

Institut za fiziku, PMF Novi Sad

Природно-математички факултет  
Радна заједница заједничких послова  
НОВИ САД

Пријем	23 -09- 1987		
Оригинал	Број	документа	издавача
03	10/24	-	-

D I P L O M S K I R A D

Jednostavni kvantno mehanički modeli u inflacionom modelu svemira

kandidat: Dubravka Jančić

UVOD

Sve do početka dvadesetog veka, kosmologija je u velikoj meri bila područje koje je pripadalo filozofima. Međutim, observabilne činjenice, kao i napredak u teoriji, doveli su do toga da kosmologija danas nije više ograničena samo na modelski svet - danas postoji mnogo uslova koje jedan kosmološki model treba da zadovolji da bi bio prihvaćen.

Temelje moderne kosmologije svakako predstavlja otkriće o širenju vaseone, do koga se došlo dvadesetih godina ovog veka, na osnovu proučavanja spektara nebeskih tela. Svi ovi spektri su imali pomak ka crvenom ili plavom delu, kao posledicu Doplerovog efekta, ukazujući na to da se objekti kreću ka Zemlji ili od nje, sa brzinama koje su mogle biti izračunate iz ovih pomeranja u spektru. U prvom trenutku se pomislilo da su u pitanju samo relativne brzine, koje ukazuju na kretanje Sunčevog sistema ka pojedinim galaksijama ili od njih. Međutim, ovo objašnjenje je ubrzo postalo neodrživo kako je otkrivano sve više i više sve većih spektralnih pomaka, i to uglavnom sve ka crvenom kraju spektra. Izgledalo je, osim u slučaju nekoliko vrlo bliskih suseda kao što je Andromeda, da se ostale galaksije udaljavaju od naše. To ne znači da naša galaksija ima neki centralni položaj u Svemiru; štaviše, izgledalo je da se celokupan svemir širi, da se sve galaksije međusobno udaljavaju./W1;S2/

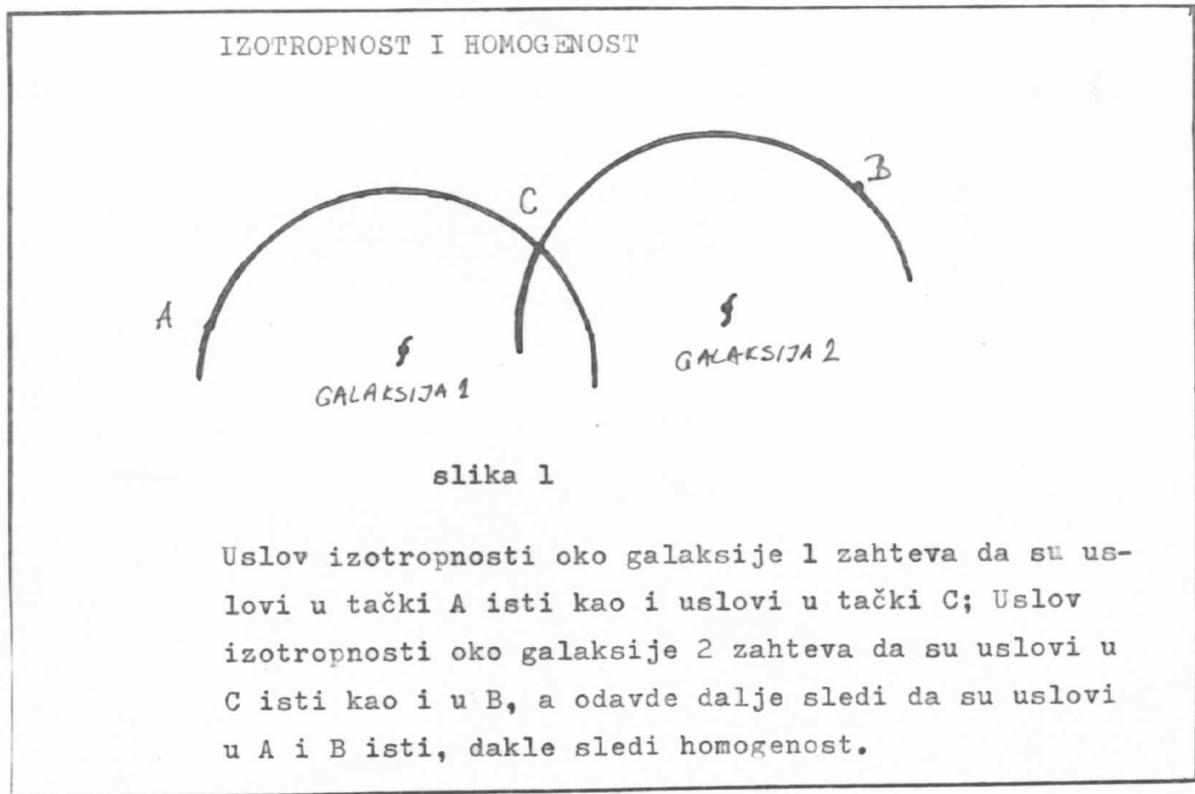
Edvin Hubble je 1929. godine objavio svoje otkriće da se crveni pomaci galaksija povećavaju u сразмерi sa njihovom udaljenošću, odnosno da je relativna brzina udaljavanja galaksije proporcionalna sa njenom udaljenošću, tj.

$$V = \lambda \cdot R$$

gde je  $\lambda$  faktor сразмernosti koji se naziva i Hubble-ova konstanta (premda to, strogo govoreći i nije konstanta, nego veličina koja zavisi od vremena; može se eventualno smatrati konstantom u tom smislu da je odnos proporcionalnosti brzine i rastojanja isti za sve galaksije u datom vremenskom trenutku).

Intuitivno bi se moglo očekivati, da bi u bilo kom datom vremenskom trenutku, svemir trebao da izgleda isti za sve posmatrače u svim galaksijama, bez obzira na pravac posmatranja. Ova hipoteza izgleda toliko prirodna da je nazvana Kosmološkim principom. Primenjen na galaksije, ovaj princip kaže da posmatrač, bez obzira u kojoj se galaksiji on sam nalazi, vidi sve ostale galaksije kako

se kreću prema istom zakonu brzina. Direktna matematička posledica ovog principa jeste da relativna brzina bilo koje dve galaksije mora da bude proporcionalna njihovom medjusobnom rastojanju, baš kao što je i Hubble utvrdio. Dakle, Dopler-ov efekat u spektru bi se mogao smatrati eksperimentalnom potvrdom Kosmološkog principa. Postoji i druga - svemir izgleda potpuno izotropan tj. isti u svim pravcima (ovde se misli na velike razmere u svemiru; na manjim razmerama - razmerama galaksija, ovo očigledno ne može biti tačno). Pojava mikrotalasnog kosmičkog šuma, o kome će kasnije u radu biti još reči, to prilično ubedljivo dokazuje / W1; S2; G2; L2; T5; .../. Ako je svemir izotropan tu oko nas, onda bi trebao da bude takav i oko ostalih galaksija (još od vremena Kopernika je jasno da Zemlja u vasioni nema bilo kakav privilegovani položaj). Izotropnost povlači za sobom homogenost - bilo koja tačka u svemiru može da se prevede u bilo koju drugu tačku pomoću niza rotacija oko fiksnih centara, što znači da ako je svemir izotropan oko svake tačke u vasioni, onda je i homogen /W1; P2/.



Osim ovih činjenica, širenja svemira, njegove izotropnosti i homogenosti i postojanja mikrotalasnog kosmičkog šuma (koji

je detektovan nešto kasnije, tek 1964.), postoji još nešto dobar model treba da objasni, a to obilje lakih elemenata D,  $^4\text{He}$ ,  $^3\text{He}$ ,  $^7\text{Li}$ , u observabilnoj vasioni.

Uz pomoć, velikim delom veoma spekulativne teorije, može se istorija svemira ekstrapolisati unazad do nekog trenutka za koji se uzima da je početni ( $t=0$ ). Pošto se danas galaksije udaljavaju jedna od druge, logično je pretpostaviti da su u nekom ranijem trenutku one bile mnogo bliže jedna drugoj, u stvari u još ranijem morale su biti toliko blizu da ni one, pa čak ni zvezde, ni atomi, ni atomska jezgra nisu mogli da postoje odvojeno jedna od drugih. Ovakvim razmišljanjem pedesetih godina ovog veka G.Gamow je došao do novog modela o evoluciji vasioni koji se naziva modelom velikog praska ili "big bang" i koji prvi uspeva objasniti pomenute observabilne činjenice. Po ovom modelu u početku je svemir u stanju beskonačno visoke temperature i beskonačno visoke gustine, kome prethodi veliki prasak "big bang" (u trenutku  $t=0$ ), koji je obezbedio pogon za širenje svemira koje se danas posmatra. Iako se ne zna da li je to istina ili ne, logično je pretpostaviti da je postojao neki početak i da samo vreme pre tog trenutka nije imalo značaja.

".... Svi smo navikli na ideju o jednoj absolutnoj nuli temperaturi. Nemoguće je da se bilo šta ohladi ispod  $-273,15^\circ\text{C}$ , .... zato što pojam temperaturе ispod absolutne nule jednostavno nema nikakvog značaja - ne može biti manje toplote nego kada je uopšte nema. Na isti način, možda ćemo morati da naviknemo na ideju o absolutnoj nuli vremena - jednom trenutku u prošlosti iza koga je u principu nemoguće pratiti bilo kakav niz uzroka i posledica. Pitanje ostaje otvoreno i možda će uvek i ostati...."/W1/

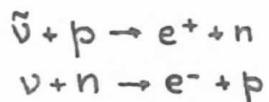
Pored toga što ostaje neobjašnjena prošlost pre nultog vremena, i sam momenat stvaranja ostaje neobjašnjen. O tom nultom trenutku se govori kao o kosmolоškoj singularnosti - uslovi eksremne temperature i gustine u kojima poznati zakoni fizike prestaju da važe. Negde sedamdesetih godina prvi put se pojavljuje ideja da je momenat stvaranja ipak moguće objasniti fizičkim zakonima. Po ovoj ideji svemir nastaje iz "ničega" ("....absolutely nothing = no space, no time ...." Vilenkin) /L4; G2/ počinjući sa kvantnim fluktuacijama. Međutim kvantne fluktuacije prostor - vremena mogu biti opisane samo u kontekstu kvantne gravitacije, te za sada ovakva razmišljanja moraju biti okarakterisana kao veoma spekulativna.

U prvom delu ovog rada biće dat scenario standardnog modela, koji se manje-više poklapa sa orginalnom verzijom Gamow-a tj. modelom "big banga" (neke razlike postoje po pitanju sadržaja rane vaspione), koji je postao opšte prihvaćen otkrićem mikrotalasnog kosmičkog šuma. Dalje će u ovom radu ukratko i na elementarnom nivou biti dat opis spontanog narušavanja simetrije u faznim prelazima koje predvidja Velika ujedinjavajuća teorija (GUT) elementarnih čestica koja može objasniti osobine smeše elementarnih čestica koja je postojala u ranom svemiru. Zatim će biti navedeni nedostaci standardnog modela, osnovi inflacionih modela i kvantno mehanički tretman skalarnog polja.

### 1.1 SCENARIO STANDARDNOG KOSMOLOSKOG MODELA

Scenario ovog modela ne počinje od trenutka  $t=0$  kada se desila eksplozija, nego stotinku sekunde kasnije, kada je temperatura vaspone iznosila  $10^{11}$  K (što odgovara energiji od oko 10 MeV-a). Razlog za ovo je bio nedostatak znanja iz oblasti fizike elementarnih čestica, koje je neophodno da bi se objasnile osobine smeše materije (hadrona i leptona) i zračenja pod uslovima ekstremno visoke temperature (energijski ekvivalent te temperature je veći od  $10^{19}$  GeV-a), i gustine koji su vladali u svemiru u toj prvoj stotinki sekunde. /W1/

Temperatura od koje scenario počinje je niža od temperature praga za hadrone  $T_{ph}$ , pod kojom se podrazumeva ona temperatura iznad koje se hadroni mogu proizvesti u ogromnom broju iz zračenja koje postoji u svemiru. Kad temperatura opadne na něku vrednost koja je ispod  $T_{ph}$  (u opštem slučaju  $T_p = mc^2/k$ , gde je  $k$  Boltzmann-ova konstanta), dolazi do anihilacije hadrona i antihadrona, uz emisiju fotonu. Dakle, početak ovog scenarija pretpostavlja svemir ispunjen smesom elektrona, pozitrona, neutrina, antineutrina (jer je njihova  $T_p$  ispod  $10^{11}$  K) i fotonu. Zbog neprestanih i brzih sudara, svemir se, i pored toga što se širio, nalazio u stanju gotovo idealne topotne ravnoteže. Koncentracija preostalih hadrona, protona i neutrona, je bila vrlo mala - po jedan proton ili neutron na svakih  $10^9$  elektrona ili fotonu ili neutrina. Zbog ovoga, pri sudaru protona ili neutrona sa leptonima, najčešće su bile sledeće reakcije:



Obe ove reakcije su podjednako verovatne, ukoliko se pretpostavi da su ukupni leptonski broj i nanelektrisanje po fotonu veoma male veličine ili nula (što znači da je količina neutrina ista kao i količina antineutrina; količina elektrona je ista kao količina pozitrona). To dalje znači da je broj protona bio isti kao i broj neutrona. Na ovoj temperaturi ( $10^{11}$  K) nuklearne čestice još nisu bile vezane u jezgra, jer je energija potrebna za razlaganje jezgra 6-8 MeV-a po nuklearnoj čestici, pa su se sva jezgra razgradjivala istom brzinom kojom su se i stvarala.

Daljim širenjem i hladjenjem svemira postajalo je lakše da teži neutroni prelaze u lakše protone, nego obrnuto. Zbog ovo-ga je ravnoteža nuklearnih čestica bila pomerena - broj neutrona se bio smanjio u odnosu na broj protona.

<sup>1</sup> Sirenjem svemira, smanjivala mu se i gustina. Ovo smanjivanje gustine, kao i smanjivanje temperature, uslovilo je izlazak neutrina i antineutrina iz topotne ravnoteže. Razlog za ovo je bio povećanje srednjeg slobodnog puta za neutrine i antineutrine, tako da su se oni ponašali kao slobodni. Tog momenta, oni su pretali da igraju aktivnu ulogu u ovom scenariju - nadalje, uloga im se svela samo na davanje doprinosa gravitacionom polju svemira.

Kada je temperatura svemira postala manja od one vrednosti koja odgovara temperaturi praga za elektrone i pozitrone, došlo je do njihove anihilacije i nestajanja sa liste glavnih sastojaka svemira. Energija koja se oslobođila njihovom anihilacijom je usporila hladjenje svemira. Pošto neutrini (i antineutrini) nisu više bili u topotnoj ravnoteži sa elektronima, pozitronima i fotonima, oni nisu dobili od te oslobođene anihilacione energije ništa, tako da su postali hladniji u odnosu na fotone. Zbog te anihilacije elektrona i pozitrona, gustina svemira se smanjivala brže nego što bi se smanjivala da je u pitanju bila samo ekspanzija. U trenutku kada se to dešavalo, temperatura je već bila dovoljno niska da bi se mogla formirati neka stabilna jezgra, ali to se još nije dogadjalo jer je širenje svemira još uvek bilo toliko brzo, da su se jezgra mogla formirati samo u nizu brzih dvočestičnih reakcija. Jedan proton i jedan neutron mogu da formiraju jezgo teškog vodonika (deuterijuma D), pri čemu višak energije i impulsa odnosi jedan foton. Ovakvo jezgo je dalje moglo da se sudari sa jednim protonom ili neutronom, pa da formira jezgo helijuma tri ( $^3\text{He}$ ) ili tricijuma ( $^3\text{H}$ ). Prvi je mogao dalje da se sudari sa jednim neutronom i tako formira helijum četiri ( $^4\text{He}$ ), koji je stabilan. Jezgro tricijuma je takođe moglo formirati ovaj stabilni element, sudarivši se sa jednim protonom. Međutim,  $^3\text{He}$  kao i  $^3\text{H}$ , a posebno D su vrlo slabo vezani - na primer, da bi se razbilo jezgo D, potrebno je devet puta manje energije nego što je potrebno da se iz jezgra stabilnog  $^4\text{He}$  oslobodi jedna nuklearna čestica. Na temperaturi od oko  $3 \times 10^9 \text{ K}$ , koliko je iznosila u tom periodu, jezgra deuterijuma su se raspadala odmah pošto su se bila formirala, pa teže jezgra nisu, u stvari, ni imala šansu da nastanu.

Kad je temperatura opala dovoljno da su jezgra deuterijuma mogla da se održe, u lancu opisanih dvočeličnih reakcija su se veoma brzo mogla formirati teža jezgra. Ipak, jezgra teža od stabilnog helijuma se nisu formirala u većem broju, jer stabilna jezgra sa pet ili osam nuklearnih čestica ne postoji. Zato, kada je temperatura dospjela vrednost na kojoj je došlo do formiranja deuterijuma, skoro svi preostali neutroni su se odmah ugrijivali u jezgra helijuma.

Na temperaturi od oko  $3 \times 10^8$  K, nuklearni procesi su prestali da se odigravaju - nuklearne čestice su tada bile najvećim delom vezane u atome stabilnog helijuma i deuterijuma, a manjim delom su se nalazile u obliku slobodnih protona. Na svaki slobodan ili vezan proton, postojao je i po jedan elektron, samo je svemir još uvek bio pretopao da bi se mogli formirati stabilni atomi.

Svemir se i dalje širio i hladio, ali se u narednih 700 000 godina nije dogadjalo ništa značajno. Temperatura je bila opala do neke tačke na kojoj su elektroni i jezgra mogli da formiraju stabilne atome. Tako standardni model objašnjava nukleosintezu lakoših elemenata i to je jedan od njegovih velikih uspeha. Time se objašnjava i današnje obilje ovih elemenata u observabilnom svemiru. Prisustvo  $^7\text{Li}$  se objašnjava reakcijom:



I sama činjenica da oko tri četvrtine današnjeg svemira čini vodonik, dovodi do zaključka da je u periodu ranog svemira postojala ogromna količina zračenja koja je sprečavala brze nuklearne reakcije kojima bi se ogroman deo vodonika utrošio na stvaranje težih elemenata. Od momenta kada su elektroni i jezgra formirali atome, svemir postaje transparentan u odnosu na zračenje, jer je nestalo slobodnih elektrona. Širenje svemira je snizilo temperaturu ovog zračenja na nekoliko stepeni K ( $2,7\text{K}$ ) tako da se ovo zračenje javlja u vidu radio šuma (još se naziva i mikrotalasni kosmički šum) i stiže do Zemlje iz svih pravaca /G2; L1; W1; S2/. Ovaj mikrotalasni kosmički šum detektovali su Arno Penzias i Robert Wilson 1964. godine i on je predstavljao još jednu potvrdu standardnog modela.

Ovaj model objašnjava i širenje svemira, sa stepenom koji je određen ravnotežom izmedju gravitacionog polja i impulsa koji je materijalni sadržaj svemira stekao u procesu eksplozije. Izvor gravitacionog polja u ranom periodu svemira je bila ukupna gustoća energije fotona, elektrona, neutrona i svih ostalih postojećih čestica.

Naravno, ovaj model ima i neke svoje mane. Neke nove se još pojavljuju, ukoliko se ovaj model pokuša ekstrapolirati do najranijih mogućih vremena -  $10^{-43}$  s, jer razvojem fizike elementarnih čestica uklonjena je bilo kakva prepreka takvom proširivanju modela (za vremena manja od  $10^{-43}$  s potrebno je teoriju relativnosti zameniti kvantnom teorijom gravitacije, koja do danas ne postoji). Pre nego što se predje na objašnjavanja nedostataka standardnog scenarioja, vrlo ukratko će biti izneta predviđanja fizike elementarnih čestica.

## 1.2 SPONTANO NARUŠAVANJE SIMETRIJE (FAZNI PRELAZ) I SKALARNA POLJA

/L1;L4;W1;G2/

Početkom sedamdesetih godina dolazi do nekih revolucionarnih razvoja u fizici elementarnih čestica. Teoretičari su predložili ujedinjavajuću teoriju koja bi ujedinila tri od četiri postojeće sile - slabu nuklearnu, jaku nuklearnu i elektromagnetnu silu. Ova teorija se naziva Velika ujedinjavajuća teorija (Grand Unified Theory - GUT).

Bitna karakteristika ujedinjavajućih teorija je to da one uključuju u sebe i skalarna polja - polje okarakterisano samo intenzitetom (recimo polje neke veličine poput temperature). U odustvu skalarnog polja (kad mu je vrednost jednaka nuli) ne postoji razlika izmedju npr. slabe nuklearne sile i elektromagnetne. Drugim rečima, nulta vrednost skalarnog polja znači postojanje simetrije izmedju određenih sila. Ali kad odgovarajuće skalarno polje ispunjava svemir, ima efekat narušavanja simetrije izmedju dve sile, posle čega one postaju bitno različite.

Prelaz iz simetričnog stanja u stanje narušene simetrije se naziva faznim prelazom. Radi očiglednosti može se napraviti analogija sa faznim prelazom pri promeni agregatnog stanja vode iz tečne faze (simetrične) u čvrstu fazu (faza narušene simetrije) tj. led. Tečnost je vrlo homogena i izotropna. Molekuli se ne mogu "držati" zajedno zbog postojanja termalne energije. Simetrija ove faze se ogleda u tome što tečnost izgleda isto, bez obzira odakle se posmatra. Ali kada se tečnost hlađi i mrzne, počinje da kristališe - različite oblasti mogu početi kristalisati sa različitom orijentacijom kristalografskih osa. Na granicama regiona se javljaju defekti,

baš kao što bi to mogao biti slučaj i u svemiru (nešto kasnije o tim defektima), jer je fazni prelaz svemira koji se hlađi vrlo sličan opisanom postupku mržnjenja tečnosti.

U velikim ujedinjavajućim teorijama, spontano narušavanje simetrije je povezano sa posebnom vrstom polja, sa tzv. Higgs-ovim poljima (po Peter W. Higgs-u). (Povlačeći vezu između polja i čestica, koja sledi iz kvantne teorije polja, može se govoriti i o Higgs-ovim bozonima kao akterima procesa narušavanja simetrije.)

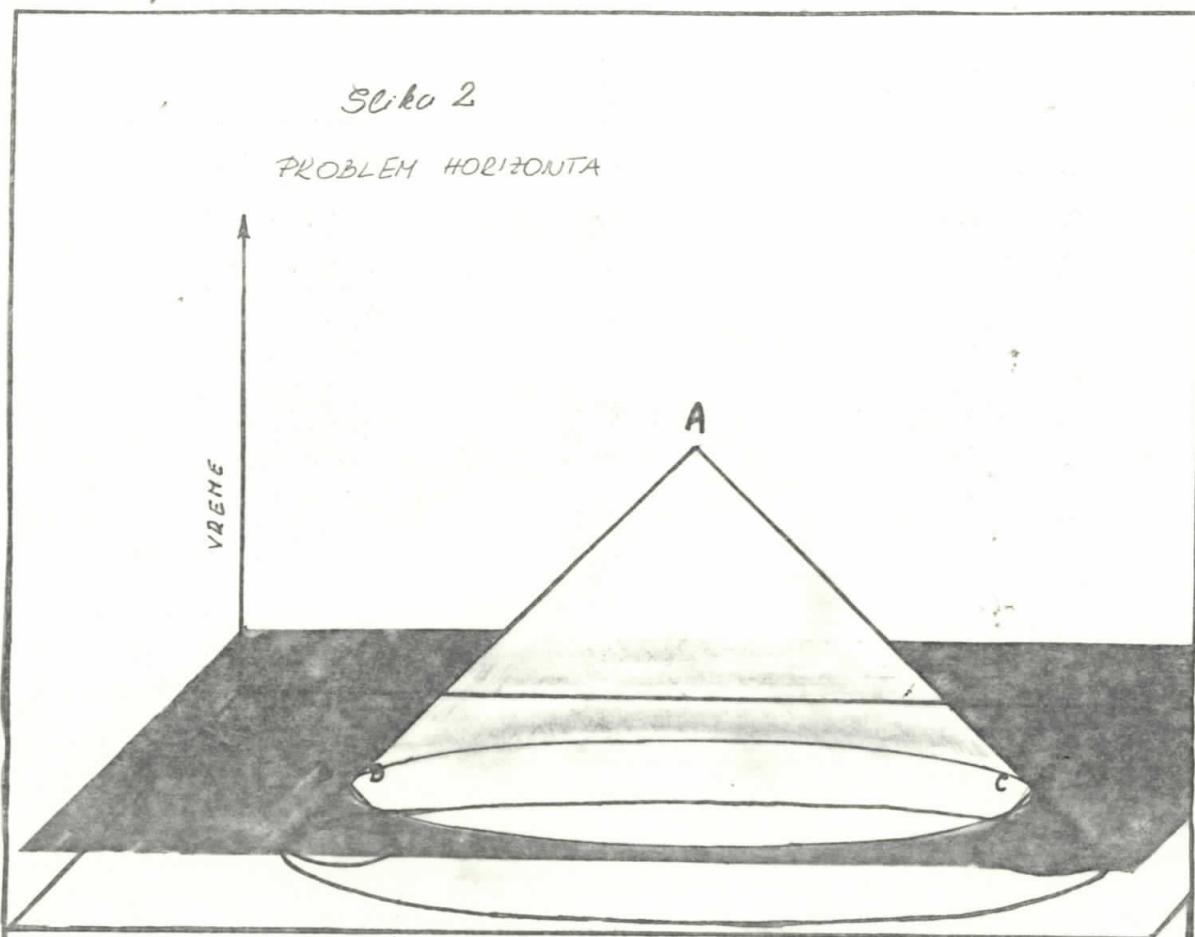
### 1.3 NEDOSTACI STANDARDNOG KOSMOLOŠKOG MODELA /G2; E1; L1; T3; T5/

#### 1.3.1 IZOTROPNOST I HOMOGENOST SVEMIRA NA VELIKIM RAZMERAMA

Uniformnost mikrotalasnog kosmičkog šuma ( $\frac{\Delta T}{T} \sim 10^{-4}$ ) je najbolji dokaz izotropnosti i homogenosti observabilnog svemira ( $d \sim 10^{28} \text{ cm} / T_3 / \sim 3 \text{ 000 Mpc}$ ) na velikim razmerama (razmerama većim od 100 Mpc). Nehomogenost i anizotropija bi morala rezultirati u merljivim temperaturnim fluktuacijama kod ovog šuma. Po standardnom modelu, svemir se razvija prebrzo da bi se ovakva uniformnost šuma mogla postići uobičajnim procesima kojima se sistem približava topotnoj ravnoteži. Razlog za ovo leži u činjenici da se ni jedna informacija ili fizički proces ne može prostirati brže od svetlosti. U bilo kom datom vremenu postoji maksimalno rastojanje (rastojanje horizonta) koje je svetlosni signal mogao da proputuje od samog početka svemira. U standardnom modelu rastojanje između dva izvora mikrotalasnog kosmičkog šuma koji se nalaze na suprotnim stranama u odnosu na Zemlju je bilo devedeset puta veće od rastojanja horizonta u trenutku kada je zračenje emitovano. Pošto ovi regioni nisu mogli biti povezani u tom slučaju, teško je shvatiti kako su mogli postati toliko identični.

Zagonetka uniformnosti svemira na razmerama većim od rastojanja horizonta, naziva se "problem horizonta". (slika 2)

Standardna kosmologija ne rešava ovaj problem - ona ga na neki način zaobilazi uzimajući homogenost i izotropnost svemira kao polaznu pretpostavku. Zbog toga, svemir je po standardnom modelu okarakterisan metrikom koja prepostavlja homogenost i izotropnost, a to je FRW (Friedmann - Robertson - Walker) metrika:



Naš položaj u prostoru i vremenu je označen tačkom A. Kako ni jedan signal ne može "putovati" brzinom većom od brzine svetlosti, možemo dobijati signale samo iz blago zasenčene oblasti, koja se naziva prešlost ili kupa prošlosti. Dogadjaji van ove kupe tačke A ne mogu uticati na dogadjaj u toj tački ni na koji način. Tamno zasenčena ravan je određena vremenom kada je svemir postao transparentan za zračenje i od kada potiče mikrotalasni kosmički šum. Zračenje koje nam stiže iz suprotnih pravaca, potiče iz tačaka B i C. Kupa prošlosti tačke B nema preseka sa kupom prošlosti tačke C. Nemogućnost objašnjenja činjenice da je zračenje dobijeno iz tačke B identično sa zračenjem dobijenim iz tačke C zovemo problemom horizonta. U standardnom modelu, uniformnost svemira na velikim razmerama, za koju je dokaz mikrotalasni kosmički šum, mora se uzeti kao polazna pretpostavka.

$$ds^2 = -dt^2 + R^2(t) \left( \frac{dr^2}{(1-kr)^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \right) \quad (1)$$

gde  $ds$  označava medjusobno rastojanje dva prostorno vremenska događaja;  $k$  je signatura zakriviljenosti svemira; (za  $k > 0$  svemir je zatvoren, za  $k < 0$  je otvoren, a za  $k=0$  svemir je ravan);  $R(t)$  označava metrički faktor koji će se nadalje u ovom radu zvati kosmički faktor razmere; a  $r, \theta, \varphi$  su sferne koordinate.

### 1.3.2 NEHOMOGENOST NA MALIM RAZMERAMA /L1; T5; P2/

Po scenariju standardnog modela, svemir je visokog stepena homogenosti na velikim razmerama. Ipak, neka odstupanja od homogenosti moraju postojati da bi se mogle objasniti nehomogenosti na malim razmerama - galaksije, grupe galaksija itd. Formiranje ovih struktura je posledica fluktuacije u gustini energije u ranom svemiru. Standardna kosmologija ne daje objašnjenje za ove fluktuacije, kao ni za spektar fluktuacije (pod time se podrazumeva variranje fluktuacije u funkciji rastojanja).

Da bi objasnila evidentnu nehomogenost na malim razmerama, standardna kosmologija spektar primordijalnih nehomogenosti uzima kao deo početnih uslova.

### 1.3.3 RAVNOST SVEMIRA / T3; T5; P1; G2; W1; T1; J1 /

Zbog izotropnosti i homogenosti svemira, njegova ekspanzija može biti opisana jednom jedinom veličinom - kosmičkim faktorom razmere,  $R(t)$ . Naime sva kosmička rastojanja izražavaju se preko ove veličine - razdaljina izmedju dve galaksije, talasna dužina slobodnog fotonu (moment impulsa bilo koje slobodno prostiruće čestice se menja kao  $1/R(t)$ , talasna dužina  $\lambda$  je srazmerna sa  $R(t)$ , tj. ima crveni pomak zbog ekspanzije svemira) itd.

Evolucija ovog faktora razmere  $R(t)$  je odredjena Einstein-ovom jednačinom gravitacionog polja (jednačina polja bez

kosmološkog člana, koji je inače bio uveden ad hoc):

$$\left(\frac{\dot{R}}{R}\right)^2 = \frac{8\pi G g}{3} - \frac{k}{R^2} \quad (2)$$

(naravno, ovaj izraz je dobijen nakon uvrštavanja izraza za metriku, koji se temelji na pretpostavci o prostornoj izotropiji i homogenosti, a to je FRW metrika) gde je  $G$  gravitaciona konstanta, a  $g$  je ukupna energijska gustina svemira. Kako je  $R(t)$  u opštem slučaju neka relativna mera metričke udaljenosti dve materijalne tačke (čestice) kao funkcija vremena, odnos  $\dot{R}/R$  je u stvari Hubble-ova konstanta  $X$  (koja, kako je već rečeno jeste funkcija vremena), koja odražava Hubble-ovo širenje.

Prethodna jednačina se može napisati i u nešto drugačijem obliku, tako da postaje očigledno da je vrednost signature zakriviljenosti određena vrednošću  $g$  i  $\dot{R}/R = X$ :

$$\frac{k}{(XR)^2} = \frac{g}{3X^2/8\pi G} - 1 = \Omega - 1 \quad (3)$$

$$3X^2/8\pi G = g_{crit} \quad (3a)$$

gde je  $\Omega = g/g_{crit}$  a  $g_{crit}$  je kritična gustina svemira, tj. minimalna sadašnja gustina svemira potrebna da bi proces širenja prestao i ustupio mesto sabijanju /Weinberg/.

S obzirom da je gustina energije proporcionalna sa  $R^{-n}$  gde je  $n=3$  za materiju, a  $n=4$  za zračenje (gustina fotona je srazmerna sa  $R^{-3}$ , a energija svakog fotona je srazmerna sa  $\lambda^{-4}$  (talasnom dužinom), koja je proporcionalna sa  $R(t)$ , dakle i energija fotona je srazmerna sa  $R^{-1}(t)$ ), iz jednačine (3) sledi da će se svemir i dalje širiti ukoliko je  $k < 0$  ( $g < g_{crit}$ ), ili će u jednom trenutku prestati da se širi i počeće rekolapsiranje u slučaju da je  $k > 0$  ( $g > g_{crit}$ ), ili će se i dalje širiti sa sve manjom i manjom ekspanzionom brzinom u slučaju da je  $k=0$  ( $g = g_{crit}$ ). U prvom slučaju govorimo o otvorenom, u drugom slučaju o zatvorenom, a u trećem slučaju o ravnom svemiru (sl. 3).

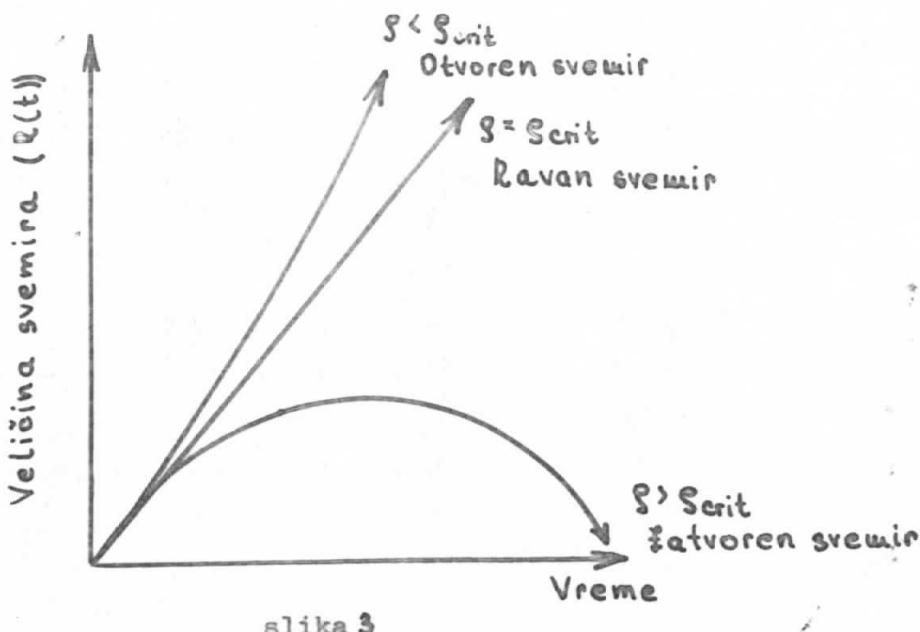
Problem nemogućnosti standardnog modela da objasni današnju procenjenu vrednost odnosa ukupne prema kritičnoj gustini ( $\equiv \Omega$ ) naziva se problem ravnosti ovog modela.

Iako se danas  $\Omega$  ne zna sa velikom preciznošću, mogu se dosta pouzdano odrediti granice u kojima se kreće:

$$0,01 \leq \Omega \leq \text{nekoliko}$$

(ovo "nekoliko" varira u literaturi - vrednosti se kreću od 2 /62/ do 10 /75/

/E4/



## ILUSTRACIJA BUDUĆNOSTI SVEMIRA

Za  $\Omega < 1$  - večita ekspanzija sa sve manjom brzinom

Za  $\Omega = 1$  - večita ekspanzija

Za  $\Omega > 1$  - rekolapsiranje u budućnosti

pri čemu donju granicu određuje gustina svetle materije u svemiru, a gornju starost svemira.

Iz jednačine (3),  $\Omega$  se može napisati i na sledeći način:

$$\Omega = \frac{1}{1-x(t)}$$

gde je

$$x(t) = \frac{k/k^2}{8\pi G/3}$$

Očigledno je da  $\Omega$  nije konstanta, nego se menja sa vremenom kao i veličina  $x(t)$ :

$$\chi(t) \propto \begin{cases} R(t)^2 & \text{za zračenje} \\ R(t) & \text{za materiju} \end{cases}$$

To što je  $\Omega$  danas reda veličine jedinice, upućuje na to da je u ranijim vremenima odstupanje od jedinične vrednosti bilo vrlo malo:

$$|\Omega(10^{-43}s) - 1| \sim O(10^{-60})$$

$$|\Omega(1s) - 1| \sim O(10^{-16})$$

Standardni model ne daje objašnjenje za vrednost  $\Omega$ , već i ovu činjenicu uzima kao deo početnih uslova.

#### 1.3.4 BARIONSKI BROJ SVEMIRA

*/L1; S1; T3; T5/*

Ovaj problem se javlja kada se pokuša objasniti višak bariona u odnosu na antibarione (što je svakako observabilna činjenica) kao i odnos broja fotona i barionskog broja  $n_b/n_g \sim 10^{-9}$ . Standardna kosmologija ovo ne može da objasni. Međutim, kombinacija kosmologije i fizike elementarnih čestica beleži po ovom pitanju bariogeneze svoj najveći uspeh. Velika ujedinjavajuća teorija (GUT) predviđa takve interakcije u kojima ne važi konzervacija barionskog broja i u kojima dolazi do narušavanja C i CP simetrije. Ovakve interakcije vode do barionske asimetrije. /za dalje informacije pogledati npr. S1/

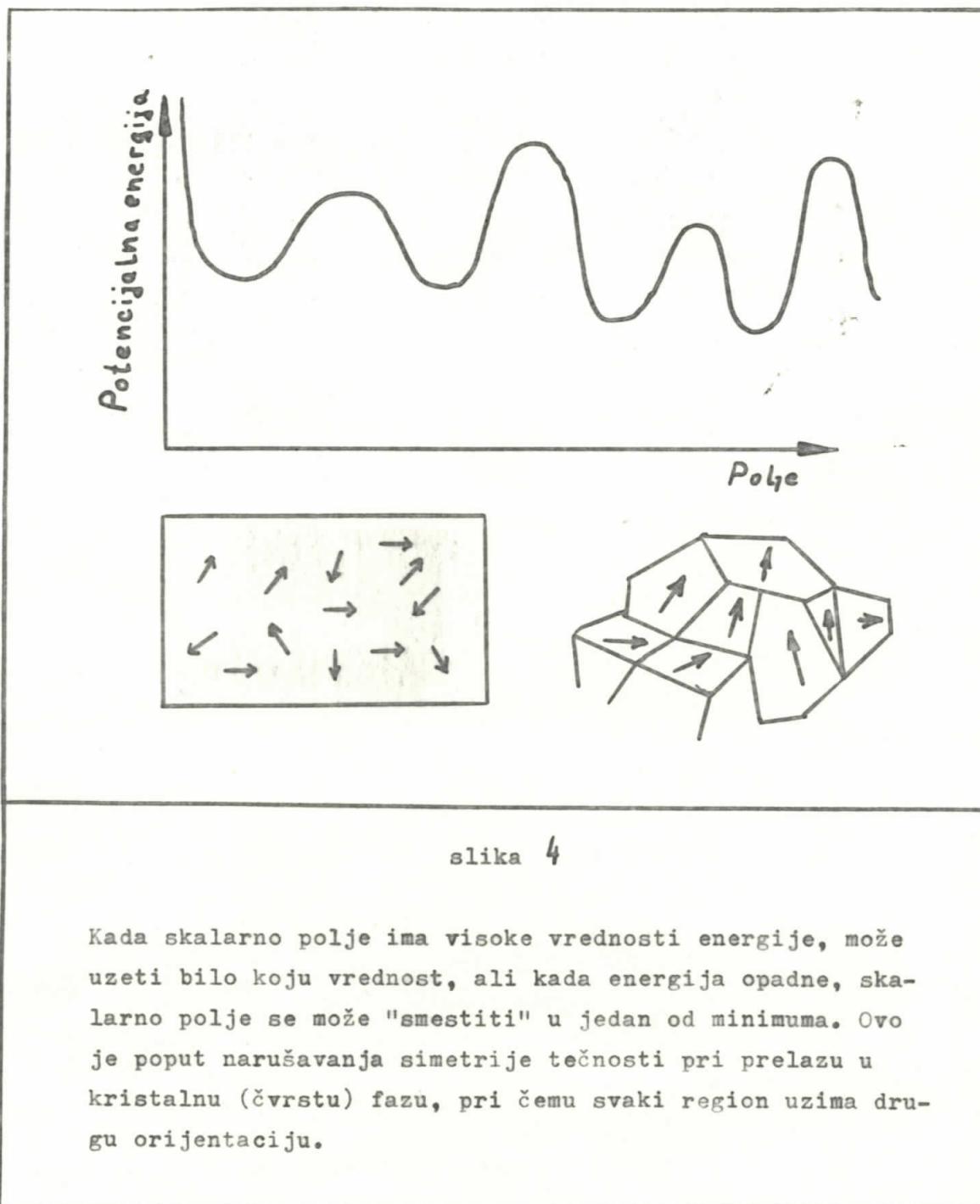
Iako je ova ideja vrlo privlačna, i za sada deluje kao važeća, precizniji proračun u vezi barijumskog broja  $n_b$  će moći da se urade tek kada GUT bude kompletno poznata.

#### 1.3.5 MAGNETNI MONOPOLI I DOMENSKI ZIDOVCI

*/G2; L2; L4; T3; T5/*

Za vreme faznog prelaza (o čemu je bilo reči u 1.2) pri hladjenju svemira, moguće je da se dogodilo nešto slično kristalizacijskoj tečnosti. Po mnogim teorijama interakcija elementarnih čestica, potencijalna energija skalarnog polja ima mnogo minimuma, približno iste dubine, ali za različite vrednosti polja. (slika 4) Ako su te teorije tačne, skalarno polje bi se moglo "smestiti" u bilo koji od ovih minimuma kad se svemir dovoljno ohladi. Po analogiji sa kristalom koji raste iz ohladjene tečnosti, najverovatnije je da će se različiti regioni svemira smestiti u različite minimume skalarnog polja. Rezultat bi bio stvaranje "svemirskih" domena koji su razdvojeni domenskim zidovima koje karakteriše velika površinska

energija. Kad bi neki domenski zid postojao u observabilnom delu svemira, vrlo jasno bi se uočio, kao region ekstremne anizotropije. Međutim tako nešto nije uočeno.



Kombinacija GUT -a i kosmologije, osim ovih površinskih defekata, predviđa postojanje i tačkastih defekata koji bi trebali biti veoma masivni ( $10^{16} M_p$ ) i trebali bi posedovati magnetno nanelektrisanje, poput izolovanih magnetnih polova, zbog čega su nazvani magnetni monopolii. Ova teorija predviđa toliko ovih masivnih čestica da bi gustina energije svemira vrednost  $\Omega$  podigla na čak  $10^{12}$ . Ovo bi dalje značilo da bi mikrotalasni kosmički šum vrednost od  $3k$  dostigao posle 30 000 godina, a ne  $10^{10}$ , koliko mu je pod vladajućim uslovima trebalo.

Iako se predviđa ogroman broj ovih tačkastih defekata, do danas ni jedan nije registrovan.<sup>2</sup>

Krajem sedamdesetih je postalo jasno da nove teorije elementarnih čestica i standardni model ne mogu dati jedinstvenu, važeću (po sadašnjim merilima) sliku ranog svemira.

Problemi su većim delom uspeli biti rešeni promenom kosmološkog modela u kontekstu inflacionog scenarija svemira.

### 1.3.6 MALA VREDNOST KOSMOLOŠKE KONSTANTE – ILI BOLJE PROBLEM ENERGIJE VAKUMA

Brzina ekspanzije svemira danas ( $X \approx 50-100 \text{ km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ ) ograničava totalnu gustinu energije na  $\lesssim 0 (10^{-29} \text{ g cm}^{-3}) \approx 10^{-46} \text{ GeV}^4$ . Ovo znači da gustina energije vakuma (koji je f-ja jednog ili više skalarnih polja) mora biti

$$V(\gamma) \lesssim 10^{-46} \text{ GeV}^4$$

Danas još ne postoji zadovoljavajuće objašnjenje za ovaku malu vrednost energije vakuma. U razjašnjavanju ovog problema, mnogo se očekuje od veze izmedju teorije gravitacije i kvantne teorije polja.

~ ~ ~

U ovom delu je vrlo ukratko objašnjeno kako standardna kosmologija objašnjava evoluciju svemira. Proces je dobro objašnjen od prve stotinke sekunde pa nadalje, ali problemi nastaju ekstrapolacijom ovog modela do vremena  $10^{-43} \text{ s}$ . Nove teorije o svemirskoj evoluciji, inflacione teorije, rešavaju neke od ovih problema, ali isto tako zadržavaju i uspehe standardne kosmologije, jer se ova dva scenarija uglavnom poklapaju posle prve stotinke sekunde.

2. TEORIJA INFLACIONOG SVEMIRA

Godine 1980. Alan Guth je objavio svoju ideju o novom modelu evolucije ranog svemira. Ovaj novi model je nazvan inflatornim, asocirajući na eksponencijalno širenje svemira koje previdja.

Ovaj deo rada počinje sa orginalnom Guth-ovom verzijom, koja se naziva "starim inflatornim modelom".

Svaki kosmološki model mora početi sa nekim prepostavkama o početnim uslovima vladajućim u svemiru, ali za inflatorni model ti početni uslovi mogu biti prilično proizvoljni. Jedino što se mora prepostaviti je da je rani svemir imao bar neke régione gasa koji su bili na temperaturi većoj od kritične temperature faznog prelaza, i da su ti regioni bili u ekspanziji. U tako toplim oblastima skalarna Higgs-ova polja bi imala vrednost nula, jer pod takvim uslovima (na tim temperaturama) to stanje je stanje simetrije. Pošto ekspanzija svemira povlači za sobom i sniženje temperature, Higgs-ova polja "dobijaju" neku vrednost različitu od nule, što implicira stanje narušene simetrije.

Ukoliko se ovaj fazni prelaz odvija vrlo polako u odnosu na brzinu hladjenja svemira, sistem bi se mogao hladiti ispod kritične temperature, a da Higgs-ova polja i dalje ostaju na nultoj vrednosti. Ovaj proces se naziva podhadjivanje, po analogiji sa procesom u fizici kondenzovane materije (voda se, na primer, brzim hladjenjem može ohladiti i do dvadeset stepeni ispod tečke mržnjenja).

Kako se region gase nastavlja podhadjivati, približice se jednom stanju materije poznatom kao lažni vakuum. Ovo je osnovna ideja inflatornog scenarija - postojanje energije vakuma različite od nule.

Ukupna gustina energije svemira ima dva člana - jedan takozvani termalni član (koji je u stvari dopuna relativističkih i nerelativističkih čestica ukupnoj gustini energije) koji naravno brzo opada pri ekstremnom podhadjivanju i drugi - gustinu energije vakuma, što je konstantna vrednost. Vrlo brzo, ova gustina energije vakuma uveliko premašuje vrednost termalne komponente, te se može pisati da je

$$\rho = V(0) = \text{const.}$$

Kada se ovo zameni u jednačini (2), dobija se da ekspanzija svemira postaje eksponencijalna, tj. kosmički faktor razmere  $R(t)$

postaje eksponencijalna funkcija vremena:

$$R(t) \sim e^{xt} \quad (4)$$

gde je  $\chi$  (Hubble-ova konstanta) data kao

$$\chi = \left( \frac{8\pi V(0)G}{3} \right)^{1/2} \quad (4a)$$

Dakle, kada termalna komponenta gustine energije postane zanemarljiva u odnosu na gustinu energije vakuma, svemir ulazi u fazu u kojoj kosmički faktor razmere počinje da raste eksponencijalno. Ova faza se naziva de Sitter-ova faza. Zbog eksponencijalnog rasta  $R(t)$ , član  $k/t$  u jednačini (2) se može zanemariti, što znači da svemir postaje ravan.

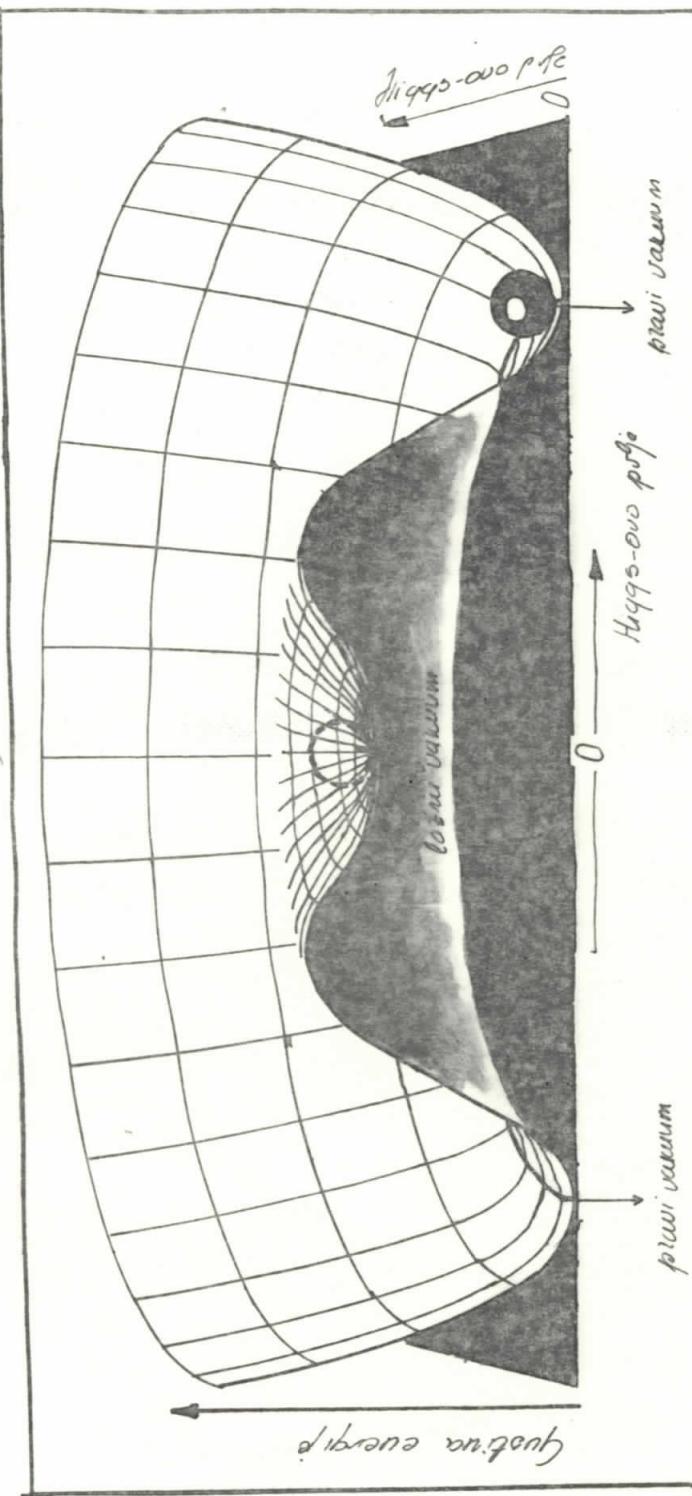
Svemir koji se širi eksponencijalno opisan je de Sitter-ovom metrikom (za ravan svemir):

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + R^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ ds^2 &= -dt^2 + e^{2xt}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \end{aligned} \quad (5)$$

Interesantno bi bilo vratiti se na Guth-ovo objašnjenje faznog prelaza i inflacije. Za opisivanje faznog prelaza, on koristi potencijal oblika na slici 5. Za nultu vrednost Higgs-ovih polja postoji ogromna gustina energije lažnog vakuma. Po klasičnim zakonima, stanje za nultu vrednost Higgs-ovog polja je stabilno zbog postojanja potencijalne barijere. U kvantnoj verziji modela, stanje lažnog vakuma nije apsolutno stabilno. Po ovoj verziji, sva polja bi kontinualno fluktuirala. Ove fluktuacije će prouzrokovati tunelovanje Higgs-ovih polja u malom regionu u prostoru u svemiru kroz energetsku barijeru (što je karakteristika faznih prelaza prve vrste) stvarajući "mehur" faze narušene simetrije. Mehur će tada početi da raste brzinom koja se približava brzini svetlosti, pretvarajući lažni vakuum u fazu narušene simetrije. Rast ovih mehura narušene simetrije Guth objašnjava fenomenom repulzivne gravitacije (što stvarno sledi iz druge Einsteinove jednačine  $\ddot{\ell} = -\frac{4\pi}{3}G(g+3p)R$ , pod uslovom da je pritisak lažnog vakuma i velik i negativan, što po Guth-u i jeste).

Prema ovom modelu, era inflacije traje  $10^{-32}$  s ili duže, i za ovo vreme dijametar svemira se uveća za faktor  $10^{50}$  ili više. Predpostavlja se da se posle ove ekspanzije konačno dešava prelaz u stanje narušene simetrije. Tada se oslobadja energija lažnog vakuma što rezultira u ogromnom broju čestica. Ovim je region zagrejan skoro do kritične temperature (oslobodjena energija je ustvari latentna toplota - po analogiji sa oslobodjenom energijom pri smrzavanju vode). Od ove tačke pa nadalje region nastavlja da se širi i hlađi kako to

slika 5



Na ovoj slici je prikazana gustina energije svemira u trodimenzionom dijagramu, kao funkcija dva Higgs-ova polja. Površina koja je prikazana je rotaciono simetrična u odnosu na vertikalnu osu koja odgovara ranultoj vrednosti ovih skalarnih polja. Rotaciona simetrija je narušena kada bar jedno polje poprini neku vrednost (koja je različita od nule). Teorija je formulisana tako da su stanja najviše energije, odnosno pravog vakuuma, u stvari stanja narušene simetrije, i vidi se da formiraju kružnicu na horizontalnoj ravni. Ovo dalje upućuje na analogiju evolucije svemira i lopte koja se kotrlja no površini. U tom slučaju, gustina energije svemira bi bila određena visinom lopte a vrednost Higgs-ovih polj - rastojanjem lopte od vertikalne centralne ose. Kada oba Higgs-ova polja imaju nullu vrednost, lopta je smeštena na osu simetrije, u lažnom vakpumu, a kada ova polja imaju vrednost koja odgovara najnižoj mogućoj vrednosti rustine energije, lopta se nalazi negde u udubljenju koje odgovara stanju narušene simetrije, tj. u pravom vakuumu. Inflacija svemira se događa kada je on u stanju lažnog vakuuma. Po zakonima klasične fizike, to stanje je apsolutno stabilno, ali po kvantnoj fizici, polja u malim regionima prostora mogu tunelovati kroz energetsku barijeru, formirajući "mehurove" faze narušene simetrije, koji bi potom počeli da rastu.

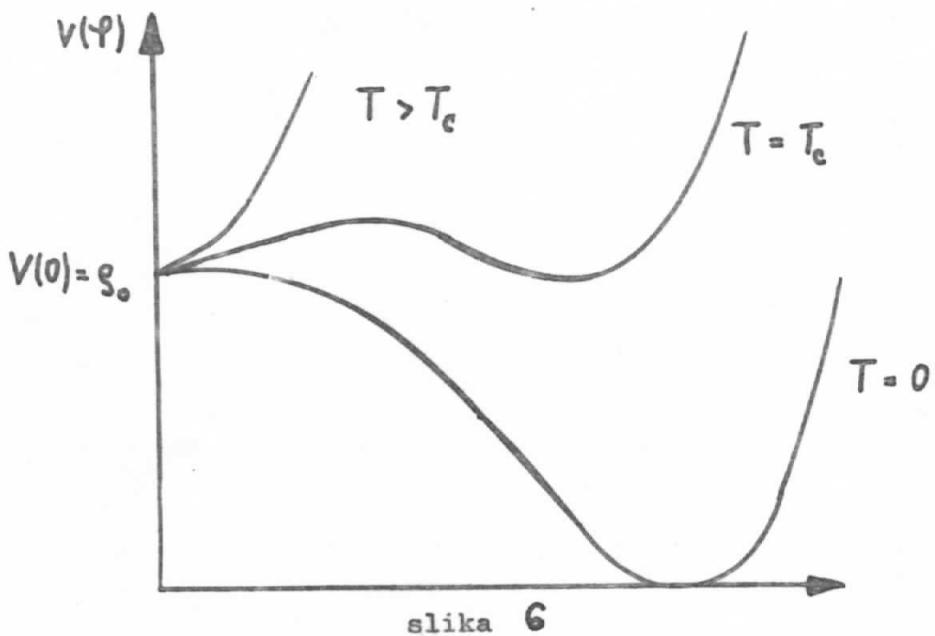
predviđa standardni model.

Ubrzo posle objavljuvanja svog rada sam Guth otkriva neke njegove ozbiljne nedostatke. Naime, fazni prelaz ovakve vrste onemogućava da svemir napusti de Sitter-ovu fazu eksponencijalnog rasta, jer mehurići narušene simetrije se brže udaljavaju jedni od drugih, nego što se sami šire. Ovo bi dalje rezultiralo u velikoj nehomogenosti svemira, što je u suprotnosti sa observabilnim činjenicama.

Originalni Guth-ov model je mogao da objasni problem horizonta i ravnosti, no pošto to na isti način objašnjava i novi inflatorni scenario, načini rešavanja problema standardne kosmologije će biti opisani posle novog inflacionog scenario.

Autori nove inflacione teorije su Linde, Albrecht i Steinhardt.

Osnovna razlika je u načinu prelaženja iz faze simetrije u fazu narušene simetrije. Zavisnost potencijala  $V(\Psi)$  i skalarnog polja je prikazana na slici 6.



POTENCIJAL U FUNKCIJI SKALARNOG POLJA

za  $T > T_c$  postoji jedan minimum, na  $T_c$  se formira drugi minimum;  
a na  $T=0$  dolazi do degeneracije minimuma.

Dakle, u ovom slučaju nema energetske barijere koja razdvaja lažni od pravog vakuma (ovaj tip potencijala se naziva i Coleman Weinberg-ov); umesto toga, lažni vakuum "leži" na prilično ravnom platou ovog potencijala. Ovakva funkcija gustine energije dovodi do specijalnog tipa faznog prelaza - faznog prelaza II vrste ili sporo kotrljajućeg prelaza tj. "slow-rollover" prelaz (za razliku od prelaza u originalnom modelu, koji se naziva prelazom I vrste).

Početak scenaria je isti kao i početak Guth-ove verzije. Dakle, opet se kreće od predpostavke da je rani svemir imao regije koji su bili na većoj temperaturi od kritične i da su se ti regioni širili. U ovim regionima termalne fluktuacije "drže" vrednost Higgs-ovih polja na nuli, tako da je simetrija nenarušena. Kako se temperatura smanjuje, stvaraju se uslovi da bar jedno Higgs-ovo polje poprimi vrednost različitu od nule, što naravno rezultira u narušavanju simetrije. Kao i u prethodnom slučaju, brzina ovog faznog prelaza bi trebala biti vrlo mala u poređenju sa brzinom hlađenja. Opet bi se sistem podhlađivao do nulte temperature, dok bi Higgs-ova polja zadržavala nultu vrednost i rezultujuće stanje bi opet bilo lažni vakuum.

Veoma bitna razlika izmedju starog i ovog novog scenarija je u načinu ostvarivanju faznog prelaza. Kvantne fluktuacije bi prouzrokovale devijaciju Higgs-ovih polja od nule. Pošto nema energetske barijere, vrednost Higgs-ovih polja se povećava kontinualno. Pošto je gornji deo krive u obliku platoa, početak evolucije je bio veoma spor. Sve dok Higgs-ova polja imaju vrednost oko nulte, gustina energije je otprilike ista kao i energija lažnog vakuma. Kao i u originalnom scenariju, svemir bi došao u stanje eksponencijalne ekspanzije, udvostručavajući se u dijametru svakih otprilike  $10^{-34}$  s. Sada će međutim ekspanzija još da se ubrza kada Higgs-ova polja "dodju" do strmijeg dela krive. Može se usvojiti da je faktor ekspanzije  $10^{50}$ , ali precizniji proračuni zavise od detalja fizike elementarnih čestica koji se usvoje.

Do sada je opis faznog prelaza bio više nego pojednostavljen. Zapravo postoji mnogo različitih stanja narušene simetrije, bar kao što postoji mnogo mogućih osa za orijentaciju kristala. Postoji i veliki broj Higgs-ovih polja, i različita stanja narušene simetrije su određena kombinacijom Higgs-ovih polja sa vrednošću različitom od nule. Kako su fluktuacije koje dovode Higgs-ova polja u vrednost različitu od nule proizvoljne, različiti regioni primordi-

jalnog svemira će biti dovedeni do različitih stanja narušene simetrije; svaki region će formirati domen sa početnim radijusom reda veličine rastojanja horizonta. Na početku faznog prelaza rastojanje horizonta je iznosilo oko  $10^{-24}$  cm / G2 /. Kada se formiraju domeni, razvijaće se ka jednom od stabilnih stanja narušene simetrije, inflatirajući za faktor  $10^{50}$  ili više, što znači da bi veličina domena posle inflacije bila  $10^{26}$  cm ili više. Ovo dalje znači da se ceo observabilni svemir može smestiti u jedan takav domen.

Zbog ove ogromne inflacije, bilo koja gustina čestica koja je mogla biti prisutna u tom regionu pre njegovog rasta, posle inflacije je faktički dovedena do nule. Postaje očito da je ceo energetski sadržaj domena bio koncentrisan u Higgs-ovim poljima. Kada se ova polja nadju u minimumu po završetku faznog prelaza (dakle, u pravom vakuumu) počeće oscilovati. Ova situacija se takođe može objasniti i kao stanje sa velikom gustom Higgs-ovih čestica. Ove čestice bi bile medjutim vrlo nestabilne - vrlo brzo bi se raspadele na lakše čestice koje bi interagovale medju sobom i možda se dalje raspadale. Naravno, ove procese prati i proces oslobadjanja energije. Kao rezultat, sistem postaje ubrzo topli gas elementarnih čestica u termalnoj ravnoteži, baš kao što standardni model zahteva u svojoj polaznoj pretpostavci. Ova temperatura ponovnog zagrevanja se može proceniti i iznosi obično za faktor 2-10 / npr. G2,  $T^4$  / ispod kritične temperature (temperature prelaza).

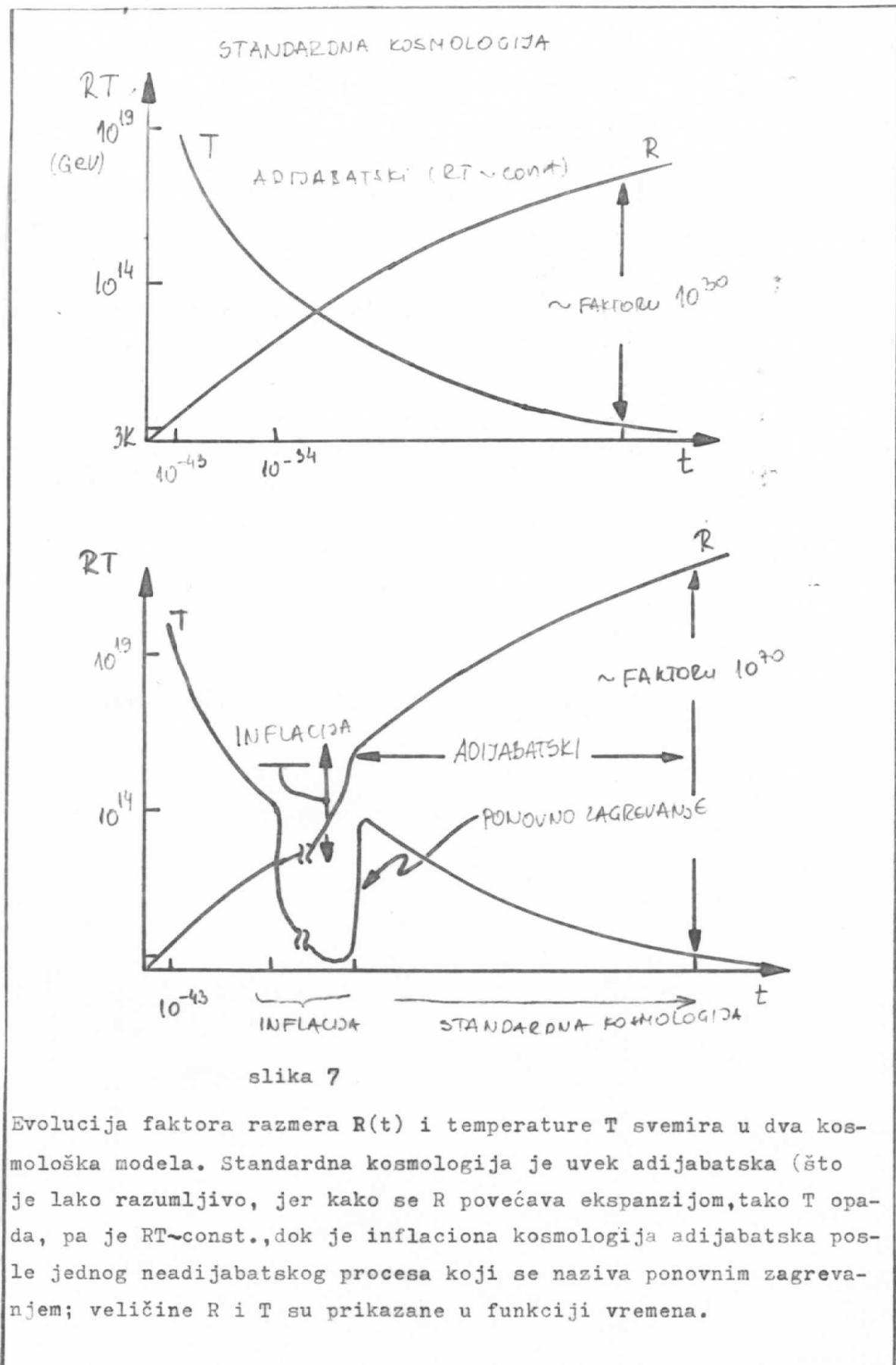
Od ove tačke pa nadalje ovaj scenario je identičan sa standardnim "big-bang" scenarijem, što znači da sve uspehe standardnog modela ovaj model zadržava.

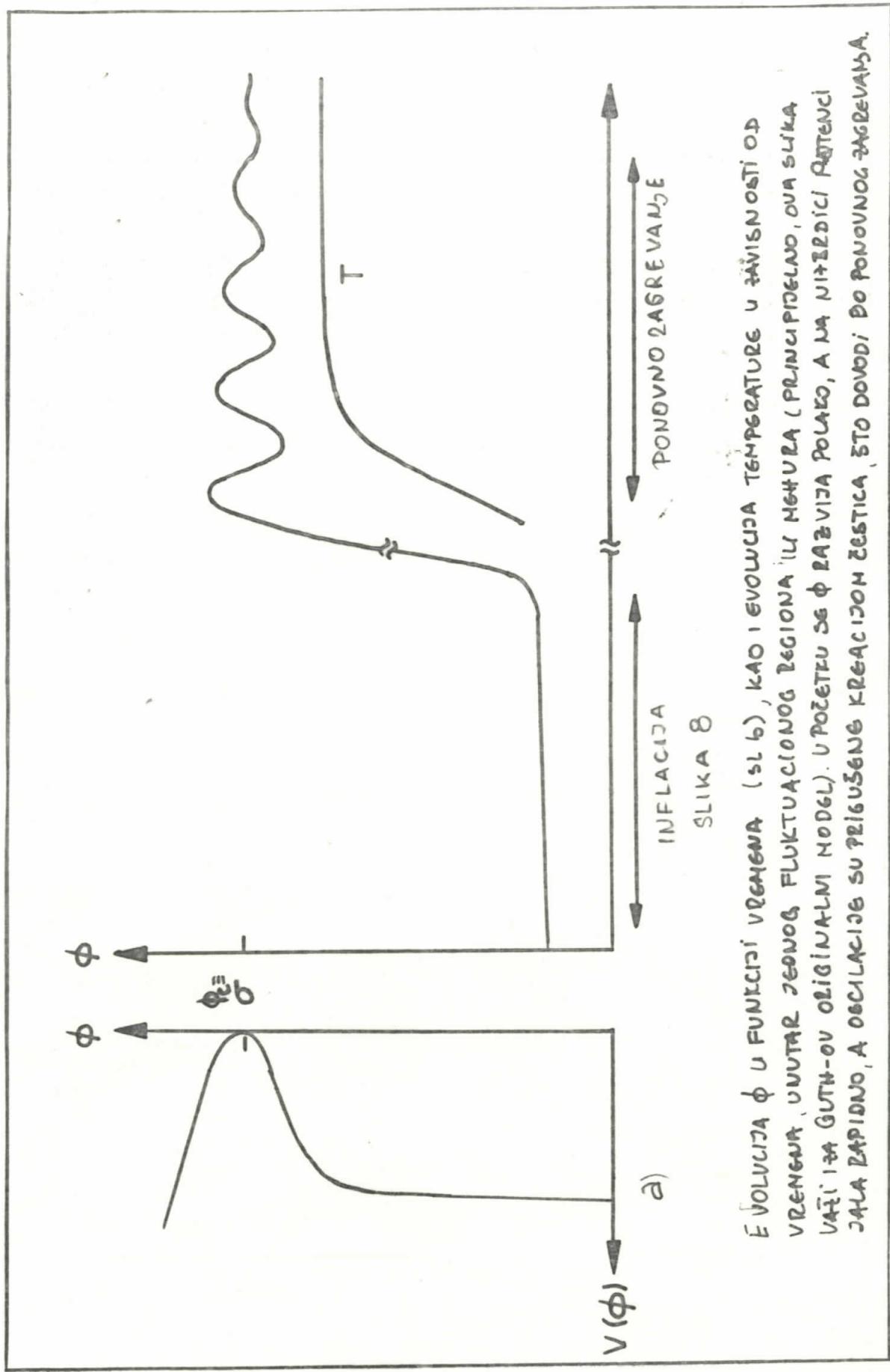
Ovim modelom je otklonjen nedostatak i orginalne GUTH-ove verzije. Zbog platoa potencijala tj. "slow-rollover" faznog prelaza, domeni su okruženi drugim domenima a ne lažnim vakuumom, zato se obično za ovaj model i ne uzima terminologija kao za prvi. Govoriti o mehurovima, ovde baš nema smisla, čak ni zbog očiglednosti.

## 2.1 ODGOVORI NA PROBLEME STANDARDNE KOSMOLOGIJE

Po inflacionom modelu svemira, kao što je već pomenuto, ceo opservabilni svemir se razvija iz jednog regiona vrlo malih početnih dimenzija. Ovo je naravno moguće zbog eksponencijalnog rasta regiona, za vreme koga se dijametar regiona poveća za faktor  $10^{50}$ .

Iz ove pretpostavke da se observabilni svemir razvio





EVOVCIJA  $\phi$  U FUNKCIJI VРЕМЕНА (sl 6), KAO I EVOLUCIJA TEMPERATURE U ЗАВИСНОСТИ OD VРЕМЕНА, UNUTAR JЕНОВ FLUKTUACIONOG REGIONA IZ NEUTRA (PRIMER PRIGLAĐAO, DVA SLIKA VАГИ I ГУНДОВ ОРИГИНАЛНИ МОДЕЛ). У ПОЧЕТУ СЕ  $\phi$  РАЗВИЈА ПОЛАКО, А НА НИЗРДИЦИ РАСПЕЧАДА РАПИДНО, А ОСЧЛАДИС СУ ПРЕКУСЕЊЕ КРЕАЦИЈОМ ЧЕСТИЦА, ЕТО ДОВОДИ DO ПОНУНОУ ЗАДЕВАЊА.

iz jednog regiona, mogu proizaći mnogi važni zaključci. Ova pretpostavka je u stvari ključ za rešavanje zagonetki standardnog modela.

Kako su dimenzije regiona pre inflacionog rasta bile manje od horizonta, ceo današnji observabilni svemir je bio povezan, te su postojali identični fizički uslovi u svakoj tački regiona, odnosno region je mogao postati homogen i izotropan. Na taj način se može objasniti problem horizonta standardne kosmologije, odnosno problem homogenosti i izotropnosti.

Za problem nehomogenosti na malim razmerama ne može se reći da je u potpunosti rešen. Ipak, novi inflacioni model dovodi do nekih realnih predvidjanja za spektar nehomogenosti. Može se reći da proces inflacije "briše" bilo kakve primordijalne nehomogenosti koje su mogle biti prisutne pre faznog prelaza. Potom, zbog faznog prelaza dolazi do pojave kvantnih fluktuacija u Higgs-ovim poljima, a samim tim i do nehomogenosti. Ove nehomogenosti se kreiraju na vrlo, vrlo malim razmerama (u razmerama u kojima važe zakoni kvantne fizike) te ih ekspanzija doveđe na danas observabilne razmere. Predviđeni oblik spektra nehomogenosti ne zavisi od rastojanja.

Ravnost današnjeg svemira se vrlo lako objašnjava - to je logična posledica inflacionog širenja. Radi očiglednosti, dovoljno je napraviti analogiju sa balonom koji se naduvava, pri čemu mu zakrivljenost postaje sve manja.

Eksponencijalnim rastom svemira se objašnjava i nepostojanje (ili postojanje u zanemarljivo malom broju) magnetnih monopola i neregistrovanje bilo kakve anizotropije u observabilnom svemiru koja bi upućivala na postojanje domenskih zidova. Postoje mišljenja da bi se magnetni monopoli mogli proizvesti u većim količinama u procesu ponovnog zagrevanja svemira, ali se ispostavilo daovo ne može biti tačno, zbog ogromne mase ovih "egzotičnih" čestica - proces ponovnog zagrevanja je mogao dovesti do stvaranja zanemarljive količine ovih čestica.

Ono što ostaje kao problem i u inflacionim teorijama je pitanje energije vakuuma ili kako se to još naziva - pitanje kosmološke konstante po analogiji sa Einstein-ovim kosmičkim članom. Iako rešava dosta drugih problema, može se reći:  
 "...inflation is, in some sense, a house of cards built upon the cosmological constant puzzle". / M. Turner /

## RESUMÉ'

Za kraj ovog dela, kao resumé, još samo pokušaj da se na što jednostavniji način odgovori na ne baš jednostavno pitanje:

ZAŠTO DOLAZI DO INFLATORNOG ŠIRENJA SVEMIRA

Zašto je svemir, za vreme trajanja spontanog narušavanja simetrije prešao iz svog "normalnog" stanja lagano uspostavljuće ekspanzije u stanje u kome se ekspanzija ubrzala?

Ovo ponašanje svemira se lako može razumeti razmatrajući energiju koja igra ulogu u ovom procesu. Ukupan energetski sadržaj svemira (uglavnom u obliku zračenja u vrlo ranim vremenima) je fiksan i sastoji se od dve komponente: kinetičke energije (koja zavisi od brzine ekspanzije) i gravitacionog privlačenja (koje je funkcija gustine energije).

Kako samogravitacija usporava ekspanziju svemira kinetička energija je konvertovana u gravitacionu potencijalnu energiju. Analogan proces (možda lakši za razumevanje) je način na koji kamen bačen u vis sa Zemlje usporava i stiče potencijalnu energiju u svom letu u vis.

Po standardnom modelu ovakva situacija uvek preovladava - ekspanzija se uvek usporava zbog uticaja gravitacije. Kako se materijalni sadržaj svemira širi i sve više razdvaja (sve više međusobno udaljava) potencijalna energija nastavlja da se povećava na račun kinetičke energije.

Uvodjenjem GUT-a u ovu sliku, pojavljuje se još jedan izvor energije - energija razlike izmedju stanja simetrije i stanja narušene simetrije (ili latentna toplota - ako se pravi analogija sa tečno-čvrsto faznim prelazom). U početku ova energija je zanemarljiva pa su ekspanzija i usporenje isti kao i za standardni model. Međutim, nasuprot gustini energije zračenja koja opada kako se svemir širi, gustina energije vakuma ostaje konstantna.

Zbog ovoga, ako  $10^{-35}$  s posle "big bang-a" odnosno po spontanom narušavanju simetrije, energija vakuma postaje značajnija od energije radijacije. Zbog toga, ukupna gustina energije svemira teži fiksnoj vrednosti i kombinacija ovoga i svemirske ekspanzije prouzrokuje naglo opadanje gravitacione vezivne energije. Posledica je povećanje ekspanzije.

Glavna karakteristika nove inflacione teorije svemira je fazni prelaz posebnog tipa, tzv. "slow-rollover" prelaz, koji su uveli Linde, Albrecht i Steinhardt 1982. godine. To je takva vrsta prelaza u kome se polje "spušta" polako, duž "nizbrdice" potencijalne energije čiji je oblik prikazan na slici 6. Očito je da razumevanje inflacionog scenarija podrazumeva razumevanje evolucije skalarnog polja. Ovde će biti opisano kvantno ponašanje ovog skalarnog polja, posebno za vreme najranijih stanja ovog sporog "kotrljanja" (spuštanje niz krivu potencijalne energije). Jasno je da su ovi kvantni efekti igrali vrlo važnu ulogu u ranom svemiru jer od njih zavisi koliko dugo će skalarna polja ostati u blizini vrlo krive potencijala što znači da određuju i dužinu trajanja inflacione ere. Isto tako ove kvantne fluktuacije su "odgovorne" i za fluktuacije masene gustine, u kojima se vidi početni uslov za kasnije formiranje galaksije.

U ovom radu će se koristiti to da se sistem može u kasnijim vremenima opisati klasičnom raspodelom verovatnoće, tako da se dobije jedan aproksimativni ali tačno rešiv model skalarnog polja. Zbog toga će se izlaganje dinamike skalarnog polja početi sa proučavanjem problema jednodimenzionog inverznog harmonijskog oscilatora kao primerak za kvantno-mehaničko ponašanje nestabilnog sistema. Posebno će se objasniti zašto se ponašanje ovakvog sistema u kasnijim vremenima može opisivati klasično, iako se ne može govoriti o jednoj klasičnoj trajektoriji nego se mora opisati klasičnom distribucijom verovatnoće.

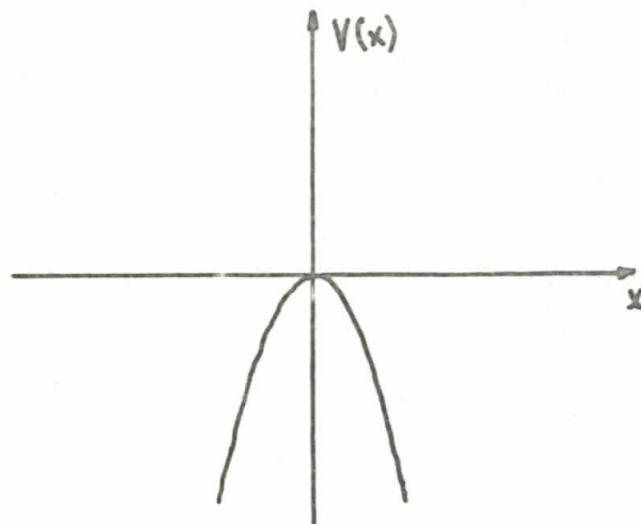
### 3. KVANTNA MEHANIKA INVERZNOG HARMONIJSKOG OSCILATORA (RADNOG MODELA)

Razmatramo česticu koja se kreće u potencijalu oblika

$$V(x) = -\frac{1}{2} x^2 k, k > 0 \quad (3.1)$$

koji je prikazan na slici 9.

Čestica je  $t=0$  opisana talasnom funkcijom koja je centrirana (zbog parnosti) i ima pik u  $x=0$ . Zbog jednostavnosti se uzima da je oblika Gausijane.



slika 9

## POTENCIJAL INVERZNOG HARMONIJSKOG OSCILATORA

Uzimajući u obzir jed (3.1) Schrödinger-ova jednačina se može napisati kao:

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{1}{2} kx^2 \Psi \quad (3.2)$$

(evidentno je, da ukoliko se uvede smena  $\omega \rightarrow -i\omega$  (ili  $i\omega$ ), ili  $\omega^2 \rightarrow -\omega^2$ ), jednačina (3.2) postaje identična sa Schrödinger-vom jednačinom za obični L.H.O., te se na taj način može naći  $\Psi(x)$ , a potom, uz pomoć Green-ovih f-ja i  $\Psi(x,t)$ ; za dalje informacije - G.Barton "Quantum mechanics of the inverted Oscillator Potential" - Annals of physics 166, 322-363 str.).

Po analogiji sa funkcijom osnovnog stanja kod običnog oscilatora, rešenje u ovom slučaju, za jednačinu 3.2 se traži u obliku:

$$\Psi(x,t) = A(t) e^{-B(t)x^2} \quad (3.3)$$

a veličine  $A(t)$ ;  $B(t)$  se određuju tako što se nadju odgovarajući izvodi veličine  $\Psi(x,t)$  i zamene u jednačini 3.2, pri čemu se dobije:

$$i\hbar [A'(t) - A(t)x^2 B'(t)] = -\frac{\hbar^2}{2m} [4A(t)x^2 B^2(t) - 2A(t)B(t)] - \frac{1}{2} kx^2 A(t)$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz različite stepene od  $x$ , dobije se:

$$ik \ddot{A}(t) = \frac{k^2}{m} A(t) B(t) \quad (3.4a)$$

$$ik \ddot{B}(t) = \frac{2k^2}{m} B^2(t) + \frac{1}{2} k \quad (3.4b)$$

Pri rešavanju ovih jednačina, korisno je uvesti sledeće parametre

$$\begin{aligned} \omega^2 &\equiv k/m, & \omega &= (k/m)^{1/2} \\ a^2 &\equiv k/m \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} t \\ \int \end{array} \right\} (3.5)$$

Pokazaće se da se sistem može opisati klasičnom fizikom kada su u pitanju razmere velike u poređenju sa  $a$  (koje ima dimenziju dužine). Od jednačina 3.4 prvo se rešava ona po  $B$ . U par koraka će biti pokazano kako se došlo do rešenja ove jednačine.

$$ik \ddot{B}(t) = \frac{2k^2}{m} B^2(t) + \frac{1}{2} k /: k \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\frac{i}{\omega} \ddot{B}(t) = 2a^2 B^2(t) + \frac{1}{2a^2}$$

$$\frac{d\dot{B}}{2a^2 B^2 + \frac{1}{2a^2}} = -i\omega t$$

i konačno integracijom gornje jednačine dobija se

$$B(t) = \frac{1}{2a^2} \operatorname{tg}(\phi - i\omega t) \quad (3.6)$$

gde je  $\phi$  realna integraciona konstanta, koja govori o širini talasnog paketa u  $t=0$ . I pri kompleksnoj vrednosti ove konstante, diferencijalna jednačina je zadovoljena, ali je ovde odabранo da se imaginarni deo integracione konstante "apsorbuje" pri redefiniciji početka vremena  $t$ . Talasni paket u tom slučaju ima minimum širine za  $t=0$ .

Izraz 3.6 za  $B$  se može napisati i na nešto drugačiji način, tj.  $\operatorname{tg}(\phi - i\omega t)$  se može napisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\phi - i\omega t) &= \frac{\sin \phi \cos i\omega t - \sin i\omega t \cos \phi}{\cos \phi \cos i\omega t + \sin \phi \sin i\omega t} = \\ &= \frac{\sin \phi \cos \phi - i \sinh \omega t \cosh \omega t}{1/2(\cosh^2 \omega t + \sinh^2 \omega t) + 1/2 \cos 2\phi (\cosh^2 \omega t - \sinh^2 \omega t)} \end{aligned}$$

odnosno,

$$\operatorname{tg}(\phi - i\omega t) = \frac{\sin 2\phi - i \sinh 2\omega t}{\cosh 2\omega t + \cos 2\phi}$$

te se izraz 3.6 može napisati i kao:

$$B(t) = \frac{1}{2a^2} \frac{\sin 2\phi - i \sinh 2\omega t}{\cosh 2\omega t + \cos 2\phi}$$

Sada se rešava druga jednačina iz para 3.4:

$$ik \dot{A}(t) = \frac{k^2}{m} A(t) B(t)$$

$$\frac{dA}{A} = -\frac{ik}{m} B dt = -\frac{ik}{m} \frac{1}{2a^2} \operatorname{tg}(\phi - i\omega t) dt$$

pa se za veličinu  $A(t)$  dobija sledeći izraz

$$A(t) = C (\cos(\phi - i\omega t))^{-1/2} \quad (3.7)$$

Za određivanje konstante  $C$  koristi se uslov normiranja:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} A(t) e^{-B(t)x^2} \cdot \dot{A}(t) e^{-B^*(t)x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} |A|^2 e^{-(B+B^*)x^2} dx = \\ &= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(B+B^*)x^2} dx = |A|^2 \sqrt{\frac{\pi}{2\operatorname{Re}(B)}} = 1 \end{aligned}$$

odavde se dobija da je:

$$|A|^2 = \sqrt{\frac{2\operatorname{Re}(B)}{\pi}}$$

odnosno

$$|A|^2 = \sqrt{\frac{1}{a^2\pi} \frac{\sin 2\phi}{\cosh 2\omega t + \cos 2\phi}}$$

Sa druge strane, iz jednačine (3.7) kvadrat modula veličine  $A(t)$  je:

$$|A|^2 = \frac{|C|^2}{[\cos(\phi - i\omega t) \cos(\phi + i\omega t)]^{1/2}} \frac{2^{1/2} |C|^2}{[\cos 2\phi + \cos h 2\omega t]^{1/2}}$$

konačno, konstanta  $C$  se dobija izjednačavanjem ova dva izraza sa  $|A|^2$ :

$$\frac{2^{1/2} |C|^2}{[\cos 2\phi + \cos h 2\omega t]^{1/2}} = \left[ \frac{1}{a^2\pi} \frac{\sin 2\phi}{\cosh 2\omega t + \cos 2\phi} \right]^{1/2}$$

pa je

$$|C|^2 = \frac{1}{a} \left( \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \sqrt{\sin 2\phi} \right)^2 ;$$

ako se uvede oznaka

$$b = \frac{a}{\sqrt{\sin 2\phi}} = a (\sin 2\phi)^{-1/2}$$

za C se uzima

$$C = b^{-1/2} (2\pi)^{-1/4}$$

tj. vrativši ovo u jednačinu (3.7) lako se dobija:

$$A(t) = (2\pi)^{-1/4} [b \cos(\phi - i\omega t)]^{-1/2} \quad (3.8)$$

U ovom slučaju je od interesa proučavanje ponašanja talasne f-je  $\Psi(x,t)$  za velika vremena ( $t \rightarrow \infty$ ) (iz razloga navedenih u uvodnom delu ovog poglavlja). Znači, potrebno je odrediti

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(x,t) = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t) e^{-B(t)x^2}$$

Radi očiglednosti i lakšeg određivanja potrebnog asymptotskog ponašanja, izrazi za A(t) i B(t) se mogu napisati u obliku eksponencijalnih f-ja. Posle kraćeg sredjivanja se dobiju sledeći izrazi:

$$A(t) = (2\pi)^{-1/4} b^{-1/2} [1/2(e^{i\phi + \omega t} - e^{-\omega t - i\phi})]^{-1/2}$$

$$B(t) = \frac{1}{2a^2} \frac{2\sin 2\phi - i(e^{2\omega t} - e^{-2\omega t})}{2\cos 2\phi + (e^{2\omega t} + e^{-2\omega t})}$$

pa je :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \Psi(x,t) &= (2\pi)^{-1/4} b^{-1/2} 2^{1/2} (e^{i\phi + \omega t})^{-1/2} \exp\left[\frac{x^2}{2a^2} \frac{2\sin 2\phi - ie^{2\omega t}}{2\cos 2\phi + e^{2\omega t}}\right] = \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} b^{-1/2} \exp[-1/2(i\phi + \omega t)] \exp\left[-\frac{x^2}{2a^2} (e^{-2\omega t} (2\sin 2\phi + 2i\cos 2\phi) - i)\right] \end{aligned}$$

tj.

$$\Psi(x,t) \sim \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} b^{-1/2} \exp[-1/2(i\phi + \omega t)] \exp\left[\frac{i x^2}{2a^2} - \frac{x^2}{b^2} e^{-2\omega t} - i \frac{x^2}{a^2} e^{-2\omega t} \cos 2\phi\right] \quad (3.9)$$

Sada se može odrediti i raspodela verovatnoće za  $x$ :

$$\begin{aligned}\langle x^2 \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x^2 \Psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} b^{-1} e^{-wt} \exp\left[-\frac{2x^2}{b^2} e^{-2wt}\right] x^2 dx = \\ &= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} b^{-1} e^{-wt} \frac{\sqrt{\pi}}{2(\sqrt{2} b^{-1} e^{-wt})^3}\end{aligned}$$

$$\langle x^2 \rangle \sim \frac{1}{4} b^2 e^{2wt} \sim \frac{1}{4} \frac{a^2}{\sin 2\phi} e^{2wt} \quad (3.10)$$

Vidi se, da pri menjaju  $\phi$ ,  $b^2$  ima minimum za  $\phi = \frac{\pi}{4}$ ; ( $b = a$ ). Za  $\phi < \pi/4$ , očito je da je raspodela verovatnoće za  $x$  široka. Za  $\phi > \pi/4$  inicijalna talasna f-ja ima uzan pik u  $x$  te je (iz relacije neodredjenosti) širenje za moment impulsa veliko što rezltira u brzom širenju  $x$  distribucije.

Glavni cilj pri uvodjenju ovog modela je da se dokaže da kvantno-mehanička talasna f-ja za velika vremena može tačno biti opisana klasičnom fizikom. Može se postaviti pitanje kriterijuma primenljivosti klasične fizike. Može se reći da se ona može primeniti uvek kada je moguće ignorisati neodredjenosti  $\Delta x$  i  $\Delta p$  koje zadovoljavaju Heisenberg-ove relacije neodredjenosti  $\Delta x \Delta p \sim \hbar$ . Postoji i opšte pravilo da uvek, kada su rastojanja na kojima se faza talasne f-je menja za  $2\pi$ , mnogo manja nego bilo koje drugo relevantno rastojanje, može se primeniti klasična fizika.

Dakle, sa namerom da se pokaže mogućnost primene klasične fizike, kreće se od razmatranja komutatora operatora  $\hat{x}$  i  $\hat{p}$ . Prvo se operatorom  $\hat{p}$  deluje na talasnu funkciju:

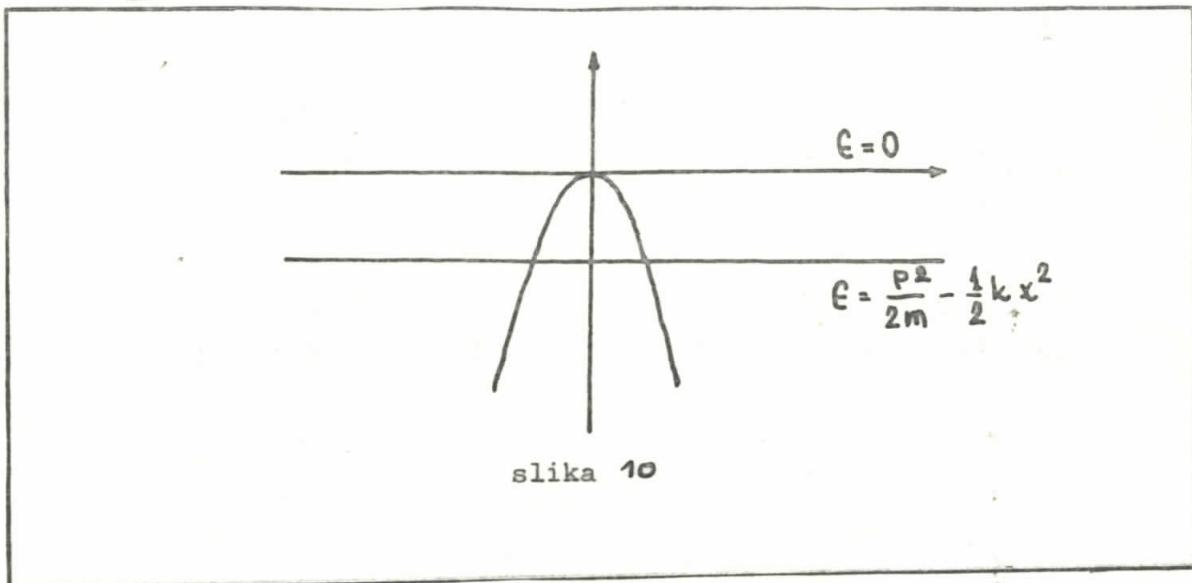
$$\hat{p}\Psi = -i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{i\hbar}{a^2} \Psi + \frac{i\hbar}{a^2} x \Psi e^{-2wt} \left( \frac{2i}{b^2} - \frac{2}{a^2} \cos 2\phi \right)$$

Osnova za dalji račun je uvodjenje sledećeg stava:

~ funkcija  $f(x, t)$  je reda  $O(g(t))$  ako je  $|f(x, t)| / g(t)|$  ograničena za svako  $x$  kada  $t \rightarrow \infty$  ~  
pa je očigledno da se gornja relacija može napisati na sledeći način:

$$\hat{p}\Psi = \frac{i\hbar}{a^2} \Psi + O(e^{-2wt}) = (\text{prema 3.5}) = x\sqrt{\omega k} \Psi + O(e^{-2wt}) \quad (3.11)$$

gde je  $x\sqrt{\omega k}$  u stvari impuls koji bi imala čestica u klasičnom slučaju, pri spuštanju sa vrh krive potencijala u neku tačku. Ovo je vrlo jednostavno za dokazati:



Na visini  $x$  ose, ukupna energija je jednaka nuli; na nekoj drugoj visini energija je data kao

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2} k x^2$$

iz zakona održanja energije sledi

$$p = \sqrt{mk} x$$

Dalje se ispituje (ne) komutativnost  $\hat{x}$  i  $\hat{p}$ :

$$\hat{x} \hat{p} \Psi = x^2 \sqrt{mk} \Psi + O(e^{-2\omega t})$$

$$\hat{p} \hat{x} \Psi = x^2 \sqrt{mk} \Psi - i\hbar \Psi + O(e^{-2\omega t}) \quad \text{jer } \hat{p}\hat{x} = \hat{x}\hat{p} - i\hbar \quad (3.12)$$

komutatorski doprinos  $-i\hbar \Psi$  će biti neznatan u poređenju sa drugim članom, ako je  $\hbar \ll \sqrt{mk} x^2$  ili, što je ekvivalentno ako je  $a^2 \ll x^2$ . Znači, za velika vremena, u regionima gde je  $x^2 > a^2$  komutator  $[\hat{x}, \hat{p}]$  postaje zanemarljiv, te nema prepreke klasičnom objašnjavanju.

Medjutim treba primetiti da talasna funkcija nije oštro centrirana oko jedne odredjene klasične trajektorije, tako da se ponašanje sistema za velika vremena opisuje neklasičnom trajektorijom, nego klasičnom raspodelom verovatnoće:

$$f(x, p, t) = |\Psi(x, t)|^2 \delta(p - \sqrt{mk} x) = \\ = \left\{ \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/4} b^{-1/2} \exp[-1/2(i\phi + \omega t)] \exp \left[ \frac{ix^2}{2a^2} - \frac{x^2}{b^2} e^{-2\omega t} - \frac{i\omega c^2}{a^2} e^{2\omega t} \cos 2\phi \right] \times \right.$$

$$\times \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/4} b^{-1/2} e^{-\omega t} \exp[-1/2(-i\phi + \omega t)] \exp \left[ -\frac{i x^2}{2\omega^2} - \frac{x^2}{b^2} e^{-2\omega t} + \frac{i x^2}{\omega^2} e^{2\omega t} \cos 2\phi \right] \times \\ \times \delta(p - \sqrt{\omega k} x); \\ \text{sredjivanjem ovog izraza, dobija se:}$$

$$f(x, p, t) = \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} b^{-1} e^{-\omega t} \exp[-2e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2}] \delta(p - \sqrt{\omega k} x) \quad (3.13)$$

Da bi ovo stvarno bilo korektno klasično opisivanje sistema za veliko  $t$  ( $t \rightarrow \infty$ ), mora se proveriti da li su zadovoljena dva uslova:

1.  $f(x, p, t)$  mora zadovoljavati klasičnu jednačinu kretanja /H3/:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x} \frac{\partial f}{\partial x} + \dot{p} \frac{\partial f}{\partial p} = 0 \quad (3.14)$$

2. Za bilo koju funkciju  $Q(x, p, t)$ , očekivana vrednost  $Q$  može biti izračunata pomoću ili kvantnomehaničke talasne funkcije  $\Psi(x, t)$  ili klasične raspodele verovatnoće  $f$ .

To znači u stvari, da se može pokazati da je

$$\langle Q \rangle_f = \langle Q \rangle_{\Psi} [1 + \sigma(e^{-2\omega t})] \quad (3.15)$$

Dоказ prvog uslova će biti kompletno detaljno izведен.

Prvo će se pronaći odgovarajući izvodi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} &= \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} b^{-1} (-\omega) \exp(-\omega t) \exp \left[ -2 \frac{x^2}{b^2} e^{2\omega t} \right] \delta(p - \sqrt{\omega k} x) + \\ &\quad + \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} b^{-1} \exp(-\omega t) \delta(p - \sqrt{\omega k} x) \exp \left[ -2 \frac{x^2}{b^2} e^{-2\omega t} \right] \cdot 4\omega \frac{x^2}{b^2} e^{-2\omega t} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= -\omega f + 4\omega e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2} f \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} b^{-1} e^{-\omega t} \exp \left[ -2 e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2} \right] \delta(p - \sqrt{\omega k} x) \left( -4 e^{-2\omega t} \frac{x}{b^2} \right) + \\ &\quad + \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} b^{-1} e^{-\omega t} \exp \left[ -2 e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2} \right] \frac{\partial \delta(p - \sqrt{\omega k} x)}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial x} &= -4 \frac{x}{b^2} e^{-2\omega t} f + \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} b^{-1} e^{-\omega t} \exp \left[ -2 e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2} \right] \frac{\partial \delta(p - \sqrt{\omega k} x)}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial p} &= \left( \frac{2}{\pi} \right)^{1/2} b^{-1} e^{-\omega t} \exp \left[ -2 e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2} \right] \frac{\partial}{\partial p} \delta(p - \sqrt{\omega k} x) \end{aligned}$$

dalje se računa  $\dot{x}$  i  $\dot{p}$

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} - \frac{1}{2} kx^2$$

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [x, H] = \frac{1}{i\hbar} \left\{ [x, \frac{p^2}{2m}] - [x, \frac{1}{2} kx^2] \right\} = \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{2m} \{ p[xp] + [xp]p \} = \\ &= \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{2m} 2ip \Rightarrow \dot{x} = \frac{p}{m}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [pH] = \frac{1}{i\hbar} (-\frac{1}{2} k[p^2]) = -\frac{1}{2} \frac{k}{i\hbar} \{ x[p_x] + [px]x \} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{k}{i\hbar} (-2ip)x \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\dot{p} = kx$$

ovi članovi se potom zamene u jednačinu (3.14), pa se dobija

$$\begin{aligned}&-wf + 4\omega e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2} f + \frac{p}{m} \left( -4 \frac{x}{b^2} e^{-2\omega t} f + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} b^{-1} e^{-\omega t} \right. \\ &\times \exp \left[ -2e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2} \right] \frac{\partial \delta(p - \sqrt{mk}x)}{\partial x} + kx \left[ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} b^{-1} e^{-\omega t} \right. \\ &\times \exp \left[ -2e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2} \right] \frac{\partial}{\partial p} \delta(p - \sqrt{mk}x) \left. \right] = \\ &= -wf + 4\omega e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2} f - \frac{4xp}{mb^2} e^{-2\omega t} f + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} b^{-1} e^{-\omega t} \exp \left[ -2e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2} \right] \\ &\times \left[ \frac{p}{m} \frac{\partial \delta(p - \sqrt{mk}x)}{\partial x} + kx \frac{\partial \delta(p - \sqrt{mk}x)}{\partial p} \right] = \\ &= -wf + 4\omega e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2} f - \frac{4x}{mb^2} \sqrt{mk}x e^{-2\omega t} f + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} b^{-1} e^{-\omega t} \\ &\times \exp \left[ -2e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2} \right] \times \left[ \frac{p}{m} \frac{\partial \delta(p - \sqrt{mk}x)}{\partial x} + kx \frac{\partial \delta(p - \sqrt{mk}x)}{\partial p} \right] = \\ &= -wf + f \left( 4\omega e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2} - \frac{4x}{mb^2} \sqrt{mk}x e^{-2\omega t} \right) + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} b^{-1} e^{-\omega t} \\ &\times \exp \left[ -2e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2} \right] \cdot \left[ \frac{p}{m} \frac{\partial \delta(p - \sqrt{mk}x)}{\partial x} + kx \frac{\partial \delta(p - \sqrt{mk}x)}{\partial p} \right] \quad (3.16)\end{aligned}$$

ovaj izraz u uglastoj zagradi se može transformisati na sledeći način

$$\begin{aligned}\frac{p}{m} \frac{\partial \delta(p - \sqrt{mk}x)}{\partial x} + kx \frac{\partial \delta(p - \sqrt{mk}x)}{\partial p} &= \frac{p}{m} (-\sqrt{mk}) \frac{\partial \delta(p - \sqrt{mk}x)}{\partial (p - \sqrt{mk}x)} + \\ &+ kx \frac{\partial \delta(p - \sqrt{mk}x)}{\partial (p - \sqrt{mk}x)} = -\omega(p - \sqrt{km}x) \frac{\partial \delta(p - \sqrt{mk}x)}{\partial (p - \sqrt{mk}x)}\end{aligned}$$

sada se iskoristi sledeća osobina  $\delta$ -funkcije:

$$x\delta'(x) = -\delta(x)$$

pa je gornji izraz jednak

$$\omega \delta(p - \sqrt{\omega}x)$$

Vrativši ovo u jednačinu 3.16 dobija se:

$$-\omega f + \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} b^{-1} e^{-\omega t} \exp\left[-2e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2}\right] \omega \delta(p - \sqrt{\omega}x) = \\ = -\omega f + \omega f = 0$$

čime je dokazano zadovoljavanje prvog uslova.

Da bi se dokazalo ispunjenje drugog uslova, polazi se od toga da se kvantno-mehanički operator može u opštem slučaju napisati kao suma tri člana. Naime, ovaj operator je kombinacija (proizvod)  $\hat{p}$  i  $x$  (bilo kog stepena), i razmotriće se tri moguća slučaja dejstva operatora  $\hat{p}$  ( $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$ ):

1. operator  $\hat{p}$  deluje na  $x$  koje je iza njega:

U ovakovom članu, stepen za  $x$  se smanji za jedinicu, jer

$$\hat{p} x^n \rightarrow -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} x^n \sim x^{n-1}$$

2. operator  $\hat{p}$  deluje na realni deo eksponenta talasne funkcije  $\Psi$ :

U ovakovom članu stepen za  $x$  raste za jedinicu, ali uz faktor  $e^{-2\omega t}$ :

$$x^n \hat{p} \exp\left[-\frac{x^2}{b^2} e^{-2\omega t}\right] \sim x^n \left(-\frac{2x}{b^2} e^{-2\omega t}\right) \sim x^{n+1} e^{-2\omega t}$$

3. operator  $\hat{p}$  deluje na imaginarni deo eksponenta talasne funkcije  $\Psi$ :

U ovakovom članu stepen za  $x$  se takođe poveća za jedinicu:

$$x^n \hat{p} \exp\left[\frac{i x^2}{2\omega t}\right] \sim x^{n+1}$$

Posle izvršenih diferenciranja i usrednjavanja, imaginarni deo eksponenta se gubi i ostaje u eksponentu samo faktor  $\sim -2e^{-2\omega t} \frac{x^2}{b^2}$ , pa pri rešavanju integrala uvodi se smena

$$u = e^{-\omega t} \frac{x}{b} \Rightarrow x = bu e^{\omega t}$$

odakle se može zaključiti da će članovi za slučaj 3. dominirati za faktor  $e^{2\omega t}$  u odnosu na prva dva tipa. Zbog toga će

mo samo njih smatrati bitnim u ovom slučaju.

Dalje se želi izračunati klasično očekivana vrednost  $\langle Q \rangle_f$ :

$$\begin{aligned} \langle x^n p^m \rangle_f &\equiv \int dx x^n p^m f(x, p, t) \equiv \\ &\equiv \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} b^{-1} e^{-wt} (mk)^{\frac{m}{2}} \int x^{n+m} \exp[-2e^{-2wt} \frac{x^2}{b^2}] dx \end{aligned}$$

a potom kvantno mehaničko  $\langle Q \rangle_\Psi$  (posmatra se samo imaginarni deo)

$$\begin{aligned} \langle x^n \hat{p}^m \rangle &\equiv \int \Psi^* x^n \hat{p}^m \Psi dx = (-i\hbar)^m \int dx \Psi^* x^n \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^m \Psi = \\ &= (-i\hbar)^m \int dx \Psi^* x^n \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{m-1} \Psi \left(\frac{i}{\hbar^2}\right) = \dots = \\ &= (-i\hbar)^m \left(\frac{i}{\hbar^2}\right)^m \int dx \Psi^* x^{n+m} \Psi = \\ &= (\sqrt{mk})^m \int x^{n+m} |\Psi|^2 dx \end{aligned}$$

što je isto što i gornji izraz; dakle, može se napisati

$$\langle Q \rangle_f = \langle Q \rangle_\Psi [1 + O(e^{-2wt})]$$

Raspodela verovatnoće  $f(x, p, t)$  opisuje klasičnu trajektoriju čestice koja se kretala, polazeći sa vrha potencijalne krive. Ove klasične trajektorije se mogu parametrizovati na sledeći način

$$x(t) = C e^{\omega t} \quad (3.17)$$

Ova parametrizacija odražava vezu  $x$  i  $p$  koja je data preko  $\delta$  funkcije

Raspodela verovatnoće za konstantu  $C$ , može se odrediti iz one za  $x$ :

$$P(C) = P(x) \frac{dx}{dC}$$

$$\frac{dx}{dC} = e^{\omega t}$$

$$P(C) = P(x) e^{\omega t}$$

$$P(C) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} b^{-1} e^{-wt} \exp[-2e^{-2wt} \frac{C^2}{b^2}] e^{2\omega t} \Rightarrow$$

$$P(C) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} b^{-1} e^{-\frac{2C}{b^2}} \quad (3.18)$$

Znači, za velika vremena  $x(t)$  je određeno da na proizvoljnu multiplikativnu konstantu koja zadovoljava Gaus-ovu distribuciju.

Fizički smisao ove konstante se može uočiti ako se piše kao:

$$C = \pm b \exp(-\omega t)$$

tako da je

$$x(t) = \pm b e^{\omega(t + \tau)} \quad (3.19)$$

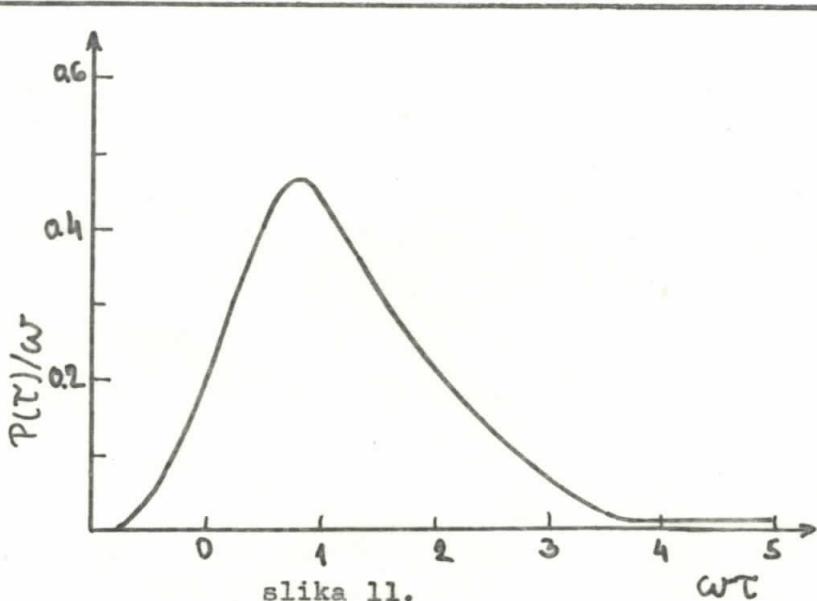
Parametar  $\tau$  evidentno predstavlja vreme kašnjenja klasičnog rešenja.

Raspodela verovatnoće za  $\tau$  je dano kao:

$$P(\tau) = 2 P(C) \frac{dC}{d\tau}$$

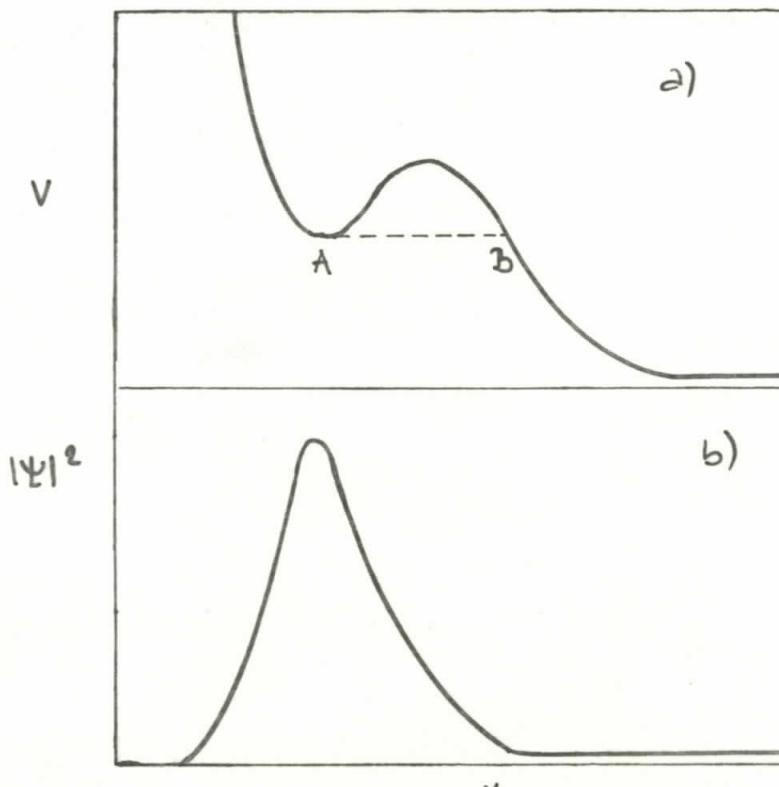
$$\frac{dC}{d\tau} = \omega b e^{-\omega\tau}$$

$$P(\tau) = 2 \cdot \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \omega e^{-\omega\tau} \exp[-2 e^{-2\omega\tau}] \quad (3.20)$$



Za velika  $t$ , čestica se kreće duž klasične trajektorije  $x(t) = \pm b e^{\omega(t-\tau)}$ , gde je  $\tau$  proizvoljna varijabla sa gustinom prikazanom na slici.

Grafik ove raspodele verovatnoće je prikazan na slici 11.. Za kasna vremena, čestica dakle, sledi klasičnu trajektoriju, ali momenat kada počinje da se spušta niz potencijalnu krvu je određen kvantnim procesima, te zbog toga i klasičnom distribucijom verovatnoće. Na slici 12., na grafiku a) je prikazana funkcija potencijalne energije  $V(x)$  za jednodimenzionalni kvantno-mehanički model tunelovanja; na grafiku b) je pokazan oblik gustine verovatnoće ;kao i u slučaju inverznog harmonijskog oscilatora, talasna funkcija za velika vremena opisuje stanje koje se, sasvim ispravno može aproksimirati raspodelom verovatnoće za klasične trajektorije.



slika 12.

Po standardnom opisu, čestica u tački A će tunelovati do B; potom će se kotrljati duž klasične trajektorije u pozitivnom pravcu x ose.Pošto je vreme tunelovanja opisano raspodelom verovatnoće, konačno stanje je opisano raspodelom verovatnoća klasičnih trajektorija. Može se zapaziti da u potpunom kvantno - mehaničkom tretmanu tunelovanja, talasna funkcija čestice se može predstaviti kao na grafiku b).

#### 4. SKALARNO POLJE U INFLACIONOJ TEORIJI SVEMIRA

Posle opisa inverznog harmonijskog oscilatora kao "ravnog modela" u prethodnom odeljku, ovde se nastavlja sa matematičkim opisom ponašanja skalarnog polja u važećem scenariju evolucije svemira.

Pokazano je da kvantno-mehanički efekti mogu se tretirati klasičnom fizikom pod određenim uslovima. Pored te činjenice, ovaj aproksimativni, ali egzaktno rešiv model (pod određenim uslovima) bazira još na tri pretpostavke:

1. Pretpostavlja se da je prostor tačno opisan de Sitter-ovom metrikom:

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2xt} dx^2 \quad (\text{za } c=1)$$

2. Potencijal koji se koristi je oblika:

$$V(\phi) = \frac{1}{4}\lambda \left( \phi^2 - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2 \quad (4.1)$$

3. Mora se pretpostaviti da temperatura postoji (da ima smisla govoriti o temperaturi), odnosno, mora se pretpostaviti da je postojalo stanje termičke ravnoteže. Promena temperature je prikazana relacijom:

$$T = T_0 e^{-xt} \quad (4.2)$$

(gde  $T_0$  nema nekog fizičkog značaja; to je jednostavno vrednost temperature u proizvoljnem vremenu  $t=0$ ).

Posmatra se jedno skalarno polje koje evoluira u navedenom de Sitter-ovom prostoru. Hamilton-ovo dejstvo, pomoću koga se može opisati dinamika polja glasi / Gl, B2 /:

$$A = \int dt L = \int dt \int d^3x \mathcal{L} \quad (4.3)$$

gde je  $\mathcal{L}$  dato kao:

$$\mathcal{L} = \left\{ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} (\partial_\mu \phi)(\partial_\nu \phi) - V(\phi) \right\} \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} \quad (4.4)$$

gde je  $g^{\mu\nu}$  metrički tensor prostor-vremena,  $\mu$  i  $\nu$  su indeksi koji prebrojavaju koordinate prostor-vremena, a  $\partial_\mu$  je generalizacija gradijenta. Konkretno:

$$\begin{aligned} x^\mu: \quad &x^0 = ct ; \quad x^1 = x ; \quad x^2 = y ; \quad x^3 = z \\ \partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}: \quad &\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \quad \text{za } \mu = 0, 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (4.5)$$

(nadalje će se uzimati da je  $c=1$ ).

Tipičan oblik metričkog tensora u periodu eksponencijalnog širenja je zadan (po prvoj pretpostavci) jednačinom (5):

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2xt} (dx^2)^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

odnosno:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{2xt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2xt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{2xt} \end{bmatrix}$$

a kako je  $g_{\mu\nu} g^{\mu\nu} = 1$  znači  $g^{\mu\nu} = (g_{\mu\nu})^{-1}$  te se može pisati:

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2xt} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-2xt} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-2xt} \end{bmatrix}$$

Sa ovakvim oblikom metričkog tenzora, Hamilton-ovo dejstvo za  $\phi$  postaje

$$A = \int dt \int d^3x e^{3xt} \left\{ \frac{1}{2} (\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2} \bar{e}^{2xt} (\vec{\nabla}\phi)^2 - V(\phi) \right\} \quad (4.6)$$

jer je  $\det g_{\mu\nu} = -e^{6xt} \Rightarrow \sqrt{-\det g_{\mu\nu}} = e^{3xt}$

te analogija sa tipično kvantno-mehaničkim problemima, posebno inverznim harmonijskim oscilatorom, gde je

$$A \propto \left\{ \frac{1}{2} (\dot{q})^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 \right\}$$

postaje sve očiglednija.

S obzirom da je  $\phi = \phi(\vec{x}, t)$  predstavlja jednu nezavisnu funkciju u svakoj tački prostora, dejstvo u 4.6. se može tumačiti kao dejstvo za neprebrojiv skup fizičkih stepeni slobode  $\phi(\vec{x}, t)$ . Varijacijom dejstva 4.6. po  $\phi(\vec{x}, t)$  dobija se Euler-Lagrange-ova jednačina:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0 \quad (4.7)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\dot{\phi})} + \vec{\nabla} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\vec{\nabla}\phi)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$$

$$e^{3xt} \left\{ \ddot{\phi} + 3x\dot{\phi} - e^{-2xt} \vec{\nabla}\phi + \frac{\partial V}{\partial \phi} \right\} = 0 \quad (4.8)$$

Tipičan potencijal koji se pojavljuje u raznim modelima elementarnih čestica je oblika 4.1.

$$V(\phi) = \frac{1}{4} \phi^4 \lambda - \frac{1}{4} \phi^2 \mu^2 + \frac{1}{4} \frac{\mu^4}{\lambda}$$

pri čemu se član  $\lambda \phi^4$  može tretirati kao perturbacija (potpuno analogno anharmoničnim perturbacijama kod harmonijskog oscilatora). Či-

njenica da kvadratni član ima negativni predznak prouzrokuje osobenost ovog potencijala. Naime, za  $\mu^2 > 0$  i  $\lambda > 0$ , potencijal ima lokalni maksimum u  $\phi = 0$ . (lažni vakuum), a minimum u  $\phi = \pm (\mu^2 / 2\lambda)^{1/2}$  (pravi vakuum) (videti sliku 6.).

Medjutim, ovako napisan potencijal ne vodi računa o termičkom doprinosu, te važi samo u aproksimaciji  $T \approx 0$ . Kod proračuna na  $T \neq 0$ , pokazuje se da prva popravka usled člana  $\sim \phi^4$  je reda  $T^2 \phi^2$ , tako da je sasvim opravdano (što je pokazao i Weinberg, ref. W2) pisati potencijal u obliku

$$V_0(\phi) = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{4k} \lambda T^2 - \mu^2 \right) \phi^2 \quad (4.9)$$

U ovoj aproksimaciji potencijala fazni prelaz u modelu će početi kada temperatura dostigne vrednost kritične temperature  $T_c$

$$T_c = 2\mu \sqrt{k/\lambda} \quad (= 2\sqrt{k} \frac{\mu}{\lambda} = 2\sqrt{k} \phi_c) \quad (4.10)$$

Iz jednačine (4.9.) je očito da se termalni efekti uvećavaju za  $k \rightarrow 0$ , što reflektira u divergenciju koja postoji i u klasičnoj statističkoj mehanici teorije polja (Rayleigh-Jeans teoriji).

Za visoko temperaturni režim ( $T \gg k\lambda$ ) važi da je  $RT = \text{const.}$  (videti na primer T3; G1,2) a ovo dovodi do treće pretpostavke, da se i temperatura menja eksponencijalno.

Ako se uvede oznaka

$$\gamma^2 = \frac{\lambda T_0}{4k} \quad (4.11)$$

jednačina kretanja 4.8. je data kao

$$\ddot{\phi} + 3X\dot{\phi} - e^{-2Xt} (\vec{\nabla}^2 \phi) + [e^{-2Xt} \gamma^2 - \mu^2] \phi = 0 \quad (4.12)$$

Ovo je u stvari linearne parcijalne diferencijalna jednačina, što znači da će važiti princip superpozicije i može se rešenje tražiti u obliku Fourier-ovog reda tj.

$$\phi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)}^{1/2} \left( \frac{2\hbar}{\epsilon} \right)^{1/2} \left[ \sqrt{2} G(0, t) + \sum \left[ G_+(\vec{k}, t) \cos \vec{k} \vec{x} + G_-(\vec{k}, t) \sin \vec{k} \vec{x} \right] \right] \quad (4.13)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} n \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$$

Da bi se obezbedila diskretnost spektra talasnog vektora  $\vec{k}$ , pretpostavlja se da je

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi(\vec{x} + \vec{b}t)$$

$$\vec{b} = b (\mu \vec{e}_1 + n \vec{e}_2 + p \vec{e}_3)$$

tj. nameće se uslov periodičnosti za kutiju bxbxb. Na kraju analize se uzme da  $b \rightarrow \infty$

Na taj način se Hamilton-ovo dejstvo za neprebrojiv skup funkcija  $\phi(x,t)$  aproksimiralo dejstvom kojeg opisuje ansambl inverznih linearnih harmonijskih oscilatora sa različitim (i vremenim promenljivim) frekvencijama i eventualnim anharmonijskim perturbacijama.

Da bi se ovo i pokazalo, kreće se od izvodjenja jednačine kretanja (4.12.) za f-ju  $\phi(x,t)$  date relacijom 4.13. Znači, prvo je potrebno naći izraz za gustinu lagranžijana, koji je za  $\phi(x,t)$  i potencijal (4.9.) oblika:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= e^{3xt} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} e^{-2xt} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{1}{2} \gamma^2 e^{-2xt} \phi^2 \right] \\ \text{tj. } \mathcal{L} &= \int d^3x e^{3xt} \left[ \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} e^{-2xt} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} [\mu^2 - \gamma^2 e^{-2xt}] \phi^2 \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

(integracija se vrši po kocki bxbxb).

Da bi se pojednostavila notacija, svaki mod promenljivih  $\tilde{G}(0,t)$  i  $\tilde{G}_{\pm}(\vec{k},t)$  će se označavati sa  $\tilde{G}_{\vec{k}}(t)$ . Kada se vrši sumacija po  $\vec{k}$ , to znači da suma sadrži mod  $\vec{k} = 0$ , kao i jedan par  $\tilde{G}_+$  i  $\tilde{G}_-$  za svaki par  $(\vec{k}_1, \vec{k}_2)$ . Za ove varijable važi i

$$\begin{aligned} \tilde{G}_+(-\vec{k},t) &= \tilde{G}_+(\vec{k},t) \\ \tilde{G}_-(\vec{k},t) &= -\tilde{G}_-(\vec{k},t) \end{aligned} \quad (4.15)$$

Relacija (4.13) se može napisati i u nešto drugačijem obliku:

$$\begin{aligned} \phi(x,t) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( \frac{2\pi}{b} \right)^3 \left\{ \sqrt{2} \tilde{G}(0,t) + \sum_{k>0} \tilde{G}_+(\vec{k},t) \cos \vec{k} \vec{x} + \sum_{k>0} \tilde{G}_+(\vec{k},t) \cos \vec{k} \vec{x} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k>0} \tilde{G}_-(\vec{k},t) \sin \vec{k} \vec{x} + \sum_{k>0} \tilde{G}_-(\vec{k},t) \sin \vec{k} \vec{x} \right\} \end{aligned}$$

ili, na nešto drugačiji način

$$\phi(x,t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( \frac{2\pi}{b} \right)^3 \left\{ \sqrt{2} \tilde{G}(0,t) + \sum_{k>0} \tilde{G}_+ \cos \vec{k} \vec{x} + \sum_{k>0} \tilde{G}_+(-\vec{k},t) \cos(-\vec{k} \vec{x}) + \right.$$

$$+ \sum_{k>0} \tilde{v}_-(\vec{k}, t) \sin(\vec{k} \vec{x}) + \sum_{k>0} \tilde{v}_-(-\vec{k}, t) \sin(-\vec{k} \vec{x}) \Big\}$$

pa je

$$\phi(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left(\frac{2\pi}{b}\right)^3 \left\{ \sqrt{2} v(0, t) + 2 \sum_{k>0} [v_+(\vec{k}, t) \cos \vec{k} \vec{x} + v_-(\vec{k}, t) \sin \vec{k} \vec{x}] \right\}$$

Potrebno je pronaći  $\dot{\phi}^2$ ,  $\ddot{\phi}^2$  i  $(\nabla \phi)^2$ . Posle kraćeg računa dobija se:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}^2 &= \frac{(2\pi)^3}{b^6} \left\{ 2v^2(0, t) + 2\sqrt{2} v(0, t) \sum_{k>0} [v_+(\vec{k}, t) \cos \vec{k} \vec{x} + v_-(\vec{k}, t) \cos \vec{k} \vec{x}] + \right. \\ &\quad + 2\sqrt{2} v(0, t) \sum_{q>0} [v_+(\vec{q}, t) \cos \vec{q} \vec{x} + v_-(\vec{q}, t) \sin \vec{q} \vec{x}] + 4 \sum_{\vec{q}, \vec{k}} [v_+(\vec{k}, t) v_+(\vec{q}, t) \cos \vec{k} \vec{x} \cos \vec{q} \vec{x} + \\ &\quad \left. + v_+(\vec{k}, t) v_-(\vec{q}, t) \cos \vec{k} \vec{x} \sin \vec{q} \vec{x} + v_-(\vec{k}, t) v_+(\vec{q}, t) \sin \vec{k} \vec{x} \cos \vec{q} \vec{x} + v_-(\vec{k}, t) v_-(\vec{q}, t) \sin \vec{k} \vec{x} \sin \vec{q} \vec{x}] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\phi}(x, t) &= \frac{(2\pi)^3}{b^6} \left\{ 2\dot{v}^2(0) + 2\sqrt{2} \dot{v}(0) \sum_{k>0} [\dot{v}_+(\vec{k}) \cos \vec{k} \vec{x} + \dot{v}_-(\vec{k}) \sin \vec{k} \vec{x}] + \right. \\ &\quad + 2\sqrt{2} \dot{v}(0) \sum_{q>0} [\dot{v}_+(\vec{q}) \cos \vec{q} \vec{x} + \dot{v}_-(\vec{q}) \sin \vec{q} \vec{x}] + 4 \sum_{\vec{q}, \vec{k}} [\dot{v}_+(\vec{k}) v_+(\vec{q}) \cos \vec{k} \vec{x} \cos \vec{q} \vec{x} + \\ &\quad \left. + \dot{v}_-(\vec{k}) v_-(\vec{q}) \sin \vec{k} \vec{x} \sin \vec{q} \vec{x} + \dot{v}_+(\vec{k}) v_-(\vec{q}) \cos \vec{k} \vec{x} \sin \vec{q} \vec{x} + \dot{v}_+(\vec{q}) v_-(\vec{k}) \cos \vec{q} \vec{x} \sin \vec{k} \vec{x}] \right\} \end{aligned}$$

i konačno

$$\begin{aligned} (\nabla \phi)^2 &= \frac{(2\pi)^3}{b^6} 4 \sum_{\vec{k}, \vec{q}} \vec{k} \cdot \vec{q} [v_+(\vec{k}) v_+(\vec{q}) \sin \vec{k} \vec{x} \sin \vec{q} \vec{x} - v_+(\vec{k}) v_-(\vec{q}) \sin \vec{k} \vec{x} \cos \vec{q} \vec{x} - \\ &\quad - v_-(\vec{k}) v_+(\vec{q}) \cos \vec{k} \vec{x} \sin \vec{q} \vec{x} + v_-(\vec{k}) v_-(\vec{q}) \cos \vec{k} \vec{x} \cos \vec{q} \vec{x}] \end{aligned}$$

Sada je potrebno sve ove članove vratiti u jednačinu (4.14.) pa integraliti po  $\int d^3x$ .

Pri ovome svi članovi sa jednim sin ili cos su jednaki nuli tj.

$$\begin{aligned} \int d^3x \cos \vec{k} \vec{x} &= \int dx dy dz \cos(k_x x + k_y y + k_z z) = \\ &= \int dx dy dz [\cos k_x x \cos(k_y y + k_z z) - \sin k_x x \sin(k_y y + k_z z)] = \\ &= \int dx dy dz [\cos k_x x \cos k_y y \cos k_z z - \cos k_x x \sin k_y y \sin k_z z - \sin k_x x \sin k_y y \cos k_z z - \sin k_x x \cos k_y y \sin k_z z] \end{aligned}$$

Pošto je

$$\int_0^b dx \cos k_x x = 0 \quad (\text{jer je } k_x b = \frac{2\pi}{b} n_x b = 2\pi n_x \quad n_x - \text{ceo broj})$$

$$\int_0^b dx \sin k_x x = 0 \quad (\text{iz istih razloga})$$

Dalje

$$\int d^3x \sin \vec{k} \vec{x} \sin \vec{q} \vec{x} = \int d^3x \cos \vec{k} \vec{x} \cos \vec{q} \vec{x} = \delta_{\vec{k} \vec{q}} \frac{b^3}{2}$$

$$\int d^3x \cos \vec{k} \vec{x} \sin \vec{q} \vec{x} = 0$$

Pojedinačno, članovi jednačine 4.14. daju

$$\int d^3x e^{3xt} \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 = e^{\frac{3xt}{2}} \frac{(2\bar{t})^3}{b^3} [2\dot{G}^2(0) + 4[\dot{G}_+(\vec{k}) \dot{G}_+(\vec{q}) + \dot{G}_-(\vec{k}) \dot{G}_-(\vec{q})]] \delta_{\vec{k} \vec{q}} \frac{b^3}{2} = e^{\frac{3xt}{2}} \sum_{\alpha} \dot{G}_{\alpha}^2(t)$$

slično

$$-\int d^3x \frac{1}{2} e^{-2xt} (\nabla \phi)^2 = -e^{-2xt} \left(\frac{2\bar{t}}{b}\right)^3 \sum_{\alpha} k_{\alpha}^2 G_{\alpha}^2(t)$$

$$\frac{1}{2} (\mu^2 - \gamma^2 e^{-2xt}) \int d^3x \phi^2(x,t) = (\mu^2 - \gamma^2 e^{-2xt}) \left(\frac{2\bar{t}}{b}\right)^3 \sum_{\alpha} G_{\alpha}^2(t)$$

i konačno, lagranžijan je oblika:

$$L = \left(\frac{2\bar{t}}{b}\right)^3 e^{3xt} \sum_{\alpha} \left\{ \ddot{G}_{\alpha} + [\mu^2 - e^{-2xt} (k_{\alpha}^2 + \gamma^2)] G_{\alpha}^2 \right\} \quad (4.16)$$

Na ovaj način se dobilo prebrojivo mnogo  $G(t)$  koji čine statistički ansambl. Može se pokazati da je jednačina kretanja za svaki mod varijable data sa:

$$\ddot{G}_{\alpha} + 3x \dot{G}_{\alpha} = [\mu^2 - e^{-2xt} (k_{\alpha}^2 + \gamma^2)] G_{\alpha}^2 \quad (4.17)$$

Pre nego što se predje na rešavanje ove jednačine podvući će se još jednom sličnost dobijenih izraza sa izrazima za harmonijski oscilator. Naime, ako se napiše dejstvo za prebrojiv skup promenljivih  $G_{\alpha}$  na sledeći način

$$A \propto \int dt e^{3xt} \left\{ (\dot{G}_0)^2 - [e^{-2xt} \gamma^2 - \mu^2] G_0^2 + \dots + \sum_k (\dot{G}_k)^2 - [e^{-2xt} (k^2 + \gamma^2) - \mu^2] G_k^2 + \dots \right\} = A_0 + \sum_k \vec{A}_k$$

očigledno je da opisuje prebrojivi ansambl harmonijskog oscilatora sa različitim, vremenski promenljivim frekvencijama. Za dovoljno rano  $t$  tj.  $t \ll t_c$

$$e^{-2xt} (k_{\alpha}^2 + \gamma^2) \gg \mu^2$$

To da se svi modovi  $G_{\alpha}$  u ranim vremenima ponašaju kao harmonijski oscilatori sa frekvencijom

$$\omega(t) = e^{-xt} (k_{\alpha}^2 + \gamma^2)^{1/2} \quad (4.18)$$

evidentno je i po relacijama (4.16); (4.17.) analogno sa jednačinama za harmonijski oscilator.

Nastavlja se sa rešavanjem jednačina (4.17.).

Njeno rešenje je oblika

$$\tilde{Y}_\alpha(t) = Y(t) e^{-\frac{3}{2}xt} \quad (4.19)$$

Nalaženjem odgovarajućih izvoda i zamenom u jednačinu 4.17., dobija se

$$\ddot{y} - y \left( \frac{9}{4}x^2 + \mu^2 - e^{-2xt} (k_\alpha^2 - y^2) \right) = 0 \quad (4.20)$$

za rešavanje, uvodi se smena

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{4} \dot{y}^2 &= e^{-2xt} (k_\alpha^2 + y^2) \\ \frac{\dot{y}}{x} &= \frac{[e^{-2xt} (k_\alpha^2 + y^2)]^{1/2}}{x} \end{aligned} \quad (4.21)$$

pa se dobije Bessel-ova funkcija

$$\frac{x^2}{4} \frac{d^2 \frac{\dot{y}}{x}}{dx^2} + \frac{x}{2} \frac{d \frac{\dot{y}}{x}}{dx} + (\frac{x^2}{4} - \frac{\mu^2}{x^2}) \frac{\dot{y}}{x} = 0 \quad \frac{\mu}{x} = \left( \frac{9}{4} + \frac{\mu^2}{x^2} \right)^{1/2} \quad (4.22)$$

Rešenje u ovom slučaju je

$$\tilde{Y}_\alpha(t) \propto e^{-\frac{3}{2}xt} \begin{cases} J_p(\frac{\mu}{x}) \\ N_p(\frac{\mu}{x}) \end{cases} \quad (4.23.)$$

gde su  $J_p(\frac{\mu}{x})$  i  $N_p(\frac{\mu}{x})$  Bessel-ove funkcije prve i druge vrste, respektivno.

Za kvantizaciju sistema se upotrebljava standardna kanonska tehnika (koja je ekvivalentna tehnikama preko linijskih integrala koji bi se još mogli koristiti). Uvodi se kanonski impuls, pripadajući svakom modu varijable

$$\dot{t}_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{Y}_\alpha} = 2 \left( \frac{2\bar{u}}{b} \right)^3 e^{3xt} \dot{Y}_\alpha \quad (4.24.)$$

a odavde se odmah može izraziti i  $\dot{Y}_\alpha$  :

$$\dot{Y}_\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{2\bar{u}}{b} \right)^3 e^{-3xt} \dot{t}_\alpha \quad (4.25.)$$

Hamiltonian je dat kao

$$H = \sum_k \dot{t}_\alpha \dot{Y}_\alpha - L$$

Zamenom ranije izvedenih izraza i nakon kraćeg sredjivanja, dobija se

$$\begin{aligned} H &= \sum_{\lambda} \frac{2}{\lambda} \frac{1}{2} \left( \frac{2\lambda}{b} \right)^{-3} e^{-3\lambda t} - \left( \frac{2\lambda}{b} \right)^3 e^{3\lambda t} \frac{2}{\lambda} \left\{ \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{2\lambda}{b} \right)^3 e^{-3\lambda t} \tilde{v}_{\lambda} \right]^2 + \left[ \frac{1}{2} e^{-2\lambda t} (k_x^2 + y^2) \tilde{v}_{\lambda}^2 \right] \right\} \\ t_j \quad H &= \frac{1}{4} \sum_{\lambda} \left( \frac{2\lambda}{b} \right)^{-3} e^{-3\lambda t} \tilde{v}_{\lambda}^2 - \left( \frac{2\lambda}{b} \right)^3 e^{3\lambda t} \frac{2}{\lambda} \left[ \left( \mu^2 - e^{-2\lambda t} (k_x^2 + y^2) \right) \tilde{v}_{\lambda}^2 \right] \end{aligned} \quad (4.26.)$$

Na ovom mestu će se uvesti i kanonska ("equal - time") komutaciona relacija

$$[\tilde{v}_{\lambda}, \tilde{v}_{\lambda'}] = i \delta(\lambda' - \lambda) \quad (4.27.)$$

Sledeći korak je u stvari kvantizacija polja  $\phi(x, t)$ , odnosno, mođovi  $\tilde{v}_{\lambda}$  se pišu kao kombinacija operatora kreacije i anihilacije.

$$\tilde{v}_{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{b}{2\lambda} \right]^{3/2} [a_{\lambda} \Psi(k_{\lambda}, t) + a_{\lambda}^+ \Psi(k_{\lambda}, t)] \quad (4.28)$$

Gde je

$$\Psi(k_{\lambda}, t) \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\lambda k}{x} \right)^{1/2} e^{-\frac{3}{2} \lambda t} H_p^{(1)}(z) \quad (4.29.)$$

egzaktno rešenje jednačine 4.17.

Jadnacinom 4.28. su definisani operatori  $a_{\lambda}$ , a  $H_p^{(1)}(z)$  u jednačini 4.29. su Hankel-ove funkcije (ili Bessel-ove III vrste), koje se uvode kao

$$H_p^{(1)}(z) = J_p \mp i N_p \quad (4.30.)$$

Polazeći od asymptotskih formula za Bessel-ove funkcije I i II vrste, Hankel-ove funkcije se mogu napisati i na sledeći način (upr. M2).

$$H_p^{(1)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{i(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{1}{4})} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) \quad (4.31.)$$

$$H_p^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-i(z - \frac{p\pi}{2} - \frac{1}{4})} + O\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

Koristeći ove relacije, vrlo lako se dolazi do bitne osobine Hankel-ove funkcije

$$H_p^{(1)}(z) \frac{d}{dz} H_p^{(2)}(z) - H_p^{(2)}(z) \frac{d}{dz} H_p^{(1)}(z) = -\frac{4i}{\pi z} \quad (4.52.)$$

Ova, kao i par drugih relacija, su potrebne da bi se mogle odrediti komutacione relacije operatora kreacije i anihilacije.

Prvo se dokazuje da važi

$$\psi \frac{\partial \psi^+}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^+ = ik e^{-3xt} \quad (4.33)$$

kreće se, na uobičajni način, pronalaženjem izvoda, pa zatim vraćanjem u ovu jednačinu. Dobija se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial t} &= \frac{1}{2} \chi \left( \frac{ik}{x} \right)^{1/2} e^{-\frac{3}{2}xt} \left[ -\frac{3}{2} H_p^{(1)}(z) - \frac{dH_p^{(1)}}{dz} z \right] \\ \frac{\partial \psi^+}{\partial t} &= \frac{1}{2} \chi \left( \frac{ik}{x} \right)^{1/2} e^{-\frac{3}{2}xt} \left[ -\frac{3}{2} H_p^{(2)}(z) - \frac{dH_p^{(2)}}{dz} z \right] \end{aligned}$$

Pa je:

$$\begin{aligned} \psi \frac{\partial \psi^+}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^+ &= \frac{1}{2} \left( \frac{ik}{x} \right)^{1/2} e^{-\frac{3}{2}xt} H_p^{(1)}(z) \frac{1}{2} \chi \left( \frac{ik}{x} \right)^{1/2} e^{-\frac{3}{2}xt} \left[ -\frac{3}{2} H_p^{(2)}(z) - \frac{dH_p^{(2)}}{dz} z \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \chi \left( \frac{ik}{x} \right)^{1/2} e^{-\frac{3}{2}xt} \left[ -\frac{3}{2} H_p^{(1)}(z) - \frac{dH_p^{(1)}}{dz} z \right] \frac{1}{2} \left( \frac{ik}{x} \right)^{1/2} e^{-\frac{3}{2}xt} H_p^{(2)}(z) = \\ &= \frac{ik}{4} e^{-3xt} z \left[ H_p^{(2)} \frac{dH_p^{(1)}}{dz} - H_p^{(1)} \frac{dH_p^{(2)}}{dz} \right] = ik e^{-3xt} \end{aligned}$$

Čime je 4.33. dokazano.

Preko relacije 4.33. lako se dolazi do

$$\tilde{\psi}_d \frac{\partial \psi^+}{\partial t} - \psi^+ \frac{\partial \tilde{\psi}_d}{\partial t} = \frac{1}{2} \left( \frac{b}{2\pi} \right)^{3/2} a_d ik e^{-3xt} \quad (4.34)$$

a odavde sledi

$$a_d = \frac{\sqrt{2}}{ik} \left( \frac{b}{2\pi} \right)^{-3/2} e^{3xt} \left( \tilde{\psi}_d \frac{\partial \psi^+}{\partial t} - \psi^+ \frac{\partial \tilde{\psi}_d}{\partial t} \right) \quad (4.35)$$

analogno

$$a_d^+ = - \frac{\sqrt{2}}{ik} \left( \frac{b}{2\pi} \right)^{-3/2} e^{3xt} \left( \tilde{\psi}_d \frac{\partial \psi}{\partial t} - \psi \frac{\partial \tilde{\psi}_d}{\partial t} \right) \quad (4.35)$$

Kanonička komutaciona relacija može se upotrebiti da se dokažu sledeće komutacione teorije:

$$[a_d, a_{d'}]_N \left\{ -\psi^* \frac{\partial \psi^*}{\partial t} [\tilde{\psi}_d \tilde{\psi}_{d'}] + \psi^* \frac{\partial \psi^*}{\partial t} [\tilde{\psi}_{d'} \tilde{\psi}_d] \right\} \sim \delta_{dd'} - \delta_{dd'} = 0 \quad (4.36)$$

$$[a_\omega, a_\omega^+] = (a_\omega a_\omega^+ - a_\omega^+ a_\omega) = \\ = -\frac{2}{\hbar^2} \left(\frac{b}{2\bar{\alpha}}\right)^{-3} e^{i\omega t} \frac{1}{2} \left(\frac{2\bar{\alpha}}{b}\right)^{-3} e^{-3i\omega t} \left\{ \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \Psi [a_\omega, a_\omega^+] - \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} [a_\omega, a_\omega^+] \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow [a_\omega, a_\omega^+] = \delta_{\omega\omega'} \quad (4.37)$$

Očekivana vrednost proizvoda operatora kreacije i anihilacije može biti izračunata koristeći rezultate za kanonski ansambl običnog harmonijskog oscilatora. U opštem slučaju /T2; M4/

$$\langle a_\omega^+, a_\omega \rangle = \frac{1}{e^{\theta_\omega} - 1} \delta_{\omega\omega'} \quad (4.38.)$$

gde je

$$\theta_\omega = \lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{\hbar} w(t)}{T(t)} = \frac{\frac{1}{\hbar}}{T_0} \sqrt{k_\omega^2 + \gamma^2} \quad (4.39.)$$

takodje još važi i

$$\langle a_\omega, a_\omega \rangle = \langle a_\omega^+, a_\omega^+ \rangle = 0 \quad (4.40)$$

Upotrebljavajući izraz 4.28., može se naći i očekivana vrednost za  $\langle \tilde{a}_\omega^2(t) \rangle$ . Pošto nema korelacije izmedju različitih vrednosti  $a^\pm$ , dobija se

$$\langle \tilde{a}_\omega^2(t) \rangle = 0 \quad \left( = \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{b}{2\bar{\alpha}}\right)^{3/2} [\langle a_\omega \rangle \Psi + \langle a_\omega^+ \rangle \Psi^*] \right) \quad (4.41)$$

na sličan način dobija se i

$$\begin{aligned} \langle \tilde{a}_\omega^2(t) \rangle &= \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{b}{2\bar{\alpha}}\right)^{3/2} \frac{1}{\hbar^2} \left(\frac{b}{2\bar{\alpha}}\right)^{3/2} \langle [a_\omega \Psi + a_\omega^+ \Psi^*] [a_\omega \Psi + a_\omega^+ \Psi^*] \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2\bar{\alpha}}\right)^3 (\cancel{\langle a_\omega a_\omega^+ \rangle} \Psi^2 + \langle a_\omega a_\omega^+ \rangle \Psi \Psi^* + \langle a_\omega^+ a_\omega \rangle \Psi^* \Psi + \cancel{\langle a_\omega^+ a_\omega^+ \rangle} \Psi^{*2}) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2\bar{\alpha}}\right)^3 |\Psi|^2 (1 + 2 \langle a^+ a \rangle) = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2\bar{\alpha}}\right)^3 |\Psi|^2 \left(1 + \frac{2}{e^{\theta_\omega} - 1}\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \langle \tilde{a}_\omega^2(t) \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2\bar{\alpha}}\right)^3 |\Psi|^2 \coth \frac{\theta_\omega}{2} \end{aligned} \quad (4.42.)$$

Skreće se pažnja na pojavljivanje  $\frac{1}{2}$  u poslednjoj jednačini. Ako se uzme da je  $T_0 = 0$ , desna strana jednačine je proporcionalna sa  $\Psi$  preko  $\Psi$  funkcije i u ovom slučaju se govori o čisto kvantnim fluktuacijama.

Ako se uzme da je  $T_0 \neq 0$ , a  $\gamma^2$  fiksirano onda  $\frac{1}{2}$  izčeza i u limitu  $\frac{1}{2} \rightarrow 0$ . U ovom slučaju se govori o klasičnim termalnim fluktuacijama za dati mod. Sa drugačije strane  $\gamma^2$  raste preko

sume modova i kada  $\vec{k} \rightarrow 0$ ,  $\psi^2$  očito divergira tj.  $\psi^2 \rightarrow \infty$  (klasična R-J divergencija)

Očekivana vrednost bilo kog stepena  $\tilde{V}_\alpha(t)$  se može izračunati pomoću standardne tehnike za harmonijski oscilator (pri računanju očekivane vrednosti koordinate  $x$ ). Po ovoj analogiji i  $\tilde{V}_\alpha(t)$  se pokorava Gauss-ovo raspodeli verovatnoće. Zato je raspodela verovatnoće potpuno odredjena jednačinama 4.42. i 4.41. Vremenski i temperaturna zavisnost faktora  $\tilde{V}_\alpha^{rw}(t)$  je data na slici 13.

Sada je moguće izračunati i  $\langle \phi(x,t) \phi(y,t) \rangle$ . Da bi se napisao izraz "equal-time" za slučaj beskonačne zapremeine, vrši se prelazak na kontinuum. To će biti uradjeno na sledeći način:

Kreće se od izraza za  $\phi(x,t)$ , koji se za ovaj slučaj piše u obliku eksponenata:

$$\phi(x,t) = \frac{1}{(2\bar{u})^{1/2}} \left(\frac{2\bar{u}}{b}\right)^{1/2} \sum_{\vec{k}} [c(\vec{k}) e^{i\vec{k}x} \psi(\vec{k},t) + c^+(\vec{k}) e^{-i\vec{k}x} \psi^*(\vec{k},t)]$$

Operatori  $c(\vec{k})$  i  $c^+(\vec{k})$  su anihilacioni i kreacioni operatori prostirućeg talasa. Izmedju njih i uvedenih operatora  $a$ ;  $a^+$  postoji sledeća veza

$$c(\vec{k}) = \frac{a_+(\vec{k}) - ia_-(\vec{k})}{\sqrt{2}}$$

te je

$$a_+(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [c(\vec{k}) + c(-\vec{k})]$$

$$a_-(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}} [c(\vec{k}) - c(-\vec{k})]$$

te se može pokazati da  $c(\vec{k})$  i  $c^+(\vec{k})$  zadovoljavaju sledeće relacije (pri čemu je i njihov odgovarajući hamiltonijan dijagonalan kao za  $a^+a$ )

$$\langle c^+(\vec{k}') c(\vec{k}) \rangle = \frac{1}{e^{\theta_{\vec{k}} - 1}} \delta_{\vec{k}', \vec{k}}$$

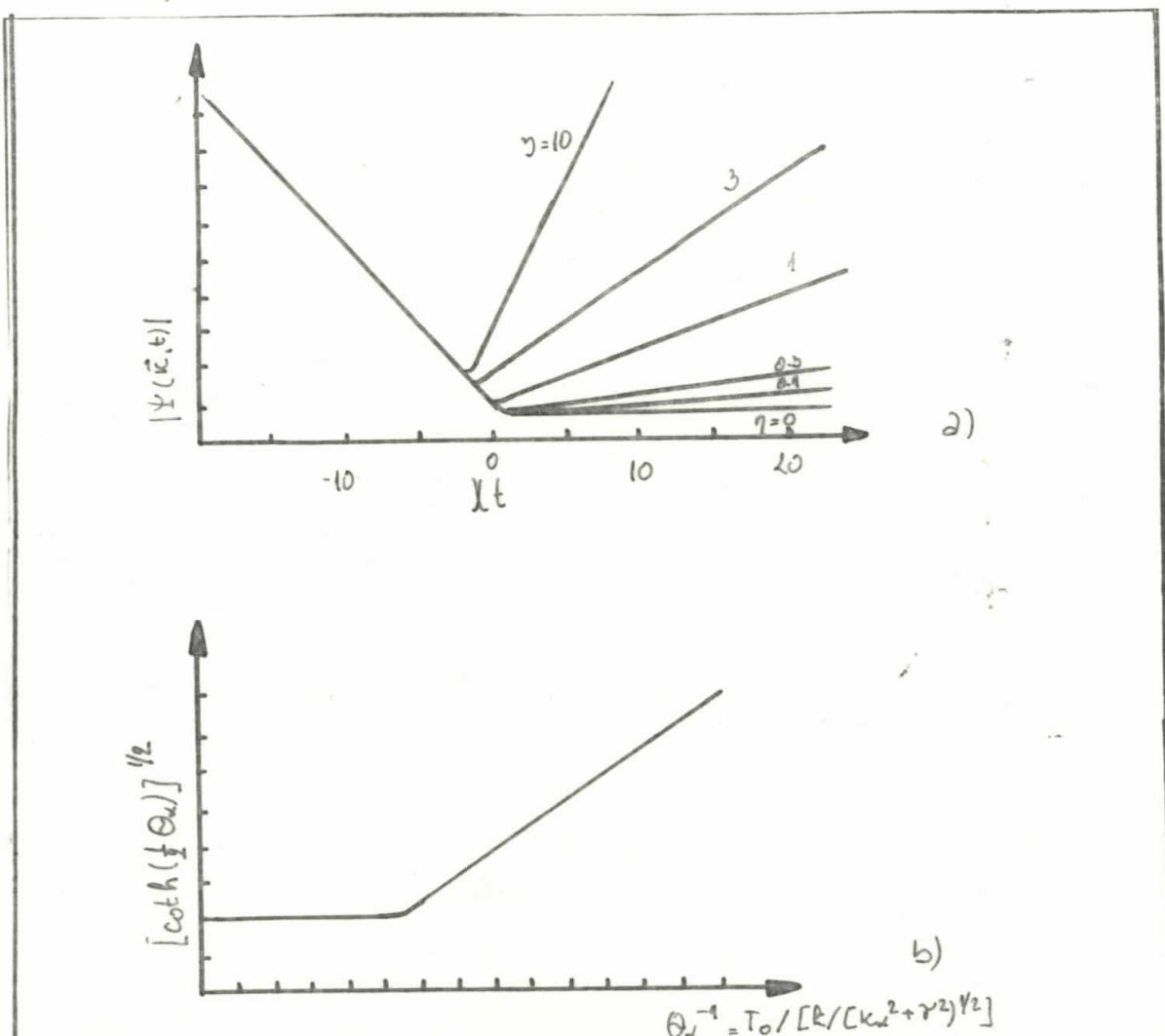
$$\langle c(\vec{k}') c(\vec{k}) \rangle = \langle c^+(\vec{k}') c^+(\vec{k}) \rangle = 0$$

Pri prelasku na kontinuum, anihilacioni operator se mora reskalirati te se uvodi novi operator

$$d(\vec{k}) = \left[ \frac{b}{2\bar{u}} \right]^{1/2} c(\vec{k})$$

koji zadovoljava sledeće relacije

$$[d(\vec{k}), d^+(\vec{k}')] = \delta^3(\vec{k}' - \vec{k})$$



slika 13

Na ovoj slici je prikazana vremenska i temperaturna zavisnost veličine  $\Psi(\vec{\kappa}, t)$ . Vremenska zavisnost je posledica vremenske zavisnosti funkcije  $|\Psi(\vec{\kappa}, t)|$  i pokazana je na grafiku a) za nekoliko vrednosti  $\gamma = \sqrt{4/\lambda^2}$ . Središnja tačka na grafiku odgovara vremenu kada je  $z=1$ , što znači da je "efektivni talasni broj" jednak  $\lambda$ . Drugi faktor  $[\coth \frac{1}{2}\theta_\omega]^{1/2}$  je "odgovoran" za temperatursku zavisnost i pokazan je na grafiku b) u funkciji  $\theta_\omega^{-1} = T_0 / [k / (ck_\omega^2 + \gamma^2)]^{1/2}$ .

$$\langle d^+(\vec{k}') d(\vec{k}) \rangle = \frac{1}{e^{\theta_k} - 1} \delta^3(\vec{k}' - \vec{k})$$

$$\langle d(\vec{k}') d(\vec{k}) \rangle = \langle d^+(\vec{k}') d^+(\vec{k}) \rangle = 0$$

Izraz za  $\phi(x, t)$  preko normalizovanih operatora kreacije i anihilacije za vakuum je dat sa

$$\phi(x, t) = \frac{1}{(2\bar{n})^{3/2}} \int d^3 k' [d(\vec{k}') e^{i\vec{k}' \vec{x}} \Psi(\vec{k}', t) + d^+(\vec{k}') e^{-i\vec{k}' \vec{x}} \Psi^*(\vec{k}', t)] \quad (4.43)$$

Korišćenjem ove relacije, nalazi se izraz za  $\langle \phi(x, t) \phi(\vec{x}', t) \rangle$ :

$$\begin{aligned} \langle \phi(x, t) \phi(\vec{x}', t) \rangle &= \langle \frac{1}{(2\bar{n})^{3/2}} \int d^3 k' [d(\vec{k}') e^{i\vec{k}' \vec{x}} \Psi(\vec{k}', t) + d^+(\vec{k}') e^{-i\vec{k}' \vec{x}} \Psi^*(\vec{k}', t)] \times \\ &\quad \times \frac{1}{(2\bar{n})^{3/2}} \int d^3 k'' [d(\vec{k}'') e^{i\vec{k}'' \vec{x}'} \Psi(\vec{k}'', t) + d^+(\vec{k}'') e^{-i\vec{k}'' \vec{x}'} \Psi^*(\vec{k}'', t)] \rangle = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\bar{n})^3} \int d^3 k' [e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} |\Psi(\vec{k}, t)|^2 \left(1 + \frac{1}{e^{\theta_k} - 1}\right) + e^{-i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} |\Psi(\vec{k}, t)|^2 \frac{1}{e^{\theta_k} - 1}]$$

Ovi članovi se mogu sabrati ako se u drugom izvrši smena  $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$ . Ovo je potpuno opravljeno jer su i  $\Psi$  i  $\theta$  parne funkcije od  $\vec{k}$ , tako da se dobije

$$\langle \phi(x, t) \phi(\vec{x}', t) \rangle = \frac{1}{(2\bar{n})^3} \int d^3 k' e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \Psi(\vec{k}, t) \coth \frac{\theta_k}{2} \quad (4.44)$$

Po do sada izloženom, jasno je da se svakom Fourierovom koeficijentu može razmišljati kao o klasičnoj promenljivoj, sa vrednošću opisanom klasičnom distribucijom verovatnoće. Kad jednom klasična aproksimacija postane važeća, mogu se upotrebiti klasične jednačine kretanja za opisivanje dalje evolucije sistema.

Da bi se videlo kada klasična aproksimacija počinje da važi, proveriće se kada minimalna kvantna neodredjenost

$$(\Delta \tilde{\Gamma}_k \Delta \tilde{\tau}_k)_{\min} = \frac{1}{2}$$

postaje zanemarljiva. Tačnije, treba odrediti kada odnos

$$\ell_k = \frac{(\langle \tilde{\Gamma}_k^2 \rangle \langle \tilde{\tau}_k^2 \rangle)^{1/2}}{(\Delta \tilde{\Gamma}_k \Delta \tilde{\tau}_k)_{\min}} = \frac{2}{\frac{1}{2}} (\langle \tilde{\Gamma}_k^2 \rangle \langle \tilde{\tau}_k^2 \rangle)^{1/2} \quad (4.45)$$

postaje mnogo veći od jedinice.

Za računanje  $R_k$  za kasna vremena, koriste se jadnačine

$$\langle \tilde{\Gamma}_k^2 \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2\bar{n}}\right)^3 |\Psi(\vec{k}, t)|^2 \coth \frac{\theta_k}{2}$$

$$\Psi = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b}{\pi}} e^{-\frac{3}{2}xt} (J_p + i N_p)$$

Ako su pošmatraju izrazi za Hankel-ove funkcije

$$J_p(z) \sim \frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^p [1 + O(z^2)] \quad (4.46.)$$

$$N_p(z) \sim -\frac{\Gamma(p)}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-p} [1 + O(z^2)] + O(z^p)$$

vidi se da za  $t \rightarrow \infty, \frac{x}{t} \rightarrow 0$ , te se  $J_p$  zanemaruje u daljim izvodjenjima. Dobija se

$$\langle \dot{\psi}_x^2 \rangle \sim \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2\pi}\right)^3 \frac{1}{8\pi x} \coth \frac{\Theta_x}{2} \frac{1}{4x} e^{-3xt} \frac{\Gamma^2(p)}{\pi} e^{-3xt} \left(\frac{2x e^{xt}}{\sqrt{k_x^2 + y^2}}\right)^{2p}$$

$$\langle \dot{\psi}_x^2 \rangle \sim \left(\frac{b}{2\pi}\right)^3 \frac{1}{8\pi x} e^{(2p-3)xt} \Gamma^2(p) \left[\frac{4x^2}{k_x^2 + y^2}\right]^p \coth \frac{\Theta_x}{2} \quad (4.47.)$$

Da bi se našlo  $R_x$ , potrebno je još naći  $\langle \dot{\psi}_x^2 \rangle$ . Polazi se od relacije (4.24), odakle sledi

$$\langle \dot{\psi}_x^2 \rangle = 4 \left(\frac{2\pi}{b}\right)^6 e^{6xt} \langle \dot{\psi}_x^2 \rangle$$

$$\dot{\psi}_x = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2\pi}\right)^{1/2} [a_x \Psi + a_x^* \Psi^*] \quad \text{pa je}$$

$$\langle \dot{\psi}_x \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2\pi}\right)^3 |\dot{\psi}|^2 \coth \frac{\Theta_x}{2}$$

pa je:

$$\langle \dot{\psi}_x^2 \rangle = 4 \left(\frac{2\pi}{b}\right)^6 e^{6xt} \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2\pi}\right)^3 |\dot{\psi}|^2 \coth \frac{\Theta_x}{2} = 2 \left(\frac{2\pi}{b}\right)^3 e^{6xt} |\dot{\psi}|^2 \coth \frac{\Theta_x}{2}$$

$$|\dot{\psi}|^2 = \frac{1}{4} \frac{b^3}{2\pi x} e^{-3xt} \left[ \left(\frac{3}{2} J_p + \frac{1}{2} \frac{dJ_p}{dz}\right)^2 + \left(\frac{3}{2} N_p + \frac{1}{2} \frac{dN_p}{dz}\right)^2 \right] \quad (4.48)$$

(što se naravno dobija polazeći od izraza za  $\Psi$ ).

Iz već napomenutih razloga, samo drugi član je od interesa, te će se samo to izvoditi. Prema relaciji 4.46., lako je naći

$$\frac{dN_p}{dz} \sim -\frac{\Gamma(p)}{\pi} \frac{(-p)}{2^p} \frac{1}{z^{p+1}}$$

Vrativši ovo (4.48) dobija se

$$|\dot{\psi}|^2 \sim \frac{1}{4} \frac{b^3}{2\pi x} e^{-3xt} \left(\frac{9}{4} \frac{\Gamma^2(p)}{\pi^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{-2p} + \frac{\Gamma^2(p)}{\pi^2} \frac{p^2}{2^{2p}} z^{-2p} - \frac{6}{4} \frac{\Gamma^2(p)}{\pi^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{-p} \left(\frac{z}{2}\right)^{-p}\right)$$

$$|\dot{\psi}|^2 \sim \frac{1}{4} \frac{b^3}{2\pi x} e^{-3xt} \frac{\Gamma^2(p)}{\pi} \left(\frac{z}{2}\right)^{-2p} \left(\frac{3}{2} - p\right)^2$$

pa je

$$\langle t_\alpha^2 \rangle \sim 2 \left(\frac{2\bar{u}}{b}\right)^3 e^{6xt} \cdot \frac{1}{4} \not{x} e^{-3xt} \frac{\Gamma^2(p)}{\pi} \left(\frac{\pm}{2}\right)^{-2p} \left(\frac{3-2p}{2}\right)^2 \coth \frac{\Theta_\alpha}{2}$$

$$\langle t_\alpha^2 \rangle \sim \left(\frac{2\bar{u}}{b}\right)^3 e^{3xt} \not{x} \frac{\Gamma^2(p)}{8\bar{u}} \left(\frac{\pm}{2}\right)^{-2p} \left(3-2p\right)^2 \coth \frac{\Theta_\alpha}{2}$$

Vrativši dobijene izraze u 4.45., dobija se

$$R_\alpha \sim \frac{2}{\pi} \left\{ \coth^2 \frac{\Theta_\alpha}{2} \cdot e^{2pxt} \Gamma^4(p) \frac{\pm^2}{64\bar{u}^2} (3-2p)^2 \left(\frac{\pm}{2}\right)^{-4p} \right\}^{1/2}$$

$$R_\alpha \sim \frac{2}{\pi} \coth \frac{\Theta_\alpha}{2} e^{pxt} \Gamma^2(p) \frac{\pm^2}{8\bar{u}} (3-2p) \left(\frac{\pm}{2}\right)^{-2p}$$

$$R_\alpha \sim \frac{(3-2p)\Gamma^2(p)}{4\bar{u}} \left(\frac{\pm}{2}\right)^{-2p} \coth \frac{\Theta_\alpha}{2} \quad (4.49)$$

Može se, dakle, zaključiti da za  $t \rightarrow \infty$  ( $\pm \rightarrow 0$ ), ispunjen je kriterijum za prelazak na klasičnu fiziku.

$$\begin{aligned} \frac{dH_{\pm/2}^{(1)}}{d\pm} &= -\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\pm^{3/2}} e^{i\pm \frac{\pm+1}{\pm}} - \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(i e^{i\pm \frac{\pm+i}{\pm}} + e^{i\pm \frac{\pm-(\pm+i)}{\pm^2}}\right) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\pm^{3/2}} e^{i\pm \frac{\pm+i}{\pm}} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} i \left(\frac{1}{\pm^2} - \frac{\pm+i}{\pm}\right) e^{i\pm \frac{\pm-(\pm+i)}{\pm^2}} \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} |\dot{\psi}|^2 &= \frac{1}{2} \not{x} \pm e^{-3xt} \\ \langle t_\alpha^2 \rangle &= \left(\frac{2\bar{u}}{b}\right)^3 e^{3xt} \not{x} \pm \coth \frac{\Theta_\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$R_\alpha \sim \frac{1}{\pm} \coth \frac{\Theta_\alpha}{2} \quad (4.50)$$

$t \rightarrow \infty$   
 $(\pm \rightarrow 0)$

### NUMERICKI REZULTATI

Iako se može reći da je poznata raspodela verovatnoće za svaki koeficijent  $G_\alpha(t)$  koji figuriše u izrazu za polje  $\phi(x, t)$  ne može se tvrditi da je poznata i raspodela verovatnoće za polje.

Ukoliko se pokuša izračunati  $\langle \phi^2(x, t) \rangle$  na način opisan u pret-

hodnom poglavlju, neminovno će se doći do toga da dobijeni izraz divergira za veliko  $\vec{k}$ . Standardna devijacija raspodele verovatnoće je beskonačna, - postoje beskonačne fluktuacije polja  $\phi(x,t)$ .

Za ilustraciju divergencije u slučaju velikog  $\vec{k}$  poslužiće specijalni slučaj, za  $\mu^2 = 0$ :

$$\langle \phi^2(\vec{x},t) \rangle \sim \int k^2 d\vec{k} \frac{1}{(k^2 + r^2)^{3/2}} [1 + \frac{k^2 + r^2}{\chi^2} e^{-2\chi t}] \coth [\frac{k}{T_0} \frac{1}{2}(k^2 + r^2)^{1/2}]$$

$$\sim \int k^2 \cdot \frac{1}{k^3} [1 + k^2] \coth k \sim \frac{1}{k} + k$$

za  $k \rightarrow \infty$  drugi član divergira.

Ova divergencija ne bi trebala biti uklonjena nekim renormalizacionim postupkom jer je fizički stvarna. Ako se polje meri sa nekim uredjajem prostorne rezolucije  $l$ , širina raspodele verovatnoće za merenu vrednost polja raste beskonačno dok  $l$  opada.

Merljiva veličina sa konačnim fluktuacijama može biti definisana preko "razmazivanja" polja, tako da se simulira konačna prostorna rezolucija uredjaja, s tim da ta vrednost odgovara prostornoj srednjoj vrednosti lokalnog kvantnog polja  $\phi(x,t)$ .

Ovde će se koristiti "smeard" polja definisana Gauss-ovom funkcijom:

$$\hat{\phi}_l(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} l^3} \int d^3 \vec{y} \exp[-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{y})^2/l^2] \phi(\vec{y},t) \quad (5.1)$$

gde je  $l$  proizvoljna dužina razmazivanja.

Ako se u ovu relaciju uvrsti relacija (4.13), dobija se:

$$\hat{\phi}_l(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} l^3} \int d^3 \vec{y} \exp[-\frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{y})^2/l^2] \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[ \sqrt{2} \bar{v}_0(0,t) + \sum_k \bar{v}_+(k,t) \cos k \vec{y} + \sum_k \bar{v}_-(k,t) \sin k \vec{y} \right]$$

ako se uvede smena :

$$\frac{(\vec{y} - \vec{x})^2}{2l^2} = \vec{z}^2 \Rightarrow \frac{\vec{y} - \vec{x}}{\sqrt{2} l} = \vec{z} \Rightarrow \vec{y} = \sqrt{2} l \vec{z} + \vec{x}$$

$$d^3 \vec{y} = 2^{3/2} l^3 d^3 \vec{z}$$

pa je

$$\hat{\phi}_l(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \left( \frac{2\pi}{l} \right)^3 \frac{1}{l^3} \left[ \sqrt{2} \bar{v}_0(0,t) 2^{3/2} l^3 \int d^3 \vec{z} e^{-\vec{z}^2} + \sum_k \bar{v}_+(k,t) 2^{3/2} l^3 \times \right. \\ \times \int d^3 \vec{z} e^{-\vec{z}^2} \cos [\vec{k} \vec{z} + \sqrt{2} l \vec{k} \vec{z}] + \sum_k \bar{v}_-(k,t) 2^{3/2} l^3 \int d^3 \vec{z} e^{-\vec{z}^2} \sin [\vec{k} \vec{z} + \sqrt{2} l \vec{k} \vec{z}] \left. \right]$$

$$\text{T.J. } \hat{\phi}_l(\vec{x},t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \left( \frac{2\pi}{l} \right)^3 \frac{1}{l^3} \left[ \sqrt{2} \bar{v}_0(0,t) 2^{3/2} l^3 \pi^{3/2} + \sum_k \bar{v}_+(k,t) 2^{3/2} l^3 \pi^{3/2} e^{-\frac{1}{2} k^2 l^2} \cos \vec{k} \vec{x} + \right.$$

$$+ \sum_k \Gamma_-(\vec{k}, t) 2^{3/2} \ell^3 \pi^{5/2} e^{-1/2 \vec{k}^2 \ell^2} \sin \vec{k} \vec{x}$$

i konačno:

$$\hat{\phi}_\ell(\vec{x}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left( \frac{2\pi}{\ell} \right)^3 \left[ \sqrt{2} \Gamma(0, t) + \sum_k e^{-1/2 k^2 \ell^2} (\Gamma_+(\vec{k}, t) \cos \vec{k} \vec{x} + \Gamma_-(\vec{k}, t) \sin \vec{k} \vec{x}) \right] \quad (5.2)$$

Evidentno je da ova jednačina ne divergira za velike vrednosti  $\vec{k}$ ; zbog negativne vrednosti ovog člana u eksponentu, postoji "cut-off" za veliko  $\vec{k}$ , što je svakako i povoljno. U ovom slučaju raspodela verovatnoće za polje  $\phi(x, t)$  je dobro definisana. Može se još u ovom delu rada izračunati  $\langle \hat{\phi}_\ell^2(t) \rangle$  za slučaj beskonačnih zapremina.

$$\phi_\ell(\vec{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \vec{k} [\hat{d}(\vec{k}) \Psi(\vec{k}, t) e^{i \vec{k} \vec{x}} + \hat{d}^*(\vec{k}) \Psi^*(\vec{k}, t) e^{-i \vec{k} \vec{x}}] e^{-\left(\frac{\vec{k} \cdot \vec{\ell}}{\ell}\right)^2} \quad (5.3)$$

$$\langle \hat{\phi}_\ell^2(\vec{x}, t) \rangle = \left\langle \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \vec{k} \left[ e^{-1/2(k^2 \ell^2 + k'^2 \ell^2)} [\hat{d}(\vec{k}) \Psi(\vec{k}, t) e^{i \vec{k} \vec{x}} + \hat{d}^*(\vec{k}) \Psi^*(\vec{k}, t) e^{-i \vec{k} \vec{x}}] \right] \right\rangle$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3 \vec{k}' [\hat{d}(\vec{k}') \Psi(\vec{k}', t) e^{i \vec{k}' \vec{x}} + \hat{d}^*(\vec{k}') \Psi^*(\vec{k}', t) e^{-i \vec{k}' \vec{x}}] \right\rangle$$

$$\langle \hat{\phi}_\ell^2(\vec{x}, t) \rangle = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 \vec{k} |\Psi(\vec{k}, t)|^2 \coth \frac{\Theta}{2} e^{-k^2 \ell^2} \quad (5.4)$$

tj. uzevši u obzir izraze za  $\Psi(\vec{k}, t)$ , dobija se

$$\langle \hat{\phi}_\ell^2(\vec{x}, t) \rangle = \frac{k e^{-\beta \ell t}}{8\pi \chi} \int_0^\infty k^2 dk e^{-k^2 \ell^2} [J_p^2(\gamma) + N_p^2(\gamma)] \coth \left[ \frac{\hbar (k^2 + p^2)^{1/2}}{2T_0} \right] \quad (5.5)$$

gde su  $\gamma$ ,  $p$ ,  $T$  dati relacijama u prethodnom odeljku (odeljku 4)

Svi navedeni rezultati se baziraju na formulama iz prethodnog odeljka. Razlika je samo u tome da će se sad raditi u sistemu  $\hbar=1$ , uvodi se oznaka  $G=1/M_p^2$ , gde je  $M_p$  Planck-ova masa ( $M_p = 1.22 \times 10^{19} \text{ GeV-a}$ ).

Langražijan skalarnog polja zavisi od dva slobodna parametra  $\lambda$  i  $\mu$ . Pošto je pogodnije razmatrati bezdimenzijske parametre, "pravi" se jedan novi  $\eta \equiv \frac{\lambda^2}{\mu^2}$ , drugi ostaje  $\lambda$  (jer je bezdimenzijski produkt  $\hbar \cdot \lambda$ , a u ovom slučaju  $\hbar=1$ )

Izraz za  $\lambda$  se može naći na sledeći način: po jednačini (5)  $\lambda$  je dato na sledeći način

$$\lambda = \left( \frac{2\pi}{3} G P_0 \right)^{1/2}$$

veličina  $\rho_0$  se izražava iz (4.9), za  $\phi = 0$ , pa je:

$$\rho_0 = M^4 / 4\lambda$$

pa je

$$\chi = \left( \frac{2\pi G}{3\lambda} \right)^{1/2} M^2$$

uvrstivši izraz za  $G$ , dobija se

$$\chi = \left( \frac{2\pi}{3M_p^2\lambda} \right)^{1/2} M^2 \Rightarrow \chi^2 = \frac{2\pi}{3M_p^2\lambda} M^4$$

sa druge strane,  $\chi^2 = \frac{M^2}{\eta}$ , a iz ove dve relacije se dobija

$$M^2 = \frac{3\lambda M_p^2}{2\pi\eta} \Rightarrow M = \left( \frac{3\lambda}{2\pi\eta} \right)^{1/2} M_p \quad (5.6)$$

Da bi fluktuacije masene gustine bile dovoljno male, parametar  $\lambda$  mora biti vrlo mali (nešto više o tome pri govoru o fluktuacijama kosmoloških gustina) - uzima se da je reda veličine  $10^{-12}$ .

Drugi parametar,  $\eta$  je vrlo važan jer utiče na vreme trajanja inflacione ere — što je veća vrednost  $\eta$ , to je nestabilnija konfiguracija lažnog vakuma. Pri proračunima u ovom radu, vrednost za  $\eta$  leži u opsegu 0,1 - 10.

Minimum potencijala odgovara kritičnoj vrednosti skalarnog polja  $\phi_c$ , koji je dat izrazom

$$\phi_c = M / \sqrt{\lambda}$$

Sada se  $\phi_c$  može izraziti na sledeći način

$$\phi_c = M_p \sqrt{\frac{3\lambda}{2\pi\eta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \Rightarrow \phi_c = M_p \sqrt{\frac{3}{2\pi\eta}} \quad (5.7)$$

Dalje, prema izrazu ( ) ( $T_c = 2\sqrt{\frac{k}{\lambda}}$ ) za  $k=1$  sledi da je

$$T_c = \frac{2\lambda}{\sqrt{\lambda}} = 2\phi_c \quad (5.8)$$

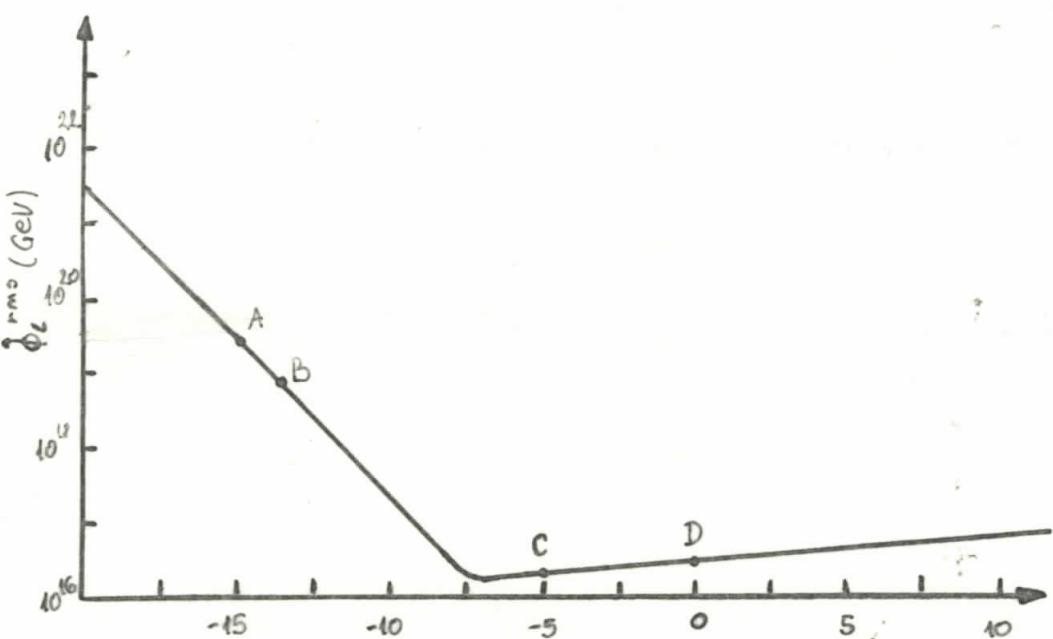
a  $\chi$  se može izraziti na sledeći način:

$$\chi = \left( \frac{2\pi G}{3\lambda} \right)^{1/2} M^2$$

$$\chi = \frac{1}{\eta} \sqrt{\frac{3\lambda}{2\pi}} M_p \quad (5.9)$$

Za čisto skalarno polje,  $\phi_c$  i  $T_c$  su reda veličine Planck-ove skale, i mogu biti nešto veći kada je  $\eta$  malo.

Za 1, iako nije parametar fizičkog problema, da bi se dobila neka informacija, uzima se  $l = T_c^{-1}$ .



slika 14

Na ovoj slici je prikazana promena veličine  $\Phi_{\text{ren}}^{\text{ren}}(\hat{\phi}_t)^{\text{ren}}$  u vremenu; vrednosti parametara su  $\gamma = 0.2$  i  $\lambda = 10^{-12}$ . Nulto vreme je određeno stavljanjem  $T_0 = \lambda$ , što znači da je  $T = \lambda$  kada je  $t = 0$ . Dužina "razmazivanja" je izabrana kao  $l = T_0^{-1}$ . Tačka u kojoj je  $\dot{\Phi} = \dot{\phi}_{\text{ren}}$  je obeležena sa A, tačka u kojoj su  $\dot{T} = T_c$  je označena kao B, tačka u kojoj su termalna gustina energije i gustina energije lažnog vakuma izjednačene, tj. gde je  $T = T_{\text{des}}$ , i tačka D je tačka u kojoj važi da je  $T = \lambda$ . Pri određivanju položaja za tačku C, za  $N_{\text{eff}}$  je korišće na vrednost  $\sim 200$ .

Sa slike se još može videti da su karakteristike ove veličine za rana i kasna vremena prave linije sa malim zakrivljenim delom interpoliranim izmedju dve asymptotske linije.

Grafik na slici 14 je nacrtan na bazi jedne od polaznih pretpostavki - da je prostor de Sitter-ov sve vreme. Ali, bilo bi interesantno pozabaviti se pitanjem kada će ekspanzija de Sitter-a da počne. Kao što je već rečeno, uzrok za ovo je da je gustina energije lažnog vakuma reda veličine gustine termalne energije, koja je data sa

$$\rho_{\text{el}} = \frac{\pi^2}{30} N_{\text{eff}} T^4$$

gde je  $N_{\text{eff}}$  efektivni broj spinskih stepeni slobode bez mase. /G2/ Znači, za  $\rho_0 = \rho_{\text{th}}$ ,  $T_{\text{des}}$  je dato kao:

$$T_{\text{des}} = \frac{3}{2\pi\eta^{1/2}} \left( \frac{10\lambda}{3N_{\text{eff}}} \right)^{1/4} M_P \quad (5.10)$$

Do ovog izraza se dolazi vrlo lako:

$$\rho_0 = \rho_{\text{th}}$$

$$\Rightarrow \frac{\mu^4}{4\lambda} = \frac{\pi^2}{30} N_{\text{eff}} T_{\text{des}}^4 = \frac{1}{4\lambda} \left( \frac{3\lambda}{2\pi\eta} \right)^2 M_P^4$$

odakle se dobije

$$T_{\text{des}}^4 = \frac{1}{4\lambda} \frac{9\lambda^2}{4\pi^2\eta^2} M_P^4 \frac{30}{\pi^2 N_{\text{eff}}}$$

$$T_{\text{des}}^4 = \frac{9 \times 30 \lambda M_P^4}{16\pi^4 N_{\text{eff}} \eta^2}$$

$$T_{\text{des}}^4 = \frac{3}{2\pi\eta^{1/2}} \left( \frac{10\lambda}{3N_{\text{eff}}} \right)^{1/4} M_P$$

rednost za  $T_{\text{des}}$  pokazana na prethodnoj slici (14), za  $N_{\text{eff}} \sim 200$  (što potiče od usvojenog modela iz fizike elementarnih čestica, ovaj je za SU (5)).

Polazna pretpostavka za de Sitter-ov prostor bi potpuno imala smisla da je  $T = T_{\text{des}}$  skroz levo na grafiku na slici 14. Međutim većina eksitacija su reda talasne dužine  $\lambda^{-1}$ , i u ranim vremenima se u svakom slučaju ponašaju kao da su u svetu Minkovskog.

Kada  $T$  postaje približno  $\lambda$ , (talasne dužine presecaju de Sitter-ov horizont), ove termalne fluktuacije se ponašaju kao u prostoru non-Minkowske prirode. Pošto je izvršeno normiranje  $T = \lambda$  ovo se dešava na  $t = 0$ . Ako se uporede izrazi za  $\lambda$  i  $T_{\text{des}}$  ( $\lambda \sim \frac{\lambda\eta}{\eta}$ ,  $T_{\text{des}} \sim \frac{\lambda^{1/2}}{\eta^{1/2}}$ ) uzimajući u obzir i malu vrednost  $\lambda$ , jasno je da je  $T_{\text{des}} \gg \lambda$ . To da- lje znači da je vreme koje prodje pre nego što se uspostavi ova te- mperatura mnogo veće od vremenske konstante  $\lambda^{-1}$ .

Već je rečeno da za  $T < T_c$  skalarno polje se "smesti" u jednom od manjih regiona, pri  $\phi = \pm \phi_c$ . Očekuje se da je veličina ove oblasti reda  $T^{-1}$  - što je i red "smearing" dužine na slici 14. Znači da

kada  $T$  dostigne vrednost  $T_c$ ,  $\hat{\phi}_e^{\text{rms}}$  bi trebala biti reda  $\phi_c$ . Međutim, slika 14, koja je rezultat numeričkih proračuna, pokazuje da je stvarno ponašanje  $\hat{\phi}_e^{\text{rms}}$  je drugačije od ovog očekivanog  $\hat{\phi}_e^{\text{rms}}$  po slici nastavlja da opada još dugo pošto je  $T$  dostigla kritičnu vrednost, do vrednosti koje su mnogo redova veličine ispod  $\phi_c$ .

Srećom, postoji objašnjenje. Kada je temperatura  $T \approx T_c$ , fluktuacije će stvarno  $\hat{\phi}_e^{\text{rms}}$  odvesti do vrednosti  $\phi_c$ , međutim, kada ove fluktuacije predstavimo preko Fourierovog reda, može se videti da su u tim komponentama dominantne talasne dužine srazmerne  $T^{-1}$  i za njih važi

$$k_{ph}^2 = e^{-2\chi t} k^2 \sim T^2 \sim \frac{4\mu}{\lambda} \quad (5.11)$$

(za malo  $\lambda$  to je puno veća veličina od  $\mu$ ). To znači da za ove modore uopšte nije bitno što funkcija potencijalne energije nije stabilna; pod ovim uslovima oni se ponašaju kao modovi slobodnog polja bez mase, tj. nastavljaju da evoluiraju još neko vreme.

Ovi argumenti su važeći samo u slučaju da je  $\lambda \ll 1$ ; u suprotnom ovo ne bi važilo.

Slika 14 daje još podataka koje treba naglasiti (i/ili objasniti). Vidi se da  $\hat{\phi}_e^{\text{rms}}$  daje dve prave linije (u logaritamskoj skali) za rana i kasna vremena, koje su povezane jednim "krivim" delom koji je interpoliran izmedju dve asimptote.

U par koraka će se dati način izvodjenja ovih asimptota.

Polazi se od jednačine (5.5) i koriste se asimptotski izrazi Hankel-ovih funkcija, kao i aproksinacija  $\tilde{z} \sim e^{\chi t}$  (veliko  $\tilde{z}$  za mala vremena), pa se dobija:

$$\langle \phi_e^2 \rangle = \frac{e^{-2\chi t}}{4\pi^2} \int_0^\infty k^2 dk e^{-k^2 t^2} (k^2 + \gamma^2)^{-1/2} \coth \frac{\sqrt{k^2 + \gamma^2} t}{2T_0} [1 + O(\frac{\chi}{(k^2 + \gamma^2)^{1/2}} e^{\chi t})] \quad (5.12)$$

Stavlja se dalje da je

$$\gamma = \frac{2K}{T_0} \Rightarrow k = \frac{\gamma T_0}{2} \quad (\gamma^2 = \frac{T_0^2}{4})$$

pa se dobija

$$\langle \phi_e^2 \rangle \sim \frac{e^{-2\chi t} T_0^2}{16\pi^2} \int_0^\infty \frac{dy y^2}{(y^2 + \gamma^2)^{1/2}} e^{-(y T_0)^2/4} \coth \left[ \frac{1}{4} (y^2 + \gamma^2)^{1/2} \right]$$

što se može napisati na sledeći način:

$$\hat{\phi}_e^{\text{rms}} \sim T_0 e^{-\chi t} F(\gamma, T_0) \quad (5.13a)$$

$$F^2(\gamma, T_0) = \frac{1}{16\pi^2} \int_0^\infty dy \frac{y^2}{(y^2 + \gamma^2)^{1/2}} e^{-(y T_0)^2/4} \coth \left( \frac{1}{4} \sqrt{y^2 + \gamma^2} \right) \quad (5.13b)$$

Za velika vremena može se pokazati da se dobija

$$\langle \hat{\phi}_e^2 \rangle \sim \frac{e^{(2p-3)xt}}{8\pi^3} 2^{2p} \Gamma^2(p) x^{2p-1} \int_0^\infty \frac{k^2 dk e^{-k^2 t^2}}{(k^2 + x^2)^p} \coth \left[ \frac{(k^2 + x^2)^{1/2}}{2T_0} \right] \left[ 1 + O\left(\frac{x^2 + k^2}{x^2} e^{-2xt}\right) \right] \quad (5.14)$$

ako se uvede  $\gamma = \frac{k}{x}$  ( $\Rightarrow k = \gamma x$ ) dobije se:

$$\langle \hat{\phi}_e^2 \rangle \sim \frac{2^{2p-3} x^2}{\pi^3} x^{2p-3} \Gamma^2(p) e^{(2p-3)xt} \int_0^\infty y^2 dy \frac{e^{-(y^2 + x^2)/2}}{\gamma^{2p} (y^2 + 1)^p} \coth \left[ \frac{\gamma(1+y^2)^{1/2}}{2T_0} \right]$$

tj.

$$\hat{\phi}_e^{rms}(t) = (\langle \hat{\phi}_e^2 \rangle)^{1/2} \sim x \left( \frac{\gamma}{T_0} e^{xt} \right)^{p-3/2} \tilde{F}(\lambda, \eta, T_0, t) \quad (5.15a)$$

$$\tilde{F}^2(\lambda, \eta, T_0, t) = \frac{\Gamma^2(p)}{\pi^3} \left( \frac{4}{\pi} \right)^{2p-3} \int_0^\infty dy y^2 \frac{e^{-\lambda(t+iy)^2/4}}{(y^2 + 1)^p} \coth \left[ 1/4 \sqrt{\pi(1+y^2)} \right] \quad (5.15b)$$

pri čemu je

$$p = \frac{1}{2} (9 + 4\eta)^{1/2}$$

Integral u (5.15b) ima glavni doprinos za  $y$  reda 1. Tada sledi da su dominantne vrednosti  $k$  reda veličine  $\gamma \sim \frac{T_0}{2} \sqrt{\pi}$ , što znači da su i odgovarajuće talasne dužine ( $\frac{1}{k}$ ) duže od termalnih za faktor  $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$  tj.  $10^6$  (u ovom modelu). Zbog toga te dominantne talasne dužine presecaju horizont de Sitter-a za  $T \approx \lambda/\sqrt{\pi}$ . Kako je ova temperatura viša od  $T_{des}$ , gde se očekuje početak de Sitter-ove faze, očito je da polazna pretpostavka o prostoru de Sitter za sva vremena može imati posledice za ponašanje  $\hat{\phi}_e^{rms}$  za velika vremena.

Dalje će se izvesti izraz za  $\tilde{F}(\lambda, \eta, T_0, t)$  kada  $\lambda \rightarrow 0$ . Koristiće se sledeće asimptotske aproksimacije:

$$e^{-\lambda(t+iy)^2/4} \sim 1$$

$$\coth \left[ 1/4 \sqrt{\pi(1+y^2)} \right]^{1/2} \sim \frac{4}{[\lambda(1+y^2)]^{1/2}}$$

i sledeći integral

$$\int_0^\infty dx x^{\mu-1} (1+x^2)^{-v-1} = \frac{\Gamma(\mu/2) \Gamma(1-v-\mu/2)}{2 \Gamma(1-v)}$$

pa se dobija

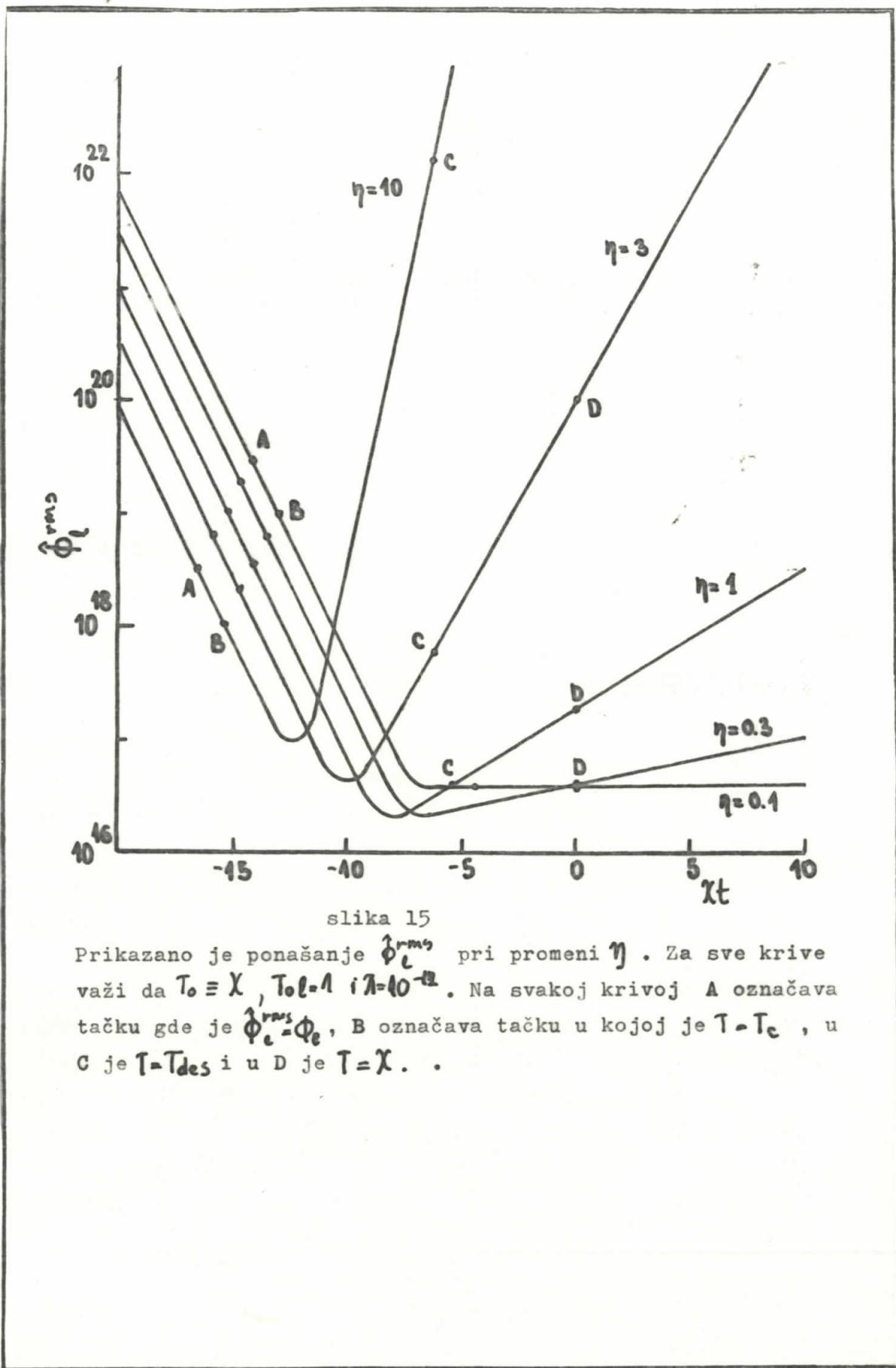
$$\tilde{F}^2 \sim \frac{\Gamma^2(p)}{\pi^3} \left( \frac{4}{\pi} \right)^{2p-2} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(p)}{4(p-1) \Gamma(p+1/2)}$$

tj.

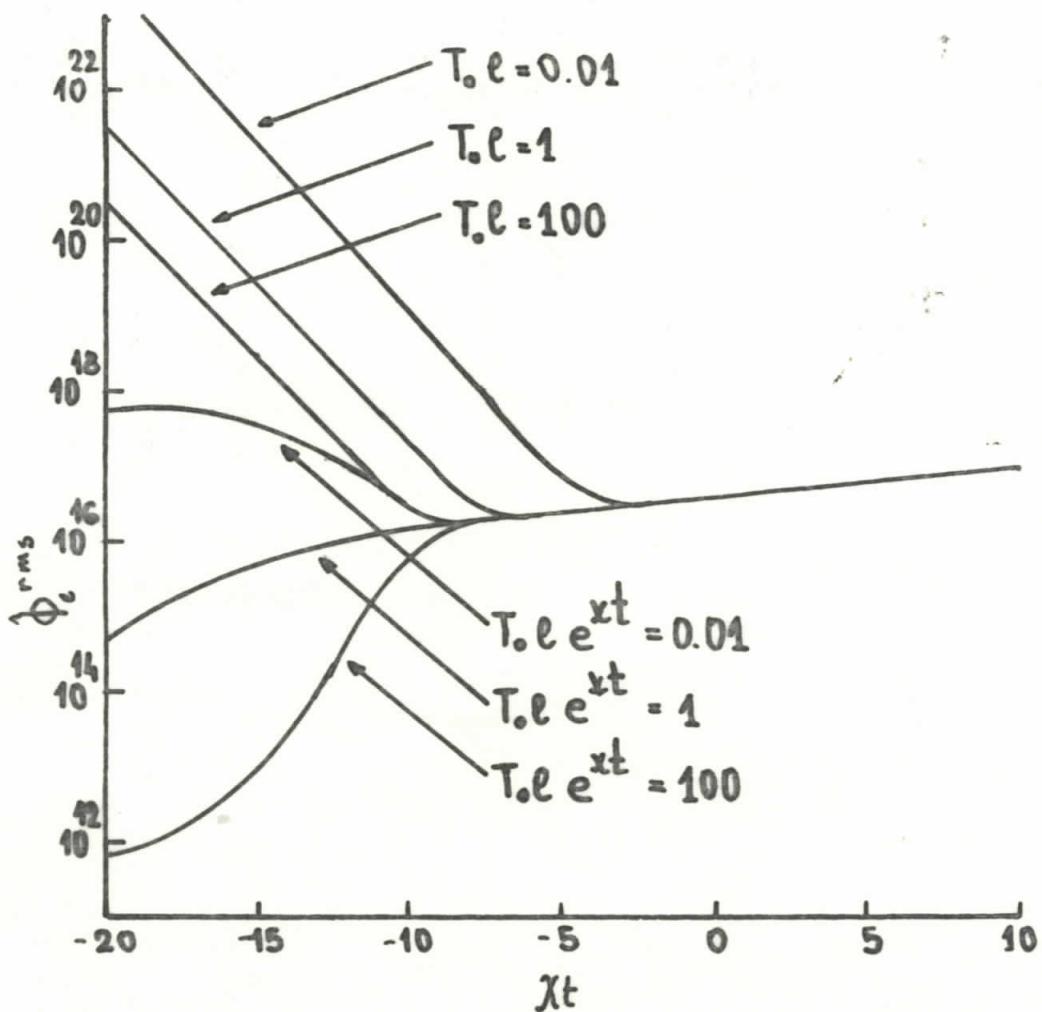
$$\tilde{F}^2(\lambda, \eta, T_0, t) \sim \frac{\pi^{5/2} \Gamma^3(p)}{\sqrt{\pi} (p-1) \Gamma(p+1/2)} \left( \frac{4}{\pi} \right)^{2p-3} \quad (5.16)$$

Može se zaključiti da za veliko  $t$  i malo  $\lambda$ ,  $\hat{\phi}_e^{rms}$  ne zavisi od  $T_0, t \rightarrow \hat{\phi}$  je glatko za 1 reda  $T_0^{-1}$ , te "smearing" dužina nije bitna.

Na slikama 15, 16 i 17 je prikazano (i objašnjeno) kako se menja  $\hat{\phi}_e^{rms}$  pri variranju parametara.



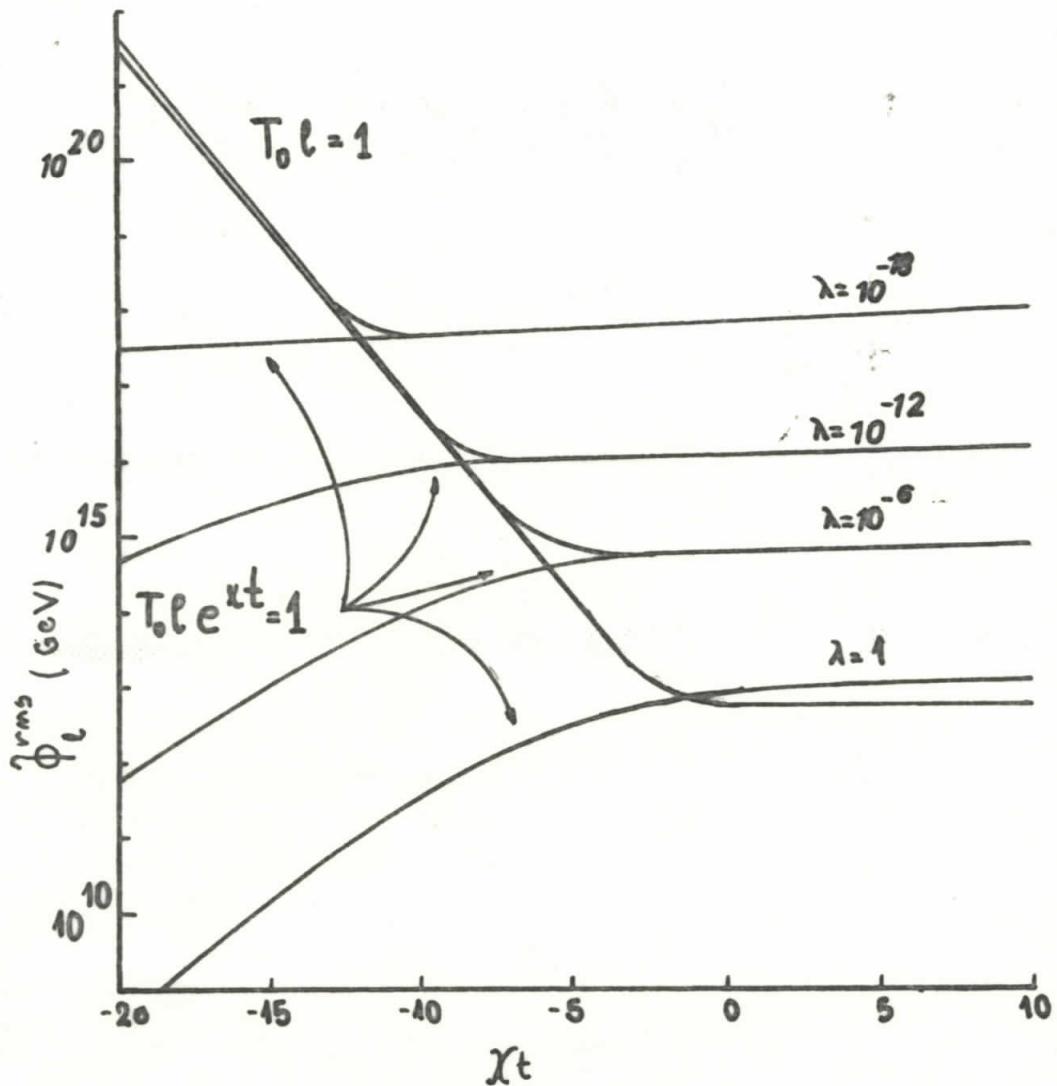
slika 16



Na ovoj slici je prikazan efekat variranja veličine  $T_0 l$ . Za sve krive,  $\eta$  ima vrednost 0.2,  $T_0 \equiv \chi$  i  $\lambda = 10^{-12}$ . Gornje tri krive se odnose na tri različite vrednosti veličine  $T_0 l$ , koja odgovara "razmazivanju" fiksne koordinate talasne dužine. Ovo "razmazivanje" je važno za praćenje evolucije ekspandi- rajućeg regiona svemira.

Donje tri krive su za tri fiksne vrednosti fizičkih dužina razmazivanja  $T_0 l e^{xt}$ . Vidi se da im je ponašanje za rana vre- mena veoma različito, dok je vrlo slično (u stvari isto) za velika.

slika 17



Ova slika ilustruje ponašanje veličine  $\phi_{\ell}^{rms}$  pri variranju  $\lambda$ . Za sve krive je  $\eta = 0.2$  i  $T_0 \equiv \lambda$ .

Na kraju ovog odeljka, reći će se nešto više o odnosu parametara  $\lambda$  i  $\eta$ , koji bi mogao dovesti do uspešnog objašnjenja inflacije svemira. Kreće se od proračuna za potrebnu "jačinu" inflacije.

Entropija današnjeg svemira je otprilike ( $k=1!$ )

$$S_0 \approx 3000 \text{ cm}^{-3} \quad (5.17)$$

a odredjeno je pre svega fonom zračenja fotona i neutrina.

Ako se uzme da je radijus observabilnog svemira  $R_0 \sim 10^{10}$  svetlosnih godina, dobije se

$$R_0^3 S_0 \sim 3 \times 10^{87} \quad (5.18)$$

Ova veličina je očuvana u postinflacionoj eri, te se nameće zaključak da ova vrednost datira još perioda ponovnog zagrevanja koji je usledio posle inflacije ( poglavljje 2 ).

Pretpostavlja se da je ovo ponovno zagrevanje bilo brzo u poređenju sa  $\lambda^{-1}$ , pa se temperatura ponovnog zagrevanja može odrediti iz konzervacije energije ( $P_{th} = P_0$ ).

Upotrebivši već napisane izraze za ove veličine, može se dobiti

$$T_r^4 \equiv \frac{135 \lambda}{8\pi^4 \eta N_{eff}} N_p^2 \quad (5.19)$$

Da bi se odredila entropija, polazi se od izraza za energiju bozon-skog gasa /12; M3/

$$\Omega = \Theta \sum_n \ln (1 - e^{-E_n/\Theta})$$

pa se za bozone dobija

$$S_r = \frac{S}{V} = \frac{2\pi^2}{4\pi} T_r^3 N_{eff} \quad (5.20)$$

tj. kad se uvrsti izraz za  $T_r$ :

$$S_r = \left( \frac{3}{\pi^4 160} \frac{\pi^2}{\eta^6} N_{eff} \right)^{1/4} N_p^3 \quad (5.21)$$

Dalje je potrebno odmah posle ponovnog zagrevanja odrediti radijus regiona koji će evoluirati u naš današnji svemir;

$$R_r^3 S_r = R_0^3 S_0 \quad (5.22)$$

tj.

$$R_r^3 \times \left[ \frac{3}{160} \frac{\pi^2}{\eta^6} N_{eff} \right]^{1/4} N_p^3 \sim 3 \times 10^{87}$$

odavde se dobija

$$R_r \sim 4.95 \times 10^{29} \frac{\eta^{1/2}}{N_p^{1/4} N_{eff}^{1/2}}$$

Pretpostavlja se da su u trenutku počinjanja inflacije homogeni regioni bili reda veličine  $\chi^{-1}$  (Hubble-ovo rastojanje). To znači da je inflacija morala trajati dovoljno dugo da bi se taj region razvio do oblasti poluprečnika  $R_r$ . Vreme trajanja inflatorne ere mora zadovoljavati sledeću relaciju

$$e^{\chi \Delta t} \geq \chi R_r$$

gde je  $\Delta t$  vreme trajanja inflacije.  
Prvo se procenjuje  $\chi R_r$ : ( $\chi = \frac{1}{\eta} \left(\frac{3\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} M_p$ )

$$\begin{aligned} \chi R_r &= 4.95 \times 10^{29} \frac{\eta^{1/2}}{M_p \pi^{1/4} N_{eff}^{1/2}} \times \frac{1}{\eta} \left(\frac{3\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} M_p = \\ &= 3.42 \times 10^{29} \frac{\lambda^{1/4}}{\eta^{1/2} N_{eff}^{1/2}} \end{aligned}$$

dalje

$$\chi \Delta t > \ln \chi R_r \Rightarrow$$

$$\chi \Delta t > \ln 3.42 \times 10^{29} \frac{\lambda^{1/4}}{\eta^{1/2} N_{eff}^{1/2}}$$

$$\chi \Delta t \geq \frac{1}{4} \ln \lambda - \frac{1}{12} \ln N_{eff} - \frac{1}{2} \ln \eta + 68 \quad (5.23)$$

Ovo treba uporediti sa trajanjem inflacije u ovom modelu. Koriste se izrazi

$$T_{des} = \frac{3}{2\pi\eta^{1/2}} \left(\frac{10\lambda}{3N_{eff}}\right)^{1/4} M_p$$

i

$$t = T_0 e^{-\chi t}$$

kao i to da inflacija počinje za  $T=T_{des}$ ; dobija se

$$T_0 e^{-\chi t_i} = \frac{3}{2\pi\eta^{1/2}} \left(\frac{10\lambda}{3N_{eff}}\right)^{1/4} M_p$$

a odavde je lako izraziti  $\chi t_i$ :

$$\chi t_i \sim -\frac{1}{4} \lambda + \frac{1}{2} \ln \eta + \frac{1}{4} \ln N_{eff} - \ln \frac{M_p}{T_0} - 0.44 \quad (5.24)$$

kraj inflacije se očekuje otprilike za  $\hat{\phi}_e^{rms} \sim \phi_c$ .

Uzima se da je ovaj uslov ispunjen za neko  $t_f$ . Kreće se od izraza za  $\hat{\phi}_e^{rms}$  za kasna vremena

$$\hat{\phi}_e^{rms} \sim \chi \left( \frac{\chi}{T_0} e^{\chi t} \right)^{p-1/2} F(\lambda, \eta, T_0)$$

$$\phi_e = \left( \frac{3}{2\pi\eta} \right)^{1/2} M_p$$

izjednače se ove dve veličine i dobije se:

$$\begin{aligned} \chi \left( \frac{\chi}{T_0} e^{\chi t_f} \right)^{p-1/2} \left[ \frac{\Gamma(p) \pi^{-5/2}}{(p-1) \Gamma(p+1)} \right]^{1/2} \frac{1}{\eta^{1/4}} \left( \frac{4}{\pi} \right)^{p-3/2} = \\ = \left( \frac{3}{2\pi\eta} \right)^{1/2} M_p \end{aligned}$$

posle kraćih sredjivanja dobija se:

$$\frac{\chi}{T_0} e^{\chi t_f} = \eta^{\frac{1}{2p-3}} \Lambda^{-\frac{1}{2} \frac{1}{2p-3}} \sqrt{\pi}/4 \left[ \frac{\Gamma^3(p) \pi^{-\frac{1}{2}}}{(p-1) \Gamma(p+1/2)} \right]^{-\frac{1}{2p-3}}$$

i konačno

$$\chi t_f \sim -\ln\left(\frac{\Lambda_{\text{ef}}}{T_0}\right) + \ln\eta + \frac{1}{2p-3} \left[ \ln\eta - \frac{1}{2} \ln\Lambda + \ln \frac{\Gamma^3(p) \pi^{-1/2}}{(p-1) \Gamma(p+1/2)} \right] - 1 \quad (5.25)$$

oduzimanjem vel. (5.24) i (5.25) dobija se:

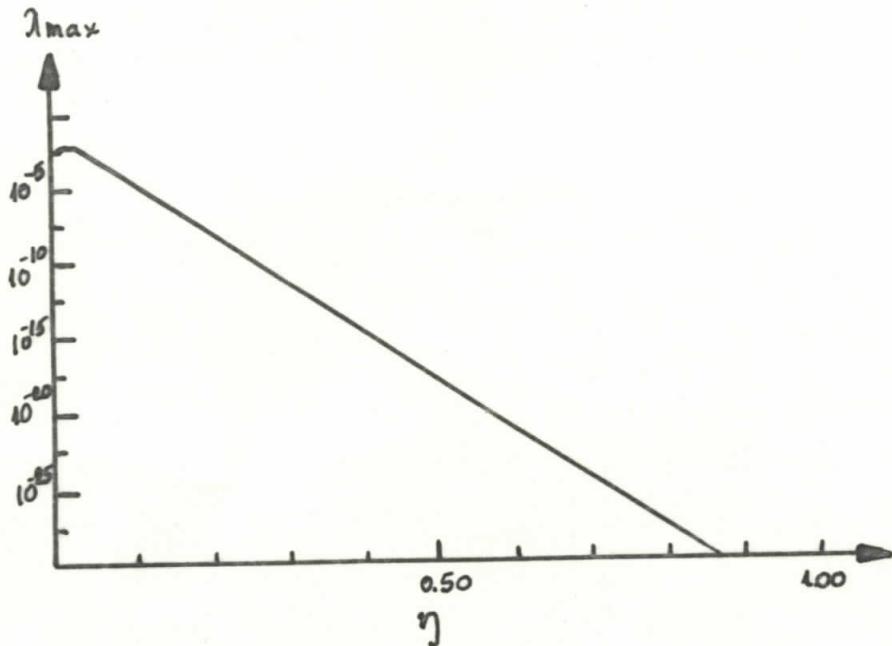
$$\chi(t_f - t_i) \sim -1.44 - 1/4 \text{Neff} + \frac{1}{2p-3} \left[ \frac{1}{2} \left( p - \frac{6}{2} \right) \ln\Lambda + \left( p - \frac{1}{2} \right) \ln\eta - \ln \left( \frac{\pi^{5/2} \Gamma^3(p)}{(p-1) \Gamma(p+1/2)} \right) \right] \quad (5.26)$$

Uporedjujemo ovaj izraz sa izrazom 5.23 i posle kraćeg sredjivanja, dobija se:

$$\Lambda \leq \eta^{4/(p-1)} \left[ \frac{\pi^{5/2} (p-1) \Gamma(p+1/2)}{\Gamma^3(p)} \right]^2 \text{Neff}^{-\frac{2p-3}{3}} e^{-138(2p-3)}$$

grafički, ova zavisnost je prikazana na slici 18.

slika 18



Na ovoj slici je prikazana maksimalna prihvatljiva vrednost  $\Lambda_{\text{max}}$  kao funkcija odnosa  $\eta^{4/(p-1)}$ . Ako  $\Lambda$  premaši ovu vrednost, ne može se govoriti o nekom proizvoljnom regionu u ranom svemiru koji se podvrgao inflaciji, dostigavši potom dimenzije današnjeg observabilnog svemira.

Na kraju ovog rada, nešto će biti rečeno i o kosmološkim fluktuacijama gustine, preko kojih se objašnjava nastanak galaksija. Iako su kvantni efekti, znači i ove kvantne fluktuacije, od značaja samo na mikroskopskim razmerama, inflacioni model po svojoj ideji, ove mikroveličine ranog svemira ekspanzijom dovodi do observabilnih veličina u današnjem svemiru.

U ovom radu problem kvantnih fluktuacija se tretira sa stanovišta egzaktno rešivog modela, usvojenog u prethodnom poglavljiju.

Polazi se od jednačine kretanja:

$$\ddot{\phi} + 3\chi \dot{\phi} - e^{-2xt} \nabla^2 \phi = -\frac{\partial V}{\partial \phi}$$

i potraži se po prostoru homogeno rešenje, takvo da je  $\nabla \phi_0(xt) = 0$ , što znači da je  $\phi_0 = \phi_0(t)$ . Jednačina kretanja se svodi na

$$\ddot{\phi}_0 + 3\chi \dot{\phi}_0 = -\frac{\partial V}{\partial \phi}(\phi_0) \quad (5.27)$$

Sad se polje razlaže na zbir klasičnog polja  $\phi_0$  i kvantne popravke  $\delta\phi(x,t)$ :

$$\phi(x,t) = \phi_0(t) + \delta\phi(x,t) \quad (5.28)$$

Smatra se da je  $\delta\phi \ll \phi_0$  i onda se jednačina linearizuje za  $\delta\phi$ :

$$(\phi_0 + \delta\phi) + 3\chi(\overline{\phi_0 + \delta\phi}) - e^{-2xt} \nabla^2(\phi_0 + \delta\phi) = -\frac{\partial V}{\partial \phi}(\phi_0 + \delta\phi)$$

Ukoliko se desna strana razvije u Taylor-ov red oko  $\phi_0$  dobija se:

$$\delta\ddot{\phi} + 3\chi\delta\dot{\phi} - e^{-2xt} \nabla^2 \delta\phi = -\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}(\phi_0)\delta\phi \quad (5.29)$$

Za potencijal oblika (4.1) može se naći:

$$\frac{\partial V}{\partial \phi} = -\mu^2 \phi + \lambda \phi^3 \quad \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = -2\mu^2 + 3\lambda \phi^2 \quad (5.30)$$

Član  $\lambda \phi^3$  u jednačini kretanja se može zanemariti za rana vremena, kada je  $\phi \ll \phi_c$ , pa se dobija:

$$\ddot{\phi} + 3\chi \dot{\phi}_0 = -\mu^2 \phi \quad (5.31)$$

$$\ddot{\phi} + 3\chi \delta\phi = \mu^2 \delta\phi + e^{-2xt} \nabla^2 \delta\phi$$

Već je pokazano da za dovoljno malo postoji dug vremenski interval

$\Delta t$  za koji važe gornje jednačine, znači da ima smisla posmatrati ponašanje rešenja za velika vremena.

Ovaj period se naziva periodom srednjeg kotrljanja (middle rollover period). On nastupa dovoljno rano tako da važi da je  $\phi_0 \ll \phi_c$ , ali dovoljno kasno da bi gornja rešenja mogla biti aproksimirana svojim asymptotskim oblikom.

Asimptotska rešenja gornjih jednačina su oblika

$$\phi_0(t) \sim \phi_\infty \exp[\frac{1}{2}(2p-3)\chi t] \quad (5.32)$$

$$\delta\phi(\vec{x}, t) \sim f(\alpha) \exp[1/2(2p-3)xt] \quad (5.33)$$

Naglašava se (još jednom) da je cilj inflacionih scenario proužrokovanje evolucija nekih vrlo malih regiona pre-inflacionog svemira u današnji observabilni svemir. Može se uzeti da je radius ovog regiona  $a$ , pa zatim izabrati neko  $k$ , tako da je  $k \ll \frac{1}{a}$ . Dalje se razmatra Fourier-ov razvoj operatora "smeard" polja, koji je dat jednačinom (5.1). Potrebno je izabrati dovoljno malo  $\ell$  da bi se fluktuacije interesantnih razmara mogle uočiti.

Neka  $\Phi_0$  označava sumu svih članova u Fourier-ovom razvoju sa  $|k| > \frac{1}{a}$ , čime se zavisnost  $\Phi_0$  od  $x$  može ignorisati zbog uniformnosti u celom observabilnom svemiru.

Prema već sprovedenoj diskusiji, svaki mod skalarnog polja se može tretirati klasično, pod uslovom da je efektivna talasna dužina dugačka u poređenju sa Hubble-ovom dužinom

$$\Lambda_{eff} = \frac{2\pi}{(k^2 + \omega^2)^{1/2}} e^{xt} = 2\pi e^{xt}/(\kappa^2 + \gamma/\Lambda T_0^2)^{1/2}$$

Ako važi ovaj uslov za talasni broj  $k$ ,  $\phi_0(t)$  se može smatrati klasičnom promenljivom koja se pokorava klasičnim zakonima kretanja. Za velika vremena, ove klasične trajektorije se mogu parametrizovati jednim parametrom  $\Phi_\alpha$  (iz jednačine (5.32)). Tačna vrednost ovog parametra se ne može odrediti, nego se on opisuje klasičnom raspodelom verovatnoće. Ovaj parametar određuje koliko će inflacija pretrpeti region pre nego što proces ponovnog zagrevanja okonča inflacionu eru.

Na početku ovog poglavlja je diskutovano asimptotsko poнашење  $\hat{\phi}_\ell^{rms} = \langle \hat{\phi}_\ell^2 \rangle^{1/2}$  i pokazano je da je ono određeno sa  $\frac{1}{\ell} \cdot T^{-1}$ . Može se zaključiti da dok se  $k$  bira tako da  $k > \sqrt{\Lambda T_0}$  i  $\ell$  reda  $T_0$ , za velika vremena važi

$$\langle \hat{\phi}_\ell^2 \rangle \approx \langle \phi_\alpha^2 \rangle e^{(2p-3)xt} \sim \langle \phi_0(t)^2 \rangle \quad (5.34)$$

Vidi se da je kriterijum za dovoljnu inflaciju konzistentan sa interpretacijom za  $\Phi_0$ .

Jednačina (5.34) važi za prilično širok opseg vrednosti veličine  $\ell$ . Donja granica je određena zahtevom  $\ell < 1/\sqrt{\Lambda T_0}$  (zbog "smearing procesa), a gornja - zahtevom da  $\ell$  bude dovoljno veliko, tako da rezidualne kvantne fluktuacije malih razmara, čiji je doprinos veličini  $\langle \hat{\phi}_\ell^2 \rangle$  reda veličine  $\ell^{-2} e^{-2xt} \ell^2$ , ne utiču na glavni član tog izraza.

Pisanjem jednačine (5.28) na sledeći način:

$$\phi(\vec{x}, t) = \phi_0 + \delta\phi(\vec{x}, t) \approx \phi_0(x) - \phi_0 \delta T(\vec{x})$$

$$\phi(\vec{x}, t) \approx \phi_0(t) [1 - \delta\tilde{\tau}(\vec{x})] \quad (5.35)$$

definiše se nova veličina - asimptotsko vreme kašnjenja, koja je jednaka

$$\delta\tilde{\tau}(\vec{x}) = -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\delta\phi(\vec{x}, t)}{\phi_0(t)}$$

Uzeće se da su fluktacije gustine u najnižem redu teorije perturbacija odredjene sa  $\delta\tilde{\tau}(k)$ . Radi nalaženja kvantitativne mere perturbacija gustine, polazi se od toga da su oscilacije sa vremenski nezavisnim amplitudama njihov rezultat. Guth i Pi su pokazali da se fluktacije gustine mogu izračunati preko sledećeg izraza:

$$\frac{\delta\hat{S}_{rms}(\vec{k})}{S} = 2\sqrt{2}\lambda\delta\tilde{\tau}(k) \quad (5.36)$$

Potrebno je još odrediti i  $\delta\phi(\vec{x}, t)$ , koje je stohastička veličina. Opisane fluktacije takvih veličina se karakterišu sa

$$\Delta f(k) = \left[ \frac{k^3}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{ik\vec{x}} \langle f(\vec{x})f(0) \rangle \right]^{1/2} \quad (5.37)$$

Sada se može napraviti proračun.

Propagator za isto vreme je dat jednačinom (4.44). Zamenuvši taj izraz u prethodni (5.37), može se dobiti:

$$\begin{aligned} \Delta\phi(k, t) &= \left[ \frac{k^3}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{ik\vec{x}} \langle \phi(\vec{x}, t)\phi(0, t) \rangle \right]^{1/2} \\ \Delta\phi(k, t) &= \left[ \frac{k^3}{(2\pi)^3} \int d^3x e^{ik\vec{x}} \left[ \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3q e^{iq\vec{x}} |\Psi(q, t)|^2 \coth(\frac{1}{2}\theta\omega) \right]^{1/2} \right. \\ &\quad \left. = \left[ \frac{k^3}{(2\pi)^6} \int d^3q |\Psi(q, t)|^2 \coth \frac{\theta\omega}{2} \cdot (2\pi)^3 S(k+q) \right]^{1/2} \right]^{1/2} \\ \Delta\phi(k, t) &= \left[ \frac{k^3}{(2\pi)^3} |\Psi(k, t)|^2 \coth \frac{\theta\omega}{2} \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (5.38)$$

Zatim se potraži asimptotsko ponašanje za velika vremena

$$\Delta\phi(k, t) = \left\{ \frac{k^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} \frac{\pi}{X} e^{-\beta X t} (J_p^2 + M_p^2) \coth \frac{\theta\omega}{2} \right\}^{1/2} \quad t \sim \infty$$

$$\Delta\phi(k, t) \sim \frac{2^p \Gamma(p) k^{3/2}}{2^{5/2} \pi^2 X^{1/2}} \left[ \frac{X}{\Gamma(k^2 + p^2)} \right]^p \coth^{1/2} \left( \frac{1}{2} \theta\omega \right) e^{\frac{(2p-3)}{2} X t} \quad (5.39)$$

Pomoću ovog izraza i jednačine (5.56), nalazi se izraz za fluktaciju gustine

$$\frac{\delta\hat{S}_{rms}(\vec{k})}{S} = 2\sqrt{2} \frac{\Delta\phi(k, t)}{\phi_0(t)} = \frac{2^p \Gamma(p)}{(2p-3)\pi} \frac{2^{5/2}}{\phi_0 X^{1/2}} \left[ \frac{X}{\Gamma(k^2 + p^2)} \right]^p \frac{k^{7/2}}{2^{5/2}} \coth^{1/2} \left( \frac{1}{2} \theta\omega \right)$$

$$\frac{\delta\hat{S}_{rms}(\vec{k})}{S} = \frac{2^p \Gamma(p)}{(2p-3)\pi^2} \frac{k^{3/2}}{\phi_0 X^{1/2}} \left[ \frac{X}{\Gamma(k^2 + p^2)} \right]^p \coth^{1/2} \left( \frac{1}{2} \theta\omega \right) \quad (5.40)$$

Za svu vidljivu strukturu svemira se smatra da potiče od talasnih dužina kraćih od termalne ( $k \gg T_0$ ), a u tom slučaju gornji izraz postaje:

$$\frac{\delta\hat{S}_{rms}(\vec{k})}{S} = \frac{2^p \Gamma(p)}{(2p-3)\pi^2} \frac{k^{3/2}}{\phi_0 X^{1/2}} \left( \frac{X}{\omega} \right)^p \approx \frac{2^p \Gamma(p)}{(2p-3)\pi^2} \frac{X}{\phi_0} \left( \frac{X}{k} \right)^{\frac{(2p-3)}{2}} \quad (5.41)$$

Evidentno je da je poslednji izraz funkcija talasnog broja. Da bi se poslednji izraz uopšte mogao interpretirati, potrebno je ovaj talasni broj  $\vec{k}$  povezati sa fizičkom skalom dužine.

Ovaj faktor nastaje od Fourier - transforma po koordinati  $x$  koja je normirana tako da faktor skale ( ili faktor razmera ) u fazi de Sitter-a ima oblik  $e^{\frac{xt}{\lambda}}$ . Veza izmedju ove skale dužina i skale dužina današnjeg svemira zavisi svakako od toga "koliko" se inflacijski desilo, a ovo opet, zavisi od veličine  $\phi_2$ .

Da bi se ovo kvantitativno pokazalo, kreće se od jednačine ( 5.32 ), koja se napiše u nešto drugačijem obliku:

$$\phi_o(t') \sim \phi_c \exp [ \frac{1}{2}(2p-3)xt' ] \quad (5.42)$$

gde je

$$t' = t + \frac{2}{(2p-3)x} \ln (\phi_2/\phi_c) \quad (5.43)$$

Ovako napisana jednačina ( 5.32 ) nema proizvoljnih promenljivih, i može poslužiti kao polazna tačka u proračunu kasnije evolucije svemira kao funkcija  $t'$ . Stohastičnost ove relacije je prebačena na relaciju ( 5.43 ), koja odražava vezu izmedju vremena  $t$  kojim se opisuje era inflacije i vremena  $t'$  koje se koristi za opisivanje post - inflacione evolucije.

Da bi se definisala skala dužine koordinata u post - inflatornoj eri može se preći na novi koordinatni sistem  $(x', y')$ .

Metrika de Sitter-a je oblika :

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2xt} dx^2 = -dt'^2 + e^{2x't'} dx'^2$$

Ako se veza izmedju  $x'$  i  $x$  definiše na sledeći način :

$$\vec{x}' = \exp \left[ \frac{2}{2p-3} \ln (\phi_c/\phi_2) \right] \vec{x}$$

onda se dobija

$$\vec{x}' = \exp \left[ -\frac{2}{2p-3} \ln (\phi_c/\phi_2) \right] \vec{x}$$

i jednačina ( 5.41 ) u tom slučaju može biti napisana u obliku :

$$\frac{\Delta P_{\text{nucl}}(\vec{x}')}{P} = \frac{2 \rho r(p)}{(2p-3)\pi^2} \left( \frac{x}{\phi_c} \right) \left( \frac{x}{\phi_2} \right)^{(4p-3)/2}$$

Znači, kada se odnos  $\Delta P/P$  izrazi preko promenljivih koje imaju određeno značenje u post - inflacionoj eri ne, zavis od stohastičkih promenljivih.

## ZAKLJUČAK 1

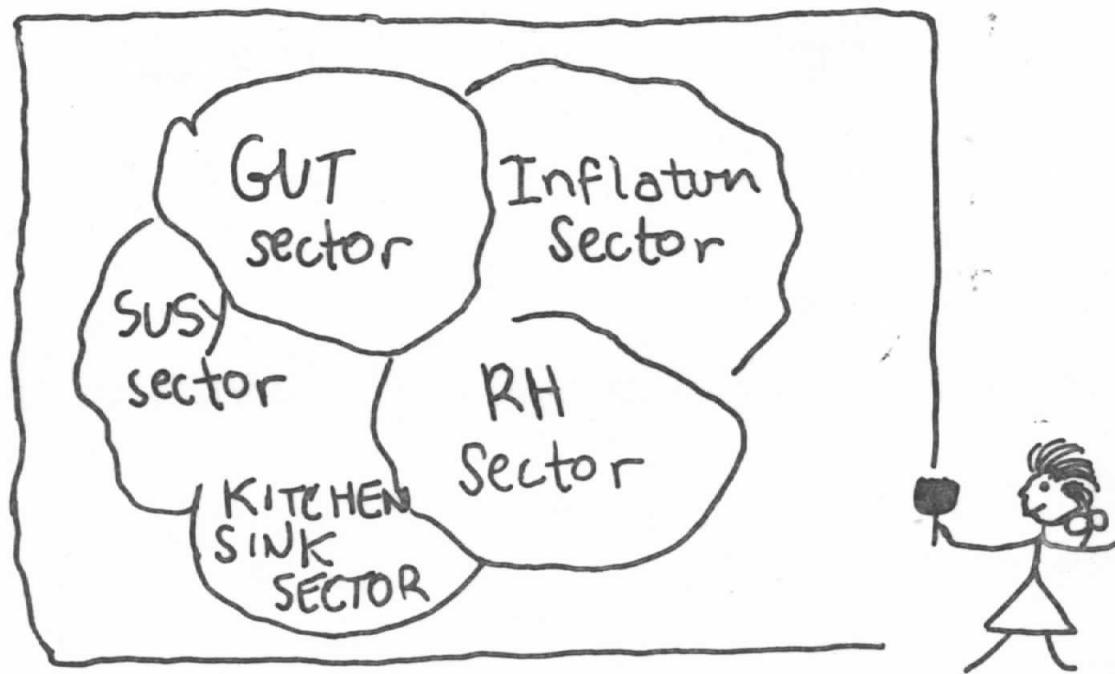
U ovom radu je obradjivan jedan model skalarnog polja, koji baš nema mnogo veze sa realnošću. Ipak, iako ne preterano teški za izvodjenje, rezultati do kojih se došlo pri proučavanju ova kvog singletnog polja bi se mogli iskoristiti kao nulta aproksimacija za komplikovanije šeme u kojima bi se interakcije tretirale perturbativno.

Ideje u opisu skalarnog polja u ovom radu je bila da se skalarno polje za velika vremena može opisivati klasičnom raspodolom verovatnoće. Numerički proračuni su ubaćeni u rad da bi ilustrovali kako ova raspodela zavisi od parametara modela. Videlo se da se za pogodan izbor parametara vrlo lako može dobiti dovoljna inflacija. Rezultati dobijeni pri proračunu fluktuacija gustine su u saglasnosti sa rezultatima dobijenim ranije od drugih autora upotrebom aproksimativnih metoda.

Ipak ovaj model ostavlja dosta otvorenih pitanja; na primer pitanje de Sitter-ove evolucije za rana vremena, pitanje termalne raspodele početnog stanja ... Bilo bi vredno pokušati istražiti neke druge mogućnosti i svakako, pokušati ove proračune primeniti kao polaznu tačku u proračunima za neke realnije modele.

# ZAKLJUČAK 2

PART OF A UNIFIED MODEL  
WHICH PREDICTS SENSIBLE  
PARTICLE PHYSICS



JUST PUTTING A BOX AROUND IT DOES NOT  
MAKE IT A 'UNIFIED MODEL' !!

KRAJ

Dubravko Jain!

R E F E R E N C E

- B1 - A.V.Bisadze "Equations of Mathematikal Phusics"  
Mir Publishers Moskow (1980)
- & A.В. БИЦАДЗЕ "УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ"  
НАУКА, МОСКВА (1976)
- B2 - Н.Н. Боголюбов "КВАНТОВЫЕ ПОЛЯ"  
Д.В. Ширков НАУКА, МОСКВА (1980)
- E1 - J.Ellis "The Inflationary Universe"  
Europhysics news 16,6 (1985)
- G1 - A.H.Guth S.Y.Pi "Quantum Mechanics od the Scalar  
Field in the New Inflationary Universe"  
Phys.Rew. D8 1899, (1985)
- G2 - A.H.Guth P.J.Steinhardt "The Inflatory Universe"  
Sci.Am., 116 (1984)
- H1 - & S.W.Hawking G.F.R.Ellis "The Large Scale Strukture of Space-time"  
Combridge University Press (1973)
- С. Хокинг  
Дж. Эллис "Крупномасштабная структура  
пространства-времени"  
Мир, Москва (1977)
- J1 - L.Jánossy "Theory of Relativity Based on  
Psical Reality"  
Akadémiai kiadó, Budapest. (1971)
- L1 - A.D.Linde "The Inflatory Universe"  
Rep.Prog.Phys.Vol. 47. 925 (1984)
- L2 - A.D.Linde "Eternal Chaotic Inflation"  
JCTP, JC/86/74 (1986)

- L3 - A.D.Linde "The New Inflationary Universe Scenario"  
Lebedev Physical Institute (1984)
- L4 - A.D.Linde "The Universe: inflation out of chaos"  
New.Sci., 14 (1985)
- M1 - K.Maeda "A History of The Universe in a Superstring Model"  
JCTP, IC/86/1891 (1986)
- M2 - D.S.Mitrinović "Uvod u specijalne funkcije"  
I.P.Gradjevinska knjiga, Beograd (1975)
- M3 - DJ.Mušicki "Uvod u teorijsku fiziku I - Teorijska mehanika"  
ICS, Beograd (1975)
- M4 - DJ.Mušicki "Uvod u teorijsku fiziku II - Statistička fizika"  
ICS Beograd (1975)
- M5 - DJ.Mušicki "Uvod u teorijsku fiziku II - Elektrodinamika"  
Zavod za izdavanje udžbenika SRS,  
Beograd (1965)
- O1 - K.A.Olive "The Cosmology/Particle Physics Interface"  
Fermilab - PUB - 85/110-A (1985)
- P1 - S.Y.Pi "Progress in the Inflationary Universe"  
Comments Nuc. Part. Phys. Vol.  
14, 273 (1985)
- P2 - J.R.Primack "Dark Matter, Galaxies and Large Scale  
Strukture in the Universe"  
JCTP, SMR 212-1 (1987)
- S1 - D.N.Schramm "Constraints on Particle Physics from Cosmology"  
J.C.Charlton Enrico Fermi Inst.Preprint  
No. 85-21 (1985)

S2 - &H.L.Shipman "Black Holes, Quasars and the Universe"  
Houghton Mifflin Co. (1976)

H.Šipmen "Crne jame, kvazari i vasiona"  
Srpska književna zadruga,  
Beograd (1980)

T1 - G.E.Tauber "Einsteinova opća teorija relativnosti"  
Globus, Zagreb (1982)

&G.E.Tauber "Albert Einstein's Theory of General Relativity"  
Crown Publishers, Inc (1979)

T2 - B.S.Tošić "Statistička fizika"  
Institut za fiziku, Novi Sad (1978)

T3 - M.S.Turner "The Inflationary Paradigm"  
Enrico Fermi Ins.preprint  
No. 85-69 (1985)

T4 - M.S.Turner "A.Cosmologist's Tour Through the New  
Particle Zoo"  
Fermilab-conf-86/18-A (1986)

T5 - M.S.Turner "Inflation Circa 1983"  
Enrico Fermi Ins.Preprint  
No.83-37 (1983)

V1 - E.T.Vishniak "Cosmic Strings and Inflation"  
CERN - TH.4554/86  
UMN - TH.586/86 (1980)

W1 - S.Vajnberg "Prva tri minuta"  
Vuk Karadžić, Beograd (1980)

&S.Weinberg "The First Three Minutes"  
A Modern View od the Origin of  
the Universe (1977)

W2 - S. Weinberg

"Gauge and Global Symmetries at High Temperature"  
Phys. Rev. D9, 3357 (1974)

NAPOMENA:

REFERENCE sa oznakom & su originalna izdanja.