemo za poslednji član u jedn. (2.23) da važi jednakost

$$- \frac{1}{2} \left[ \left[ (H_{i1} + H_{i2}), (S_1 + S_2) \right], (S_1 + S_2) \right]^{\text{eff}} = \\ - \frac{1}{2} \left[ [H_{i1}, S_1], S_1 \right]^{\text{eff}} - \frac{1}{2} \left[ [H_{i2}, S_2], S_2 \right]^{\text{eff}} \quad (2.25)$$

tj. da su svi komutatori koji nemaju sve članove istog indeksa jednaki nuli. Posmatrajmo npr. član  $\left[ [H_{il}, S_2], S_1 \right]^{\text{eff}}$ . Korišteći (2.24) možemo pisati  $\left[ H_{il}, S_2 \right] \rightarrow \left[ [a^+ a, a^+ a] (b_2 b_1 + b_2^+ b_1^+ + \text{H.C.}) \right]$  i dalje  $\left[ [H_{il}, S_2], S_1 \right]^{\text{eff}} \rightarrow \left[ \left\{ [a^+ a, a^+ a] (b_2 b_1 + b_2^+ b_1^+ + \text{H.C.}) \right\}, (a^+ a b_1 + a^+ a b_1^+) \right]^{\text{eff}}$ . Sredjivanjem i korišćenjem (2.24) dobija-  
mo članove sa jednim  $b$ , ili tri  $b$  operatora koji nisu istog indeksa. Srednja vrednost svih tih članova je nula. Dakle za  $H_{\text{eqv}}^{\text{tot}}$  imamo konačno

$$H_{\text{eqv}}^{\text{tot eff}} = H_e + H_{01} + H_{02} + \frac{i}{2} \left[ H_{il}, S_1 \right] + \frac{i}{2} \left[ H_{i2}, S_2 \right] - \\ - \frac{1}{2} \left[ \left[ H_{il}, S_1 \right], S_1 \right] - \frac{1}{2} \left[ \left[ H_{i2}, S_2 \right], S_2 \right] \quad (2.26)$$

Kada iskoristimo uslove (2.22), desna strana jednakosti (2.21) se svodi na (2.26) te je time i dokazana jednakost (2.21).

Ako poredimo izraz (2.26) sa (1.8), vidimo da je u slučaju samo elektron-fonon interakcije zanemaren član

$-\frac{1}{2} \left[ \left[ H_{il}, S_1 \right], S_1 \right]$ , tj. drugog reda po  $S_1$ . Isto ćemo i sada uraditi, tj. zanemariti  $-\frac{1}{2} \left[ \left[ H_{i2}, S_2 \right], S_2 \right]$  s tim da ćemo va-  
ljanost poslednje aproksimacije diskutovati u vezi sa vredno-  
stima za  $X_j(\vec{k}, \vec{q})$ , odnosno  $S_2$  jedn. (2.19). Jasno je posle ovih  
izlaganja da je  $S_1$  jedn. (2.18) identički jednako  $S$  jedn. (1.7).

Na hamiltonijan za elektron-foton sistem  $H^{\text{EM}}$  (2.12)  
primenićemo transformaciju  $e^{-iS_2} H^{\text{EM}} e^{iS_2}$ ,  $S_2$  je definisano

jedn. (2.19). Shodno (2.21) imamo

$$H_{\text{eqv}}^{\text{EM}} \equiv e^{-iS_2} H^{\text{EM}} e^{iS_2} = H^{\text{EM}} + i [H^{\text{EM}}, S_2] - \\ - \frac{1}{2} [ [H^{\text{EM}}, S_2], S_2 ] \quad (2.27)$$

Dakle, idemo samo do drugog reda po  $S_2$ , i posle sredjivanja se dobija (pogl. (2.26))

$$H_{\text{eqv}}^{\text{EM}} = H_e + H_{\text{fot}} + i [ (H_e + H_{\text{fot}}), S_2 ] + H_{\text{int}}^{\text{EM}} + \\ + i \left[ \left\{ \frac{i}{2} [ (H_e + H_{\text{fot}}), S_2 ] + H_{\text{int}}^{\text{EM}} \right\}, S_2 \right] \quad (2.28)$$

Izraz (2.28) sledi iz (2.27) posle zanemarivanja člana

$- \frac{1}{2} [ [H_{\text{int}}^{\text{EM}}, S_2], S_2 ]$ , ovaj član je posle korišćena drugog uslova (2.22) jedini član drugog reda po  $S_2$ . Međutim, razvoj (2.27) koristimo za malo  $S_2$  te smo zato i izvršili gornje zanemarivanje. Dakle, funkciju  $X_j(\vec{k}, \vec{q})$ , odnosno  $S_2$ , odredićemo tako da linearan član u odnosu na interakciju u izrazu (2.28) bude identički jednak nuli, tj. napišimo ponovo drugi uslov iz jedn. (2.28)

$$i [ (H_e + H_{\text{fot}}), S_2 ] + H_{\text{int}}^{\text{EM}} \equiv 0 \quad (2.29)$$

Posle korišćenja (2.29), izraz (2.28) se svodi na

$$H_{\text{eqv}}^{\text{EM}} = H_e + H_{\text{fot}} + \frac{i}{2} [H_{\text{int}}^{\text{EM}}, S_2] \quad (2.30)$$

Odredićemo prvo  $X_j(\vec{k}, \vec{q})$ , odnosno  $S_2$ , iz identiteta

(2.29). Obeležimo  $S_2$  sa

$$S_2 \equiv S'_2 + S'^+_2 \quad (2.31)$$

gde je

$$S'_2 = \sum_{\vec{k}, \vec{q}, j, b} X_j(\vec{k}, \vec{q}) a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}b} b_{\vec{q}j} \quad (2.32)$$

Shodno (2.31) vidimo da je

$$i [ (H_e + H_{\text{fot}}), S_2 ] = i [ (H_e + H_{\text{fot}}), S'_2 ] + \text{H.C.}$$

Koristeći komutatorske jednakosti za fermi i boze operatore (1.9), dobijamo

$$[H_e, S'_2] = \sum_{\vec{k}, \vec{q}, j, b} X_j(\vec{k}, \vec{q}) (E_{\vec{k}b} - E_{\vec{k}-\vec{q}b}) a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}b} b_{\vec{q}j}$$

$$[H_{\text{fot}}, S'_2] = - \sum_{\vec{k}, \vec{q}, j, b} X_j(\vec{k}, \vec{q}) \hbar c q a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}b} b_{\vec{q}j}$$

Kako  $X_j(\vec{k}, \vec{q})$  odredjujemo prema (2.29), imamo

$$\begin{aligned} i [ (H_e + H_{\text{fot}}), S_2 ] + H_{\text{int}}^{\text{EM}} &= \\ i \sum_{\vec{k}, \vec{q}, j, b} \left\{ X_j(\vec{k}, \vec{q}) (E_{\vec{k}b} - E_{\vec{k}-\vec{q}b} - \hbar c q) + \frac{1}{\sqrt{N}} F_j(\vec{q}) \right\} a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}b} b_{\vec{q}j} + \text{H.C.} &\equiv 0 \end{aligned} \quad (2.33)$$

i

$$X_j(\vec{k}, \vec{q}) = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{F_j(\vec{q})}{E_{\vec{k}-\vec{q}b} - E_{\vec{k}b} + \hbar c q} \quad (2.34)$$

Dakle, za gornje  $X_j(\vec{k}, \vec{q})$  razvoj (2.28) se svodi na (2.30).

Funkcija  $X_j(\vec{k}, \vec{q})$  ima važnu osobinu simetrije  $X_j(\vec{k}-\vec{q}, \vec{q}) = X_j(\vec{k}, \vec{q})$ , što se može lako videti iz (2.34) ako se iskoristi osobina funkcije  $F_j(\vec{q}) = -F_j^*(-\vec{q})$  (vid. (2.10) i (2.11)).

Pre nego što predjemo na izračunavanje izraza (2.30), obeležimo  $H_{int}^{EM} \equiv H_2^{EM} + H_2^{EM+}$ , gde je

$$H_2^{EM} = \frac{i}{\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}, j, b} F_j(\vec{q}) a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}b}^- b_{\vec{q}j} \quad (2.35)$$

Kada uzmemo srednju vrednost komutatora u izrazu (2.30) po stanju sa  $N_{\vec{q}j}$  fotona imamo

$$\frac{i}{2} [H_{int}^{EM}, S_2]^{eff} = \left\{ \frac{i}{2} [H_2^{EM+}, S'_2] + H.C. \right\}^{eff} \quad (2.36)$$

Zamenom  $H_2^{EM}$  jedn. (2.35) i  $S_2$  jedn. (2.32) dobija se

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} [H_2^{EM+}, S'_2] = \\ & = - \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}, j, b, \vec{k}', \vec{q}', j', b'} F_j(\vec{q}) X_{j'}(\vec{k}', \vec{q}') \left[ a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}-\vec{q}b}^- b_{-\vec{q}'j}^+, a_{\vec{k}'b'}^+ a_{\vec{k}'-\vec{q}'b'}^- b_{\vec{q}'j'}^- \right] \end{aligned} \quad (2.37)$$

Posle nešto dužeg računa dobijaju se dva člana različitog tipa

$$\frac{i}{2} \left[ H_2^{\text{EM}} + , S'_2 \right] = c_1 + c_2 \quad (2.38)$$

gde je  $c_1$  tipa  $a^+a$  doprinos jednočestičnoj energiji elektrona (tretiraćemo ga u daljem izlaganju kao dodatni hemijski potencijal elektrona) usled interakcije elektrona sa fotonima.

$$c_1 = \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}, j, b} F_j(\vec{q}) X_j(\vec{k}-\vec{q}, -\vec{q}) a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}b}$$

Ovaj član se može zanemariti u slučaju elektron-fonon interakcije, kao što je učinjeno u 1. glavi.  $c_2$  je tipa  $a^+a^+aa$ , tj. dvočestična efektivna interakcija medju elektronima nastala usled elektron-foton interakcije.

$$c_2 = \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{\vec{k}, \vec{q}, \vec{k}', j, b, b'} F_j(\vec{q}) X_j(\vec{k}', -\vec{q}) a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}'b'}^+ a_{\vec{k}'+\vec{q} b'} a_{\vec{k}-\vec{q} b}$$

Interesantno je primetiti da se članovi tipa  $a^+ab^+b$  potiru.

Posle zamene izraza za  $X_j(\vec{k}, \vec{q})$  jedn. (2.34) i uzimanja H.C. članova, dobija se doprinos elektron-foton interakcije elektronskom sistemu

$$\frac{i}{2} \left[ H_2^{\text{EM}} + , S'_2 \right] + \text{H.C.} = (c_1 + \text{H.C.}) + (c_2 + \text{H.C.}) \quad (2.39)$$

gde je

$$c_1 + \text{H.C.} = -\frac{1}{N} \sum_{\vec{k}, \vec{q}, j, b} \frac{|F_j(\vec{q})|^2}{E_{\vec{k}b} - E_{\vec{k}-\vec{q}b} + \hbar c q} a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}b} \quad (2.40)$$

$$c_2 + \text{H.C.} = \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}\vec{q}\vec{k}' j b b'} \frac{|F_j(\vec{q})|^2}{E_{\vec{k}'-\vec{q}b} - E_{\vec{k}b} + \hbar c q} (a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}'b'}^+ a_{\vec{k}'-\vec{q}b'} a_{\vec{k}+\vec{q}b} + \text{H.C.}) \quad (2.41)$$

Iz oblika izraza (2.40) i (2.41) vidimo da je (2.39) istovremeno i efektivna vrednost (po bozonskim stanjima) od

$\frac{i}{2} \left[ H_2^{\text{EM}+}, S'_2 \right] + \text{H.C..}$  Efektivni hamiltonijan jedn. (2.28) je sada oblika

$$\begin{aligned} H_{\text{eqv}}^{\text{EMeff}} &= \sum_{\vec{q}j} \hbar c q N_{\vec{q}j} + \sum_{\vec{k}b} E_{\vec{k}b} a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}b} - \sum_{\vec{k}b} \left\{ \frac{1}{N} \sum_{\vec{q}j} \frac{|F_j(\vec{q})|^2}{E_{\vec{k}b} - E_{\vec{k}-\vec{q}b} + \hbar c q} \right\} a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}b} + \\ &+ \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}\vec{k}' \vec{q}j b b'} \frac{|F_j(\vec{q})|^2}{E_{\vec{k}'-\vec{q}b} - E_{\vec{k}b} + \hbar c q} (a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}'b'}^+ a_{\vec{k}'-\vec{q}b'} a_{\vec{k}+\vec{q}b} + \text{H.C.}) \end{aligned} \quad (2.42)$$

S obzirom da je superprovodnik osvetljen monohromatskom (i koherentnom) laserskom svetlošću, možemo da uprostimo izraz (2.42) stavljajući

$$\sum_{\vec{q}} f(\vec{q}) = N_0 f(\vec{q}_0) \quad (2.43)$$

gde su  $\vec{q}$  i  $\vec{q}_0$  fotonski talasni vektori ( $\vec{q}_0$  je talasni vektor fotona monohromatske svetlosti), a  $N_0$  je broj fotona koji pada na superprovodnik. Shodno BCS prilazu [3] preći ćemo sa  $H_{\text{eqv}}^{\text{EMeff}}$  na redukovani hamiltonijan, videti jedn. (1.12) u tezi. Oblast elektronskih impulsa (odnosno talasnih vektora) za elektrone koji učestvuju u formiranju Cooperovih parova  $\vec{k} \in (\vec{k}_f - \vec{k}_g, \vec{k}_f + \vec{k}_g)$ , sada se pomera shodno vrednosti dodatne jednočestične energije. Međutim, intenzitet talasnih vektora (po redu veličine) je oko  $k_f$  tj.  $\vec{k}_f \approx 10^7 - 10^8 \text{ cm}^{-1}$ . Kako talasni vektor fotona  $q_0$  laserske svetlosti (uglavnom vidljiva svetlost i infracrvena) nije veći od  $10^5 \text{ cm}^{-1}$ , imamo  $q_0 \ll k_f$  i  $\vec{q}_0$  se može zanemariti u odnosu na elektronske talasne vektore. Razmatramo slučaj  $\hbar c q_0 \gg 2\Delta_0$ , oblast  $\hbar c q_0 = 2\Delta_0$  je u dalekom infracrvenom delu spektra. Shodno ovome vidimo da je  $|E_{\vec{k}b} - E_{\vec{k}-\vec{q}_0 b}| \ll \hbar c q_0$ , jer je  $\hbar c q_0$  reda eV, a  $\vec{k} - \vec{q}_0 \approx \vec{k}$ . To znači da foton predaje mali deo svoje energije elektronu, što je u skladu sa pretpostavkom učinjenom u [4].

Prema izloženom, za dodatnu jednočestičnu energiju elektrona koju ćemo obeležiti sa  $\mu_0$  se dobija

$$\mu_0 = \frac{N_0}{N} \sum_{j=1}^2 \frac{|F_j(\vec{q}_0)|^2}{E_{\vec{k}b} - E_{\vec{k}-\vec{q}_0 b} + \hbar c q_0} \quad (2.44)$$

Kada zamenimo izraz za  $F_j(\vec{q}_0)$  prema (2.10) i imajući u vidu da  $E_{\vec{k}b}$  ne zavisi od spina (pisali smo indeks  $b$  da bi se vide la veza izmedju impulsa elektrona i spina), posle sredjivanja

dobijamo

$$\mu_0 = 2\pi \frac{N_0}{Na^3} \left[ \frac{e\hbar \sum_j \vec{M}_{K_f} \vec{e}_{q_0 j}}{mcq_0} \right]^2 \left( 1 - \frac{\hbar q_0}{2mc} \right) \approx 2\pi \frac{N_0}{Na^3} \left[ \frac{e\hbar \sum_j \vec{M}_{K_f} \vec{e}_{q_0 j}}{mcq_0} \right]^2 \quad (2.45)$$

$\mu_0$  ulazi u hamiltonijan (2.42) na isti način kao  $\mu$ , te ćemo ga zvati dodatni hemijski potencijal elektrona. Obeležimo sa

$$\overline{\vec{M}_{K_f} \vec{e}_{q_0 j}} \equiv \sum_j \vec{M}_{K_f} \vec{e}_{q_0 j} \text{ sumu skalarnog proizvoda veličine } \vec{M}_{K_f}$$

(srednja vrednost talasnog vektora elektrona vid. [62]) i vektora polarizacije fotona. Prilikom računa možemo uzeti da je  $\overline{\vec{M}_{K_f} \vec{e}_{q_0 j}} \sim M_{K_f} \approx k_f$ . Uvedimo  $\bar{v} \equiv \frac{\hbar \cdot (\overline{\vec{M}_{K_f} \vec{e}_{q_0 j}})}{m}$ ,  $\bar{v}$  je efektivna brzina elektrona koja se može uzeti da je  $\bar{v} \approx v_f$ , brzina elektrona Fermijevoj sferi. Konačno za  $\mu_0$  imamo

$$\mu_0 \approx 2\pi \frac{N_0}{V} \frac{e^2 \bar{v}^2}{\omega_0^2} \quad (2.46)$$

gde je  $\omega_0$  frekvencija fotona laserske svetlosti,  $V$  zapremina superprovodnika. Dakle,  $\mu_0$  je izražen preko karakteristika elektrona, rešetke i laserske svetlosti. Jasno je da je  $N_0$  (broj fotona) srazmeran intenzitetu laserske svetlosti, te  $\mu_0$  linearno zavisi od intenziteta svetlosti. Kao što vidimo iz jedn. (2.46), dodatni hemijski potencijal za provodne elektrone  $\mu_0$  nije uveden kao fenomenološki parametar kao u [5], niti u izrazu za  $\mu_0$  ima fenomenoloških parametara kao u [10].

Ako u poslednjem članu izraza (2.42) primenimo uprošćenje (2.43) (usled rada sa laserskom svetlošću), i iskoristimo da je  $q_0 \ll k_f$ ; uzmemu članove sa suprotnim impulsima i spinovima, dobijamo redukovani hamiltonijan za sistem elektrona u polju laserske svetlosti

$$H_{\text{red}}^{\text{EM}} = \sum_{\vec{k}b} \left[ \hbar \vec{v}_f (\vec{k} - \vec{k}_f) - \mu_0 \right] a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}b} + \mu_0 \sum_{\vec{k}b} a_{\vec{k}b}^+ a_{-\vec{k}-b}^+ a_{-\vec{k}-b} a_{\vec{k}b} \quad (2.47)$$

gde je uzeto  $\mu = e_f$ ,  $\vec{v}_f = \frac{\hbar \vec{k}_f}{m}$ . Primetimo da je u izrazu za efektivnu dvočestičnu elektronsku interakciju sumiranje samo po jednom talasnom vektoru  $\vec{k}$ , za razliku od efektivne dvočestične elektronske interakcije koja nastaje usled izmene fonna jedn. (1.12). Takodje treba istaći da efektivna elektronska interakcija zavisi od intenziteta laserske svetlosti, odnosno od broja fotona.

Da bi razvoj (2.28) bio korekstan, tj. da su zanemareni članovi višeg reda mali, potrebno je da  $X_j(\vec{k}, \vec{q})$  jedn. (2.34) bude  $< 1$  za sve intenzitete laserske svetlosti sa kojima radimo i takodje za sve frekvencije svetlosti koje dolaze u obzir. Prema (2.43) izraz za  $X_j(\vec{k}, \vec{q})$  se svodi na

$$X(\vec{k}_f, \vec{q}_o) = \sqrt{\frac{N_o}{N}} \frac{\frac{e\hbar}{mc} \sqrt{\frac{2\pi\hbar c}{a^3 q_o}} \vec{M}_{\vec{k}_f} \vec{e}_{\vec{q}_o j}}{\hbar c q_o} \quad (2.48)$$

odnosno

$$X(\vec{k}_f, \vec{q}_0) = \text{const} \sqrt{\frac{N_0}{N}} \frac{1}{q_0^{3/2}} \quad (2.49)$$

Vidimo da  $X(\vec{k}_f, \vec{q}_0)$  opada sa smanjivanjem intenziteta svetlosti i sa povećanjem  $q_0$ , tj. sa smanjivanjem talasne dužine laserske svetlosti. Dakle, razvoj (2.28) bolje konvergira pri datom intenzitetu svetlosti ako idemo ka ljubičastom i ultra-ljubičastom delu spektra. Videćemo kasnije da energijski GEP postaje jednak nuli za vrednost  $M_0 = \hbar\omega_c$  jedn. (2.62). Kada uzmemo da talasni vektor fotona za lasersku svetlost leži u opsegu  $q_0 = 10^4 - 10^5 \text{ cm}^{-1}$ , i u (2.46) stavimo kritičnu vrednost  $M_0 = \hbar\omega_c$  dobijamo da je  $\frac{N_0}{N} \approx 10^{-4}$ . Zamenom ove vrednosti u (2.49), dobijamo da za sve intenzitete svetlosti (koje razmatramo tj. do  $M_0 = \hbar\omega_c$ )  $X(\vec{k}_f, \vec{q}_0) < 1$ , tj. može se smatrati da je razvoj (2.28) korektan. Konvergencija je najslabija za intenzitete svetlosti bliskim onima kada je  $M_0 \approx \hbar\omega_c$ .

## 2.2. ENERGIJSKI GEP NA APSOLUTNOJ NULI

Totalni redukovani hamiltonijan  $H_{\text{red}}^{\text{tot}}$  za slučaj elektron-fonon i elektron-foton interakcije možemo dobiti ako, shodno jedn. (2.21) i (2.26), hamiltonijanu  $H_{\text{red}}^{\text{EM}}$  dodamo efektivnu dvočestičnu interakciju nastalu virtualnom izmenom fonona (pogledati jedn. (1.11), (1.12) i (1.13)).

$$H_{\text{red}}^{\text{tot}} = \sum_{\vec{k}, b} \left[ \hbar \vec{v}_f(\vec{k} - \vec{k}_f) - \mu_0 \right] a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}b} - \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}, \vec{k}', b} (V_{\vec{k}, \vec{k}'} - 2N \mu_0 \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}) a_{\vec{k}b}^+ a_{-\vec{k}-b}^+ a_{-\vec{k}'-b} a_{\vec{k}'b} \quad (2.50)$$

$$- \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}, \vec{k}', b} (V_{\vec{k}, \vec{k}'} - 2N \mu_0 \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}) a_{\vec{k}b}^+ a_{-\vec{k}-b}^+ a_{-\vec{k}'-b} a_{\vec{k}'b}$$

ili

$$H_{\text{red}}^{\text{tot}} = \sum_{\vec{k}, b} E_{0\vec{k}} a_{\vec{k}b}^+ a_{\vec{k}b} - \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}, \vec{k}', b} V_{\vec{k}, \vec{k}'}^{\text{tot}} a_{\vec{k}b}^+ a_{-\vec{k}-b}^+ a_{-\vec{k}'-b} a_{\vec{k}'b} \quad (2.51)$$

gde je

$$E_{0\vec{k}} = \hbar \vec{v}_f(\vec{k} - \vec{k}_f) - \mu_0 \quad (2.52)$$

$$V_{\vec{k}, \vec{k}'}^{\text{tot}} = V_{\vec{k}, \vec{k}'} - 2N \mu_0 \delta_{\vec{k}, \vec{k}'} \quad (2.53)$$

Kako  $E_{0\vec{k}}$  i  $V_{\vec{k}, \vec{k}'}^{\text{tot}}$  ne zavise od spina elektrona, možemo (2.51)

napisati

$$H_{\text{red}}^{\text{tot}} = 2 \sum_{\vec{k}} E_{0\vec{k}} a_{\vec{k}1/2}^+ a_{\vec{k}1/2} - \frac{1}{N} \sum_{\vec{k}, \vec{k}'} V_{\vec{k}, \vec{k}'}^{\text{tot}} a_{\vec{k}1/2}^+ a_{-\vec{k}-1/2}^+ a_{-\vec{k}'-1/2} a_{\vec{k}'1/2} \quad (2.54)$$

Dakle,  $H_{\text{red}}^{\text{tot}}$  je potpuno analogan po obliku hamiltonijanu (1.14), i možemo primeniti na (2.54) Bogoljubovljevu transformaciju (1.16) i tada dobijamo jednačinu za energijski gep (vid. jedn. (1.26))

$$\Delta_{\vec{k}} = \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}'} \frac{V_{\vec{k}, \vec{k}'}^{\text{tot}} \Delta_{\vec{k}'}}{\sqrt{\Delta_{\vec{k}'}^2 + E_{0\vec{k}'}^2}} = \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}'} \frac{(V_{\vec{k}, \vec{k}'} - 2N \mu_0 \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}) \Delta_{\vec{k}'}}{\sqrt{\Delta_{\vec{k}'}^2 + E_{0\vec{k}'}^2}} \quad (2.55)$$

Jasno je da su i ostali rezultati analogni, npr. u jednačinama (1.27) i (1.29) treba staviti umesto  $v_{\vec{k}, \vec{k}'} \rightarrow v_{\vec{k}, \vec{k}'}^{\text{tot}}$  i  $E_{\vec{k}'} \rightarrow E_{0\vec{k}'}$ .

Jednačinu (2.55) rešavaćemo koristeći standardne aproksimacije BCS teorije, pogl. jednačine (1.36) do (1.39) u tezi. Dakle, jedn. (2.55) postaje prvo

$$1 = - \frac{\mu_0}{\sqrt{\Delta^2 + E_{0\vec{k}}^2}} + \frac{V}{2N} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\sqrt{\Delta^2 + E_{0\vec{k}}^2}} \quad (2.56)$$

Kada sa sume predjemo na integral dobijamo

$$1 + \frac{\mu_0}{\sqrt{\Delta^2 + E_{0\vec{k}}^2}} = \frac{Va^3 k_f^2}{4\pi^2 \hbar v_f} \int_{\varphi - 2\hbar v_f k_g}^{\varphi} \frac{dy}{\sqrt{\Delta^2 + y^2}} \quad (2.57)$$

gde je  $\varphi = \hbar v_f k_g - \mu_0 = \hbar \omega_c - \mu_0$ . Primetimo da ćemo u daljem izlaganju (prilikom računa) uzimati  $\hbar \omega_c = \hbar \omega_D$ ,  $\omega_D$  je Debyeova frekvencija. Posle integraljenja i sredjivanja dobijamo jednačinu za energijski gip na apsolutnoj nuli za superprovodnik u polju laserske svetlosti

$$\ln \frac{\varphi + \sqrt{\Delta^2 + \varphi^2}}{\varphi - 2\hbar \omega_c + \sqrt{\Delta^2 + (\varphi - 2\hbar \omega_c)^2}} = \frac{4\pi^2 \hbar v_f}{Va^3 k_f^2} \left( 1 + \frac{\mu_0}{\sqrt{\Delta^2 + \varphi^2}} \right) \quad (2.58)$$

Prvo ćemo analizirati jedn. (2.58) za neke ekstreme slučajeve.

1. Ako je  $\mu_0 \ll \hbar\omega_c$ , tj. mali intenzitet svetlosti, jednačina (2.58) se može svesti na

$$\ln \frac{(2\hbar\omega_c)^2 \left[ 1 - \left( \frac{\mu_0}{\hbar\omega_c} \right)^2 \right]}{\Delta^2} = \frac{4\pi^2 \hbar v_f}{v_a^3 k_f^2} \left( 1 + \frac{\mu_0}{\hbar\omega_c} \right)$$

S obzirom da je  $\mu_0 \ll \hbar\omega_c$  zadržaćemo se do člana linearog po  $\frac{\mu_0}{\hbar\omega_c}$ , uz uslov  $\frac{\mu_0}{\hbar\omega_c} \ll \frac{1}{2\hbar\omega_c}$  dobijamo

$$\Delta = \Delta_0 \left( 1 - \frac{\mu_0}{\hbar\omega_c} \ln \frac{2\hbar\omega_c}{\Delta_0} \right) \quad (2.59)$$

gde je  $\Delta_0$  energijski gep na absolutnoj nuli u odsustvu elektromagnetskog polja, a

$$\ln \frac{2\hbar\omega_c}{\Delta_0} = \frac{2\pi^2 \hbar v_f}{v_a^3 k_f^2} = \frac{1}{N(0)V} \quad (2.60)$$

$N(0)$  je gustina elektronskih stanja za jedan spin po jedinici energije jedn. (1.38). Kako je  $\mu_0$  srazmerno broju fotona  $N_0$  vid. (2.46), odnosno intenzitetu laserske svetlosti, iz (2.59) zaključujemo da energijski gep približno linearno opada sa intenzitetom svetlosti. Ovaj rezultat je u punoj saglasnosti

sa eksperimentalnim [6] i teorijskim radovima [5], [10] i [11] (videti jedn. (2.2) u tezi). Napomenimo da u našem pristupu nema fenomenoloških parametara.

2. Za  $\mu_0 \sim \hbar\omega_c$ , tj.  $\varphi \sim 0$ , iz (2.58) se dobija

$$\Delta = 4\hbar\omega_c e^{-\frac{2}{N(0)V} \frac{\mu_0}{\Delta}} \quad (2.61)$$

Kao što se lako može videti ova jednačina ima jedino rešenje

$$\Delta = 0 \quad (2.62)$$

tj. za vrednost  $\mu_0 = \hbar\omega_c$  energijski gep postaje jednak nuli.

Jednačina (2.58) može se rešiti aproksimativno i u slučaju  $\mu_0 \approx \hbar\omega_c$ , tj. za vrednosti  $\mu_0$  koje su bliske rezultatu  $\Delta = 0$ . Posle nešto dužeg računa dobija se

$$\Delta = 2\sqrt{2}\hbar\omega_c \sqrt{1 - \frac{\mu_0}{\hbar\omega_c}} e^{-\frac{1}{N(0)V} \frac{\mu_0}{\hbar\omega_c - \mu_0}} \quad (2.63)$$

Lako se može videti da energijski gep  $\Delta$  kontinualno teži nuli sa porastom intenziteta svetlosti. Ovaj zaključak je u saglasnosti sa rezultatom Jelesina [9] (jedn. (2.3) u tezi) i eksperimentalnim radovima [7] i [8]. Dakle, predviđeni fazni prelaz prve vrste prema modelu Owena i Scalapina nije konstatovan, te naš rezultat potvrđuje najnoviji zaključak Jhy-Jiun Changa i Scalapina [59].

3. U slučaju  $\mu_0 > \hbar\omega_c$ , može se posle grubljih aproksimacija dobiti rezultat

$$\Delta = -\sqrt{\mu_0 \hbar \omega_c} \quad (2.64)$$

Ovde bi laserska svetlost mogla da poveća superprovodni energijski gep, mada treba primetiti da je sistem u metastabilnom stanju. Kao što smo zaključili u diskusiji o konvergentnosti razvoja (2.28), kada je  $\mu_0$  veliko da bi  $X(\vec{k}_f, \vec{q}_0)$  bilo što manje treba ići ka ultraljubičastoj oblasti laserske svetlosti. Međutim i za taj deo spektra da bi se dobilo  $\mu_0 > \hbar\omega_c$ , potrebne su vrednosti  $N_0$  takve da  $X(\vec{k}_f, \vec{q}_0)$  nije mala veličina i ne može se opravdati razvoj (2.28). Dakle, ovaj poslednji veoma interesantni zaključak je izведен za takve vrednosti intenziteta laserske svetlosti, gde se naš pristup ne može smatrati korektnim. Takodje bi ovde (usled relativno velikog intenziteta svetlosti) trebalo uzeti u obzir i rekombinacioni proces.

Slučaj 3. je diskutovan u [10], gde je izведен zaključak da takva metastabilna stanja (sa povećanim energijskim gepom) ne mogu da se javi. Do interesantnog rezultata je došao Eliašberg [64]. Eliašberg zaključuje da bi superprovodni tanki film u stimulisanom promenljivom polju (npr. impulsni laser), mogao da ima povećani energijski gep (kritičnu temperaturu) za frekvencije  $\omega > \omega_{kr}$  ( $\omega_{kr}$  je neka kritična frekvencija). Pitanje da li je stanje za  $T > T_c$  stabilno ili metastabilno postavlja otvorenim. Koliko je nama poznato nema daljih radova o ovom zaključku izvedenom 1970 god. U vezi sa pitanjem o

Povećanju superprovodnog energijskog gepa usled dejstva laserske svetlosti pomenimo i eksperimentalni rad, [65], gde je opaženo zнатно povećanje kritične temperature legure  $\text{Nb}_{0,8}\text{-Sn}_{0,2}$  za vreme i posle dejstva laserskih impulsa. Dakle, konstatovano je da je novo stanje legure (sa višom  $T_c$ ) stabilno. Legura Nb-Sn je superprovodnik drugog reda. Takodje nam nije poznat nastavak ovog rada objavljenog 1973 god. Zasad, smatramo, jedino se može reći da pitanje o povećanju superprovodne kritične temperature usled laserskog dejstva ostaje i dalje otvoreno.

Mada se na osnovu razmatranja slučaja 1. i 2. može uglavnom steći slika zavisnosti energijskog gepa od intenziteta svetlosti, poželjno bi bilo da se dobije detaljna zavisnost energijskog gepa od intenziteta u celom intervalu počev od  $M_0 = 0$  do  $M_0 = \hbar\omega_c$ . To je uradjeno numerički u sledećem paragrafu, gde se ispituje i zavisnost energijskog gepa od temperature za različite intenzitete svetlosti.

## 2.3. ENERGIJSKI GEP NA KONAČNIM TEMPERATURAMA

Jednačina koja definiše energijski gep na konačnim temperaturama za superprovodnik osvetljen laserskim snopom, može se dobiti istim rezonom kao u [3], te imamo [13] (pogledati jedn. (1.26), (1.42) i (2.55) u tezi)

$$\Delta_{\vec{k}} = \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}'} \frac{v_{\vec{k}, \vec{k}'}^{\text{tot}} \Delta_{\vec{k}'}}{\sqrt{\Delta_{\vec{k}'}^2 + E_{0\vec{k}'}^2}} (1 - 2 f_{\vec{k}'}) \quad (2.65)$$

gde je  $f_{\vec{k}'}^+$  funkcija Fermi-Diracove raspodele,  $E_{0\vec{k}'}$  je dato jedn. (2.52). Jednačinu (2.65) možemo napisati i u obliku

$$\Delta_{\vec{k}} = \frac{1}{2N} \sum_{\vec{k}'} \frac{(v_{\vec{k}, \vec{k}'} - 2N\mu_0 \delta_{\vec{k}, \vec{k}'}) \Delta_{\vec{k}'}}{\sqrt{\Delta_{\vec{k}'}^2 + E_{0\vec{k}'}^2}} \tanh \frac{\sqrt{\Delta_{\vec{k}'}^2 + E_{0\vec{k}'}^2}}{2k_B T} \quad (2.66)$$

Ako sa sume predjemo na integral, i koristimo standardne aproksimacije BCS teorije prilikom rešavanja jednačine za energijski gip, dobijamo

$$1 + \frac{\mu_0}{\sqrt{\Delta^2 + E_{0\vec{k}}^2}} \tanh \frac{1}{2k_B T} \sqrt{\Delta^2 + E_{0\vec{k}}^2} = \quad (2.67)$$

$$= \frac{N(0)V}{2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{\sqrt{\Delta^2 + y^2}} \tanh \frac{1}{2k_B T} \sqrt{\Delta^2 + y^2}$$

gde je  $y_1 = -\hbar\omega_c - \mu_0$  i  $y_2 = \hbar\omega_c - \mu_0$ .

Kada u jedn. (2.67) stavimo  $\Delta = 0$ , dobijamo jednačinu koja definiše kritičnu temperaturu  $T_c$  superprovodnika ( $T_c$  je ovde kritična temperatura za dato  $\mu_0$ )

$$1 + \frac{\mu_0}{E_{0\vec{k}}} \tanh \frac{1}{2k_B T_c} E_{0\vec{k}} = \frac{N(0)V}{2} \int_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y} \tanh \frac{y}{2k_B T_c} \quad (2.68)$$

Transcedentne jednačine (2.67) i (2.68) su nerešive analitički,

kao i u slučaju BCS teorije bez polja jedn. (1.44) i (1.45). Naime, integrali na desnoj strani pomenutih jednačina nisu rešivi analitički. Jednačinu za energijski gep (2.67) smo rešavali prvo aproksimativno, analitički, a zatim egzaktno kao numerički problem. Takodje smo jednačinu (2.68) za kritičnu temperaturu rešavali numerički.

Prilikom aproksimativnog rada koristili smo da je  $\tanh x \approx x$  za  $x \leq 1$  i  $\tanh x \approx 1$  za  $x \gg 1$ . Dobijena zavisnost energijskog gepa od temperature je slična BCS slučaju bez elektromagnetskog polja (vid. sl. 1.). Za temperature za koje je  $T \ll T_c$  energijski gep je približno nezavisan od temperature, što se može videti iz sledećeg: kako je  $T \ll T_c$  to je i  $k_B T \ll \Delta$  te je argument  $\tanh$  u jedn. (2.67) znatno veći od 1 tj.  $\tanh x = 1 = \text{const}$  za  $x \gg 1$ . Kada je temperatura oko sredine intervala  $(0, T_c)$ , energijski gep znatnije opada i to približno linearno sa temperaturom. Za temperature bliske kritičnoj, tj.  $T \approx T_c$ , konstatovana je zavisnost

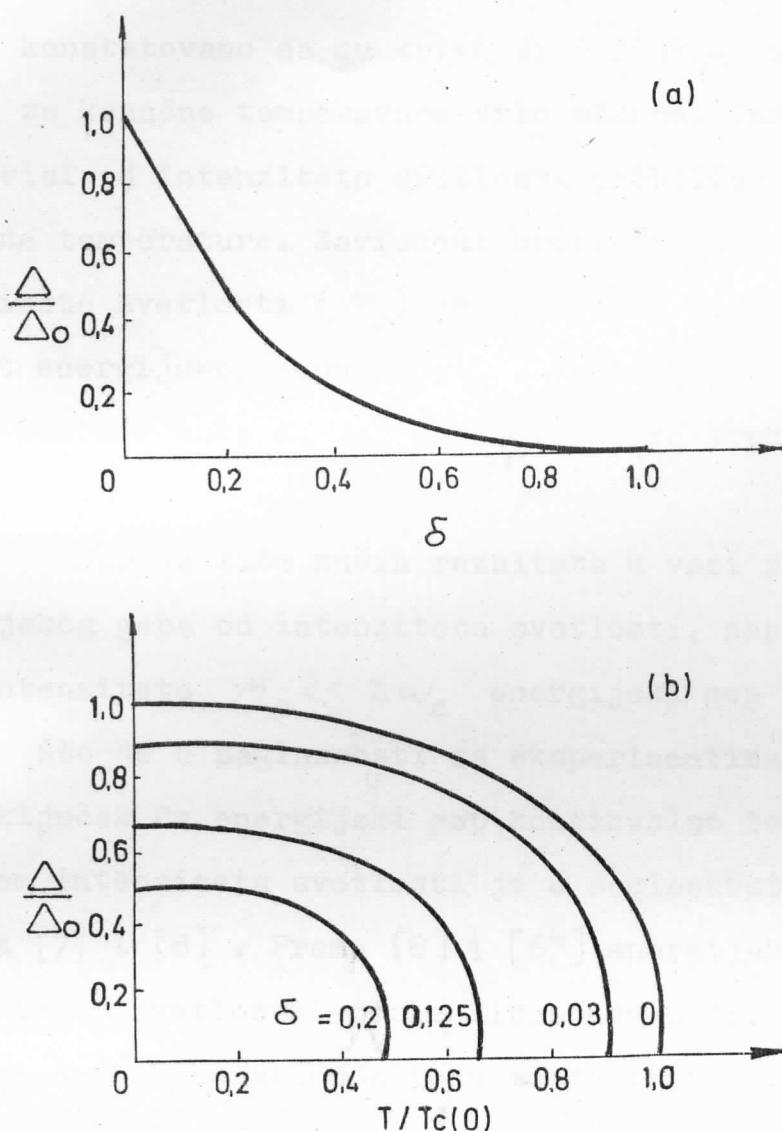
$\Delta \sim \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}$ , videti jedn. (1.49). Dakle, kao i u slučaju bez polja, izvod funkcije  $\Delta = f(T)$  je beskonačan u  $T_c$  tj. postoji fazni prelaz druge vrste.

Pozitivan izvod funkcije  $f(T)$  za energijski gep u tački  $T = 0$  nije konstatovan našom analizom, a ni numeričkim rešavanjem. Videli smo u diskusiji rada [5] da je predviđen mali porast energijskog gepa sa temperaturom za manje temperature (sl.2). To je i potvrđeno eksperimentom [6], gde je zapažen porast energijskog gepa za oko  $5 \cdot 10^{-3} \Delta_0$ . Iz naše jednačine za energijski gep (2.66), (2.67), dakle, ne sledi ovaj

porast energijskog gepa, za razliku od jedn. (2.1) Owena i Scalapina. Ta razlika proističe usled toga što se naš dodatni hemijski potencijal  $M_0$  odnosi na sve provodne elektrone, dok je kod Owena i Scalapina dodatni hemijski potencijal  $M^*$  definisan samo za kvazičestice (eksitovane rasparene elektrone). Ovaj problem nije diskutovan u drugim radovima. Što se tiče daljeg dela krive  $\Delta = f(T)$ , u [6] dobijena je zavisnost kao u BCS slučaju bez polja do temperature  $\Delta \approx 3k_B T$ . Za dalji deo nije obavljeno merenje, ali se očekuje da je BCS oblika, odnosno oblika kao kod nas sl. 3.

Jednačine za energijski gep (2.67) i za kritičnu temperaturu (2.68) rešavali smo numerički (metod iteracije) za olovo i kalaj, tj. za one metale na kojima su vršeni eksperimenti [4], [6], [8]. Obe jednačine su rešavane za vrednosti  $M_0$  počev od  $M_0 = 0$  (slučaj bez spoljnog polja) do  $M_0 = \hbar\omega_c$ , za  $M_0 = \hbar\omega_c$   $\Delta = 0$  (vid. jedn. (2.62)). Jednačina za energijski gep je rešavana i za temperature počev od 0 do  $T_c$ , tj. do kritične temperature za dato  $M_0$ .

Na slici 3. dati su rezultati računa za Pb. Krive koje odgovaraju Sn imaju isti oblik kao i za Pb, jedina je razlika u tome što krive za Sn imaju niže vrednosti, usled većeg odnosa koeficijenta  $\frac{\hbar\omega_D}{T_c(0)}$  (uzimamo  $\hbar\omega_c = \hbar\omega_D$ ). Naime, vrednosti za Debyeevu temperaturu i za superprovodnu kritičnu temperaturu za Sn i Pb su prema [66] :  
Sn  $\hbar\omega_D = 196^\circ K$ ,  $T_c(0) = 3,72^\circ K$  ; Pb  $\hbar\omega_D = 102^\circ K$ ,  
 $T_c(0) = 7,19^\circ K$ .



Sl. 3. Pb a) Redukovani energijski gap ( $\Delta_0$  je BCS gap (1.39) u odsustvu polja) u funkciji bezdimenzionog parametra  $\delta = \mu_0/\hbar\omega_D$  na apsolutnoj nuli. b) Redukovani energijski gap u funkciji temperature za razne vrednosti  $\delta$  počev od  $\delta = 0$  (BCS slučaj bez polja) do  $\delta = 0,2$ . Sa  $T_c(0)$  je obeležena kritična temperatura (1.46) za BCS slučaj u odsustvu polja.

Sa slike 3. (b) vidimo da energijski gep ima približno istu temperatursku zavisnost za različite vrednosti  $M_0$ , tj. za različite intenzitete laserske svetlosti. Takođe je konstatovano da su krive  $\Delta = f(M_0)$  za absolutnu nulu i za konačne temperature vrlo slične. Dakle, energijski gep zavisi od intenziteta svetlosti približno na isti način za razne temperature. Zavisnost kritične temperature  $T_c$  od intenziteta svetlosti ( $M_0$ ) je praktično identična kao i zavisnost energijskog gepa od  $M_0$ . Jasno je da kritična temperatura postaje nula za  $M_0 = \hbar\omega_c$ , tj. za vrednost  $M_0$  kada je  $\Delta = 0$ .

Što se tiče naših rezultata u vezi sa zavisnošću energijskog gepa od intenziteta svetlosti, napomenimo da za male intenzitete  $M_0 \ll \hbar\omega_c$  energijski gep linearno opada sa  $M_0$  što je u saglasnosti sa eksperimentima [6]. Takodje, naš zaključak da energijski gep kontinualno teži nuli sa povećanjem intenziteta svetlosti je u saglasnosti sa eksperimentima [7] i [8]. Prema [6] i [67] energijski gep opada sa intenzitetom svetlosti, posle linearног dela, nešto sporije tj. srazmerno kvadratnom korenu intenziteta svetlosti. Prema našim proračunima dobijeno je nešto brže opadanje energijskog gepa sa porastom intenziteta svetlosti. To je posledica toga što u našem pristupu nije uzet u obzir rekombinacioni proces, čiji se doprinos povećava sa porastom intenziteta svetlosti, tj. sa povećanjem broja rasparenih Cooperovih parova. Dakle, rekombinacija dovodi do smanjenja broja rasparenih elektrona te energijski gep opada nešto sporije sa intenzitetom svetlosti.

Nažalost, nema eksperimenata koji bi pokazivali detaljnu zavisnost energijskog gepa od intenziteta svetlosti, počev od intenziteta za koji je  $\mu_0 \approx \frac{\hbar\omega_c}{2}$  do onih za koji je energijski gep jednak nuli  $\mu_0 = \hbar\omega_c$ .

Pre nego što detaljnije diskutujemo o problemu rekombinacije, napomenimo da se pod rekombinacijom ovde misli na proces pri kome dva eksitovana elektrona (raspareni BCS parovi) preko virtualne izmene fonona ponovo obrazuju Cooperove parove. Vreme za koje se vrši rekombinacija u BCS parove preko emisije fotona [58] je znatno duže od vremena rekombinacije preko emisije fonona, te je taj proces zanemarljiv. U BCS teoriji [3] predpostavlja se da je vreme rekombinacije  $\tau_R$  veoma veliko u poređenju sa  $h/\Delta$  ( $h/\Delta$  je karakteristično vreme za promene fizičkih osobina sistema), tako da rekombinacioni proces značajnije ne menja energijske nivoe elektronskog sistema. Napomenimo da je za većinu superprovodnika

$$\frac{h}{\Delta} \approx 10^{-12} - 10^{-13} \text{ sec.}$$

Rotwarf i Cohen [54] su računali vreme rekombinacije za olovo, za temperature  $T < T_c$  (ne i za  $T \gtrsim T_c$ ), i dobili  $\tau_R = 1,67 \cdot 10^{-8} \text{ sec}$  za  $T = 1,44^\circ\text{K}$ . Vreme rekombinacije je dobiteno izračunavanjem verovatnoće prelaza za jedinicu vremena, pri čemu su talasne funkcije oblika (1.41) sa jednim, odnosno sa tri  $a_K^+$  operatora (eksitovana još dva elektrona koji se rekombinuju). Interakcija je elektron-fonon jedn. (1.5). Dobrajena je temperaturska zavisnost  $\tau_R$  za  $T < T_c$

$$\tau_R \sim \left(\frac{\Delta}{k_B T}\right)^{1/2} e^{-\frac{\Delta}{k_B T}} \quad (2.69)$$

Jednačina (2.69) je potvrđena u više eksperimenata npr. [8]. [9] i [67]. Iz (2.69) vidimo da vreme rekombinacije opada sa temperaturom i da zavisi od energijskog gepa  $\Delta$ . Kako je energijski gep funkcija intenziteta svetlosti i to opada sa intenzitetom, može se zaključiti prema (2.69) da vreme rekombinacije opada sa porastom intenziteta svetlosti. Rotwarf i Taylor [55] su ukazali na činjenicu da fononi stvoreni rekombinacijom stvaraju nove kvazičestice, i povezali su vreme rekombinacije koje se eksperimentalno meri sa vremenom  $\tau_R$  jedn. (2.69) preko fenomenološkog modela. Model Rotwarfa i Taylora je dosta korišćen u analizi rekombinacionog procesa kako u teorijskim tako i u eksperimentalnim radovima.

U eksperimentima [8], [9] i [67] mereno je vreme rekombinacije za Pb i Sn i dobijena je temperaturska zavisnost (2.69), a vreme  $\tau_R$  je uglavnom veće od  $10^{-9}$  sec. Kvantitativna slaganja izmedju eksperimenta i teorije [54] i [55] nisu potpuna, razlika je obično za faktor 2 do 3. U radu Graya i drugih [68] mereno je vreme rekombinacije za aluminijum, i dobijena je temperaturska zavisnost (2.69), dok je za više temperature  $T \gtrsim T_c$  dobijeno da  $\tau_R$  raste sa porastom temperature. Dakle, za temperature bliske  $T_c$  vreme rekombinacije se ne smanjuje. Mada nije merena zavisnost  $\tau_R$  od intenziteta svetlosti, na osnovu jedn. (2.69) može se zaključiti da vreme rekombinacije  $\tau_R$  opada sa intenzitetom, te da za veće intenzitete

rekombinacioni proces daje veći doprinos. Inače, očekuje se da se eksitovani elektroni prvo termalizuju sa rešetkom [5], tj. da je vreme termalizacije manje od vremena rekombinacije.

Clarke [60] je ispitivao vreme termalizacije  $\tau_T$  eksitovanih elektrona, i došao do zaključka da  $\tau_T$  ima sledeću temperatursku zavisnost izraženu preko energijskog gepa  $\tau_T \sim \frac{\Delta\omega}{\Delta}$ . Vidimo da sa porastom temperature  $\tau_T$  raste, tj. termalizacija je sporija. Eksperiment na Sn [60] dao je vrednost za  $\tau_T = 4 \cdot 10^{-10} \frac{\Delta\omega}{\Delta}$  sec. Ovaj rezultat je u zadovoljavajućem slaganju sa teorijskim zaključkom [61]. Iz ovoga možemo zaključiti da je vreme termalizacije ipak manje od vremena rekombinacije, osim možda za više temperature i veće intenzitete svetlosti kada ova dva vremena postaju poredljiva. Mada dosadašnja diskuja i rezultati eksperimenata uglavnom pokazuju opravdanost našeg pristupa, vidi se i potreba za uključivanjem rekombinacionog procesa što će biti predmet naših daljih istraživanja.

## Z A K L J U Č A K

U prvoj glavi teze dat je kraći pregled BCS teorije, s tim da je veća pažnja posvećena onim problemima koji su neophodni za dalje izlaganje materijala. Detaljnije je obradjena Fröhlichova transformacija, dijagonalizovanje hamiltonijana i aproksimativno rešavanje jednačine za energijski gip na apsolutnoj nuli i na konačnim temperaturama. Zatim su diskutovana elektromagnetska svojstva superprovodnika, BCS objašnjenje Meissnerovog efekta kao i problem gradijentne neinvarijantnosti redukovanih BCS hamiltonijana. Na kraju glave pomenute su neke osobenosti superprovodnih tankih filmova.

U drugoj glavi prvo je dat pregled radova posvećenih problemu uticaja laserskog zračenja na superprovodnost. Zatim je detaljno izložen originalni deo teze. Na ukupni hamiltonijan sistema (elektron-fonon i elektron-foton interakcija) primenjena je transformacija analogna Fröhlichovoj. Diskutovana je konvergentnost razvoja i zatim su izvedene jednačine za energijski gip na apsolutnoj nuli i na konačnim temperaturama. Jednačine za energijski gip su rešavane analitički, aproksimativno, a zatim numerički za Sn i Pb. Na kraju je diskutovan problem rekombinacije eksitovanih elektrona u Cooperove parove.

Možemo zaključiti da je dat mikroteorijski pristup problemu superprovodnika osvetljenog laserskom svetlošću. U našoj analizi se ne pojavljuju fenomenološki parametri za razliku od drugih teorijskih radova. Dobijen je dodatni hemijski

potencijal elektrona izražen preko karakteristika elektrona, ftona, parametara kristalne rešetke i intenziteta laserskog snopa. Dobijena je temperaturska zavisnost energijskog gepa slična BCS slučaju bez polja. Konstatovano je da energijski gep kontinualno teži nuli sa porastom intenziteta laserske svetlosti, tj. ne postoji fazni prelaz prve vrste. Ispitivana je zavisnost energijskog gepa od temperature u intervalu  $(0, T_c)$ , a takodje i zavisnost energijskog gepa od intenziteta svetlosti u intervalu  $\omega_0 = 0$  do  $\omega_0 = \hbar\omega_c$  (za  $\omega_0 = \hbar\omega_c$   $\Delta = 0$ ). Dobijeno je u krucijalnim pitanjima zadovoljavajuće slaganje sa rezultatima teorijskih i eksperimentalnih rada. Treba istaći potrebu za merenjima energijskog gepa u pomenutim kompletним intervalima temperature i intenziteta svetlosti.

Medjutim, moramo reći da naš pristup nije kompletna deskripcija osobina superprovodnika u polju laserske svetlosti. Uvidja se potreba za uključivanjem u razmatranje i rekombinacionog procesa, a verovatno je potrebno da se konzistentno primeni teorija za superprovodni tanki film, iako se radi sa filmovima debljine oko nekoliko stotina Å. Ova dva problema biće predmet daljih istraživanja. Na kraju podvucimo neophodnost za detaljnijim i desizivnijim eksperimentima, koje treba obaviti pre nego što se može učiniti značajniji progres u razumevanju problema superprovodnika u promenljivom elektromagnetnom polju. Naš pristup se može smatrati modelom, koji može da služi kao jedna od osnova za diskusiju i poređenje sa eksperimentalnim rezultatima.

L I T E R A T U R A

- [1] H. Kamerlingh Onnes, Comm. Phys. Lab. Univ. Leiden, No. 119, 120, 122 (1911).
- [2] W. Meissner i R. Ochsenfeld, Naturwiss., 21, 787 (1933).
- [3] J. Bardeen, L. N. Cooper i J. R. Schrieffer, Phys. Rev., 108, 1175 (1957).
- [4] L. R. Testardi, Phys. Rev., 4, 2189 (1971).
- [5] C. S. Owen i D. J. Scalapino, Phys. Rev. Letters, 28, 1559 (1972).
- [6] W. H. Parker i W. D. Williams, Phys. Rev. Letters, 29, 924 (1972).
- [7] G. A. Sai-Halasz, C. C. Chi, A. Denenstein i D.N.Langenberg, Phys. Rev. Letters, 33, 215 (1974).
- [8] P. Hu, R.C. Dynes i V. Narayananamurti, Phys. Rev., 10, 2786 (1974).
- [9] V. F. Jelesin, ŽETF, 66, 1755 (1974).
- [10] R. A. Vardanjan i B. I. Ivljev, ŽETF, 65, 2315 (1973).
- [11] G. M. Eliašberg, ŽETF, 61, 1254 (1971).
- [12] G. M. Vujičić i B. S. Tošić, Phys. stat. sol. (b), 69, 655 (1975).
- [13] G. M. Vujičić, Phys. stat. sol. (b), 72, K 153 (1975).
- [14] H. Fröhlich, Proc. Roy. Soc., 215, 291 (1952).
- [15] H. Fröhlich, Phys. Rev., 79, 845 (1950).
- [16] E. Maxwell, Phys. Rev., 78, 477 (1950).
- [17] C. A. Reynolds, B. Serin, W. H. Wright i L. B. Nesbitt, Phys. Rev., 78, 487 (1950).

- [18] L. N. Cooper, Phys. Rev., 104, 1189 (1956).
- [19] J. Bardeen, Phys. Rev., 97, 1724 (1955).
- [20] N. N. Bogoljubov, Nuovo Cimento, 2, 6 (1958).
- [21] N. N. Bogoljubov, Nuovo Cimento, 2, 94 (1958).
- [22] N. N. Bogoljubov, ŽETF, 34, 58 (1958).
- [23] N. N. Bogoljubov, ŽETF, 34, 73 (1958).
- [24] N. N. Bogoljubov, UFN, 67, 549 (1959).
- [25] J. Valatin, Nuovo Cimento, 2, 843 (1958).
- [26] J. R. Schrieffer, Theory of Superconductivity, W.A.Benjamin, Inc., New York, 1964.
- [27] J. M. Blatt, Theory of Superconductivity, Academic Press, New York, 1964.
- [28] M. Tinkham, Introduction to Superconductivity, McGraw-Hill, Inc., New York, 1975.
- [29] A. S. Davidov, Kvantovaja mehanjika, Fizmatgiz, Moskva, 1963.
- [30] C. Kittel, Quantum Theory of Solids, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963.
- [31] J. M. Ziman, Principles of the Theory of Solids, Cambridge University Press, Cambridge, 1972.
- [32] J. Bardeen i J. Schrieffer, Progr. Low. Temp. Phys., Vol 3, North-Holland, Amsterdam, 1961.
- [33] N. N. Bogoljubov, D. N. Zubarev i J. A. Cerkovnjikov, ŽETF, 39, 120 (1960).
- [34] A. A. Abrikosov, L. P. Garkov i I. E. Djalošinski, Metodi kvantovoj teoriji polja v statističeskoj fizike, Fizmatgiz, Moskva, 1962.

- [35] M. J. Buckingham, Phys. Rev., 101, 1431 (1956).
- [36] A. B. Pippard, Proc. Roy. Soc., A 216, 547 (1953).
- [37] A. B. Pippard, Nature, 172, 896 (1953).
- [38] E. Maxwell i O. S. Lutes, Phys. Rev., 95, 333 (1954).
- [39] D. C. Decker, D. E. Mapother i R. W. Shaw, Phys. Rev., 112, 1888 (1958).
- [40] T. E. Faber i A. B. Pippard, Proc. Roy. Soc., A 231, 53 (1955).
- [41] M. Schafroth, Phys. Rev., 111, 72 (1958).
- [42] G. Rikayzen, Phys. Rev., 111, 817 (1958).
- [43] P. Anderson, Phys. Rev., 110, 827 (1958).
- [44] D. Pines i J. Schrieffer, Nuovo Cimento, 10, 496 (1958).
- [45] G. Wentzel, Phys. Rev., 111, 1488 (1958).
- [46] L. P. Garkov, ŽETF, 34, 735 (1958).
- [47] G. M. Eliašberg, ŽETF, 38, 966 (1960).
- [48] W. Buckel, Supraleitung, Physik Verlag GmbH, Weinheim/Bergstr., 1972.
- [49] R. E. Allen, Phys. Rev., 12, 3650 (1975).
- [50] L. P. Garkov i G. M. Eliašberg, ŽETF, 54, 612 (1968).
- [51] S. A. Peskovacki, ŽETF, 58, 897 (1970).
- [52] I. I. Eru, V. A. Kaščej i S. A. Peskovacki, ŽETF, 58, 778 (1970).
- [53] A. H. Dayem i J. J. Wiegand, Phys. Rev., 155, 419 (1967).
- [54] A. Rotwarf i M. Cohen, Phys. Rev., 130, 1401 (1963).
- [55] A. Rotwarf i B. N. Taylor, Phys. Rev. Letters, 19, 27 (1967).
- [56] D. M. Ginsberg, Phys. Rev. Letters, 8, 204 (1962).

- [57] J. R. Schrieffer i D. M. Ginsberg, Phys. Rev. Letters, 8, 207 (1962).
- [58] E. Burstein, D. N. Langenberg i B. N. Taylor, Phys. Rev. Letters, 6, 92 (1961).
- [59] Jhy-Jiun Chang i D. J. Scalapino, Phys. Rev., 10, 4047 (1974).
- [60] J. Clarke, Phys. Rev. Letters, 28, 1363 (1972).
- [61] M. Tinkham i J. Clarke, Phys. Rev. Letters, 28, 1366 (1972).
- [62] W. A. Harrison, Solid State Theory, McGraw-Hill Book Company, New York, 1970.
- [63] V. M. Agranovič, Teorija eksitonov, Izd. "Nauka", Moskva 1968.
- [64] G. M. Eliašberg, Pisma v ŽETF, 11, 186 (1970).
- [65] V. N. Gridnjev i dr., Pisma v ŽETF, 18, 258 (1973).
- [66] G. Gladstone, H. Jensen i J. R. Schrieffer, Superconductivity in the Transition Metals: Theory and Experiment, u Superconductivity, Ed. R. D. Parks, Marcel Dekker, Inc., New York, 1969.
- [67] W. H. Parker, Solid State Communic., 15, 1003 (1974).
- [68] K. E. Gray, A. R. Long i C. S. Adkins, Philos. Mag., 20, 273 (1969).