



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU

Nelinearna dinamička analiza fizičkih procesa u životnoj sredini

DOKTORSKA DISERTACIJA

Komentori:
Prof. dr Miodrag Krmar
Prof. dr Dragutin T. Mihailović

Kandidat:
MSc Gordan Mimić

Novi Sad, 2016. godina

Sadržaj

1. Uvod	5
I Deo	
2. Modeli životne sredine	8
2.1. Opšti principi i upotreba	8
2.2. Ograničenja	12
3. Domen rešenja jednačina u modelima životne sredine	14
3.1. Dinamički sistemi	15
3.2. Stabilnost rešenja jednačina	16
3.3. Bifurkacije	19
3.4. Atraktor	22
3.5. Ljapunovljevi eksponenti	24
3.6. Kolmogorovljeva kompleksnost	28
3.7. Analiza rešenja jednačine energijskog bilansa na površini zemljišta	30
II Deo	
4. Informacione mere, entropija i kompleksnost	38
4.1. Srednja Kolmogorovljeva kompleksnost	48
4.2. Spektar Kolmogorovljeve kompleksnosti	51
4.3. Maksimalna Kolmogorovljeva kompleksnost	53
4.4. Sveukupna Kolmogorovljeva kompleksnost	53
5. Upotreba informacionih mera u analizi vremenskih serija dobijenih merenjima fizičkih faktora životne sredine	57
5.1. Analiza koncentracije radona u pećinama	58
5.2. Analiza protoka fluida životne sredine	64
5.3. Analiza prostorne raspodele padavina	76
5.4. Analiza temperature vazduha i padavina	80
5.5. Analiza UV-B zračenja	89

6. Primena informacionih mera u proceni kompleksnosti modela životne sredine	92
6.1. Kompleksnost modela životne sredine	92
6.2. Procene kompleksnosti klimatskih modela	93
7. Zaključak	102
Literatura	105
Dodatak A	113

Predgovor

U ovu doktorsku disertaciju je uloženo dosta energije, ali je u svakom trenutku poštovan princip minimalnog porasta entropije. Veliku zahvalnost dugujem mentoru Prof. dr Dragutinu Mihailoviću za dugogodišnju saradnju. Takođe, zahvaljujem se Prof. dr Darku Kaporu i Doc. dr Iliji Arseniću na uvek korisnim savetima. Disertaciju posvećujem svojim roditeljima.

Novi Sad, 21. april 2016.

Gordan Mimić

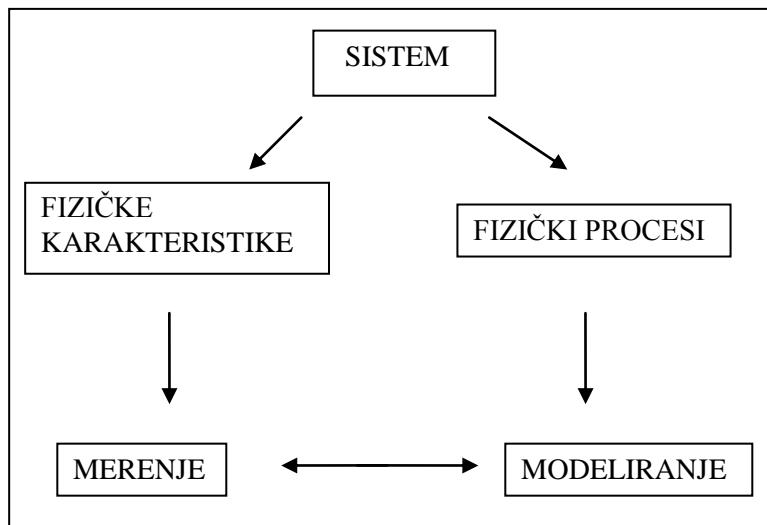
1. Uvod

Atmosfera zajedno sa hidrosferom, litosferom, kriosferom i biosferom čini životnu sredinu svih živih bića na planeti Zemlji. Kao takva, životna sredina je kompleksan sistem i interakcije između njenih pojedinih delova su nelinearne. Fizički procesi koji se odvijaju u životnoj sredini mogu da se predstave matematičkim modelima. Matematički model predstavlja formalan matematički opis ponašanja ili osobina nekog fizičkog sistema. Ako bismo imali potpuno tačan matematički opis to bi značilo da u potpunosti poznajemo osobine i ponašanje tog fizičkog sistema, i da pod datim uslovima možemo tačno da predvidimo njegovo buduće stanje. S obzirom da je, u opštem slučaju, nemoguće dati ovakav opis onda se vrše određene aproksimacije, kojima se zanemaruju uticaji koji malo doprinose promeni stanja sistema, i na taj način se formira model. U matematičkim modelima fizički procesi su obično predstavljeni diferencijalnim jednačinama. Analitičko rešavanje diferencijalnih jednačina je moguće najčešće samo za veoma pojednostavljene slučajeve i to uglavnom linearizovane sisteme jednačina. Rešavanje u opštem, nelinearnom obliku moguće je jedino numeričkim metodama (Mesinger, 1976). Međutim, kada se jednačine rešavaju numerički, putem računara, moraju da se prevedu iz analitičkog u numerički oblik, čime se diskretizuje račun u prostoru i vremenu i time se delimično gube informacije o procesu. Problem se javlja i kada jednačina izvedena iz opštih zakona fizike ne može adekvatno da opiše neki proces bez uvođenja dodatnih članova. Tada mora da se pribegne parametrizaciji procesa. Pri tome, na osnovu dovoljno velikog broja eksperimentalnih merenja, poluempirijskim metodama dolazimo do jednačine koja dobro opisuje proces ali pod određenim okolnostima, tj. pri određenoj vrednosti parametara koji figurišu u njoj. Bez obzira koliko su u današnje vreme modeli životne sredine usavršeni i sofistikovani, te mogu pouzdano da predvide određeno stanje nekog fizičkog sistema u nekom budućem periodu, način na koji oni predstavljaju procese u atmosferi i dalje nije u potpunosti tačan. Kao primer mogu da posluže numerički modeli za prognozu vremena, koji za period od dva-tri dana daju prilično tačnu prognozu ali se ipak desi da u određenoj situaciji prognoziraju kišu na određenoj lokaciji, a da kiša ne padne.

Pri rešavanju diferencijalnih jednačina potrebno je poznavati početne i granične uslove. Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine su veoma osetljive na početne uslove. To znači da mala promena u početnim uslovima vodi ka različitim rešenjima, odnosno različitim budućim stanjima sistema (Lorenz, 1963a). Lorenc (*Edward Lorenz*) je prvi ustanovio divergenciju rešenja usled male promene početnih uslova i takav odziv nazvao „efekat

leptira“, ilustrujući ga hipotetičkim primerom da zamah krila leptira na jednom delu planete može da utiče na stvaranje ciklona na drugom. Iz ovog Lorencovog zapažanja se vremenom razvila teorija haosa. Ona sa jednog drugačijeg aspekta posmatra nelinearne fenomene i kompleksne sisteme u prirodi, ispitujući postojanje obrazaca u njihovom ponašanju. Kompleksan sistem je sastavljen od delova koji međusobno interaguju nelinearno i između kojih postoji mnoštvo veza, pa stoga male promene u sistemu mogu značajno da utiču na njegovo buduće stanje. Ponašanje sistema jeste determinističko i evolucija stanja se odvija po jasnim zakonima, međutim nepotpuno poznavanje sadašnjeg stanja nas vodi ka pogrešnoj proceni budućeg.

Osnovna informacija koju možemo da imamo o stanju sistema dobija se merenjem njegovih fizičkih karakteristika. Vremenska serija merenih podataka nam govori o stanjima kroz koja je sistem prolazio u određenom periodu, iz čega možemo da izvedemo zaključak o ponašanju tog sistema, tj. o njegovoj dinamici. Potom se pravi model, odnosno formira jednačina ili sistem jednačina koje adekvatno opisuju evoluciju stanja usled fizičkih procesa koji se odvijaju u tom sistemu (slika 1.1). Uloga modela jeste da predviđa buduća stanja sistema. Što bolje razumemo ponašanje sistema to će naš model biti pouzdaniji.



Slika 1.1 Shematski prikaz pristupa proučavanju nekog fizičkog sistema.

Za ispitivanje nelinearnih osobina sistema primenjuju se različite metodologije a sam postupak se naziva nelinearna dinamička analiza. Jedan pristup predstavljaju elementi teorije haosa, što uključuje ispitivanje stabilnosti rešenja jednačina koje opisuju sistem pravljenjem bifurkacionog dijagrama, upotrebom Ljapunovljevih eksponenata (*Александр Михайлович Ляпунов*) ispituje se osetljivost sistema na početne uslove, računanjem atraktora određuje se

domen rešenja u faznom prostoru. Drugi pristup jeste analiza vremenskih serija merenih podataka o sistemu, računanjem različitih mera koje ukazuju na uređenost ili neuređenost u evoluciji stanja sistema, poput Šenonove entropije (*Claude Elwood Shannon*), aproksimativne entropije, entropije uzorka, Kolmogorovljeve kompleksnosti (*Андрей Николаевич Колмогоров*) i dr. Na ovaj način se pokušava steći dublji uvid u osobine datog sistema i što potpunije razumeti njegovo ponašanje, te samim tim preciznije prognozirati njegova buduća stanja.

U ovoj disertaciji je obavljena nelinearna dinamička analiza nekih fizičkih procesa u životnoj sredini, upotrebom oba gore pomenuta pristupa. U prvom delu je napravljen kritički osvrt na modele životne sredine, način na koji funkcionišu, za šta mogu da se koriste i koja su im ograničenja (poglavlje 2). Zatim je objašnjena matematička teorija o dinamičkim sistemima kao opštijem aspektu modeliranja. Razmatrani su elementi teorije haosa i njena metodologija, ispitana na primeru logističke jednačine, a potom upotrebljena za konkretan slučaj u kojem je površina zemljišta posmatrana kao jedan dinamički sistem, čije se ponašanje analizira (poglavlje 3). U drugom delu disertacije uvedene su nove informacione mere bazirane na konceptu Kolmogorovljeve kompleksnosti za ispitivanje nelinearnog ponašanja sistema kroz analizu vremenskih serija (poglavlje 4). Potom su nove mere testirane na vremenskim serijama različitih fizičkih parametara životne sredine, ispitujući na taj način količinu informacija koje nose o sistemu, prevashodno o nivou nasumičnosti. Korišćeni su podaci o koncentraciji radona u pećini u Slovačkoj, količini padavina i rečnim protocima u Bosni i Hercegovini, kao i podaci o temperaturi vazduha, količini padavina i UV zračenju u Srbiji (poglavlje 5). Druga primena novih mera se odnosi na analizu rezultata modela životne sredine, ispitivanjem kompleksnosti vremenskih serija dobijenih modeliranjem i osmatranjima, da bi se utvrdilo koliko relevantno neki klimatski model može da generiše seriju podataka u određenom vremenskom periodu i koliko dobro se to slaže sa osmatranjima (poglavlje 6). Poslednje poglavlje je ostavljeno za kratak pregled rada i izvođenje zaključaka.

2. Modeli životne sredine

2.1. Opšti principi i upotreba

Rešavanje diferencijalnih jednačina dinamike i termodinamike atmosfere, kao i životne sredine uopšte, analitičkim metodima je moguće uglavnom za idealizovane i znatno pojednostavljene slučajeve – linearizovane sisteme jednačina. Njihovo rešavanje u opštem, nelinearnom obliku, izvodivo je jedino numeričkim metodima (Mesinger, 1976). Numeričko rešavanje jednačina može da se vrši pomoću dva metoda. U prvom metodu se izabere skup tačaka u prostoru za koje se računaju vrednosti zavisno promenljivih veličina (npr. temperatura, pritisak, vlažnost vazduha itd.). Skup tačaka se naziva mreža pa se shodno tome ovakav pristup zove metod mreže tačaka. U drugom metodu se zavisno promenljive veličine razviju u ortogonalne redove, koji se zatim uvrste u sistem jednačina. Na taj način se umesto sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina dobije sistem običnih diferencijalnih jednačina, pri čemu su zavisno promenljive koeficijenti tih redova a nezavisno promenljiva samo vreme. Ovakav pristup se zove spektralni metod i on je ređe u upotrebi.

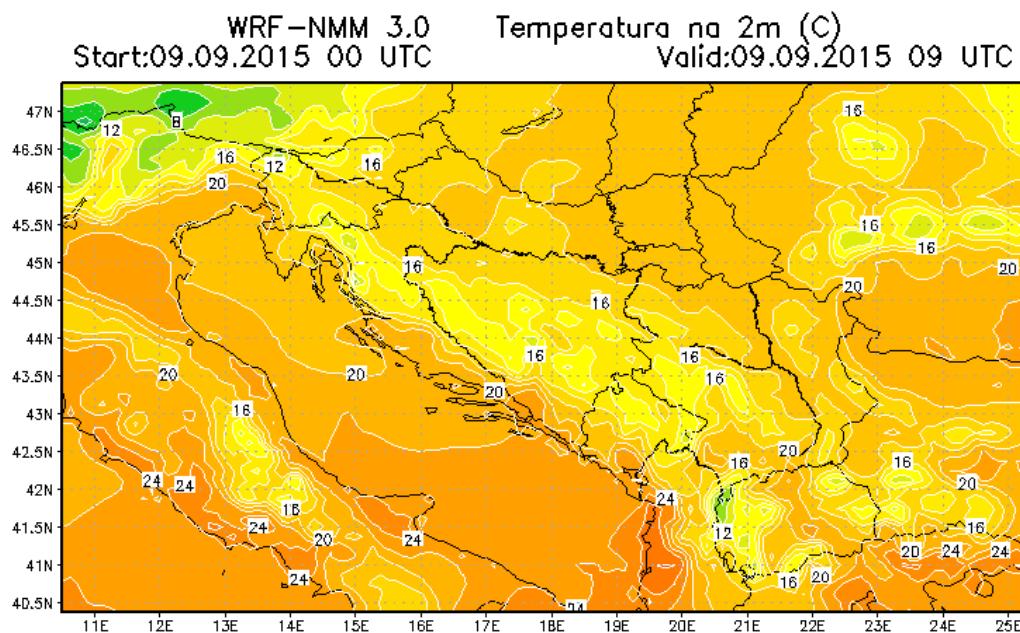
Kod metoda mreže tačaka, u oblasti za koju se vrši integracija neke diferencijalne jednačine, potrebno je definisati skup tačaka. Data diferencijalna jednačina se u tim tačkama zamenjuje približnom jednačinom koja koristi jedino vrednosti zavisno promenljivih. Na ovaj način se dobija skup algebarskih jednačina. Poznavanjem početnih vrednosti u svim tačkama i graničnih vrednosti u tačkama na granicama oblasti, moguće je rešiti sistem jednačina ponavljanjem računa veliki broj puta. Poznavanje samo skupa diskretnih vrednosti neke funkcije, umesto nje cele, uzrokuje smanjenje količine informacija o toj funkciji. Rastojanje između dve susedne tačke u mreži se naziva korak mreže. Ukoliko je korak mreže manji tada je količina informacija o datoј funkciji sigurno veća ali se određene informacije u ovakovom pristupu svakako gube. Način na koji se za datu diferencijalnu jednačinu formira približna jednačina sastoji se u tome da se izvodi u njoj zamene količnicima konačnih razlika. Postoji više načina na koji to može da se izvede ali je najvažnije da količnik bude konzistentan, a to znači da teži izvodu kada korak mreže teži nuli. Približna jednačina se naziva aproksimacija ili šema u konačnim razlikama. Ostatak koji se zanemari u aproksimaciji se naziva greška odsecanja. Rešenje koje se dobije pomoću šeme se često naziva numeričko rešenje. Ono može da se razlikuje od rešenja polazne diferencijalne jednačine, koje se obično naziva tačno rešenje. Razlika numeričkog i tačnog rešenja predstavlja grešku rešenja. Posebno je važno poznavati ponašanje greške rešenja kada prostorni i vremenski korak teže nuli (konvergencija) i kada broj računskih koraka neograničeno raste (stabilnost). Diferenciranje

po vremenu može da se vrši na nekoliko načina, zavisno od broja vremenskih nivoa za koje se koriste vrednosti funkcije pri jednom izračunavanju, pa stoga postoji nekoliko vremenskih šema.

Vilhelm Bjerknes (*Vilhelm Friman Koren Bjerknes*) je 1904. godine prvi izneo ideju o prognozi vremena rešavanjem sistema hidrodinamičkih jednačina koje opisuju fizičke procese u atmosferi, na osnovu poznavanja osmotrenog stanja. Tokom Prvog svetskog rata Luis Fraj Ričardson (*Lewis Fry Richardson*) se osmelio na prvi praktičan pokušaj računanja budućeg stanja atmosfere. Iako su rezultati nakon dugotrajnog proračuna bili pogrešni, ovo se smatra velikim doprinosom meteorologiji i prvom realizacijom ideje o numeričkoj prognozi vremena. Nakon Drugog svetskog rata, uz pomoć prve računske mašine ENIAC, na Univerzitetu Princeton, Čarni (*Jule Gregory Charney*), Fjortoft (*Ragnar Fjørtoft*) i fon Nojman (*John von Neumann*) su uradili prvu uspešnu numeričku integraciju jednačina kretanja, koristeći jednostavan model zasnovan na barotropnoj jednačini vrtložnosti (Charney et al., 1950). Tokom druge polovine 20. veka dešava se intenzivan razvoj numeričkih modela za prognozu vremena i neprestano se radi na njihovom usavršavanju. U početku su se pravili modeli opšte cirkulacije atmosfere ili okeana, da bi se vremenom počeli upotrebljavati modeli za ograničenu oblast prostora, sa finijom rezolucijom. Godine 1975. počinje sa radom Evropski centar za srednjoročnu prognozu vremena (European Centre for Medium-Range Weather Forecast - ECMWF) u Redingu (Velika Britanija) koji okuplja veliki broj stručnjaka iz celog sveta. Sa druge strane Atlantskog okeana, u SAD-u, se razvijaju Nacionalni centri za predviđanja životne sredine (National Centers for Environmental Prediction - NCEP). Iz ove dve institucije potiču vodeći svetski modeli koji se danas koriste u operativne i istraživačke svrhe.

U Republičkom hidrometeorološkom zavodu Srbije se već duži niz godina u operativne svrhe koristi numerički model za prognozu vremena WRF NNM (*Weather Research and Forecast Nonhydrostatic Mesoscale Model*). Razvijen je u NCEP-u a njegovom razvoju je veliki doprinos dao naš istaknuti naučnik Zaviša Janjić. To je model koji se koristi za ograničenu oblast prostora. Osnovne odlike su mu upotreba potpunog sistema jednačina (hidrostatičkih i nehidrostatičkih), smanjenje računskog vremena kada se koristi niža prostorna rezolucija, kao i korišćenje metoda u kojima su šumovi maksimalno prigušeni (Janjić, 2010). Vertikalna koordinata je hibridna sigma- π (hidrostatički pritisak). Sigma koordinata dobro prati orografsku terenu i njen uticaj koji postoji do određene visine (približno 420 mb), nakon koje se koristi pritisak. Sistem osnovnih jednačina dinamike i termodinamike za neviskozni fluid koji se kreće adijabatski uključuje: jednačinu kretanja u horizontalnom

pravcu, jednačinu termodinamike, jednačinu kontinuiteta, hipsometrijsku jednačinu, jednačinu kretanja u vertikalnom pravcu, kao i nehidrostatičku jednačinu kontinuiteta. Uticaj nehidrostatičkih procesa postaje uočljiv kada se prostorni korak smanji ispod 10 km i veoma je bitan. Model koristi metod mreže tačaka i radi u Arakavinoj (*Akio Arakawa*) polurazmknutoj E mreži. Model se sastoji od velikog broja šema za parametrizaciju raznih fizičkih procesa, npr. zračenja, površinskih procesa, konvekcije, turbulentnih procesa itd. Na slici 2.1 je prikazano prognostičko polje temperature vazduha na 2 m za određenu oblast prostora i u određenom terminu, kao rezultat upotrebe WRF NMM numeričkog modela.



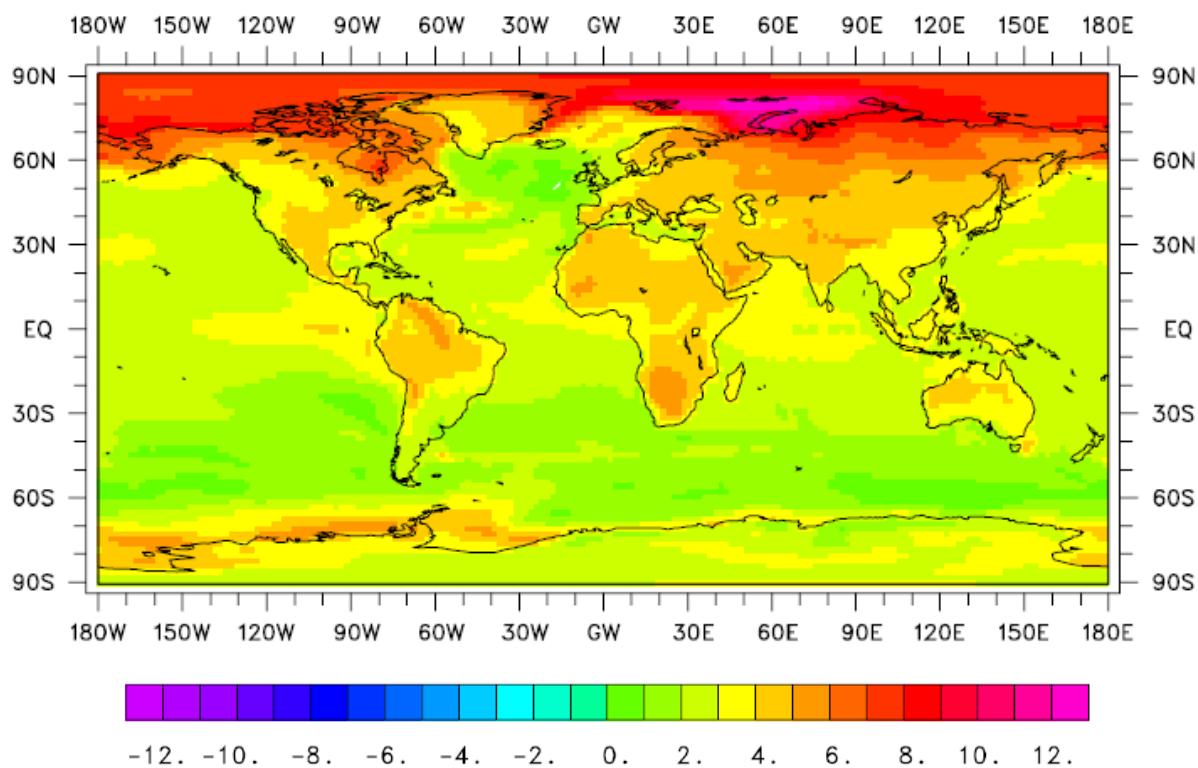
Slika 2.1 Prognostičko polje temperature vazduha na 2 m za 09.09.2015. u 9 časova, dobijeno pomoću modela WRF NMM (preuzeto sa www.hidmet.gov.rs).

WRF-Hydro je hidrološki model koji može da se koristi samostalno ili spregnut sa atmosferskim modelom. Služi za proučavanje hidroloških procesa na zemljištu i u njemu, površinski i podzemni oticaj, vodotok u kanalima, vodne rezervoare, razmenu vode između zemljišta i atmosfere itd. Radi u mreži tačaka i na ograničenoj oblasti, kako bi bio usklađen sa atmosferskim modelom.

WRF-Chem predstavlja hemijski model koji simulira emisiju, transport, mešanje i hemijsku transformaciju gasova i aerosola pod određenim meteorološkim uslovima. U analize koje mogu da se izvedu sa ovim modelom spadaju: formiranje organskih aerosola, formiranje sekundarnih organskih aerosola u vidu rastvora, uzdizanje gasova i aerosola pri dubokoj

konvekciji, ponašanje čestica pri peščanim olujama, stvaranje ozona pri strujanjima u gornjoj troposferi, stvaranje azotnih oksida prilikom električnih pražnjenja u atmosferi itd.

Kao primer modela opšte cirkulacije atmosfere može da se navede ECHAM5 (European Centre HAMburg 5). Nastao je prepravkama globalnog, spektralnog prognostičkog modela korišćenog u Evropskom centru za srednjoročnu prognozu vremena. Razvijen je od strane naučnika u Maks Plank institutu za Meteorologiju u Hamburgu (Nemačka), u svrhu istraživanja klime (Roeckner et al., 2003). Povezivanjem sa okeanskim modelom koristi se kao klimatski model, i zvanično od strane Međuvladinog panela za klimatske promene (Intergovernmental Panel on Climate Change - IPCC), za klimatske simulacije na globalnom nivou u 21. veku. Neki od rezultata istraživanja promene klime, pomoću ECHAM5/MPI-OM modela, prikazani su na slici 2.2. Poređene su srednje godišnje vrednosti površinske temperature vazduha dobijene upotrebom A1B scenarija klimatskih promena, za periode 2071-2100. i 1961-1990. Prema ovim rezultatima očekuje se porast temperature na globalnom nivou a naročito u oblasti severnog pola, što bi uzrokovalo dodatno topljenje leda i imalo mnoge druge posledice.



Slika 2.2 Promene u srednjoj godišnjoj površinskoj temperaturi vazduha ($^{\circ}\text{C}$) u periodu 2071-2100. u odnosu na period 1961-1990., prema A1B scenariju klimatskih promena, dobijene pomoću ECHAM5/MPI-OM klimatskog modela (May, 2008).

2.2.Ograničenja

Osnovno ograničenje bilo kojeg modela životne sredine odnosi se na prognozljivost. Postavlja se pitanje koliko tačno model može da predviđa buduće stanje nekog sistema i za koji vremenski period. Postoje procesi koji se odvijaju u pravilnim vremenskim razmacima i za takve procese kažemo da su periodični, kao npr. kretanje planeta u Sunčevom sistemu, pojava plime i oseke, ciklus Sunčevih pega i sl. Periodične procese je relativno lako prognozirati, jednostavnom ekstrapolacijom u budućnost. Međutim, mnogi procesi u prirodi, a naročito u atmosferi, su neperiodični. U dissipativnim sistemima koji su opisani sistemom linearnih jednačina, konstantno dejstvo uzrokuje konstantan odgovor, dok periodično dejstvo vodi ka periodičnom odgovoru. Stoga se za neperiodičan tok kaže da je posledica nasumičnog dejstvovanja. Rezonovanje koje vodi do ovakvih zaključaka ne može da se primeni u slučaju nelinearnih jednačina. Ako jednačina sadrži član koji opisuje advekciju, odnosno prenošenje neke osobine fluida samim kretanjem fluida, na konstantno forsiranje može da se javi različit odgovor (Lorenz, 1963b). Lorenc je proučavao konvektivne procese u fluidu koji se nalazi u rotirajućem sudu, a koji se pritom na jednom kraju zagreva a na drugom hlađi. Napravio je matematički model ovakvog sistema, predstavljen sa tri obične diferencijalne jednačine i posmatrao njegova rešenja. Zaključio je da je najvažnija osobina neperiodičnog toka fluida pojava nestabilnosti u njemu, gledano u odnosu na male promene u amplitudi.

Lorenc je pisao i o prognozljivosti hidrodinamičkog toka (Lorenz, 1963a). On je pustio dvoslojni model barokline atmosfere sa 12 jednačina. Kada je na osnovu trenutnog stanja svih promenljivih vršio predviđanje jedne promenljive za naredni dan prognoza je bila prilično tačna, ali kada je radio prognozu za naredna dva dana, počeli su da se uočavaju nedostaci. Lorenc je zaključio da se povećanjem prognostičkog perioda smanjuje pouzdanost prognoze odnosno da se greška u prognozi udvostručuje već u periodu od pet dana. Drugo veoma bitno opažanje se sastoji u sledećem. Pustio je model za nekoliko dana unapred a zatim je u nekom trenutku rezultate prognoze sa šest cifara zaokružio na tri cifre i iskoristio ih kao početne uslove za novu simulaciju. Naporedо je pratilo kako se odvijaju obe simulacije. Male razlike u početnim uslovima dovele su na kraju prognostičkog perioda do različite prognoze. Na ovaj način se može uočiti kako mali poremećaj raste u svakom računskom koraku. Primjeno na atmosferu, mala greška prilikom osmatranja početnih uslova će se vremenom akumulirati i na kraju dovesti do pogrešne prognoze. S obzirom da su greške merenja neizbežne izvodi se zaključak da je prosto nemoguće da dugoročna prognoza bude nepogrešiva s obzirom da dva veoma bliska početna stanja mogu da evoluiraju u potpuno različita stanja (Lorenz, 1985).

U atmosferi stanje u jednoj tački prostora zavisi dosta od stanja u okruženju, kao i od interakcije sa okruženjem, koja se odvija nelinearno. Ova interakcija je u jednačinama dinamike predstavljena advektivnim članom. Ukoliko želimo da prognoziramo buduće stanje atmosfere u nekoj tački mreže, bolju prognozu ćemo dobiti ukoliko poznajemo stanje u toj tački i u nekoj njoj bliskoj tački za par dana unazad, nego da poznajemo samo stanje u toj tački za nekoliko godina u nazad. To znači da bitan faktor koji utiče na prognozljivost vremenskih prilika jesu nelineane veze među pojedinim delovima atmosfere.

Teorijska ograničenja koja se javljaju pri modeliranju životne sredine razmatrana su u radu Mihailovića i Mimića (2012), koji su napravili pregled nekih ključnih pitanja. Prvo i osnovno pitanje koje se nameće kada pravimo matematički model nekog prirodnog fenomena jeste da li mi u potpunosti razumemo kako se taj fenomen odvija? Dalje, kada fenomen opisujemo nekom diferencijalnom jednačinom kako možemo da budemo potpuno sigurni da su članovi i parametri u jednačini adekvatni? Pomenuto je već ranije da je rešavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina moguće samo numeričkim putem. Tom prilikom je potrebno preći sa diferencijalnog oblika na diferencni pri čemu se u procesu diskretizacije gube određene informacije o promenljivim. Konačno, kako da budemo sigurni da je dobijena diferencna jednačina dobra aproksimacija polazne diferencijalne jednačine? Jedan od načina jeste da se rešenja jednačine uporede sa eksperimentalnim podacima ali sva matematički tačna rešenja ne moraju da budu fizički moguća. Kolmogorov je ovo tumačio različitim poimanjem nasumičnosti u matematici i fizici. Tradicionalna matematička analiza fizičkih sistema prečutno podrazumeva da su svi realni brojevi, bez obzira koliko mali ili veliki bili, fizički mogući. Ovakav pristup važi u inženjerstvu i nekim oblastima fizike, ali nam nije od koristi pri proučavanju kompleksnih sistema kakvi su atmosfera ili neki biološki sistemi (Kreinovich and Kunin, 2003). Zbog toga se u poslednje vreme razvija oblast nauke pod nazivom nelinearna dinamička analiza koja razmatra pojavu haosa u fizičkim sistemima, ispituje njihove nelinearne osobine, proučava njihovu dinamiku i prognozljivost. Pri razmatranju nekog fizičkog sistema, haotične fluktuacije mogu da se pojave iz dva razloga: numeričkog, zato što pokušavamo da nađemo diferencnu jednačinu čija su rešenja dobra aproksimacija rešenja date diferencijalne jednačine ili fizičkog, zato što je sistem sam po sebi haotične prirode, što će biti analizirano u narednom poglavlju.

3. Domen rešenja jednačina u modelima životne sredine

Nelinearni fenomeni se javljaju u prirodi u širokom opsegu različitih konteksta; fizičkih, hemijskih i bioloških, koji objedinjeni predstavljaju životnu sredinu, u širem smislu. Kao primer nelinearnih fenomena mogu da se navedu turbulentni hidrodinamički tok, kinetika hemijskih reakcija, biološki i ekološki sistemi, i sl. Pored toga što pripadaju različitom kontekstu nelinearne pojave često pokazuju zajedničke osobine ili mogu da budu objašnjene upotrebom sličnih koncepta. Sličnost u složenom ponašanju ovakvih sistema nije samo površna i na deskriptivnom nivou nego je zasnovana na eksperimentalnim podacima. Ove činjenice proističu iz moderne teorije o nelinearnim sistemima ili preciznije od kvalitativne i kvantitative teorije o dinamičkim sistemima, koja proučava uređenost u haosu i haos izvan uređenosti (Zeng, 1992). Prvo se odnosi na solitone, koherentne strukture i formiranje obrazaca dok se drugo odnosi na računanje fraktalnih dimenzija, Ljapunovljevih eksponenata, raznih vidova entropije i kompleksnosti. Reč haos se prvi put pojavljuje u matematičkoj literaturi 1975. godine da bi se označili naizgled nasumični rezultati nekih jednačina (Li and York, 1975). Obično se pojam haos (ili preciznije deterministički haos) odnosi na nepravilno, nepredvidivo ponašanje u determinističkim, dissipativnim i nelinearnim dinamičkim sistemima. Treba naglasiti da haos ne može jednostavno da se poistoveti sa neredom, nego da je prikladnije da se razmatra kao jedan poseban vid reda ali bez periodičnosti. Kao što je već pomenuto, Lorenc je pokazao da je osjetljivost nekog sistema na početne uslove povezana sa neperiodičnim ponašanjem tog sistema i da male promene u početnim uslovima mogu da dovedu do značajno različitih stanja tog sistema u budućnosti (Lorenz, 1963b). Pod dinamičkim sistemom se smatra bilo koji sistem iz prirode ili životne sredine koji može da se predstavi matematičkim modelom (u obliku diferencijalne jednačine ili iterativne mape) pomoću kojeg je moguće opisati ponašanje tog sistema i predvideti njegova buduća stanja.

U narednim potpoglavlјima su objašnjeni elementi nelinearne dinamičke analize i demonstrirani na primeru logističke mape kao najjednostavnijeg sistema koji ispoljava nelinearne osobine, pri čemu postoje razni procesi u prirodi, ali i u društvu, koji mogu da se opišu ovim modelom. Na kraju je urađena kompletna analiza spregnutog sistema jednačina sa dve promenljive, koji služi za prognozu temperature na površini i u dubljem sloju zemljišta, a koji proizilazi iz jednačine energijskog bilansa. U analizi je razmatran domen rešenja ovih jednačina.

3.1.Dinamički sistemi

Teorija dinamičkih sistema proučava matematičke modele fizičkih pojava koje se menjaju tokom vremena. Matematički model je obično predstavljen jednom ili više jednačina, zavisno od toga koliko promenljivih je potrebno da se pojava u potpunosti opiše. Jednačine koje se koriste su u diferencijalnom ili diferencnom obliku, u zavisnosti od toga da li vreme posmatramo kontinualno ili u diskretnim koracima. Diferencijalne jednačine mogu da budu obične ili parcijalne, što zavisi od toga da li je u njima diferenciranje po vremenu predstavljeno totalnim ili lokalnim izvodom, odnosno da li je zavisno promenljiva veličina funkcija vremena i prostora ili samo vremena. Diferencne jednačine imaju oblik iterativnih mapa. Jedna od podela dinamičkih sistema jeste na autonomne i neautonomne. U autonomnim dinamičkim sistemima vreme kao nezavisno promenljiva se ne pojavljuje eksplicitno dok su sve promenljive zavisne od vremena. U neautonomnim sistemima vreme se pojavljuje eksplicitno, što se najčešće javlja u situacijama kada na sistem koji razmatramo deluje neka vremenski zavisna sila. Obično se pri analizi neautonomni sistem transformiše u autonomni tako što se uvede nova promenljiva čiji je vremenski izvod jednak jedinici. Na taj način se povećava broj zavisno promenljivih ali se izbegava poteškoća u analizi, jer član koji eksplicitno sadrži vreme nikada nema prvi izvod jednak nuli (Hilborn, 2011).

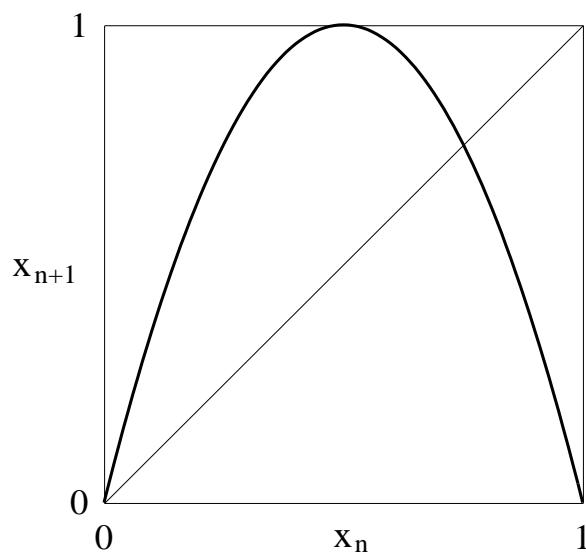
Veoma bitan pojam u pročavanju dinamičkih sistema jeste fazni prostor ili prostor stanja. Izraz fazni prostor prvi je upotrebio Gibbs (*Josiah Willard Gibbs*) pri izučavanju statističke mehanike, a posle su ga koristili i ostali. Međutim, izraz prostor stanja je adekvatniji iz razloga sto svaki skup vrednosti promenljivih predstavlja jedno stanje sistema, samim tim sva moguća stanja sistema se nalaze u prostoru stanja. Pri evoluciji nekog sistema, on prelazi iz jednog stanja u drugo što je predstavljeno trajektorijom u prostoru stanja. Kako bi se smanjio broj ponavljanja reči „stanje“ nadalje će biti korišćen izraz fazni prostor. Broj dimenzija faznog prostora jednak je broju promenljivih, odnosno jednačina koje opisuju sistem. Tačka iz koje kreće evolucija sistema predstavlja njegovo početno stanje. Teorema o nepresecanju kaže da se dve razdvojene trajektorije ne presecaju u konačnom vremenskom periodu, niti jedna trajektorija može da preseče samu sebe u nekom budućem trenutku (Hilborn, 2011). Pod razdvojenim trajektorijama se smatra to da jedna trajektorija ne počinje iz tačke koja leži na drugoj trajektoriji. Glavni fizički smisao ove teoreme se ogleda u determinizmu. Evolucija stanja sistema je jasno predodređena jednačinama koje opisuju sistem i njegovim početnim stanjem.

3.2. Stabilnost rešenja jednačina

Logistička mapa, data diferencnom jednačinom (3.1), predstavlja primer najprostijeg dinamičkog sistema. Ova jednodimenziona mapa veoma dobro opisuje pojedine procese u biologiji, kao npr. evoluciju populacije raznih bioloških vrsta a naročito insekata i ima primenu u genetici, kao i u epidemiologiji. U ekologiji se koristi pri proučavanju modela predator-plen. U ekonomiji se koristi kao model koji opisuje vezu između količine robe i cene kao i u teoriji ekonomskih ciklusa itd. Ona ima primenu i u sociološkim naukama (May, 1976). Da bi neka funkcija uopšte bila mapa, njen domen mora biti jednak kodomenu, odnosno preslikavanje mora da se vrši iz jednog skupa elemenata na taj isti skup. U slučaju logističke mape

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n), \quad (3.1)$$

svi elementi skupa leže u intervalu $(0,1)$. Parametar r je tzv. kontrolni parametar i u zavisnosti od njega logistička mapa ispoljava različito ponašanje (slika 3.1). Nelinearna funkcija s desne strane jednačine (3.1) može da se označi sa $f(x)$. Maksimalna vrednost funkcije $f(x)$ se dobije za slučaj kada je $x=1/2$ i iznosi $r/4$. S obzirom da vrednost ne može da bude veća od 1 izvodi se zaključak da logistička mapa pokazuje netrivijalno ponašanje za vrednosti parametra $r < 4$. Sa druge strane, kada je $r < 1$, sve trajektorije završavaju u tački $x=0$, pa je potpuni uslov za netrivijalno ponašanje $1 < r < 4$.



Slika 3.1 Logistička mapa za $r=4$.

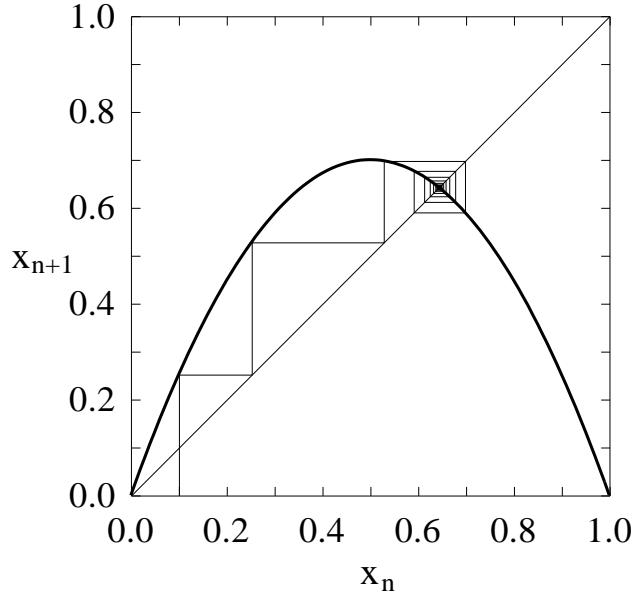
Tačke ravnoteže ili fiksne tačke dinamičkog sistema dobijaju se rešavanjem algebarske jednačine, iz uslova $f(x)=x$. Na osnovu jednačine (3.1) sledi da logistička mapa ima dve fiksne tačke, $x^*=0$ što bi bilo trivijalno rešenje i netrivijalno rešenje $x^*=1-1/r$, kada je r u intervalu $1 < r < 3$. Fiksne tačke zapravo predstavljaju one vrednosti od x koje se preslikavaju same u sebe. To znači da trajektorija u faznom prostoru konvergira ka fiksnoj tački. Naredna stvar koju treba razmotriti jeste stabilnost fiksnih tačaka. Analogija može da se uspostavi sa stabilnom i labilnom ravnotežom iz mehanike. Kada se loptica nađe na dnu doline ona je u stabilnoj ravnoteži a kada je na vrhu brega onda je ravnoteža labilna. Stabilna fiksna tačka ima osobinu da tačke koje se nalaze u njenoj blizini tokom evolucije dinamičkog sistema bivaju privučene ka njoj, dok se od nestabilne fiksne tačke one sve više udaljavaju tokom vremena (Alligood et al., 1996). Pitanje stabilnosti je bitno iz razloga što su realni sistemi veoma često pod dejstvom perturbacija. Ravnotežnom stanju nekog realnog sistema mora da odgovara stabilna fiksna tačka. Ukoliko je ona nestabilna, mali poremećaj stanja može da odvede trajektoriju daleko od fiksne tačke. Prvi izvod mape u fiksnoj tački predstavlja meru divergencije i pokazuje kako se rastojanje između fiksne tačke i neke njoj bliske tačke povećava ili smanjuje tokom iteracija. Npr. ukoliko posmatramo tačke 0 i 0.1, one su u početku udaljene za 0.1. Nakon određenog broja iteracija dobijaju se tačke koje su na nekoj drugoj udaljenosti. Ukoliko udaljenost od fiksne tačke raste onda je ta fiksna tačka nestabilna. Pojam „blizine“ u fazom prostoru se definiše pomoću okoline ε pri čemu je ε mali, pozitivan broj.

Definicija 3.1 Neka je funkcija $f(x)$ mapa u skupu realnih brojeva \mathbf{R} i neka je x^* realan broj koji predstavlja fiksnu tačku date mape. Ako su sve tačke iz okoline ε ($\varepsilon > 0$) koje su dovoljno bliske x^* tokom iteracija privučene od strane x^* , tada je x^* ponor ili privlačna fiksna tačka a ukoliko su odbijene od x^* onda je x^* izvor ili odbojna fiksna tačka.

Drugačije rečeno, za glatku funkciju f koja ima sve izvode i koji su pri tome neprekidne funkcije, a predstavlja mapu u skupu \mathbf{R} , fiksna tačka x^* će biti ponor ako je $|f'(x^*)| < 1$ odnosno biće izvor ako je $|f'(x^*)| > 1$.

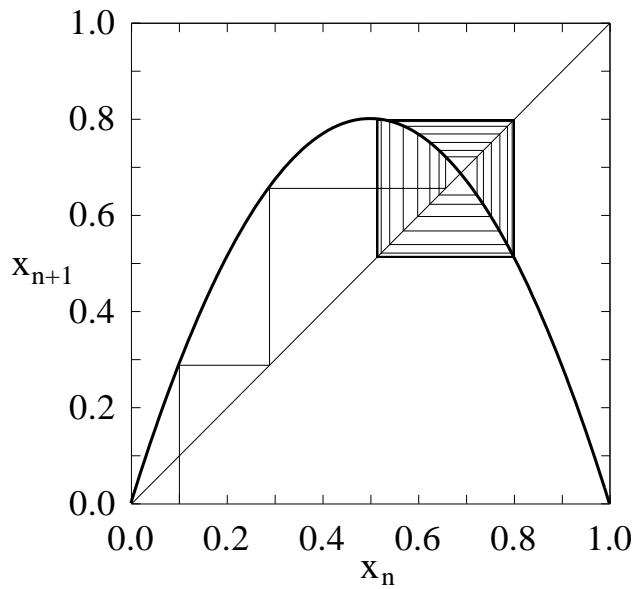
Zanimljivo je ispitati kako se x približava fiksnoj tački kada iteracija kreće iz neke početne vrednosti x_0 koja se razlikuje od x^* . Pratićemo primere koje je u svojoj knjizi obradio Sprot (*Julien Clinton Sprott*). U slučaju koji je prikazan na slici 3.2 izabrana je vrednost kontrolnog parametra $r=2.8$ a početna vrednost $x_0=0.1$. Već nakon 50 iteracija funkcija dosegne fiksnu tačku sa vrednošću $x^*=0.642859$ i ona predstavlja ponor, odnosno stabilnu

fiksnu tačku. Za finalno stanje se kaže da je ciklus perioda 1, zato što je svaka naredna iteracija jednaka prethodnoj. Dobijeni dijagram se iz očiglednih razloga naziva „paukova mreža“ (Sprott, 2003).



Slika 3.2 Dijagram „paukova mreža“ za logističku mapu sa vrednostima $r=2.8$ i $x_0=0.1$.

Kada parametar r dostigne vrednost 3 fiksna tačka $x^*=1-1/r$ i dalje postoji ali se menja iz stabilne u nestabilnu i postaje odbojna. Za vrednosti $r > 3$ dešava se rapidno udaljavanje od fiksne tačke (slika 3.3). Međutim, ovo udaljavanje ne traje zauvek. Umesto toga, dostigne se stanje u kojem je svaka druga iteracija međusobno jednakih i vrednosti osciluju između 0.799455 i 0.513045.



Slika 3.3 Dijagram „paukova mreža“ za logističku mapu sa vrednostima $r=3.2$ i $x_0=0.1$.

Ovakvo ponašanje se naziva ciklus perioda 2 i dobija se iz uslova $f(f(x))=x$, rešavanjem algebarske jednačine četvrtog stepena:

$$r^3x^4 - 2r^3x^3 + r^2(1+r)x^2 - (r^2 - 1)x = 0. \quad (3.2)$$

Prvo rešenje je očigledno i trivijalno $x^*_1=0$, a odgovara nestabilnoj fiksnoj tački. Druga nestabilna fiksna tačka se dobija za $x^*_2=1-1/r$. Preostala dva rešenja su

$$x^*_{3,4} = \frac{r + r^2 \pm r\sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r^2} \quad (3.3a)$$

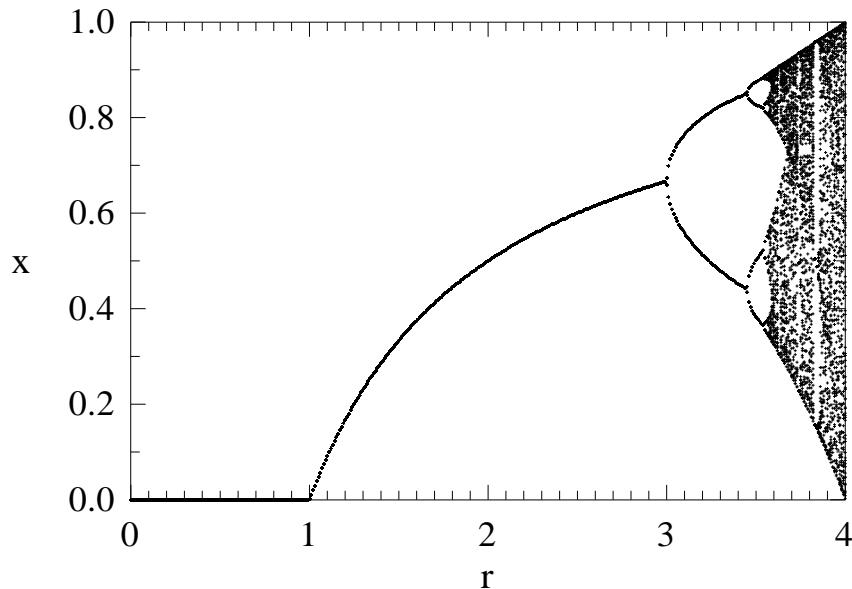
što elegantinje može da se zapiše kao

$$x^*_{3,4} = \frac{1 + r \pm \sqrt{(r-3)(r+1)}}{2r}. \quad (3.3b)$$

Kada je r u intervalu $0 < r < 3$, izraz pod korenom u rešenju (3.3b) je negativan i realna rešenja ne postoje. Za $r > 3$ postoje dva realna korena jednačine (3.2) između kojih x naizmenično osciluje tokom iteracija i to su stabilna stanja. Prvi put vidimo da dolazi do „račvanja“ nestabilnog rešenja u dva stabilna stanja, odnosno dolazi do bifurkacije rešenja.

3.3. Bifurkacije

Period 2 postoji za svako $r > 3$ ali postaje nestabilan kada r dostigne vrednost $1+\sqrt{6}$, što je približno na $r=3.449490$. Tada se javljaju stabilna rešenja sa periodom 4. Proces se nastavlja sa uzastopnim periodima udvajanja tako što se pojavi novi period kada prethodni postane nestabilan. Ovakav proces predstavlja bifurkacije (slika 3.4). Logistička mapa može da ima samo jednu stabilnu periodičnu orbitu za svaku vrednost r . Orbita predstavlja skup vrednosti promenljive x koje pripadaju određenoj trajektoriji u faznom prostoru. Početak novog perioda je teško odrediti i analitički i numerički, ali su sad već to opšte poznate vrednosti, pa tako period 8 nastaje kada parametar r ima približno vrednost $r=3.544090$, period 16 se javlja za $r=3.564407$, period 32 za $r=3.568759$, period 64 za $r=3.569692$, period 128 za $r=3.569891$, itd (slika 3.5). Periodi udvajanja postaju sukcesivno sve bliži da bi se na kraju nagomilali u tački $r_\infty = 3.5699456718$. Ova tačka se naziva tačka nagomilavanja i u njoj period postaje beskonačan tj. nikada se ne ponavlja i orbita prolazi kroz beskonačno mnogo vrednosti x .

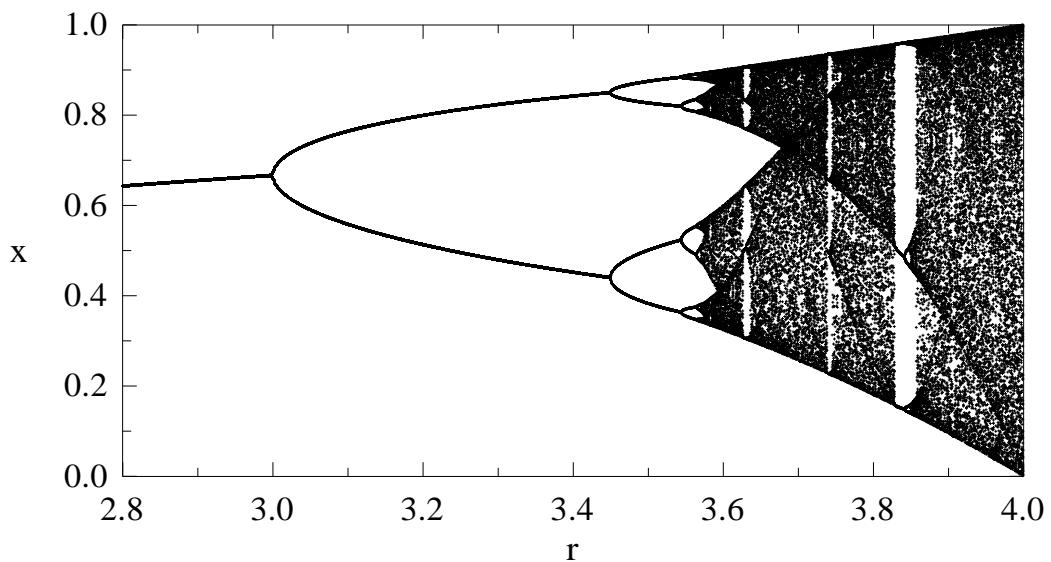


Slika 3.4 Bifurkacioni dijagram logističke mape za r u intervalu $0 < r < 4$.

Rastojanje između uzastopnih bifurkacija dostiže konstantnu vrednost δ koja se naziva Fajgenbaumov broj (*Mitchell J. Feigenbaum*). Vrednost ove konstante se računa kao

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.669201\dots . \quad (3.4)$$

Značajna osobina konstante δ jeste njena univerzalnost, a to znači da ima istu vrednost za sve kvadratne mape sa jedinstvenim maksimumom, poput logističke mape (Feigenbaum, 1978).

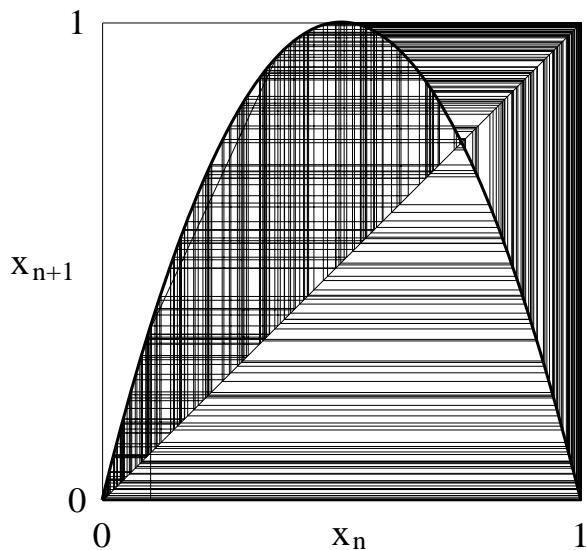


Slika 3.5 Bifurkacioni dijagram logističke mape za r u intervalu $2.8 < r < 4$ na kojem se jasnije vide periodi udvajanja i tranzicija u haos.

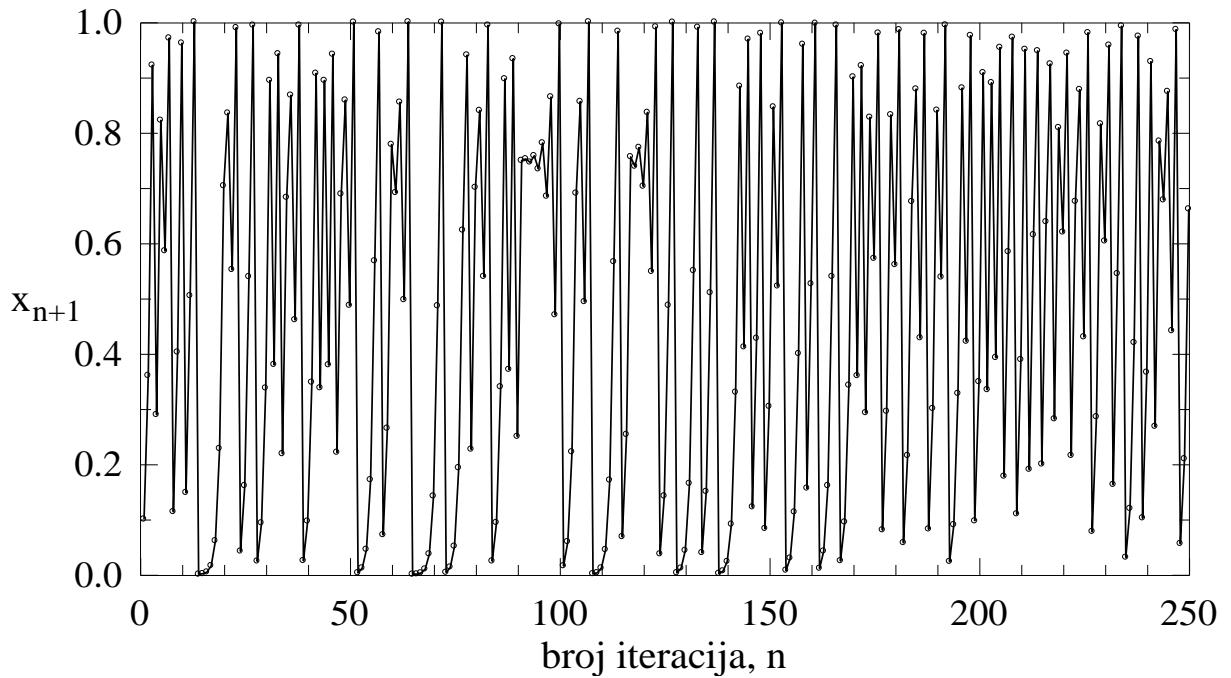
Kada vrednosti za r rastu preko tačke nagomilavanja pojavljuje se haos sa beskonačno dugim periodom. Međutim, mestimično se pojavljuju i prozori periodičnosti u određenim intervalima r , s tim da se širina prozora smanjuje sa porastom perioda. Svaki prozor periodičnosti se pojavljuje iznenada i sa porastom r počinje svoje bifurkacije koje ga vraćaju ponovo u haos sa istim Fajgenbaumovim brojem. Lako uočljivi prozor perioda 3 se javlja kada r dostigne vrednost $1 + \sqrt{8}$, odnosno kada je približno $r=3.82842712$. Ciklus perioda 3 je poseban slučaj, s obzirom da je Šarkovski (*Олександр Миколайович Шарковский*) dokazao da jednodimenzionala neprekidna mapa sa ciklusom perioda 3 za određenu vrednost parametra ima cikluse svakog perioda (uključujući i beskonačno) za datu vrednost parametra, i da je stoga mapa haotična ukoliko su sve orbite nestabilne (Sarkovskii, 1964). Obrnuto tvrđenje ne važi, haotičan sistem ne mora da ima ciklus perioda 3. Ova teorema se poziva na uređenje Šarkovskog, posebnom poretku prirodnih brojeva koji izgleda na sledeći način

$$\begin{aligned} 3 > 5 > 7 > \dots > 2 \cdot 3 > 2 \cdot 5 > 2 \cdot 7 > \dots > 2^2 \cdot 3 > 2^2 \cdot 5 > 2^2 \cdot 7 > \dots \\ > 2^n \cdot 3 > 2^n \cdot 5 > 2^n \cdot 7 > \dots > 2^n > \dots > 2^3 > 2^2 > 2 > 1. \end{aligned}$$

Slučaj kada je $r=4$ je specijalan zato što nema ponore, i onda se postavlja pitanje gde se orbite završavaju (slika 3.6). Postoje dve fiksne tačke $x^*=0$ i $x^*=0.75$ ali su obe nestabilne. U ovom slučaju mapa pokazuje veoma zanimljivu dinamiku. Ukoliko posmatramo x osu na intervalu od 0 do 1 kao gumenu traku, tada se tokom iteracija ona isteže tako da joj srednja tačka ($x_n=0.5$) dostigne $x_{n+1}=1$ a potom se udaljeni kraj ($x_n=1$) savija na drugu stranu u $x_{n+1}=0$. Ovo istezanje i savijanje je odgovorno za haos. Iako ponašanje izgledao kao nasumično, detaljnije ispitivanje pokazuje ubrzani porast na malim vrednostima x_n , zatim veliku vrednost x_n prate male vrednosti x_n , kao i porast oscilovanja oko nestabilne fiksne tačke $x^*=0.75$ (slika 3.7).



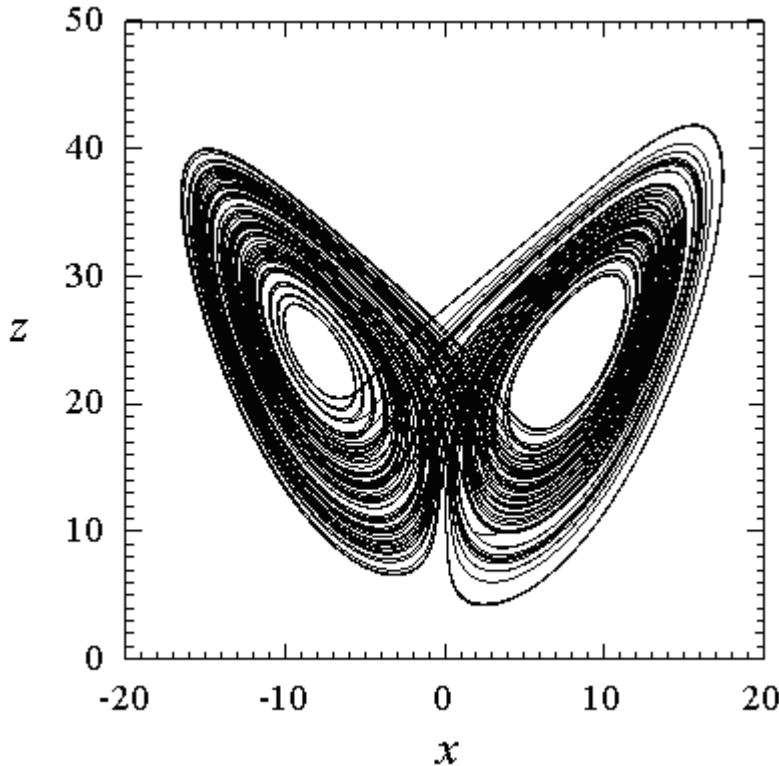
Slika 3.6 Dijagram „paukova mreža“ za logističku mapu sa vrednostima $r=4$ i $x_0=0.1$.



Slika 3.7 Prvih $n=250$ iteracija logističke mape sa $r=4$ i početnim uslovom $x_0=0.1$.

3.4. Atraktor

Na primeru logističke jednačine pokazano je postojanje privlačne fiksne tačke za određene vrednosti parametra r date jednodimenzione mape. Sve tačke iz neposredne okoline, koje su joj dovoljno bliske, će tokom iteracija biti privučene od strane fiksne tačke, koja za njih predstavlja ponor. U slučaju višedimenzionih mapa ili sistema diferencijalnih jednačina, dakle kada postoji više promenljivih, javlja se analogon privlačnoj fiksnoj tački i naziva se atraktor. Atraktor je skup tačaka u faznom prostoru koji za određene vrednosti parametara privlači sve trajektorije koje počinju u njegovoј neposrednoj blizini. Zapremina u faznom prostoru koja obuhvata atraktor i koja sadrži sve tačke koje tokom iteracija završe na atraktoru se naziva bazen atrakcije. Ovaj bazu može da se odredi tako što se vrše iteracije jednačina sa mnogo početnih uslova i posmatra se da li trajektorije završe na atraktoru. U slučaju takozvanog „čudnog“ atraktora postoji osetljiva zavisnost na početne uslove, iz kojih trajektorija počinje. Primer atraktora koji „nije čudan“ jesu upravo privlačne fiksne tačke. Termin čudni atraktor se pojavio prvi put u javnosti u radu koji su objavili Ruelle i Takens (1971). Veoma važan uslov koji se odnosi na atraktor jeste uslov nedeljivosti, a označava to da skup tačaka u faznom prostoru koji predstavlja atraktor ne može da bude podeljen na dva različita atraktora (Ruelle, 1980). Verovatno najpoznatiji čudni atraktor u svetskoj naučnoj i popularnoj literaturi jeste Lorensov atraktor (slika 3.8).



Slika 3.8 Lorencov atraktor u xz ravni, koji izgledom podseća na krila leptira.

Lorenc je koristio pojednostavljeni model konvekcije u atmosferi kada je primetio veliku osjetljivost rezultata na početne uslove i postojanje čudnog atraktora (Lorenz, 1963b). Sistem diferencijalnih jednačina koji zapravo opisuje konvektivno kretanje fluida u rotirajućem cilindru koji se zagreva sa donje strane a hlađi odozgo, ima oblik

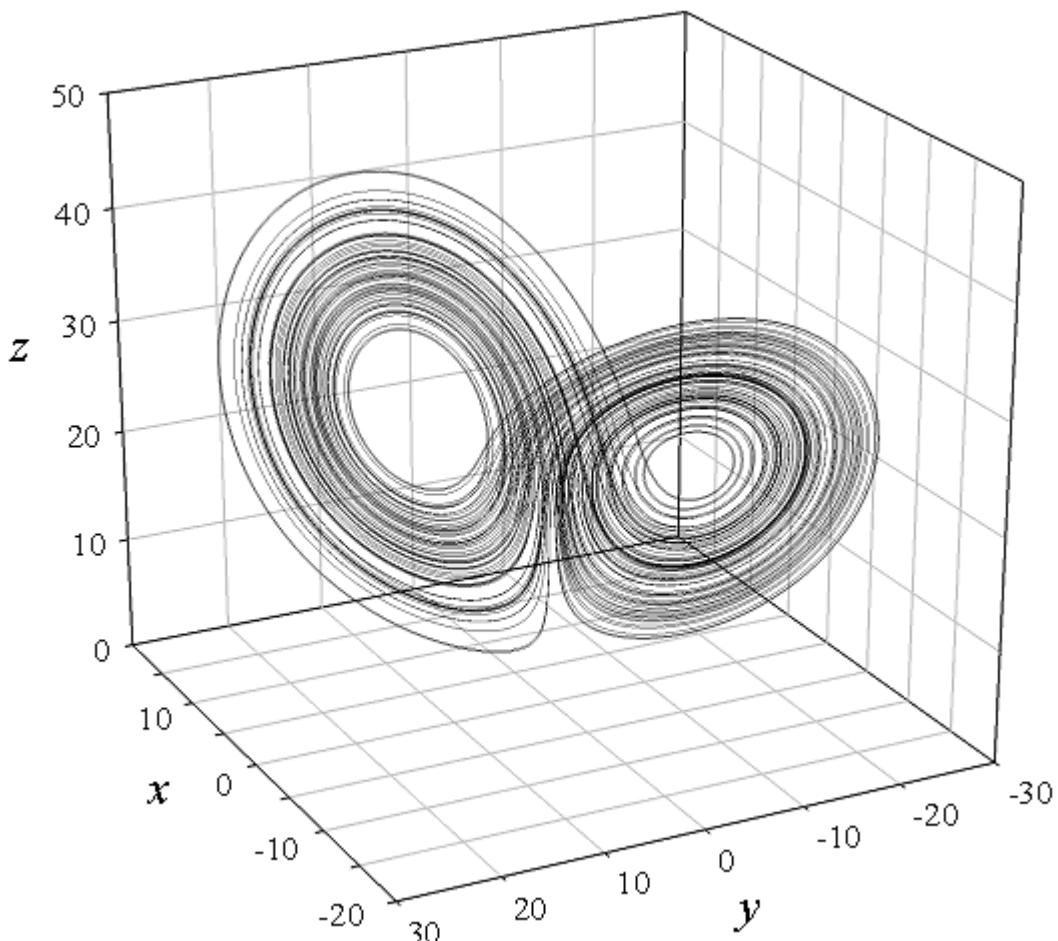
$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x) \quad (3.5a)$$

$$\frac{dy}{dt} = rx - xz - y \quad (3.5b)$$

$$\frac{dz}{dt} = xy - bz, \quad (3.5c)$$

pri čemu parametri r i σ odgovaraju Rejnloldsovom (*Osborne Reynolds*) i Prantlovom (*Ludwig Prandtl*) broju, bezdimenzionim indikatorima turbulentnog kretanja, dok b predstavlja razmer cilindra. Vrednosti parametara za koje se javlja haos u ovakovom sistemu su $\sigma=10$, $b=8/3$ i $r > 24.74$. Na slici 3.9 je prikazan atraktor za slučaj kada je $r=25$. Promenljive x , y i z nisu uobičajene prostorne promenljive nego su malo više apstraktne, tako da je x brzina rotacije, sa pozitivnim vrednostima pri kretanju u smeru kazaljke na satu i negativnim u smeru suprotnom

od kazaljke na satu, y je temperaturna razlika između uzdižućeg i spuštajućeg fluida, dok je z odstupanje od linearog vertikalnog temperaturnog profila.



Slika 3.9 Lorencov atraktor u tri dimenzije pri izboru parametara $\sigma=10$, $b=8/3$ i $r=25$.

3.5. Ljapunovljevi eksponenti

Haotično ponašanje proizvodi neku vrstu nasumičnosti, koja bi mogla da objasni kompleksno ponašanje realnih sistema. Upravo zbog toga je važno kvantifikovati haos. Potrebno je imati jasan i merljiv način za prepoznavanje haosa i razdvajanje pravog haotičnog ponašanja od ponašanja sa prisustvom šuma ili nepravilnosti. Još jedan od razloga za kvantifikovanje haosa jeste to da bismo mogli da naslutimo ili uočimo neke opšte osobine, bilo kvalitativne ili kvantitativne, koje opisuju ponašanje sistema ili promene u njegovom ponašanju kada je u haotičnom režimu, prilikom promene parametara sistema. Konačno, teži se tome da možemo da povežemo promene u merama haotičnog ponašanja sa promenama u fizičkom ponašanju sistema (Hilborn, 2011).

Glavni pristup koji se koristi za kvantifikovanje haotičnog ponašanja jeste analiza vremenskih serija podataka o sistemu. Vremenska serija predstavlja niz podataka u nekom periodu vremena, i govori o promeni stanja sistema u pravilnim vremenskim intervalima. Podaci su zapravo vrednosti neke promenljive koja opisuje ponašanje sistema i nose osnovne informacije o sistemu.

Kao što je već pomenuto, jedna od glavnih karakteristika haotičnog ponašanja jeste velika osetljivost na početne uslove, koja se manifestuje divergencijom bliskih trajektorija u faznom prostoru. Mera koja najbolje pokazuje ovu divergenciju, a samim tim i ukazuje na haos, jeste Ljapunovljev eksponent. Mada, ovo važi samo za iterativne mape. Izraz Ljapunovljev eksponent je uveo Oseledec (1968). Osnovni koncept će biti pokazan na primeru jednodimenzione mape $x_{n+1}=f(x_n)$, kao što je logistička mapa. Posmatrajmo dve bliske početne tačke x_0 i $x_0+\Delta x_0$. Nakon jedne iteracije ove dve tačke će biti razdvojene za $\Delta x_1 = f(x_0 + \Delta x_0) - f(x_0) \approx \Delta x_0 \cdot f'(x_0)$, gde je $f'(x)=df/dx$. Lokalni Ljapunovljev eksponent λ se definiše u x_0 kao $e^\lambda = |\Delta x_1 / \Delta x_0|$ odnosno $\lambda = \ln |\Delta x_1 / \Delta x_0| \approx \ln |f'(x_0)|$. Veličina $|\Delta x_1 / \Delta x_0|$ jeste lokalni Ljapunovljev broj i predstavlja meru rastezanja u $x=x_0$. Apsolutna vrednost osigurava da Ljapunovljev broj bude pozitivan, tako da će prirodni logaritam odnosno Ljapunovljev eksponent biti realan broj. Ako je ovaj odnos $\Delta x_1 / \Delta x_0$ negativan znači da bliske tačke menjaju mesta tokom iteracija. Poznavanje načina na koji se Ljapunovljev eksponent menja u prostoru omogućava nam da otkrijemo oblasti u kojima je dobra ili loša prognozljivost budućeg stanja sistema ukoliko postoje male greške u početnim uslovima (Sprott, 2003). Globalni Ljapunovljev eksponent se dobija osrednjavanjem za veliki broj iteracija

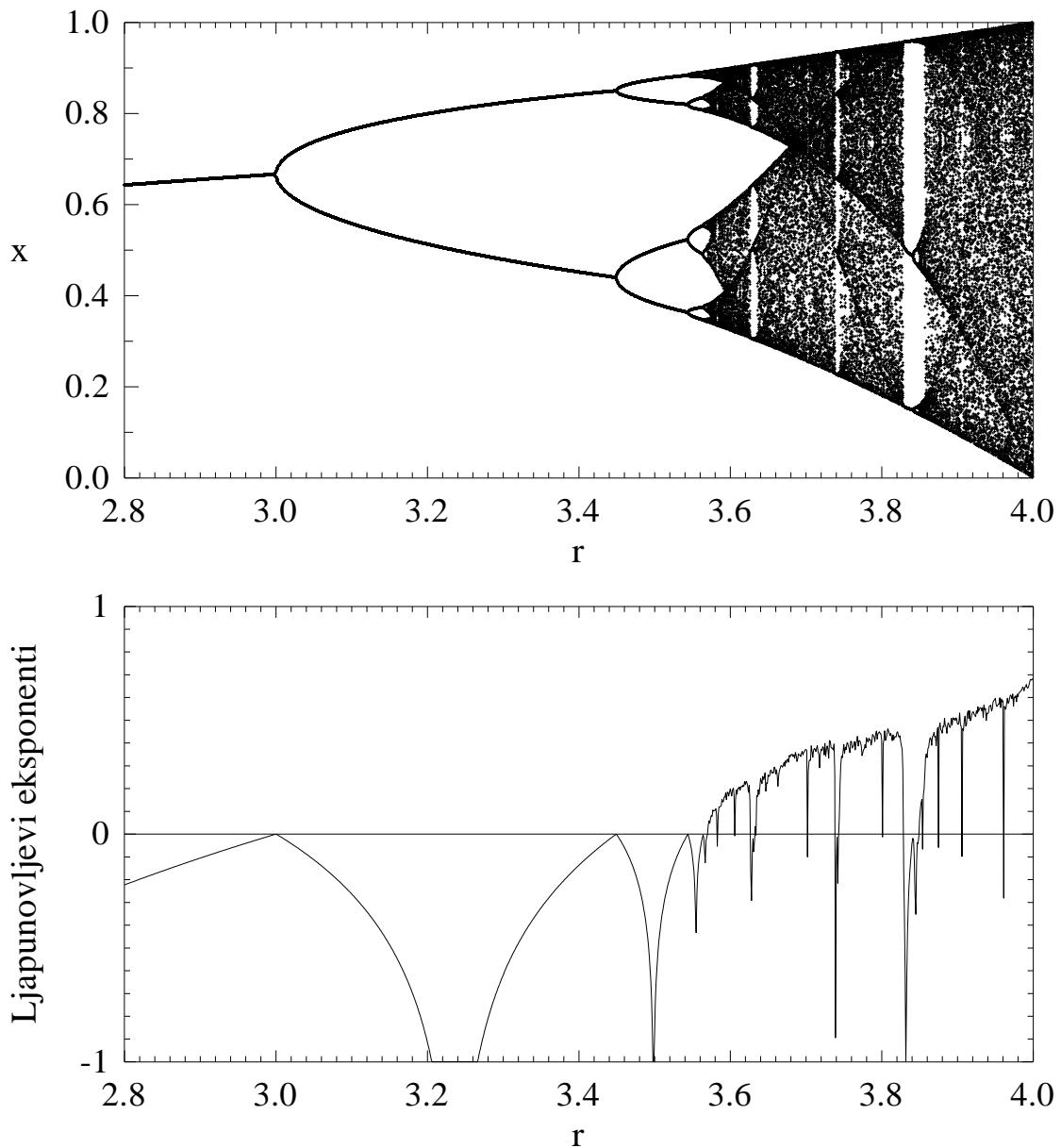
$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |f'(x_n)| \quad (3.6)$$

i predstavlja srednji eksponencijalni rast udaljenosti između dva bliska početna uslova ili srednje istezanje prostora. Pozitivna vrednost ukazuje na haos a negativna vrednost se odnosi na fiksnu tačku ili periodičan ciklus.

U slučaju logističke mape $f(x)=rx(1-x)$ njen prvi izvod će biti $f'(x)=r(1-2x)$. Kada to uvrstimo u izraz (3.6) dobija se Ljapunovljev eksponent oblika

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \ln |r(1-2x_n)|. \quad (3.7)$$

Na slici 3.10 su prikazane vrednosti Ljapunovljevog eksponenta za r u intervalu $2.8 < r < 4$ zajedno sa bifurkacionim dijagramom, kako bi se lakše pratilo ponašanje sistema.

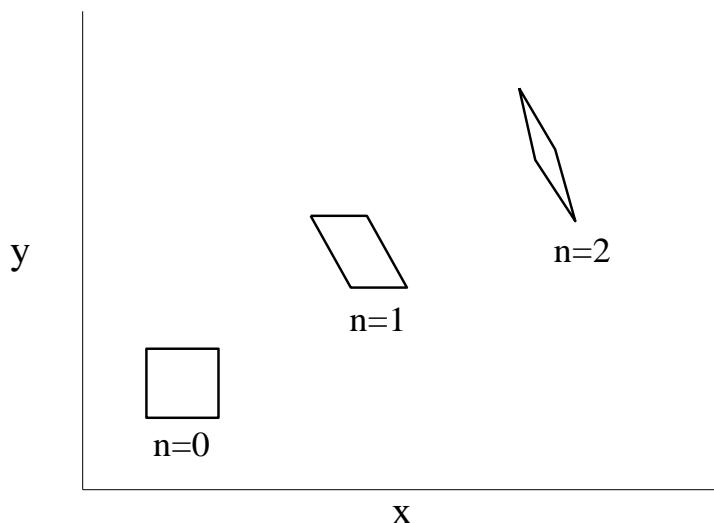


Slika 3.10 Bifurkacioni dijagram i Ljapunovljevi eksponenti za logističku mapu u intervalu $2.8 < r < 4$.

Ljapunovljev eksponent je pozitivan svaki put kada bifurkacioni dijagram ukazuje na haos, a negativan kada ukazuje na periodičnost, uključujući i prozore periodičnosti koji se pojavljuju za određene vrednosti parametra r u razvijenom haosu. Eksponent ima vrednost nula u svakoj bifurkacionoj tački gde je rešenje na ivici nestabilnosti. Između dve nule postoji vrednost r za koju je eksponent jednak $-\infty$. Ove superstabilne orbite se pojavljuju kada jedna od iteracija periodične orbite ima vrednost $x=0.5$, pri čemu je $f'=0$. One privlače početne uslove u svoj

bazen atrakcije sve brže i brže kako se približavaju rešenju. Postoji beskonačno mnogo ovakvih tačaka čak i u regionu $3.57 < r < 4$, gde je dinamika pretežno haotična. Dovoljno je da sistem ima barem jedan pozitivan Ljapunovljev eksponent da bi se njegovo ponašanje smatralo haotičnim. Iz tog razloga se često ispituje najveći Ljapunovljev eksponent.

Kod višedimenzionalih mapa i sistema diferencijalnih jednačina u izrazu za Ljapunovljev eksponent umesto prvog izvoda stoji Jakobijan sistema ili Jakobijeva matrica (*Carl Gustav Jacob Jacobi*). Stepen divergencije može da bude različit za različitu orientaciju početnog vektora koji razdvaja dve bliske tačke u faznom prostoru. Zbog toga se računa spektar Ljapunovljevih eksponenata i njegov broj odgovara broju dimenzija faznog prostora. Ukoliko posmatramo skup početnih uslova u faznom prostoru dvodimenzionog sistema sa promenljivim x i y tada će tokom iteracija početni oblik kvadrata da se izobliči u paralelogram (slika 3.11). Površina paralelograma će da se smanjuje ali će on biti sve više istegnut u određenom pravcu. Za ovo istezanje su odgovorni članovi van dijagonale u Jakobijanu.



Slika 3.11 Ilustrativan prikaz evolucije početnih uslova za dvodimenzioni sistem.

Kada sistem nije opisan jednačinama koje predstavljaju njegovu dinamiku, nego je na raspolaganju vremenska serija podataka o promeni stanja sistema, zadatak postaje znatno teži. Prema jednom metodu, ne vrši se perturbacija orbita već se pretražuje vremenska serija u potrazi za bliskim tačkama u faznom prostoru čije se orbite prate određeni broj vremenskih koraka ili dok se skroz ne razdvoje, posle čega se traže druge bliske tačke koje su razdvojene u istom pravcu (Wolf et al., 1985). Ovaj algoritam prepostavlja ali ne može da potvrdi eksponencijalnu divergenciju trajektorija, pa stoga ne može da razdvoji haos od šuma.

3.6. Kolmogorovljeva kompleksnost

Mera koja ukazuje na neperiodičnost, nasumičnost i neuređenost, a može da se koristi u analizi vremenskih serija, jeste Kolmogorovljeva kompleksnost (Li and Vitanyi, 1997). Ovu mjeru su nezavisno jedan od drugoga osmisili Solomonov (*Ray Solomonoff*) i Kolmogorov tokom šezdesetih godina 20. veka, da bi se tek kasnije pojavio algoritam koji omogućava njen izračunavanje (Lempel and Ziv, 1976). Više reči o Kolmogorovljevoj kompleksnosti će biti u drugom delu disertacije. Trenutno je od interesa da vidimo kako se ona slaže sa Ljapunovljevim eksponentom i kako se primenjuje na vremenske serije. Algoritam za računanje Kolmogorovljeve kompleksnosti vremenske serije $\{x_i\}$, $i=1,2,3,\dots,N$ gde je N broj članova serije, sastoji se u sledećem. Vremenska serija se kodira u niz sastavljen od karaktera 0 i 1, zapisan kao $\{s(i)\}$, $i=1,2,3,\dots,N$, tako što se vrednost svakog člana poredi sa izabranim pragom x^*

$$s(i) = \begin{cases} 0, & x_i < x^* \\ 1, & x_i \geq x^* \end{cases}. \quad (3.8)$$

Obično se za prag izabere srednja vrednost vremenske serije (Zhang et al., 2001). Potom se računa brojač kompleksnosti $c(N)$ koji se definiše kao minimalan broj različitih obrazaca u datom nizu, i koji zavisi od dužine niza N . Vrednost $c(N)$ se približava krajnjoj vrednosti $b(N)$, kako se N približava beskonačnosti

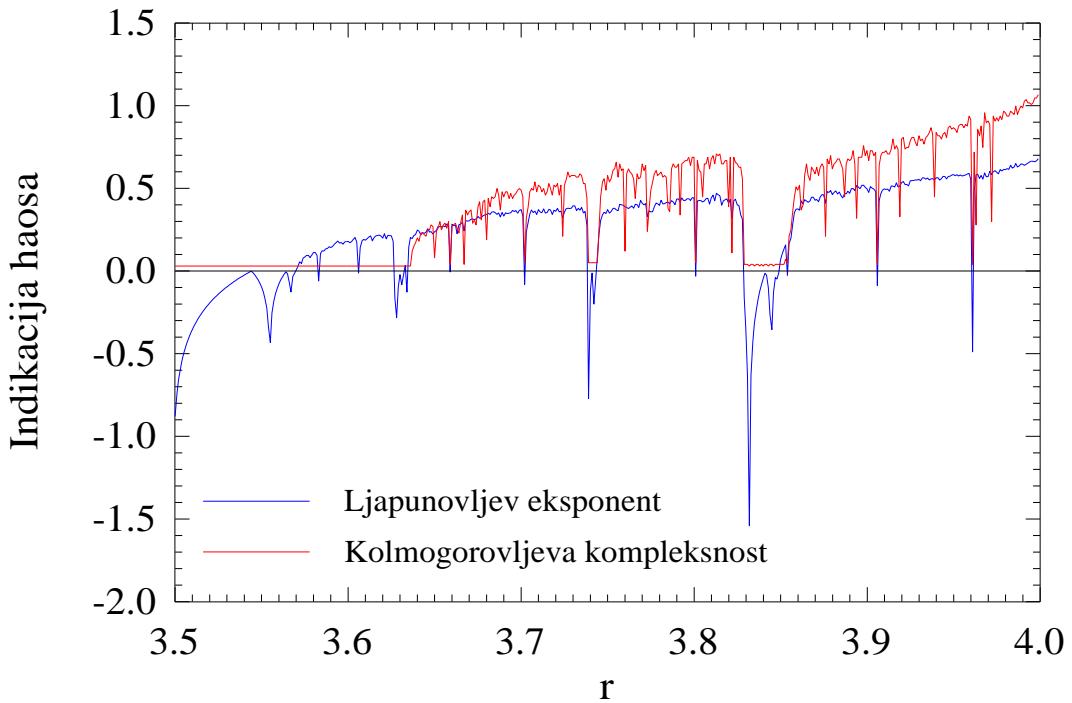
$$b(N) = \frac{N}{\log_2 N}. \quad (3.9)$$

Na posletku se dobija normalizovana mera kompleksnosti $C_k(N)$, definisana kao

$$C_k(N) = \frac{c(N)}{b(N)} = c(N) \frac{\log_2 N}{N}. \quad (3.10)$$

Vrednosti su bliske nuli za periodične i uređene vremenske serije a za potpuno nasumične serije vrednost dostiže jedinicu, iako za kraće serije vrednost može da bude i veća od jedan (Hu et al., 2006). U principu, za nelinearne vremenske serije vrednosti leže u intervalu između nula i jedan. Sada će na primeru logističke mape biti ispitano koliko Kolmogorovljeva kompleksnost može da ukaže na haotično ponašanje sistema. Za početni uslov $x_0=0.2$ i

kontrolni parametar u intervalu $r \in [3.5, 4]$ sa korakom od 0.001, rađeno je 500 iteracija logističke mape radi stabilizacije a onda još 1000 iteracija. Zatim su za svako r računati Ljapunovljev eksponent i Kolmogorovljeva kompleksnost za datih 1000 tačaka odnosno stanja sistema (slika 3.12).



Slika 3.12 Ljapunovljev eksponent i Kolmogorovljeva kompleksnost logističke mape za $3.5 < r < 4$.

Bifurkacije rešenja logističke jednačine počinju za $r=3$ i prilikom svake naredne bifurkacije Ljapunovljev eksponent ima vrednost 0. Kada vrednost kontrolnog parametra postane veća od one u tački nagomilavanja ($r_\infty = 3.5699456718$) javlja se haos i Ljapunovljev eksponent postaje pozitivan. Međutim, vrednosti Kolmogorovljeve kompleksnosti su i dalje bliske nuli. Sa slike se vidi da vrednosti nikad nisu jednake nuli zato što u nizu uvek postoje najmanje tri različita obrasca; 0, 1 i ostatak (Kaspar and Schuster, 1987). Kada r raste preko 3.6 dinamika sistema je haotična, Kolmogorovljeva kompleksnost takođe počinje da raste i u potpunosti prati Ljapunovljev eksponent. Svaki put kada se javi prozor periodičnosti Ljapunovljev eksponent postaje negativan a Kolmogorovljeva kompleksnost pada na vrednosti bliske nuli. Usaglašenost ove dve mere haotičnosti nas dovodi do ideje da bismo, u slučaju kada imamo vremensku seriju podataka a ne dinamičke jednačine, mogli da koristimo upravo Kolmogorovljevu kompleksnost kao indikator haotičnog ponašanja.

3.7. Analiza rešenja jednačine energijskog bilansa na površini zemljišta

U današnje vreme, naučne oblasti koje se bave proučavanjem životne sredine imaju multidisciplinaran pristup velikom broju tema koje su povezane sa procesima u biosferi. Jedna od njih jeste modeliranje procesa na dodirnim površinama u životnoj sredini. To su mesta gde se različiti sistemi ili različiti delovi istog sistema sustiću i razmenjuju bilo koji vid informacija. Dodirna površina (*eng. interface*) u životnoj sredini se definiše kao površina između dva živa ili neživa sistema koja su u relativnom kretanju i razmenjuju energiju, materiju i informacije putem fizičkih, hemijskih ili bioloških procesa, koji variraju u prostoru i vremenu (Mihailović and Balaž, 2007). U prirodi postoji mnogo primera dodirnih površina u životnoj sredini kao npr. između ćelija, između tela čoveka ili životinja i okruženja, između neke prirodne ili veštačke podloge i atmosfere, i dr. (Mihailović et al., 2012). Tipičan primer dodirne površine u životnoj sredini jeste površina zemljišta, na kojoj se javljaju sva tri mehanizma prenošenja energije; dolazno i odlazno zračenje, konvekcija toplove sa vlagom u atmosferu i provođenje toplove u dublje slojeve zemljišta.

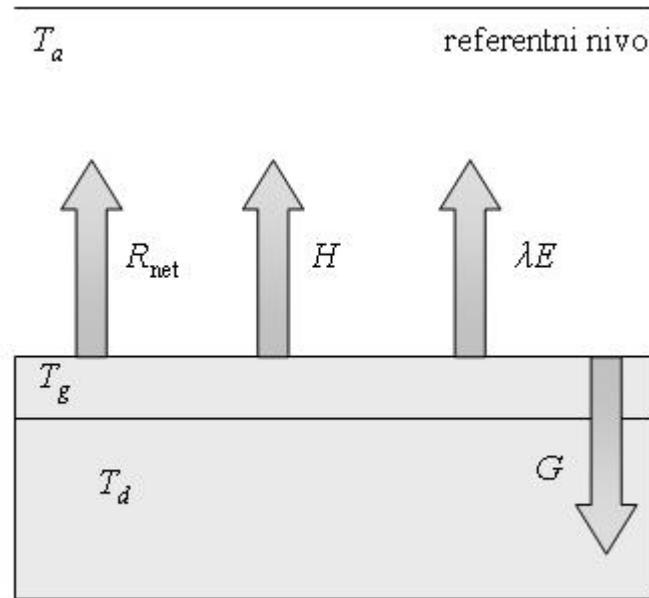
U radu Mihailovića i Mimića (2012) je pokazano da površina zemljišta može da se tretira kao sistem kod kojeg se javljaju haotične fluktuacije prilikom računanja njegove temperature. To je zapravo dinamički sistem, osetljiv na početne uslove, gde određeni poremećaj može da dovede do nepredvidivog ponašanja. U pomenutom radu donji granični uslov, odnosno temperatura u dubljem sloju zemljišta je smatrana konstantom, jer je sporo promenljiva veličina. Ovde je, ipak, posmatrana njena promena tokom vremena, pomoću prognostičke jednačine. Iz jednačine energijskog bilansa sledi prognostička jednačina za temperaturu na površini zemljišta a zajedno sa prognostičkom jednačinom za temperaturu u dubljem sloju zemljišta dobija se spregnut sistem jednačina koji će u daljem delu teksta biti predmet nelinearne dinamičke analize (Mimić et al., 2013).

Jedan od najvažnijih uslova za funkcionisanje bilo kojeg sistema jeste odgovarajuće snabdevanje energijom. Dinamika razmene energije je zasnovana na jednačini energijskog bilansa. U slučaju površine zemljišta kao dodirne površine u životnoj sredini, jednačina energijskog bilansa u diferencnom obliku izgleda ovako

$$C_g \frac{\Delta T_g}{\Delta t} = R_{net} - H - \lambda E - G \quad (3.11)$$

gde su: T_g temperatura na površini zemljišta, Δt vremenski korak, C_g toplotni kapacitet zemljišta, R_{net} ukupno zračenje, H fluks osetne toplove, λE fluks latentne toplove i G fluks

toplote u zemljište (slika 3.13). Članovi sa desne strane jednačine (3.11) mogu da se uz određene pretpostavke raspišu na sledeći način (Bhumralkar, 1975): prvo, koristimo izraz za ukupno zračenje $R_{net}=C_R(T_g-T_a)$ pri čemu je T_a temperatura vazduha na referentnom nivou a C_R koeficijent zračenja. Fluks osetne toplice može da se parametruje kao $H=C_H(T_g-T_a)$, gde je C_H koeficijent prenosa osetne toplice. Razvojem u red eksponencijalnog člana u izrazu za latentnu toplotu i zadržavajući se na drugom članu reda dobija se $\lambda E=C_L d[b(T_g-T_a)+b^2(T_g-T_a)^2/2]$, C_L je koeficijent prenosa vodene pare, $b=0,06337 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$, d je parametar koji se pojavi prilikom razvoja u red. Dalje, izraz za provođenje toplice u dublje slojeve zemljišta može da se zapiše kao $G=C_D(T_g-T_d)$, C_D je koeficijent provođenja toplice a T_d temperatura u dubljem sloju zemljišta.



Slika 3.13 Članovi u jednačini energijskog bilansa.

Prognostička jednačina za temperaturu u dubljem sloju zemljišta u konačnim razlikama je

$$\frac{\Delta T_d}{\Delta t} = \frac{1}{\tau}(T_g - T_d) \quad (3.12)$$

τ je vremenski razmer od jednog dana i iznosi $\tau=86400 \text{ s}$. Sada će sistem jednačina u konačnim razlikama biti:

$$C_g \frac{\Delta T_g}{\Delta t} = C_R(T_g - T_a) - C_H(T_g - T_a) \\ - C_L d [b(T_g - T_a) + \frac{b^2}{2} (T_g - T_a)^2] - C_D(T_g - T_d) \quad (3.13a)$$

$$\frac{\Delta T_d}{\Delta t} = \frac{1}{\tau} (T_g - T_d). \quad (3.13b)$$

Koeficijenti C_R , C_H , C_L , C_D su fizičke prirode, dobijaju se grupisanjem parametara koji figurišu u članovima energijskog bilansa i njihove vrednosti variraju u zavisnosti od meteoroloških uslova (Pielke, 2002). Sada korišćenjem vremenske šeme unapred, deljenjem sistema jednačina (3.13) sa nekom konstantnom temperaturom T_0 (npr. srednjom globalnom temperaturom vazduha $T_0=288$ K) i oduzimanjem T_a na obe strane, dobija se sistem

$$\frac{T_g^{n+1} - T_a}{T_0} = \frac{T_g^n - T_a}{T_0} + \frac{\Delta t}{C_g} C_R \frac{T_g^n - T_a}{T_0} - \frac{\Delta t}{C_g} C_H \frac{T_g^n - T_a}{T_0} - \frac{\Delta t}{C_g} C_L b d \frac{T_g^n - T_a}{T_0} \\ - \frac{\Delta t}{C_g} C_L d T_0 \frac{b^2}{2} \frac{(T_g^n - T_a)^2}{T_0^2} - \frac{\Delta t}{C_g} C_D \frac{T_g^n - T_a}{T_0} + \frac{\Delta t}{C_g} C_D \frac{T_d^n - T_a}{T_0} \quad (3.14a)$$

$$\frac{T_d^{n+1} - T_a}{T_0} = \frac{T_d^n - T_a}{T_0} + \frac{\Delta t}{\tau} \frac{T_g^n - T_a}{T_0} - \frac{\Delta t}{\tau} \frac{T_d^n - T_a}{T_0} \quad (3.14b)$$

gde je n broj iteracija. Uvodeći smenu $z=(T_g-T_a)/T_0$ i $y=(T_d-T_a)/T_0$, pri čemu je z bezdimenziona temperatura na površini zemljišta a y bezdimenziona temperatura u dubljem sloju zemljišta, dobija se spregnut sistem

$$z_{n+1} = Az_n - Bz_n^2 + Cy_n \quad (3.15a)$$

$$y_{n+1} = Dz_n + (1-D)y_n \quad (3.15b)$$

gde su: $A = 1 + \frac{\Delta t}{C_g} (C_R - C_H - C_L b d - C_D)$, $B = C_L d T_0 \frac{b^2 \Delta t}{2 C_g}$, $C = \Delta t \frac{C_D}{C_g}$ i $D = \frac{\Delta t}{\tau}$. Uvodeći

smenu $z_n=x_n A/B$, gde je x_n modifikovana bezdimenziona temperatura na površini zemljišta, možemo da pišemo

$$x_{n+1} = Ax_n(1-x_n) + \frac{CB}{A} y_n \quad (3.16a)$$

$$y_{n+1} = \frac{DA}{B} x_n + (1-D)y_n . \quad (3.16b)$$

Ispitivanjem vrednosti parametara A , B , C i D na osnovu velikog broja rezultata dobijenih pomoću šeme za parametrizaciju površinskih procesa LAPS (Land Air Parameterization Scheme) pokazano je da oni leže u sledećim intervalima $A \in (0, 4]$ a B , C i D u intervalu $[0, 1]$ (Mihailović, 1996). Parametar A odgovara kontrolnom parametru u logističkoj jednačini i biće označen sa r . Vrednosti preostalih parametara leže u istom intervalu i pod određenim meteorološkim uslovima mogu da budu jednaki. Zbog toga će u spregnutom sistemu (3.16) biti zamenjeni sa ε . Konačno, dobija se sistem spregnutih mapa

$$x_{n+1} = rx_n(1-x_n) + \varepsilon y_n \quad (3.17a)$$

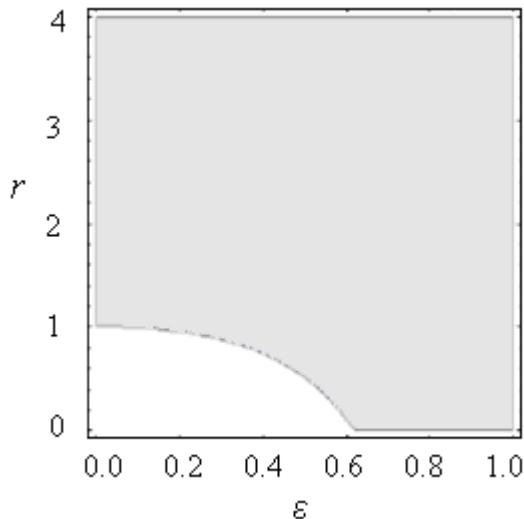
$$y_{n+1} = \varepsilon(x_n + y_n) \quad (3.17b)$$

pri čemu prvi član sa desne strane u jednačini (3.17a) ima oblik poznate logističke mape.

U nastavku je ispitano ponašanje spregnutog sistema (3.17) za različite vrednosti kontrolnog parametra r i parametra sparivanja ε . Sistem je posmatran u obliku $X_{n+1}=F(X_n)$ gde je $F(X_n)=(rx_n(1-x_n)+\varepsilon y_n, \varepsilon(x_n+y_n))$ pri čemu $\mathbf{X}_n=(x_n, y_n)$ predstavlja vektor čije su komponente bezdimenziona temperatura na površini zemljišta i u dubljem sloju zemljišta, redom. Tražimo fiksne tačke sistema (3.17) iz uslova $\mathbf{X}=F(\mathbf{X})$. Rešavanjem ove jednačine dobijaju se dve fiksne tačke; $(0,0)$ kao trivijalno rešenje i $((r+\varepsilon^2/(1-\varepsilon)-1)/r, \varepsilon/(1-\varepsilon)[r+\varepsilon^2/(1-\varepsilon)-1]/r)$. Za fiksnu tačku $(0,0)$ postoje dve svojstvene vrednosti $\lambda_{1,2}=(r+\varepsilon \pm \sqrt{r^2-2r\varepsilon+5\varepsilon^2})/2$. Koristeći vrednost sa znakom plus, koja je veća po apsolutnoj vrednosti i uslov da je fiksna tačka privlačna ako je $|\lambda| < 1$ a odbojna ako je $|\lambda| > 1$, dobijaju se oblasti u (ε, r) ravni iz kojih se vidi za koji par vrednosti parametara će fiksna tačka $(0,0)$ biti privlačna ili odbojna. Primenjujući isti postupak za drugu fiksnu tačku $((r+\varepsilon^2/(1-\varepsilon)-1)/r, \varepsilon/(1-\varepsilon)[r+\varepsilon^2/(1-\varepsilon)-1]/r)$ čije su svojstvene vrednosti

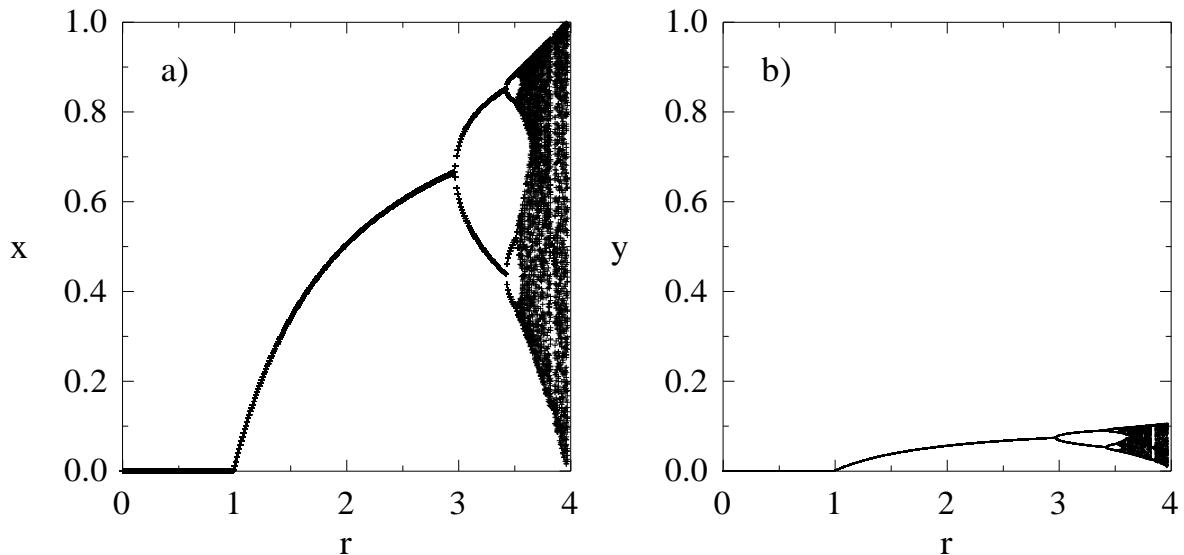
$$\begin{aligned} \lambda_{3,4} = & 1/[2(\varepsilon-1)](-2+\varepsilon+3\varepsilon^2+r-\varepsilon r) \\ & \pm \sqrt{(2-\varepsilon-3\varepsilon^2-r+\varepsilon r)-4(\varepsilon-1)(-2\varepsilon+3\varepsilon^2+\varepsilon^3+\varepsilon r-\varepsilon^2 r)} \end{aligned}$$

dobija se potpuno ista oblast privlačenja i odbijanja u (ε, r) ravni (slika 3.14). Ove fiksne tačke se odnose na period 1. Fiksne tačke za periode veće od 1 nisu razmatrane iz razloga što je postupak za njihovo ispitivanje veoma komplikovan.



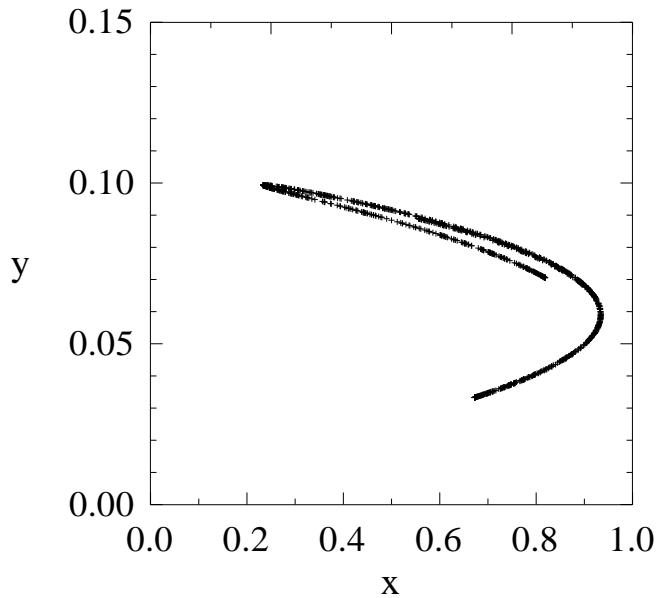
Slika 3.14 Grafička interpretacija fiksnih tačaka spregnutog sistema (3.17) u funkciji od vrednosti parametara r i ε . Obe fiksne tačke su u datim oblastima: privlačne (bela) i odbojne (siva).

Bifurkacioni dijagrami promenljivih x i y su predstavljeni na slici 3.15 u funkciji od kontrolnog parametra r u intervalu $(0,4)$ pri vrednosti parametra sparivanja $\varepsilon=0.1$. Primetili smo da maksimalna vrednost od y mnogo zavisi od vrednosti parametra sparivanja ε . Za male vrednosti ε bifurkacioni dijagram promenljive x je veoma sličan logističkoj mapi. Na oba dijagrama bifurkacije počinju za $r=3$ a kada je $r > 3.57$ javlja se haotično ponašanje.



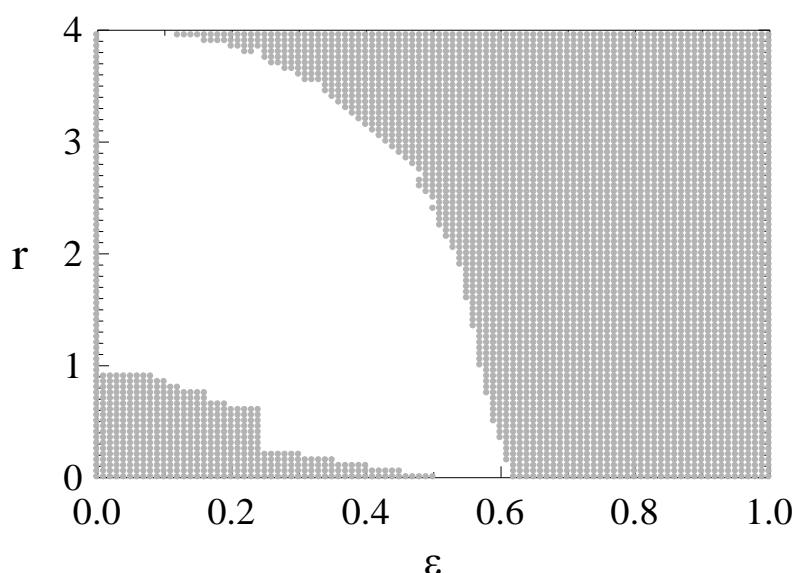
Slika 3.15 Bifurkacioni dijagrami spregnutog sistema (3.17) za r u intervalu $(0,4)$, $\varepsilon=0.1$ i početnim uslovima $x_0=0.2$ i $y_0=0.4$.

Za početne uslove $x_0=0.2$ i $y_0=0.4$ i pri izboru parametara $\varepsilon=0.1$ i $r=3.7$, dakle u haotičnom režimu, urađeno je 10 000 iteracija za ove spregnute mape da bi se ispitalo postojanje atraktora u faznom prostoru (slika 3.16).



Slika 3.16 Izgled atraktora u faznom prostoru spregnutog sistema (3.17) za vrednosti parametara $r=3.7$ i $\varepsilon=0.1$, pri početnim uslovima $x_0=0.2$ i $y_0=0.4$.

Sa slike 3.16 se vidi da atraktor podseća na Hénonov (*Michel Hénon*) čudni atraktor što je i moglo da se očekuje s obzirom da u slučaju kada parametar D u sistemu jednačina (3.16) ima vrednost $D=1$, spregnuti sistem je veoma sličan Hénonovoj dvodimenzionalnoj mapi (Hénon, 1976). Sada ispitujemo domen mogućih atraktora sistema u zavisnosti od parova vrednosti parametara (r, ε) (slika 3.17). Oblast bele boje pokazuje za koje parove vrednosti parametara (r, ε) postoji atraktor sistema dok u oblasti sive boje atraktor ne postoji, pri početnim uslovima $x_0=0.2$ i $y_0=0.4$. Testiranje je pokazalo da izbor početnih uslova ne utiče značajno na izgled domena.



Slika 3.16 Domen mogućih atraktora sistema u zavisnosti od vrednosti parametara (r, ε) .

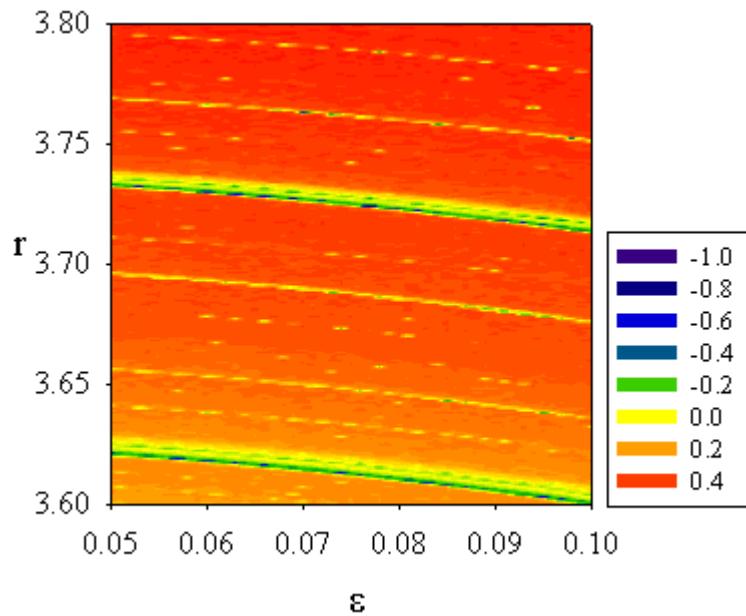
Najzanimljivije, haotično ponašanje logistička mapa pokazuje kada je kontrolni parametar r u intervalu [3,4] a spregnuti sistemi kada parametar sparivanja ε ima male vrednosti, u intervalu (0,0.1). Imajući u vidu da je opseg vrednosti za x i y između 0 i 1 dolazimo do određenih matematičkih ograničenja. Iz jednačine (3.17b) sledi da parametar sparivanja ne sme da bude veći od 0.5 ($\varepsilon \leq 0.5$) dok iz jednačine (3.17a), gde se najveća vrednost člana koji sadrži x dobija kada je $x=0.5$ a najveća vrednost drugog člana za $y=1$, sledi novi uslov $r/4 + \varepsilon < 1$. Iz navedenih razloga sistem (3.17) ćemo detaljnije ispitati upravo za sledeće vrednosti parametara $r \in [3.6, 3.8]$ i $\varepsilon \in [0.05, 0.1]$. Najveći Ljapunovljev eksponent se računa prema izrazu

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left\| \prod_{s=1}^n \xi_s \right\|}{n} \quad (3.18)$$

gde je n broj iteracija spregnutih mapa, što je u našem slučaju iznosilo 1000 a ξ_s jacobijan sistema

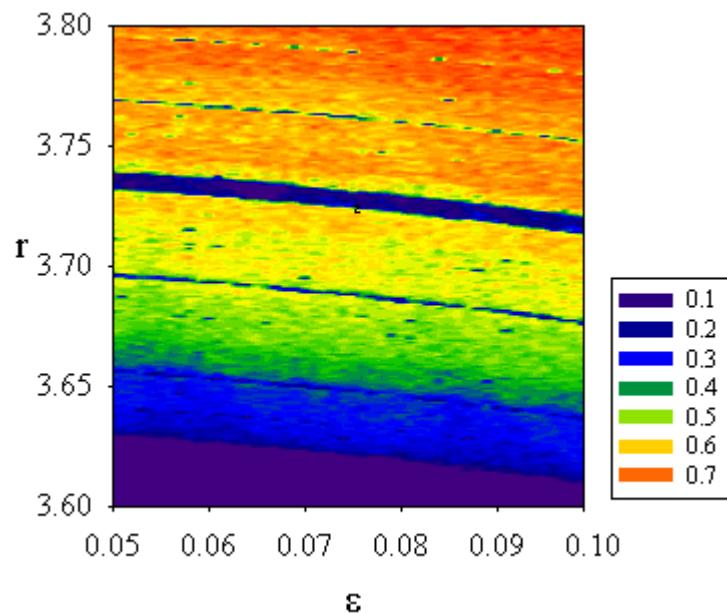
$$\xi_s = \begin{bmatrix} r(1-2x_s) & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

U izabranom intervalu vrednosti parametara i pri početnim uslovima $x_0=0.2$ i $y_0=0.4$ Ljapunovljev eksponent ima pretežno pozitivne vrednosti što potvrđuje haotično ponašanje sistema (slika 3.18).



Slika 3.18 Ljapunovljevi eksponenti spregnutog sistema (3.17) koji ukazuju na postojanje uskih regiona stabilnosti u veoma razvijenom haosu.

Međutim, na slici 3.18 se primećuju i uski regioni u obliku traka u kojima Ljapunovljev eksponent ima negativne vrednosti, gde su rešenja spregnutog sistema stabilna i koji ukazuju na domene stabilnosti. Prilikom računanja Kolmogorovljeve kompleksnosti sistema za isti interval vrednosti parametara r i ε , $r \in [3.6, 3.8]$ i $\varepsilon \in [0.05, 0.1]$, korišćene su vremenske serije dobijene nakon 1000 iteracija mapa. Rezultati pokazuju da Kolmogorovljeva kompleksnost sistema veoma zavisi od vrednosti parametra r (slika 3.19). Veće vrednosti Kolmogorovljeve kompleksnosti ukazuju na veoma razvijeno haotično ponašanje sistema. Kada se uporede slike 3.18 i 3.19 primećuje se izvesno slaganje sa Ljapunovljevim eksponentima. Takođe, za određene vrednosti parametara postoje uske oblasti u kojima Kolmogorovljeva kompleksnost ima vrednosti bliske nuli (oblasti obojene ljubičasto), što ukazuje na domene stabilnosti sistema, u kojima se ispoljava ponašanje koje nije haotične prirode.



Slika 3.19 Kolmogorovljeva kompleksnost sistema (3.17) u funkciji parametara r i ε .

Nelinearnom dinamičkom analizom sistema (3.17) je pokazano da pri određenim fizičkim uslovima postoji mogućnost za pojavu haosa u sistemu, čime se unosi nesigurnost prilikom računanja temperature na površini zemljišta. Na ovaj način se ističe mana trenutnih modela životne sredine jer postoje situacije u kojima nije pouzdano rešavanje jednačine energijskog bilansa, između ostalog i usled haotičnog ponašanja. Rezultati ukazuju na to da mala promena u vrednostima parametara može da utiče na ponašanje sistema. Jednačina energijskog bilansa u diferencnom obliku obuhvata razmenu energije na dodirnim površinama u životnoj sredini kako na lokalnom nivou, u smislu jedne tačke mreže u modelu, tako i na globalnom nivou.

Neki od prvih modela opšte cirkulacije atmosfere bili su bazirani upravo na ovoj jednačini. Što se tiče vremenskog razmara, energijski bilans se održava na svim skalama, pri malom i velikom vremenskom koraku. Uobičajen vremenski korak u šemama za parametrizaciju površinskih procesa, poput LAPS-a, iznosi pola sata. U ovom vremenskom intervalu, pri izraženom forsiranju zračenjem, površina zemljišta može da primi veliku količinu energije koja dovodi do pojave haotičnog ponašanja. Tačno je da pretpostavka $T_g, T_d \geq T_a$, koja je korišćena u jednačinama (3.14a) i (3.14b) biva narušena u mnogim atmosferskim uslovima, međutim postoje situacije kada je temperatura na površini zemljišta, takozvana „skin“ temperatura, i za 10°C veća od temperature vazduha na 2 m.

4. Informacione mere, entropija i kompleksnost

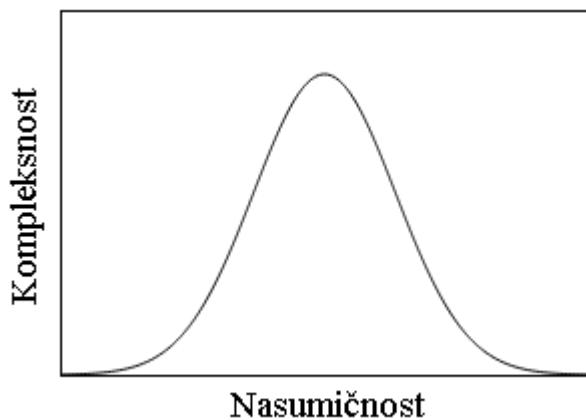
Osnovne informacije koje imamo o nekom sistemu dobijamo osmatranjem stanja tog sistema, merenjem nekih njegovih karakteristika. Ukoliko sistem pratimo dovoljno dugo tada možemo da uočimo određene obrasce u njegovom ponašanju. Razumevanje evolucije sistema nam omogućava da predvidimo njegova buduća stanja. Ako je ponašanje sistema takvo da ne postoji veliki broj različitih stanja, ako se određena stanja ponavljaju periodično, ako je odgovor sistema na signale iz okoline linearan, tada možemo da kažemo za sistem da je jednostavan. Međutim, postoje sistemi čije je ponašanje veoma složeno i čija buduća stanja je teško predvideti. Njih nazivamo kompleksni sistemi. Sistem koji ne može prosti da se rastavi na svoje sastavne delove koji međusobno interaguju i za koje je on logičan zbir, zbog velikog broja veza između pojedinačnih delova koje upravljaju dinamikom samog sistema, predstavlja kompleksan sistem (Rosen, 1991). Pojam kompleksnosti u sebi sadrži tri nivoa značenja (Edmonds, 1999):

- postojanje samoorganizacije i iskršavanje (*eng. emergence*) osobine ili ponašanja koje pojedinačni delovi sistema ne pokazuju;
- sistem nije organizovan centralno nego na distributivan način, postoje mnoge veze između njegovih delova, i
- teško je modelirati i predvideti ponašanje sistema čak i ako su u velikoj meri poznati njegovi delovi i veze između njih.

Da bi se razumela evolucija kompleksnog sistema potrebno je koristiti metod koji će da omogući merenje količine informacija sadržanih u podacima koji opisuju ponašanje sistema. Količina informacija koju neki događaj proizvede će biti veća ukoliko dovede u stanje koje se ne javlja često, nego da je ishod događaja stanje koje se često ponavlja. Nesigurnost u

predviđanju budućeg stanja zavisi od broja stanja u kojima sistem može da postoji i od verovatnoće pojave svakog stanja. Što je disperzija u raspodeli verovatnoće veća to nam je potrebno više informacija da bismo predvideli buduće stanje. Iz navedenih razloga nas zanima ukupna količina informacija sa kojom možemo opisati uzorkovane podatke.

Prvi problem koji se javlja pri proučavanju kompleksnih sistema jeste semantičke prirode pošto ne postoji opšte prihvaćen i formulisan pojam o tome šta je tačno „kompleksnost“. Intuitivno se pojam kompleksnosti vezuje za postojanje strukture i potrebno ga je razdvojiti od neuređenosti (Grassberger, 2012). Sledeći intuiciju, kompleksnost smeštamo između potpune uređenosti i potpune nasumičnosti (slika 4.1). Ono što je veoma bitno naglasiti jeste to da kompleksnost nosi sa sobom određeni smisao, odnosno informaciju.



Slika 4.1 Grafik kompleksnosti nasuprot nasumičnosti dobijen sledeći intuiciju.

Razmotrimo sada jedan jezički primer koji ukazuje na vezu između informacija i kompleksnosti. Ako pisac na nekom jeziku nasumično izabere 1000 reči i proglaši to pričom, mala je verovatnoća da će ona da nosi neku informaciju u sebi a kompleksnost će biti jednak nuli. Međutim, ukoliko pisac napiše basnu od 1000 reči najmlađi čitaoci će da je dožive kao priču o životinjama i dobiće određene informacije iz nje. U tom slučaju kompleksnost će biti različita od nule. Stariji čitaoci će u basni prepoznati i preneseno značenje priče i dobiti više informacija. Za čitaoca koji je upućen u piščevu biografiju i socijalne uslove pod kojima je delo nastalo može da uoči još neke poruke koje je pisac implicitno uneo u delo. Takav čitalac će da dobije dodatne informacije i on „meri“ još veću kompleksnost književnog dela. Izvodi se zaključak da količina informacija koju neko dobija osmatranjem zavisi od samog posmatrača i količine informaciju koju prethodno poseduje. Da bi informacija uopšte postojala, jedna strana treba da šalje tu informaciju a druga da je prima. Dakle, informacija ne može da postoji bez konteksta (Vedral, 2014).

Zbog različite interpretacije u naučnoj literaturi, u današnje vreme postoji mnogo veličina koje predstavljaju meru kompleksnosti. Svi do sada poznati i korišćeni pristupi mogu da se svrstaju u tri kategorije: fraktalnost, metodi nelinearne dinamike i entropija (Tang et al., 2015). Iako potiču iz različite perspektive ove tri kategorije su usko povezane i njihove tehnike često zavise jedna od druge. Teorija fraktala se bazira na samo-sličnosti, analizirajući podatke o ponašanju sistema na različitim skalamama. U ovoj disertaciji fraktali nisu razmatrani. Metodi nelinearne dinamike ispituju dinamiku sistema proučavanjem čudnog atraktora u faznom prostoru. Najpopularnija tehnika jeste računanje Ljapunovljevog eksponenta. Više reči o ovoj kategoriji je bilo u prvom delu disertacije. Entropija predstavlja neuređenost sistema i biće joj posvećeno više pažnje u narednom delu disertacije. Različite mere entropije mogu da se svrstaju u dve grupe: strukturalne i dinamičke entropije. Strukturalne entropije mere strukturalnu kompleksnost odnosno distribuciju frekvencija unutar vremenske serije dok dinamičke entropije mere različite obrasce u vremenskoj seriji i promene u obrascima pri promeni strukture faznog prostora.

Klod Šenon se smatra začetnikom teorije informacija. On je istakao da je osnovni problem u komunikaciji prenos poruke sa jednog mesta na drugo. Poruke najčešće nose određeno značenje koje je povezano sa fizičkim sistemom ili određenim konceptom. Šenon je prvi pokušao da uvede meru količine informacija iz podataka koje neki sistem produkuje, kao dužinu opisa samog niza podataka. Metod počiva na prepostavci da su podaci dobijeni iz poznatog izvora nasumičnih podataka i da su oni karakteristika samog izvora (Grünwald and Vitányi, 2004). Posmatrajmo sada nasumičnu promenljivu X koja uzima diskrete vrednosti x_i , $i=1,2,\dots,N$. Verovatnoća da X ima određenu vrednost x_i $Prob(X = x_i)$ se označava sa p_i , uz uslov da je $0 \leq p_i \leq 1$ i $\sum_i p_i = 1$. Tada se entropija ili neodređenost funkcije X definiše kao

$$H(X) = -\sum_{i=1}^N p_i \log_2 p_i. \quad (4.1)$$

Na ovaj način se entropija definiše kao funkcija koja preslikava skup nasumičnih brojeva u realne brojeve (Shannon, 1948). Izbor logaritamske funkcije potiče zbog njenih osobina, koje su u skladu sa teorijom verovatnoće. Osobine entropije koje se lako uočavaju su sledeće:

- $H(X) \geq 0$ uvek, izuzev kada je $p_i=0$ za sve ishode osim za samo jedan x_1 i tada je $H(X)=0$;

- za fiksni broj N maksimalna vrednost za $H(X)$ se dobija kada su sve verovatnoće p_i međusobno jednake i iznose $p_i=1/N$, tada je $H(X)=\log_2 N$.

Iz ove dve osobine sledi da je entropija H zapravo mera neodređenosti sa jedne strane, a sa druge strane može da se interpretira i kao srednja informacija koju dobija neko ko osmatra vrednosti od X . Šenonova entropija spada u grupu strukturalnih entropija.

Renji (*Alfréd Rényi*) je predložio modifikovani izraz za Šenonovu entropiju prema kojem informacija može da se šalje u delovima, bez gubitaka i na neki način postaje aditivna veličina

$$H^\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2 \left(\sum_{i=1}^N p_i^\alpha \right) \quad (4.2)$$

gde je $\alpha > 0$ i $\alpha \neq 1$. Definisana na ovaj način može da se smatra i kao entropija reda α distribucije $P=(p_1,p_2,...,p_N)$, $H^\alpha(X)=H^\alpha[P]$. U graničnom slučaju kada limes od α teži 1 dobija se izraz za Šenonovu entropiju. Posmatrajmo sada dve distribucije verovatnoće $P=(p_1,p_2,...,p_N)$ i $Q=(q_1,q_2,...,q_M)$. Označimo sa $P * Q$ direktni proizvod distribucija P i Q , izražen brojevima $p_i q_j$, $i=1,2,...N$ i $j=1,2,...,M$. Tada će $H[P * Q] = H[P] + H[Q]$. Ovo znači da je entropija kombinovanog eksperimenta sastavljenog od dva nezavisna eksperimenta jednak zbiru entropija pojedinačnih eksperimenata (Rényi, 1961). Prepostavimo sada da je nasumična promenljiva X zapravo par promenljivih $X=(Y,Z)$ sa ishodom eksperimenta označenim sa dva indeksa i i j , $x_{ij}=(y_i,z_j)$. Označimo sa p_j verovatnoću da Z ima vrednost z_j a sa $p_{ij}^{(X)}$ uslovnu verovatnoću da Y ima vrednost y_i kada Z ima vrednost z_j . Tada će entropija od Z biti $H(Z)$ a entropija od Y uz uslov $Z=z_j$ će biti $H(Y|z_j)=-\sum_i p_{ij}^{(X)} \log_2 p_{ij}^{(X)}$. Sledi da je

$$H(X) \equiv H(Y,Z) = H(Z) + \sum_j p_j H(Y|z_j) \equiv H(Z) + H(Y|Z). \text{ Dakle, da bismo odredili ishod}$$

od X prvo treba da odredimo ishod od Z a zatim da nađemo srednju informaciju od Y u zavisnosti od Z , ako su Y i Z međusobno zavisne. Poznavanje ishoda od Z može samo da smanji neodređenost ishoda od Y i nikada ne može da je poveća. To se naziva redundancija ili uzajamna informacija. Proširujući definiciju entropije na n-torku nasumičnih promenljivih $S = (S_1, \dots, S_n)$ koje predstavljaju diskretan niz vrednosti, pri čemu je $P(s_1, s_2, \dots, s_n)$ verovatnoća da je $S_k=s_k$ za $1 \leq k \leq n$ dobija se izraz

$$H_n = - \sum_{s_1, \dots, s_n} P(s_1, s_2, \dots, s_n) \log_2 P(s_1, s_2, \dots, s_n). \quad (4.3)$$

Da bi se niz opisao potrebno je navesti svaki član, redom. Ukoliko je opis bez redundancije tada će srednja dužina opisa po svakom članu biti jednaka $h_n=H_{n+1}-H_n$. Veličina h_n se tumači kao količina informacija potrebna da se odredi $n+1$ član niza ukoliko je svih n prethodnih članova poznato, odnosno kao srednja uslovna informacija. Poznavanje što više prethodnih članova niza može da smanji neodređenost sledećeg člana niza ali ne i da je poveća, pa otuda $h_{n+1} \leq h_n$. Ako je niz dovoljno dugačak biće $h=\lim_{n \rightarrow \infty} h_n$. Na ovaj način se definiše entropija niza h , a ukoliko niz predstavlja vrednosti dobijene nekim dinamičkim procesom onda se naziva Kolmogorov-Sinajeva (*Yakov Sinai*) entropija ili metrička entropija dinamičkog sistema. Suma svih pozitivnih Ljapunovljevih eksponenata nekog dinamičkog sistema daje procenu Kolmogorov-Sinajeve entropije (Pesin, 1977).

U grupu strukturalnih entropija, kao mera kompleksnosti vremenskih serija spada i permutaciona entropija (Bandt and Pompe, 2002). Osnovna ideja jeste da se međusobno porede susedni članovi u vremenskoj seriji sa elementima x_i , $i=1,2,\dots,N$. Članovi sa jednakim vrednostima $x_{i^*} = x_i$, $i^* \neq i$ se ne upoređuju, već se razmatraju samo nejednakosti među članovima. Ova entropija može da se računa za različite vrednosti strukturne dimenzije faznog prostora m , koja zavisi od broja posmatranih suseda (dva, tri ili više). Ukoliko, na primer, posmatramo seriju od sedam članova $x=(4, 7, 9, 10, 6, 11, 3)$ tada će biti šest parova suseda od kojih za četiri važi nejednakost $x_i < x_{i+1}$ a za dva para važi $x_i > x_{i+1}$. U prvom slučaju četiri para su predstavljena permutacijom 01 a u drugom slučaju dva para su predstavljena sa 10. Permutaciona entropija reda $m=2$ će biti mera verovatnoće za permutacije 01 i 10, i računaće se kao $H(2) = -(4/6)\log_2(4/6) - (2/6)\log_2(2/6) \approx 0.918$. Pri poređenju tri susedne vrednosti kombinacije (4, 7, 9) i (7, 9, 10) predstavljaju permutaciju 012 zato što su poredane u rastućem poretku $x_i < x_{i+1} < x_{i+2}$, (9, 10, 6) i (6, 11, 3) odgovaraju permutaciji 201 jer je $x_{i+2} < x_i < x_{i+1}$, dok je (10, 6, 11) permutacija tipa 102 zbog toga što je $x_{i+1} < x_i < x_{i+2}$. Permutaciona entropija reda $m=3$ će biti $H(3) = -2(2/5)\log_2(2/5) - (1/5)\log_2(1/5) \approx 1.522$. Za vremensku seriju $\{x_i\}$, $i=1,2,\dots,N$ posmatramo svih $m!$ permutacija π reda m koje predstavljaju mogući raspored m različitih članova serije. Za svaku π se određuje relativna frekvencija

$$p(\pi) = \frac{\#\{i \mid 1 \leq i \leq N-m, (x_{i+1}, \dots, x_{i+m}) \text{ je tipa } \pi\}}{N-m+1} \quad (4.4)$$

koja za izabrani red m kaže koliki broj parova je permutacija tipa π u odnosu na ukupan broj parova. Tada se permutaciona entropija reda $m \geq 2$ definiše kao

$$H(m) = \sum_{i=1}^{m!} p_i(\pi) \log_2 p_i(\pi) . \quad (4.5)$$

Ona nam daje informaciju o vremenskoj seriji poređenjem m uzastopnih njenih članova. Vrednosti uvek leže u intervalu $0 \leq H(m) \leq \log_2(m!)$. Na primeru logističke mape je pokazano dobro slaganje permutacione entropije sa Ljapunovljevim eksponentom, utvrđeno je da ova mera može da napravi razliku između periodične, nasumične i haotične vremenske serije kao i to da mali šum ne menja značajno kompleksnost haotičnog signala (Bandt and Pompe, 2002).

Dinamičke entropije ispituju kompleksnost sistema posmatrajući promenu obrazaca unutar vremenske serije podataka i njihove dinamike, u smislu uslovne verovatnoće da dve sekvene u faznom prostoru ostanu slične jedna drugoj pri promeni strukturne dimenzije faznog prostora m . Dugo vremena je korelaciona dimenzija bila u upotrebi kao algoritam pri analizi podataka (Grassberger and Procaccia, 1983). Za datu vremensku seriju koja se sastoji od N članova $x=(x_1, x_2, \dots, x_N)$ koji su mereni u jednakim vremenskim intervalima i uz izbor pozitivnog celog broja m i pozitivnog realnog broja r , konstruiše se niz vektora $X_1^m, X_2^m, \dots, X_{N-m+1}^m$ definisanih kao $X_i^m = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{N-m+1})$, $i = 1, 2, \dots, N-m+1$. Tada je

$$C_i^m(r) = \frac{\#d[X_i^m, X_j^m] \leq r}{N-m+1} \quad (4.6)$$

broj j slučajeva za koje je distanca između vektora manja od izabranog r . Distanca između vektora se definiše kao $d[X_i^m, X_j^m] = \max_{k \in [0, m-1]} |x_{i+k} - x_{j+k}|$. Sada će biti

$$C^m(r) = \frac{1}{N-m+1} \sum_{i=1}^{N-m+1} C_i^m(r) \quad (4.7)$$

i za dovoljno veliko m korelaciona dimenzija se računa kao

$$\beta_m = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log_2 C^m(r)}{\log_2 r} . \quad (4.8)$$

Pokazano je da korelaciona dimenzija može da ukaže na razliku između korelisanih i nekorelisanih uzastopnih članova niza, sa većim vrednostima dimenzije u slučaju nekorelisanih podataka (Pincus, 1991). Grasberger (*Peter Grassberger*) i Prokačia (*Itamar Procaccia*) su u svom radu iz 1983. godine predložili meru za količinu informacije u haotičnoj vremenskoj seriji na osnovu Kolmogorov-Sinajevе entropije. Takens (*Floris Takens*) je izmenio njihovu formulu uvodeći distancu između vektora (Takens, 1983) a Ekman (*Jean-Pierre Eckmann*) i Ruele (*David Ruelle*) su modifikovali Takensov formulu kako bi direktno izračunali Kolmogorov-Sinajevu entropiju (Eckmann and Ruelle, 1985). Definisali su izraz

$$\Phi^m(r) = \frac{1}{N-m+1} \sum_{i=1}^{N-m+1} \log_2 C_i^m(r) \quad (4.9)$$

pomoću kojeg se dobija Ekman-Rueleova entropija

$$E - R = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{N \rightarrow \infty} [\Phi^m(r) - \Phi^{m+1}(r)]. \quad (4.10)$$

S obzirom da Ekman-Rueleova entropija ima beskonačnu vrednost za vremensku seriju superponiranu šumom bilo kojeg intenziteta, potrebno je napraviti aproksimaciju za realne eksperimentalne podatke, za neku određenu vrednost parametra r koja je obično u intervalu 10-20% standardne devijacije vrednosti podataka (Pincus, 1991)

$$ApEn(m, r, N) = \Phi^m(r) - \Phi^{m+1}(r). \quad (4.11)$$

Na ovaj način se dobija aproksimativna entropija koja meri verovatnoću da obrasci u vremenskoj seriji koji su slični ostanu slični i kada se porede u višoj strukturnoj dimenziji m . Mala vrednost aproksimativne entropije odražava visok stepen regularnosti u nizu podataka. Osnovni nedostatak ove mere jeste to što je osetljiva na dužinu niza i za kraće nizove ima vrednosti manje od očekivanih. Druga stvar se odnosi na konzistentnost, koja joj nedostaje. Ako jedna vremenska serija ima veću vrednost aproksimativne entropije u odnosu na drugu, onda bi trebalo da je zadrži pri testiranju pod različitim uslovima, odnosno za različite vrednosti parametara, što ponekad nije slučaj. U algoritmu za računanje ove mere šablonski vektor koji se poredi sa ostalim vektorima, poredi se i sa sobom kako bi se izbegao slučaj da je verovatnoća jednaka nuli i da bi se uvek mogao izračunati logaritam verovatnoće.

Nedostaci aproksimativne entropije su ispravljeni uvođenjem nove mере koja se naziva entropija uzorka (*eng. sample entropy*) (Richman and Moorman, 2000). Isključeno je samo-podudaranje šablonskog vektora i jedini zahtev je da vektor dužine m nađe sličan vektor dužine $m+1$. Za vektor X_i^m definišemo B_i koje predstavlja broj vektora j ($1 \leq j \leq N-m$), pri čemu je $j \neq i$ da bi bilo isključeno samo-podudaranje, za koje je rastojanje $d[X_i^m, X_j^m] \leq r$.

Tada je, za i u intervalu $1 \leq i \leq N-m$, $B_i^m(r) = B_i / (N-m-1)$ i definišemo

$$B^m(r) = \left\{ \sum_{i=1}^{N-m} B_i^m(r) \right\} / (N-m) \text{ kao verovatnoću da se dve sekvene podudaraju za } m \text{ tačaka.}$$

Na isti način se za vektore X_i^{m+1} i X_j^{m+1} definiše $A^m(r) = \left\{ \sum_{i=1}^{N-m} A_i^m(r) \right\} / (N-m)$ i predstavlja verovatnoću da se dve sekvene podudaraju za $m+1$ tačaka. Konačno se dobija izraz sa entropiju uzorka

$$\text{SampEn}(m, r, N) = -\ln \frac{A^m(r)}{B^m(r)} \quad (4.12)$$

čija vrednost može da se izračuna uvek, osim kada je $B^m(r)=0$, u slučaju da ne postoji niti jedno podudaranje i kada je $A^m(r)=0$, što znači da je uslovna verovatnoća jednaka 0. Najmanja vrednost uslovne verovatnoće, različita od nule, koju algoritam može da izračuna jeste $2[(N-m-1)(N-m)]^{-1}$ dok je gornja granica vrednosti entropije uzorka $\ln(N-m) + \ln(N-m-1) - \ln 2$ (Richman and Moorman, 2000). Entropija uzorka pokazuje veću konzistentnost u odnosu na aproksimativnu entropiju prilikom istih testova, mada ni ona sama ne mora da bude uvek konzistentna. Entropija uzorka je statistička mera koja broji koliko se vektora u nekoj vremenskoj seriji međusobno podudara. Ako svaki vektor predstavlja neki događaj onda će statistika biti nepouzdana ukoliko su ti događaji retki, što vodi do manjka konzistentnosti. Entropija uzorka, kao i druge entropije, može da se analizira i na različitim vremenskim skalama. Diskretna vremenska serija sa N članova $\{x_i\}$, $i=1,2,\dots,N$ se za određenu vrednost faktora vremenskog skaliranja τ transformiše u novu seriju tako što se podeli na podintervale dužine τ koji se međusobno ne preklapaju, a potom se svi podaci koji se nalaze u jednom intervalu usrednje. Na taj način se dobije serija grublje rezolucije

$$y_j^{(\tau)} = \frac{1}{\tau} \sum_{i=(j-1)\tau+1}^{j\tau} x_i \quad (4.13)$$

pri čemu je $1 \leq j \leq N/\tau$. Za $\tau > 1$ nova vremenska serija ima N/τ članova. Potom se računa entropija uzorka za svaku novu vremensku seriju dobijenu za različite vrednosti faktora vremenskog skaliranja (Balzter, 2014). Ukoliko su vrednosti entropije jedne vremenske serije na raznim vremenskim skalama veće u odnosu na drugu, tada je prva serija kompleksnija od druge. Termin kompleksnija u slučaju vremenske serije znači da je serija manje uređena i da se obrasci u njoj pojavljuju skroz nasumično, pa da je zbog toga teško predvideti naredne članove niza.

U teoriji informacija Šenonova entropija predstavlja meru prosečne količine informacija koja je potrebna da bi se kodirao neki niz podataka, odnosno da bi se prenela poruka, ali ona ne uzima u obzir informacije potrebne za opisivanje samog postupka kodiranja, koji zavisi od raspodele verovatnoće. Kolmogorovljeva kompleksnost je povezana sa Šenonovom entropijom na taj način da je njena očekivana vrednost za neki nasumičan niz približno jednak entropiji distribucije izvora koji određenim procesom stvara taj niz. Međutim, Kolmogorovljeva kompleksnost se razlikuje od entropije po tome što se razmatra tačno određeni niz podataka a ne raspodela verovatnoće izvora (Kolmogorov, 1968). Za određeni niz podataka, definiše se kao dužina, u bitovima, najkraćeg programa koji kada se pokrene na univerzalnom računaru, Tjuringovoj mašini (*Alan Turing*), odštampa dati niz i tada se zaustavlja (Li and Vitanyi, 1997)

$$K_\varphi(x) = \left\{ \min_{\varphi(p)=x} l(p) \right\} \quad (4.14)$$

pri čemu φ predstavlja univerzalni računar, p program a x niz podataka. Nasumični nizovi imaju veću Kolmogorovljevu kompleksnost u odnosu na uređene nizove iste dužine, s obzirom da se ne mogu uočiti obrasci pomoću kojih bi se smanjio opis, odnosno dužina programa koji reprodukuje dati niz (Evans et al., 2002). Na primer, posmatrajmo dva niza od 16 članova, od kojih je prvi *abababababababab* dok je drugi *w7ghe16mzuj3rjcc*. Da bi se reprodukovao prvi niz dovoljno je dati naredbu programu da odštampa osam puta *ab* dok je u drugom slučaju potrebno navesti sve članove niza u pravilnom redosledu. Osnovni problem koji se odnosi na Kolmogorovljevu kompleksnost je to što ne može egzaktno da se izračuna. Iz tog razloga je bila potrebna izračunljiva interpretacija ove mere, koju su ponudili Lempel (*Abraham Lempel*) i Ziv (*Jacob Ziv*). Lempel-Zivov algoritam se svodi na prebrojavanje obrazaca koji se pojavljuju u seriji. Ukupan broj obrazaca predstavlja meru kompleksnosti niza. Kada se ispituje Kolmogorovljeva kompleksnost, diskretnu vremensku seriju je potrebno kodirati u binarni niz sa članovima 0 i 1. Vrednosti iz serije se porede sa izabranim

pragom, što je najčešće srednja vrednost. Ukoliko je posmatrani član serije manji od izabranog praga onda se na njegovo mesto u seriji upisuje 0, u suprotnom se upisuje 1. Pod obrascem ovde podrazumevamo sekvencu u kodiranoj seriji koja je unikatna, odnosno koja se ne ponavlja. Funtcionisanje Lempel-Zivovog algoritma se može opisati na sledeći način (Kaspar and Schuster, 1987):

1. Prva cifra, bilo da je 0 ili 1, je uvek prvi obrazac.
2. Definiše se niz S koji predstavlja podniz i koji se sastoji od članova koji pripadaju već prepoznatim obrascima. Odnosno, ovaj niz predstavlja skup svih članova serije koji su već svrstani u prepozнате obrasce. Jasno je da broj članova ovog niza stalno raste, dok se ne ispita cela serija.
3. Definiše se niz Q pomoću kojeg se pretražuju novi obrasci u seriji. Ovaj niz se formira tako što mu se dodaju još neispitani članovi serije sve dok se ne ispostavi da je niz Q novi obrazac.
4. Definiše se niz SQ koji se dobija dodavanjem niza Q na kraj niza S .
5. Formira se niz $SQ\pi$ koji je zapravo podniz niza SQ . Dobija se tako što se iz niza SQ ukloni poslednja cifra.
6. Sada se postavlja pitanje da li je niz Q sadržan u nizu $SQ\pi$.
7. Ukoliko niz Q jeste sadržan u nizu $SQ\pi$ onda mu se dodaje naredna cifra iz kodirane serije i postupak se ponavlja sve dok je ovaj uslov ispunjen.
8. Ukoliko niz Q nije sadržan u nizu $SQ\pi$ smatra se da je niz Q novi obrazac. Ovako dobijen obrazac se dodaje u spisak prethodno prepoznatih obrazaca koji se naziva rečnik, R . Niz SQ sada postaje novi niz S a niz Q se prazni.

Ilustracije radi, razmotrimo binarni niz $1011010010011010010011101001001100010$. Algoritam će u njemu prepoznati sledeće obrasce:

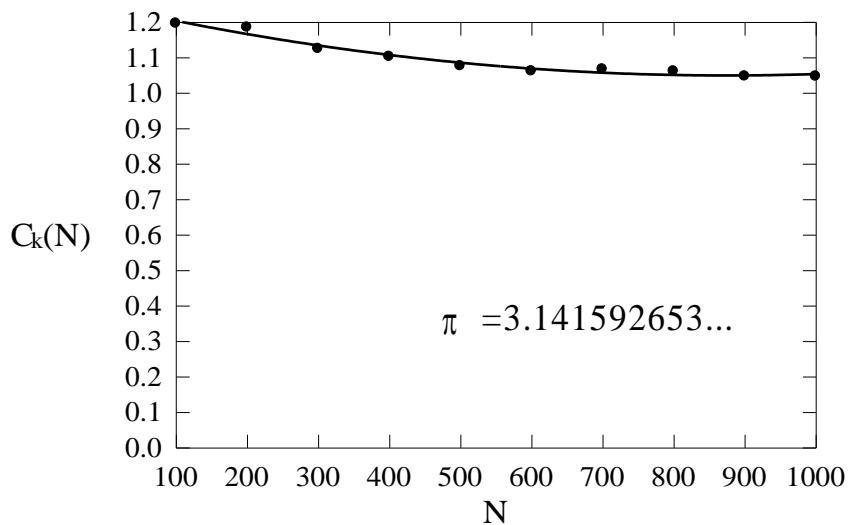
- prva cifra je uvek prvi obrasac, što implicira $\rightarrow R=1$
- $S = 1, Q = 0, SQ = 10, SQ\pi = 1, Q \notin v(SQ\pi) \rightarrow R=1 \cdot 0$
- $S = 10, Q = 1, SQ = 101, SQ\pi = 10, Q \in v(SQ\pi) \rightarrow 1 \cdot 0 \cdot 1$
- $S = 10, Q = 11, SQ = 1011, SQ\pi = 101, Q \notin v(SQ\pi) \rightarrow R=1 \cdot 0 \cdot 11 \cdot$
- $S = 1011, Q = 0, SQ = 10110, SQ\pi = 1011, Q \in v(SQ\pi) \rightarrow 1 \cdot 0 \cdot 11 \cdot 0$
- $S = 1011, Q = 01, SQ = 101101, SQ\pi = 10110, Q \in v(SQ\pi) \rightarrow 1 \cdot 0 \cdot 11 \cdot 01$
- $S = 1011, Q = 010, SQ = 1011010, SQ\pi = 101101, Q \notin v(SQ\pi) \rightarrow R=1 \cdot 0 \cdot 11 \cdot 010 \dots$

Ponavljajući ovaj postupak na kraju će se izdvojiti sledeći obrasci: 1, 0, 11, 010, 010011, 0100100111, 01001001100, 010. Simbol · odvaja obrasce a brojač kompleksnosti u ovom slučaju iznosi $c(N)=8$, pri čemu poslednji obrazac 010 predstavlja ostatak. Za razliku od

Šenonove entropije koja uzima u obzir samo verovatnoću pojave određene numeričke vrednosti u originalnoj vremenskoj seriji, vidimo da Kolmogorovljeva kompleksnost dobijena pomoću Lempel-Zivovog algoritma vodi računa o redosledu pojavljivanja vrednosti u seriji. Shematski prikaz Lempel-Zivovog algoritma je predstavljen u Dodatku A na slici A1.

4.1. Srednja Kolmogorovljeva kompleksnost

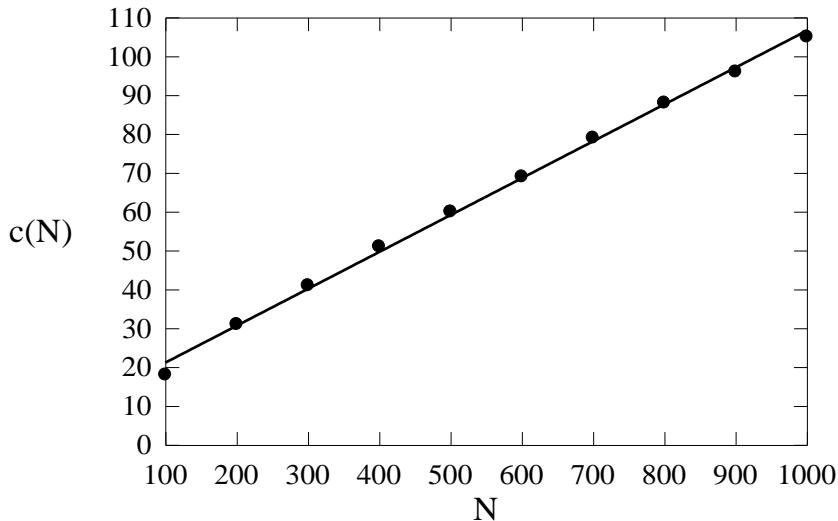
Kada se pri računanju kompleksnosti pomoću Lempel-Zivovog algoritma za prag izabere srednja vrednost vremenske serije dobija se mera koju nazivamo srednja Kolmogorovljeva kompleksnost ili samo Kolmogorovljeva kompleksnost, i označavamo je sa KC. Postupak za njeno izračunavanje je opisan formulama (3.8)-(3.10). Ukupan broj obrazaca je normiran na maksimalnu vrednost $N/\log_2 N$, gde je N broj članova niza. Vidimo da vrednost kompleksnosti zavisi od broja članova u vremenskoj seriji. Ovu zavisnost smo dodatno ispitali na slučaju broja π ($\pi=3.141592563\dots$) gde su vrednosti decimala adekvatan primer niza nasumičnih brojeva koji zapravo u sebi sadrži određenu strukturu (slika 4.2). Sa slike 4.2 se uočava da vrednosti kompleksnosti $C_k(N)$ počinju da konvergiraju kada je broj članova niza $N=600$. Međutim, već pri izboru od oko 400 članova vrednosti se ne razlikuju značajno. Sa druge strane, broj obrazaca $c(N)$ u ovoj vremenskoj seriji ima izraženu linearnu zavisnost u odnosu na broj članova niza N (slika 4.3).



Slika 4.2 Zavisnost Kolmogorovljeve kompleksnosti od dužine niza na primeru broja π .

U dužoj vremenskoj seriji, u kojoj redosled članova ima izraženu nasumičnost, može da se očekuje veći broj različitih obrazaca. Razmotrimo sada drugi primer. U prvih 10 miliona prirodnih brojeva postoji 664 000 prostih brojeva. Niz je rastući i bilo bi besmisleno računati

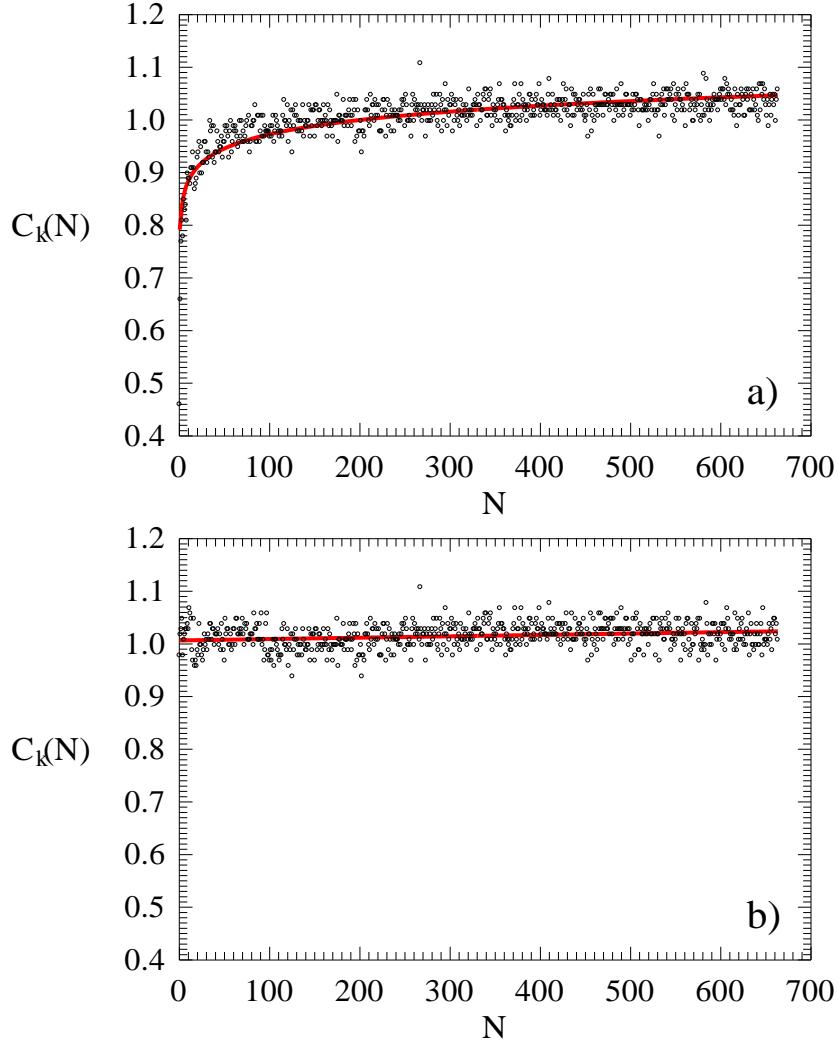
Kolmogorovljevu kompleksnost iz razloga što bi prvi deo niza, koji čine brojevi manji od srednje vrednosti, u binarnoj seriji bile nule a ostatak bi bile jedinice. Iz tog razloga je posmatrana udaljenost između dva uzastopna prosta broja i formiran je novi niz sastavljen od razlika njihovih vrednosti. Na ovom primeru je ispitana uticaj izbora praga na vrednosti kompleksnosti.



Slika 4.3 Zavisnost broja obrazaca $c(N)$ u vremenskoj seriji od broja članova serije N .

Celokupan niz od 664 000 članova, čiji je prvi član jednak 2 s obzirom da je prvi prost broj dva i udaljen je od 0 za dva, sada podelimo u podnizove od po $N=1000$ članova i za svaki računamo Kolmogorovljevu kompleksnost (slika 4.4). U prvom slučaju (slika 4.4a) za prag je izabrana srednja vrednost celokupnog niza od 664 000 članova i prilikom kodiranja, svaki član svakog podniza je poređen sa tom istom vrednošću. Kompleksnost prvog podniza iznosi tek 0.458 da bi za naredne podnizove vrednost ubrzano rasla i već za četrnaesti podniz dostigla 0.907 a zatim se postepeno ustalila oko 1. Za prvih 664 000, najmanja razlika između dva uzastopna prosta broja iznosi 1 dok je najveća 154, a pri tom je srednja vrednost koja je korišćena kao prag 15.05. Kako su na samom početku niza prosti brojevi mali to su i njihove razlike male i odatle ubrzani porast kompleksnosti. U drugom slučaju (slika 4.4b) kao prag za dati podniz je izabrana srednja vrednost samog tog podniza. Pri ovakovom kodiranju vrednosti kompleksnosti od samog početka variraju oko 1.

S obzirom da je srednja Kolmogorovljeva kompleksnost mera neuređenosti i nasumičnosti vremenske serije, njene vrednosti su male za periodične i uređene serije. Sa druge strane, postavlja se pitanje kakvo je njeno ponašanje kada posmatramo vremensku seriju koja opisuje evoluciju dinamičkog sistema kada se u njega unese šum (u daljem tekstu dopiranu šumom), s obzirom da šum povećava nasumičnost u seriji.



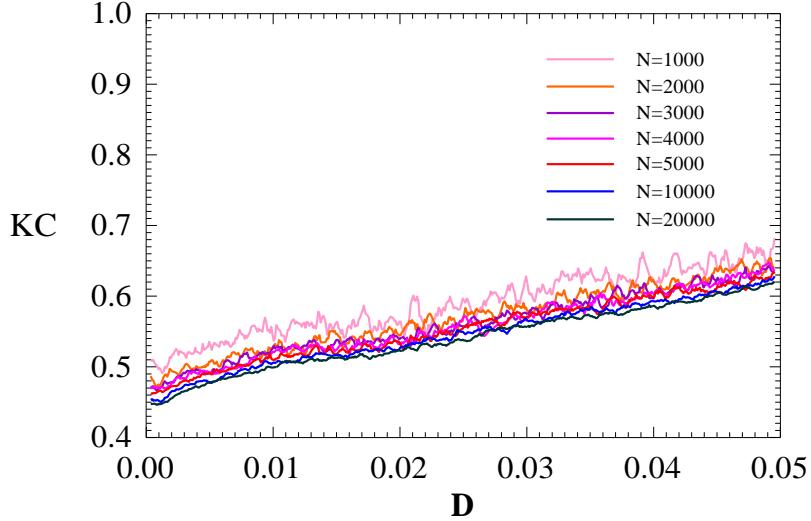
Slika 4.4 Kolmogorovljeva kompleksnost podnizova udaljenosti prostih brojeva kada je prag srednja vrednost celog niza (a) i datog podniza (b).

Da li je ova mera osetljiva na šum? Prisustvo šuma može znatno da utiče na ponašanje nelinearnog dinamičkog sistema (Serletis et al., 2007). Da bismo to utvrdili analizirali smo ponašanje logističke mape dopirane tzv. aditivnim šumom

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) + \xi \quad (4.15)$$

gde je $\xi = \mathbf{D}\delta$, pri čemu je δ nasumični broj u intervalu $[-1,1]$ dok je \mathbf{D} amplituda šuma (Mihailović et al., 2015a). Pri izboru parametra $r=3.7$, početnog uslova $x_0=0.2$ i menjajući amplitudu šuma \mathbf{D} u intervalu od 0.0001 do 0.05 sa korakom od 0.0001 rađene su simulacije sa različitim brojem iteracija N dinamičkog sistema (slika 4.5). U svakoj simulaciji prvih 1000 koraka je odbačeno radi stabilizacije a potom je praćena evolucija sistema pod uticajem šuma. Šum može da bude i parametarski, kada se dopira na vrednosti parametra r , ali ovde

nije uzet u razmatranje. Rezultati pokazuju da Kolmogorovljeva kompleksnost raste sa porastom amplitude šuma \mathbf{D} . Promene vrednosti KC su približno 0.1 za različite vrednosti broja iteracija. Uticaj šuma je veći ukoliko je vremenska serija kraća, u smislu rasipanja vrednosti KC.



Slika 4.5 Kolmogorovljeva kompleksnost logističke mape dopirane aditivnim šumom za različit broj iteracija N .

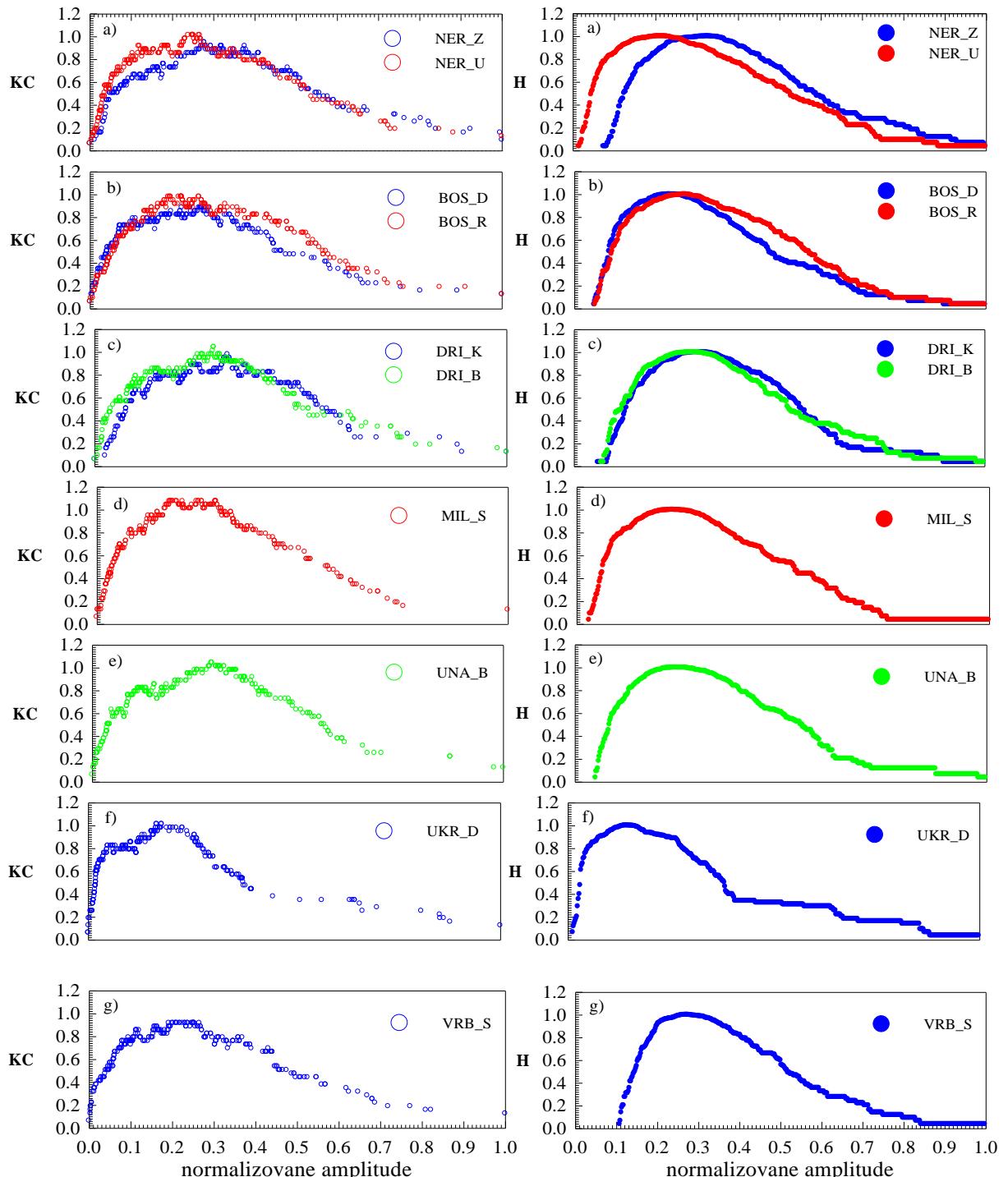
4.2. Spektar Kolmogorovljeve kompleksnosti

Pri analiziranju više vremenskih serija koje predstavljaju istu fizičku veličinu poželjno je izvršiti normalizaciju vrednosti tako da sve leže u intervalu $[0,1]$ radi lakšeg upoređivanja. Za datu vremensku seriju $\{X_i\}$, $i=1,2,\dots,N$ koja je dobijena ili merenjem neke fizičke veličine ili kao rezultat nekog fizičkog modela, normalizovanu seriju $\{x_i\}$ dobijemo pomoću transformacije $x_i=(X_i-X_{\min})/(X_{\max}-X_{\min})$, где X_{\max} predstavlja maksimalnu a X_{\min} minimalnu vrednost u dатој seriji. Ukoliko svaki član serije $\{x_i\}$ uzmemомо као prag prilikom kodiranja i postupak ponovimo N puta, добићемо spektar Kolmogorovljeve kompleksnosti $\{c_i\}$ (Mihailović et al., 2015a). Lempel-Zivov algoritam за кодирање originalnih vremenskih serija u nizove nula i jedinica se примењује N пута, тако што сваки пут за prag $x_{t,k}$ узимамо нaredну вредност у seriji, $k=1,2,\dots,N$

$$S_i^{(k)} = \begin{cases} 0 & x_i < x_{t,k} \\ 1 & x_i \geq x_{t,k} \end{cases}. \quad (4.16)$$

На тај начин добијемо N вредности Kolmogorovljeve kompleksности које представљају спектар $\{c_i\}$. Да би се оптимизовало рачунско време у случају временских серија са великим бројем чланова и како бисмо избегли понављање рачуна за исте вредности у серији, нормализовану серију у интервалу $[0,1]$ поделимо на подинтервали у корацима од 0.01 и тада дате подинтервали

koristimo kao prag prilikom kodiranja. Na slici 4.6 su prikazani spektri Kolmogorovljeve kompleksnosti i Šenonova entropija binarnih nizova za vremenske serije protoka reka (m^3/s) u Bosni i Hercegovini, pri različitim režimima (Mihailović et al., 2015b).



Slika 4.6 Spektri Kolmogorovljeve kompleksnosti (paneli levo) i Šenonova entropija binarnih nizova (paneli desno) za različite režime protoka reka u Bosni i Hercegovini; ravničarski – plava, brdski – zelena i planinski – crvena.

Detaljan opis lokacije sa nazivima reka i odgovarajućim vrednostima protoka objašnjen je u potpoglavlju 5.2. Trenutno nas zanima izgled spektara Kolmogorovljeve kompleksnosti i informacija koja može da se dobije iz distribucije vrednosti. Prva stvar koja se uočava jeste dobro slaganje spektra Kolmogorovljeve kompleksnosti sa vrednostima Šenonove entropije binarnih nizova. Krive imaju sličan oblik i odgovarajuće vrednosti im se pretežno poklapaju. Za različite reke i režime se uočava različita dinamika protoka u smislu maksimalne vrednosti Kolmogorovljeve kompleksnosti i njenog položaja u spektru. Kada posmatramo dva različita režima iste reke (slika 4.6a ili 4.6b) primećujemo da reka u planinskom režimu, sa izraženim prisustvom stohastičkih komponenti u svom toku, ima veću maksimalnu vrednost u spektru nego kada je reka u ravničarskom režimu, a položaj maksimalne vrednosti u planinskom režimu je pomeren u levo ka manjim amplitudama. Za reku koja teče u brdskom režimu (slika 4.6c) prisustvo stohastičkih komponenti je manje izraženo u odnosu na planinski režim, maksimalna vrednost u spektru Kolmogorovljeve kompleksnosti je neznatno veća nego u ravničarskom režimu i pomerena je takođe ka manjim amplitudama. Ovakve zaključke ne možemo da izvučemo kada poredimo režime različitih reka (slika 4.6d-g). Rezultati pokazuju da Kolmogorovljeva kompleksnost kao mera nasumičnosti dobro oslikava stvarnu stohastičnost koja postoji u realnim fizičkim sistemima i da spektar daje dodatnu informaciju o distribuciji vrednosti u vremenskoj seriji.

4.3. Maksimalna Kolmogorovljeva kompleksnost

Najveća vrednost u spektru Kolmogorovljeve kompleksnosti naziva se maksimalna Kolmogorovljeva kompleksnost i označava se sa KCM. Dobija se kada za prag uzmemos medijanu vremenske serije. Medijana predstavlja srednji član u seriji kada se vrednosti postave po rastućem poretku. Ukoliko su vrednosti srednje i maksimalne Kolmogorovljeve kompleksnosti bliske to znači da je medijana istovremeno i srednja vrednost vremenske serije. Kao što je pokazano u prethodnom primeru iz vrednosti maksimalne Kolmogorovljeve kompleksnosti i njenog položaja u spektru, možemo da dobijemo dodatnu informaciju o distribuciji vrednosti u vremenskoj seriji a time i o dinamici samog sistema.

4.4. Sveukupna Kolmogorovljeva kompleksnost

Kada dve vremenske serije koje imaju isti broj članova i sadrže podatke o merenjima iste fizičke veličine ali na različitom lokalitetu, imaju jednake vrednosti srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti, možemo da postavimo pitanje da li se kompleksnost ovih serija možda ipak

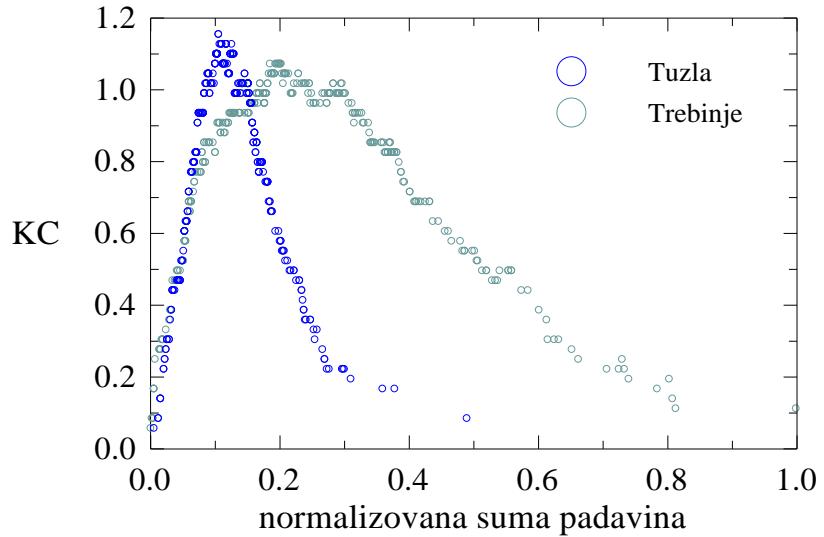
razlikuje i da li to možemo da kvantifikujemo na neki način? Prvi korak ka tome jeste računanje spektra Kolmogorovljeve kompleksnosti iz kojeg možemo da vidimo distribuciju vrednosti vremenske serije, s obzirom da oblik spektra zavisi od toga koliko različitih amplituda, odnosno merenih vrednosti, postoji u seriji. KC kao mera ne može da napravi razliku između serija koje imaju različitu varijaciju amplituda a isti stepen nasumičnosti. Druga stvar jeste pokušaj fizičke interpretacije informacionih mera baziranih na Kolmogorovljevoj kompleksnosti. Integraljenjem površine ispod krive spektra uvodimo novu meru koju nazivamo sveukupna Kolmogorovljeva kompleksnost (Mihailović et al., 2015a) i označavamo je sa OKC (*eng.* overall - obuhvatan)

$$KCO = \frac{1}{x_m} \int_{x_m} K_s dx \quad (4.17)$$

gde je sa K_s označen spektar Kolmogorovljeve kompleksnosti dok je x_m najveća vrednost fizičke veličine u datoj seriji $\{x_i\}$, što u slučaju normalizovane serije iznosi 1. Domen vrednosti je označen sa x a diferencijal sa dx . Numerički se računa kao

$$KCO = \frac{1}{x_m} \left[KC_1(x_2 - x_1) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} KC_i(x_{i+1} - x_{i-1}) + KC_N(x_N - x_{N-1}) \right]. \quad (4.18)$$

U narednom primeru ćemo ispitati dve vremenske serije koje predstavljaju mesečne sume padavina za dve stanice u Bosni i Hercegovini, Tuzla i Trebinje, u periodu 1960-1984. (slika 4.7). Naime, srednja Kolmogorovljeva kompleksnost vremenske serije dobijene merenjima u Tuzli iznosi 1.097 dok je za Trebinje 0.960 (Mihailović et al., 2015c). To znači da je stepen nasumičnosti veći u slučaju prve serije u odnosu na drugu. Računajući sveukupnu Komogorovljevu kompleksnost za ova dva spektra dobija se da OKC u slučaju Tuzle iznosi 0.440 a za Trebinje 0.526. Dakle, uzimajući u obzir i vrednosti amplituda u vremenskoj seriji i njihov redosled dobijamo da druga vremenska serija koja se odnosi na Trebinje u suštini ima veću integralnu meru nasumičnosti.

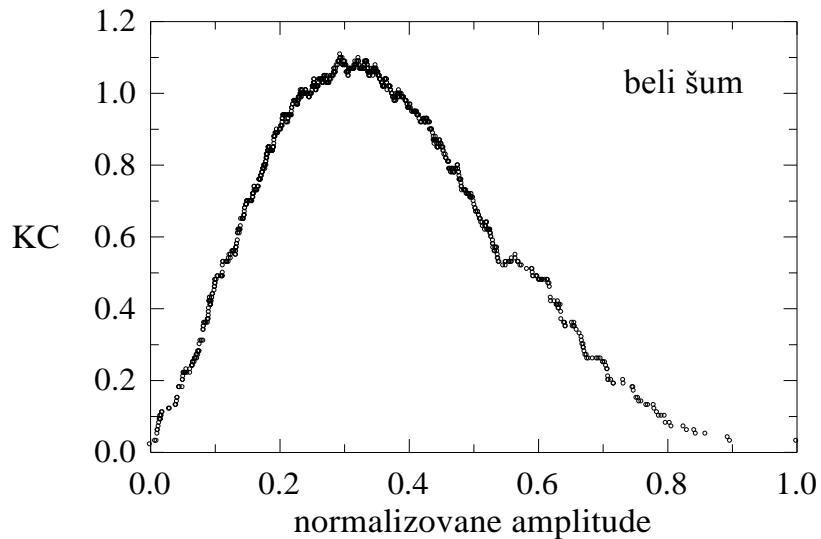


Slika 4.7 Spektri Kolmogorovljeve kompleksnosti za vremenske serije mesečne sume padavina za dve stanice, Tuzla (plava) i Trebinje (siva).

Ipak, i dalje nismo sigurni da li OKC može da se smatra novom merom statističke kompleksnosti vremenske serije. Da bismo to utvrdili ispitaćemo jednu seriju od 1000 članova koja predstavlja beli šum. Beli šum ima izraženu nasumičnost ali takva serija ne poseduje nikakvu strukturu, što će reći da joj je kompleksnost mala. Nakon što smo dobili spektar Kolmogorovljeve kompleksnosti (slika 4.8) računamo OKC, koja za datu seriju iznosi 0.493. Vidimo da je vrednost uporediva sa vrednošću koja je dobijena za seriju mesečnih padavina u Tuzli za navedeni period, što implicira da OKC ne odražava strukturu sistema već je informaciona mera pomoću koje dobijamo dublji uvid u nasumičnost ispitivane vremenske serije.

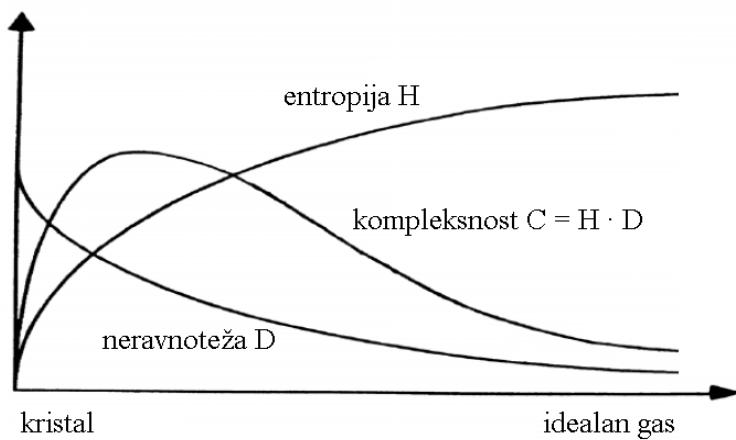
Trenutno se u naučnoj literaturi podrazumeva da viši stepen kompleksnosti ukazuje na veću zamršenost, neuređenost i nepravilnost u ponašanju dinamičkog sistema (Tang et al., 2015). Prava mera statističke kompleksnosti je zapravo proizvod količine informacija predstavljene entropijom (koja ukazuje na neuređenost) i odstupanja od ravnoteže sistema (Feldman and Crutchfield, 1998). Statistička kompleksnost treba da svojim vrednostima ukazuje na postojanje strukture u sistemu. Struktura se odnosi na veze između pojedinih delova sistema i oslikava složenost procesa koji se odvijaju unutar sistema. Kao primer gore navedenog možemo sa jedne strane da posmatramo kristal kao sistem visoke uređenosti u kojem postoji minimalna entropija i maksimalno odstupanje od ravnoteže (pri čemu ravnoteža podrazumeva izotropnost) s obzirom da se čestice mogu naći lokalizovane u prostoru i sa

druge strane idealan gas, koji predstavlja sistem visoke neuređenosti gde je entropija sistema maksimalna ali je zato odstupanje od ravnoteže minimalno (Rosso et al., 2008).



Slika 4.8 Spektar Kolmogorovljeve kompleksnosti za beli šum.

Slika 4.9 predstavlja modifikovanu sliku 4.1 na kojoj je prikazan odnos nasumičnosti i kompleksnosti dobijen sledeći intuiciju, na osnovu koje smo maksimalnu kompleksnost smestili na sredinu intervala između potpune uređenosti i potpune neuređenosti. Sada pomoću slike 4.9 dobijamo realniji prikaz te zavisnosti, uzimajući u obzir i odstupanje sistema od ravnoteže kao bitan činilac koji utiče na kompleksnost sistema i odražava postojanje strukture.



Slika 4.9 Statistička kompleksност као произvod entropije i neravnoteže (Rosso et al., 2008).

Nakon što smo u prethodnim potpoglavlјima testirali nove informacione mere, izvedene na osnovu izvorne Kolmogorovljeve kompleksnosti, i utvrdili jasniju granicu između nasumičnosti i kompleksnosti, u nastavku je fokus usmeren na realne fizičke sisteme. U narednom poglavlju disertacije ove mere su primenjene na razne vremenske serije koje sadrže podatke dobijene merenjem fizičkih faktora životne sredine u određenom periodu i na određenim lokalitetima, i ispitani je stepen nasumičnosti u njima, u potrazi za novim informacijama o sistemu. Prikazani rezultati su objavljeni u naučnim radovima koji su navedeni u literaturi korišćenoj pri izradi ove disertacije.

5. Upotreba informacionih mera u analizi vremenskih serija dobijenih merenjima fizičkih faktora životne sredine

U ovom poglavlju je predstavljena primena informacionih mera u nelinearnoj analizi vremenskih serija podataka koji su dobijeni merenjima raznih fizičkih veličina koje opisuju životnu sredinu. Osnovni zadatak je testiranje novih mera zasnovanih na Kolmogorovljevoj kompleksnosti na što većem broju vremenskih serija koje potiču iz različitih segmenata životne sredine, sa ciljem ispitivanja nivoa nasumičnosti u njima. Nove mere su poređene sa nekim od ranije poznatim merama i statističkim metodama, kako bi se utvrdila njihova opravdanost i pouzdanost, a zatim su te nove mere korišćene u svrhu dobijanja novih informacija o određenim karakteristikama pojedinih sistema. Poglavlje počinje analizom koncentracije radona u pećinama i uticajem unutrašnjih i spoljašnjih meteoroloških faktora na vrednosti koncentracije. Dalje se fokus prebacuje na fluide u životnoj sredini i ispitivanje režima protoka reka, uticaj ljudske aktivnosti i uticaj vegetacije na rečni tok. Nakon toga sledi ispitivanje prostorne raspodele padavina na određenom lokalitetu kao i uticaj geografskih faktora na datu raspodelu. S obzirom da su temperatura vazduha i padavine osnovni meteorološki elementi koji definišu klimu na nekom podneblju, u nastavku poglavlja vršena je analiza vremenske distribucije vrednosti temperature vazduha i količine padavina. Na kraju, da bi se kompletirala analiza i uključili svi aspekti životne sredine, rađeno je ispitivanje vremenskih serija UV-B zračenja. U svakom potpoglavlju je navedno poreklo i izvor podataka, a svi podaci se nalaze u prilogu disertacije, na DVD-u, zajedno sa FORTRAN-skim kodovima pomoću kojih su računate informacione mere.

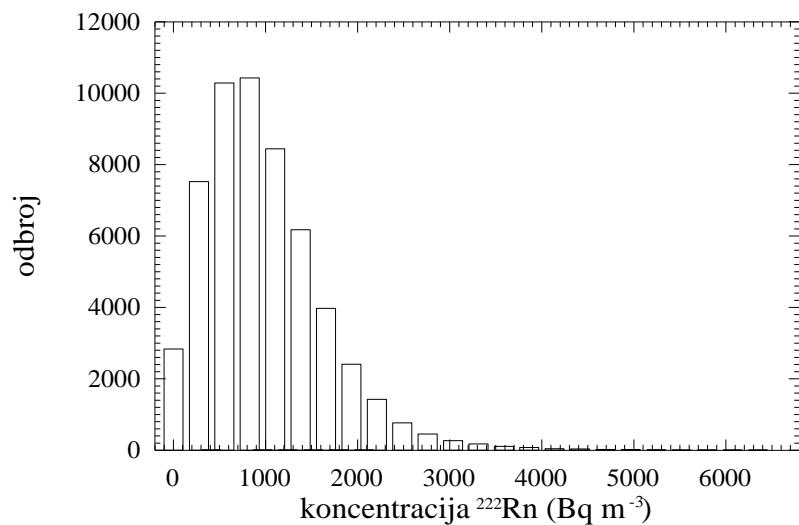
5.1. Analiza koncentracije radona u pećinama

Radon je plemenit, radioaktivni gas bez boje i mirisa. Iz zemljišta, stena, sedimenata i vode stiže u vazduh, gde ostavlja svoje produkte raspada. Značajan je izvor prirodne radioaktivnosti i nakon dužeg izlaganja može da uzrokuje negativne efekte na ljudsko zdravlje. Rn-222 ima veliki uticaj na životnu sredinu s obzirom na relativno dugačak period poluraspada ($T_{1/2}=3.82$ dana), što mu omogućava da pređe veliko rastojanje pre nego što se raspadne. Difuziju radona iz zemljišta i stepen izloženosti radijaciji u podzemnim objektima proučavali su razni istraživači širom sveta, najviše da bi procenili potencijalnu opasnost kojom su izloženi radnici ili posetioci u rudnicima, tunelima, pećinama, bušotinama i podzemnim građevinama. Uglavnom je razmatrana efektivna doza kojom su izloženi posetioci, u odnosu na dozvoljenu dozu. Sa druge strane, radon može da se koristi za praćenje strujanja vazduha u pećinama, kako bi se bolje razumela mikroklima (Fernandez-Cortes et al., 2009). Koncentracija radona u podzemnim objektima se obično karakteriše velikom promenljivošću tokom vremena (Barbosa, 2010). Međutim, nije posvećeno mnogo pažnje proučavanju koncentracije radona u zavisnosti od meteoroloških faktora unutar i izvan podzemnih objekata. Dosadašnje analize su pokazale da razlika u temperaturi napolju i unutar pećine ima uticaj na koncentraciju radona ali sa odloženim dejstvom od četiri dana zbog rastojanja koje vazduh treba da pređe (Gregorić et al., 2011), ispitivana je zavisnost koncentracije ^{222}Rn od temperature i pritiska unutar pećine korelacijom i regresivnom analizom, ali bez nekih značajnih rezultata (Koltai et al., 2010).

U ovom istraživanju su analizirane promene koncentracije radona u pećini Domica (Slovačka) u periodu jun 2010. – jun 2011. godine upotrebom klasičnih statističkih metoda i informacionih mera zasnovanih na Kolmogorovljevoj kompleksnosti (Mihailović et al., 2015d). Ispitivano je postojanje periodične komponente u vremenskoj seriji koncentracije radona i meteoroloških parametara, stepen nasumičnosti vremenskih serija i mogući uticaj meteoroloških parametara na stohastičnost koncentracije radona.

Pećina Domica se nalazi na jugo-zapadnoj ivici Silika platoa, u nacionalnom parku Slovački karst, neposredno uz granicu sa Mađarskom ($48^{\circ}28'40''$ s.g.š., $20^{\circ}28'13''$ i.g.d.). Formirana je u periodu srednjeg Trijasa od veterštajnskog krečnjaka, duž tektonskog raseda, usled korozivnih i erozivnih aktivnosti lokalnih reka i ponornica. Krečnjak je razdvojen u blokove pukotinama i milonitnim slojevima. Pećina se većim delom pruža u horizontalnom pravcu, povezana je sa pećinom Čertova rupa i zajedno su dugačke 5 358 m. Sa Baradla pećinom u Mađarskoj čine jednu celinu, dugačku skoro 25 km. Ulaz se nalazi u podnožju

brda Domica, na nadmorskoj visini od 339 m. U pećini se nalaze instrumenti za praćenje mikroklimatskih, hidroloških i hemijskih uslova. Koncentracija radona je merena na lokaciji daleko od pravca kretanja turista, pomoću Barasol sonde. Korišćen je pasivni silicijumski poluprovodnik koji detektuje alfa čestice emitovane od strane radona. Čestice difuzijom prolaze kroz vlaknasti filter koji uklanja ^{220}Rn . Osetljivost merenja je 0.02 odbroja na čas za 1 Bq m^{-3} . Granica detekcije za radon je 50 Bq m^{-3} . Kumulativan odbroj je beležen u intervalima do 10 minuta (Smetanová et al., 2011).



Slika 5.1 Distribucija frekvencija merenih vrednosti koncentracije ^{222}Rn .

Ukupan broj podataka korišćenih u analizi iznosi $N = 51\ 840$, najveća izmerena vrednost je $6\ 348 \text{ Bq m}^{-3}$, a distribucija frekvencija merenih vrednosti koncentracije radona je prikazana na slici 5.1. Oblik distribucije je u skladu sa raznim drugim merenjima radona. Vrednosti koncentracije radona u pećini su rezultat dinamičke ravnoteže mnogih parametara. Pojačan uticaj jednog ili odsustvo drugog parametra može da ima za posledicu veće ili manje vrednosti koncentracije radona na mernom mestu. Meteorološki parametri, poput atmosferskog pritiska, temperature, vlažnosti vazduha, brzine vetra izvan i unutar pećine, utiču na uslove u pećini, a neki od njih imaju izražen dnevni i godišnji hod. Zbog toga periodičnost parametara može da uslovjava periodičnost koncentracije radona. Da bismo to utvrdili računali smo periodogram vremenske serije (Box et al., 2008). Za dati niz podataka $\{Y_t\}, t=1,2,\dots,N$ merenih u jednakim vremenskim intervalima, možemo da prepostavimo da je trenutna vrednost Y_t jednaka zbiru neke fiksne, neosmotrene vrednosti \bar{Y}_t i nasumične greške ε_t , čiji niz $\{\varepsilon_t\}$ je nezavisno distribuiran sa očekivanjem 0 i varijacijom σ^2 . Da bi se ispitalo

postojanje periodične komponente serija se razvije u konačan Furijeov red, koji u slučaju parnog broja članova ($N=2n$) ima oblik:

$$\bar{Y}_t = A_0 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} (A_m \cos 2\pi m f_1 t + B_m \sin 2\pi m f_1 t) + A_n \cos 2\pi n f_1 t. \quad (5.1)$$

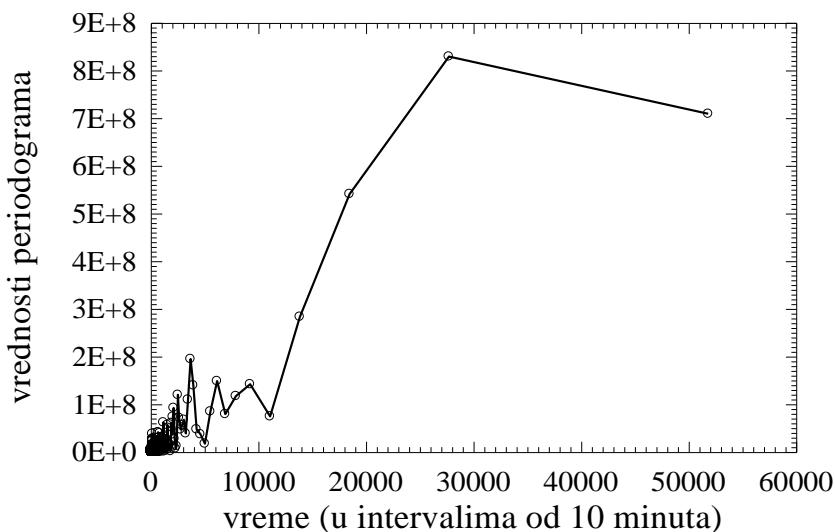
Sada će $R_m = \sqrt{A_m^2 + B_m^2}$ biti amplituda a $\phi_m = \arctg(B_m / A_m)$ faza i -te komponente.

Periodogram se definiše kao suma kvadrata amplituda osnovnih frekvencija $f_m=m/N$ ($m = 1,2,\dots,n$). Funkcija \bar{Y}_t je linearna kombinacija sinusne i kosinusne funkcije, sa frekvencijama

proporcionalnim osnovnoj frekvenciji $f_1=1/N$. Pošto je $\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N Y_t^2 = R_0^2 + 2 \sum_{m=1}^{n-1} R_m^2 + R_n^2$, udeo i -

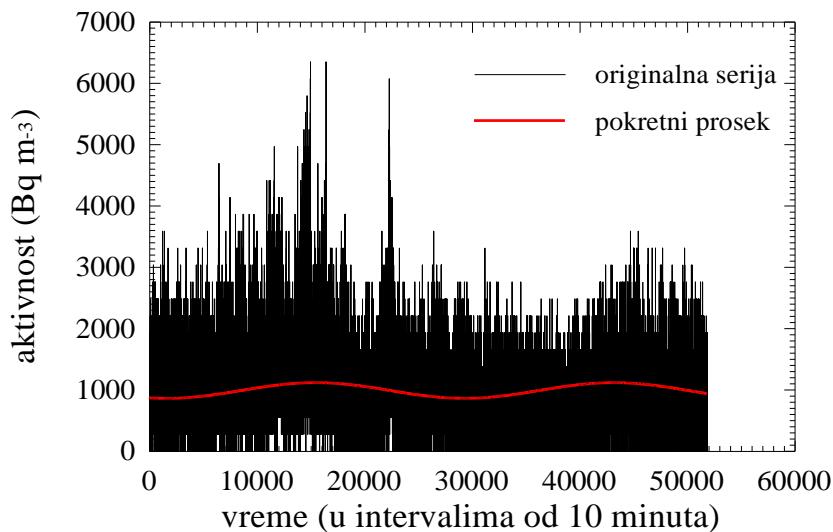
tog harmonika u srednjoj vrednosti sume kvadrata vrednosti vremenske serije iznosi R_i^2 .

Razlaganjem ove srednje vrednosti moguće je izdvojiti pojedinačne harmonike.



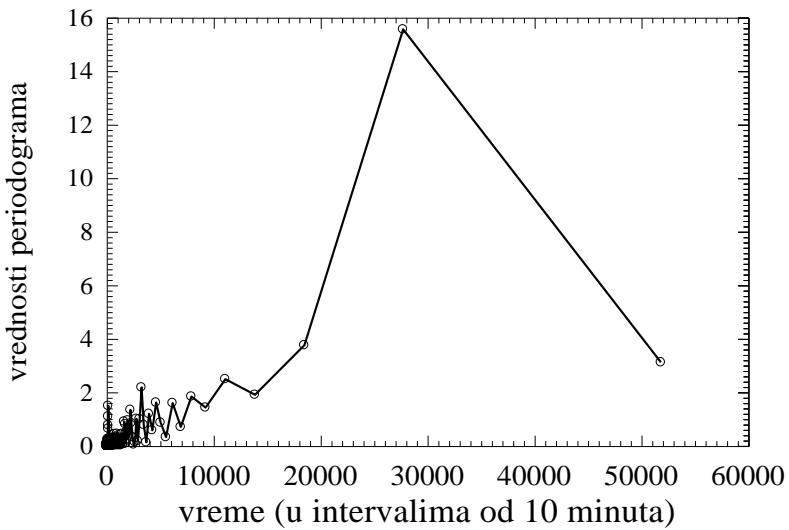
Slika 5.2 Periodogram vremenske serije koncentracije ^{222}Rn .

Iscrtavajući periodogram vremenske serije (slika 5.2) uočavamo da postoji periodična komponenta od 27.5 sedmica, što približno iznosi pola godine. Kada se prikaže cela serija podataka i pokretni prosek, takođe se uočava periodičnost od 27.5 sedmica (slika 5.3). S obzirom da je početak merenja jun 2010. godine uočavaju se dva minimuma u koncentraciji u junu i decembru i dva maksimuma u aprilu i oktobru.



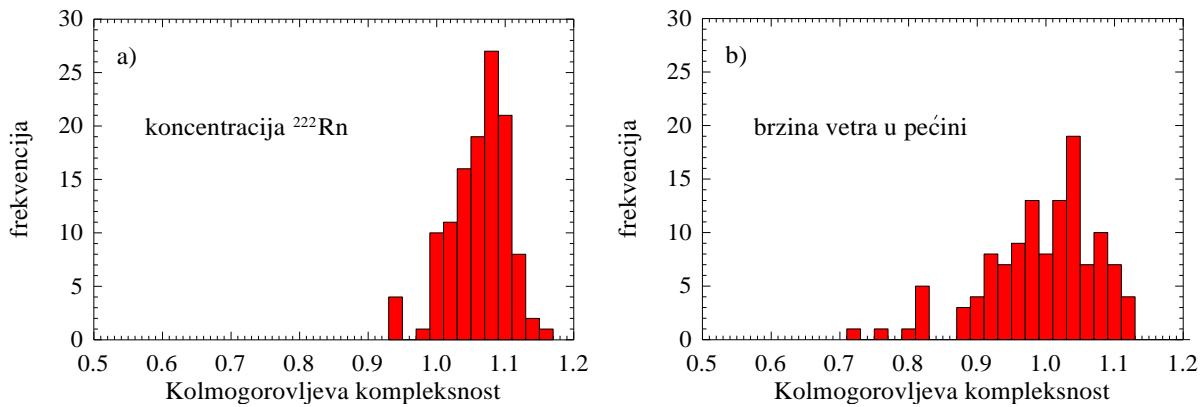
Slika 5.3 Vremenska serija koncentracije ^{222}Rn i pokretni prosek sa periodičnom komponentom.

Ispitujući uticaj meteoroloških elemenata na koncentraciju radona uočeno je da spoljašnji uslovi, poput atmosferskog pritiska, temperature izvan pećine i padavine, nemaju značajan doprinos (Smetanová et al., 2011). Što se tiče meteoroloških uslova, oni su mereni u istim vremenskim intervalima kao i koncentracija radona. Vrednost temperature unutar pećine tokom cele godine iznosi oko $10\text{ }^{\circ}\text{C}$ sa varijacijom od $1\text{ }^{\circ}\text{C}$ i ne utiče na aktivnost radona, niti na periodičnost. Merenje koncentracije CO_2 je pokazalo da vrednosti tokom godine značajno variraju ali ne postoji korelacija sa koncentracijom ^{222}Rn . Međutim, analiza brzine vetra unutar i izvan pećine pokazuje zanimljive rezultate. Računajući uzajamu korelaciju između aktivnosti ^{222}Rn i brzine vetra unutar pećine pokazano je da postoji izražena negativna korelacija i njene vrednosti su veće nego u slučaju kada je računata korelacija između aktivnosti ^{222}Rn i brzine vetra izvan pećine. Da bismo dodatno ispitali uticaj brzine vetra u pećini na vrednosti koncentracije radona, izračunali smo periodogram vremenske serije sa podacima o vrednosti brzine vetra u pećini, koje leže u intervalu od 0.0 do 0.7 m/s (slika 5.4). Rezultati pokazuju da postoji izražena periodična komponenta od 27.5 sedmica (ili približno pola godine). Ova periodična komponenta se praktično podudara sa periodičnom komponentom u vremenskoj seriji koncentracije radona i ukazuje na to da obe serije imaju istu dinamiku na godišnjem nivou. To znači da najveći uticaj na koncentraciju radona ima brzina vetra u pećini. Nakon što smo ispitali uticaj meteoroloških uslova pomoću klasičnih statističkih metoda, sada ćemo da primenimo informacione mere bazirane na Kolmogorovljevoj kompleksnosti.



Slika 5.4 Periodogram vremenske serije brzine vetra unutar pećine.

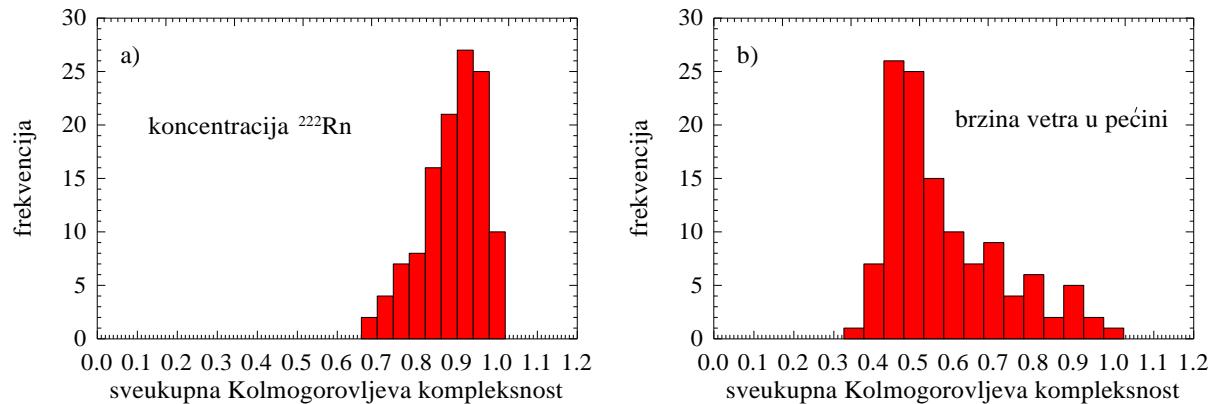
Originalne vremenske serije koncentracije radona i brzine vetra u pećini su podeljene na 120 manjih serija, tako da svaka od njih sadrži 432 podatka koji se odnose na merenja tokom tri dana. Zatim su pomoću Lempel-Zivovog algoritma računate vrednosti srednje i sveukupne Kolmogorovljeve kompleksnosti za ove trodnevne serije. Distribucija frekvencija ovih informacionih mera je računata u intervalima od 0.02 i prikazana na slikama 5.5 i 5.6.



Slika 5.5 Distribucija frekvencija srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti: a) koncentracije ^{222}Rn i b) brzine vetra u pećini.

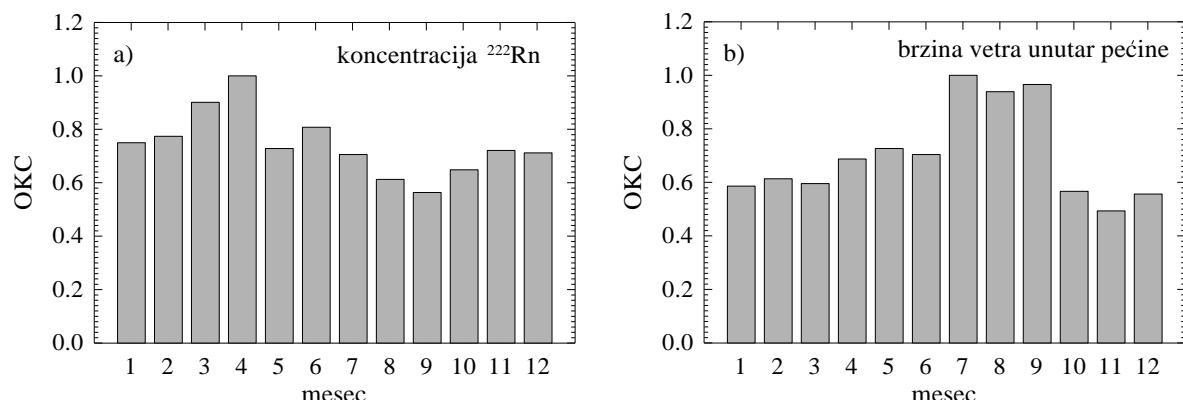
Iz distribucije frekvencija Kolmogorovljeve kompleksnosti koncentracije radona i brzine vetra u pećini uočava se da su najčešće upravo velike vrednosti KC, veće od 0.7 (slika 5.5a i 5.5b). To znači da vrednosti u trodnevnim serijama imaju izraženu nasumičnost. Kada se izračuna prosek Kolmogorovljeve kompleksnosti za svih 120 serija, on iznosi 1.06 ± 0.04 za koncentraciju radona a 0.99 ± 0.08 za brzinu vetra u pećini. Vrednosti KC u slučaju

koncentracije radona su grupisane u užoj oblasti i u svega 3% ukupnog broja trodnevnih serija vrednosti su manje od 0.95 dok je u slučaju brzine vetra u pećini distribucija šira i u 30 trodnevnih serija vrednosti su manje od 0.95, što je u odnosu na ukupan broj 25% situacija.



Slika 5.6 Distribucija frekvencija sveukupne Kolmogorovljeve kompleksnosti: a) koncentracije ^{222}Rn i b) brzine vetra u pećini.

Posmatrajući distribuciju frekvencija sveukupne Kolmogorovljeve kompleksnosti (slika 5.6a i 5.6b) ponovo se primećuje da u slučaju koncentracije radona vrednosti leže u užoj oblasti, grupisane oko velikih vrednosti, pri čemu je najveća vrednost OKC svega 0.6 puta veća od najmanje vrednosti. U slučaju brzine vetra u pećini najveća vrednost OKC je tri puta veća od najmanje vrednosti, distribucija je znatno šira a najčešće se javljaju upravo manje vrednosti. Da bismo ispitali godišnji hod sveukupne Kolmogorovljeve kompleksnosti, originalne serije su podeljene na mesečnom nivou, u 12 novih serija od kojih svaka sadrži 4 320 podataka. Rezultati pokazuju da OKC nema konstantne vrednosti na mesečnom nivou, što se uočava iz godišnje distribucije (slika 5.7).



Slika 5.7 Godišnja distribucija sveukupne Kolmogorovljeve kompleksnosti (OKC): a) koncentracije ^{222}Rn i b) brzine vetra unutar pećine.

Treba imati na umu da redni brojevi na apcisi oba grafikona ne označavaju mesece u godini, jer merenja počinju sredinom juna 2010. godine, već označava podnizove od 4 320 članova, redom. Najveće vrednosti OKC u slučaju koncentracije ^{222}Rn su primećene u periodu od sredine septembra do sredine oktobra dok su najmanje vrednosti u periodu februar-mart. U slučaju brzine vetra u pećini vrednosti OKC imaju maksimum tokom perioda decembar-mart i ponašaju se suprotno u odnosu na ponašanje radona. Čak postoji i slabo izražena negativna korelacija ($r = -0.4018$).

5.2. Analiza protoka fluida životne sredine

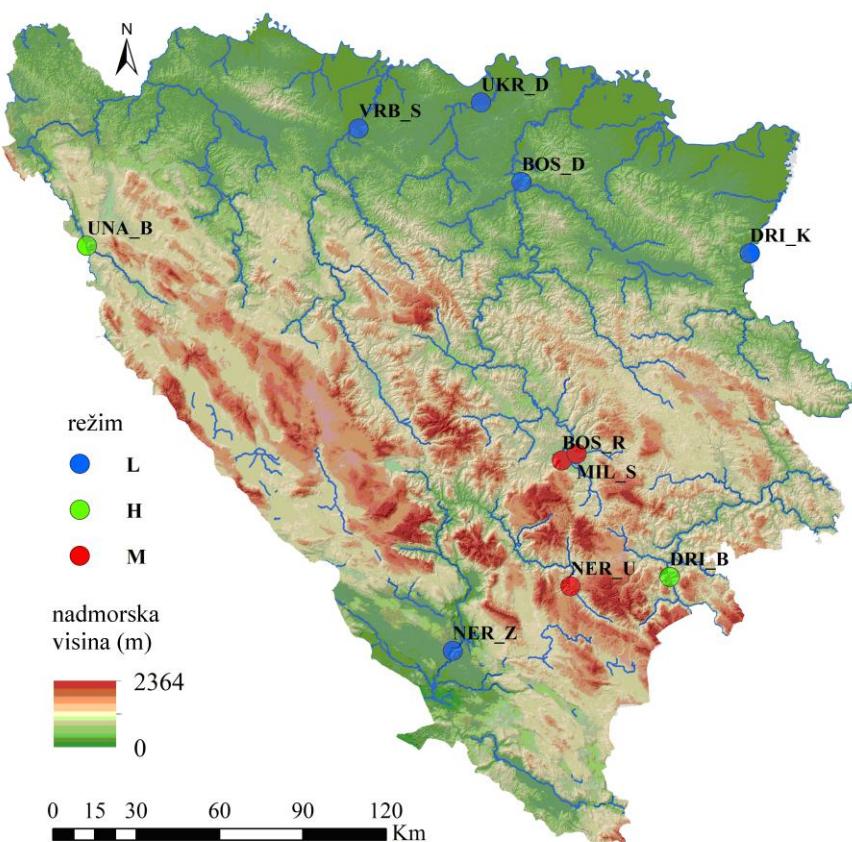
Naučnici iz raznih oblasti (fizičari, meteorolozi, geolozi, hidrolozi, itd.) proučavaju rečne tokove, koji su pod velikim uticajem ljudske aktivnosti, klimatskih promena i mnogih drugih prirodnih faktora. U zavisnosti od toga, protok reka može da varira prostorno i vremenski, ispoljavajući ponašanje u opsegu od jednostavnog do složenog, sa elementima haotične dinamike (Zunino et al., 2012; Lange et al., 2013; Weijs et al., 2013). Pored tradicionalnih statističkih metoda koje se koriste pri analizi vremenskih serija hidroloških podataka, i koje ponekad mogu da prikriju ili odbace određene informacije, potrebno je pristupiti i sa aspekta nelinearne dinamičke analize, kako bi se dobio što dublji uvid u složenost dinamike hidroloških procesa.

U ovom istraživanju su korišćeni podaci o protoku sedam reka u Bosni i Hercegovini, merenom na deset lokacija, u periodu 1965-1986. Podaci su dobijeni sa Departmana za geografiju, Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Sarajevu. Iz tehničkih razloga podaci nisu aktuelni, ali glavni cilj ovog istraživanja je bila primena novih informacionih mera baziranih na Kolmogorovljevoj kompleksnosti na hidrološke vremenske serije, kao uvođenje novih metoda u njihovoј analizi. Bosna i Hercegovina se nalazi na zapadnom Balkanu, okružena Hrvatskom na severu i jugo-zapadu, Srbijom na istoku i Crnom Gorom na jugo-istoku. Prostire se između 42° i 46° severne geografske širine i 15° i 20° istočne geografske dužine. Reljef je pretežno planinski, sa centralnim Dinaridima koji se prostiru većim delom zemlje u pravcu severozapad-jugoistok. Severni deo zemlje pripada Panonskoj niziji dok je krajnji jug u neposrednoj blizini Jadranskog mora, sa malim delom teritorije koja ima izlaz na more. Najviši planinski vrh je Maglić sa 2 386 m nadmorske visine, na granici sa Crnom Gorom, dok su ostale visoke planine Kozara, Grmeč, Vlašić, Čvrsnica, Prenj, Romanija, Jahorina, Bjelašnica i Treskavica (slika 5.8).

Glavni zadatok jestе kvantifikacija stepena nasumičnosti u vremenskim serijama rečnih protoka, za nekoliko reka u Bosni i Hercegovini, u različitom delu njihovog toka.

Klasifikacija je napravljena na osnovu reljefa lokaliteta na kojem se nalazi hidrološka stanica. Na taj način se dobijaju tri režima: ravničarski - kada je nadmorska visina do 200 m (označen kao L tip), brdski - kada je nadmorska visina između 200 i 500 m (označen kao H tip) i planinski - kada je nadmorska visina veća od 500 m (označen kao M tip) (Meybeck et al., 2001). Dakle, analiziran je gornji i donji tok Neretve, Drine i Bosne, gornji tok Une i Miljacke i donji tok Vrbasa i Ukraine. Slivovi su smešteni u različitim delovima zemlje. Podaci o mesečnom protoku reka se odnose na period 1965-1986. i svaka vremenska serija sadrži 252 podatka (tabela 5.1).

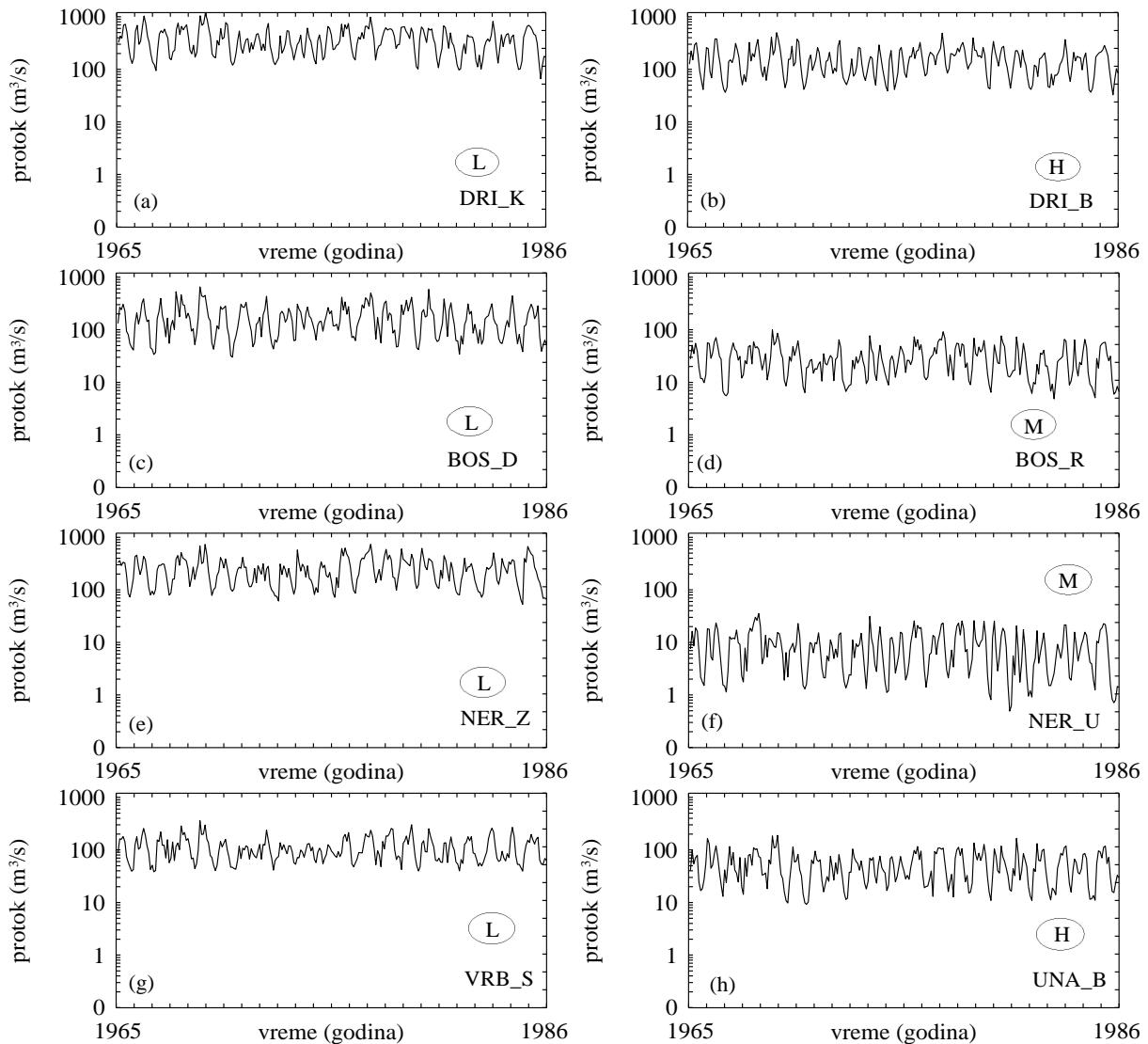
Podaci su preuzeti iz godišnjih izveštaja Hidrometeorološkog instituta Bosne i Hercegovine. Izgled vremenskih serija je prikazan na slici 5.9. Za svaku vremensku seriju računata je srednja Kolmogorovljeva kompleksnost (KC), maksimalna Kolmogorovljeva kompleksnost (KCM) i sveukupna Kolmogorovljeva kompleksnost (OKC). Izgled spektara je prikazan i diskutovan u potpoglavlju 4.2.

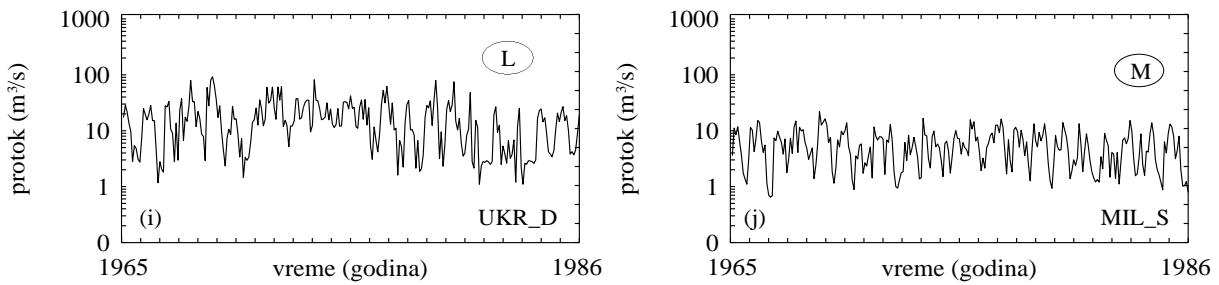


Slika 5.8 Reljef Bosne i Hercegovine sa lokacijom 10 hidroloških stanica na sedam reka koje su korišćene u analizi (skraćenice koje označavaju stanice su objašnjene u tabeli 5.1).

sliv	oznaka	i.g.d. (° E)	s.g.š. (° N)	h (m)	FR (m³/s)	FR _{max} (m³/s)	FR _{min} (m³/s)	režim
Neretva kod Žitomislića	NER_Z	17°47'	43°12'	16	252.0	734.0	53.0	L
Neretva kod Uloga	NER_U	18°14'	43°25'	641	8.0	35.3	0.5	M
Bosna kod Doboja	BOS_D	18°16'	43°49'	137	172.0	650.0	30.0	L
Bosna kod Reljeva	BOS_R	18°06'	44°44'	500	29.0	99.5	4.8	M
Drina kod Kozluka	DRI_K	19°07'	44°30'	121	380.0	1160.0	66.0	L
Drina kod Bastasa	DRI_B	18°46'	43°27'	425	155.0	497.0	32.7	H
Miljacka kod Sarajeva	MIL_S	18°21'	43°12'	530	5.0	21.9	0.6	M
Una kod Martin Broda	UNA_B	16°07'	43°30'	310	54.0	188.0	9.2	H
Ukrina kod Dervente	UKR_D	17°55'	44°50'	105	17.0	92.3	1.1	L
Vrbas kod Delibašinog Sela	VRB_S	18°16'	43°49'	141	111.0	358.0	38.2	L

Tabela 5.1 Reke u Bosni i Hercegovini korišćene u analizi, sa odgovarajućim skraćenicama, geografskom dužinom i širinom, nadmorskom visinom h , srednjim FR, maksimalnim FR_{max} i minimalnim FR_{min} protokom, i režimom.





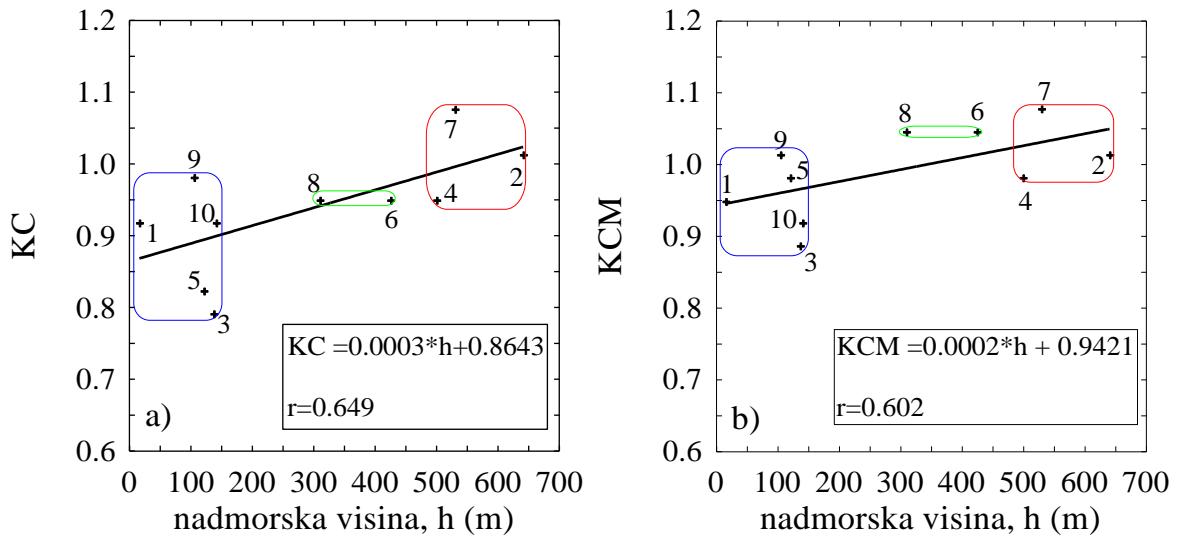
Slika 5.9 Vremenske serije protoka sedam reka u Bosni i Hercegovini u periodu 1965-1986.

Rezultati informacionih mera koje ukazuju na stepen nasumičnosti vremenskih serija su prikazani u tabeli 5.2. Uočava se da vrednosti KC za svih sedam reka možemo da podelimo u dva intervala: (0.948, 1.076) i (0.791, 0.918) (Mihailović et al., 2015b). Prvi interval odgovara gornjem delu toka (H i M režim) dok drugi interval odgovara donjem delu toka (L režim). Visoke vrednosti KC oslikavaju stohastičnost hidroloških procesa, pri čemu je ova stohastičnost više izražena u gornjem nego u donjem delu toka, što je i bilo očekivano. Jedini izuzetak je reka Ukrina, koja u ravničarskom režimu pokazuje visok stepen nasumičnosti.

sliv	redni br.	režim	oznaka	KC	KCM	KCO
Neretva kod Žitomislića	1	L	NER_Z	0.918	0.948	0.506
Neretva kod Uloga	2	M	NER_U	1.013	1.013	0.529
Bosna kod Doboja	3	L	BOS_D	0.791	0.886	0.470
Bosna kod Reljeva	4	M	BOS_R	0.948	0.981	0.538
Drina kod Kozluka	5	L	DRI_K	0.823	0.981	0.502
Drina kod Bastasa	6	H	DRI_B	0.948	1.045	0.529
Miljacka kod Sarajeva	7	M	MIL_S	1.076	1.077	0.558
Una kod Martin Broda	8	H	UNA_B	0.948	1.045	0.540
Ukrina kod Dervente	9	L	UKR_D	0.981	1.013	0.479
Vrbas kod Delibašinog Sela	10	L	VRB_S	0.918	0.918	0.486

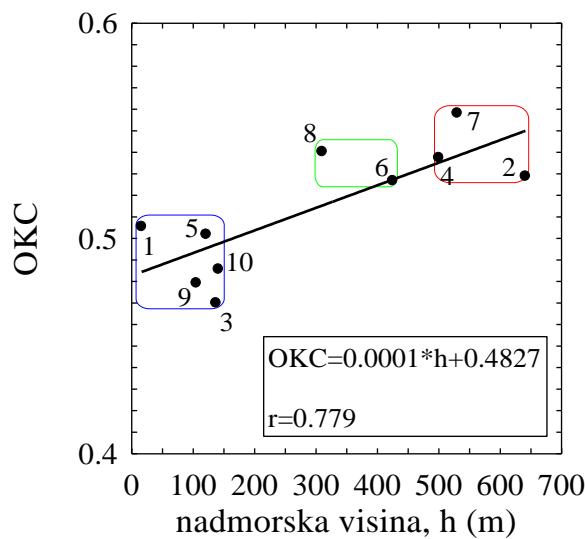
Tabela 5.2 Informacione mere bazirane na Kolmogorovljevoj kompleksnosti za deset vremenskih serija protoka sedam reka u Bosni i Hercegovini u periodu 1965-1986.

Kada se vrednosti KC i KCM za svih deset serija prikažu u zavisnosti od nadmorske visine hidrološke stanice, dobija se pozitivan trend sa približno istim vrednostima koeficijenta korelacije r koji za KC iznosi 0.649 a za KCM 0.602 (slika 5.10). S obzirom da KC kao mera ne može da napravi razliku između vremenskih serija koje imaju približan stepen nasumičnosti a različitu varijaciju amplituda, osvrnućemo se na vrednosti OKC kao mere koja uzima u obzir i vrednosti članova i njihov redosled u vremenskoj seriji.



Slika 5.10 Zavisnost: a) KC i b) KCM protoka reka od nadmorske visine hidrološke stanice za sedam reka u Bosni i Hercegovini, u periodu 1965-1986. Obojene konture predstavljaju režim: L (plava), H (zelena) i M (crvena).

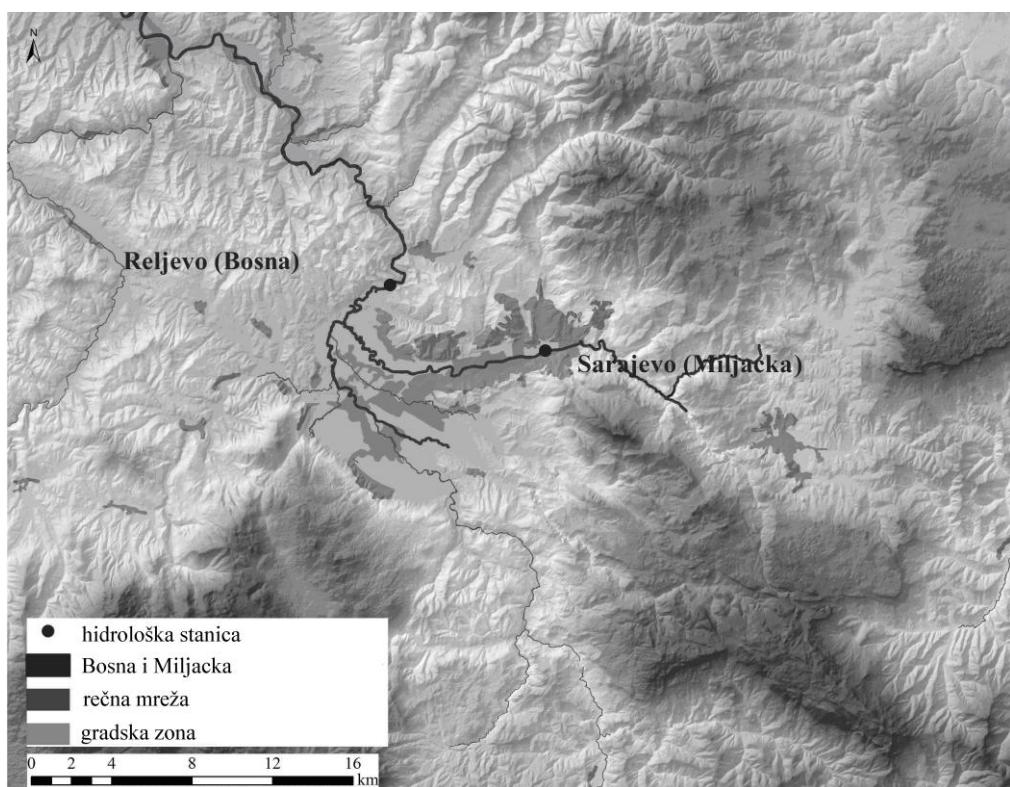
U slučaju OKC takođe postoje dva jasno razdvojena intervala u koja se grupišu vrednosti: prvi (0.470, 0.506) koji se odnosi na L režim i drugi (0.529, 0.558) koji se odnosi na H i M režim. Pokazano je da OKC za Ukrinu i Vrbas ima vrednosti koje odgovaraju manjoj stohastičnosti vremenske serije i upadaju u prvi interval, što odgovara realnom stanju (slika 5.11).



Slika 5.11 Zavisnost OKC protoka reka od nadmorske visine hidrološke stanice za sedam reka u Bosni i Hercegovini, u periodu 1965-1986. Obojene konture predstavljaju režim: L (plava), H (zelena) i M (crvena).

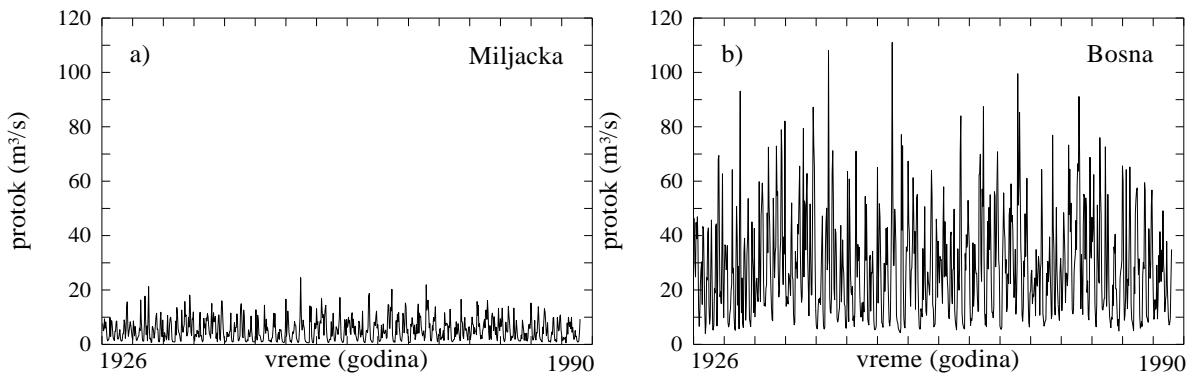
U nastavku je urađena detaljnija analizu za dve reke, Bosnu i Miljacku, u planinskom režimu toka. Obe ove reke protiču kroz Sarajevsko polje koje je smešteno u planinskoj

depresiji, okruženoj visokim planinama Bjelašnicom i Igmanom na jugo-zapadu i manjim planinama na severo-istoku (slika 5.12). Polje se pruža u pravcu severozapad-jugoistok i smešteno je u podnožju planine Trebević. Srednja nadmorska visina iznosi 515 m. U Sarajevskom polju se nalazi sliv reke Bosne sa sedam najvažnijih pritoka, uključujući i Miljacku. Podaci o srednjem mesečnom protoku za ove dve reke datiraju još od 1926. godine, a redovna merenja su vršena do 1990. godine (slika 5.13). Hidrološka stanica Reljevo je udaljena 11.6 km od izvora reke Bosne. Srednji godišnji protok u datom periodu je $28.7 \text{ m}^3/\text{s}$, pri čemu je najveća vrednost od $44.9 \text{ m}^3/\text{s}$ bila 1937. godine dok je najmanja vrednost od $17.9 \text{ m}^3/\text{s}$ bila 1990 godine.



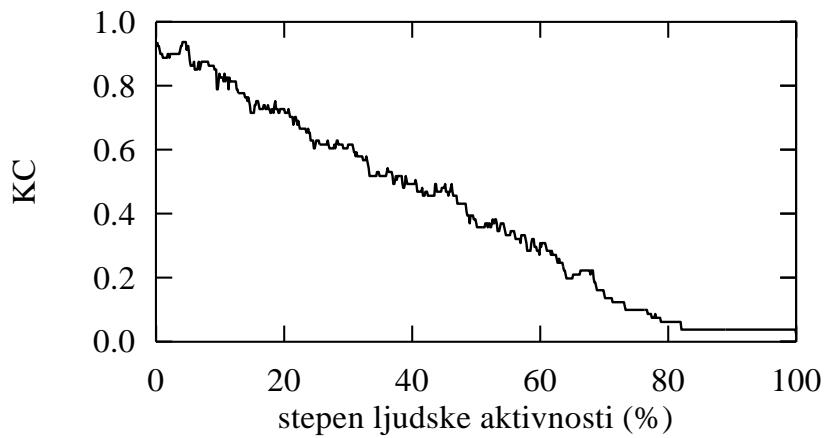
Slika 5.12 Lokalitet Sarajevskog polja sa hidrološkim stanicama Reljevo (Bosna) i Sarajevo (Miljacka).

Miljacka u svom gornjem delu toku prolazi kroz veoma strm, planinski teren i ima krivudav profil. U donjem delu toku protiče preko aluvijalne zaravni, sa malom promenom u nagibu terena (3-5%), kroz grad Sarajevo. Hidrološka stanica je smeštena na mostu u samom centru grada. Srednji godišnji protok Miljacke za dati period iznosi $5.5 \text{ m}^3/\text{s}$, sa maksimalnom vrednošću od $9.1 \text{ m}^3/\text{s}$ (1937) i minimalnom od $3.0 \text{ m}^3/\text{s}$ (1990).



Slika 5.13 Vremenska serija protoka: a) Miljacke i b) Bosne za period 1926-1990.

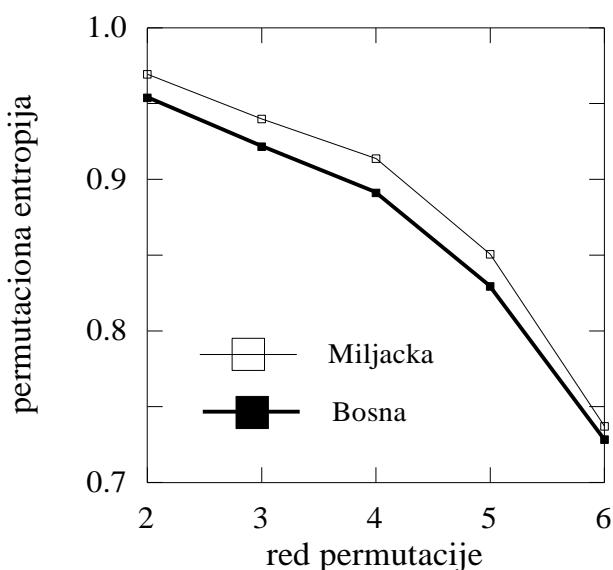
Planinska reka predstavlja tipičan primer turbulentnog toka fluida u životnoj sredini na čiji stepen stohastičnosti mogu značajno da utiču ljudska aktivnost i klimatske promene. U ovom istraživanju smo veštački simulirali uticaj ljudske aktivnosti (što na primer može da bude urbanizacija, uređivanje rečnog korita ili izgradnja rezervoara za korišćenje vode). Intenzitet aktivnosti (u procentima) je u vremenskoj seriji protoka reke Bosne predstavljen uklanjanjem amplituda i njihovom zamenom sa nulom, u odgovarajućem procentu (Mihailović et al., 2014a), pri čemu je serija svaki put imala $N=780$ članova. Povećanjem stepena ljudske aktivnosti i uređenjem rečnog korita smanjuje se turbulentnost toka a samim tim i stepen nasumičnosti u vremenskoj seriji (slika 5.14).



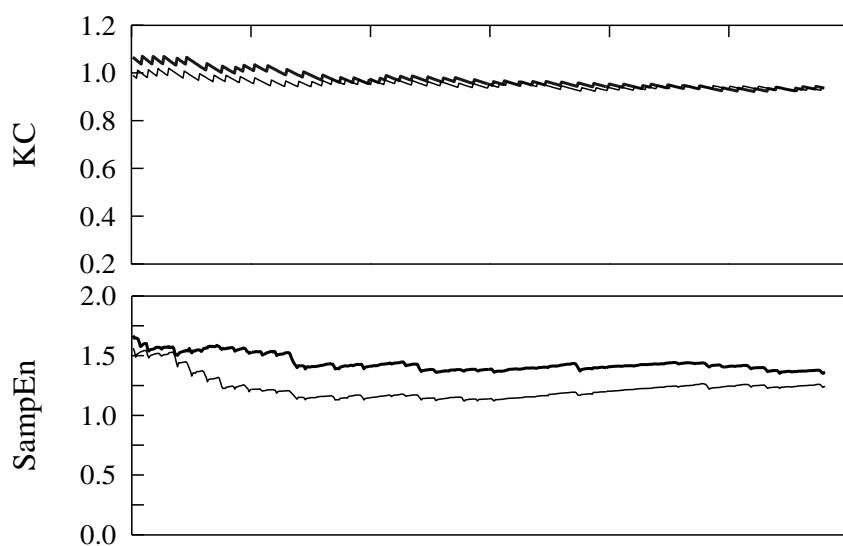
Slika 5.14 Promena nivoa nasumičnosti u vremenskoj seriji protoka reke u planinskom režimu u zavisnosti od stepena ljudske aktivnosti.

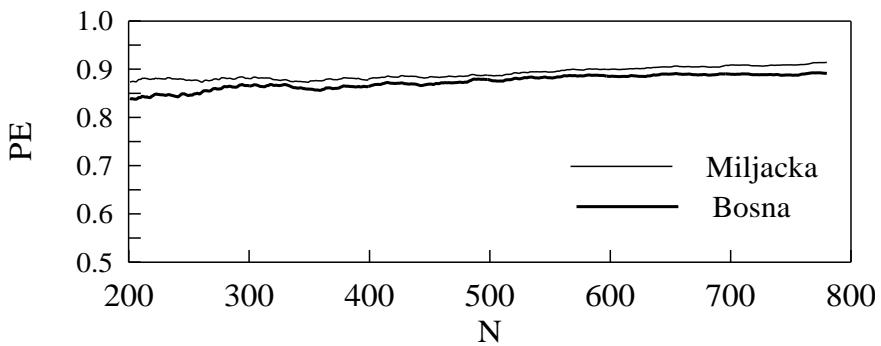
Za vremenske serije protoka obe reke urađeni su određeni testovi osetljivosti. Računata je srednja Kolmogorovljeva kompleksnost (KC), entropija uzorka (SampEn) i permutaciona entropiju (PE) za različitu dužinu vremenske serije, menjajući broj članova N od 200 do 780

sa korakom od jedan, kako bismo ispitali zavisnost informacionih mera od dužine serije. U slučaju entropije uzorka, korišćene su uobičajne vrednosti dimenzije faznog prostora $m=2$ i tolerancije r koja iznosi 0.2 standardne devijacije podataka, dok su vrednosti permutacione entropije dodatno ispitane u zavisnosti od parametra m koji predstavlja red permutacije. Pokazano je kako vrednosti PE opadaju sa povećanjem reda permutacije (slika 5.15) i u narednom testu je izabrana vrednost $m=4$. Testovi pokazuju da u zavisnosti od dužine vremenske serije N srednja Kolmogorovljeva kompleksnost (KC) i entropija uzorka (SampEn) neznatno opadaju sa porastom broja članova u seriji, dok permutaciona entropija (PE) blago raste (slika 5.16).



Slika 5.15. Vrednosti permutacione entropije u zavisnosti od reda permutacije za vremenske serije protoka reka Miljacke i Bosne u periodu 1926-1990.





Slika 5.16 Zavisnost KC, SampEn i PE od dužine vremenske serije protoka reka Miljacke i Bosne.

Na kraju smo izračunali vrednosti navedenih informacionih mera (KC, SampEn i PE) tokom celokupnog perioda merenja od 1926. do 1990. godine ($N=780$) a potom smo ovaj period podelili na tri podintervala: 1) 1926-1945. ($N=240$), 2) 1946-1965. ($N=240$) i 3) 1966-1990. ($N=300$) i za svaki od njih računali vrednosti navedenih mera. Rezultati su prikazani u tabeli 5.3.

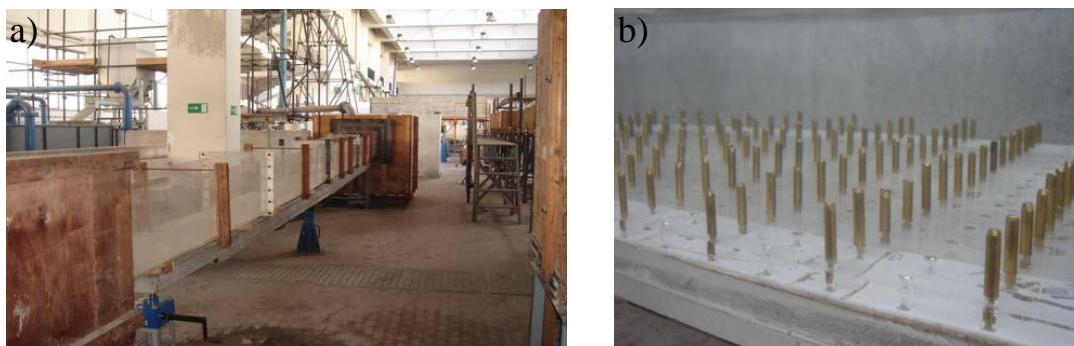
reka	mera	1926-1990	1926-1945	1946-1965	1966-1990
Miljacka	KC	0.936	0.988	0.955	0.988
	SampEn	1.240	1.438	0.903	1.478
	PE	0.914	0.879	0.832	0.903
Bosna	KC	0.936	1.054	0.977	0.988
	SampEn	1.357	1.526	1.214	1.367
	PE	0.891	0.843	0.847	0.869

Tabela 5.3 Vrednosti Kolmogorovljeve kompleksnosti (KC), entropije uzorka (SampEn) i permutacione entropije (PE) za vremenske serije protoka reka Miljacke i Bosne u periodu 1926-1990 u i tri podintervala: 1) 1926-1945., 2) 1946-1965. i 3) 1966-1990.

Pokazano je da u drugom podintervalu, od 1946-1965. godine, postoji pad u vrednostima srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti za obe reke, u odnosu na celokupan period i u odnosu na prvi i treći podinterval. Isto važi i za entropiju uzorka u slučaju obe reke. Permutaciona entropija za Miljacku pokazuje dobro slaganje sa ostalim rezultatima, međutim u slučaju Bosne vrednosti za drugi podinterval ($PE=0.847$) su neznatno veće nego za prvi podinterval ($PE=0.843$) i pokazuju blago odstupanje od ostalih rezultata. Sve tri korišćene informacione mere ukazuju na stepen nasumičnosti u vremenskoj seriji, i predstavljeni rezultati o padu nasumičnosti u drugom podintervalu, od 1946-1965. godine, ukazuju na određeni nivo ljudske aktivnosti i uticaja na rečni tok, usled procesa urbanizacije koja se odigravala u periodu nakon Drugog svetskog rata u Sarajevskom polju.

Sa druge strane, uticaj elemenata hrapavosti podloge na turbulentni tok fluida se smatra bitnom temom u mehanici fluida (Jimenez, 2004). Biljno rastinje po dnu rečnog korita ima značajan uticaj na turbulenciju u oblasti između zone sa vegetacijom i slobodne površine (Nezu and Sanjou, 2008). Usled prisustva uronjene vegetacije u rečnom toku se formira hrapavi podsloj (Raupach et al., 1996). U hrapavom podsloju se izdvajaju tri zone: 1) duboka zona sa elementima hrapavosti po dnu, 2) oblast turbulentnog mešanja, u kojoj se, zbog raslojavanja po srednjim brzinama u vertikalnom pravcu, javlja Kelvin-Helmholcova (*William Thomson - Lord Kelvin; Hermann von Helmholtz*) nestabilnost koja uzrokuje stvaranje koherentnih turbulentnih struktura koje se kreću zajedno sa tokom (Hussain, 1983) i 3) pomereni pogranični sloj, kao u slučaju hrapave podloge. Dugo vremena se osnovna karakteristika turbulencije opisivala rečima kao nepravilnost ili nasumičnost, ali bez neke određene kvantifikacije stepena nasumičnosti u turbulentnom toku. U ovom istraživanju je upotrebom srednje Kolmogorovljeve kompleknosti izvršena kvantifikacija nasumičnosti u turbulentnom toku fluida preko podloge sa elementima hrapavosti.

S obzirom na to da je teško vršiti merenja brzine turbulentnog toka u prirodnim uslovima merenja se uglavnom vrše u laboratoriji za dinamiku fluida. Podaci su dobijeni sa Univerziteta Federiko II u Napulju, Italija. Eksperiment je izvođen u laboratorijskom kanalu sa promenljivim nagibom, koji je dugačak 8 m i širok 0.4 m. Vegetacija na dnu kanala je predstavljena krutim cilindrima dugačkim 1,5 cm i sa prečnikom od 4 mm, poredanim u obliku pravougaonika ili kvadrata, sa različitom gustinom elemenata hrapavosti λ_d (slika 5.17).



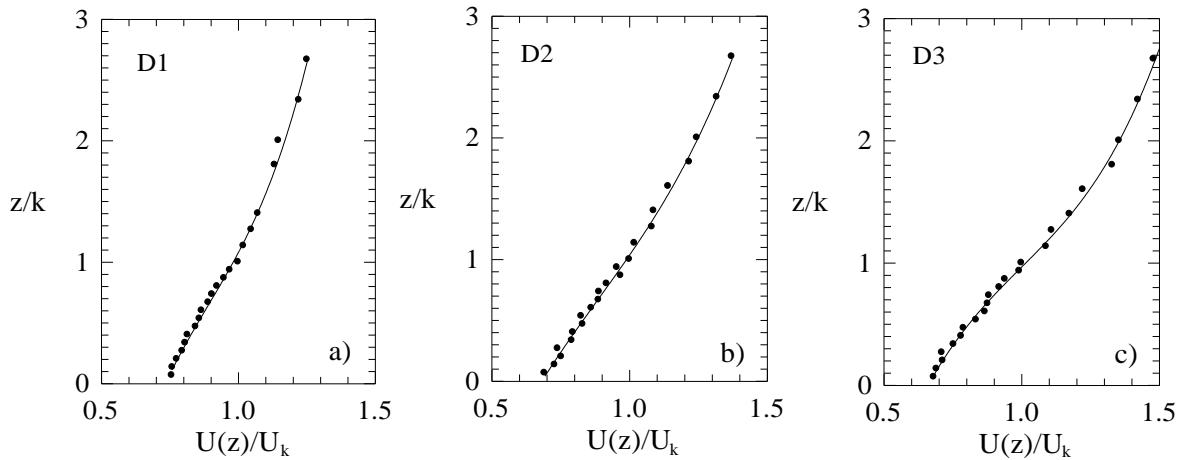
Slika 5.17 Laboratorijski kanal (a) i elementi hrapavosti na dnu kanala (b).

Vegetacija je u sva tri eksperimenta bila u potpunosti uronjena u fluid dubine h_u od preko 6 cm (tabela 5.4). Trenutne vrednosti brzine su merene u uniformnom delu toka, na približno 25 različitih visina u vertikalnom pravcu, na sredini pravougaonika ili kvadrata, u zavisnosti od rasporeda elemenata hrapavosti. Kao instrument je korišćen laserski Doplerov brzinomer, koji meri uzorke sa frekvencijom od 2 000 Hz a merenje je trajalo 135 sekundi. Ukupan broj podataka u svakoj vremenskoj seriji je iznosio $N=270\,000$.

Test	D1	D2	D3
$\lambda_d (\text{m}^2 \text{m}^{-3})$	0.024	0.048	0.096
nagib ($^\circ$)	0.03	0.02	0.03
protok $Q (\text{l s}^{-1})$	33	22	22
dubina $h_u (\text{cm})$	6.35	6.44	6.29
broj cilindara po m^2	400	800	1600

Tabela 5.4 Eksperimentalni uslovi.

Na slici 5.18 su prikazani vertikalni profili srednje brzine za tri različite gustine elemenata hrapavosti (D1, D2 i D3). Na vertikalnoj osi su predstavljene visine na kojima su vršena merenja z , normirane na visinu prepreka ($k=1.5 \text{ cm}$), dok su na horizontalnoj osi srednje brzine normirane na vrednost srednje brzine na visini prepreka (U_k). Vertikalni profili manje ili više prate oblik teorijske krive, uz prisustvo pregibne tačke na visini prepreka ($z=k$).



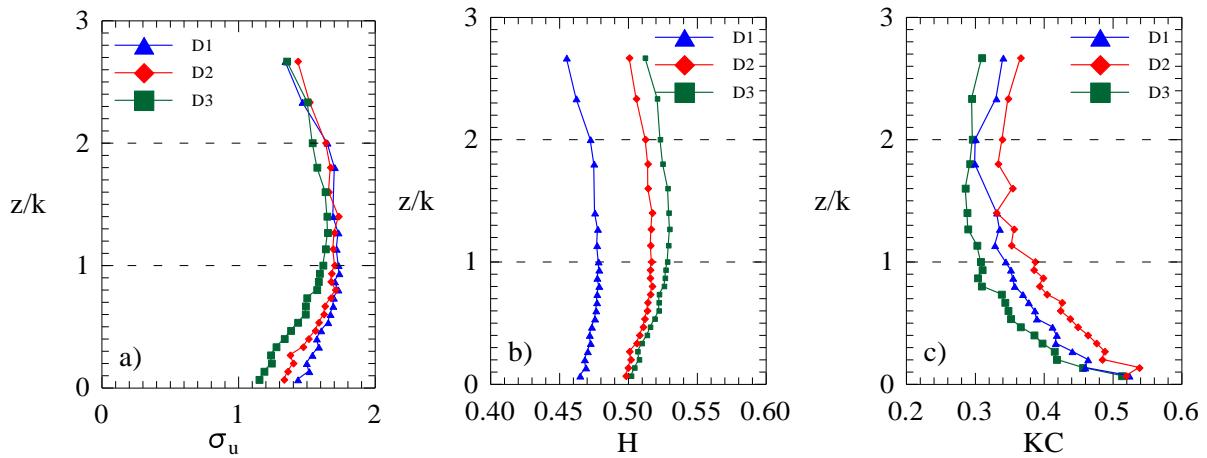
Slika 5.18 Vertikalni profili srednje brzine pri različitoj gustini elemenata hrapavosti.

Na osnovu vertikalnih profila, tok može da se podeli na dve zone: donja zona, unutar elemenata hrapavosti ($z/k < 1$) i gornja zona, iznad elemenata hrapavosti ($z/k > 1$). Bitno je naglasiti da se najveće smicanje srednje brzine u vertikalnom profilu javlja upravo na visini prepreka ($z=k$) a izraženost pregibne tačke predstavlja neophodan uslov za pojavu Kelvin-

Helmholcove nestabilnosti i koherentnih struktura u turbulentnom toku. Prema standardnoj metodologiji, trenutne vrednosti brzine možemo da napišemo kao zbir srednje vrednosti U i odstupanja u' ($u = U + u'$). Pomoću formule (5.2) računamo intenzitet turbulencije i normirajući ga na brzinu trenja u^* dobijamo $\sigma_u = \bar{u}/u^*$, pri čemu je

$$\bar{u} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N u_i'^2}{N}}. \quad (5.2)$$

Sa slike 5.19a se vidi da intenzitet turbulencije ima najveće vrednosti u sloju mešanja, kada je z između k i $2k$ a da u blizini prepreka ($z < k$) ima osetan pad. Maksimalne vrednosti variraju od 1.5 u slučaju razređene vegetacije (D3) do 1.7 u slučaju guste vegetacije (D1), što je uobičajeno za sloj mešanja. Ove tradicionalne, statističke mere turbulencije nam daju uvid u strukturu turbulencije u blizini elemenata hrapavosti i koherentne strukture iznad njih. Kada stabilan laminaran tok pređe u turbulentan, kretanje postaje neuređeno ali sa uređenom stopom disipacije, što predstavlja određeni nivo kompleksnosti. Kako bismo kvantifikovali uređenost/neuređenost toka računali smo Šenonovu entropiju (slika 5.19b), koja je već ranije bila korišćena u analizi geofizičkih fluida (Wijesekera and Dillion, 1997)



Slika 5.19 Intenzitet turbulencije normiran na brzinu trenja, σ_u (a), Šenonova entropija, H (b) i srednja Kolmogorovljeva kompleksnost, KC (c).

Vertikalni profili Šenonove entropije u sva tri eksperimenta sa različitom gustinom elemenata hrapavosti prate trend intenziteta turbulencije. Najveće vrednosti se javljaju u sloju mešanja ($1 < z/k < 2$) a zatim opadaju ka slobodnoj površini. Kada se približavamo elementima

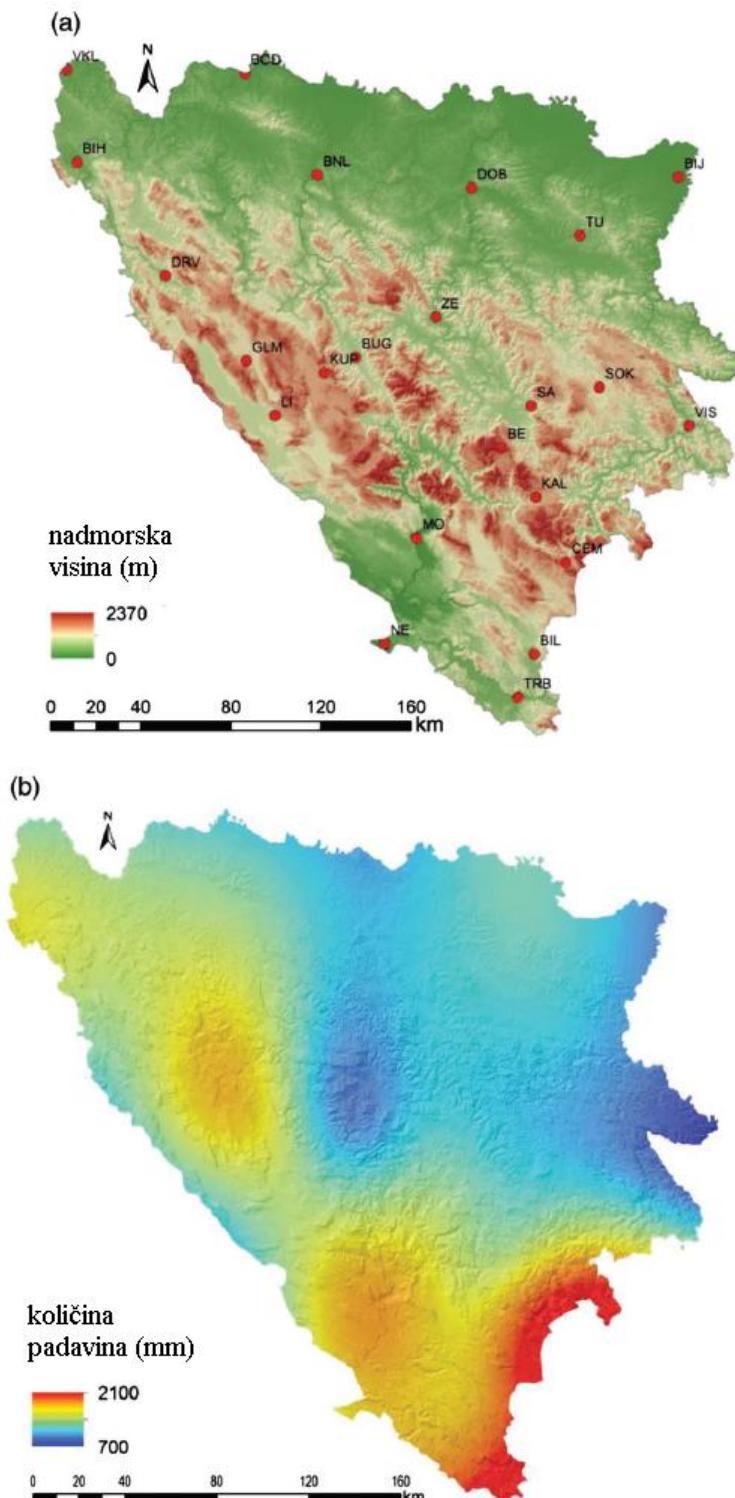
hrapavosti, vrednosti se takođe smanjuju, što može da se objasni pojavom manjih vrtloga koji samim tim nose manje energije. Međutim, vrednosti Šenonove entropije se u sva tri eksperimenta ne menjaju značajno sa visinom a male promene koje postoje ukazuju da je neuređenost najveća u sloju mešanja. To znači da ova mera ne može adekvatno da razdvoji slojeve sa većom ili manjom neuređenošću. Srednja Kolmogorovljeva kompleksnost kao informaciona mera to može (slika 5.19c). Analizirajući vertikalni profil KC vidimo da vrednosti opadaju sa visinom, kako se udaljavamo od elemenata hrapavosti i približavamo sloju mešanja. Ovo može da se rastumači činjenicom da se u najnižem sloju toku javljaju manji vrtlozi koji povećavaju neuređenost. U sloju mešanja vrednosti KC su najmanje i približno konstantne, što ukazuje na prisustvo većih i koherentno organizovanih vrtloga koji smanjuju neuređenost toka. Iznad sloja mešanja KC ponovo raste, s obzirom da se ka slobodnoj površini put mešanja smanjuje i ponovo se formiraju manji vrtlozi.

5.3. Analiza prostorne raspodele padavina

Pojam kompleksnosti je uvek usko povezan sa padavinama, bez obzira u kom kontekstu se razmatra; bilo da se radi o analizi padavina na različitim prostornim ili vremenskim skalamama (Millan et al., 2011), o prognozljivosti časovnih ili dnevnih vrednosti (Elsener and Tsonis, 1993), o analizi kompleksnosti padavina u promenljivoj životnoj sredini (Luan et al., 2011) ili o statističkoj kompleksnosti dnevnih vrednosti padavina u reanalizi (Tatli, 2014). Međutim, složenost prostorne raspodele padavina pod uticajem različitih geografskih faktora, kao npr. reljefa, mora ili velikih reka, naročito u našim krajevima, nije detaljnije ispitana. Jedan od osnovnih razloga jesu retka pluviografska merenja i oskudnost u podacima.

U ovom istraživanju je vršena analiza prostorne distribucija padavina u Bosni i Hercegovini upotrebom informacionih mera koje izražavaju stepen nasumičnosti u vremenskim serijama, zasnovanih na Kolmogorovljevoj kompleksnosti. Podaci o mesečnoj količini padavina u periodu 1960-1984. su dobijeni iz godišnjih izveštaja Hidrometeorološkog zavoda Bosne i Hercegovine. Osmatranja su vršena na 23 merne stanice. Svaka vremenska serija se sastoji od 300 podataka. Opis lokaliteta je dat u prethodnom potpoglavlju dok je položaj mernih stanica prikazan na slici 5.20, zajedno sa srednjom godišnjom količinom padavina za dati period. Vrednosti su interpolisane običnom Kriging metodom, koja se pokazala pouzdanom naročito u planinskim oblastima (Drešković and Đug, 2012). Najveća godišnja količina padavina se javlja u jugo-istočnom delu zemlje, u oblasti visokih planina na granici sa Crnom Gorom (oko 2 000 mm). Velike vrednosti se javljaju u blizini Jadranskog

mora, dok se najmanje vrednosti javljaju u oblasti centralne Bosne, kao i u Podrinjskoj oblasti na istoku države (oko 700 mm).

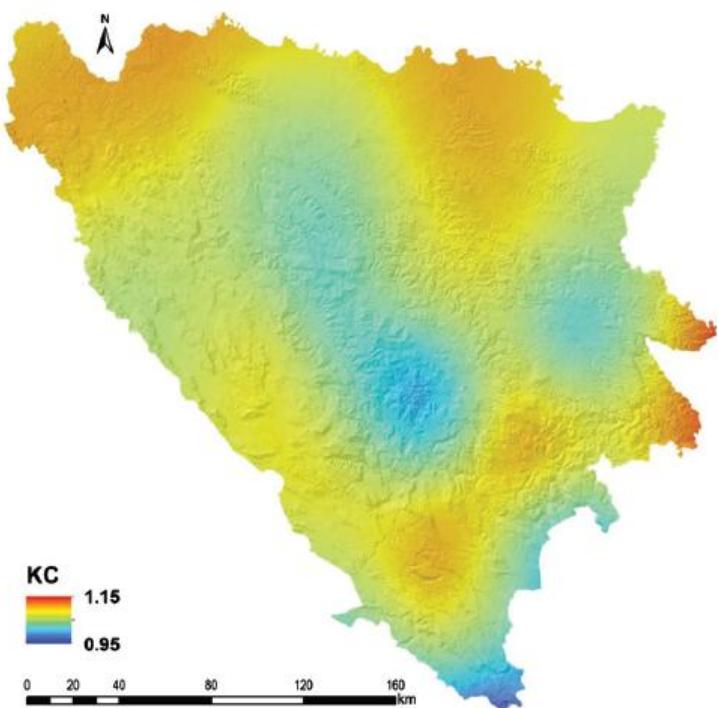


Slika 5.20 Lokacija 23 meteorološke stanice u Bosni i Hercegovini na kojima su prikupljeni podaci o količini padavina (skraćenice naziva mesta su date u tabeli 5.5) (a) i prostorna distribucija srednje godišnje količine padavina, pri čemu je interpolacija osmotrenih vrednosti vršena metodom običnog Kriginga (b).

stanica	oznaka	nadmorska visina (m)	geografska širina	geografska dužina	KC	KCM	OKC
Sarajevo	SA	637	43° 52'	18° 26'	1.070	1.152	0.557
Bihać	BIH	246	44° 49'	15° 53'	1.152	1.152	0.511
Bosanska Dubica	BOD	100	45° 11'	16° 49'	1.152	1.152	0.511
Banja Luka	BNL	153	44° 47'	17° 13'	1.042	1.179	0.438
Doboj	DOB	146	44° 44'	18° 06'	1.125	1.152	0.424
Tuzla	TU	305	44° 33'	18° 42'	1.097	1.152	0.440
Bijeljina	BIJ	90	44° 46'	19° 16'	1.070	1.125	0.499
Drvvar	DRV	485	44° 23'	16° 24'	1.070	1.152	0.553
Bugojno	BUG	562	44° 04'	17° 28'	1.015	1.152	0.480
Zenica	ZE	344	44° 13'	17° 54'	1.042	1.070	0.431
Kupres	KUP	1190	44° 00'	17° 17'	1.070	1.179	0.553
Livno	LI	724	43° 50'	17° 01'	1.097	1.125	0.545
Bjelašnica	BE	2067	43° 43'	18° 16'	1.015	1.042	0.475
Kalinovik	KAL	1073	43° 31'	18° 27'	1.125	1.152	0.441
Sokolac	SOK	872	43° 57'	18° 49'	1.015	1.097	0.443
Mostar	MO	99	43° 21'	17° 48'	1.097	1.097	0.558
Bileća	BIL	491	42° 53'	18° 27'	1.015	1.097	0.526
Čemerno	CEM	1305	43° 14'	18° 36'	1.015	1.152	0.513
Glamoč	GLM	1031	44° 03'	16° 52'	1.073	1.128	0.461
Velika Kladuša	VKL	157	45° 12'	15° 49'	1.125	1.152	0.450
Neum	NE	130	42° 56'	17° 36'	1.015	1.070	0.560
Višegrad	VIS	364	43° 47'	19° 18'	1.125	1.125	0.434
Trebinje	TRB	276	42° 43'	18° 21'	0.960	1.070	0.526

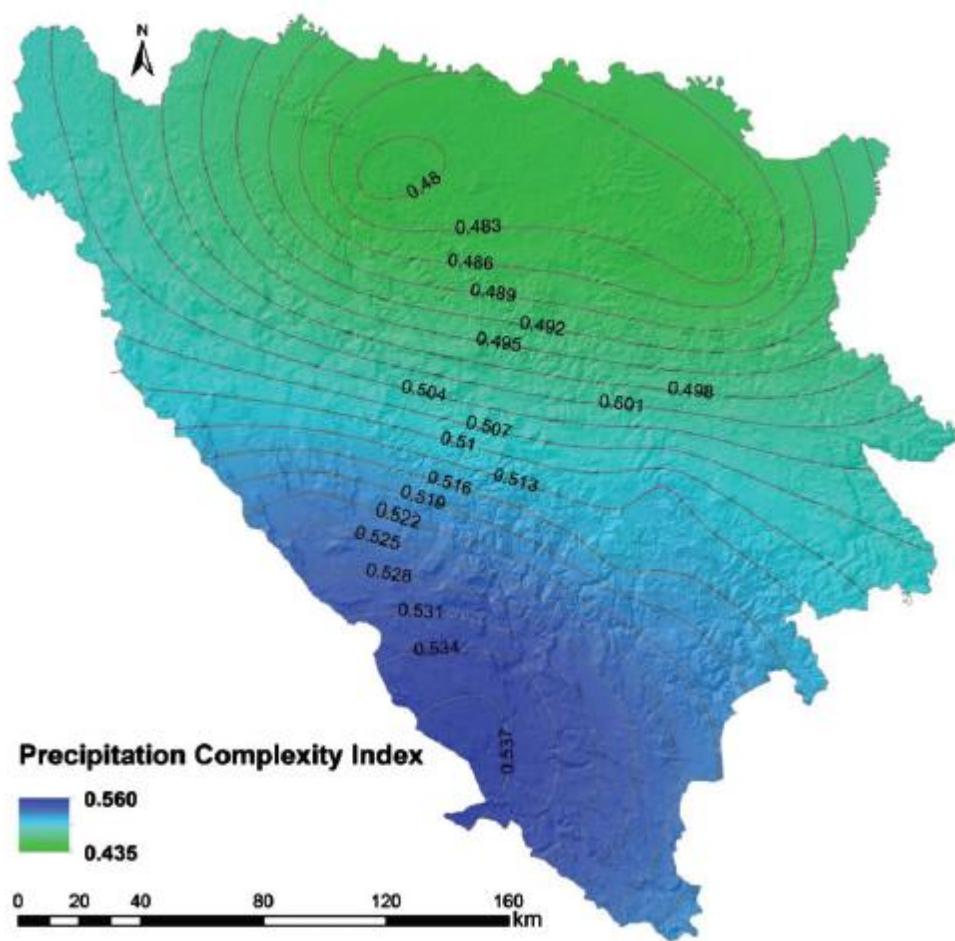
Tabela 5.5 Srednja (KC), maksimalna (KCM) i sveukupna (OKC) Kolmogorovljeva kompleksnost za vremenske serije mesečne količine padavina za 23 stanice u Bosni i Hercegovini u periodu 1960-1984.

Izračunate vrednosti KC su prikazane u tabeli 5.5 i leže u intervalu od 0.960 (TRB) do 1.152 (BIH, BOD). Činjenica da su sve vrednosti oko 1 ukazuje na to da vremenske serije ispoljavaju visok stepen nasumičnosti i izraženu stohastičnost padavinskih procesa, a to što su veće od 1 je posledica male dužine vremenske serije. Poredeći srednju i maksimalnu Kolmogorovljevu kompleksnost primećuje se da razlike nisu velike, što znači da je medijana kod većine vremenskih serija bliska srednjoj vrednosti. Kada se rezultati predstave grafički dobija se prostorna raspodela srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti (slika 5.21). Sa slike 5.21 se vidi da su najveće vrednosti KC prisutne u ravničarskim i brdskim krajevima (severo-zapadna, severo-istočna i centralna istočna oblast) i delimično u planinskom pojasu (jug, jugo-zapad). Najmanje vrednosti se javljaju u centralnoj oblasti države, prema istoku i na jugo-istoku (Mihailović et al., 2015c).



Slika 5.21 Prostorna raspodela srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti (KC) vremenskih serija mesečne sume padavina u Bosni i Hercegovini u periodu 1960-1984.

Ovakvom analizom moguće je odrediti pojedinačne oblasti u kojima je stohastičnost vremenskih serija padavina veća (kao na primer po obodu Panonske nizije ili uz tok reke Drine) ili manja (u oblasti visokih planina na jugo-istoku ili u brdskim krajevima u centralnoj Bosni). Međutim, nije moguće izvući posebne zaključeve o uticaju geografskih faktora (mora ili reljefa) na stepen nasumičnosti u distribuciji padavina. Zbog toga će na slici 5.22 biti grafički prikazani rezultati OKC, radi njihove bolje vizualizacije. Vrednosti OKC leže u intervalu od 0.431 (ZE) do 0.560 (NE). U ovom slučaju, kada je analizirana prostorna raspodela padavina pomoću informacionih mera, OKC ćemo nazvati indeks kompleksnosti padavina (eng. *Precipitation Complexity Index*) i označiti sa *PCI* (Mihailović et al., 2015c). Ova mera mnogo jasnije ukazuje na uticaj različitih geografskih faktora na stepen nasumičnosti vremenskih serija mesečne sume padavina u Bosni i Hercegovini. Na slici 5.22 se izdvaja region sa većim vrednostima *PCI* indeksa, koji je pod uticajem Jadranskog mora i sa druge strane region sa malim vrednostima *PCI*, koji se nalazi u blizi Panonske nizije. Između njih postoji prelazni pojas sa vrednostima iz sredine intervala, u planinskoj oblasti zemlje. *PCI* pokazuje kvantitativno da razlika u stepenu nasumičnosti u prostornoj raspodeli padavina u Bosni i Hercegovini potiče od različitog uticaja: 1) Jadranskog mora, 2) Dinarskih planina i 3) Panonske nizije.



Slika 5.22 Prostorna raspodela sveukupne Kolmogorovljeve kompleksnosti (OKC) vremenskih serija mesečne sume padavina u Bosni i Hercegovini u periodu 1960-1984., predstavljene kao indeks kompleksnosti padavina *PCI*.

5.4. Analiza temperature vazduha i padavina

Svakodnevno smo svedoci da se vremenski obrasci na koje smo navikli u prošlosti menjaju širom sveta. Atmosfera se ponaša drugačije u odnosu na period od pre 30 ili 60 godina. Izraz klimatske promene je već odavno usvojen u naučnoj zajednici. Naučnici pokušavaju da procene efekte tih promena u različitim regionima sveta, pa tako i u Srbiji. Istraživanja ukazuju na to da postoji trend porasta ekstremnih zimskih i letnjih temperatura u Panonskoj niziji (Lalić et al., 2013). Pokazano je kako u skorijoj budućnosti može da se očekuje pomeranje klimatskih zona u Srbiji, prema Kepenovoj klasifikaciji (*Vladimir Köppen*), što bi rezultiralo promenama prinosa biljnih kultura (Mihailović et al., 2015e). Upotreboom različitih statističkih metoda analizirana je prostorna i vremenska varijabilnost padavina u Srbiji u drugoj polovini 20. veka. Tako na primer, pomoću empirijske ortogonalne funkcije analizirana je varijabilnost letnjih i zimskih padavina (Tošić, 2004). Statistička analiza dnevne količine padavina vršena je ispitivanjem trendova i računanjem indeksa, kao

što su broj dana kada količina padavina prelazi određenu vrednost, udeo u ukupnoj godišnjoj količini padavina događaja koji premašuju 95-ti procenat u odnosu na dan sa maksimalnom količinom padavina ili broj dana u godini sa padavinama (Unkašević and Tošić, 2011). Pomoću indeksa koncentracije padavina i analize osnovne komponente analizirani su prostorni i vremenski obrasci padavina u Srbiji (Gocić and Trajković, 2014). Prostorna analiza temperature vazduha i njenih godišnjih i sezonskih trendova je rađena na osnovu srednjih mesečnih vrednosti (Bajat et al., 2015) dok je intenzitet promena određivan iz nagiba grafika linearne regresije.

Sa druge strane, Lorenc je napisao mnogo naučnih radova u kojima raspravlja o prognozljivosti atmosferskih procesa pomoću modela za prognozu vremena i klimatskih modela različitog nivoa složenosti, rešavanjem sistema jednačina, pri čemu se kao početni i bočni granični uslovi koriste podaci iz osmatranja (Lorenz, 1982). Lorenc je prvi čovek u naučnoj zajednici koji je ukazao na nelinearnu dinamiku atmosfere i začetnik je jednog novog pravca u proučavanju atmosfere. Vremenom su njegovim putem krenuli mnogi naučnici baveći se nelinearnom dinamičkom analizom, primenjujući je na razne procese u prirodi. Planeta Zemlja predstavlja kompleksan sistem čiji međusobni delovi poput atmosfere, okeana, zemljišta sa vegetacijom, snega i leda i svih živih bića, uzajamno deluju formirajući određenu klimu na celom prostoru. U skorije vreme naučnici su počeli da primenjuju nove metode u proučavanju klime i klimatskih promena. Jedni su ispitivali kompleksnost dinamike temperature vazduha i padavina u Kini na različitoj vremenskoj i prostornoj skali (Xu et al., 2013; Xu et al., 2016), drugi su upotrebom entropije uzorka na različitim vremenskim skalamama ispitivali temperaturne anomalije u Evropi za duži vremenski period i ustanovili porast entropije u poslednje vreme na skali od 12 meseci (Balzter et al., 2015), dok su treći entropiju uzorka primenili na ispitivanje kompleksnosti klime (Li et al., 2006).

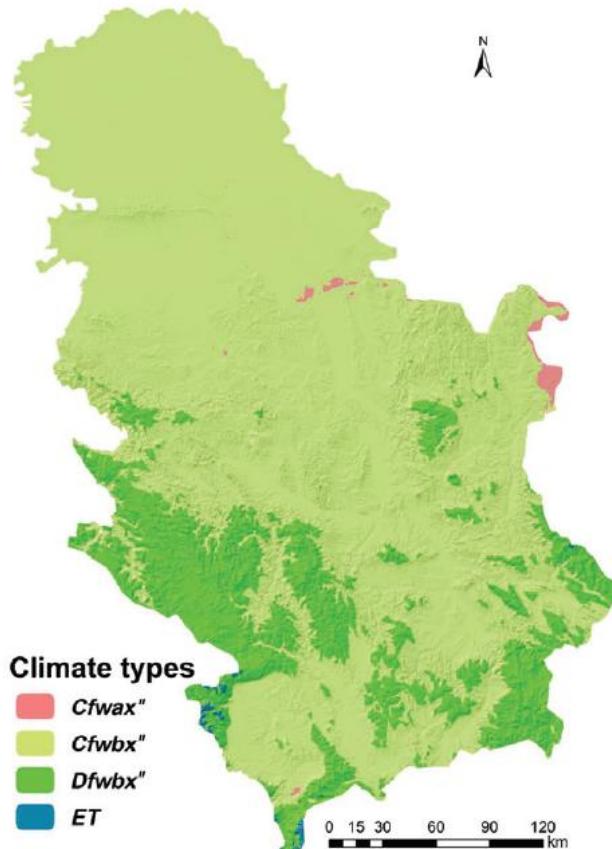
U ovom istraživanju entropija uzorka i srednja Kolmogorovljeva kompleksnost su primenjene na tri različite vremenske serije: maksimalnu i minimalnu temperaturu vazduha, kao kontinualne meteorološke elemente sa izraženim godišnjim hodom i količinu padavina, kao diskontinualan element. Korišćeni su osmotreni dnevni podaci sa sedam meteoroloških stanica u Srbiji, u periodu 1951-2010. (tabela 5.6). Podaci su dobijeni od Republičkog hidrometeorološkog zavoda Srbije. Kako bi se održala doslednost dužine vremenskih serija izbačeni su podaci za 29. februar svake prestupne godine, tako da je svaka serija sadržavala 365 dnevnih podataka, u periodu od 60 godina. Računate su navedene informacione mere na godišnjem nivou kako bi se odredio stepen nasumičnosti a zatim ispitao trend u višegodišnjem nizu podataka.

stanica	oznaka	geografska širina	geografska dužina	nadmorska visina (m)
Sombor	SO	45°47'	19°05'	87
Novi Sad	NS	45°20'	19°51'	86
Belgrade	BG	44°48'	20°28'	132
Vršac	VS	45° 06'	21° 18'	94
Negotin	NE	44°14'	22°33'	42
Niš	NI	43°20'	21°54'	204
Vranje	VR	42°33'	21°55'	432

Tabela 5.6 Lista meteoroloških stanica sa oznakom, geografskom dužinom, geografskom širinom i nadmorskom visinom.

Srbija, smeštena na Balkanskom poluostrvu i u Panonskoj niziji, nalazi se na raskrsnici između Južne i Centralne Evrope. Prostire se između 41° i 47° severne geografske širine i 18° i 23° istočne geografske dužine, i prekriva površinu od 88 361 km². Panonska nizija obuhvata trećinu države na severu, dok se krajnji istok nalazi u Vlaškoj niziji. Reljef centralne oblasti je pretežno brdski, ispresecan rekama. Planine dominiraju u južnom delu zemlje, prekrivajući trećinu teritorije. Dinaridi se pružaju zapadnim i jugo-zapadnim delom, prateći tok reka Drine i Ibra. Karpati i planina Balkan se pružaju u pravcu sever-jug, u istočnim krajevima. U jugoistočnom uglu zemlje planine pripadaju starom Rilo-Rodopskom sistemu. Najviši vrh se nalazi na planini Prokletije na visini od 2 656 m, dok je najniža tačka Prahovo sa nadmorskom visinom od 17 m. Klima Srbije je pretežno umereno-kontinentalna, sa izraženim uticajem Alpa, Sredozemnog mora, Đenovskog zaliva, Panonske nizije, doline Morave, Karpati i Rodopskih planina (Radinović, 1979). Prema Kepenovoj klasifikaciji (Kottek et al., 2006) i na osnovu podataka u periodu 1961-1990., koji se uzima kao referentni, u Srbiji postoje četiri klimatska tipa: *Cfwax*", *Cfbwx*", *Dfwax*" i *ET* (slika 5.23). Dominantan klimatski tip je *Cfbwx*". Navedene oznake redom predstavljaju *C* = umereni / mezotermalni klimat (prosečna temperatura u najtoplijem mesecu je iznad 10°C a u najhladnjem mesecu je iznad -3°C), *f* = značajna količina padavina tokom cele godine, *w* = suve zime (kada je prosečna količina padavina u najsuvljem zimskom mesecu manja od jedne desetine prosečne količine padavina u najvlažnijem letnjem mesecu), *b* = prosečna temperatura u najtoplijem mesecu je ispod 22°C (pri čemu barem četiri meseca imaju prosečnu temperaturu iznad 10°C), *a* = prosečna temperatura u najtoplijem mesecu je iznad 22°C , *x*" = postoji sekundarni maksimum padavina u jesen, *D* = kontinentalna / mikrotermalna klima (prosečna temperatura u najtoplijem mesecu je iznad 10°C a u najhladnjem mesecu je ispod -3°C) i *ET* = polarna i alpska klima sa prosečnom temperaturom ispod 10°C u svim mesecima u godini. Distribucija srednje godišnje temperature i količine padavina u zavisnosti od nadmorske visine *h* izgleda ovako: 10.9°C ($h < 300$ m), 10.0°C ($300 < h < 500$ m) i 6.0°C ($h > 500$ m); $540 - 820$ mm (*h*

$< 1\ 000$ m) i $700 - 1000$ mm ($h > 1\ 000$ m). Većina mesta u Srbiji ima kontinentalni režim padavina sa većom količinom padavina u toplijem delu godine, osim u jugo-zapadnom delu gde je osmotrena u jesen. Jun je mesec sa najvećom količinom padavina, pri čemu je u proseku to 13% ukupne godišnje vrednosti, dok su februar i oktobar meseci sa najmanjom količinom padavina.

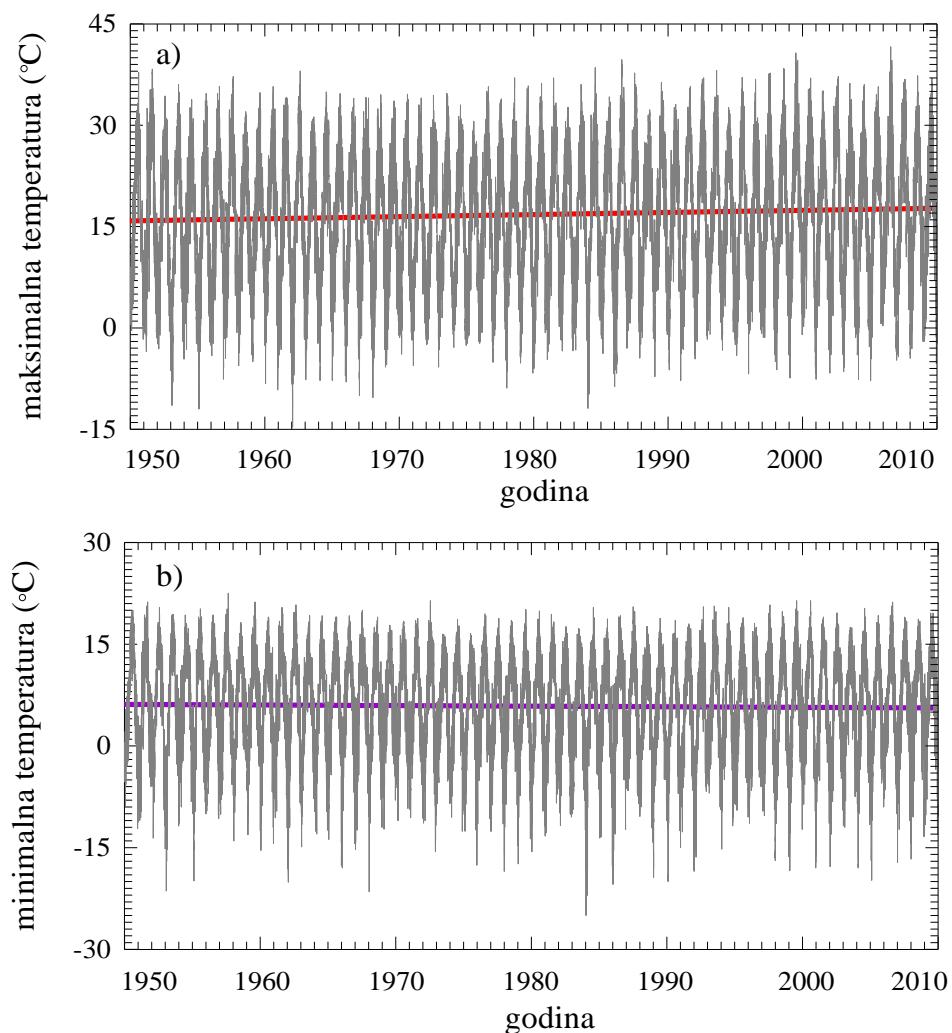


Slika 5.23 Klimatske zone u Srbiji prema Kepenovoj klasifikaciji na osnovu klimatskih normala za period 1961-1990.

Osnovni meteorološki elementi u Kepenovoj klasifikaciji klime su temperatura vazduha i padavine. Njihov godišnji režim, dobijen na osnovu višegodišnjeg proseka, određuje klimatski tip na određenom podneblju. Iz tog razloga je rađena analiza vremenskih serija maksimalne i minimalne temperature, kao i količine padavine, kako bi se ispitao nivo nasumičnosti u godišnjim vremenskim serijama, upotrebom entropije uzorka i srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti, da bi se zatim utvrdili postojeći trendovi u višegodišnjem nizu podataka. Pomoću Man-Kendalovog testa (*Henry Berthold Mann; Maurice Kendall*) ispitana je statistički značaj trendova godišnjeg nivoa nasumičnosti u periodu 1951-2010. (Mann, 1945; Kendall, 1975). Entropija uzorka je računata sa dimenzijom faznog prostora $m=2$ i vrednošću parametra $r=0.2$ standardne devijacije podataka. Srednja Kolmogorovljeva

kompleksnost je kodirana tako da je za prag izabrana srednja vrednost vremenske serije u celokupnom periodu 1951-2010., kako bi se godišnje vrednosti mogle adekvatno upoređivati.

Linearno fitovanje podataka o maksimalnoj temperaturi vazduha pokazuje trend porasta za svaku od sedam stanica koje su korišćene u ovom istraživanju, u periodu od 1951-2010., što je u skladu sa drugim istraživanjima (Bajat et al., 2015). Na slici 5.24a je predstavljena vremenska serija maksimalne temperature za Vranje sa statistički značajnim trendom porasta (p -vrednost < 0.0001 i Kendalov $\tau = 0.034$). Porast maksimalne temperature je u intervalu od 1-2 °C, isti rezultat je dobijen i za ostale stanice.



Slika 5.24 Vremenska serija dnevnih vrednosti maksimalne (a) i minimalne (b) temperature vazduha u Vranju za period 1951-2010., sa trendom.

Porast temperature vazduha ima dva efekta na atmosferu: 1) unutrašnja energija atmosfere raste i 2) kapacitet vazduha za primanje vodene pare takođe raste (Sherwood et al., 2010). Analiza ekstremnih klimatskih indeksa u Srbiji u periodu 1961-2010. je na osnovu četiri

kombinovana indeksa temperature i padavina pokazala dominaciju suvih perioda u odnosu na vlažne, kao i povećanje broja toplih a smanjivanje hladnih perioda (Malinović-Miličević et al., 2015). Značajne promene u srednjim godišnjim vrednostima maksimalne i minimalne temperature su u vezi sa povećanom učestalošću ekstremnih vremenskih dogadaja uzrokovanih visokim ili niskim temperaturama. Trajanje topotnog talasa (koji se definiše kao broj dana u rasponu od najmanje šest dana kada je maksimalna temperatura veća od 90-tog procenta) u Srbiji se u proseku povećava 3.994 dana po dekadi dok maksimalan broj uzastopnih vrelih dana (kada je maksimalna temperatura veća od 90-tog procenta) raste 1.029 dana po dekadi. Trajanje ledenog talasa (koji se definiše kao broj dana u rasponu od najmanje šest dana kada je minimalna temperatura manja od 10-tog procenta) opada za 0.378 dana po dekadi dok je maksimalan broj uzastopnih ledenih noći (kada je minimalna temperatura manja od 10-tog procenta) opada za 0.140 dana po dekadi. Na slici 5.24b je prikazana vremenska serija minimalnih temperatura za Vranje sa statistički značajnim ali ne i izraženim trendovima (p -vrednost = 0.001 i Kendalov τ = -0.015) što je u skladu sa rezultatima Međuvladinog panela za klimatske promene (eng. Intergovernmental Panel on Climate Change - IPCC) o smanjenju indeksa hladnog vremena usled globalnog zagrevanja. Što se tiče ekstremnih indeksa koji se odnose na padavine, u 70% slučajeva raste maksimalna količina padavina tokom pet dana, kao i suma padavina, a to znači da se povećavaju i količina padavina i njihov intenzitet. Broj uzastopnih dana sa padavinama raste a broj uzastopnih suvih dana se smanjuje.

Računajući informacione mere stepena nasumičnosti u vremenskim serijama na godišnjem nivou i ispitujući njihove trendove na višegodišnjem nivou dobijeni su rezultati koji su prikazani u nekoliko narednih tabela uz odgovarajuću diskusiju (Mimić et al., 2015).

T max	SampEn		KC		
	stanica	Kendalov τ	p-vrednost	Kendalov τ	p-vrednost
SO	0.111	0.214	0.281	0.002	
NS	0.022	0.813	0.212	0.022	
BG	0.087	0.329	0.228	0.014	
VS	0.111	0.214	0.186	0.045	
NE	0.113	0.204	0.281	0.002	
NI	0.039	0.660	0.210	0.023	
VR	0.099	0.264	0.184	0.046	

Tabela 5.7 Rang korelacije i statistički značaj trendova entropije uzorka (SampEn) i srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti (KC) maksimalne temperature za sedam stanica u Srbiji.

Rezultati za maksimalnu temperaturu su prikazani u tabeli 5.7. Srednja Kolmogorovljeva kompleksnost ima statistički značajan trend porasta (p-vrednost < 0.05) za svih sedam stanica dok entropija uzorka pokazuje trend porasta ali bez statističkog značaja. Ovo znači da nasumičnost vremenskih serija maksimalne temperature raste, povećavajući varijabilnost vremenskih obrazaca u Srbiji. Porast nasumičnosti je u skladu sa rezultatima koji pokazuju sezonske promene u ekstremnim vrednostima maksimalne temperature u Srbiji u periodu 1949-2009., povezane sa obrascima u atmosferskoj cirkulaciji na velikim razmerama (Unkašević and Tošić, 2013). Trendovi informacionih mera nasumičnosti godišnjih vremenskih serija minimalne temperature nemaju statistički značaj za većinu stanica (tabela 5.8) osim entropija uzorka za Vranje (p-vrednost = 0.002) i srednja Kolmogorovljeva kompleksnost za Negotin (p-vrednost = 0.011). Takođe, neki trendovi su rastući a neki su opadajući, u zavisnosti od stanice. Ovo može da se objasni činjenicom da su fluktuacije minimalne temperature u oblastima sa umereno-kontinentalnom klimom tokom godine najviše uslovljene radijacionim karakteristikama podloge i količinom oblačnosti (Milosavljević, 1990; Qu et al., 2014 i navedene reference), što zavisi od lokaliteta. Drugi bitan faktor koji utiče na vrednosti minimalne temperature jeste advekcija hladnog vazduha, koja je usled globalnog zagrevanja manje izražena u većini delova sveta, što se primećuje na osnovu opadanja indeksa hladnog vremena.

T min stanica	SampEn		KC	
	Kendalov τ	p-vrednost	Kendalov τ	p- vrednost
SO	0.112	0.209	-0.037	0.690
NS	-0.010	0.914	0.006	0.949
BG	-0.080	0.368	0.014	0.882
VS	0.093	0.298	0.117	0.206
NE	0.070	0.382	0.236	0.011
NI	-0.084	0.348	0.054	0.562
VR	0.270	0.002	0.132	0.155

Tabela 5.8 Rang korelacije i statistički značaj trendova entropije uzorka (SampEn) i srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti (KC) minimalne temperature za sedam stanica u Srbiji.

Vremenske serije količine padavina imaju opadajući trend i u slučaju entropije uzorka i u slučaju srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti za svih sedam stanica (tabela 5.9). Međutim, trendovi nisu statistički značajni osim za Negotin, gde je za SampEn p-vrednost = 0.031 a za KC p-vrednost = 0.009. Prema nekim drugim analizama, upotrebom indeksa koncentracije padavina, varijabilnost padavina na godišnjem nivou ima najveće vrednosti upravo za Negotin, u periodu 1946-2012. (Gocić and Trajković, 2014). Indeks koncentracije padavina

(eng. Precipitation Concentration Index – PCI , različito od Precipitation Complexity Index, koji je opisan u prethodnom potpoglavlju) se definiše kao

$$PCI = \frac{\sum_{i=1}^{12} p_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{12} p_i \right)} \times 100 \quad (5.3)$$

gde je p_i mesečna količina padavina u i -tom mesecu. Vrednosti manje od 10 ukazuju na jednoliku raspodelu mesečnih padavina tokom godine, vrednosti između 11 i 20 pokazuju izraženu sezonsku distribuciju padavina, dok vrednosti preko 20 odgovaraju značajnoj varijabilnosti mesečnih sumi padavina. Opadajući trendovi ukazuju na restrukturalizaciju vremenskih serija padavina, smanjujući nepravilnost i menjajući vremenske obrasce, što je posledica činjenice da u poslednje vreme mesečna količina padavina padne u svega nekoliko dana, ostavljajući ostatak meseca bez padavina, što može da dovede do pojave ekstremnih vremenskih prilika poput poplava ili suša. Rezultati su u skladu sa onima koji pokazuju da u periodu 1949-2009., 35.5% ukupne godišnje količine padavina u Srbiji padne tokom 10 najvlažnijih dana u godini i da je vrednost maksimalne dnevne količine padavina u godini porasla za 9% krajem 20. veka.

P	SampEn		KC	
	stanica	Kendalov τ	p-vrednost	Kendalov τ
SO	-0.073	0.411	-0.074	0.432
NS	-0.127	0.155	-0.147	0.110
BG	-0.008	0.934	-0.099	0.285
VS	-0.094	0.293	-0.042	0.653
NE	-0.192	0.031	-0.242	0.009
NI	-0.041	0.651	-0.035	0.709
VR	-0.132	0.137	-0.120	0.196

Tabela 5.9 Rang korelacije i statistički značaj trendova entropije uzorka (SampEn) i srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti (KC) količine padavina za sedam stanica u Srbiji.

Nakon što se za sve tri promenljive i za obe informacione mere nasumičnosti, za svaku stanicu nađe srednja vrednost tokom celog perioda 1951-2010., onda vrednosti mogu da se usrednjene i za celu Srbiju. Sada je pomoću Moranove statistike (*Patrick Alfred Pierce Moran*) moguće ispitati zavisnost informacionih mera između stanica u odnosu na njihovo međusobno rastojanje, prema formuli:

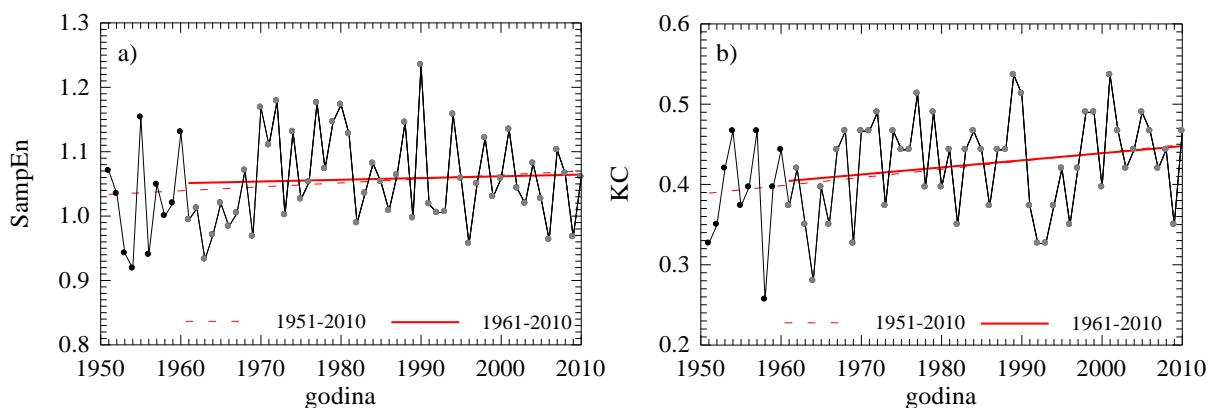
$$I = \frac{n}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2} \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} (y_i - \bar{y})(y_j - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij}} \quad (5.4)$$

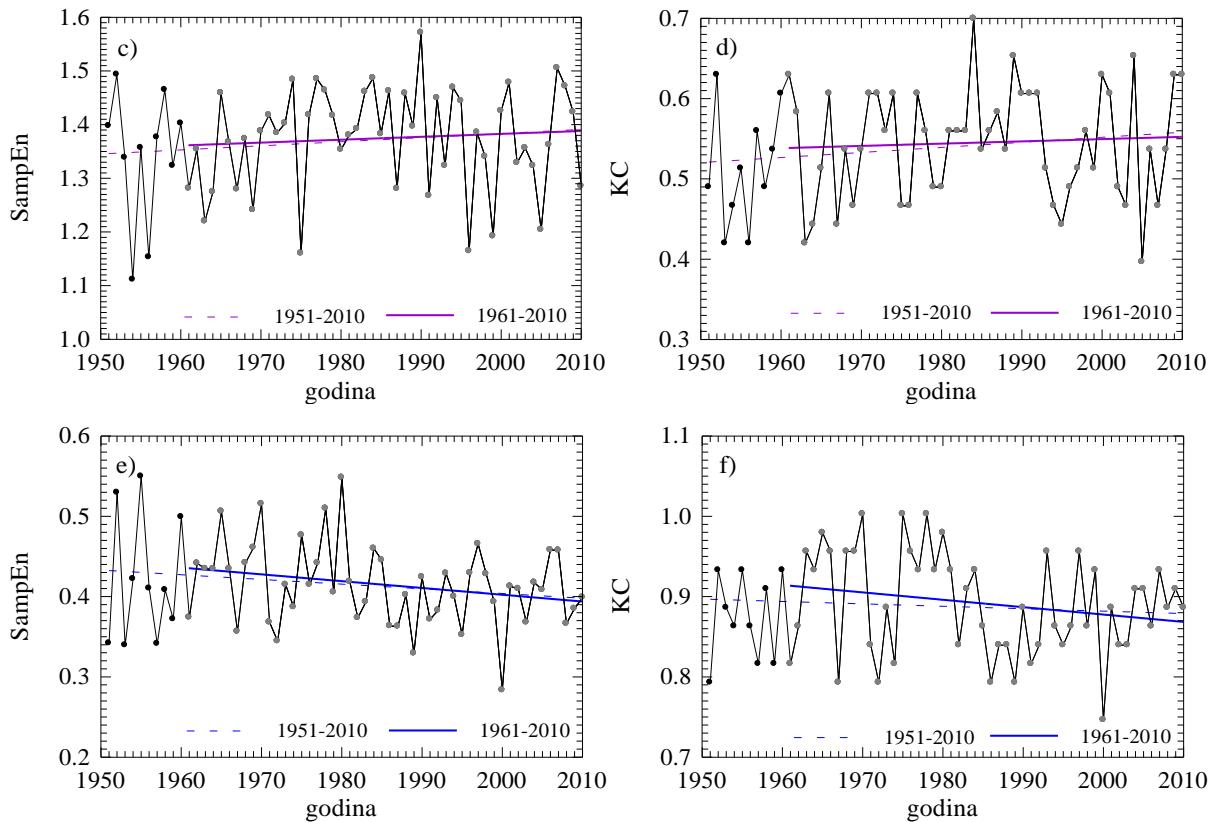
gde su y_i i y_j izračunate vrednosti informacionih mera na lokacijama i i j , \bar{y} srednja vrednost a w_{ij} težinski faktor koji predstavlja inverznu udaljenost između lokacija i i j , dok je n broj stanica (Moran, 1950). Moranov I indeks može da ima vrednosti u intervalu od -1 kada postoji potpuno rasipanje u vrednostima promenljive y do skoro $+1$ što govori o pojavi klastera u prostornoj raspodeli promenljive y . Nula ukazuje na postojanje nasumičnih obrazaca u prostoru. Rezultati Moranovog indeksa za date vremenske serije su negativni sa vrednostima bliskim nuli, što znači da postoji slaba korelacija među vrednostima entropije uzorka i srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti između stanica (tabela 5.10).

Moranov I indeks	SampEn	KC
T max	-0.228	-0.241
T min	-0.266	-0.218
P	-0.117	-0.078

Tabela 5.10 Moranov I indeks, ukazuje da ne postoji zavisnost vrednosti informacionih mera između različitih stanica, za sve tri promenljive.

Kako bi se ispitala doslednost trendova rasta ili opadanja godišnjih vrednosti stepena nasumičnosti navedenih meteoroloških elemenata izabran je još jedan period osmatranja 1961-2010. za stanicu Vršac, kao tipičan primer (slika 5.25). Rezultati pokazuju konzistentnost trendova obe informacione mere nasumičnosti, i entropije uzorka i srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti, za sve tri promenljive.





Slika 5.25 Konzistentnost trendova informacionih mera za stanicu Vršac između perioda 1951-2010. i 1961-2010. za maksimalnu temperaturu (a) i (b), minimalnu temperaturu (c) i (d) i količinu padavina (e) i (f).

5.5. Analiza UV-B zračenja

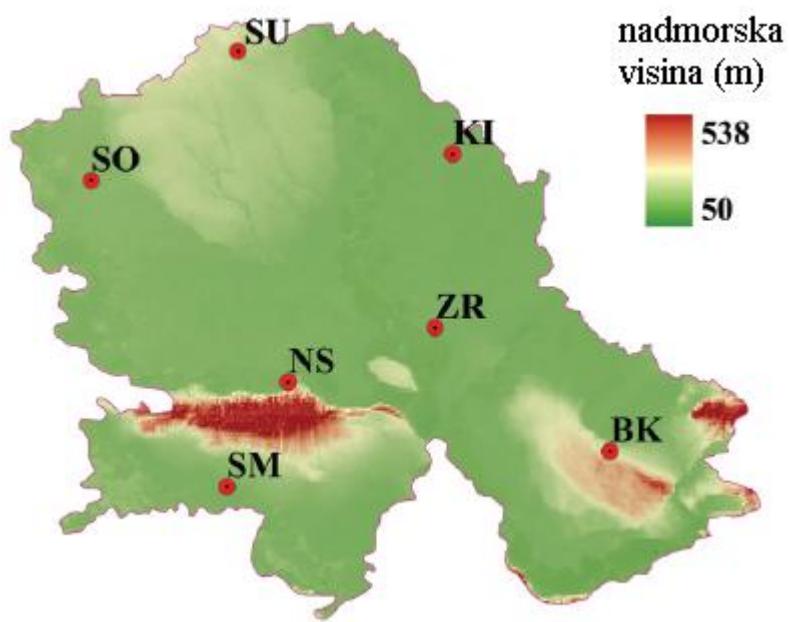
Mnogi meteorološki elementi su pod uticajem geografskih faktora i ljudske aktivnosti, a među njima i UV-B zračenje ($280 < \lambda < 315$ nm). Iz tog razloga njihova dinamika može da varira od proste do složene, kako u vremenskom tako i u pogledu prostora. U poslednjih nekoliko vekova, razvojem industrije, ljudski faktor ima sve veći uticaj na prirodu, menjajući karakter podloge, sastav atmosfere, kvalitet vode i sl. Prisustvo različitih gasova (npr. SO_2 , NO_2 i O_3) i čestica (aerosola) u atmosferi utiče na intenzitet UV-B zračenja i može da menja strukturu vremenskih serija u određenom periodu. Primenom srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti ispitana je stepen nasumičnosti u serijama koje sadrže podatke o dozi UV-B zračenja (kJ m^{-2}) u periodu 1990-2007. za sedam stanica u Vojvodini.

Pošto ne postoje detaljna merenja na teritoriji Vojvodine, podaci su dobijeni kombinacijom:

- 1) merenja u Novom Sadu pomoću Yankee UV-B1 biometra ,
- 2) upotrebom numeričkog modela UV zračenja NEOPLANTA (Malinović et al., 2006) i

3) računskim putem pomoću empirijske formule zasnovane na linearnoj vezi između dnevne sume UV-B zračenja i dnevne sume globalnog sunčevog zračenja.

Vojvodina predstavlja pokrajinu u Srbiji, smeštenu na severu zemlje u Panonskoj niziji, i obuhvata trećinu državne teritorije. Prostire se između $18^{\circ} 51' - 21^{\circ} 33'$ istočne geografske dužine i $44^{\circ} 37' - 46^{\circ} 11'$ severne geografske širine. Pretežno je ravničarski kraj uz prisustvo Fruške gore u južnom delu i Vršačkih planina na istoku pokrajine. Nadmorska visina varira od 75 m do 641 m. U ovoj studiji korišćeni su podaci za sedam mesta: Subotica (SU), Sombor (SO), Kikinda (KI), Zrenjanin (ZR), Novi Sad (NS), Banatski Karlovac (BK) i Sremska Mitrovica (SM) (slika 5.26). UV-B zračenje ima izražen uticaj na zdravlje ljudi i pojedine biljne kulture, što je veoma bitno za poljoprivredne aktivnosti, koje su u ovoj oblasti veoma izražene.



Slika 5.26 Reljef Vojvodine sa lokacijom sedam mesta korišćenih u studiji: Subotica (SU), Sombor (SO), Kikinda (KI), Zrenjanin (ZR), Novi Sad (NS), Banatski Karlovac (BK) i Sremska Mitrovica (SM).

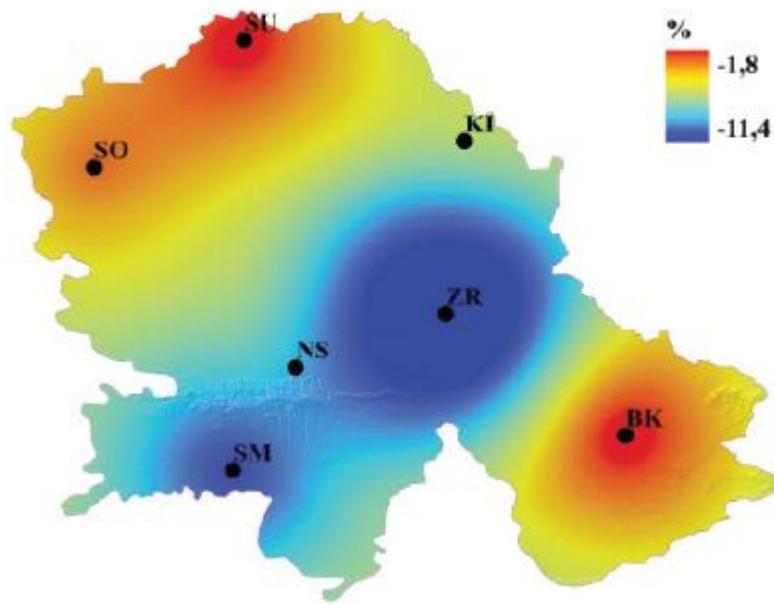
Stepen nasumičnosti u vremenskim serijama doze UV-B zračenja je računat pomoću srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti za sedam stanica u Vojvodini, u periodu 1990-2007., što znači da je dužina svake serije bila $N=6\ 574$ podatka. Kako bi se ispitao uticaj ljudske aktivnosti na stepen nasumičnosti, celokupan period je podeljen na dva jednakaka podintervala: 1990-1998. i 1999-2007., sa po $N=3\ 287$ podataka svaki. Ovakva podela je napravljena iz razloga što bombardovanje Srbije 1999. godine predstavlja kraj ratnog perioda, i početak stabilizacije u zemlji, sa porastom intenziteta saobraćaja, ekonomskih aktivnosti i drugih

faktora koji utiču na ispuštanje gasova i nivo zagađenosti u atmosferi. Prisustvo raznih primesa u vazduhu utiče na intenzitet UV-B zračenja direktno (procesima rasejanja) i indirektno (učestvujući u formiranju oblaka, kao osnovnih modifikatora koji slabe intenzitet zračenja). Rezultati su prikazani u tabeli 5.11 (Mihailović et al., 2013).

stanica	1990-2007	1990-1998	1999-2007
SO	0.492	0.519	0.505
SU	0.498	0.498	0.498
NS	0.492	0.530	0.498
KI	0.496	0.526	0.501
ZR	0.498	0.544	0.487
SM	0.523	0.551	0.508
BK	0.515	0.530	0.530

Tabela 5.11 Srednja Kolmogorovljeva kompleksnost (KC) vremenskih serija doze UV-B zračenja za sedam stanica u Vojvodini u periodu 1990-2007. i dva podintervala 1990-1998. i 1999-2007.

Uočava se da su vrednosti KC za period 1990-2007. za pet mesta približno iste; Sombor (0.492), Subotica (0.498), Novi Sad (0.492), Kikinda (0.496) i Zrenjanin (0.498). Za preostala dva mesta, Sremsku Mitrovicu (0.523) i Banatski Karlovac (0.515), vrednosti su nešto više. Sremska Mitrovica se nalazi u blizini Fruške gore a Banatski Karlovac je u brdskom području, pa očigledno da geografski faktori imaju uticaj na vremensku seriju intenziteta UV-B zračenja, najviše zbog efekta višestrukog rasejanja. Novi Sad, iako je u blizini Fruške gore, nema veće vrednosti KC iz razloga što je visoko urbanizovan, pa zagađenje vazduha usled prisustva gasova redukuje stepen nasumičnosti u serijama. Kada se uporede vrednosti KC u dva podintervala, za pet od sedam mesta se dobija veći stepen nasumičnosti u prvom intervalu 1990-1998. nego u drugom. Samo u slučaju Subotice i Banatskog Karlovca vrednosti KC u oba intervala su iste. Izvodi se zaključak da povišeno zagađenje atmosfere, pored toga što smanjuje intenzitet UV-B zračenja, redukuje i stepen nasumičnosti u vremenskim serijama dnevne doze UV-B zračenja, što odražava uticaj ljudske aktivnosti. Relativne promene KC izražene u procentima, za period 1999-2007. u odnosu na period 1990-1998. su prikazane na slici 5.27. Uočava se da su najmanje promene u severnim i istočnim delovima Vojvodine dok je izraženo opadanje vrednosti KC u centralnim i jugo-zapadnim krajevima.



Slika 5.27 Relativna promena (%) srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti doze UV-B zračenja u Vojvodini za period 1999-2007. u odnosu na period 1990-1998.

6. Primena informacionih mera u proceni kompleksnosti modela životne sredine

6.1. Kompleksnost modela životne sredine

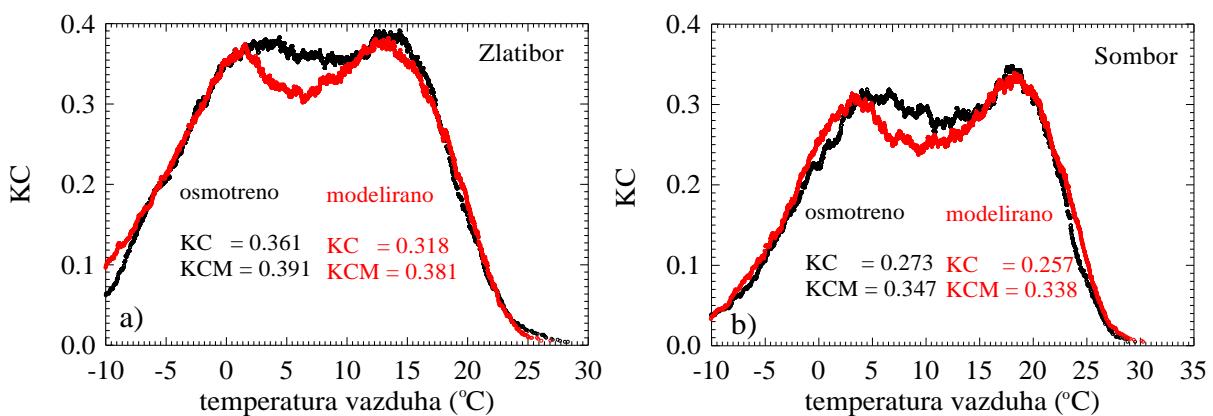
Pod kompleksnošću modela životne sredine smatraćemo kompleksnost vremenskih serija određenih promenljivih koje dati model generiše. Na ovaj način može direktno da se poredi dinamičko ponašanje osmotrenih podataka sa vrednostima dobijenim pomoću modela. Pri tome se ne misli na to da se međusobno porede konkretnе vrednosti nego da se razmatra struktura vremenskih serija i njihove statističke osobine (Boschetti, 2008). Takođe, u slučaju kada postoji više modela koji proučavaju iste procese ili grupe procesa, moguće je utvrditi koji od modela daje vremenske serije čija distribucija najviše odgovara stvarnoj. Model čija je kompleksnost manja od stvarne ne može u potpunosti da reprodukuje strukturu koja je sadržana u osmotrenim podacima. Sa druge strane, u želji da se napravi što realističniji model, neprestano se u modele uključuje sve veći broj parametara i jednačina koje opisuju procese u životnoj sredini. Na taj način može da se dobije model čija je kompleksnost veća od one koja odgovara osmotrenoj vremenskoj seriji, što takođe nije dobro. Potreban je toliki nivo kompleksnosti koji se slaže sa stvarnošću koju opažamo i merimo, kako bi predviđanja budućih stanja, koja daje model, bila tačna. U narednom potpoglavlju disertacije fokus će biti stavljena na kompleksnost klimatskih modela i njihovu validnost.

6.2 Procene kompleksnosti klimatskih modela

Statistička kompleksnost predstavlja mjeru nasumičnosti koja se dobija na osnovu verovatnoće pojave pojedinačnih vrednosti u vremenskoj seriji (Šenonova entropija). Dinamička kompleksnost je mera nasumičnosti u redosledu pojave pojedinačnih vrednosti u vremenskoj seriji (Kolmogorovljeva kompleksnost). Kompleksnost, opšte gledano, u sebi sadrži stepen nasumičnosti sa jedne strane i odstupanje sistema od ravnoteže, sa druge strane (Feldman and Crutchfield, 1998). S obzirom da je teško govoriti o ravnotežnom stanju meteoroloških elemenata u atmosferi, kao otvorenom fizičkom sistemu, u naučnoj literaturi se pretežno koristi termin kompleksnost a zapravo se odnosi samo na stepen nasumičnosti. Veća kompleksnost ukazuje na težu prognozljivost budućih stanja. Do sada su u ovoj disertaciji, korektnosti radi, opisane informacione mere striktno ukazivale na stepen nasumičnosti vremenskih serija. Nadalje, pri analizi vremenskih serija klimatskih modela, korišćene su kao mere nivoa kompleksnosti.

Kao najbliži koncept ravnotežnog stanja atmosfere na određenom lokalitetu uvodi se pojam klime - prosečnog stanja dobijenog kao srednja vrednost dugogodišnjeg niza podataka. Standardni period za usrednjavanje je 30 godina. Kada se rade istraživanja o klimatskim promenama najčešće se kao referentni period uzima vremenski interval 1961-1990. Postavlja se pitanje, ako bi se uzeo neki drugi ili neki duži vremenski period, da li bi se dobile iste srednje vrednosti? Lorenc je, gledano sa matematičkog aspekta, prepostavio da postoje tranzitivni i netranzitivni sistemi. Ukoliko u određenom periodu vremena postoji samo jedan skup srednjih vrednosti koji odgovara sistemu jednačina koje opisuju dati sistem, onda je takav sistem tranzitivan i srednje vrednosti predstavljaju klimu. U suprotnom, moguće je da dva ili više skupova srednjih vrednosti odgovaraju sistemu jednačina, tada različiti skupovi srednjih vrednosti stvaraju nekoliko različitih, fizički mogućih klima. Izbor jedne određene klime datog fizičkog sistema tada može da bude stvar slučajnosti (Lorenz, 1970). Takođe, Lorenc je okarakterisao i treći tip sistema i nazvao ga skoro tranzitivan. Kada se posmatra na srednjoj vremenskoj skali, dva skupa rešenja sistema, dobijena za različite periode iste dužine, mogu da imaju različite srednje vrednosti. Međutim, ako je vremenski razmer dovoljno dugačak može da se desi da rešenja imaju zapravo iste srednje vrednosti. Dakle, jedan skup rešenja ima različite srednje vrednosti u zavisnosti od dužine perioda za koji se usrednjavanje vrši. Iz tog razloga sistem nazivamo skoro tranzitivan (Lorenz, 1976). Sistem može da ispolji ovakvo ponašanje promenom vrednosti određenih parametara. Lorenc je smatrao da ovaj treći tip sistema najviše odgovara realnom stanju u atmosferi.

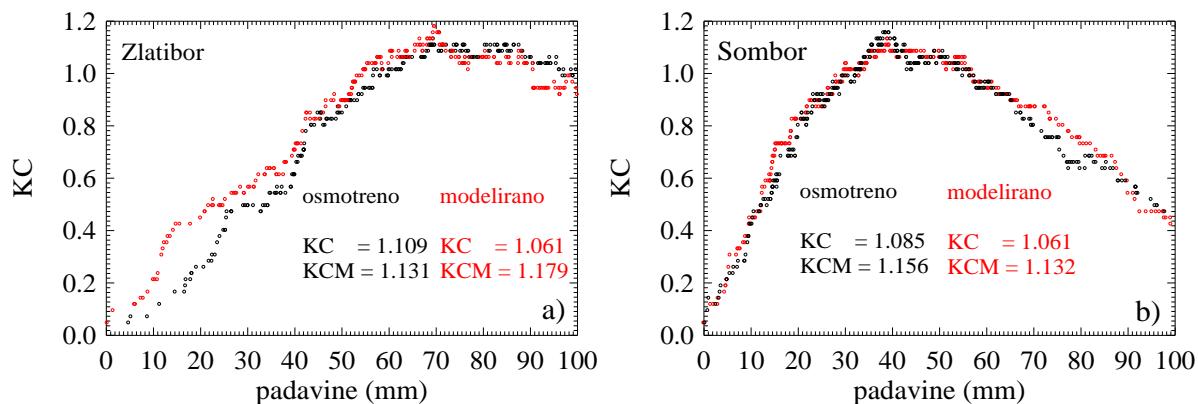
Da bi se govorilo o klimatskim promenama potrebno je prvo definisati način na koji se računaju klimatske vrednosti, precizirati referentni period u odnosu na koji se posmatraju promene i odrediti veličinu promena. Veoma bitna stvar jeste provera validnosti klimatskog modela pomoću kojeg se rade predviđanja. Važno je ispitati da li kompleksnost klimatskog modela odgovara kompleksnosti vremenskih serija dobijenih merenjem i treba utvrditi da li je model kompetentan da generiše pravilnu distribuciju vrednosti u vremenskoj seriji. Ovakav način provere pouzdanosti klimatskog modela nije posebno zastavljen u naučnoj zajednici i potrebno ga je istaći širem auditorijumu. U potpoglavlju 5.4. opisana je klima Srbije u referentnom periodu 1961-1990., definisana prema Kepenovoj klasifikaciji. Klimatske simulacije za Srbiju i predviđanje budućeg stanja rađeno je pomoću EBU-POM (Eta Belgrade University – Princeton Ocean Model) regionalnog klimatskog modela (Djurdjević and Rajković, 2012). Detaljniji opis modela može da se nađe u navedenoj referenci. Ovde je od interesa kompleksnost modela, tačnije kompleksnost vremenskih serija temperature vazduha i padavina koje daje model, s obzirom da su to dva najbitnija meteorološka elementa na osnovu kojih se definiše klima. Korišćeni su osmotreni i modelirani podaci za referenti period 1961-1990. Na slici 6.1 prikazan je spektar Kolmogorovljeve kompleksnosti zajedno sa vrednostima srednje (KC) i maksimalne Kolmogorovljeve kompleksnosti (KCM) za vremenske serije srednje dnevne temperature vazduha, dobijene osmatranjima i modeliranjem, za dve stanice u Srbiji, Zlatibor (1028 m) i Sombor (m), smeštene u različitim delovima zemlje, na različitim nadmorskim visinama i u različitim klimatskim tipovima.



Slika 6.1 Spektar Kolmogorovljeve kompleksnosti za vremenske serije srednje dnevne temperature vazduha, dobijene osmatranjem i modeliranjem, za dve stanice u Srbiji: Zlatibor (a) i Sombor (b).

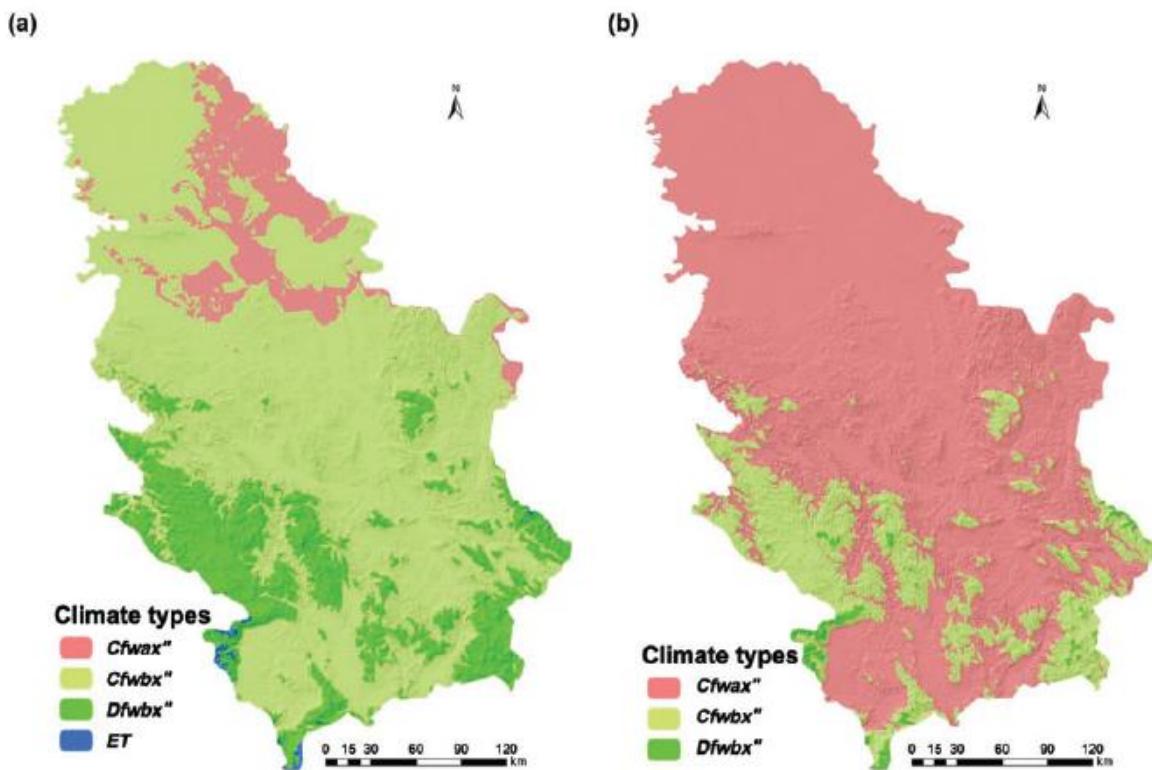
Upoređivanjem vrednosti mera kompleksnosti zasnovanih na Kolmogorovljevoj kompleksnosti za osmotrene i modelirane vremenske serije, dobija se dobro slaganje u slučaju

srednjih dnevnih temperatura vazduha. Kada se ista analiza sprovede na vremenske serije mesečne količine padavina takođe se uočava dobro slaganje kompleksnosti za osmotrene i modelirane nizove podataka (slika 6.2). Izvodi se zaključak da regionalni klimatski model EBU-POM ima zadovoljavajući nivo kompleksnosti i da je kompetentan za proučavanje klimatskih promena u Srbiji.



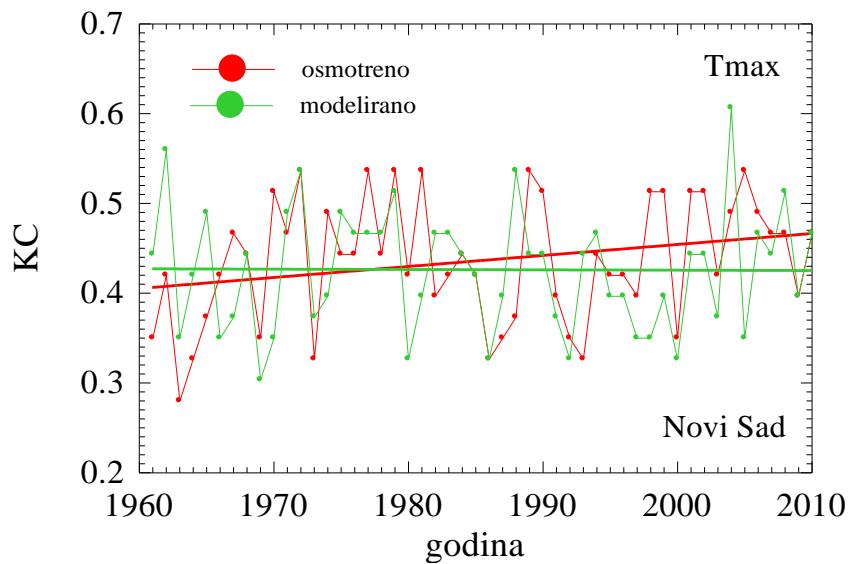
Slika 6.2 Spektar Kolmogorovljeve kompleksnosti za vremenske serije mesečne količine padavina, dobijene osmatranjem i modeliranjem, za dve stanice u Srbiji: Zlatibor (a) i Sombor (b).

Na osnovu klimatskih simulacija vršenih pomoću EBU-POM modela, prema A1B scenariju klimatskih promena, dobijaju se rezultati koji ukazuju na izvesnu promenu klimatskih zona u Srbiji tokom 21. veka (slika 6.3). U referentnom periodu 1961-1990. dominantan klimatski tip je *Cfbx*" koji prekriva 81.0% teritorije Srbije, pružajući se od severa ka jugu. Drugi po rasprostranjenosti je *Dfwax*" klimatski tip (18.2%) u jugo-zapadnim i jugo-istočnim krajevima. Alpski tip klime *ET* je zastavljen po južnim planinskim oblastima sa 0.2%. Na kraju, ostrva *Cfwax*" klimatskog tipa se nalaze u istočnim delovima zemlje (0.6%) (slika 5.23). Poredeći slike 5.23 i 6.3a uočava se da tokom perioda 2001-2030. nema značajnijih promena u zastupljenosti klimatskih tipova *Dfwax*"(18.2%) i *ET* (0.3%) dok je izraženo povećanje *Cfwax*" klimatskog tipa (10.4%) naročito u oblasti Vojvodine, u severnim delovima Srbije, gde je intenzivna poljoprivredna proizvodnja. Slika 6.3b pokazuje očekivane promene klimatskih zona u periodu 2071-2100. Predviđanja ukazuju na to da će planinski (alpski) tip klime *ET* u potpunosti nestati a da će se *Dfwax*" klimatski tip redukovati na svega 1.1% teritorije. Uočava se izraženo širenje *Cfwax*" klimatskog tipa (81.5%) koji će zameniti prethodno dominantni tip *Cfbx*" (17.4%) (Mihailović et al., 2015e). Ovakve promene klime iziskuju adaptaciju biljnog i životinjskog sveta na nove uslove u životnoj sredini, u budućnosti.



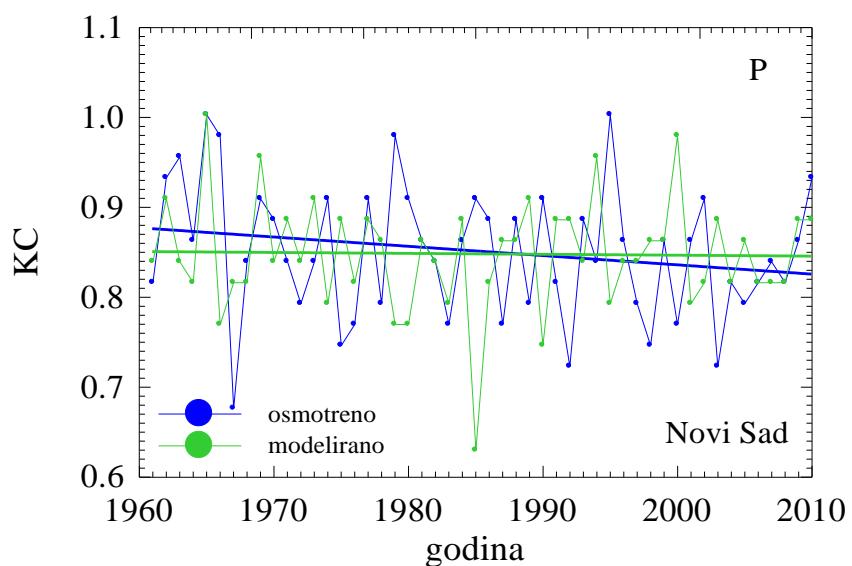
Slika 6.3 Kepenove klimatske zone u Srbiji u periodu: a) 2001-2030. i b) 2071-2100. prema klimatskim simulacijama EBU-POM modela sa A1B scenarijom klimatskih promena.

Gledano dugoročno, za referentni period od 30. godina, EBU-POM klimatski model generiše vremenske serije temperature i padavina čija kompleksnost odgovara osmatranjima. Međutim, efekti klimatskih promena se odražavaju na svakodnevne vremenske prilike, gledano na sezonskom i godišnjem nivou. Zato je potrebno ispitati kompleksnost godišnjih vremenskih serija dobijenih pomoću modela i uporediti je sa vrednostima koje se odnose na osmatranja. U tu svrhu je kao mera korišćena srednja Kolmogorovljeva kompleksnost (KC). Na slici 6.4 su poređene vrednosti kompleksnosti vremenskih serija maksimalne temperature vazduha za Novi Sad u periodu 1961-2010. dobijene merenjima i pomoću klimatskog modela EBU-POM, uz upotrebu A1B scenarija klimatskih promena. Rezultati ne pokazuju dobro slaganje. Vrednosti kompleksnosti modeliranih serija se u retkim slučajevima poklapaju ili su bliske sa osmatranjima, dok se u većini slučajeva razlikuju. To znači da klimatski model nije u stanju da generiše vremensku seriju čija distribucija vrednosti odgovara distribuciji merenja na godišnjem nivou. Druga bitna stvar koju je potrebno naglasiti jeste to da osmatranja pokazuju trend porasta kompleksnosti godišnjih vremenskih serija maksimalne temperature dok kod rezultata modela taj trend ne postoji. U klimatski model nije uključena informacija o promeni kompleksnosti na godišnjem nivou.



Slika 6.4 Godišnje vrednosti srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti (KC) maksimalne temperature za Novi Sad u periodu 1961-2010., za osmotrene i modelirane vremenske serije.

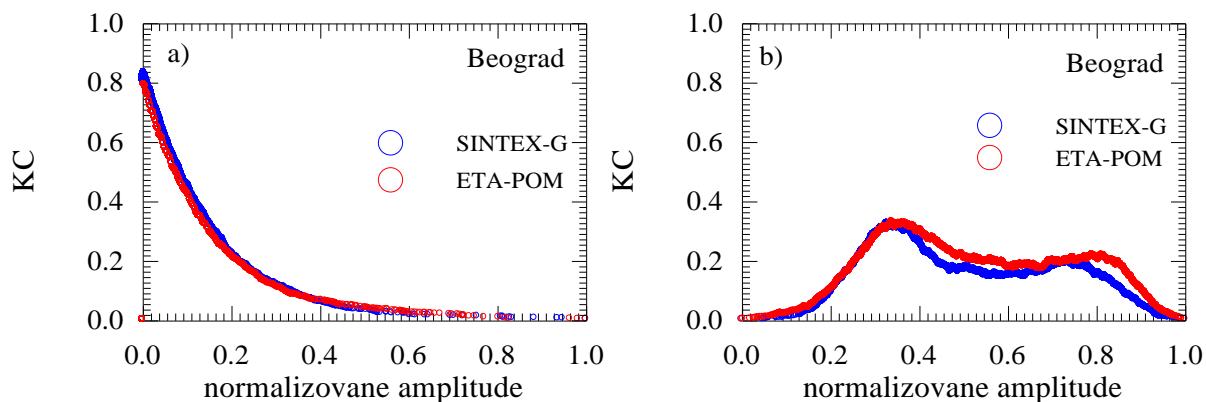
Slika 6.5 је добијена на исти начин као и слика 6.4 с тим да је на њој приказана комплексност годишњих временских серија количине падавина за Нови Сад, у периоду 1961-2010. Ни у случају падавина комплексност моделираних серија није у складу са комплексношћу осмотрених серија. То значи да годишња дистрибуција падавина коју предвиђа климатски модел не одговара стварној дистрибуцији. Такође, осматрана падавина указују на тренд опадања комплексности годишњих временских серија док у случају серија добијених помоћу модела не постоји никакав тренд.



Slika 6.5 Godišnje vrednosti srednje Kolmogorovljeve kompleksности (KC) количине падавина за Нови Сад у периоду 1961-2010., за осмотрене и моделиране временске серије.

Ovi rezultati ukazuju na neke nedostatke klimatskih modela i određuju jedan od pravaca u kojem bi trebalo da se radi na njihovom poboljšanju. Problem ne leži u samim vrednostima koje se dobijaju pomoću modela, jer njihova statistika odgovara stvarnom stanju, već u njihovoј distribuciji. Odnosno, dinamičko ponašanje vremenskih serija koje generiše klimatski model ne odgovara osmotrenim vremenskim serijama. Iz tog razloga bi bilo potrebno raditi kalibraciju modela u skladu sa odgovarajućim nivoom kompleksnosti.

Kada se radi predviđanje klime u budućnosti uobičajen postupak je da se za simulacije prvo koriste globalni klimatski modeli, koji rade na grubljoj rezoluciji (npr. prostorni korak od 50 km). To su obično spregnuti modeli opšte cirkulacije atmosfere i okeana koji opisuju procese na planetarnom nivou. Kao takvi, oni ne mogu da opišu procese podmrežnih razmara, naročito u površinskom sloju. Ovakvi procesi su pretežno uslovljeni lokalnom topografijom i oblačnošću. Iz tog razloga se koriste regionalni klimatski modeli pomoću kojih se vrše simulacije klime za manju oblast prostora i na finijoj rezoluciji (npr. prostorni korak od 15 km). Oni upotrebom vremenskih serija koje generiše globalni model preračunavaju vrednosti meteoroloških promenljivih uključujući više detalja vezanih za datu oblast kako bi se preciznije predvidela klima u budućem periodu. Ovaj postupak se naziva regionalizacija (*eng. downscaling*). Kako bismo bili sigurni u konzistentnost vremenskih serija generisanih pomoću globalnog i regionalnog klimatskog modela ispitana je njihova kompleksnost. Koristeći dnevne vrednosti temperature vazduha i padavina računata je srednja (KC), maksimalna (KCM) i spektar Kolmogorovljeve kompleksnosti za niz od $N=10\ 800$ podataka za Beograd, dobijenih pomoću SINTEX-G i EBU-POM modela. SINTEX-G predstavlja spregnuti model opšte cirkulacije atmosfere i okeana (Gualdi et al., 2003). Rezultati su prikazani na slici 6.6 i pokazuju dobro slaganje.



Slika 6.6 Spektar Kolmogorovljeve kompleksnosti za vremenske serije padavina (a) i temperature vazduha (b) za Beograd.

Što se tiče vremenskih serija padavina, globalni i regionalni model pokazuju potpuno poklapanje spektara Kolmogorovljeve kompleksnosti. To znači da oba modela generišu vrednosti padavina sa istom distribucijom. U slučaju temperature vazduha, oba modela imaju isti oblik spektra Kolmogorovljeve kompleksnosti, s tim da EBU-POM u određenom domenu amplituda ima nešto veću kompleksnost nego SINTEX-G (Mihailović et al., 2014b). Vrednosti srednje i maksimalne Kolmogorovljeve kompleksnosti su prikazani u tabeli 6.1.

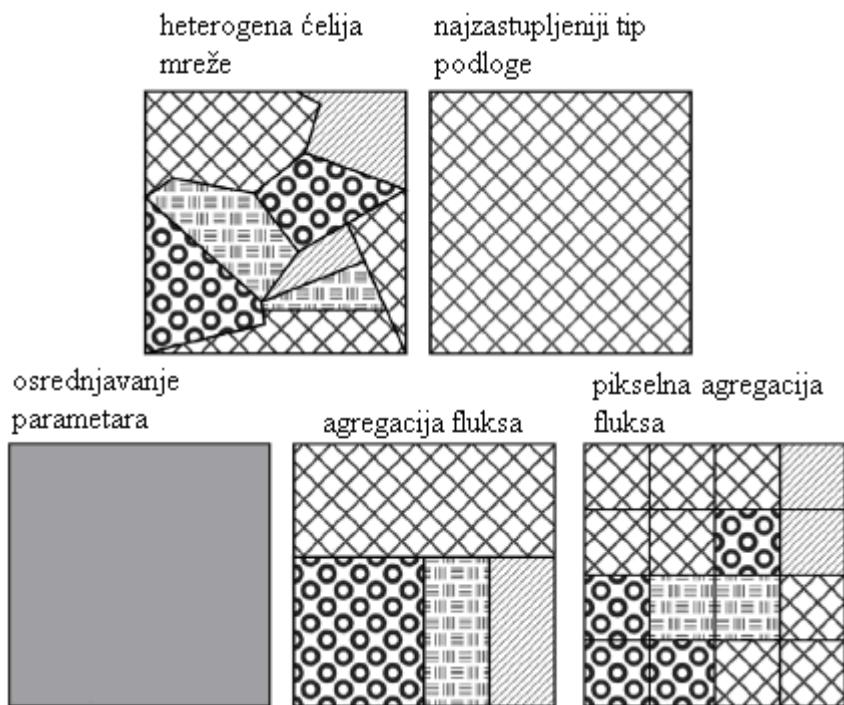
		model	
promenljiva	mera	SINTEX-G	ETA-POM
temperatura vazduha	KC	0.176	0.207
	KCM	0.326	0.331
padavine	KC	0.705	0.671
	KCM	0.834	0.793

Tabela 6.1 Srednja (KC) i maksimalna Kolmogorovljeva kompleksnost (KCM) vremenskih serija temperature vazduha i padavina za Beograd, dobijenih pomoću globalnog i regionalnog klimatskog modela.

Upoređujući KC za vremenske serije temperature vazduha primećujemo da EBU-POM ima nešto veću vrednost (0.207) u odnosu na SINTEX-G (0.176) dok su vrednosti KCM približno jednake (0.331 i 0.326). Treba istaći ovde veoma niske vrednosti kompleksnosti temperature vazduha za oba modela. Kada se poređi kompleksnost vremenskih serija padavina obe mere su veće u slučaju globalnog nego regionalnog modela, pri čemu se ne razlikuju značajno, što ukazuje na usklađenost modela po pitanju nivoa kompleksnosti.

Postoje tri osnovne grupe procesa koje treba uzeti u razmatranje kada se pravi klimatski model a to su: zračenje (prenos zračenja kroz atmosferu, refleksija i apsorpcija), dinamički procesi (horizontalna i vertikalna razmena energije putem advekcije, konvekcije i difuzije) i površinski procesi (razmena energije između podloge i atmosfere, pri čemu površinu čine zemljište, okeani i led, kao i efekti albeda). Ukoliko se nelinearnost u ovim procesima ne razmatra pravilno tada pri pravljenju modela njegova kompleksnost i pouzdanost neće biti na odgovarajućem nivou. Pri parametrizaciji podmrežnih razmera mogu da se javi sistematske greške u vrednostima meteoroloških elemenata, naročito prilikom regionalizacije. Računanje turbulentnog transporta topote, vlage ili količine kretanja, sa heterogene površine u atmosferu, predstavlja jedan od izazova u klimatskim modelima. Postoji nekoliko pristupa u parametrizaciji ovih flukseva (slika 6.7): 1) Posmatramo heterogenu celiju mreže kao da je homogena sa tipom podloge koja je najviše zastupljena i računamo fluks za nju. Računski je brz metod, ali u nekim situacijama gde je izražena heterogenost uopšte nije adekvatan. 2)

Osrednjavanje parametara koji se odnose na zračenje, aerodinamičke, fiziološke i morfološke karakteristike različitih tipova podloge koji čine heterogenu ćeliju mreže, kako bi se dobila jedna reprezentativna vrednost koja uključuje kombinovane nelinearne efekte svakog tipa ponaosob. Ponekad se ovim metodom dobijaju lošiji rezultati nego u prvom slučaju. 3) Agregacija fluksa je metod osrednjavanja fluksa sa svakog tipa podloge u heterogenoj ćeliji mreže. 4) Pikselna agregacija fluksa je metod mozaičnog tretiranja heterogene ćelije, iziskuje dosta računskog vremena ali je pouzdan. 5) Kombinovani metod agregacije parametara i agregacije fluksa (Mihailović et al., 2015f).



Slika 6.7 Heterogena ćelija mreže i ilustrativan primer nekoliko različitih načina parametrizacije površinskog fluksa u klimatskim modelima.

Pri upotrebi metoda agregacije fluksa ili kombinovanog metoda agregacije parametara i fluksa može da se javi Šmitov paradoks (*Schmidt*). Ovaj paradoks opisuje situaciju u kojoj sa malog dela heterogene ćelije mreže postoji izražen turbulentni fluks osetne topline na gore, koji dominira u srednjoj vrednosti fluksa za celu heterogenu ćeliju, pri čemu srednji gradijent potencijalne temperature ukazuje na stabilnu stratifikaciju u sloju između površine zemljišta i najnižeg nivoa u atmosferi (Mihailović and Kapor, 2008). Dalje ovo uzrokuje pojavu transporta topline nasuprot stratifikaciji, što daje fizički nerealnu sliku. Šmitov paradoks zapravo nastaje usled zanemarivanja horizontalne razmene energije između pojedinih tipova

podloge u heterogenoj ćeliji mreže u modelu. Razlog leži u tome što je podmrežnu razmenu energije veoma teško opisati a naročito parametrizovati. Zato je potrebno uvoditi nove matematičke metode. Jedan od pristupa potiče iz teorije dinamičkih sistema, u kojem je horizontalna razmena energije predstavljena matricom parametara sparivanja (Mihailović et al., 2015f). S obzirom da je teško odrediti pojedinačne članove matrice, izведен je dovoljan uslov za asimptotsku stabilnost sistema, koji može da se primeni za svaku matricu sparivanja. Detaljno matematičko izvođenje može da se nađe u navedenoj referenci. Osnovna jednačina kojom se opisuje razmena energije na površini zemljišta jeste logistička (Mimić et al., 2013) i kao takva odnosi se na homogenu ćeliju mreže. Da bi se mogla primeniti za heterogenu ćeliju mreže potrebno je napisati u opštijem obliku, i za svaki tip podloge važi

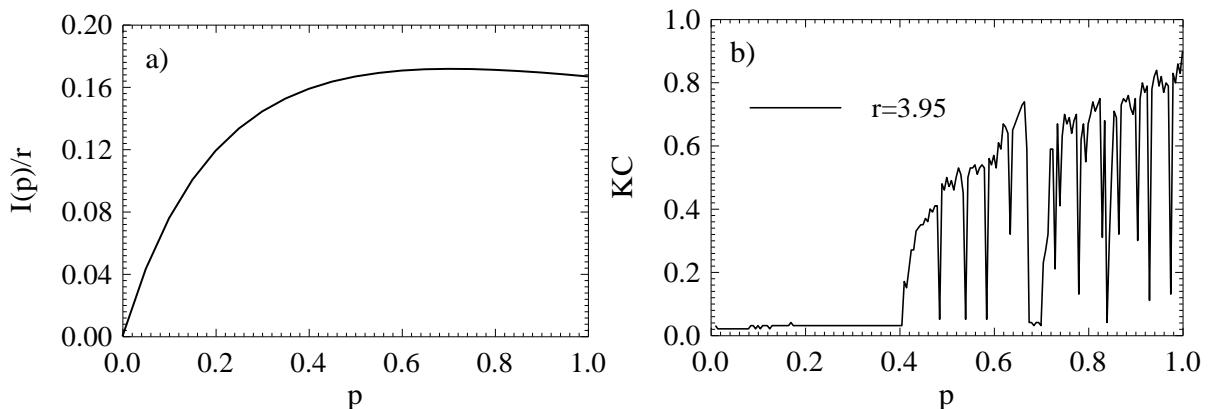
$$\phi_{r,p}(x) = rx^p(1-x^p) \quad (6.1)$$

gde je x bezdimenzionala temperatura, r kontrolni parametar logističke jednačine koji u ovom slučaju pokazuje efekte agregacije, a p predstavlja količinu turbulentne energije koju jedno parče u heterogenoj ćeliji mreže razmeni sa okolinom. Vrednosti p leže u intervalu $p \in [0,1]$.

Ispitujući meru razmene energije kao integral jednačine (6.1)

$$I(p)/r = \frac{p}{(p+1)(2p+1)} \quad (6.2)$$

dobija se da ona raste sa porastom p (slika 6.8a) a takođe raste i srednja Kolmogorovljeva kompleksnost (KC) vremenskih serija dobijenih iteracijom jednačine (6.1) za 10 000 koraka, od kojih je prvih 1 000 odbačeno radi stabilizacije sistema (slika 6.8b).



Slika 6.8 Zavisnost od parametra p razmene energije (a) i srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti (b) jednačine (6.1).

Sada se pomoću matrice sparivanja formira sistem jednačina u zavisnosti od toga koliko različitih tipova podloge postoji u jednoj heterogenoj tački mreže i ispituje se stabilnost rešenja za određene vrednosti parametara. Na ovaj način se dobijaju domeni u kojima postoje rešenja jednačina, koja ne trpe od Šmitovog paradoksa i više odgovaraju fizičkoj realnosti.

7. Zaključak

U ovoj disertaciji je rađena nelinearna dinamička analiza nekih fizičkih procesa u životnoj sredini. U prvom delu je napravljen kritički osvrt na modele životne sredine i način na koji rade, navedeni su neki primeri njihove upotrebe kao i ograničenja u predviđanjima. Zatim je objašnjena matematička teorija o dinamičkim sistemima, kao opštijem aspektu modeliranja. Razmatrani su elementi teorije haosa poput bifurkacionih dijagrama, Ljapunovljevih eksponenata i atraktora, koji nam pomažu pri analizi ponašanja rešenja jednačina kojima se opisuju razni fizički sistemi. Ova metodologija je ispitana na primeru logističke jednačine a potom upotrebljena na konkretan slučaj u kojem je površina zemljišta posmatrana kao dinamički sistem čije je ponašanje analizirano. Pokazano je da se u rešenjima spregnutog sistema jednačina za prognozu temperature u površinskom i u dubljem sloju zemljišta, pri određenoj vrednosti parametara javlja haos. Takođe, utvrđeno je da pri analizi vremenskih serija kao dobar pokazatelj haotičnog ponašanja može da se koristi i Kolmogorovljeva kompleksnost, tačnije njen izračunljiv oblik.

U drugom delu disertacije su uvedene nove informacione mere bazirane na konceptu Kolmogorovljeve kompleksnosti za ispitivanje nelinearnog ponašanja sistema kroz analizu vremenskih serija, i to srednja (KC), maksimalna (KCM), spektar i sveukupna Kolmogorovljeva kompleksnost (OKC). Nove mere su testirane na vremenskim serijama različitih fizičkih parametara životne sredine, ukazujući na određeni stepen nasumičnosti fizičkih procesa na različitim vremenskim i prostornim razmerama i okolnosti pod kojima su procesi više ili manje stohastični.

Ispitivanjem koncentracije radona u pećini u Slovačkoj je pokazano da postoji izražena negativna korelacija između aktivnosti ^{222}Rn i brzine vetra unutar pećine. Rezultati su ukazali na postojanje periodične komponente od 27.5 sedmica (ili približno pola godine) u obe vremenske serije što ističe njihovu sličnu dinamiku na godišnjem nivou. Iz distribucije frekvencija Kolmogorovljeve kompleksnosti koncentracije radona i brzine vetra u pećini uočeno je da vrednosti KC u trodnevnim serijama imaju izraženu nasumičnost. Rezultati su pokazali da OKC nema konstantne vrednosti na mesečnom nivou, što se uočava iz godišnje

distribucije. Najveće vrednosti OKC u slučaju koncentracije ^{222}Rn su primećene u periodu od sredine septembra do sredine oktobra dok su najmanje vrednosti u periodu februar-mart. U slučaju brzine vetra u pećini vrednosti OKC imaju maksimum tokom perioda decembar-mart i ponašaju se suprotno u odnosu na ponašanje radona.

Analiza vremenskih serija protoka reka je pokazala da vrednosti informacionih mera KC, KCM i OKC za svih sedam ispitivanih reka u Bosni i Hercegovini možemo da podelimo u dva intervala, prvi interval odgovara gornjem delu toka (planinski i brdski režim) dok drugi interval odgovara donjem delu toka (ravničarski režim). Visoke vrednosti KC oslikavaju stohastičnost hidroloških procesa, pri čemu je ova stohastičnost više izražena u gornjem nego u donjem delu toka, što je i bilo očekivano. Povećanjem stepena ljudske aktivnosti i uređenjem rečnog korita smanjuje se turbulentnost toka a samim tim i stepen nasumičnosti u vremenskoj seriji. Analizirajući uticaj elemenata hrapavosti podloge na protok fluida pokazano je da upotreba srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti jasnije ističe raslojavanje u fluidu, nego intenzitet turbulencije ili Šenonova entropija. U najnižem sloju toka se javljaju manji vrtlozi koji povećavaju neuređenost. U sloju mešanja vrednosti KC su najmanje i približno konstantne, što ukazuje na prisustvo većih i koherentno organizovanih vrtloga koji smanjuju neuređenost toka. Iznad sloja mešanja KC ponovo raste, s obzirom da se ka slobodnoj površini put mešanja smanjuje i ponovo se formiraju manji vrtlozi.

Analizom prostorne distribucije padavina u Bosni i Hercegovini pomoću srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti izdvojene su pojedinačne oblasti u kojima je stohastičnost vremenskih serija padavina veća (kao na primer po obodu Panonske nizije ili uz tok reke Drine) ili manja (u oblasti visokih planina na jugo-istoku ili u brdskim krajevima u centralnoj Bosni). Međutim, sveukupna Kolmogorovljeva kompleksnost mnogo jasnije pokazuje uticaj različitih geografskih faktora na stepen nasumičnosti vremenskih serija mesečne sume padavina i može da se koristi kao indeks kompleksnosti padavina (*PCI*). *PCI* pokazuje kvantitativno da razlika u stepenu nasumičnosti u prostornoj raspodeli padavina u Bosni i Hercegovini potiče od različitog uticaja: 1) Jadranskog mora, 2) Dinarskih planina i 3) Panonske nizije.

Na primeru vremenskih serija podataka o dozi UV-B zračenja na teritoriji Vojvodine, primenom srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti, ustanovljeno je da stepen nasumičnosti u serijama zavisi od prozračnosti atmosfere. Zagađenost, koja se najčešćim delom javlja kao posledica ljudske aktivnosti, pored intenziteta zračenja smanjuje i nivo nasumičnosti.

Pokazano je da postoji promena u stepenu nasumičnosti godišnjih vremenskih serija maksimalne temperaturе vazduha (porast) i količine padavina (opadanje) u Srbiji, u drugoj

polovini 20. veka. To znači da se menja distribucija ovih meteoroloških elemenata na godišnjem nivou. Uzrok tome treba tražiti u promenama opšte cirkulacije atmosfere, koje su posledica globalnog zagrevanja. Trendovi su izraženiji upotreboom srednje Kolmogorovljeve kompleksnosti nego entropije uzorka, i u slučaju maksimalne temperature vazduha ovi trendovi su statistički značajni dok za vremenske serije količine padavina nisu. Takođe, postoji slaba korelacija u vrednostima informacionih mera među stanicama u Srbiji, što znači da su promene pretežno lokalnog karaktera. Ove činjenice treba imati u vidu pri proučavanju vremena i klime u budućnosti.

Ispitivanje vremenskih serija koje generiše regionalni klimatski model je pokazalo da, statistički gledano, kompleksnost podataka za dugogodišnji vremenski period odgovara osmatranjima. Utvrđeno je da informacione mere mogu da se koriste pri upoređivanju vremenskih serija koje stvaraju globalni i regionalni klimatski modeli, kao jedan od pokazatelja usklađenosti rezultata ovih modela. Međutim, distribucija vrednosti u godišnjim vremenskim serijama klimatskih modela se ne slaže sa distribucijom podataka dobijenih osmatranjima. S obzirom da rezultate klimatskih modela koriste neki modeli za procenu prinosa biljnih kultura u budućnosti, veoma je bitno da nivo kompleksnosti vremenskih serija predviđanja odgovara stvarnosti. Iz tog razloga bi trebalo raditi kalibraciju klimatskih modela u skladu sa odgovarajućim nivoom kompleksnosti, što je potencijalno jedan od načina za poboljšanje njihovog rada.

Literatura

- Alligood K.T., Sauer T.D., Yorke J.A., Chaos – an introduction to dynamical systems, Springer-Verlag, New York, USA, 1996, pp. 604.
- Bajat B., Blagojević D., Kilibarda M., Luković J., Tošić I., Spatial analysis of the temperature trends in Serbia during the period 1961-2010, *Theoretical and Applied Climatology* **121**, 289-301, 2015.
- Balzter H., Tate N.J., Kaduk J., Harper D., Page S., Morrison R., Muskulus M., Jones P., Multi-Scale Entropy Analysis as a Method for Time-Series Analysis of Climate Data, *Climate* **2015**, *3(1)*, 227-240, 2015.
- Bandt C. and Pompe B., Permutation entropy: a natural complexity measure for time series. *Physical Review Letters* **88**, 174102, 1-4, 2002.
- Barbosa S.M., Zafrir H., Malik U., Piatibratova O., Multi-year to daily Radon variability from continuous monitoring at the Amram tunnel, southern Israel, *Geophysical Journal International* **182(2)**, 829–842, 2010.
- Bhumralkar C.M., Numerical experiments on the computation of ground surface temperature in an atmospheric general circulation model, *Journal of Applied Meteorology* **14**, 1246-1258, 1975.
- Boschetti F., Mapping the complexity of ecological models, *Ecological Complexity* **5(1)**, 37–47, 2008.
- Box G.E.P., Jenkins G.M., Reinsel G.C., Time Series Analysis, Forecasting and Control, 4th ed., John Wiley & Sons Inc., Hoboken, New Jersey, USA, 2008.
- Charney J.G., Fjørtoft R. and von Neumann J., Numerical integration of the barotropic vorticity equation, *Tellus* **2(4)**, 237-254, 1950.
- Djurđević V. and Rajković B., Development of the EBU-POM coupled regional climate model and results from climate change experiments, In: *Advances in Environmental Modeling and Measurements*, Mihailović D.T. i Lalić B (Eds.), Nova Science Publishers Inc., New York, USA, pp. 23–32, 2012.
- Drešković N. and Đug S., Applying the inverse distance weighting and Kriging methods of the spatial interpolation on the mapping the annual precipitation in Bosnia and Herzegovina, *iEMSS - International Congress on Environmental Modelling and Software Managing Resources of a Limited Planet*, 6th Biennial Meeting, Leipzig, Germany, 2012, Seppelt R., Voinov A.A., Lange S., Bankamp D. (eds), <http://www.iemss.org/society/index.php/iemss-2012-proceedings>.

- Eckmann J.P. and Ruelle D., Ergodic theory of chaos and strange attractors, *Reviews of Modern Physics* **57**, 617–656, 1985.
- Edmonds B., What is Complexity? - The Philosophy of Complexity per se with Application to Some Examples in Evolution, In: F. Heylighen, D. Aerts (Eds.) *The Evolution of Complexity*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Netherlands, 1999.
- Elsener J.B. and Tsonis A.A., Complexity and predictability of hourly precipitation, *Journal of Atmospheric Sciences* **50**, 400–405, 1993.
- Evans S.C., Hershey J.E., Saulnier G., Kolmogorov complexity estimation and analysis, Sixth World Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics, July 14-18, Orlando, Florida, USA, 2002.
- Feigenbaum M.J., Quantitative universality for a class of nonlinear transformations, *Journal of Statistical Physics* **19**, 24-52, 1978.
- Feldman D.P. and Crutchfield J.P., Measures of Statistical Complexity: Why? *Physics Letters A* **238**, 244–252, 1998.
- Fernandez-Cortes A., Sanchez-Moral S., Cuevva S., Cañaveras J.C, Abella R., Annual and transient signatures of gas exchange and transport in the Castañar de Ibor cave (Spain), *International Journal of Speleology* **38**(2), 153–162, 2009.
- Gocić M. and Trajković S., Spatio-temporal patterns of precipitation in Serbia, *Theoretical and Applied Climatology* **117**, 419-431, 2014.
- Grassberger P. and Procaccia I., Measuring the strangeness of strange attractors, *Physica D* **9**, 189-208, 1983.
- Grassberger P., Randomness, Information and Complexity, arXiv: 1208.3459 [physics.data-an], 2012.
- Gregorić A., Zidanšek A., Vaupotič J., Dependence of radon levels in Postojna Cave on outside air temperature, *Natural Hazards and Earth System Sciences* **11**, 1523–1528, 2011.
- Grünwald P. and Vitányi P., Shannon Information and Kolmogorov Complexity, arXiv:cs/0410002 [cs.IT], 2004.
- Gualdi S., Navarra A., Guilyardi E., Delecluse P., Assessment of the tropical Indo-Pacific climate in the SINTEX CGCM, *Annals of Geophysics* **46**, 1–26, 2003.
- Hénon M., A two-dimensional mapping with a strange attractor, *Communications in Mathematical Physics* **50**, 69–77, 1976.
- Hilborn R.C., Chaos and nonlinear dynamics, 2nd edition, Oxford University Press, Oxford UK, 2011, pp. 650.

- Hu J., Gao J., Principe J.C., Analysis of biomedical signals by the Lempel-Ziv complexity: the effect of finite data size. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **53**, 2606–2609, 2006.
- Hussain A.K.M.F., Coherent Structures - Reality and Myth, *Physics of Fluids* **26**, 2816-2850, 1983.
- Janjić Z., The WRF NMM core, National Centers for Environmental Prediction, talk modified and presented by Matthew Pyle, 2010.
- Jimenez J., Turbulent flows over rough walls, *Annual Review of Fluid Mechanics* **36**, 173–196, 2004.
- Kaspar F. and Schuster H.G., Easily calculable measure for the complexity of spatiotemporal patterns, *Physical Review A* **36**, 842-848, 1987.
- Kendall M.G., Rank correlation methods, 4th edn, Charles Griffin, London, UK, pp.196, 1975.
- Kolmogorov A.N., Logical basis for information theory and probability theory, *IEEE Transactions on Information Theory* **IT-14**, 662–664, 1968.
- Koltai K., Ország J., Tegzes Z., Bárány-Kevei I., Comprehensive radon concentration measurements in caves located in the area of Mecsek mountains, *Acta Carsologica* **39(3)**, 513–522, 2010.
- Kottek M., Grieser J., Beck C., Rudolf B., Rubel F., World Map of the Köppen–Geiger climate classification updated, *Meteorologische Zeitschrift* **15**, 259–263, 2006.
- Kreinovich V. and Kunin I., Kolmogorov complexity and chaotic phenomena, *International Journal of Engineering Science* **41 (3-5)**, 483-493, 2003.
- Lalić B., Eitzinger J., Mihailović D.T., Thaler S., Jančić M., Climate change impacts on winter wheat yield change – which climatic parameters are crucial in Pannonian lowland? *Journal of Agricultural Science* **151 (06)**, 757-774, 2013.
- Lange H., Rosso O.A., Hauhs M., Ordinal patterns and statistical complexity analysis of daily stream flow time series, *European Physical Journal Special Topics* **222**, 535–552, 2013.
- Lempel A. and Ziv J. On the complexity of finite sequences. *IEEE Transactions on Information Theory* **22**, 75–81, 1976.
- Li M. and Vitanyi P. An Introduction to Kolmogorov Complexity and its Applications, 2nd edn. Springer Verlag, Berlin, 1997, pp. 188.
- Li S., Zhou Q., Wu S., Dai E., Measurement of climate complexity using sample entropy, *International Journal of Climatology* **26**, 2131–2139, 2006.
- Li T.-Y. and Yorke J.A., Period three implies chaos, *American Mathematical Monthly* **82**, 985-992, 1975.

- Lorenz E. N., The predictability of hydrodynamic flow, *Transactions of The New York Academy of Sciences* Ser. II, **25(4)**, 409-432, 1963a.
- Lorenz E. N., Deterministic nonperiodic flow, *Journal of the Atmospheric Sciences* **20**, 130-141, 1963b.
- Lorenz E.N., Climatic change as a mathematical problem, *Journal of Applied Meteorology* **9**, 325-329, 1970.
- Lorenz E.N., Nondeterministic theories of climatic change, *Quaternary Research* **6**, 495-506, 1976.
- Lorenz E.N., Atmospheric predictability experiments with a large numerical model, *Tellus* **34**, 505–513, 1982.
- Lorenz E. N., The growth of errors in prediction, In *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics*, Soc. Italiana di Fisica, Bologna, Italy, 243-265, 1985.
- Luan Q.H., Wang H., Xia D.Z., Complexity analysis of precipitation in changing environment in Chien River Basin, China, *Water Science and Engineering* **4(2)**, 133–142, 2011.
- Malinović S., Mihailović D.T., Kapor D., Mijatović Z., Arsenić I., NEOPLANTA: A Short Description of the First Serbian UV Index Model, *Journal of Applied Meteorology and Climatology* **45**, 1171–1177, 2006.
- Malinović-Miličević S., Radovanović M.M., Stanojević G., Milovanović B., Recent changes in Serbian climate extreme indices from 1961 to 2010, *Theoretical and Applied Climatology* (First online: 05 May 2015).
- Mann H.B., Non-parametric tests against trend, *Econometrica* **13**, 245–259, 1945.
- May R.M., Simple mathematical models with very complicated dynamics, *Nature* **261 (5560)**, 459-467, 1976.
- May W., Climatic change associated with a global „2°C-stabilization“ scenario simulated by the ECHAM5/MPI-OM coupled climate model, *Climate Dynamics* **31**, 283-313, 2008.
- Mesinger F., Dinamička meteorologija: analitička rešenja i numeričke metode, Građevinska knjiga, Beograd, 1976, pp. 224.
- Meybeck M., Green P., Vorosmarty, C., A new typology for mountains and other relief classes: An application to global continental water resources and population distribution, *Mountain Research and Development* **21(1)**, 34–45, 2001.
- Mihailović D.T., Description of a land-air parameterization scheme (LAPS), *Global Planetary Change* **13**, 207–215, 1996.

- Mihailović D.T. and Balaž I., An essay about modeling problems of complex systems in environmental fluid mechanics, *Idojaras* **111**, 209–220, 2007.
- Mihailović D.T. and Kapor D., Modelling of flux exchanges between heterogeneous surface and atmosphere. In: *Fluid mechanics of environmental interfaces*, Gualtieri C. and Mihailović D.T. (Eds.), Taylor & Francis Ltd., London, UK, 71-95, 2008.
- Mihailović D.T. and Mimić G., Kolmogorov complexity and chaotic phenomenon in computing the environmental interface temperature, *Modern Physics Letters B* **26(27)**, 2012.
- Mihailović D.T., Budinčević M., Balaž I., Crvenković S., Arsenić I., Coupled maps serving the exchange processes on the environmental interfaces regarded as complex systems, *Natural Sciences* **4**, 569–580, 2012.
- Mihailović D.T., Malinović-Milićević S., Arsenić I., Drešković N., Bukosa B., Kolmogorov complexity spectrum for use in analysis of UV-B radiation time series, *Modern Physics Letters B* **27(27)**, 1350194 1-18, 2013.
- Mihailović D.T., Nikolić-Đorić E., Drešković N., Mimić G., Complexity analysis of the turbulent environmental fluid flow time series, *Physica A* **395**, 96-104, 2014a.
- Mihailović D.T., Mimić, Arsenić I., Climate predictions: The chaos and complexity in climate models, *Advances in Meteorology* **04/2014**, 878249, 1-14, 2014b.
- Mihailović D.T., Mimić G., Nikolić-Djorić E., Arsenić I., Novel measures based on the Kolmogorov complexity for use in complex system behavior studies and time series analysis, *Open Physics* **13**, 1-14, 2015a.
- Mihailović D.T., Mimić G., Drešković N., Arsenić I., Kolmogorov Complexity Based Information Measures Applied to the Analysis of Different River Flow Regimes, *Entropy* **17(5)**, 2973-2987, 2015b.
- Mihailović D.T., Drešković N., Mimić G., Complexity analysis of spatial distribution of precipitation: an application to Bosnia and Herzegovina, *Atmospheric Science Letters* **16(3)**, 324-330, 2015c.
- Mihailović D.T., Krmar M., Mimić G., Nikolić-Djorić E., Smetanova I., Holy K., Zelinka J., Omelka J., A complexity analysis of ^{222}Rn concentration variations: A case study for Domica cave, Slovakia for the period June 2010-June 2011, *Radiation Physics and Chemistry* **106**, 88-94, 2015d.
- Mihailović D.T., Lalić B., Drešković N., Mimić G., Djurdjević V., Jančić M., Climate change effects on crop yields in Serbia and related shifts of Köppen climate zones under the SRES-A1B and SRES-A2, *International Journal of Climatology* **35(11)**, 3320–3334,

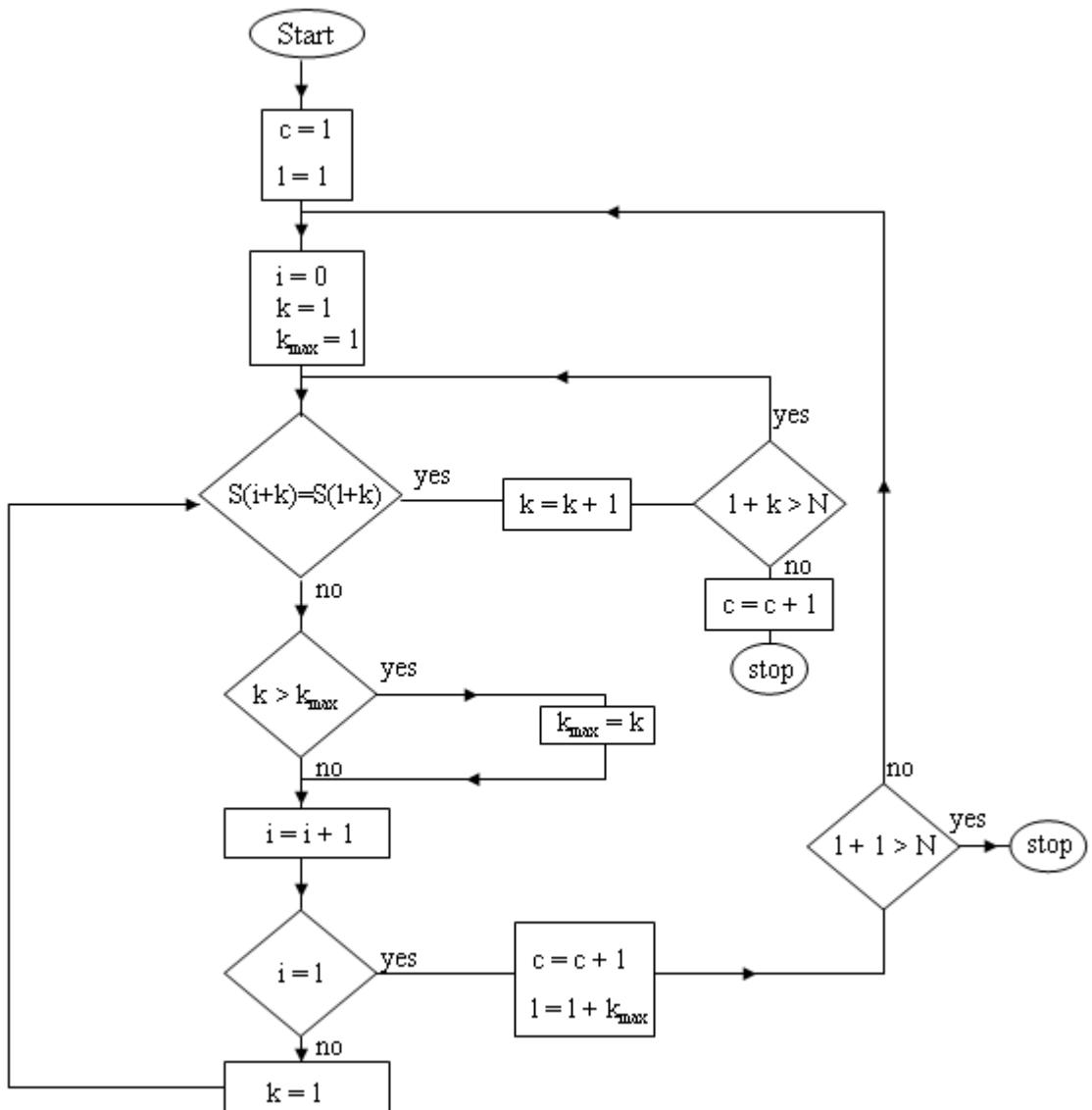
2015e.

- Mihailović D.T., Kostić V., Mimić G., Cvetković Lj., Stability analysis of turbulent heat exchange over the heterogeneous environmental interface in climate models, *Applied Mathematics and Computations* **265**, 79-90, 2015f.
- Millan H., Rodriguez J., Ghanbarian-Alavijeh B., Biondi R., Llerena G., Temporal complexity of daily precipitation records from different atmospheric environments: Chaotic and Levy stable parameters, *Atmospheric Research* **101**, 879–892, 2011.
- Milosavljević M., Klimatologija, Naučna knjiga, Beograd, pp. 261, 1990.
- Mimić G., Mihailović D.T., Budinčević M., Chaos in computing the environmental interface temperature: nonlinear dynamic and complexity analysis of solutions, *Modern Physics Letters B* **27(26)**, 1350190, 2013.
- Mimić G., Mihailović D.T., Kapor D., Complexity analysis of the air temperature and the precipitation time series in Serbia, *Theoretical and Applied Climatology*, 2015. DOI:10.1007/s00704-015-1677-6
- Moran P.A.P., Notes on Continuous Stochastic Phenomena, *Biometrika* **37 (1)**, 17–23, 1950.
- Nezu I. and Sanjou M., Turbulence structure and coherent motion in vegetated canopy open-channel flows, *Journal of Hydro-Environment Research* **2**, 62-90, 2008.
- Oseledec V.I., A multiplicative ergodic theorem: Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Transactions of the Moscow Mathematical Society* **19**, 197-221, 1968.
- Pesin Y.B., Characteristic Lyapunov Exponents and Smooth Ergodic Theory, *Russian Mathematical Surveys* **32 (4)**, 55–114, 1977.
- Pielke R.A. Sr., Mesoscale Meteorological Modelling, Academic Press, San Diego, USA, 2002, pp. 726.
- Pincus S.M., Approximate entropy as a measure of system complexity, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **88**, 2297-2301, 1991.
- Qu M., Wan J., Hao X., Analysis of diurnal air temperature range change in the continental United States, *Weather and Climate Extremes* **4**, 86-95, 2014.
- Radinović Đ., Vreme i klima Jugoslavije, Građevinska knjiga, Beograd, pp. 283, 1979.
- Raupach M.R., Finnigan J.J., Brunet Y., Coherent eddies and turbulence in vegetation canopies: the mixing-layer analogy, *Boundary Layer Meteorology* **78**, 351-382, 1996.
- Rényi A., On measures of entropy and information, *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability Vol. 1*, University of California Press, 547-561, 1961.

- Richman J.S. and Moorman J.R., Physiological time-series analysis using approximate entropy and sample entropy, *American Journal of Physiology - Heart and Circulatory Physiology* **278(6)**, H2039-H2049, 2000.
- Roeckner E., Bäuml G., Bonaventura L., Brokopf R., Esch M., Giorgetta M., Hagemann S., Kirchner I., Kornblueh L., Manzini E., Rhodin A., Schlese U., Schulzweida U. and Tompkins A., The atmospheric general circulation model ECHAM5. Part I: Model description, Max Planck Institute for Meteorology Report **349**, 2003, pp. 127.
- Rosen R., Life itself: A comprehensive inquiry into the nature, origin and fabrication of life, Columbia University Press, New York, USA, 1991, pp. 285.
- Rosso O., Larrondo H., Martin M.T., Plastino A., Generalized statistical complexity measure: a new tool for dynamical systems, *Proceedings of the 2nd International Conference Networks, Jun 9-11, Pamplona, Spain*, 1-6, 2008.
- Ruelle D., Taknes F., On the nature of turbulence, *Communications in Mathematical Physics* **20**, 167-192, 1971.
- Ruelle D., Strange attractors, *The Mathematical Intelligencer* **2**, 126-137, 1980.
- Sarkovskii A.M., Co-existence of cycles of a continuous mapping of a line onto itself, *Ukrainian Mathematical Journal* **16**, 61-71, 1964.
- Serletis A., Shahmoradi A., Serletis D., Effect of noise on estimation of Lyapunov exponents from a time series, *Chaos, Solitons and Fractals* **32**, 883-887, 2007.
- Shannon C.E., A mathematical theory of communication, *Bell System Technical Journal* **27**, 379–423, 1948.
- Sherwood S.C., Roca R., Weckwerth T.M., Andronova N.G., Tropospheric water vapor, convection and climate, *Reviewes of Geophysics* **48**, RG2001, 2010.
- Silva M.E.S., Carvalho L.M.V., da Silva Dias M.A.F., Xavier T. d M.B.S., Complexity and predictability of daily precipitation in a semi-arid region: an application to Cear'a, Brazil, *Nonlinear Processes in Geophysics* **13**, 651–659, 2006.
- Smetanová I., Holy K., Jurčák D., Omelka J., Zelinka J., Radon monitoring in Domica cave, Slovakia – A preliminary results, In: Bella P., Gazik P. (Eds.) *Proceedings of the ISCA 6th Congress*, 2011.
- Sprott J.C., Chaos and time-series analysis, Oxford University Press, Oxford UK, 2003, pp. 507.
- Takens F., Invariants related to dimension and entropy, in Atas do 13. Colóqkio de Brasiliero de Matemática, Rio de Janeiro, 1983.

- Tang L., Lv H., Yang F., Yu L., Complexity testing techniques for time series data: A comprehensive literature review, *Chaos, Solitons and Fractals* **81**, 117-135, 2015.
- Tatli H., Statistical complexity in daily precipitation of NCEP/NCAR reanalysis over the Mediterranean Basin, *International Journal of Climatology* **34**, 155–161, 2014.
- Tošić I., Spatial and temporal variability of winter and summer precipitation over Serbia and Montenegro, *Theoretical and Applied Climatology* **77**, 47–56, 2004.
- Unkašević M. and Tošić I., A statistical analysis of the daily precipitation over Serbia: trends and indices, *Theoretical and Applied Climatology* **106**, 69–78, 2011.
- Unkašević M. and Tošić I., Trends in temperature indices over Serbia: relationships to large-scale circulation patterns, *International Journal of Climatology* **33(15)**, 3152-3161, 2013.
- Vedral V., Dekodiranje stvarnosti, Laguna, Beograd, Srbija, 2014, pp. 296.
- Weijs S.V., van de Giesen N., Parlange M.B., Data compression to define information content of hydrological time series. *Hydrology and Earth System Science* **17**, 3171–3187, 2013.
- Wijesekera H.W. and Dillon T.M., Shannon entropy as an indicator of age for turbulent overturns in the ocean thermoclines, *Journal of Geophysical Research* **102**, 3279–3291, 1997.
- Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L. and Vastano J.A., Determining Lyapunov exponents from a time series, *Physica D* **10**, 1-35, 1985.
- Xu J., Chen Y., Li W., Liu Z., Wei C., Tang J., Understanding the complexity of temperature dynamics in Xinjiang, China, from multitemporal scale and spatial perspectives, *The Scientific World Journal* **Vol. 2013**, Article ID 259248, 2013.
- Xu J., Chen Y., Li W., Liu Z., Tang J., Wei C., Understanding temporal and spatial complexity of precipitation distribution in Xinjiang, China, *Theoretical and Applied Climatology* **123**, 321-333, 2016.
- Zhang X.S., Roy R.J. and Jensen E.W., EEG complexity as a measure of depth of anesthesia for patients, *IEEE Transactions on Biomedical Engineering* **48**, 1424 -1433, 2001.
- Zeng X., Chaos theory and its application in the atmosphere, Atmospheric Science Paper No. 504, Colorado State University, Colorado USA, 1992, pp. 178.
- Zunino L., Soriano M.C., Rosso O.A., Distinguishing chaotic and stochastic dynamics from time series by using a multiscale symbolic approach, *Physical Review E* **86**, 046210, 2012.

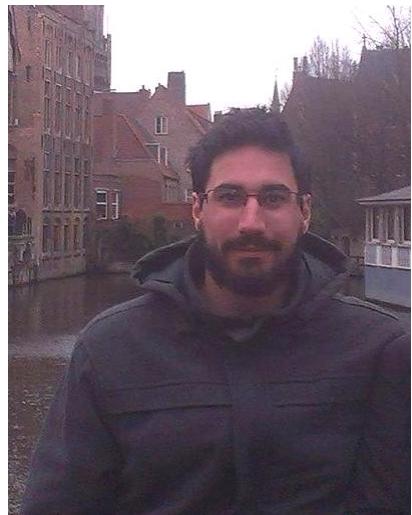
Dodatak A



Slika A1. Shematski prikaz Lempel-Zivovog algoritma

Biografija

Gordan Mimić je rođen 28. marta 1988. godine u Sarajevu, Bosna i Hercegovina. Zaljubljenik je u fiziku još od osnovne škole shvativši da proučava razne procese u prirodi koji su mu plenili pažnju od rane mladosti. Tokom srednje škole tražio je nabolju primenu fizike i našao je u meteorologiji. Nakon što je 2006. godine maturirao u gimnaziji u Istočnom Sarajevu na opštem smeru, sa maturskim radom iz fizike na temu elektromagnetnog zračenja, upisuje fiziku, smer meteorologija, na Prirodno-matematičkom fakultetu, Univerziteta u Novom Sadu. Osnovne studije završava 2011. godine sa prosekom 9.38 i diplomskim radom na temu 'Inicijalizacija WRF-NMM modela podacima iz ASCAT osmatranja vlage u površinskom sloju zemljišta'. Istraživanje je rađeno u Republičkom hidrometeorološkom zavodu Srbije, u Odeljenju za numeričku prognozu vremena. Tu je proveo još godinu dana radeći sa modelima za numeričku prognozu vremena operativno (ETA, WRF-NMM, NMMB). Za to vreme posetio je Evropski centar za srednjoročnu prognozu vremena (Reding, VB) kao učesnik kursa o GRIB alatima i njihovoj primeni u modeliranju. Master studije fizike-meteorologije završava 2012. godine na Departmanu za fiziku, Prirodno-matematičkog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu sa prosečnom ocenom 9.50 i master radom na temu 'Kolmogorovljeva kompleksnost i pojava haosa pri izračunavanju temperature na dodirnim površinama u životnim sredinama'. Na ovaj način se uvodi u teoriju haosa i kompleksnosti. Rad na tome nastavlja upisujući doktorske studije fizike sa užim usmerenjem na teorijsku meteorologiju, na Prirodno-matematičkom fakultetu, Univerziteta u Novom Sadu, gde je položio sve ispite sa prosečnom ocenom 10.00. U međuvremenu je, tokom 2013., pohađao proletnju školu o kompleksnim sistemima u Međunarodnom centru za teorijsku fiziku (Trst, Italija). Koautor je i autor nekoliko naučnih radova objavljenih u raznim međunarodnim časopisima sa SCI liste.



Novi Sad, 21. april 2016.

Gordan Mimić

Ključna dokumentacijska informacija

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije:

TD

Tip zapisa:

TZ

Vrsta rada:

VR

Autor:

AU

Mentori:

MN

Naslov rada:

NR

Jezik publikacije:

JP

Jezik izvoda:

JI

Zemlja publikovanja:

ZP

Uže geografsko područje:

UGP

Godina:

GO

Izdavač:

IZ

Mesto i adresa:

MA

Fizički opis rada:

FO

Naučna oblast:

NO

Naučna disciplina:

ND

Predmetna odrednica/ ključne reči:

PO

UDK

Čuva se:

ČU

Važna napomena:

VN

Izvod:

IZ

Datum prihvatanja teme od NN veća:

DP

Monografska dokumentacija

Tekstualni štampani materijal

Doktorska disertacija

Gordan Mimić

Prof. dr Miodrag Krmar i Prof. dr Dragutin Mihailović

MN

Nelinearna dinamička analiza fizičkih procesa u životnoj sredini

NR

srpski (latinica)

JP

srpski/engleski

JI

Republika Srbija

ZP

Vojvodina

UGP

2016

GO

Autorski reprint

IZ

Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

7 poglavlja/ 113 stranica/ 112 referenci/ 12 tabela/ 66 slika i grafika/ 1 dodatak

Fizika

NO

Meteorologija i modeliranje životne sredine

haos, informacione mere, nasumičnost, entropija,

Kolmogorovljeva kompleksnost, Lempel-Zivov algoritam, vremenske serije

Biblioteka departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu

nema

Ispitivan je spregnut sistem jednačina za prognozu temperature na površini i u dubljem sloju zemljišta. Računati su Ljapunovljevi eksponenti, bifurkacioni dijagram, atraktor i analiziran je domen rešenja. Uvedene su nove informacione mere bazirane na Kolmogorovljevoj kompleksnosti, za kvantifikaciju stepena nasumičnosti u vremenskim serijama,. Nove mere su primenjene na razne serije dobijene merenjem fizičkih faktora životne sredine i pomoću klimatskih modela.

08.09.2015.

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik:

dr Milica Pavkov Hrvojević, red. prof.

član:

dr Miodrag Krmar, red. prof., mentor

član:

dr Dragutin Mihailović, red. prof., mentor

član:

dr Ilija Arsenić, docent

University of Novi Sad
Faculty of science and mathematics

Key words documentation

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type:

DT

Type of record:

TR

Content code:

CC

Author:

AU

Mentors/comentors:

MN

Title:

TI

Language of text:

LT

Language of abstract:

LA

Country of publication:

CP

Locality of publication:

LP

Publication year:

PY

Publisher:

PU

Publication place:

PP

Physical description:

PD

Scientific field:

SF

Scientific discipline:

SD

Subject/ Key words:

SKW

UC

Holding data:

HD

Note:

N

Abstract:

AB

Monograph publication

Textual printed material

Doctoral dissertation

Gordan Mimić

Miodrag Krmar, PhD and Dragutin Mihailović, PhD

Nonlinear dynamical analysis of the physical processes in the environment

Serbian (Latin)

English

Republic of Serbia

Vojvodina

2016

Author's reprint

Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4,
Novi Sad

7 chapters/ 113 pages/ 112 references/ 12 tables/ 66 figures and
graphics/ 1 appendix

Physics

Meteorology and environmental modelling

chaos, information measures, randomness, entropy, Kolmogorov
complexity, Lempel-Ziv algorithm, time series

Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4

none

Coupled system of prognostic equations for the ground surface temperature and the deeper layer temperature was examined. Lyapunov exponents, bifurcation diagrams, attractor and the domain of solutions were analyzed. Novel information measures based on Kolmogorov complexity and used for the quantification of randomness in time series, were presented. Novel measures were tested on various time series obtained by measuring physical factors of the environment or as the climate model outputs.

08.09.2015.

Accepted by the Scientific Board:

ASB

Defended on:

DE

Thesis defend board:

DB

President:

PhD Milica Pavkov Hrvojević, Professor

Member:

PhD Miodrag Krmar, Professor, mentor

Member:

PhD Dragutin Mihailović, Professor, mentor

Member:

PhD Ilija Arsenić, Docent