



UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET
DEPARTMAN ZA FIZIKU



Kolmogorovljeva kompleksnost i pojava haosa pri izračunavanju temperature na dodirnim površinama u životnim sredinama

- master rad -

Komentori:
prof. dr Darko Kapor
prof. dr Dragutin T. Mihailović

Kandidat:
Gordan Mimić

Novi Sad, 2012.

Sadržaj

1. Uvod	3
2. Osvrt na osnovne pojmove	5
2.1. Definicija dodirnih površina u životnim sredinama.....	5
2.2. Autonomni dinamički sistemi	6
3. Jednačina energijskog bilansa za dodirne površine u životnim sredinama.....	10
3.1. Izvođenje diference jednačine.....	13
3.2. Bifurkacioni dijagram	14
3.3. Analiza rešenja jednačine (12)	18
3.3.1. Ljapunovljev eksponent	18
3.3.2. Entropija uzorka	23
4. Kolmogorovljeva kompleksnost	26
5. Zaključak	32
Literatura	33

1. Uvod

Tradicionalna matematička analiza fizičkih sistema prećutno podrazumeva da su svi celi i realni brojevi, bez obzira koliko veliki ili mali, fizički mogući i da su sve matematički moguće putanje ujedno i fizički moguće.^[1] Ovaj pristup funkcioniše dobro u fizici i inženjerstvu ali ne daje dobra objašnjenja haotičnih sistema, koji su, kako je već opšte poznato, veoma važni u proučavanju velikog broja pojava u stvarnom svetu, od meteoroloških pa sve do bioloških sistema. U ovom radu je napravljen osvrt na pojedine principe modeliranja u fizici, biologiji i hemiji, koje zajedno predstavljaju nauke o životnoj sredini, u njihovom najširem okviru. Konkretno, fokus je bio na autonomnim dinamičkim sistemima, koji su često razmatrana tema u savremenim naukama o životnoj sredini.

Često se postavlja pitanje kako zameniti date diferencijalne jednačine kojima se opisuju pojave i procesi u životnoj sredini odgovarajućim diferencnim jednačinama prilikom modeliranja tih pojava. Prema van der Vartu^[2] mnogi modeli koji se bave problemima u životnoj sredini jesu i biće izgrađeni u formi diferencijalnih jednačina ili sistema takvih jednačina. Razvojem računara moguće je naći, barem približno, rešenje tih jednačina, koje su ranije bile nesavladive. Mnoge matematičke tehnike i metode su se koristile kako bi se date diferencijalne jednačine zamenile odgovarajućim diferencnim jednačinama. Uložen je veliki napor kako bi se izabrale odgovarajuće diferencne jednačine čija su rešenja dobra aproksimacija rešenja datih diferencijalnih jednačina. Ovo pitanje povlači sa sobom potrebu za boljim razumevanjem osnovnog problema a to je odnos između matematike klasičnih neprekidnih sredina i stvarnosti koja postoji u naukama životne sredine. Za mnoge pojave u životnim sredinama neprekidnost, koja je osnova svih diferencijalnih jednačina, nije prirodna sama po sebi, već zapravo predstavlja aproksimaciju diskretne situacije. U ovakvim postupcima aproksimiranja, infinitezimalne dužine koraka sadržane u pristupu koji vodi ka diferencijalnim jednačinama ne smatraju se uvek infinitezimalno malim, ali su konačne. U poslednjem koraku postupka, kada se formira diferencijalna jednačina iz diferencijala, ove infinitezimalne dužine koraka teže nuli, što predstavlja prethodno pomenutu aproksimaciju. Na osnovu navedenog deluje prirodnije da se od samog početka napravi model baziran na diskretnoj diferencnoj jednačini, kako bi se zaobišao proces dvostrukog aproksimiranja, jer prvo treba da se formira diferencijalna jednačina koja opisuje neki diskretan slučaj a potom da se traži njoj odgovarajuća diferencna jednačina zbog numeričkog računanja.

Dalje, za neke pojave koje su opisane jednačinama, već su poznati odgovarajući zakoni koji se izvode iz uslova simetričnosti ili zakona održanja u prirodi, dok je s druge strane, u velikom broju ostalih slučajeva potrebno formirati jednačine iz opštih teorijskih ideja ili eksperimentalnih podataka. Na osnovu toga nikada ne možemo da budemo u potpunosti sigurni da li su te jednačine

tačne, ili barem koliko su pouzdane vrednosti parametara u njima. Uvek ostaje pitanje u kojim situacijama i na koji način možemo da budemo sigurni da su jednačine tačne i da su vrednosti parametara u njima dobre. Kolmogorov (Андрéй Николаéвич Колмогóров) je među prvima počeo da razmatra ovaj problem davnih šezdesetih godina dvadesetog veka. On je izneo dva glavna razloga zbog kojih matematički tačno rešenje odgovarajućeg sistema diferencijalnih ili diferencnih jednačina ne mora da bude fizički moguće: (1) postoji razlika u razumevanju pojma nasumičnost u matematici i fizici (odnosno naukama životne sredine) i (2) rešenja datog sistema diferencijalnih jednačina koja vode nekim brojevima mogu da budu matematički tačna ali da nemaju fizički smisao. ^[3]

Na kraju, nepravilnosti i haotične fluktuacije u rešenju diferencijalne jednačine, pri opisivanju autonomnih dinamičkih sistema, mogu da se pojave iz dva razloga: (1) *numeričkog*, pošto pokušavamo da izaberemo odgovarajuću diferencnu jednačinu čije rešenje je dobra aproksimacija rešenja dobijenog diferencijalnom jednačinom i (2) *fizičkog*, zbog pojave haotičnih fluktuacija u posmatranom sistemu jer, na primer, sistem ne može da se odupre velikoj količini energije koja iznenada pristiže.

U ovom radu je razmatrana pojava haosa pri izračunavanju temperature na dodirnim površinama u životnim sredinama. U odeljku 2 su definisane dodirne površine u životnim sredinama kao kompleksni sistemi (odeljak 2.1) i objašnjeni su autonomni dinamički sistemi (odeljak 2.2). Jednačina energijskog bilansa na dodirnim površinama u životnim sredinama je predstavljena u odeljku 3 tako što je (a) dato izvođenje diferencnog oblika ove jednačine, koji se koristi za izračunavanje temperature na dodirnim površinama u životnim sredinama (odeljak 3.1) i (b) analizirana je stabilnost rešenja date jednačine upotrebom bifurkacionog dijagrama (odeljak 3.2) kao i računanjem Ljarunovljevog (Алекса́ндр Миха́йлович Ляпуно́в) eksponenta (odeljak 3.3.1) i entropije uzorka (odeljak 3.3.2). U odeljku 4 je opisana i analizirana Kolmogorovljeva kompleksnost vremenskih nizova dobijenih iz pomenute diferencne jednačine. Zaključak o pojavi haosa u posmatranom dinamičkom sistemu je dat u odeljku 5.

2. Osvrt na osnovne pojmove

2.1. Definicija dodirnih površina u životnim sredinama

U polju nauka o životnoj sredini postoji veliki broj različitih dodirnih površina i to je pravo mesto za primenu novog fundamentalnog pristupa koji vodi boljem razumevanju pojava i procesa u životnim sredinama. Stručno govoreći dodirna površina predstavlja mesto gde se nezavisni sistemi ili delovi jednog sistema dotiču i komuniciraju jedni sa drugima. Dodirne površine mogu da postoje između delova nekog sistema a takođe mogu da postoje i između dela sistema i njegove životne sredine, ukoliko govorimo o dodirnim površinama u životnim sredinama. Razmatraju se kao biofizičke jedinice koje leže između životne sredine i uređenog sistema, pri čemu imaju sledeće funkcije: (1) da spreče štetne signale koji direktno ulaze u sistem i mogu da utiču na pojedinačne delove ili narušavaju njegovu strukturu; (2) da objedine različita uputstva podsistema i uzvrate odgovarajućom operacijom usmerenom ka životnoj sredini i (3) da u potpunosti iskoriste mogućnosti sistema na račun spoljašnjih faktora. Ovakve dodirne površine se nalaze između tela čoveka ili životinja i okolnog vazduha, vodenih vrsta i vode ili vazduha oko njih, prirodnog ili veštačkog pokrivača površine zemljišta (vegetacija, led, sneg, njive, voda ili urbani prekrivač) i atmosfere. ^[4] Termin može da bude definisan i na određeniji način što zavisi od nauke u kojoj se koristi (ekologija, ekološka ekonomija, socijalne nauke, programski jezici i drugo).

Ovde će se dodirna površina životne sredine definisati kao dodirna površina između dve biotičke ili abiotičke životne sredine koje su u relativnom kretanju i razmenjuju energiju, materiju i informacije putem fizičkih, bioloških i hemijskih procesa, koji variraju na prostornoj i vremenskoj skali. ^[5] Ova definicija naširoko pokriva neizbežan multidisciplinarni pristup u naukama o životnoj sredini, a istovremeno uključuje i tradicionalne pristupe u modeliranju životne sredine. Dodirne površine mogu da budu smeštene između različitih životnih sredina i mogu da budu zastupljene od mikro razmera pa sve do planetarnih razmera. Primeri procesa koji se odvijaju kroz dodirne površine su razmena jona u metalima čiji su joni i metalna jezgra u pobuđenim stanjima, unutarćelijska razmena biohemijskih supstanci, razmena vazdušnih masa velikih razmera u urbanim sredinama, periodične migracije između stanovništva, razmena energije između materije u čvrstom stanju i gasa u prirodnim uslovima. Dodirne površine u životnim sredinama su kompleksni sistemi i kao takvi su otvoreni i hijerarhijski organizovani, međusobna delovanja između pojedinačnih delova kroz dodirne površine su nelinearna, dok se u interakcijama sa životnom sredinom koja ih okružuje javlja šum. Ovakvi sistemi su veoma osetljivi na početne uslove, determinističke spoljašnje poremećaje i nasumične fluktuacije koje su uvek prisutne u prirodi. Proučavanje neravnotežnih procesa sa šumovima je osnova za modeliranje dinamike sistema dodirnih površina

u životnim sredinama i za razumevanje mehanizama prostorno-vremenskih obrazaca formacija koje se javljaju u savremenim naukama o životnoj sredini. U poslednje vreme je uloženi veliki napor da bi se razumelo kako se različite fluktuacije javljaju usled uzajamnog dejstva sa šumovima, forsiranja i nelinearne dinamike. U ovom radu fokus je na pojavi haosa pri izračunavanju temperature na dodirnoj površini između zemljišta i atmosfere.

Razumevanje kompleksnosti u okvirima sistema dodirnih površina u životnim sredinama može da počne od takozvanih jednostavnih sistema da bi se shvatila sama pojava koja nas zanima a potom se dodaju detalji koji uvode kompleksnost na različitim nivoima. Uopšteno govoreći, efekte malih poremećaja i šumove, koji su sveprisutni u realnim sistemima, je veoma teško predvideti a oni ponekad mogu da dovedu do ponašanja koje se kosi sa intuicijom. Čak i sistemi sa malim brojem dimenzija pokazuju raznovrsne pojave uzrokovane šumovima, koje manje ili više određuju dinamiku sistema. Objašnjenje pojma *kompleksan sistem* je dao Rozen^[6] u smislu da je to sistem koji ne može prosto da se rastavi na svoje sastavne delove koji međusobno interaguju i za koje je on logičan zbir, zbog velikog broja veza između pojedinačnih delova koje upravljaju dinamikom samog sistema. Autonomni sistemi moraju da budu kompleksni dok drugi tipovi sistema mogu da budu kompleksni a opet, neki sistemi mogu samo da prolaze kroz kompleksne faze. S obzirom da ima široku upotrebu, pojam kompleksnosti s jedne strane podrazumeva mnogo nejasnoća a s druge strane može da se odnosi na sistem koji ne može precizno da se modelira. U suštini, pojam kompleksnosti u sebi sadrži tri nivoa značenja:

- (1) postojanje samoorganizacije i iskrsavanje osobine ili ponašanja koje pojedinačni delovi sistema ne pokazuju;
- (2) sistem nije centralno organizovan ali u smislu raspodele postoje mnoge veze između njegovih delova i
- (3) teško je modelirati kompleksan sistem i predvideti njegovo ponašanje, čak i ako su u velikoj meri poznati njegovi delovi i veze između njih.

2.2. Autonomni dinamički sistemi

Teorija dinamičkih sistema je veoma razvijena i uspešna grana matematike za opisivanje pojava koje su promenljive u vremenu. Široka oblast primenljivosti uključuje kompleksne sisteme na različitim prostornim i vremenskim skalama, od jednostavnih modela grabljivica-plen do komplikovanih putanja za prenos signala u biološkim ćelijama, od njihanja klatna do kompleksnih klimatskih modela u fizici i drugo. Upravo je ova primenljivost obezbedila veliki uticaj i značaj teorije dinamičkih sistema, zbog čega je ona veoma popularna u poslednje vreme.^[7] Osnovno

načelo, pre nego što se apstraktni matematički aparat primeni na pojave iz stvarnog sveta, jeste upotreba odgovarajućeg modela. Počev od konceptualnog nivoa, pri razvijanju takvog modela potrebno je izdvojiti posmatrani dinamički sistem iz njegove životne sredine koja ga okružuje. Sistem je predstavljen fizičkim zakonima i unutrašnjim povratnim spregama iz kojih sledi jednačina vremenske promene sistema. Parametri u ovoj jednačini opisuju trenutno stanje životne sredine koje se menja tokom vremena u autonomnim dinamičkim sistemima.

Autonomnost dinamičkog sistema je sadržana u činjenici da u jednačinama koje opisuju taj sistem vreme ne figuriše eksplicitno, iako su promenljive zavisne od vremena. Pretpostavimo da je X metrički (ili topološki) prostor. Rešenja autonomnih običnih diferencijalnih jednačina

$$\dot{x} = f(x) \tag{1}$$

ili diferencnih jednačina

$$x_{t+1} = f(x_t) \tag{2}$$

su translacione invarijante u vremenu. Ovo znači da pored rešenja φ , takođe i pomerena funkcija $\varphi(t+\cdot)$, pri čemu $t \in T$, predstavlja rešenje jednačine. Dovoljno je da zadovoljava početni uslov, ograničen na početni vremenski trenutak 0, dok T predstavlja vremensku osu, i može da bude u skupu Z ili R , a njen nenegativni deo se definiše kao $T_+ = \{t \in T : t \geq 0\}$.

Na primer, neka je $x_1(t)$ jedinstveno rešenje diferencijalne jednačine (1) napisane u obliku

$\frac{d}{dt}x(t) = f(x(t))$ pri čemu je dat početni uslov $x(0) = x_0$. Tada je i $x_2(t) = x_1(t - t_0)$ rešenje date jednačine pošto zadovoljava početni uslov $x(t_0) = x_0$, jer je $x_2(t_0) = x_1(t_0 - t_0) = x_1(0) = x_0$.

Apstrakcija ovakvog koncepta rešenja vodi do:

Definicija 1 (dinamički sistem). Poludinamički sistem je familija mapa $\varphi_t : X \rightarrow X, t \in T_+$ koja zadovoljava:

- (i) $\varphi_0 = \text{id}_X$ (uslov početne vrednosti),
- (ii) $\varphi_{t+s} = \varphi_t \varphi_s$ za svako $s, t \in T_+$ (osobina polugrupe) i
- (iii) mapiranje $(t, x) \rightarrow \varphi_t(x)$ je neprekidno.

U slučaju da su zadovoljeni gornji uslovi a da se poluosa T_+ zameni sa T tada se govori o dinamičkom sistemu, za neprekidan sistem je $T=R$ dok je za diskretan sistem $T=Z$. Često se koristi pogodna notacija $\varphi_t \varphi_s = \varphi_t \circ \varphi_s$ premda se ne uvodi pretpostavka da je φ_t linearno. Takođe, povremeno se zapisuje $\varphi(t, x) = \varphi_t x$. Za dinamičke sisteme mapiranje $\varphi_t : X \rightarrow X, t \in T$ je homeomorfizam sa neprekidnom inverznom funkcijom $\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}$.

Primer 1 (vremensko pomeranje). Ako je $X=T$, tada je $\varphi_{s,t=t+s}$ dinamički sistem u T .

Primer 2 (neprekidan dinamički sistem). Neka je $X=R^d$, i pretpostavimo da je mapiranje dato sa $f : R^d \rightarrow R^d$ neprekidno i da sva rešenja autonomne obične diferencijalne jednačine (1) postoje u R^d tada postoje $a, b \geq 0$ koji zadovoljavaju $\|f(x)\| \leq a + b\|x\|$ za svako $x \in R^d$. Ako φ predstavlja opšte (vremenski nezavisno) rešenje jednačine (1), što znači da $\varphi(\cdot, \xi)$ zadovoljava početni uslov $x(0) = \xi$, $\xi \in R^d$, tada je $\varphi : R \times R^d \rightarrow R^d$ neprekidan dinamički sistem na R^d .

Primer 3 (diskretan dinamički sistem). Pretpostavimo da je $f : X \rightarrow X$ neprekidno mapiranje. Iteracije u napred (definisane sa $f^{t+1} = f \circ f^t$, za svako $t \in N_0$) predstavljene kao $\varphi(t, \xi) = f^t(\xi)$, $t \geq 0$ odnosno, svako naredno rešenje jednačine, definišu diskretan poludinamički sistem $\varphi : Z_+ \times X \rightarrow X$. Ukoliko je f homeomorfizam tada iteracije vode diskretnom dinamičkom sistemu $\varphi : Z \times X \rightarrow X$. Treba obratiti pažnju na to da se često sreće napomena kako svaka neautonomna jednačina, bilo diferencijalna $\dot{x} = g(t, x)$ ili diferencna $x_{t+1} = g(t, x_t)$ može da se napiše kao autonomna jednačina ukoliko se t posmatra kao promenljiva iz prostora stanja, iz čega bi sledilo da može da postoji jednačina $\dot{p} = 1$ odnosno $p_{t+1} = p_t + 1$. S tačke gledišta dinamičkog sistema ovakav pristup je beskorisan, a takođe i besmislen ukoliko obratimo pažnju na sledeće:

- (1) navedena jednačina nema ravnotežno stanje,
- (2) niti jedno rešenje nije vezano i
- (3) svi granični skupovi, kao i atraktori, su prazni.

Ova priča vodi do autonomne diferencne jednačine oblika $x_{n+1} = f(x_n)$, $n \in Z^+$ na koju će se posle svesti jednačina energijskog bilansa, koja predstavlja ključnu jednačinu u ovom radu.

Diferencna jednačina oblika

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{3}$$

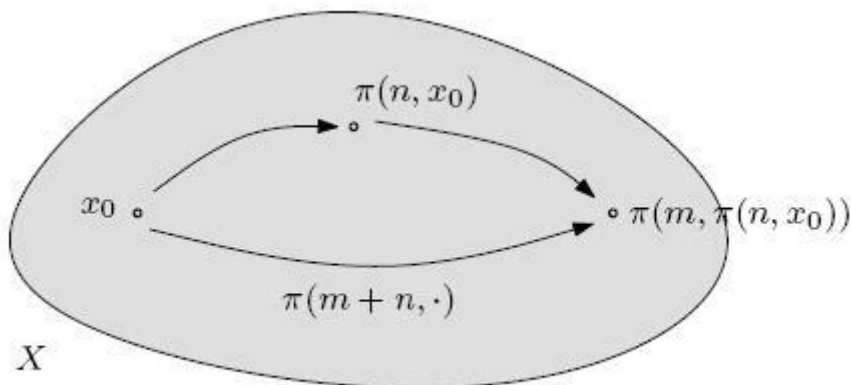
gde je $f : R^d \rightarrow R^d$, predstavlja autonomnu diferencnu jednačinu prvog reda u prostoru stanja R^d .

Ne gubi se opštost ukoliko se ograničimo na diferencnu jednačinu prvog reda, jer se diferencne jednačine višeg reda mogu reformulisati kao (3) koristeći odgovarajuće višedimenzione prostore.^[8]

Uspešna iteracija autonomne diferencne jednačine (3) daje rešenje mapirano sa $\pi : Z^+ \times R^d \rightarrow R^d$ a definisano kao $x_n = \pi(n, x_0) = f^n(x_0) = f \circ f \circ \dots \circ f(x_0)$ n puta, koje zadovoljava početni uslov $\pi(x_0) = x_0$ i osobinu polugrupe

$$x_n = \pi(n, \pi(m, x_0)) = f^n(\pi(m, x_0)) = f^n \circ f^m = f^{n+m}(x_0) = \pi(m+n, x_0) \tag{4}$$

za svako $m, n \in \mathbb{Z}^+, x_0 \in \mathbb{R}^+$, pri čemu \mathbb{Z}^+ predstavlja nenegativne cele brojeve (slika 1).



Slika 1. Osobina polugrupe vremenski diskretnog poludinamičkog sistema $\pi : \mathbb{Z}^+ \times X \rightarrow X$.

Osobina (4) kaže da rešenje mapirano sa π stvara polugrupu slaganjem, obično je to polugrupa a ne grupa pošto mapiranje f ne mora da bude inverzno. Pretpostaviće se da je mapiranje f u diferencnoj jednačini (3) barem neprekidno iz čega onda sledi da su mapiranja data sa $\pi(n, \cdot)$ neprekidna za svako $n \in \mathbb{Z}^+$. Tada rešenje mapirano sa π stvara vremenski diskretan poludinamički sistem na \mathbb{R}^d . Na primer, diferencna jednačina (3) može da predstavlja oblik diferencijalne jednačine $\dot{x} = f(x)$ sa diskretizovanim vremenskim korakom, i može da se reši koristeći šemu unapred

$$x_{n+1} = x_n + \Delta\tau \cdot f(x_n) \quad (5)$$

ili šemu unatrag, uz poznate početne uslove

$$x_{n+1} = x_n + \Delta\tau \cdot f(x_{n+1}). \quad (6)$$

Jednačina (6) može da se izrazi pomoću $f(x_n)$ ukoliko se ima u vidu da je

$f(x_{n+1}) = f(x_n) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_n)\Delta x_n$, pri čemu je $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$. Zamenom u jednačinu (6) se dobija

$$x_{n+1} = x_n + \Delta\tau \cdot f(x_n) + \Delta\tau \frac{\partial f}{\partial x}(x_n)x_{n+1} - \Delta\tau \frac{\partial f}{\partial x}(x_n)x_n. \quad (6a)$$

Ukoliko se sada izvrši grupisanje pojedinih članova jednačina postaje

$$x_{n+1} \left[1 - \Delta\tau \frac{\partial f}{\partial x}(x_n) \right] = x_n \left[1 - \Delta\tau \frac{\partial f}{\partial x}(x_n) \right] + \Delta\tau \cdot f(x_n). \quad (6b)$$

I na kraju, konačni oblik jednačine će da bude

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta\tau}{1 - \Delta\tau \frac{\partial f}{\partial x}(x_n)} f(x_n) \quad (6c)$$

pri čemu $\Delta\tau$ predstavlja vremenski korak a n predstavlja broj iteracija. Konkretno, u ovom radu će biti korišćena vremenska šema unapred u slučaju jednačine energijskog bilansa.

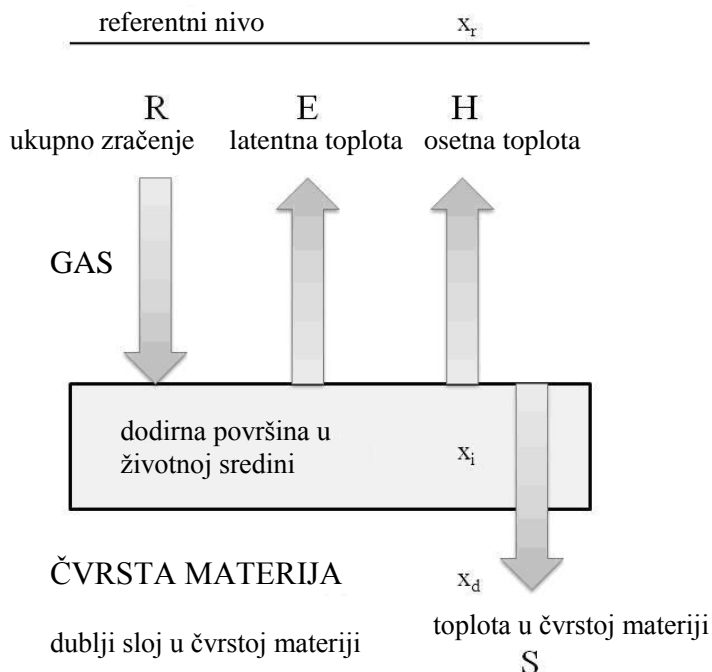
3. Jednačina energijskog bilansa za dodirne površine u životnim sredinama

Iako je uspostavljanje organizacije u svakom kompleksnom sistemu, kao i na dodirnim površinama u životnim sredinama, od presudnog značaja za njegovo funkcionisanje treba imati na umu da postoji i veliki broj drugih uslova koji treba da su zadovoljeni kako bi sistem funkcionisao. Nema sumnja da je jedan od ključnih uslova za funkcionisanje sistema odgovarajući priliv energije. Na primer, u biološkim kompleksnim sistemima ovo može da se ostvari različitim mehanizmima kao što su asimilacija, transpiracija, hemijske transformacije i drugi. U ovom delu rada će biti razmatrana dinamika razmene energije, zasnovana na jednačini energijskog bilansa. Bazirana je na temperaturnim razlikama između površine ispod i fluida kao životne sredine koja okružuje tu površinu. U ovom slučaju su to konkretno vazduh i površina zemljišta, ali može da se koristi pri analiziranju energijskog bilansa na bilo kojim dodirnim površinama u raznim životnim sredinama.

Najveći deo energije koju površina zemljišta kao dodirna površina prima, potiče od Sunca. Sunčevo kratkotalasno zračenje, direktno i difuzno, dospeva na površinu, pri čemu se deo reflektuje dok ostatak biva apsorbovan od strane dodirne površine.^[9] Sa ove površine se istovremeno vrši dugotalasno izračivanje kao i apsorpcija protivzračenja atmosfere (dugotalasno zračenje koje potiče od oblaka i gasova u atmosferi). Količina energije zračenja koja preostaje raspoloživa ovoj dodirnoj površini se naziva neto zračenje, i ono pokreće određene, veoma važne procese. Jednačina energijskog bilansa može da se napiše kao

$$c_i \frac{dT_i}{dt} = R - H - E - S \quad (7)$$

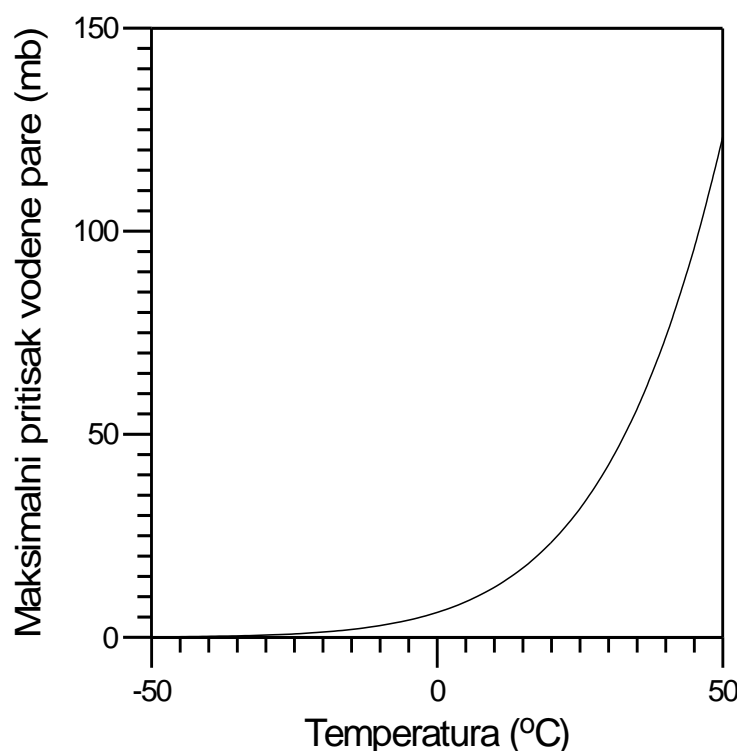
gde c_i predstavlja toplotni kapacitet zemljišta (u smislu dodirne površine u životnoj sredini) po jedinici površine, T_i je temperatura na dodirnoj površini u životnoj sredini, t je vreme, dok su članovi na desnoj strani jednačine: R - neto zračenje, H i E – osetna i latentna toplota, redom, koje se prenose u atmosferu konvekcijom i S – fluks toplote koji se prenosi kondukcijom u dublje slojeve čvrste materije ispod (slika 2).



Slika 2. Članovi u jednačini energijskog bilansa.

Osetna toplota se računa kao $C_H(T_i - T_a)$ gde je C_H koeficijent transporta osetne toplote a $T_d(t)$ temperatura vazduha na referentnom nivou koja predstavlja gornji granični uslov. Fluks toplote u čvrstu materiju zemljišta ispod je dat sa $C_D(T_i - T_d)$ pri čemu je C_D koeficijent transporta toplote kondukcijom a $T_d(t)$ je temperatura u dubljem sloju zemljišta koja je data kao donji granični uslov. Prema ref. [9] član koji se odnosi na neto zračenje može da se napiše u formi $C_R(T_i - T_a)$ gde je C_R koeficijent zračenja. U slučaju kada su male razlike između T_a i T_i izraz za latentnu toplotu može da se napiše u obliku $C_L d [b(T_i - T_a) + b^2 \frac{(T_i - T_a)^2}{2}]$ pri čemu je C_L koeficijent transporta latentne toplote, d je pritisak vodene pare pri saturaciji a b je konstanta karakteristična za određeni gas i zavisi od njegove temperature. Na ovaj način je izbegnuta eksponencijalna zavisnost saturacionog pritiska vodene pare od temperature vazduha, čime se umanjuje potrošnja računskog vremena. Ovaj

pristup je uobičajen već duži niz godina u raznim numeričkim modelima atmosfere. U suštini, da bi izraz za računanje bilo koje veličine bio koristan, treba da zadovolji dva uslova.^[10] Pre svega taj izraz mora da bude tačan u nekim unapred zadatim okvirima. Idealne vrednosti koje su dobijene datim postupkom treba da se slažu što je moguće bolje sa opšteprihvaćenim standardima. Kao drugo, dati postupak treba da utroši što je moguće manje računskog vremena prilikom puštanja numeričkih simulacija, a da se pri tome ne gubi na tačnosti. U pogledu procedura koje se koriste za računanje pritiska vodene pare ne postoji jedna zvanična relacija već naprotiv ima pregršt polu-empirijskih relacija koje mogu da se podele u dve grupe, one koje su u eksponencijalnom obliku (za njih je potrebno više računskog vremena) i druge koje su u obliku polinoma (one su manje tačne ali daju prihvatljive rezultate). Posmatrajući krivu saturacionog pritiska vodene pare (slika 3) dobijenu eksperimentalnim putem uočavaju se glatke promene vrednosti sa promenom temperature, što dozvoljava upotrebu aproksimacija u kojima se koriste polinomi višeg reda, pri čemu se javljaju odgovarajući numerički koeficijenti.



Slika 3. Zavisnost maksimalnog pritiska vodene pare u odnosu na ravnu površinu vode, od temperature vazduha.

3.1. Izvođenje diferencne jednačine

Da bi jednačina energijskog bilansa bila pogodna za proučavanje različitih dodirnih površina u životnim sredinama, stvorenih na posebne načine, posmatraćemo je u njenom opštem obliku. Kako se proces razmene energije u prirodi odvija u konačnim vremenskim intervalima odmah može da se napiše jednačina u formi konačnih razlika, odnosno da ima oblik autonomne diferencne jednačine, pri čemu se koristi vremenska šema unapred

$$x_{i,n+1} = x_{i,n} + \Delta\tau \cdot f_n \quad (8)$$

gde x_i predstavlja temperaturu na dodirnoj površini u životnoj sredini, $f_n=f(x_{i,n})$ preciznije $f_n=(R_n-H_n-E_n-S_n)/c_{i,n}$, pri čemu su $R_n=R(x_n)$ gustina fluksa ukupnog zračenja, $H_n=H(x_n)$ gustina fluksa osetne toplote a $E_n=E(x_n)$ gustina fluksa latentne toplote, oba za vazduh u ovom slučaju i prenose se konvekcijom, dok je $S_n=S(x_n)$ gustina fluksa toplote koja se prenosi kondukcijom u dublje slojeve čvrste materije ispod površine, što je u ovom slučaju zemljište, c_i predstavlja toplotni kapacitet zemljišta po jedinici površine kao datu dodirnu površinu u životnoj sredini. U daljem razmatranju jednačina u konačnim razlikama će biti napisana u sledećem obliku

$$x_{i,n+1} = x_{i,n} + \Delta\tau \cdot f(x_{i,n} - x_{r,n}) \quad (9)$$

gde je

$$f(x_{i,n} - x_{r,n}) = \{c_{R,n}(x_{i,n} - x_{r,n}) - c_{H,n}(x_{i,n} - x_{r,n}) - c_{L,n}[e_s(x_{i,n}) - e_{r,n}] - c_{D,n}(x_{i,n} - x_{d,n})\} / c_{i,n} \quad (10)$$

pri čemu figurišu sledeće veličine: c_R je koeficijent u članu koji se odnosi na ukupno zračenje, x_r temperatura vazduha na referentnom nivou, c_H je koeficijent transporta toplote, c_L je koeficijent transporta vodene pare, e_s je saturacioni pritisak vodene pare na temperaturi dodirne površine u životnoj sredini, e_r je pritisak vodene pare na referentnom nivou, c_D je koeficijent prenošenja toplote kondukcijom a x_d predstavlja temperaturu u dubljem sloju zemljišta. Za granični uslov se uzima da je $\partial x_d / \partial t \approx \partial x_r / \partial t$, što predstavlja spore promene temperature i u vazdušnoj sredini i u zemljištu. Imajući ovo u vidu jednačina (10) može da se napiše u obliku

$$x_{i,n+1} - x_{r,n+1} = x_{i,n} - x_{r,n} + \{\Delta\tau[a_{C,n} - c_{L,n}bd_n] / c_{i,n}\}(x_{i,n} - x_{r,n}) - \Delta\tau[c_{L,n}b^2d_n / (2c_{i,n})](x_{i,n} - x_{r,n})^2 \quad (11)$$

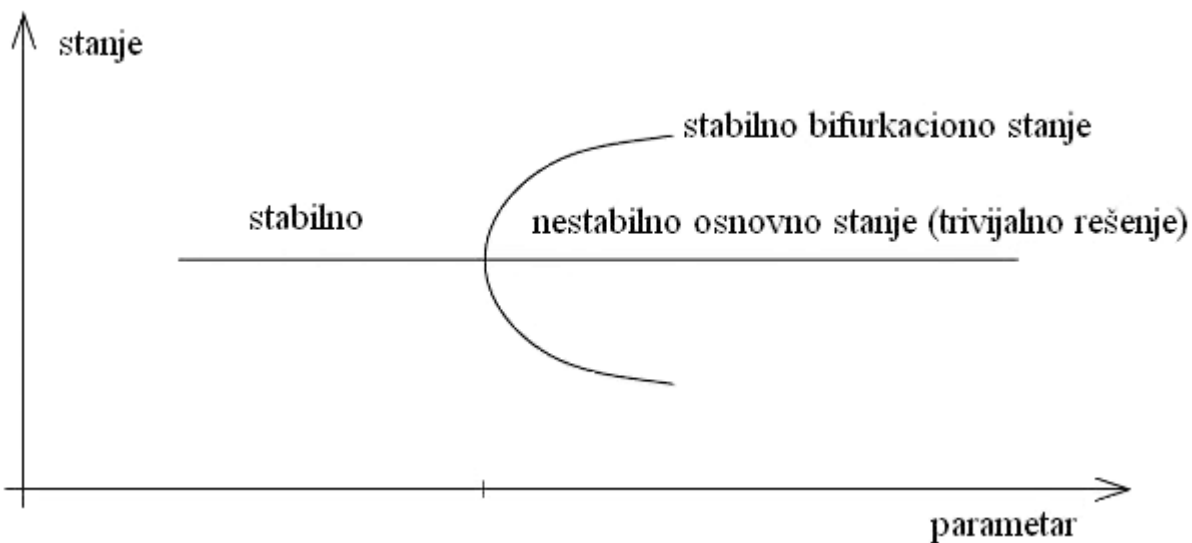
gde je $a_{C,n}=c_{R,n}-c_{H,n}-c_{D,n}$ dok je $b=0.06337 \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ a $d_n(\text{mb})$ se pojavljuje prilikom razvoja izraza $e_s(x_{i,n})-e_{r,n}$ u Tejlorov red. Ukoliko se uvede bezdimenziona temperatura $\zeta_n=(x_{i,n}-x_{r,n})/x_E$ (gde je x_E apsolutna temperatura od 300 K) i uz nekoliko transformacija jednačina (11) postaje

$$\zeta_{n+1} = A_n \zeta_n - B_n \zeta_n^2 \quad (12)$$

pri čemu koeficijenti u jednačini imaju sledeći oblik: $A_n=1+[a_{C,n}-c_{L,n}bd_n]\Delta\tau/c_{i,n}$ i $B_n=[x_Ec_{L,n}b^2d_n/(2c_{i,n})]\Delta\tau$. Fizički, koeficijenti A_n i B_n imaju oblik recipročnih vrednosti otpora pri računanju gorepomenutih flukseva, i menjaju se periodično tokom dana. U daljoj analizi njihove promene mogu da se posmatraju u formi sinusnih funkcija $A_n=A \sin(\pi\zeta_n)$ i $B_n=B \sin(\pi\zeta_n)$ s obzirom na poznati dnevni hod temperature na površini zemljišta, što je posledica pre svega dnevne promene intenziteta sunčevog zračenja, koje predstavlja osnovni priliv energije u ovaj posmatrani dinamički sistem. Uzimajući u obzir opseg fizičkih veličina sadržanih u koeficijentima A_n i B_n , što se može proceniti iz šeme za parametrizaciju površinskih procesa LAPS, dobijaju se intervali u kojima oni imaju fizički smisao u posmatranoj životnoj sredini i u kojima se pojavljuje haos, pa tako $A_n \in (0,2)$ i $B_n \in (0,0.5)$.

3.2. Bifurkacioni dijagram

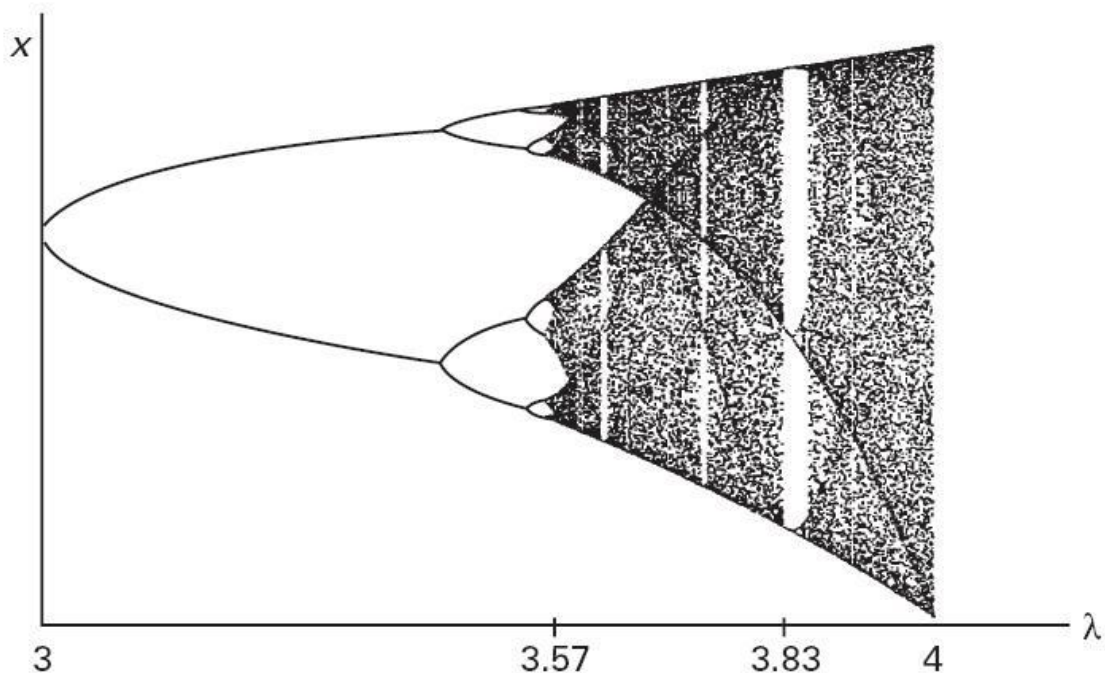
Teorija bifurkacija pokušava da objasni mnoge pojave koje su otkrivene u prirodnim naukama u poslednjim vekovima. Osnova leži u sledećem, kada vrednost nekog konkretnog fizičkog parametra pređe određeni prag taj događaj tera sistem da se organizuje u novo stanje koje se značajno razlikuje od prethodnog.^[11] Matematički rečeno, osmotrena stanja sistema odgovaraju rešenjima nelinearnih jednačina kojima se modelira taj fizički sistem. Stanje može da bude osmotreno ukoliko je stabilno. Za očekivati je da male promene parametra sistema nemaju veliki uticaj već da se stabilna rešenja neprekidno smenjuju na jedinstven način, tako da se neće uočiti velike promene kada se vrednost parametra menja sve dok kontinuirana grupa rešenja očuvava svoju stabilnost. Međutim, ukoliko to osnovno stanje izgubi stabilnost kada parametar dosegne kritičnu vrednost, tada stanje više nije uočljivo a sistem se organizuje u novo stanje koje se račva iz osnovnog. Bifurkacija je primer nejedinstvenosti u nelinearanoj analizi.



Slika 4. Shematski prikaz bifurkacije.

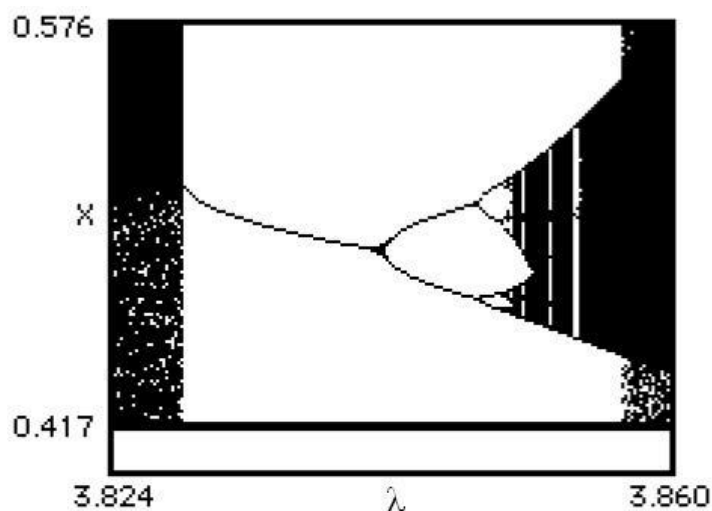
Navedeni scenario u slučaju jednačine $\lambda x - x^3 = 0$ je skiciran na slici 4, pri čemu $x \in R$ predstavlja stanje a $\lambda \in R$ je parametar, i odnosi se na račvastu bifurkaciju. Rešenja se računaju u parove koji opisuju jedno stanje u dve moguće reprezentacije. Takođe je tipično i to da stanje koje nastaje nakon bifurkacije ima manju simetriju od osnovnog stanja (koje se još naziva i trivijalno rešenje) zbog čega se proces naziva „bifurkacija narušavanja simetrije“.

Da bismo upoznali obilnu dinamiku logističke familije pri promeni vrednosti parametra od 0 do 4 navešćemo jedan primer.^[12] Koristeći računar i odgovarajući program može da se prikaže dijagram orbite za logističku familiju $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$, pri čemu se izabere N podjednako udaljenih λ vrednosti $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$ u intervalu $0 \leq \lambda \leq 4$. Na primer, može da bude $N=800$ a korak $\lambda_j=0.005j, j=1,2,3,\dots,N$. Za horizontalnu osu izaberemo da bude λ -osa a vertikalna će da bude x -osa. Za svako λ_j se iscrtava tačka $(\lambda_j, f_{\lambda_j}^k(0.5))$ za interval $50 \leq k \leq 250$. To znači da računamo prvih 250 tačaka orbite 0.5 od f_{λ_j} ali crtamo samo poslednjih 200 tačaka za koje je $\lambda = \lambda_j$. Na ovaj način prikazujemo „sudbinu“ orbite 0.5. Da bi grafički prikaz bio jasniji uzećemo samo deo u intervalu $3 \leq \lambda \leq 4$ (slika 5).



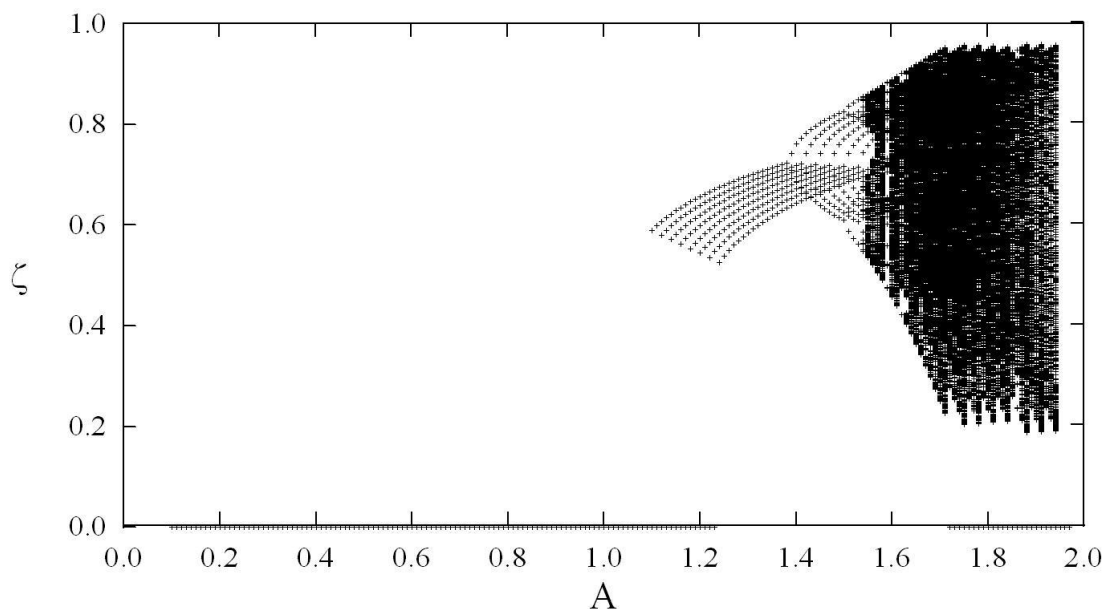
Slika 5. Dijagram orbite logističke familije za $3 \leq \lambda \leq 4$.

Kada rešenje perioda 1 prestane da bude stabilno dolazi do račvanja i dobijaju se dva rešenja perioda 2.^[13] Dalje, svaka od tačaka perioda 2, kada postane destabilizivana tokom daljeg porasta vrednosti parametra λ , stvara dva dodatna rešenja, i tako se javlja rešenje perioda 4 nakon određene vrednosti λ . Zatim se ovaj proces udvajanja nastavlja i vodi u kaos. Kao što se može primetiti sa slike, postoje oblasti u kojima rešenje nije haotično nego je umesto toga periodično a te oblasti se nazivaju „prozori“, i prepliću se sa prozorima neperiodičnosti. Oblast ograničena sa $3 \leq \lambda \leq 3.57$ se naziva prozor perioda 1. Uočava se i prozor perioda 3 u okolini tačke $\lambda=3.83$ (preciznije interval je $3.828 < \lambda < 3.857$), dok uvećano jedno rešenje izgleda kao na slici 6. Nadalje se javljaju prozori perioda n , nazvani po poslednjem periodu ciklusa u tom prozoru, pri čemu rastojanje između uzastopnih bifurkacija postaje sve manje kako n raste.



Slika 6. Uvećan jedan deo prozora perioda 3 koji se nalazi u označenom intervalu.

Na slici 7 je prikazan bifurkacioni dijagram za jednačinu (12). Nacrtan je pri promeni koeficijenata A i B za 0.005 i 0.05, redom, pri čemu B uzima vrednosti 0.2, 0.4, 0.6, 0.8 i 1. Sa slike se vide haotične oblasti koje ukazuju na haotične fluktuacije veličine ζ . Međutim, unutar haotičnih intervala postoje otvoreni periodični „prozori“. To znači da je posmatrani dinamički sistem, odnosno temperaturne fluktuacije na dodirnoj površini životne sredine, sinhronizovan u pojedinim oblastima gde preovladava haotični režim.



Slika 7. Bifurkacioni dijagram jednačine (12) u funkciji od koeficijenta $A_n \in (0,2)$ i pet vrednosti koeficijenta B (0.2, 0.4, 0.6, 0.8 i 1, predstavljenih sa leva na desno).

3.3. Analiza rešenja jednačine (12)

Jednačina (12) je nelinearna autonomna diferencna jednačina koja predstavlja vremensku promenu bezdimenzione temperature na dodirnim površinama u životnoj sredini, kao odgovor na forsiranje zračenjem. Kao što smo naveli u uvodu nepravilnosti u rešenju navedene diferencne jednačine mogu da se pojave iz dva razloga: (1) numeričkog, zbog pokušaja da se nađe odgovarajuća diferencna jednačina čije rešenje je dobra aproksimacija rešenja date diferencijalne jednačine i (2) fizičkog, zbog pojave haotičnih fluktuacija u posmatranom sistemu usled toga što dodirna površina u životnoj sredini ne može da se odupre velikoj količini zračenja koja iznenada pristiže do dodirne površine. Iz ovoga proizilazi pitanje da li je moguće naći oblast ili oblasti u kojima postoji rešenje koje ima fizički smisao. Do toga se može doći razmatranjem stabilnosti fizičkog rešenja jednačine (12). Stabilnost, u matematičkom smislu, je uslov u kojem mali poremećaji u sistemu ne uzrokuju veliko ometanje sistema. U pogledu rešenja diferencijalne jednačine, funkcija $f(\zeta)$ je stabilna ukoliko bilo koje drugo rešenje jednačine, koje počinje blizu njega kada je $\zeta=0$ i ostaje blizu njega dok se vrednosti ζ menjaju. Ukoliko razlika između rešenja teži nuli kada ζ raste, rešenje se zove asimptotski stabilno. Ako rešenje nema ni jednu od navedenih osobina onda je nestabilno. Stabilnost rešenja je bitna kod fizičkih problema iz razloga što ako za mala odstupanja od matematičkog modela, koja bi uticala na rešenje a koja su uzrokovana usled nezabilaznih grešaka prilikom merenja, nema odgovarajućeg efekata ublažavanja, tada matematičke jednačine koje opisuju problem neće pouzdano predviđati budući ishod.

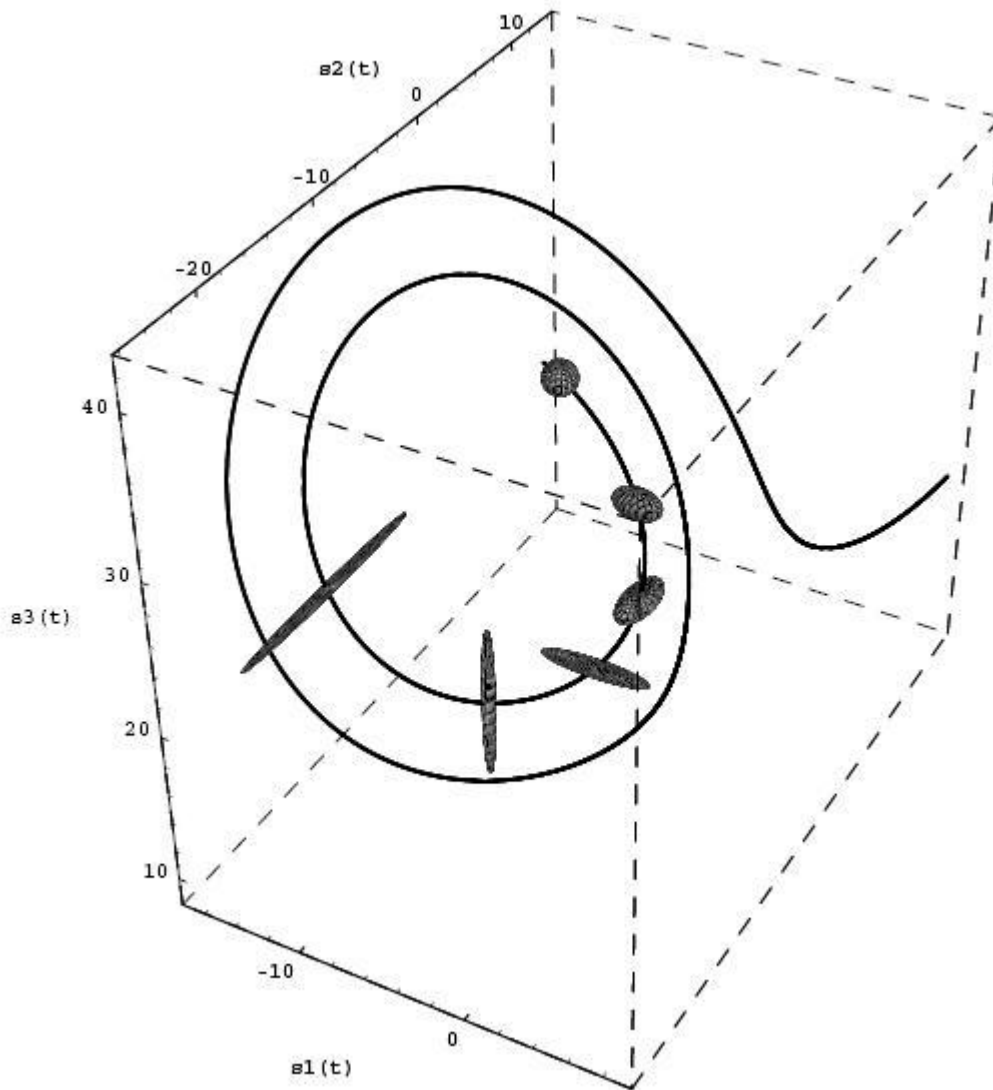
3.3.1. Ljapunovljev eksponent

Stabilnost fizičkog rešenja jednačine može da se analizira pomoću Ljapunovljevog eksponenta. Pojam Ljapunovljevih eksponenata je nastao još mnogo pre pojave teorije haosa, da bi opisao stabilnost linearnih i nelinearnih sistema. Ljapunovljevi eksponenti su definisani kao logaritmi apsolutne vrednosti od svojstvenih vrednosti linearizovanog dinamičkog sistema osrednjene po atraktoru.^[14] Definicija obuhvata i diskretne i neprekidne sisteme, pri čemu negativne vrednosti ukazuju na srednju stopu skupljanja dok pozitivne vrednosti ukazuju na srednju stopu širenja trajektorija u faznom prostoru. Atraktor predstavlja određenu konačnu oblast u faznom prostoru u kojoj se nalaze sva moguća buduća stanja dinamičkog sistema.

Računanje spektra Ljapunovljevih eksponenata je zasnovano na Jakobijanu Df pri čemu je f funkcija datog sistema. Postoji i drugi metod kojim se računaju jedan ili dva najveća eksponenta, zasnovan na glavnim osama širenja dinamičkog sistema^[15], ali se neće analizirati u ovom radu. Sada

ćemo da razmatramo diskretan dinamički sistem $\underline{s}_{k+1} = f(\underline{s}_k)$. Mali poremećaj \underline{z}_k trajektorije \underline{s}_k je opisan linearizovanim sistemom $\underline{z}_{k+1} = Df(\underline{s}_k)\underline{z}_k$ i nakon L koraka će da bude $\underline{z}_{k+L} = Df^L(\underline{s}_k)\underline{z}_k$, gde je $Df^L(\underline{s}_k) = \prod_{i=0}^{L-1} Df(\underline{s}_{k+i})$. Logaritmi apsolutnih vrednosti od svojstvenih vrednosti ove matrice, podeljeni sa L , su prva procena Ljapunovljevih eksponenata i nazivaju se lokalni Ljapunovljevi eksponenti. Zavisе od trajektorije \underline{s}_k i pokazuju srednju divergenciju od ove trajektorije nakon L iteracija. Uopštavanje ka invarijantnim globalnim Ljapunovljevim eksponentima se postiže uz pomoć multiplikativne ergodičke teoreme Oseledeca.^[16] Limes matrice $OSL(L, \underline{s}) = \{Df^L(\underline{s}(n))[Df^L(\underline{s}(n))]^T\}^{1/2L}$ kada $L \rightarrow \infty$ postoji za haotični sistem i svojstvene vrednosti ne zavise od trajektorije \underline{s} , kada je \underline{s} na atraktoru. Tada su logaritmi apsolutne vrednosti od svojstvenih vrednosti zapravo globalni Ljapunovljevi eksponenti. U praksi, za funkciju koja opisuje dati sistem, Oseledecovu matricu treba računati za veliki broj koraka L da bi se obezbedila konvergencija i tada u haotičnom sistemu razlika između svojstvenih vrednosti sa pozitivnim i negativnim eksponentima raste eksponencijalno sa vremenom.

Haotični sistemi pokazuju nepredvidivo ponašanje u smislu da za date početne uslove ograničene tačnosti ne može da se predvidi dugoročno stanje, osim da se kaže kako se moguća buduća stanja nalaze na atraktoru. To znači da u početku bliske trajektorije mogu da divergiraju eksponencijalno sa vremenom, pri čemu je srednja mera eksponencijalnog divergiranja (ili konvergiranja) putanja u faznom prostoru upravo Ljapunovljev eksponent, koji na najbolji način kvantifikuje osetljivost dinamičkog sistema na početne uslove.^[17] Ovaj pojam može da se uopšti na spektar Ljapunovljevih eksponenata λ_i ($i=1,2,\dots,n$) tako što razmatramo male n -dimenzione sfere početnih uslova, pri čemu n predstavlja broj jednačina (odnosno broj promenljivih) koje opisuju sistem. Vremenom sfera evoluira u elipsoid čija se glavna osa širi (ili skuplja) stopom koju određuje Ljapunovljev eksponent (slika 8).



Slika 8. Širenje i skupljanje Lorencovog sistema predstavljeno Ljapunovljevim eksponentima.

Postojanje pozitivnog eksponenta je dovoljno za utvrđivanje haotičnog ponašanja i ukazuje na lokalnu nestabilnost u određenim pravcima. Međutim, da bi postojao atraktor sveukupna dinamika mora da bude disipativna, odnosno stabilna na globalnom nivou i ukupna stopa skupljanja treba da prevagne nad ukupnom stopom širenja. Čak i ako postoji nekoliko pozitivnih Ljapunovljevih eksponenata, zbir preko celog spektra je negativan. Ljapunovljev spektar može da se objasni sledećom geometrijskom interpretacijom. Prvo se n glavnih osa elipsoida poredaju od one koja se najbrže širi (λ_1) do one koja se najbrže skuplja (λ_n)

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n. \quad (13)$$

Potom se uočava da je dužina prve glavne ose proporcionalna sa $e^{\lambda_1 t}$, zatim da je oblast određena sa prve dve glavne ose proporcionalna sa $e^{(\lambda_1 + \lambda_2)t}$, a zapremina ograničena sa prvih k glavnih osa

proporcionalna sa $e^{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k)t}$. Na osnovu toga Ljapunovljev spektar može da se definiše tako da je eksponencijalni porast elementa k -dimenzione zapremine dat sumom od k najvećih Ljapunovljevih eksponenata. Pored toga, ceo Ljapunovljev spektar se ne može izračunati tako što se uzmu proizvoljni pravci u kojima se meri razdvajanje bliskih početnih uslova već mora da se meri razdvajanje duž Ljapunovljevih pravaca koji odgovaraju glavnim osama prethodno pomenutih elipsoida.

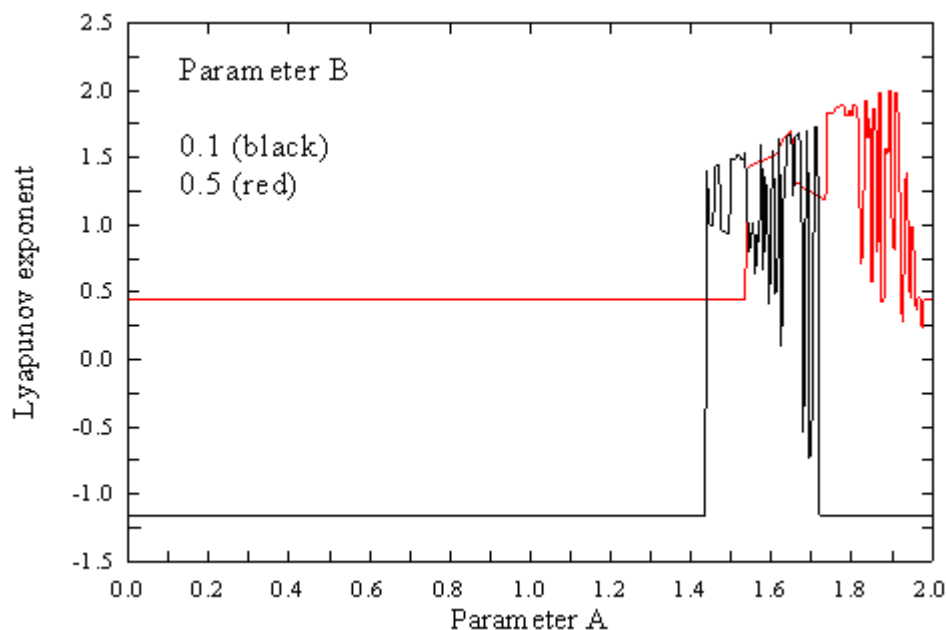
Uopšteno govoreći, stabilnost vremenski zavisnog sistema $\partial\zeta/\partial t = f(t)$ u ravnotežnom stanju ζ_0 datom sa $\partial\zeta_0/\partial t = 0 = f(t_0)$ može da se proceni na osnovu pretpostavke o malim poremećajima ζ' i linearizacije $\partial(\zeta_0 + \zeta')/\partial t = f(t_0) + (\partial f/\partial\zeta)_{\zeta_0} \zeta'$ ili $\partial\zeta'/\partial t = \lambda\zeta'$, gde je $\lambda = (\partial f/\partial\zeta)(\zeta_0)$ Ljapunovljev eksponent, sa eksponencijalnim rešenjem $\zeta' = \zeta'(t=0)e^{\lambda t}$. Sistem je stabilan ukoliko je $\lambda < 0$ a nestabilan ako je $\lambda > 0$. Jednačina (12) je tipična autonomna. Pošto je poznat opseg koeficijenata A_n i B_n moguće je analizirati ponašanje Ljapunovljevog eksponenta date autonomne jednačine u određenim intervalima.^[18]

Računanje Ljapunovljevog eksponenta za trajektoriju počinje od ζ_0 i oblika je

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(\zeta_i)|. \quad (14)$$

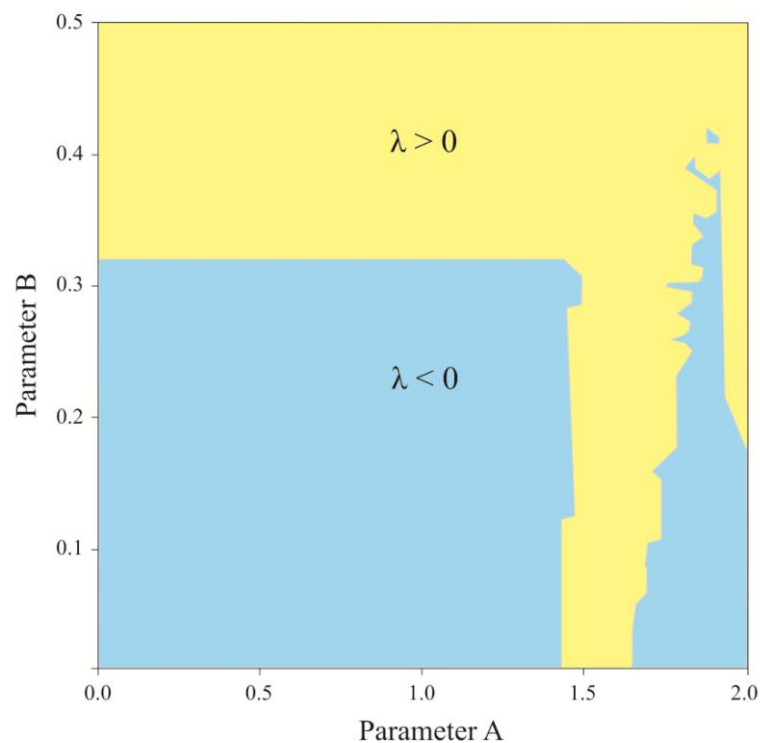
Znak od λ je karakteristika tipa atraktora. Za stabilnu fiksnu tačku (stabilno stanje) i granične cikluse λ je negativno a za haotične atraktore λ je pozitivno. Za mapu datu jednačinom (12) po definiciji će da bude

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| (A\zeta_i - B\zeta_i^2)\pi \cos(\pi\zeta_i) + (A - 2B\zeta_i)\sin(\pi\zeta_i) \right|. \quad (15)$$



Slika 9. Ljapunovljev eksponent za jednačinu (12) u funkciji različitih vrednosti koeficijenta A i dve vrednosti koeficijenta B . Korak od A je bio 0.005 (Mihailović i Mimić, 2012).

Svaka tačka na graficima prikazanim na slici 9 je dobijena tako što se prvo radilo 2000 iteracija od početnog stanja da bi se eliminisalo prelazno ponašanje a potom je vršeno osrednjavanje za narednih 500 iteracija. Početni uslov je bio $\zeta=0.25$. Posmatrajući sliku 9 primećuje se da je za $B=0.1$ rešenje jednačine (12) stabilno ($\lambda < 0$) za intervale $A \in [0, 1.44]$ i $A \in [1.72, 2.0]$. Između njih rešenje je nestabilno ($\lambda > 0$) sa haotičnim fluktuacijama, ali sa pojavom prozora stabilnosti u regularnim intervalima. U slučaju kada je $B=0.5$ rešenje jednačine (12) je uvek nestabilno ($\lambda > 0$). Na slici 10 su prikazane oblasti stabilnih i nestabilnih rešenja jednačine (12) određene vrednostima Ljapunovljevog eksponenta u zavisnosti od koeficijenata $A \in (0, 2)$ i $B \in (0, 0.5)$. Promena vrednosti za A i B u svakom koraku je bila 0.005.



Slika 10. Oblasti stabilnih i nestabilnih rešenja jednačine (12) određenih na osnovu Ljapunovljevog eksponenta (λ) u zavisnosti od koeficijenata $A \in (0,2)$ i $B \in (0,0.5)$. Korak od A i B je bio 0.005 (Mihailović i Mimić, 2012).

3.3.2. Entropija uzorka

Pored Ljapunovljevog eksponenta, za analizu stabilnosti rešenja jednačine može da se koristi i entropija uzorka. To je mera za regularnost vremenskih nizova podataka u smislu postojanja sličnih obrazaca u vremenskim nizovima. Što je vremenski niz više regularan i predvidiv vrednosti su joj manje a što je više nasumičan to su joj vrednosti veće. Služi i kao mera kompleksnosti nizova. Veoma je efikasan metod za analiziranje različitih podešavanja koja uključuju deterministički haos i stohastičke procese, i primenjuje se u analizama psiholoških, zvučnih, klimatskih, kao i signala u životnim sredinama, koji uključuju veoma malu količinu podataka. Faktor praga ili filter r je važan parametar. U principu, ukoliko bi raspolagali beskonačnom količinom podataka njegova vrednost bi bila jednaka nuli. Sa konačnom količinom podataka ili sa greškom merenja, vrednosti za r variraju u intervalu od 10 do 20 procenata standardne devijacije vremenskog niza.

Da bismo entropiju uzorka izračunali iz vremenskog niza, $X=(x_1, x_2, \dots, x_N)$, treba pratiti sledeće korake:^[19]

- (1) Formirati skup vektora $X_m^1, X_m^2, \dots, X_m^{N-m+1}$ definisanih sa
- $$X_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+m-1}), \quad i=1, \dots, N-m+1;$$

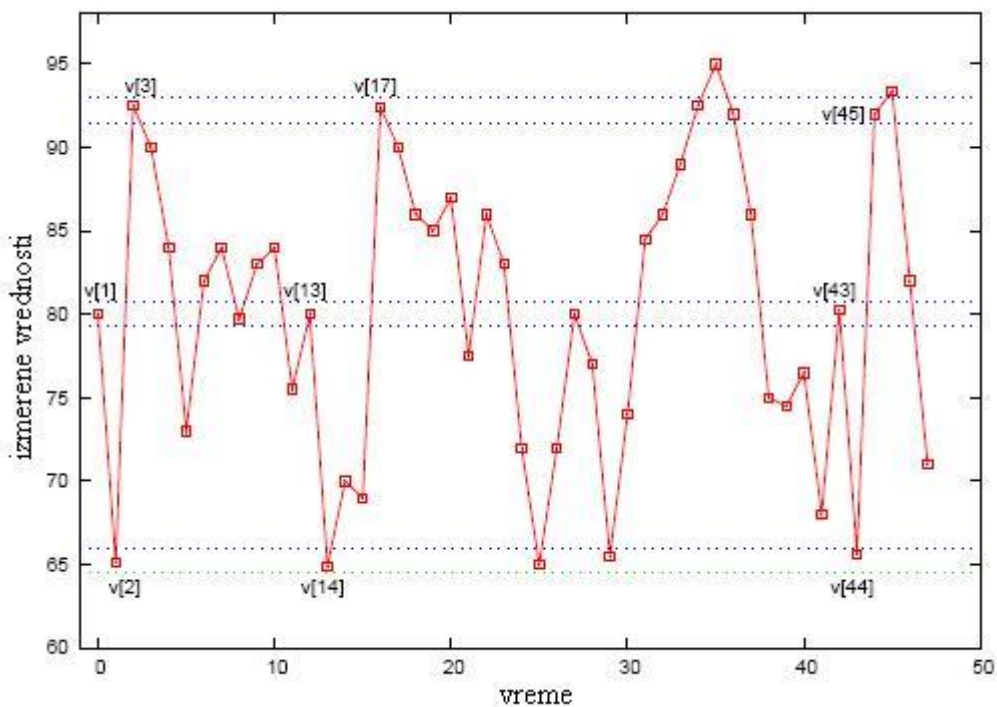
- (2) Rastojanje između X_m^i i X_m^j , $d[X_m^i, X_m^j]$ je maksimalna razlika po apsolutnoj vrednosti između njihovih odgovarajućih skalarnih komponenti $d[X_m^i, X_m^j] = \max_{k \in (0, m-1)} |x_{i+k} - x_{j+k}|$;
- (3) Za dato X_m^i , broji se po j ($1 \leq j \leq N - m + 1, j \neq i$), i označi sa B_i , tako da je $d[X_m^i, X_m^j] \leq r$. Tada će da bude za $1 \leq i \leq N - m, B_i^m(r) = B_i / (N - m - 1)$;
- (4) Definisati $B^m(r)$ kao $B^m(r) = \{\sum_{i=1}^{N-m} B_i^m(r)\} / (N - m)$;
- (5) Na sličan način, izračunati $A_i^m(r)$ kao $1/(N-m+1)$ puta broj od j ($1 \leq j \leq N - m + 1, j \neq i$), tako da je rastojanje između X_{m+1}^j i X_{m+1}^i manje ili jednako od r . Podesiti da $A^m(r)$ bude $A^m(r) = \{\sum_{i=1}^{N-m} A_i^m(r)\} / (N - m)$. Smatra se da je $B^m(r)$ verovatnoća da se dva niza preklapaju u m tačaka dok je $A^m(r)$ verovatnoća da se dva niza preklapaju u $m+1$ tačaka.
- (6) I na kraju, definisati $SampEn(m, r) = \lim_{N \rightarrow \infty} \{-\ln[A^m(r) / B^m(r)]\}$ što je proračunato na osnovu statistike: $SampEn(m, r, N) = -\ln[A^m(r) / B^m(r)]$.

Sada entropiju uzorka možemo predstaviti kao negativan prirodni logaritam uslovne verovatnoće da će se u nizu podataka dužine N , oni obrasci što se ponavljaju za m tačaka sa tolerancijom r , ponavljati i za $m+1$ tačaka, bez poređenja sa samim sobom. ^[20]

Na primer, ukoliko imamo niz od N vrednosti (tačaka) $\{v[j]: 1 \leq j \leq N\}$ tada možemo da formiramo $N-m+1$ vektora $u_m(i)$ za $\{i | 1 \leq i \leq N - m + 1\}$ gde m predstavlja broj komponenti vektora kojeg posmatramo

$$u_m(i) = \{v_i, v_{i+1}, \dots, v_{i+m-1}\}, 1 \leq i \leq N - m + 1 . \quad (16)$$

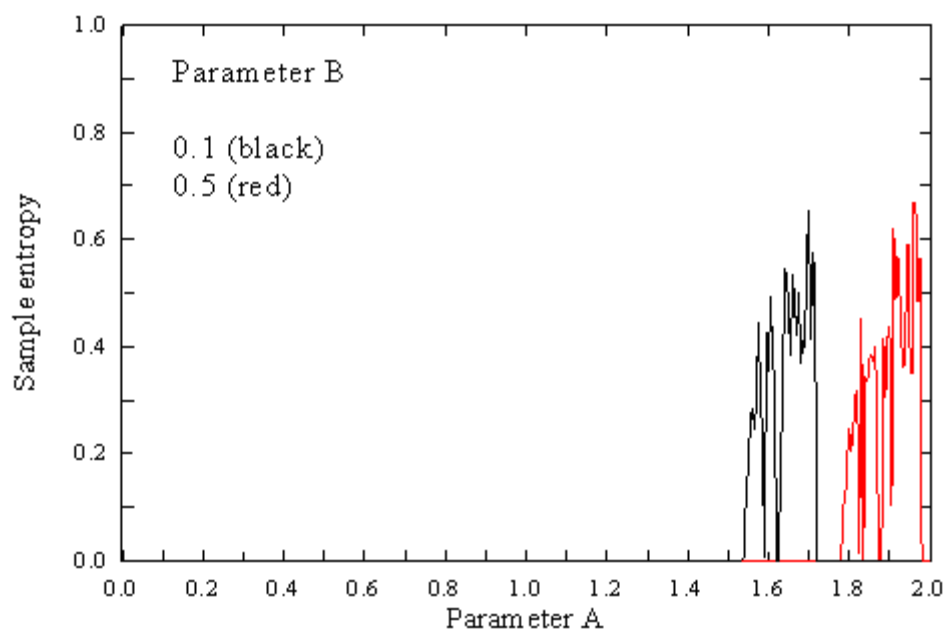
Na slici 11 je prikazan vremenski niz podataka sa obrascima koji se ponavljaju. ^[21] Smatraćemo da se tačka ponavlja ukoliko je apsolutna razlika između nje i naredne odgovarajuće tačke jednaka r .



Slika 11. Vremenski niz podataka za računanje entropije uzorka (Chikwasha, 2009).

U slučaju da je $m=2$ tada je obrazac koji se ponavlja predstavljen sa dve uzastopne tačke $v[i]$ i $v[i+1]$. Na slici su iscrtane tačkaste horizontalne linije koje ograničavaju vrednosti $v[1]$, $v[2]$ i $v[3]$ i predstavljaju toleranciju $\pm r$. Podaci koji odgovaraju tački $v[1]$ odnosno vektoru $u_1(1)$ su takođe ograničeni istim parom tačkastih horizontalnih linija. Ukoliko posmatramo dvokomponentni vektor $u_2(1)$ dat sa nizom $(v[1], v[2])$ ili trokomponentni vektor $u_3(1)$ koji je predstavljen sa $(v[1], v[2], v[3])$ uočavamo da postoje još dva niza $(v[13], v[14])$ i $(v[43], v[44])$ koja se poklapaju sa navedenim dvokomponentnim vektorom predstavljenim sa $(v[1], v[2])$ a samo jedan niz $(v[43], v[44], v[45])$ koji odgovara trokomponentnom vektoru niza $(v[1], v[2], v[3])$. Dalje nastavljamo proces za idući dvokomponentni vektor $u_2(2)$ dat sa $(v[2], v[3])$ i trokomponentni vektor $u_3(2)$ dat sa $(v[2], v[3], v[4])$. Broj nizova koji odgovaraju ovom novom dvokomponentnom odnosno trokomponentnom vektoru se sabira se rezultujućim brojem iz prethodnog koraka. Postupak se nastavlja za sve moguće dvokomponentne i trokomponentne vektore u datom nizu podataka, da bi se izračunao odnos ukupnog broja dvokomponentnih i ukupnog broja trokomponentnih obraza koji se ponavljaju. Prirodni logaritam ovog odnosa upravo predstavlja entropiju uzorka u slučaju $m=2$.

Izračunate vrednosti entropije uzorka ($SamEn$) u zavisnosti od parametra A jednačine (12) su prikazane na slici 12 (pri čemu je $r < 0.05$ i $m=5$). Sa slike se vidi da entropija uzorka prati oblik Ljapunovljevog eksponenta i da je jednaka nuli kada je $\lambda < 0$ ili kada su vrednosti λ blizu nule. Inače, vrednosti su joj pozitivne i dostižu do 0.7.



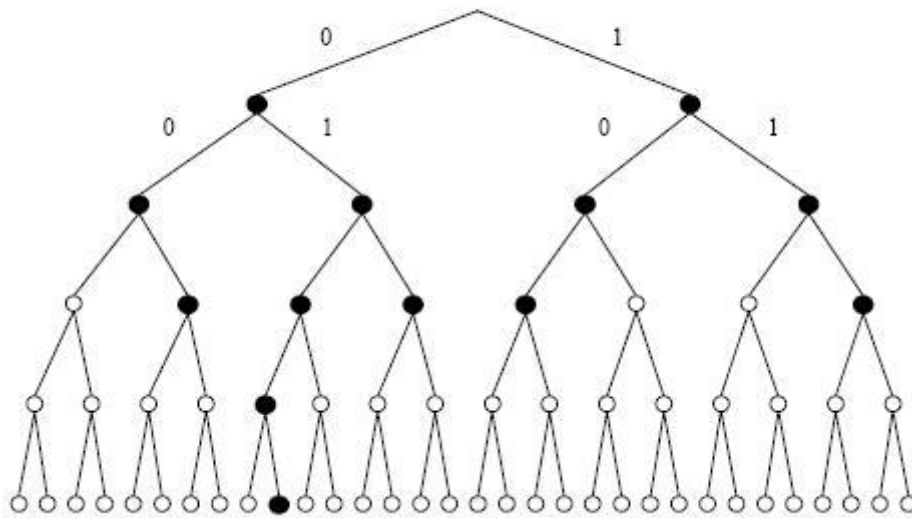
Slika 12. Entropija uzorka za jednačinu (12) u funkciji različitih vrednosti koeficijenta A i dve vrednosti koeficijenta B . Korak od A je bio 0.005 (Mihailović i Mimić, 2012).

4. Kolmogorovljeva kompleksnost

Postoje mnogi parametri za opisivanje nelinearnih vremenskih nizova, kao što su korelaciona dimenzija, entropija, Ljapunovljev indeks ili mera kompleksnosti. Većina ovih parametara može da se izračuna ukoliko se fazni prostor preuredi. Posebne odlike mere kompleksnosti su to što nema potrebe za preuređivanjem, veliki dinamički opseg, kratko vreme boravka u stabilnom stanju i kratki vremenski nizovi podataka, zbog čega je ova veličina najpogodniji nelinearni dinamički parametar za opisivanje nelinearnih vremenskih nizova.

Za analiziranje jednačine (12) može da se koristi Kolmogorovljeva kompleksnost. Ova mera kompleksnosti, takođe poznata i kao kompleksnost algoritma, je definisana od strane Kolmogorova a kasnije je unapređena od strane Lempela i Ziva. Kolmogorov je definisao kompleksnost binarnog niza kao broj bitova najkraćeg kompjuterskog programa koji može da proizvede taj niz. Kolmogorovljeva kompleksnost je povezana i sa Šenonovom entropijom u smislu da je očekivana vrednost od $K(x)$ za nasumičan niz približno jednaka entropiji izvora raspodele procesa koji stvara taj niz.^[23] Razlika je u tome što se Kolmogorovljeva kompleksnost vezuje za određeni string (niz) više nego za izvor raspodele, odnosno, Šenonova entropija je mera neodređenosti u statističkom ansamblu poruka dok je Kolmogorovljeva kompleksnost mera informacije algoritma u pojedinačnoj poruci, i može da se opiše na sledeći način

izdeljeni niz: 1,0,11,01,00,10,011,010,0100,111,01001,001,100,010



Slika 13. Binarno stablo koje predstavlja deljenje niza 1011010010011010010011101001001100010. Čvorovi koji su sadržani u deljenju su obojeni crno.

Čvorovi obojeni u crno na stablu sa pet nivoa su čvorovi koji su sadržani u deljenju navedenog niza, dok čvorovi koji nisu obojeni ukazuju na šifre ili fraze koje nisu uključene u ovoj podeli. Svi čvorovi ili fraze se pojavljuju tačno jednom u nizu, sa izuzetkom poslednje fraze koja je uočena već ranije. Dobro sažimanje (mala kompleksnost) se dobija kada deljenje sadrži dugačko, proredeno stablo dok se slabo sažimanje (velika kompleksnost) dobija kada su stabla kraća i u potpunosti popunjena na svakom nivou. Najveće sažimanje se dobija ukoliko sve fraze pripadaju istoj grani, tako će niz

1101011011101101011001011000

podeljen na

1,10,101,1011,10110,101100,1011000

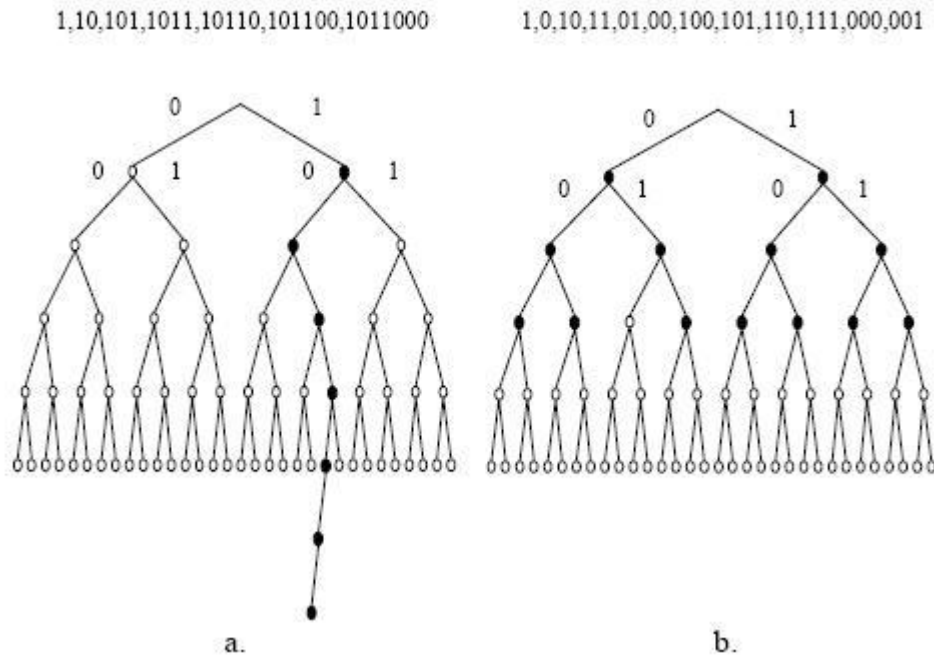
imati najveće moguće sažimanje, dok sa druge strane niz

1010110100100101110111000001

izdeljen na

1,0,10,11,01,00,100, 101, 110, 111, 000, 001

zapravo nije sažet po Lempelu i Zivu. Binarna stabla koja odgovaraju ovim slučajevima su prikazana na slici 14.



Slika 14. Primeri veoma sazetog niza (a) i niza koji uopše nije sažet (b).

Osnovna mera za procenu kompleksnosti je broj fraza pri deljenju. Minimalan broj pod-nizova prilikom deljenja je broj M takav da je svaki pod-niz za jedan bit duži od prethodnog pod-niza

$$\sum_{m=1}^M m = L = \frac{M(M+1)}{2} = \frac{M^2}{2} + \frac{M}{2} \quad (19)$$

Rešavajući ovu kvadratnu jednačinu po M i uzimajući u obzir samo pozitivno rešenje dobija se da je $M = (-1 + \sqrt{1+8L})/2$. Za nizove značajne dužine konstanti članovi mogu da se zanemare pa će shodno tome procena najmanje vrednosti za M da bude $M \geq \sqrt{2L}$. Sad kada znamo minimalan broj fraza koje niz dužine L može da ima, normalizovaćemo broj fraza pri deljenju u odnosu na ovaj minimalni, kako bismo mogli da procenjujemo kompleksnost. Na ovaj način se definiše mera C za procenu kompleksnosti deljenja na M fraza niza ukupne dužine L kao $C \equiv M / \sqrt{2L}$. Ukoliko se mera C primeni za procenu kompleksnosti primera sa slike 14 dobijaju se vrednosti

$$(a) C(a) = 7 / \sqrt{2 \cdot 28} = 0.93$$

$$(b) C(b) = 12 / \sqrt{2 \cdot 28} = 1.60$$

što znači da niz b ima znatno veću kompleksnost od niza a , jer veće vrednosti znače veću kompleksnost. Ova mera C u sebi sadrži osobine Lempel-Zivove kompleksnosti bez potrebe da se obavi proces stvarnog sažimanja niza.

Za vremenske nizove postupak određivanja mere kompleksnosti počinje tako što se prvo napravi odgovarajuća sekvenca deljenjem datih nizova. Lempel-Zivova kompleksna analiza vremenskih nizova $\{x_i\}, i = 1, 2, 3, 4, \dots, N$ može da se objasni na sledeći način.

Korak 1:

Šifrirati vremenske nizove stvarajući sekvencu S od karaktera 0 i 1 napisanu kao $\{S(i)\}, i = 1, 2, 3, 4, \dots, n$ na osnovu pravila

$$S(i) = \begin{cases} 0, & x_i < x_* \\ 1, & x_i \geq x_* \end{cases} \quad (20)$$

pri čemu je x_* odabrani prag. U ovom slučaju srednja vrednost vremenskih nizova se uzima kao prag. ^[22] Zavisno od svrhe, mogu da se koriste i druge šeme za šifriranje.

Korak 2:

Potrebno je izračunati kompleksni brojač $c(n)$ koji se definiše kao najmanji broj jasnih obrazaca koji su sadržani u datoj sekvenci. Kompleksni brojač $c(n)$ je funkcija dužine sekvence n . Vrednost od $c(n)$ se približava krajnjoj vrednosti $b(n)$ kada n teži u beskonačnost

$$c(n) = O(b(n)), \quad b(n) = \frac{n}{\log_2 n}. \quad (21)$$

Korak 3:

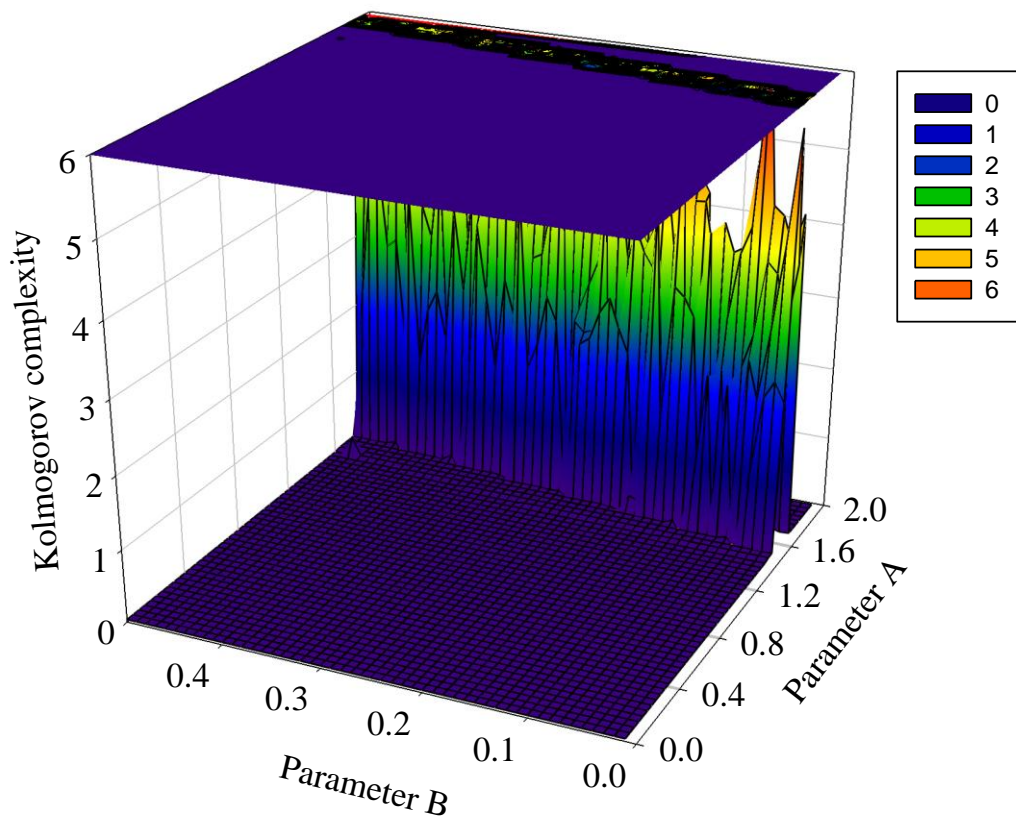
Izračunati normalizovanu meru kompleksnosti $C_k(n)$ definisanu sa

$$C_k(n) = \frac{c(n)}{b(n)} = c(n) \frac{\log_2 n}{n}. \quad (22)$$

Parametar $C_k(n)$ predstavlja količinu informacija sadržanu u vremenskim nizovima, i ima vrednost nula za periodične ili regularne vremenske nizove a vrednosti veće od nule za nelinearne vremenske nizove.

U ovom radu je posmatrana promena mere kompleksnosti vremenskog niza u zavisnosti od koeficijenata $A \in (0, 2)$ i $B \in (0, 0.5)$ jednačine (12). Vremenski niz $\{\zeta_i\}, i = 1, 2, 3, 4, \dots, N$ je dobijen tako što se prvo radilo 2000 iteracija od početnog stanja $\zeta=0.2$ kako bi se izbeglo prelazno ponašanje a potom je rađeno još $N=500$ iteracija kako bi se dobio dati vremenski niz. Za sve vremenske nizove je računata Kolmogorovljeva kompleksnost koristeći jednačine (20)-(22).

Rezultati računanja su prikazani na slici 15, gde je Kolmogorovljeva kompleksnost izračunata u zavisnosti od koeficijenta A i B . Sa slike se jasno vidi da postoji oblast (za $1.4 < A < 1.7$) u kojoj mera kompleksnosti vremenskh nizova ima velike fluktuacije.



Slika 15. Kolmogorovljeva kompleksnost jednačine (12) u zavisnosti od koeficijenta $A \in (0,2)$ i $B \in (0,0.5)$, pri promeni A i B za 0.005.

5. Zaključak

U ovom radu je razmatrana pojava haosa i Kolmogorovljeva kompleksnost pri računanju temperature na dodirnim površinama u životnim sredinama. Prvo je napravljen osvrt na pozadinu i definiciju date teme pri čemu je definisana dodirna površina u životnim sredinama kao površina između dve biotičke ili abiotičke životne sredine koje su u relativnom kretanju i razmenjuju energiju, materiju i informacije putem fizičkih, bioloških i hemijskih procesa koji se menjaju na prostornoj i vremenskoj skali. Dodirna površina u životnim sredinama je predstavljena kao kompleksan sistem čiji pojedinačni delovi međusobno deluju nelinearno i čija interakcija sa sredinom koja ga okružuje sadrži šum.

Potom su analizirani problemi modeliranja u fizici, biologiji i hemiji, koje se u najširem svom okviru mogu nazvati naukama životne sredine, konkretno je napravljen osvrt na autonomne dinamičke sisteme, koji su često razmatrana tema u modernim naukama o životnoj sredini. Razmatrani problemi su: (1) kako zameniti date diferencijalne jednačine odgovarajućim diferencnim jednačinama prilikom modeliranja pojava u životnoj sredini; (2) da li matematički tačno rešenje date diferencijalne jednačine ili sistema jednačina uvek ima fizički smisao i (3) pojava haosa u autonomnim dinamičkim sistemima u problemima životne sredine.

Posmatran je diferencni oblik jednačine energijskog bilansa na dodirnoj površini u životnoj sredini, konkretno na dodirnoj površini zemljišta i vazduha. Računata je temperatura na površini zemljišta pri čemu su primećene haotične fluktuacije njenih vrednosti, koje su prikazane na bifurkacionom dijagramu, a zatim je analizirana ova autonomna jednačina u zavisnosti od svojih koeficijenata koristeći Ljapunovljev eksponent i entropiju uzorka. Pozitivne vrednosti Ljapunovljevog eksponenta ukazuju na pojavu haotičnog ponašanja datog sistema pri određenim vrednostima parametara jednačine, a pozitivne vrednosti entropije uzorka koje prate trend Ljapunovljevog eksponenta to potvrđuju.

Na kraju je izračunata Kolmogorovljeva kompleksnost vremenskih nizova dobijenih iz ove autonomne diferencne jednačine i analizirana je njena zavisnost od dva koeficijenta iz jednačine, pri čemu se u određenim intervalima primećuju velike vrednosti Kolmogorovljeve kompleksnosti, što još jednom potvrđuje veliku haotičnost na dodirnoj površini zemljišta i vazduha, kao dinamičkog sistema u kojem su prisutna sva tri mehanizma transporta energije u životnim sredinama (zračenje, konvekcija i kondukcija).

Literatura

- [1] V.Kreinovich, *Int. J. Eng. Sci.* **41** (2003) 483.
- [2] H.R. van der Vaart, *Bull. Math. Biol.* **35** (1973) 195.
- [3] A.N. Kolmogorov, in: *Cybernetics Expected and Cybernetics Unexpected* (Nauka, Moscow, 1968).
- [4] D.T. Mihailović, M. Budinčević, D. Kapor, I. Balaž, D. Perišić, *Nat Sci* **1** (2011) 75.
- [5] D.T. Mihailović, C. Gualtieri, *Fluid Mechanics of Environmental Interfaces* (Taylor & Francis Group, London, UK, 2008).
- [6] R. Rosen, *Life itself: A comprehensive inquiry into the nature, origin and fabrication of life* (Columbia University Press, New York, 1991).
- [7] C. Potzsche, *Nonautonomous Dynamical Systems* (Technical University, Munich, (2011) <http://www-m12.ma.tum.de/poetzsche>.
- [8] P.E. Kloeden, C. Potzsche, M. Rasmussen, *Discrete-time nonautonomous dynamical systems*, Manuscript (2011).
- [9] D.T. Mihailović, D. Kapor, M. Budinčević, *Chaotic fluctuation of temperature on environmental interface exchanging energy by visible and infrared radiation, convection and conduction*, *Physical Review E* (2007).
- [10] P.R. Lowe, *An Approximating Polynomial for the Computation of Saturation Vapour Pressure*, *Journal of Applied Meteorology* vol. 16 (1977).
- [11] H. Keilhofer, *Bifurcation Theory An Introduction with Applications on PDEs*, Springer (2004).
- [12] M.W. Hirsch, S. Smale, R.L. Devaney, *Differential equations, Dynamical systems and an Introduction to Chaos*, Elsevier (2004).
- [13] M. Nelson, *Discrete Population Models for a Single Species*, Lecture notes for **AMAT 2110 Discrete Dynamics** (2003) <http://www.uow.edu.au/~mnelson/teaching.dir/discrete.dir/part4.pdf>.
- [14] D. Kugiuntzis, B. Lillekjendlie, N. Christoffersen, *Chaotic time series Part I: Estimation of some invariant properties in state space*, *Modeling, Identification and Control*, 15(4):205 -- 224 (1995).
- [15] A. Wolf, J.B. Swift, H.L. Swinney, J.A. Vastano, *Determining Lyapunov exponents from a time series*, *Physica D* 16 (1985).
- [16] V.I. Oseledec, *A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers of dynamical systems*, *Trans. Moscow Math. Soc.* 19:197-231 (1968).

- [17] M.T. Rosenstein, J.J. Collins, C. J. De Luca, *A practical method for calculating largest Lyapunov exponents from small data sets*, Physica D (1993).
- [18] D.T. Mihailović, G. Mimić, *Kolmogorov complexity and chaotic phenomenon in computing the environmental interface temperature*, Mod. Phys. Lett. B (2012) In Press.
- [19] J.S. Richman, J.R. Moorman, *Am. J Physiol.- Heart C*, **278** (2000) H2039.
- [20] A. Humeau et al., *Multifractality, sample entropy and wavelet analyses for age-related changes in the peripheral cardiovascular system: Preliminary results*, Med. Phys. (2008).
- [21] V. Chikwasha, *Time Series Analysis Using Wavelets and Entropy Analysis*, BMC Bioinformatics. Vol. 10. Jan. P. 32. (2009).
- [22] A.K. Sen, *Complexity analysis of riverflow time series*, Springer-Verlag (2008).
- [23] S.C. Evans, J.E. Hershey, G. Saulnier, *Kolmogorov Complexity Estimation and Analysis*, Sixth World Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics (2002).

Biografija



Gordan Mimić je rođen 28. marta 1988. godine u Sarajevu. Osnovnu školu „Jovan Dučić“ je završio u Kasindolu, Istočno Sarajevo, i kao osnovac razvio interesovanje prema fizici. Pohađao je gimnaziju opšteg smera u Istočnom Sarajevu, maturirao 2006. godine i tada upisao Prirodno-matematički fakultet u Novom Sadu, smer fizičar-meteorolog. Osnovne studije je završio sa prosečnom ocenom 9.37 a diplomirao je u junu 2011. godine. Iste godine je upisao master studije na pomenutom smeru. Proveo je osam meseci u službi, u Republičkom hidrometeorološkom zavodu Srbije, radeći sa numeričkim modelima za prognozu vremena (ETA, WRF NMM, NMMB). Pohađao je kurs „COM GRIB API: Biblioteke i alati“ u Evropskom centru za srednjoročnu prognozu vremena (ECMWF) u Redingu, Velika Britanija. Položio je sve ispite predviđene planom i programom, sa prosečnom ocenom 9.50.

UNIVERZITET U NOVOM SADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

KLJUČNA DOKUMENTACIJSKA INFORMACIJA

Redni broj:

RBR

Identifikacioni broj:

IBR

Tip dokumentacije:

Monografska dokumentacija

TD

Tip zapisa:

Tekstualni štampani materijal

TZ

Vrsta rada:

Diplomski rad

VR

Autor:

Gordan Mimić

AU

Mentor:

Dr Darko Kapor, dr Dragutin T. Mihailović

MN

Naslov rada:

Kolmogorovljeva kompleksnost i pojava haosa pri izračunavanju temperature na dodirnim površinama u životnim sredinama srpski (latinica)

NR

Jezik publikacije:

JP

Jezik izvoda:

srpski/engleski

JI

Zemlja publikovanja:

Srbija

ZP

Uže geografsko područje:

Vojvodina

UGP

Godina:

2012

GO

Izdavač:

Autorski reprint

IZ

Mesto i adresa:

Prirodno-matematički fakultet, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

MA

Fizički opis rada:

(poglavlja/ strana/ citata/ tabela/ slika/ grafika/ priloga)

FO

5/34/0/0/15/5/0

Naučna oblast:

Fizika

NO

Naučna disciplina:

Meteorologija

ND

Predmetna odrednica/ ključne reči:

Temperatura na dodirnim površinama u životnim sredinama, kompleksni sistemi, autonomne diferencne jednačine, jednačina energijskog bilansa, Ljapunovljev eksponent, entropija uzorka, Kolmogorovljeva kompleksnost
Biblioteka departmana za fiziku, PMF-a u Novom Sadu

PO

UDK

Čuva se:

ČU

Važna napomena:

nema

VN

Izvod:

Izračunavanje temperature na dodirnim površinama u životnim sredinama iz jednačine energijskog bilansa predstavljene u formi autonomne diferencne jednačine. Analiza rešenja jednačine pomoću Ljapunovljevog eksponenta, entropije uzorka i Kolmogorovljeve kompleksnosti. Pojava haosa.

IZ

Datum prihvatanja teme od NN veća:

DP

Datum odbrane:

DO

Članovi komisije:

KO

Predsednik i komentor:

dr Darko Kapor, red. prof.

član:

dr Dragutin T. Mihailović, red. prof., komentor

član:

dr Mirko Budinčević, red. prof.

UNIVERSITY OF NOVI SAD
FACULTY OF SCIENCE AND MATHEMATICS

KEY WORDS DOCUMENTATION

Accession number:

ANO

Identification number:

INO

Document type:

Monograph publication

DT

Type of record:

Textual printed material

TR

Content code:

Final paper

CC

Author:

Gordan Mimić

AU

Mentor/comentor:

Darko Kapor, Ph.D, Dragutin T. Mihailović, Ph.D

MN

Title:

Kolmogorov complexity and rise of chaotic phenomena in computing the environmental interfaces temperature

TI

Language of text:

Serbian (Latin)

LT

Language of abstract:

English

LA

Country of publication:

Serbia

CP

Locality of publication:

Vojvodina

LP

Publication year:

2012

PY

Publisher:

Author's reprint

PU

Publication place:

Faculty of Science and Mathematics, Trg Dositeja Obradovića 4, Novi Sad

PP

Physical description:

5/34/0/0/15/5/0

PD

Scientific field:

Physics

SF

Scientific discipline:

Meteorology

SD

Subject/ Key words:

Environmental interfaces temperature, complex systems, autonomous difference equations, energy balance equation, Lyapunov exponent, sample entropy, Kolmogorov complexity

SKW

UC

Holding data:

Library of Department of Physics, Trg Dositeja Obradovića 4

HD

Note:

none

N

Abstract:

Computing the environmental interfaces temperature from the energy balance equation presented in a form of autonomous difference equation. Analysis of the solution of the equation using Lyapunov exponent, sample entropy and Kolmogorov complexity. Rise of chaotic phenomena.

AB

Accepted by the Scientific Board:

ASB

Defended on:

DE

Thesis defend board:

DB

President,comentor:

Ph.D Darko Kapor, Professor

Member:

Ph. D Dragutin T. Mihailović, Professor, comentor

Member:

Ph. D Mirko Budinčević, Professor